KOMPLEKS DÜZLEMİN ÇEŞİTLİ BÖLGELERİNDE p-BIEBERBACH POLİNOMLARININ YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

N. PELİN ÖZKARTEPE

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ DANIŞMANI
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

MERSİN
HAZİRAN-2011

N.Pelin ÖZKARTEPE tarafından Prof.Dr.Fahreddin ABDULLAYEV danışmanlığında hazırlanan " Kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde p-Bieberbach polinomlarının yakınsaklığı üzerine " başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof.Dr.Fahreddin ABDULLAYEV

Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Doç.Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 08../09./2011.tarih ve 2011.19..../.344... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. A. Murat GİZİR
Enstitü Müdürü

T.C.
MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ
1992

KOMPLEKS DÜZLEMİN ÇEŞİTLİ BÖLGELERİNDE p-BIEBERBACH POLİNOMLARININ YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

N. Pelin ÖZKARTEPE

ÖZ

$\mathbb{C}$-kompleks düzlem; $G \subset \mathbb{C}$, $L := \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bölge ve $0 \in G$ olsun. $w = \varphi(z)$ ile G bölgesini $D(0, r_0) := \{w : |w| < r_0, r_0 > 0\}$ dairesine resmeden ve $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ koşullarını sağlayan konform dönüşüm gösterilsin.

$A_p^1(G)$ $(p > 0)$ ile G bölgesinde tanımlı, $f(0) = 0$ ve

$$\| f \|_{A_p^1(G)}^p := \| f' \|_{A_p(G)}^p := \iint |f'(z)|^p \, d\sigma_z < \infty$$

koşullarını sağlayan tüm analitik fonksiyonlar sınıfı gösterilsin. Burada σ_z ile G üzerinde tanımlı iki boyutlu Lebesque ölçüsü gösterilmektedir.

$\wp_n$ ile derecesi n'yi aşmayan ve $P_n(0) = 0$, $P_n'(0) = 1$ koşullarını sağlayan tüm $P_n(z)$ polinomlar kümesi işaret edilsin.

Aşağıdaki extremal problemi göz önüne alalım;

$$\iint_G |\varphi'(z) - P_n'(z)|^p \, d\sigma_z \to \min, \; p > 0.$$

Gösterilebilir ki, her $p > 0$ için bu extremal problemin çözümü vardır ve $p > 1$ için bu çözüm tektir. Bu tek çözümü veren polinom $p-$Bieberbach polinomu olarak adlandırılır ve $B_{n,p}(z)$ ile gösterilir.

Bu tezde, $A_p^1(G)$ ile $C(\bar{G})$ uzaylarında; uygun olarak $\|\varphi - B_{n,p}\|$ normunun $n \to \infty$ da azalarak sıfıra gitmesi ve de bu sıfıra gitme hızının iç ve dış sıfır açıları içeren $\bar{G}$ bölgesinin geometrik özelliklerine bağlı olarak değerlendirilecektir.

Anahtar Kelimeler: Konform dönüşüm, Yarıkonform eğriler, Bieberbach polinomları, Kompleks düzlemde yaklaşım

Danışman: Prof.Dr.Fahreddin Abdullayev , Matematik Ana Bilim Dalı, Mersin Üniversitesi

CONVERGENCE OF p-BIEBERBACH POLYNOMIALS IN VARİOUS REGIONS OF THE COMPLEX PLANE

N. PELİN ÖZKARTEPE

ABSTRACT

Let $G \subset \mathbb{C}$ be a simply connected region whose boundary $L := \partial G$ is a Jordan curve and $0 \in G$. Let $w = \varphi(z)$ be the conformal mapping of G onto the disk $D(0, r_0) := \{w : |w| < r_0\}$, satisfying $\varphi(0) = 0, \varphi'(0) = 1$.

Denote by $A_p^1(G)$, $p \in (0, \infty)$ the set of functions $f(z)$ analytic in G with $f(0) = 0$ such that

$$\|f\|_{A_p^1}^p := \|f'\|_{A_p(G)}^p := \left(\iint_G |f'(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

where $d\sigma_z$ is the two-dimensional Lebesque measure.

Also, let us denote by $\wp_n$ the class of polynomials $P_n(z)$, $\deg P_n \le n$, with $P_n(z_0) = 0, P_n'(z_0) = 1$ and consider following extremal problem:

$$\iint_G |\varphi'(z) - P_n'(z)|^p \, d\sigma_z \to \min, \quad p > 0.$$

There exists a polynomial $B_{n,p}(z)$ which is the solution of the extremal problem, and if $p > 1$, the solution is unique. This unique solution was denoted by $B_{n,p}(z)$ and it was called $p-$Bieberbach polynomials.

In this thesis the decrease of $\|\varphi - B_{n,p}\|$ to zero and calculation of the rate in regions with interior and exterior zero angles are determined depending on the geometric properties of boundary arcs.

Keywords: Conformal mapping, Quasiconformal curves, Bieberbach polynomials, Approximation in the complex plane

Advisor: Prof.Dr.Fahreddin Abdullayev, Department of Mathematics, University of Mersin

TEŞEKKÜR

Yeniden Bilim Dünyasına dönmemi sağlayan, hayatımın her aşamasında ve bu tez çalışmasının yapılmasında her türlü desteğini esirgemeyen, gösterdiği sabır ve anlayıştan dolayı çok değerli danışman hocam Prof.Dr.Fahreddin ABDULLAYEV'e sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca bilimsel yardımlarını esirgemeyen ve her alanda düşünceleriyle bana yol gösteren değerli hocam Doç.Dr.Mehmet KÜÇÜKASLAN'a, çok teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışmalarım sırasında bana bilgi yönünden destek veren bütün hocalarıma, yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C}\cup\ \infty$
$\overline{G}$	G bölgesinin kapanışı
$C\ \ G$	G bölgesinde sürekli olan fonksiyonlar kümesi
$C^1(G)$	Kendisi ve türevi G bölgesinde sürekli olan fonksiyonlar kümesi
$A\ \ G$	G bölgesinde analitik fonksiyonlar kümesi
$A\ \ \overline{G}$	G bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ sürekli fonksiyonlar kümesi
$D \Subset G$	D bölgesi kompakt olarak G bölgesinin içindedir.
$mes\ \ \gamma$	γ eğrisinin bir boyutlu Lebesque ölçüsü
$mes\ \ G$	G bölgesinin iki boyutlu Lebesque ölçüsü
$int\ \ L$	L kapalı eğrisinin sınırladığı sonlu bölge
$ext\ \ L$	L kapalı eğrisinin sınırladığı sonsuz bölge
∂G	G bölgesinin sınırı
Ω	$ext\ \ \overline{G}$
$B\ \ z, \delta$	$t : \lvert t-z \rvert < \delta$
Δ	$w : \lvert w \rvert > 1$
$d\sigma_z$	$dxdy\ ,\ z = x+iy$
$:=$	Tanım olarak eşittir.
$k=\overline{1,n}$	$k = 1, 2, \ldots, n$
$\overline{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
$a \prec b$	$a \le cb,\ c$ sabit olmakla a ve b den bağımsızdır.
$a \asymp b$	$a \prec b$ ve $b \prec a$
$d\ \ M, L$	$\inf\ \ \lvert z-\zeta \rvert :\ z \in M,\ \zeta \in L$
$\delta\ \ z$	$d\ \ z, L$

1. GİRİŞ

$\mathbb{C}$- kompleks düzlem; $G \subset \mathbb{C}$, $L := \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge ve $0 \in G$ olsun. $w = \varphi(z)$ ile G bölgesini $B(0, r_0) := \{w : |w| < r_0,\ r_0 > 0\}$ dairesine resmeden ve $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) = 1$ koşullarını sağlayan konform dönüşüm gösterilsin. Burada $r_0 := r_0(G)$ sayısına G bölgesinin 0 noktasına rağmen konform yarıçapı denir.

$A_p^1(G)$ $(p > 0)$ ile G bölgesinde analitik, $f(0) = 0$ ve

$$\| f \|_{A_p^1(G)}^p := \| f' \|_{A_p(G)}^p := \iint_G |f'(z)|^p \, d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı işaret edilsin.

$\wp_n$ ile derecesi n'yi aşmayan ve $P_n(0) = 0$, $P_n'(0) = 1$ koşullarını sağlayan polinomlar sınıfı gösterilsin.

Her $p > 0$ için aşağıdaki ekstremal probleme bakalım:

$$\| \varphi - P_n \|_{A_p^1(G)} \to \min \tag{1.1}$$

[1, s.137]' deki benzer metot uygulanırsa gösterilebilir ki, $\wp_n$ polinomlar kümesinde; (1.1) probleminin çözümü vardır. Ayrıca, $p > 1$ ise çözüm tekdir [1, s.142]. Bu tek polinoma $(G, 0)$ çifti için $p-$Bieberbach polinomu denir ve $B_{n,p}(z)$ ile işaret edilir [2].

$p = 2$ halinde literatürde çok iyi bilinen $B_{n,2}(z) \equiv \pi_n(z)$ Bieberbach polinomları elde edilir.

$G \subset \mathbb{C}$ bölgesinin sınırı ile onun sonsuzluğu içeren tümleyeninin sınırı aynı ise G bölgesine *Caratheodory* bölgesi denir.

Eğer, G bir Caratheodory bölgesi ise

$$\| \varphi - B_{n,p} \|_{A_p^1(G)} \to 0, \quad n \to \infty$$

dır [3, s. 63].

Buradan, $\{B_{n,p}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ $p-$Bieberbach polinomlar dizisi, $w=\varphi(z)$ konform dönüşümüne G bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde düzgün yakınsaması elde edilir.

Yaklaşım Teorisinin genel problemlerinden biri G bölgesinin kompakt alt kümesindeki düzgün yakınsamayı G bölgesinin kapanışına taşımak ve

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{C(\overline{G})} := \max_{z\in\overline{G}}\left|\varphi(z) - B_{n,p}(z)\right| \leq const.\gamma_n , \qquad (1.2)$$

eşitsizliğini sağlayan $\gamma_n := \gamma_n(p,G) > 0,\quad \gamma_n \to 0,\ n\to\infty$, biçimindeki diziyi bulmaktır.

Bu tezde; (1.2) problemi , parçalı yarı konform eğrilerle sınırlı ve sınırında iç ve dış sıfır açı içeren bölgelerde incelenecek ve her iki durumda da γ_n parametresi üstten değerlendirilecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

$\gamma \subset \mathbb{C}$ eğrisi verilsin ve bu eğrinin doğal denklemi $z = z(s)$, $0 \le s \le \ell$, $\ell := mes\gamma$, olsun.

Eğer γ eğrisine her bir $z = z(s)$ noktasında çizilen teğetin OX ekseninden pozitif yönde ayırdığı açı fonksiyonu $\theta(s) := \theta(z(s))$ s'in sürekli bir fonksiyonu ise, o halde bu eğriye *sürekli değişken teğete sahip eğri* denir ve bu özelliğe sahip eğriler sınıfı C_θ ile gösterilir.

Eğer $\theta'(s)$ sürekli ise γ eğrisine *sürekli eğime sahip eğri* denir.

Yaklaşım teorisinin temel problemlerinden biri de verilmiş fonksiyona polinomlarla yaklaşımın varlığını ve bölgenin geometrik özelliklerinin yaklaşım hızına etkisini göstermektir. Verilmiş bölgenin Riemann fonksiyonunun açık şekilde bilinmesi uygulamalarda önem taşımaktadır. Fakat, Riemann fonksiyonunun açık şekilde belirlenemediği hallerde onun yaklaşık ifadesinin elde edilmesi söz konusu olur. Bu nedenle, Riemann fonksiyonuna polinomlarla yaklaşılması ve yaklaşan polinomun bulunmasına ihtiyaç duyulmaktadır.

İlk defa, 1939 yılında M.V. Keldych $p = 2$ olduğunda $L := \partial G$'nin *sürekli eğime sahip eğri* olması durumunda bu problemi incelemiş ve $\gamma_n := \gamma_n(G) > 0$ yakınsama hızını $\gamma_n = 1 - \varepsilon$, $\forall \varepsilon > 0$, olarak elde etmiştir [4]. Dolayısıyla, $\overline{G}$' ta $\{\pi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin $\varphi(z)$'ye düzgün yakınsadığı gösterilmiş ve yakınsamanın hızı belirlenmiştir. Daha sonra Keldych öyle bir G^* bölgesi inşa etmiştir ki, onun için inşa edilen $\{\pi_n(z, G^*)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi ∂G^*'da ıraksak olmuştur. Bu ise $\overline{G}$'ta $\{\pi_n(z)\}_{n=1}^{\infty}$ Bieberbach polinomlar dizisinin $w = \varphi(z)$ konform dönüşümüne yakınsamasının G bölgesinin geometrik özelliklerine bağlı olduğunu göstermektedir.

1951 yılında S.N. Mergelyan, $p = 2$ durumunda (1.2)'de ifade edilen problemi C_θ sınıfından olan eğri ile sınırlı bölgeler için incelemiş ve yakınsama hızını $\forall \varepsilon > 0$ için $\gamma_n = \frac{1}{2} - \varepsilon$ olarak hesaplamıştır [5].

Daha sonra, $p=2$ durumu için (1.2) problemi kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12] , v.b. çalışmalarda incelenmiştir.

$p \neq 2$ durumunda, F.G. Abdullayev, M. Küçükaslan [2] ' de, $Q(\alpha,\beta)$, $0<\alpha \leq 1,\ \frac{1}{2} \leq \beta \leq 1$ sınıfından olan bölgeler için (1.2) 'de ifade edilen problemi incelemişlerdir. Aynı çalışmada G bölgesinin sınırı, $K-$yarı konform eğri olması halinde γ_n yakınsama hızı değerlendirilmiştir.

C.Koşar, M. Küçükaslan ve F.G. Abdullayev [38] tarafından, $p \neq 2$ durumunda $G \in C_\theta(\lambda,\alpha)$ olan bölgeler için aynı problem incelenmiştir.

Son olarak, M. Küçükaslan, C.Koşar ve F.G. Abdullayev [37] ‘ de $A(\lambda)$, $0<\lambda<2$ sınıfından olan bölgeler için $p \neq 2$ durumunda, (1.2) problemini incelemişlerdir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, bulgular kısmında kullanılacak bazı tanımlar ve temel teoremler verilecektir.

Bu tezde G, kompleks düzlemde $L := \partial G$ Jordan eğrisiyle sınırlı sonlu bir bölge kabul edilecektir. Ek olarak, genelliği kaybetmeksizin varsayılacak ki, $0 \in G.$

3.1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 3.1.1. $G \subset \mathbb{C}\ \ \overline{\mathbb{C}}$ kümesi için

i) G açık bir kümedir,

ii) $\forall \zeta_1, \zeta_2 \in G$ için bu noktaları birleştiren ve $\gamma \subset G$ olacak şekilde en az bir $\gamma := \gamma\ \ \zeta_1, \zeta_2$ eğrisi vardır.

koşulları sağlanıyor ise G kümesine kompleks düzlemde bir *bölge* denir.

Tanım 3.1.2. Eğer $G \cap A_1 \neq \varnothing,\ \ G \cap A_2 \neq \varnothing$ olacak şekilde kompleks düzlemde ayrık ve birleşimleri G kümesini veren A_1 ve A_2 açık kümeleri varsa G 'ya *bağlantısız* küme denir. Aksi halde G *bağlantılı* küme olur.

Kapalı, bağlantılı bir kümeye C*ontinuum* adı verilir.

Lemma 3.1.1. $1 \leq p < \infty$ ve $a, b \geq 0$ olsun. Bu durumda

$$a + b\ \ ^{p} \leq 2^{p-1}\ \ a^{p} + b^{p}$$

eşitsizliği sağlanır [13].

Tanım 3.1.3. Eğer $\alpha \in \ 0,2\pi$ sayısı için

$$\partial_\alpha f(z_0) := \lim_{r \to 0^+} \frac{f(z_0 + re^{i\alpha}) - f(z_0)}{re^{i\alpha}}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonuna z_0 noktasında α *-yönlü türevlenebilir* denir.

Eğer, z_0 noktasında her bir $\alpha \in \ 0,2\pi$ sayısı için α *-yönlü türevler* var ve hepsi birbirine eşit ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *türevlenebilirdir* denir ve bu durumda

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

dır.

f fonksiyonu her bir $z \in G$ noktasında türevlenebilirse f fonksiyonuna G 'de *türevlenebilirdir* denir.

Teorem 3.1.1. f fonksiyonunun $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $z_0 \in G$ noktasında sürekli ve $\forall z \in G$ için $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f^*(z)$ olacak şekilde bir tek $f^* : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun olmasıdır. Bu durumda $f'(z_0) = f^*(z_0)$ dır [14].

Teorem 3.1.2. f fonksiyonu $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilirse

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

kısmi türevleri mevcut olup bu kısmi türevler

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

ifadesini sağlar [15].

Teorem 3.1.3. f fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilirse

$$f'(z_0)=\frac{\partial f}{\partial z}(z_0),\quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)=0$$

dır [15].

Tanım 3.1.4. f fonksiyonunun $z_0\in G$ noktasında $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ kısmi türevleri mevcut ise $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ ve $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0):=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)-i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)=:f_z(z_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0):=\frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)+i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right)=:f_{\overline{z}}(z_0).$$

Özel halde $f(z)=u(x,y)+iv(x,y)$ şeklinde ise

$$f_z=\frac{1}{2}(u_x+v_y)+\frac{i}{2}(v_x-u_y),$$

$$f_{\overline{z}}=\frac{1}{2}(u_x-v_y)+\frac{i}{2}(v_x+u_y),$$

olur.

Tanım 3.1.5. f fonksiyonu tanımlı olduğu z_0 noktasının belli bir $B(z_0,r)$ komşuluğundaki tüm noktalarda türevlenebiliyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *analitiktir* denir.

Eğer G ’de tanımlı f fonksiyonu, her bir $z\in G$ noktasında analitik ise f fonksiyonuna G ’de analitiktir denir. G ’de analitik tüm fonksiyonların kümesi

$A(G)$ ile, G'de analitik ve $\overline{G}$'da sürekli olan fonksiyonların kümesi $A(\overline{G})$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : G \to \mathbb{C}$ tanımlı fonksiyonların oluşturduğu $f_n{}_{\;n\in\mathbb{N}}$ dizisine ortak tanım bölgesi G olan *fonksiyonlar dizisi* denir.

Tanım 3.1.7. $f_n{}_{\;n\in\mathbb{N}}$ ortak tanım bölgesi G olan fonksiyonlar dizisi ve $z_0 \in G$ olsun. $f_n(z_0){}_{\;n\in\mathbb{N}}$ dizisi yakınsak ise $f_n{}_{\;n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine $z_0 \in G$ noktasında *yakınsaktır* denir.

Eğer, $f_n{}_{\;n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisi G bölgesinin her noktasında yakınsak ise $f_n{}_{\;n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine G bölgesinde *noktasal yakınsaktır* denir.

$f_n{}_{\;n\in\mathbb{N}}$, G bölgesinde noktasal yakınsak fonksiyonlar dizisi ve $f : G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, $\forall z \in G$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ ise f fonksiyonuna $f_n{}_{\;n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisinin *limiti* denir.

Tanım 3.1.8. $f_n{}_{\;n\in\mathbb{N}}$, ortak tanım bölgesi G ve $f : G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde en az bir $n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilinir öyle ki $\forall n \geq n_0$ ve $\forall z \in G$ için $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ sağlanıyor ise $f_n{}_{\;n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine G bölgesinde f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir.

Tanım 3.1.9. $f_n{}_{\;n\in\mathbb{N}}$ ortak tanım bölgesi $G \subset \mathbb{C}$ olan fonksiyon dizisi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $\forall n, m > n_0$ ve $\forall z \in G$ için $|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$ koşulu sağlanıyorsa $f_n{}_{\;n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine $G \subset \mathbb{C}$ bölgesinde bir *Cauchy dizisi* denir.

Teorem 3.1.4. $f_n \;{}_{n\in\mathbb{N}}$ ortak tanım bölgesi G olan fonksiyonlar dizisi olsun. $f_n \;{}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin G ’de düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul onun Cauchy dizisi olmasıdır [16].

Tanım 3.1.10. $f: \; a,b \; \to \mathbb{R},$ sınırlı bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için öyle bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir öyle ki a,b aralığının $\sum_{k=0}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ koşulunu sağlayan her bir ayrık $(a_k, b_k)\;{}_{k=0}^{n}$ parçalanışı için $\sum_{k=0}^{n}\left| f(b_k) - f(a_k)\right| < \varepsilon$ sağlanıyor ise f fonksiyonuna a,b ’de *mutlak sürekli fonksiyon* denir.

Tanım 3.1.11. Kompleks değişkenli reel değerli $u: G \to \mathbb{R}$, fonksiyonu verilsin. Eğer, u fonksiyonu kenarları OX ve OY eksenlerine paralel olan her $R \Subset G$ dikdörtgeninin hemen hemen tüm yatay ve hemen hemen tüm dikey aralıklarında mutlak sürekli ise u fonksiyonuna G ’de *mutlak süreklidir* denir.

Tanım 3.1.12. $G \subset \mathbb{C}$; $f: G \to \mathbb{C}$, bir fonksiyon olsun. Eğer $\operatorname{Re} f(z)$ ve $\operatorname{Im} f(z): G \to \mathbb{R}$ fonksiyonları G ’de mutlak sürekli fonksiyonlar iseler f fonksiyonu G ’de *mutlak süreklidir* denir. G bölgesinde mutlak sürekli fonksiyonların sınıfı $ACL(G)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.5. $f \in ACL(G)$ ise G bölgesinde hemen hemen her yerde

$$\frac{\partial f}{\partial x} \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial y}$$

kısmi türevleri ve dolayısıyla

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

$$\frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

kısmi türevleri vardır [17].

3.2. KOMPLEKS DÜZLEMDE EĞRİ VE KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

Tanım 3.2.1. $a,b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna kompleks düzlemde bir *eğri* denir ve γ ile işaretlenir. $z(a)$ noktasına γ eğrisinin başlangıç noktası, $z(b)$ noktasına da bitiş noktası denir.

i.) $z(a) = z(b)$ ise γ eğrisine *kapalı eğri* denir.

ii.) $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ için $t_1 \neq t_2$ olduğunda $z(t_1) \neq z(t_2)$ ise γ eğrisine *Jordan yayı,* eğer $z(a) = z(b)$ ise γ eğrisine *Jordan eğrisi* denir.

iii.) $\forall t \in [a,b]$ için $z'(t)$ var ve sürekli ise γ eğrisine diferansiyellenebilir eğri denir. Buna ek olarak $z'(t) \neq 0$ ise γ eğrisine *düzgün eğri* denir.

iv.) $P := \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, $[a,b]$ aralığının bir parçalanışı olmak üzere $\forall k \in \{1,2,...,n\}$ için $z = z(t)$ fonksiyonu her (t_{k-1}, t_k) aralığında sürekli türevlenebilir ve $\lim\limits_{t \to t_{k-1}^{+}} z(t)$, $\lim\limits_{t \to t_k^{-}} z(t)$ limitleri mevcut ve bu noktada birbirlerine eşit değiller ise γ eğrisine *parçalı düzgün* eğri denir.

Teorem 3.2.1. (**Jordan Eğri Teoremi**) γ, $\overline{\mathbb{C}}$'da kapalı sonlu bir Jordan eğrisi olsun. Bu taktirde γ eğrisi kompleks düzlemi ortak sınırları γ olan biri sonlu, diğeri sonsuz ayrık iki bölgeye ayırır [16].

Bu bölgelerden sonlu olana *γ 'nın içi*, sonsuz olana *γ 'nın dışı* denir ve bunlar sırasıyla $\operatorname{int}\gamma$ ve $ext\,\gamma$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere D bölgesinden alınan her bir γ eğrisi için $\operatorname{int}\gamma \subset D$ oluyor ise D bölgesine *basit bağlantılı bölge* denir.

$[a,b]$ aralığının $P=\{t_0,t_1,...,t_n\}$ şeklindeki tüm parçalanışlarının ailesi $\mathbb{P}$ ile gösterilsin ve $\ell_n(P):=\sum_{k=1}^{n}|z(t_k)-z(t_{k-1})|$ olsun Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\{\ell_n(P):P\in\mathbb{P}\}<\infty$$

ise γ eğrisine *ölçülebilir eğri* denir.

Teorem 3.2.2. Eğer γ parçalı düzgün eğri ise γ eğrisi ölçülebilir ve

$$mes\ \gamma := \int_a^b |z'(t)|\,dt$$

dır [16].

Tanım 3.2.3. γ eğrisinin doğal denklemi $z=z(s)$, $0\le s\le \ell$, $\ell:=mes\gamma$, olsun. Eğer γ eğrisine her bir $z(s)$ noktasında çizilen teğetin OX ekseninden pozitif yönde ayırdığı açı fonksiyonu $\theta(s):=\theta(z(s))$ s'in sürekli bir fonksiyonu ise bu eğriye *sürekli değişken teğete sahip eğri* denir ve bu özelliğe sahip eğrilerin sınıfı C_θ ile gösterilir. Eğer $\theta'(s)$ sürekli ve sınırlı ise γ eğrisine *sürekli eğime sahip eğri* denir.

Tanım 3.2.4. G bölgesi; $L:=\partial G$ eğrisi C_θ sınıfından olan sonlu sayıda yaylarının $z_0, z_1, z_2, ..., z_m$ noktalarındaki birleşiminden oluşur öyle ki, L eğrisi z_0 noktasında yerel düzgün bir eğri ve

i) Her bir $1\le j\le p\le m$ için z_j birleşme noktalarında G bölgesi $\lambda_j\pi$ $(0<\lambda_j<2)$ köşeli dış açıya sahip ve $\lambda:=\min_{1\le j\le p}\{\lambda_j\}$ olsun,

ii) Her bir $p+1 \leq j \leq m$ için z_j birleşme noktalarında yerleşen yerel koordinat sistemi ve $-\infty < c_1 < c_2 < \infty,\ \varepsilon_i > 0,\ i = 1,2$ sabitleri için

a) $z = x + iy: c_1 x^{1+\alpha} \leq y \leq c_2 x^{1+\alpha},\ \ 0 < x < \varepsilon_1\ \ \subset \overline{G},$

b) $z := x + iy: |y| \geq \varepsilon_2 x,\ \ 0 < x < \varepsilon_1\ \ \subset \overline{\Omega}$ olsun.

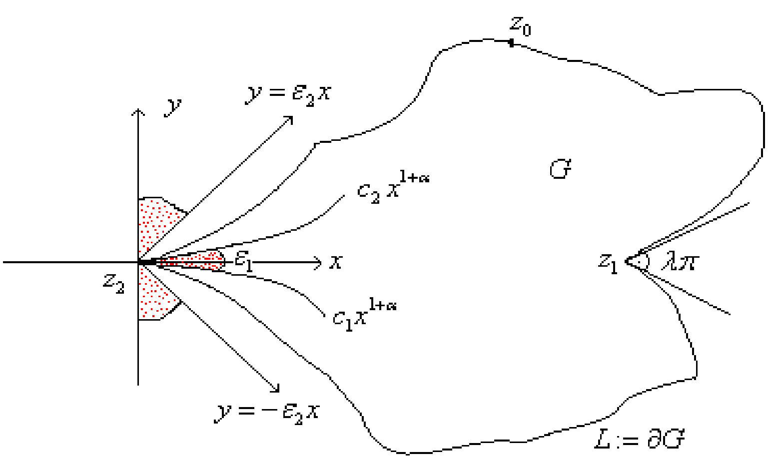
koşullarını sağlarsa G bölgesine $C_\theta\ \ \lambda, \alpha$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.2.4'den $G \in C_\theta\ \ \lambda, \alpha$ bölgesinin her bir $z_j\ \ 1 \leq j \leq p$ birleşme noktasında $\lambda\pi\ \ 0 < \lambda < 2$ dış açıya ve her bir $z_j\ \ p+1 \leq j \leq m$ birleşme noktasında ise $x^{1+\alpha}$ – tertipli (olası) iç sıfır açıya sahip olduğu görülür.

Eğer, $\alpha = 0$ ise G bölgesi iç sıfır açıya sahip değildir ve bu durum $G \in C_\theta\ \ \lambda$ ile gösterilir.

Eğer, $\lambda = 1$ ise G bölgesi sadece iç sıfır açı içeren, parçalı düzgün eğri ile sınırlı bölge olur ve bu durum da $G \in C_\theta\ \ 1, \alpha$ ile gösterilir.

Genelliği kaybetmeksizin Tanım 3.2.4.'de $m = 2$, $p = 1$ alınırsa G bölgesinin şekli, Şekil–1 de gösterilmiştir.



Şekil–1

Tanım 3.2.5. Kompleks düzlemde $G := \{z = x+iy \,:\, 0 < x < 1,\, 0 < y < 2\} \cup \{z = x+iy : 1 < x < 2,\, 0 < y < 1\}$ şeklinde tanımlanan bölgeye $L-$şekilli bölge denir.

Tanım 3.2.6. $G, H \subset \overline{\mathbb{C}}$ basit bağlantılı bölgeler ve $\varphi : G \to H$ olsun. φ fonksiyonu 1-1 ve analitik ise φ'ye *konform dönüşüm* denir.

Teorem 3.2.3. (Riemann Dönüşüm Teoremi Sonucu) $G \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $0 \in G$ olsun. Bu durumda G bölgesini $B(0,1) := \{w : |w| < 1\}$ dairesine resmeden ve $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır [16].

Teorem 3.2.4. $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$ ve $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ olmak üzere

$$\Phi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

olacak şekilde bir tek $\Phi : \Omega \to \Delta$ konform dönüşümü vardır.

Tanım 3.2.7. $0 < r < 1$ ve $R > 1$ olsun. Bu durumda;

$$L_r := \{z \in G : |\varphi(z)| = r < 1\}, \; L_R := \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = R > 1\}, \; L_1 \equiv L$$

eğrilerine sırasıyla *iç* ve *dış seviye eğrileri* denir. Ayrıca, $G_t := \operatorname{int} L_t$, $\Omega_t := extL_t$; $d(z, L) := \inf\{|\varsigma - z| : \varsigma \in L\}$ dir.

Tanım 3.2.8. γ, denklemi $z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ olan düzgün eğri ve f fonksiyonu γ eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon ise,

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt,$$

integraline f nin γ eğrisi üzerindeki *eğrisel integrali* denir.

Teorem 3.2.5. (**Cauchy Teoremi**) $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $f \in A(G)$ olsun. γ, $\overline{int\,\gamma} \subset G$ koşulunu sağlayan ölçülebilir Jordan eğrisi ise

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

dır [18].

Teorem 3.2.6. (**Cauchy İntegral Formülü**) $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $f \in A(G)$ olsun. γ, $\overline{int\,\gamma} \subset G$ koşulunu sağlayan ölçülebilir Jordan eğrisi ise $\forall z \in int\,\gamma$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

dır [18].

Teorem 3.2.7. (Cauchy Türev Formülü) $D \subset \mathbb{C}$; f D'de analitik ve $G \Subset D$ sonlu sayıda parçalı düzgün eğri ile sınırlı bölge olsun. Bu durumda, $\forall z \in G$ ve her $n = 0,1,2,...$ için

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

dır [18].

Teorem 3.2.8. (Maksimum-Modulus Prensibi) $G \subset \mathbb{C}$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge olsun. Eğer f G'de analitik ve $\overline{G}$'da sürekli ise $|f|$ maksimum değerini ∂G'de alır [18].

Tanım 3.2.9. $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $U : G \to \mathbb{C}$ ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

olmak üzere $\Delta U = 0$ ise $U(x, y)$ fonksiyonuna G bölgesinde harmoniktir denir.

Teorem 3.2.9. (Ortalama Değer Teoremi) $G\subset\mathbb{C}$ sonlu bir bölge; $U:G\to\mathbb{C}$ fonksiyonu G 'de harmonik ise, $\forall B(z_0,r)\subset G$ için

$$U(z_0)=\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}U(z_0+re^{it})\,dt$$

dır [18].

Teorem 3.2.10. $G\subset\mathbb{C}$ sonlu bir bölge; $U:G\to\mathbb{C}$ fonksiyonu G 'de harmonik ve $B(z_0,r)\subset G$ olsun. O zaman

$$U(z_0)=\frac{1}{\pi r^2}\iint_{B(z_0,r)}U(z)\,d\sigma_z$$

dır [16].

Tanım 3.2.10. $G\subset\mathbb{C}$ sonlu bir bölge verilsin. Her $p>0$ için, G bölgesinde tanımlı, ölçülebilir ve

$$\iint_G |f(z)|^p d\sigma_z<\infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı $L_p(G)$ ile gösterilir.

Ayrıca, $p\geq 1$ olmak üzere $L_p(G)$ uzayında norm

$$\|f\|_{L_p(G)}:=\left(\iint_G |f(z)|^p\,d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}$$

dır.

Tanım 3.2.11. $G\subset\mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $p>0$ olsun.

$$A_p(G):=\{f:f\in A(G)\cap L_p(G)\}$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı $A_p(G)$ ile gösterilir. $p\geq 1$ olmak üzere $A_p(G)$ uzayında norm

$$\|f\|_{A_p(G)}:=\|f\|_{L_p(G)}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 3.2.11. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $f \in L_p(G)$, $g \in L_q(G)$, $p \geq 1,\ \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ ise, aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır:

i.) $$\left| \iint_G f(z)g(z)d\sigma_z \right| \leq \left(\iint_G |f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_G |g(z)|^q \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{q}},$$

ii.) $$\left(\iint_G |f(z)+g(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\iint_G |f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\iint_G |g(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}}.$$

Bu eşitsizliklere sırasıyla *Hölder Eşitsizliği* ve *Minkowski Eşitsizliği* adı verilir [20].

Tanım 3.2.12. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$ verilsin. $f \in L_p(G)$ olmak üzere

$$Tf \ \ (z) := p.v.\left(-\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{f(\xi)}{\xi - z^{\ 2}} d\sigma_\xi \right) := \lim_{\varepsilon \to 0}\left(-\frac{1}{\pi} \iint_{|\xi - z|>\varepsilon} \frac{f(\xi)}{\xi - z^{\ 2}} d\sigma_\xi \right)$$

dönüşümüne *Hilbert Dönüşümü* denir.

Teorem 3.2.12. (Calderon-Zygmund Eşitsizliği) $T : L_p \to L_p$, $p > 1$ olmak üzere

$$\|Tf\|_{L_p} \leq c_p \, \|f\|_{L_p}$$

sağlanır.

Burada $c_p \to 1,\ p \to 2$ [17].

Tanım 3.2.13. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $p \geq 1$ olsun.

i) $f \in ACL(G)$,

ii) $\forall B \Subset G$ kompakt kümesi için $f_x,\ f_y \in L_p(B)$,

koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna G bölgesinde L_p G *−türevlenebilirdir* denir.

Teorem 3.2.13. (Green Formülü) $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$, L_1 G $-$ türevlenebilir bir fonksiyon ise $D \subset G$ ölçülebilir sınırlı Jordan bölgesi için

$$\int_{\partial D} f(\xi)\, d\xi = 2i \iint_D f_{\bar{\xi}}(\xi) d\sigma_\xi$$

dır [19].

Teorem 3.2.14. (**Cauchy-Pompeiu Formülü**) $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$, L_1 G $-$türevlenebilir bir fonksiyon, $D \subset G$ ölçülebilir sınırlı Jordan bölgesi ve $z \in D$ ise

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{\pi} \iint_D \frac{f_{\bar{\xi}}(\xi)}{\xi - z} d\sigma_\xi$$

dır.

İspat: $B(z,\varepsilon)$, z merkezli ε yarıçaplı daire olmak üzere $\dfrac{f(\xi)}{\xi - z}$ fonksiyonuna $D \backslash B(z,\varepsilon)$ bölgesinde Teorem 3.2.14 uygulanırsa;

$$\int_{\partial(D \backslash B(z,\varepsilon))} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial D} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi - \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = 2i \iint_{D \backslash B(z,\varepsilon)} \frac{f_{\bar{\xi}}(\xi)}{\xi - z} d\sigma_\xi$$

elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafındaki ikinci integral

$$\int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi + \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(z)}{\xi - z} d\xi,$$

şeklinde yazılabilir ve

$$\left| \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{f(\xi) - f(z)}{\xi - z} d\xi \right| \leq \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{|f(\xi) - f(z)|}{|\xi - z|} |d\xi|$$

$$\leq \varepsilon \int_{\partial B(z,\varepsilon)} \frac{1}{|\xi - z|} |d\xi| \leq \varepsilon \frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon} = 2\pi\varepsilon$$

olduğu göz önünde tutulursa

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = \lim_{\varepsilon\to 0}\left[\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi - z}d\xi + \int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{f(z)}{\xi - z}d\xi\right] = 2\pi i\ f(z)$$

bulunarak ispat tamamlanır.

3.3. YARI KONFORM DÖNÜŞÜM VE EĞRİLER

Tanım 3.3.1. $G, H \subset \mathbb{C}$ herhangi iki bölge; $f : G \to H$ ise $\forall z \in G$ için $J_f(z) := |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 > 0$ koşulunu sağlayan ve C^1 sınıfından olan bir homeomorfizm olsun. Eğer,

$$\sup_{z \in G} \frac{|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2}{|f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2} \leq K < \infty \tag{3.3.1}$$

ise f fonksiyonuna G bölgesi üzerinde tanımlı bir $K-$*yarı konform dönüşüm*, $K \geq 1$ sayısına da f dönüşümünün *yarı konformluk katsayısı* denir.

Tanımdan görülür ki f fonksiyonu G bölgesinde $K-$yarı konform dönüşüm ve $k := \dfrac{K-1}{K+1}$ ise $\forall z \in G$ için $\left|\dfrac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}\right| \leq k < 1$ dir.

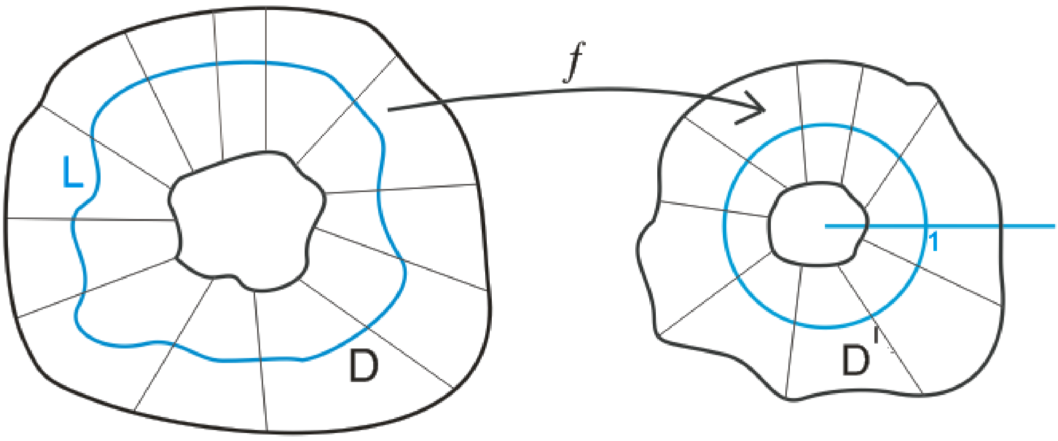
Yarı konform dönüşümün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir [22].

i) 1-yarı konform dönüşüm konformdur.

ii) f_1, K_1- yarı konform ve f_2, K_2- yarı konform dönüşümleri verilsin. $f_1 \circ f_2$ bileşke dönüşümü $K_1 \cdot K_2-$ yarı konformdur.

iii) f dönüşümü $K-$ yarı konform ise f^{-1} de $K-$ yarı konformdur.

Tanım 3.3.2. $f : D \supset L \to D'$, $K-$yarı konform dönüşümü olmak üzere $f(L)$ çember veya doğru parçası ise L eğrisine $K-$*yarı konform eğri* veya $K-$*yarı konform yay* denir. (bkn. Şekil-2)



Şekil-2

$F(L)$, L'yi çember veya aralığa resmeden $f: D \supset L \to D'$ tüm homeomorfizmaların kümesi ve

$$K_L := \inf_{f \in F(L)} \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

olsun [19], [20].

Eğer $K_L < \infty$ ise, L eğrisine *yarı konform eğri* denir. Eğer L, $K-$yarı konform eğri ise

$$K_L \le K \tag{3.3.2}$$

dır.

L eğrisi herhangi bir $K \ge 1$ sayısı için K-yarı konform eğri ise, o halde L ye yarı konform eğri denir.

Tanım 3.3.2'de $D = \overline{\mathbb{C}}$ veya $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

i) $D = \overline{\mathbb{C}}$ durumunda Tanım 3.3.2'ye $K-$yarı konform eğrinin *global tanımı* denir ve yarı konformluk katsayısı (3.3.1) yardımıyla hesaplanır.

ii) $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ durumunda Tanım 3.3.2'ye $K-$yarı konform eğrinin *lokal tanımı* denir ve yarı konformluk katsayısı (3.3.2) yardımıyla hesaplanır.

Teorem 3.3.1. L bir Jordan eğrisi, $z_1, z_2 \in L$, $z_1 \ne z_2$ keyfi noktalar ve $\ell(z_1, z_2) \subset L$, z_1 ile z_2 noktasına birleştiren küçük çaplı yay olsun. L eğrisinin yarı konform eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in L, \\ z_3 \in \ell(z_1, z_2)}} \frac{|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2|} < \infty$$

olmasıdır [17].

Uyarı 3.3.1. Yarı konform eğriler sıfır açı içermez.

Teorem 3.3.2. $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ olmak üzere L, analitik yay veya eğri ise L'nin yarı konformluk katsayısı $K = 1$ dir [21].

Teorem 3.3.3. $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ olmak üzere $L \in C_\theta$ ise yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için L'nin yarı konformluk katsayısı $K = 1 + \varepsilon$ dır [20].

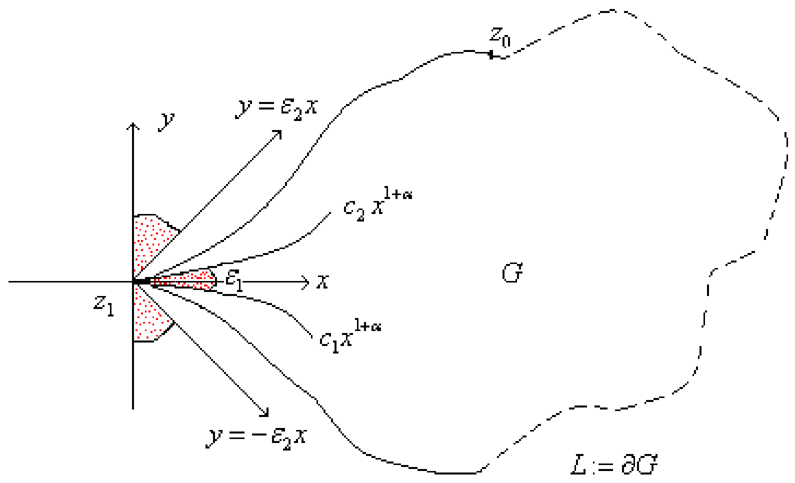
Tanım 3.3.3. $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge; $L := \partial G$, sonlu sayıda $K_j -$yarı konform yayların $z_0,\ z_1,\ z_2,\ ....,\ z_m$ noktalarındaki birleşimi ve $K := \max\limits_{1 \le j \le m} K_j$ olsun. Eğer, L eğrisi z_0 noktasındaki yerel $K -$yarı konform ve $z_1,\ z_2,\ ....,\ z_m$ noktalarında bu noktalar yerel koordinat sisteminin başlangıç noktaları olmak üzere $-\infty < c_1 < c_2 < \infty,\ \varepsilon_i > 0,\ i = \overline{1,2}$ sabitler için;

i) $z = x + iy : c_1 x^{1+\alpha} \le y \le c_2 x^{1+\alpha},\ 0 \le x \le \varepsilon_1 \ \subset \overline{G}$,

ii) $z = x + iy : |y| \ge \varepsilon_2 x,\ 0 \le x \le \varepsilon_1 \ \subset \overline{\Omega}$

koşulları sağlanırsa G bölgesine keyfi $K \ge 1$ ve $\alpha \ge 0$ sayıları için $PQ\ K, \alpha$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.3.3'deki G bölgesine bir örnek Şekil–3 de gösterilmiştir.



Şekil–3

Tanım 3.3.4. $L \subset \mathbb{C}$ bir Jordan eğrisi; $y:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ dönüşümü altında $y\ \mathrm{int}L\ = extL,\quad y\ extL\ = intL$ ve $\forall z\in L$ için $y(z)=z$ olsun. Eğer $\bar{y}:\mathbb{C}\to\mathbb{C}$ yarı konform ise y dönüşümüne L eğrisine göre *yarı konform yansıma* denir.

Teorem 3.3.4. $L \subset \mathbb{C}$ bir Jordan eğrisi olsun. L eğrisine göre yarı konform yansımanın olması için gerek ve yeter şart L eğrisinin yarı konform eğri olmasıdır [22].

Uyarı 3.3.2. "$a \prec b$" ve "$a \approx b$" anlamı sırasıyla $a \le c.b$ ve $c_1.a \le b \le c_2.a$ olacak şekilde c, c_1, c_2 pozitif sabitler vardır. Burada c, c_1, c_2 sabitleri a ve b sayılarından bağımsızdır.

Teorem 3.3.5. L eğrisi K-yarı konform eğri olsun. O zaman L eğrisinin belli bir sonlu komşuluğunda sınırlı kısmi türevlere sahip ve C^1 sınıfından olan bir yarı konform yansıma vardır.

Özel olarak, L eğrisinin belli bir sonlu komşuluğundaki her bir z için

$$|y(z)-z'| \approx |z-z'|\ ,\ z' \in L \qquad (3.3.3)$$

sağlanır [22].

Sonuç 3.3.1. L eğrisi K-yarı konform eğri, $\infty \notin L$, $G = int\,L,\ \Omega = ext\,L$ olsun. Bu durumda L'ye göre $c_1(K)-$yarı konform $y(z)$ yansıması vardır ve bu yansıma;

i) $a \in G$ sabit bir nokta öyle ki, $a = y\ \infty$ olmak üzere; $y\ z$ yansıması $\overline{\mathbb{C}} \setminus\ L \cup\ a$ bölgesinde sürekli türevlenebilir.

ii) Yeterince küçük $\delta > 0$ sayısı ve $B(a,\delta)$ için $B(a,\delta) := y\ \ B(a,\delta)$ olsun.

$$\overline{\mathbb{C}}_\delta := \overline{\mathbb{C}} \setminus\ \overline{B(a,\delta)} \cup \overline{B(a,\delta)}\ ,$$

bölgesinde (3.3.3) sağlanır,

iii) $\forall z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus L$ için $|y_z| \le c(K,\delta),\ \ c(K,\delta)^{-1} \le |y_{\bar z}| \le c(K,\delta)$ ve $z \notin \overline{\mathbb{C}} \setminus L$ için

$$|y_z| \prec \begin{cases} |y(z)|^2\ , & z \in B(a,\delta) \\ |z-a|^{-2}, & z \in B(a,\delta) \end{cases}$$

ve

$$|y_{\bar z}| \approx \begin{cases} |y(z)|^2\ , & z \in B(a,\delta) \\ |z-a|^{-2}, & z \in B(a,\delta) \end{cases}$$

özelliklerine sahiptir [22].

$L = \partial G$ eğrisi, lokal anlamda $K-$yarı konform eğri olsun. $F,\ \Phi,\ f$ dönüşümleri yardımıyla bir $1 < R_0 \le 2$ ve $r_0 = R_0^{-1}$ sayısı için Tanım 3.3.2' deki D bölgesi olarak [21]'de olduğu gibi $D := G_{R_0} \setminus G_{r_0}$ olarak seçilebilir. Burada $G_R := int\,L_R$ dir. Bu durumda gösterilebilir ki $\alpha(\cdot) = f^{-1}\ \ \overline{(f(\cdot))^{-1}}$ dönüşümü L eğrisine göre K^2-yarı konform yansımadır [21]. Yani, $\alpha(\cdot)$ dönüşümü, L eğrisinin üzerindeki noktaları değiştirmeyen ve herhangi $1 < R < R_0,\ r_0 < \tilde{r} < 1$ sayıları için

$$\alpha(G_R \setminus \overline{G}) \subset G \setminus \overline{G}_{r_0},\quad \alpha(G \setminus G_{\tilde r}) \subset G_{R_0} \setminus \overline{G}$$

sağlayan bir K^2-yarı konform dönüşümdür. Bu durumda Sonuç 3.3.1'e benzer şekilde L'ye göre

$$\left|\alpha^*(z)-z_1\right| \approx \left|z-z_1\right|, \quad z_1 \in L,\ z \in D \tag{3.3.4}$$

koşulunu sağlayan $\alpha^*(\cdot),\ c(K)-$yarı konform dönüşüm vardır. Böylece [19]'den yararlanarak genelliği kaybetmeksizin Tanım 3.3.2'deki D bölgesinde

$$\alpha(z)=\alpha^*(z),\ z \in D \tag{3.3.5}$$

olduğu kabul edilebilir.

Lemma 3.3.1. L, $K-$yarı konform eğri $z_1 \in L$ ve $z_2,\, z_3 \in G \cap\ z:\left|z-z_1\right| \le cd(z_1, L_{R_0})$ $w_j = F(z_j),\ j=1,2,3$ $z_2, z_3 \in \Omega \cap\ z:\left|z-z_1\right| \le cd(z_1, L_{r_0})$, $w_j=\Phi(z_j)$, $j=1,2,3$ olsun.

Eğer $\left|z_1-z_2\right| \prec \left|z_1-z_3\right|$ ise

i) $\left|w_1-w_2\right| \prec \left|w_1-w_3\right|$,

ii) $\left|\dfrac{w_1-w_3}{w_1-w_2}\right|^{K^{-2}} \prec \left|\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_2}\right| \prec \left|\dfrac{w_1-w_3}{w_1-w_2}\right|^{K^2}$,

sağlanır [23].

Sonuç 3.3.2. Lemma 3.3.1'deki $z_3 \in L_{r_0}$ $z_3 \in L_{R_0}$ ise

$$\left|w_1-w_2\right|^{K^2} \prec \left|z_1-z_2\right| \prec \left|w_1-w_2\right|^{K^{-2}}$$

dir

Lemma 3.3.2. $L:=\partial G$, $K-$yarı konform eğri olsun. Bu durumda, her bir $z \in L$ için ve $0 \in G$ noktasını $z \in L$ noktası ile birleştiren ve G bölgesi içinde yerleşen öyle bir $\beta(0,z)$ yayı vardır ki;

i) $\forall \zeta \in \beta(0,z)$ için $d(\zeta, L) \approx \left|\zeta - z\right|$ dır.

ii) $\forall \zeta_1, \zeta_2 \in \beta(0,z)$ için ζ_1 noktasını ζ_2 noktasına birleştiren $\tilde{\beta}(\zeta_1,\zeta_2) \subset$

$\beta(0,z)$ alt yayı için $mes\tilde{\beta}(\zeta_1,\zeta_2)\prec|\zeta_1-\zeta_2|$

koşullarını sağlar [6].

Lemma 3.3.3. $L:=\partial G$, $K-$yarı konform eğri olsun. Ölçülebilir her hangi bir $\gamma\subset G$ yayı ve onun $\alpha^*(\gamma)$ yansıması için

$$mes\gamma\approx mes\alpha^*(\gamma)$$

sağlanır [6].

Lemma 3.3.4. L, $K-$yarı konform eğri ve $G_\varepsilon := \{z : z\in G, d(z,L)<\varepsilon\}$ olsun. O zaman $\forall\varepsilon>0$ için

$$mes\varphi(G_\varepsilon)\prec\varepsilon^\delta$$

dır. Burada Eğer $D\subset\mathbb{C}$ ise $\delta=\min\left\{\frac{1}{2},\frac{1}{K^2}\right\}$ olur. Bundan başka $D\equiv\mathbb{C}$ ise $\delta:=\frac{K^2+1}{2K^2}$ olur [24].

Eğer G keyfi bir continuum bölge ise $\delta=\frac{1}{2}$ dır [25 s.181].

Lemma 3.3.5. (Goldstein Teoremi) $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge ve $g:G\to\mathbb{C}$, $K-$yarı konform dönüşümü olsun. Bu durumda, her bir $E\Subset G$ kompakt alt kümesi ve $\forall\delta\in\left(0,\frac{1}{K}\right)$ sayısı için

$$mes\,g(E)\prec(mesE)^\delta$$

eşitsizliği sağlanır [25].

Lemma 3.3.6. (Bernstein-Walsh Lemması) $\Re$ keyfi bir continuum ve L_R, $\Re$'nin dış seviye eğrisi olsun. Bu durumda derecesi n'yi aşmayan cebirsel bir $P_n(z)$ polinomu verildiğinde öyle bir $M>0$ sabiti bulunabiliyorsa ki

$$\max_{z\in\Re}\left|P_n(z)\right|\leq M$$

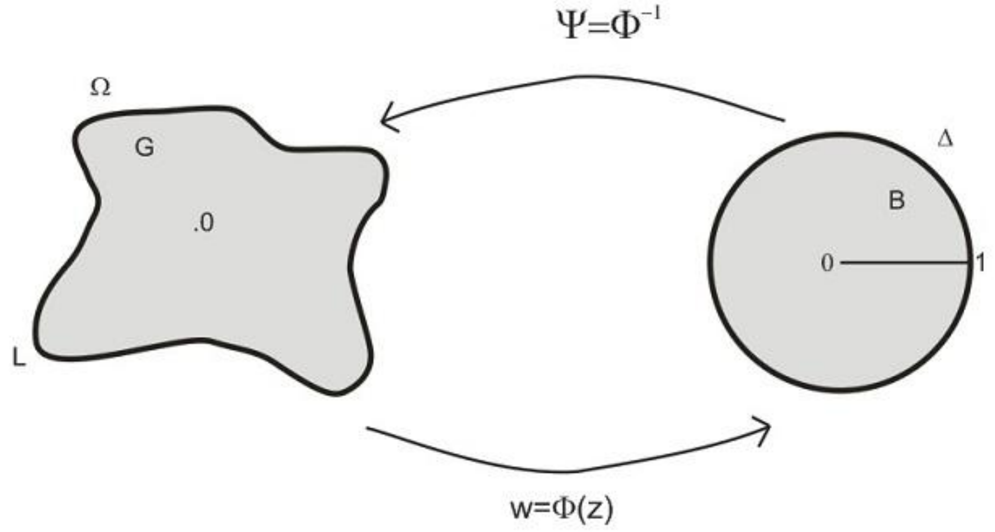
sağlansın, o halde her $R>1$ ve $\forall z\in\overline{G}_R$ için

$$\left|P_n(z)\right|\leq MR^n$$

eşitsizliği sağlanır [26].

3.6.1. $p-$BIEBERBACH POLİNOMLARININ YARI KONFORM SINIRLI BÖLGELERDE YAKINSAKLIĞI

Tanım 3.6.1.1 . Eğer L yarıkonform eğri ve $0<\alpha,\beta\leq 1$ sayıları için $\Phi\in Lip\alpha$, $\Psi\in Lip\beta$ koşullarını sağlıyorsa "$G\in Q\ \ \alpha,\beta$ sınıfındandır" denir.
Φ,Ψ dönüşümleri Şekil-4 de gösterilmiştir.



Şekil-4

Teorem 3.6.1.1. Keyfi $0<\alpha\leq 1$ ve $\frac{1}{2}\leq\beta\leq 1$ sayıları için $G\in Q\ \ \alpha,\beta$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}\ \ z$ $p-$Bieberbach polinomları her $1<p<2+\frac{\alpha}{1-\alpha}$ ve $n\geq 2$ için

$$\left\|\varphi-B_{n,p}\right\|_{C\ \bar{G}}\leq\frac{c_1}{n^{\gamma}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma\in\begin{cases}\left(0,\frac{2}{p\alpha}-\frac{\alpha\beta}{2}-\left(\beta-\frac{1}{2}\right)\left(\frac{2}{p}-1\right)\right), & 1<p<2,\\ \left(0,\frac{\alpha\beta}{p}-\beta\ \ 1-\alpha\ \ \left(1-\frac{2}{p}\right)\right), & 2\leq p<2+\frac{\alpha}{1-\alpha},\end{cases}$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.1.2 L eğrisi her hangi bir $K>1$ için K -yarıkonform olsun. Bu durumda, $B_{n,p}\ \ z$ $p-$Bieberbach polinomları, her $1<p<2+\frac{K^2-1}{K^2+1}$ ve $n\geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{C\ \bar{G}} \leq \frac{c_2}{n^{\gamma}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \begin{cases} \left(0,\ \frac{1}{pK^2} - \frac{2K^2}{K^2+1}\left(\frac{2}{p}-1\right)\right), & 1<p<2, \\ \left(0,\ \frac{1}{pK^2} - \frac{K^2-1}{K^2\ \ K^2+1}\left(1-\frac{2}{p}\right)\right), & 2\leq p<2+\frac{K^2-1}{K^2+1}, \end{cases}$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.1.3 L eğrisi, her hangi bir $K>1$ için K -yarıkonform olsun. Bu durumda, $B_{n,p}\ \ z$ $p-$Bieberbach polinomları, her $1<p<2+\frac{K^2+1}{K^2-1}$ ve $n\geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{A_p^1\ G} \leq \frac{c_3}{n^{\mu}},$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, μ

$$\mu \in \begin{cases} \left(0,\ \frac{1}{pK^2}\right), & 1<p<2, \\ \left(0,\ \frac{1}{pK^2} - \frac{K^2-1}{K^2\ \ K^2+1}\left(1-\frac{2}{p}\right)\right), & 2\leq p<2+\frac{K^2+1}{K^2-1}, \end{cases} \quad ,$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.1.4. Keyfi $0<\alpha\leq 1$ ve $\frac{1}{2}\leq\beta\leq 1$ sayıları için $G\in Q\ \ \alpha,\beta$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}\ \ z$ $p-$Bieberbach polinomları her $1<p<2+\frac{\alpha}{1-\alpha}$ ve $n\geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{A_p^1\ G} \leq \frac{c_4}{n^{\mu}},$$

eşitsizliğini sağlar. Burada μ,

$$\mu \in \begin{cases} \left(0,\ \dfrac{\alpha\beta}{2} + \ \beta - 1\ \left(\dfrac{2}{p} - 1\right)\right), & 1 < p < 2, \\ \left(0,\ \dfrac{\alpha\beta}{p} - \beta\ 1 - \alpha\ \left(1 - \dfrac{2}{p}\right)\right), & 2 \leq p < 2 + \dfrac{\alpha}{1-\alpha}, \end{cases}$$

keyfi sayıdır.

3.6.2. $p-$BIEBERBACH POLİNOMLARININ İÇ SIFIR AÇI İÇEREN PARÇALI ANALİTİK BÖLGELERDE YAKINSAKLIĞI

Tanım 3.6.2.1. G bölgesi; $L := \partial G$ eğrisi sonlu sayıda analitik yaylarının $z_0,\ z_1,\ z_2,\ ...,\ z_m$ noktalarındaki birleşiminden oluşur öyle ki, L eğrisi z_0 noktasında yerel analitik bir eğri ve her bir $1 \leq j \leq m$ için z_j birleşme noktalarında G bölgesi $\lambda_j \pi \quad 0 < \lambda_j < 2$ köşeli dış açıya sahip ve $\lambda := \min\limits_{1 \leq j \leq m} \lambda_j$ ise, G bölgesine $A\ \lambda$ sınıfındandır denir.

Eğer $\lambda = 1$ ise G bölgesi analitik eğri ile sınırlı bölge olur.

Teorem 3.6.2.1. Her hangi bir $0 < \lambda < 2$ sayısı için $G \in A\ \lambda$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}\ z \quad p-$Bieberbach polinomları her $1 < p < \dfrac{2}{1-\lambda_*}$ ve $n \geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{A_p^1} \leq \frac{c_5}{n^{\gamma}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada

$$\gamma := \gamma\ \lambda; p\ = \frac{\lambda\ \lambda - 1}{2 - \lambda} + \frac{2}{p}\lambda,\ \lambda^* := \max\ 1, \lambda\ ,\ \ \lambda_* := \min\ 1, \lambda\ .$$

Teorem 3.6.2.2. Her hangi bir $0<\lambda<2$ sayısı için $G\in A(\lambda)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $\alpha(\lambda)<p<\frac{2}{1-\lambda_*}$ ve $n:=1,2,...,$ için

$$\left\|\varphi-B_{n,p}\right\|_C \leq c_6 \begin{cases} n^{-\gamma}, & 2<p<\dfrac{2}{1-\lambda_*}, \\ n^{-\gamma}\log n, & p=2, \\ n^{-\gamma+(2/p-1)\lambda^*}, & \alpha(\lambda)<p<2, \end{cases}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada

$$\alpha(\lambda):=\max\left\{1,\frac{2(1-\lambda)(2-\lambda)}{1+(1-\lambda)^2}\right\}.$$

3.6.3. $p-$BIEBERBACH POLİNOMLARININ İÇ SIFIR AÇI İÇEREN PARÇALI DÜZGÜN BÖLGELERDE YAKINSAKLIĞI

Bu kısımda, keyfi $0<\lambda<2$ ve $0\leq\alpha<1$ sayıları için $C_\theta(\lambda,\alpha)$ sınıfından olan G bölgesinde $\{B_{n,p}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ $p-$Bieberbach polinomlar dizisinin $w=\varphi(z)$ konform dönüşümüne yakınsaması incelenecek ve yakınsama hızı belirlenecektir.

3.6.3.1. Temel Sonuçlar

Elde edilen teoremler verilmeden önce aşağıda tanımlanan işaretlemelere ihtiyaç duyulacaktır.

$$\beta(p):=\frac{\sqrt{9p^2+20p+132}+3p-18}{16},$$

$$\vartheta_1:=\min\left\{\frac{(2-p)+2\alpha}{2p(1+\alpha)},\frac{\lambda}{2-\lambda}+\frac{\lambda(2-p)}{p}\right\},$$

$$\vartheta_2:=\min\left\{\frac{(2-p)+2\alpha}{2p(1+\alpha)},\ \min\left\{\frac{1}{2(1+\alpha)},\frac{\lambda}{2-\lambda}\right\}+\frac{2-p}{2p}\right\},$$

$$\vartheta_3:=\frac{(2-p)+2\alpha}{2p(1+\alpha)},\quad \theta_*:=\min(1,2-\lambda),\quad \theta^*:=\max(1,2-\lambda).$$

Teorem 3.6.3.1. $\frac{3}{2} < p < 2$ olsun. $\frac{2}{3+2\min\left\{\frac{2(p-1)}{p+2}, \beta(p)\right\}} < \lambda \leq \frac{2}{3}$ olmak üzere $\frac{1}{\lambda} - \frac{3}{2} \leq \alpha < \min\left\{\frac{2(p-1)}{p+2}, \beta(p)\right\}$ için $G \in C_{\theta}(\lambda, \alpha)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $n \geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_7}{n^{\gamma}}$$

sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \frac{2-(p+2)\alpha}{2p(1+\alpha)} - \frac{2}{p}(2+2\alpha-p)\right)$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.3.2. $\frac{3}{2} < p < 2$ olsun. $\frac{2}{3} < \lambda < 2$ olmak üzere $0 \leq \alpha < \min\left\{\frac{2(p-1)}{p+2}, \beta(p)\right\}$ için $G \in C_{\theta}(\lambda, \alpha)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $n \geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_8}{n^{\gamma}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \frac{2-(p+2)\alpha}{2p(1+\alpha)} - \frac{2}{p}(2+2\alpha-p)\right)$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.3.3. $2 \leq p < 2\sqrt{2}$ olsun. $\sqrt{2}-1 \leq \alpha \leq \min\left\{\frac{2}{p+2}, \beta(p)\right\}$ ve $0 < \lambda \leq 1$ sayıları için $G \in C_\theta(\lambda, \alpha)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $n \geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_9}{n^\gamma}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \frac{2-(p+2)\alpha}{2p(1+\alpha)} - \frac{2}{p}(2+2\alpha-p)\right)$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.3.4. $2 \leq p < 2\sqrt{2}$ olmak üzere $\sqrt{2}-1 \leq \alpha \leq \min\left\{\frac{2}{p+2}, \beta(p)\right\}$ ve $1 \leq \lambda < 1 + \frac{1}{2\alpha}$ sayıları için $G \in C_\theta(\lambda, \alpha)$ olsun Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $n \geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_{10}}{n^\gamma}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \frac{2-(p+2)\alpha}{2p(1+\alpha)} - \frac{2}{p}(2+2\alpha-p)\right)$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.3.5. $0 \leq \alpha < \sqrt{2}-1$ olmak üzere $2(1+\alpha) \leq p < 2 + \frac{1}{1-\theta_*}$ ve $0 < \lambda \leq 2$ sayıları için $G \in C_\theta(\lambda, \alpha)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $n \geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_{11}}{n^{\gamma}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \frac{2-(p+2)\alpha}{2p(1+\alpha)}\right)$$

keyfi sayıdır.

3.6.4. $p-$BIEBERBACH POLİNOMLARININ $PQ(K,\alpha)$ SINIFINDAN OLAN BÖLGELERDE YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, keyfi $K \geq 1$ ve $0 \leq \alpha < 1$ sayıları için kompleks düzlemde verilen G bölgesinin $PQ(K,\alpha)$ bölgeler sınıfından olması durumu ele alınarak $\{B_{n,p}(z)\}_{n=1}^{\infty}$ $p-$Bieberbach polinomlar dizisinin; G bölgesinin kapanışında $w=\varphi(z)$ konform dönüşümüne düzgün yakınsaması ve yakınsama hızının belirlenmesi problemi verilecektir.

3.6.4.1. Temel Sonuçlar

Elde edilen yeni sonuçlar verilmeden önce bazı notasyonlar aşağıdaki şekilde kabul edilecektir.

$$\beta(p,K) := \frac{1}{2}\sqrt{\left(\frac{4-p}{2}+\frac{p+2}{8(K^2+1)}\right)^2 - 4\left(\frac{2-p}{2}-\frac{1}{4(K^2+1)}\right)} - \left(\frac{4-p}{4}+\frac{p+2}{16(K^2+1)}\right)$$

$$\alpha^{*} \in \left[0, \sqrt{2}-1\right]$$

Teorem 3.6.4.1. $K \geq 1$ ve $0 \leq \alpha < \min\left\{ \frac{2(p-1)}{p+2}, \beta(p,K) \right\}$ sayıları için $G \in PQ(K,\alpha)$ ve $2 - \frac{1}{2(K^2+1)} \leq p < 2$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $n \geq 2$ için

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_{12}}{n^{\gamma}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \frac{2-(p+2)\alpha}{2p(1+\alpha)(K^2+1)} - \frac{2}{p}(2+2\alpha-p) \right)$$

keyfi sayıdır.

Sonuç 3.6.4.1. $\frac{7}{4} \leq p < 2$ sayısı verilsin öyle ki $1 \leq K \leq \sqrt{\frac{1}{2(2-p)} - 1}$ ve $0 \leq \alpha < \min\left\{ \frac{2(p-1)}{p+2}, \beta(p,K) \right\}$ sayıları için $G \in PQ(K,\alpha)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $n \geq 2$ için

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_{13}}{n^{\gamma}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \frac{2-(p+2)\alpha}{2p(1+\alpha)(K^2+1)} - \frac{2}{p}(2+2\alpha-p) \right)$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.4.2. $2 \leq p < 2\sqrt{2}$ sayısı verilsin öyle ki $1 \leq K < \sqrt{1 + \frac{1}{p-2}}$ ve $\sqrt{2} - 1 \leq \alpha < \frac{2}{p+2}$ sayıları için $G \in PQ(K,\alpha)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $n \geq 2$ için

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_{14}}{n^{\gamma}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \frac{2-(p+2)\alpha}{2p(1+\alpha)(K^2+1)} - \frac{2}{p}(2+2\alpha-p)\right)$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.4.3. $2 < p < 2\sqrt{2}$ sayısı verilsin öyle ki $K \geq \sqrt{1+\frac{1}{p-2}}$ ve

$$\max\left\{\sqrt{2}-1, \frac{2(p-2)K^2-2(p-1)}{(8-p)K^2+2(p-1)}\right\} \leq \alpha < \frac{2}{p+2}$$ sayıları için $G \in PQ(K,\alpha)$

olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $n \geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_{15}}{n^{\gamma}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \frac{2-(p+2)\alpha}{2p(1+\alpha)(K^2+1)} - \frac{2}{p}(2+2\alpha-p)\right)$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.4.4. $2 < p < 2\sqrt{2}$ sayısı verilsin öyle ki $K \geq \sqrt{1+\frac{1}{p-2}}$,

$$\sqrt{2}-1 \leq \alpha < \min\left\{\frac{2(p-2)K^2-2(p-1)}{(8-p)K^2}, \frac{(3-p)K^2+p-1}{4K^2(K^2+1)} + \frac{p-2}{2}\right\}$$ sayıları için

$G \in PQ(K,\alpha)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $n \geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_{16}}{n^{\gamma}}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \left(\frac{1}{pK^2} - \frac{(p-2)(K^2-1)}{pK^2(K^2+1)}\right) - \frac{2}{p}(2+2\alpha-p)\right)$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.4.5. $K \geq 1$ ve $0 \leq \alpha < \min\left\{\sqrt{2}-1, \frac{K^2+1}{2(K^2-1)}\right\}$ sayıları için $G \in PQ(K,\alpha)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $p = 2(1+\alpha)$ ve $n \geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_{17}}{n^\gamma}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \frac{1}{2(1+\alpha)}\min\left\{1 - \frac{\alpha(2+\alpha)}{2(1+\alpha)(K^2+1)}, \frac{1}{K^2} - \frac{2\alpha(K^2-1)}{K^2(K^2+1)}\right\}\right)$$

keyfi sayıdır.

Teorem 3.6.4.6. $K \geq 1$ ve $2(1+\alpha^*) < p < 2 + \frac{K^2+1}{K^2-1}$ sayısı verilsin öyle ki $0 \leq \alpha < \min\left\{\frac{2}{p+2}, \alpha^*\right\}$ sayısı için $G \in PQ(K,\alpha)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $p-$Bieberbach polinomları her $n \geq 2$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_{18}}{n^\gamma}$$

eşitsizliğini sağlar. Burada, γ

$$\gamma \in \left(0, \frac{1}{p}\min\left\{\frac{2-(p+2)\alpha}{2(1+\alpha)(K^2+1)}, \frac{1}{K^2} - \frac{(p-2)(K^2-1)}{K^2(K^2+1)}\right\}\right)$$

keyfi sayıdır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

4.1. $p-$BIEBERBACH POLİNOMLARININ $PQ(K,\alpha,\beta)$ SINIFINDAN OLAN BÖLGELERDE YAKINSAKLIĞI

4.1.1. Temel Sonuçlar

Teorem 4.1.1.1. $2<p<3;\ K>1,\quad 0<\alpha<\frac{4}{p}-1,\quad 0\le\beta<\frac{p}{2}-1$ sayıları için $G\in PQ(K,\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)\ (n\ge 2)$ polinomları

$$\left\|\varphi-B_{n,p}\right\|_{C(\bar{G})}\le c_1\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3-p}{2\alpha p}}, & 0<\alpha\le\dfrac{1}{p},\\[2ex] \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{(4-p)(1+\alpha)}{2p\alpha}}, & \dfrac{1}{p}<\alpha<\dfrac{4}{p}-1,\end{cases}$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 4.1.1.2. $2<p\le 2\sqrt{2};\ 1<K<\min\left\{\sqrt{\frac{3}{2}},\sqrt{\frac{p-1}{p-2}},\sqrt{\frac{2p(p-1)}{p^2-4p+8}}\right\}$, $\max\left\{\frac{p(K^2-2)+2}{(4-p)K^2+2(p-1)},0\right\}<\beta<\frac{p}{2}-1$ sayıları için $G\in PQ(K,0,\beta)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)\ (n\ge 2)$ polinomları

$$\left\|\varphi-B_{n,p}\right\|_{C(\bar{G})}\le\frac{c_2}{n^{\gamma}}$$

eşitsizliğini $\forall\gamma,0<\gamma<\frac{(4-p)(1+\beta)}{2p(1+\beta)K^2}$, için sağlar.

Teorem 4.1.1.3. $2\sqrt{2} < p < 4$;

$1 < K < \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\quad \max\left\{ \frac{p\left(K^2-2\right)+2}{(4-p)\left(K^2+2\right)(p-1)}, 0 \right\} < \beta < \frac{4}{p} - 1$ sayıları için

$G \in PQ(K, 0, \beta)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $(n \geq 2)$ polinomları

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_3}{n^{\gamma}},$$

eşitsizliğini $\forall \gamma, 0 < \gamma < \frac{(4-p)(1+\beta)}{2p(1+\beta)K^2}$, için sağlar.

Teorem 4.1.1.4. $2 < p < 4$;

$\sqrt{\frac{2(p-1)}{p}} < K < \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\quad 0 < \beta < \min\left\{ \frac{p\left(K^2-2\right)+2}{(4-p)\left(K^2+2\right)(p-1)}, \frac{p}{2} - 1 \right\}$ sayıları için

$G \in PQ(K, 0, \beta)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $(n \geq 2)$ polinomları

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_4}{n^{\gamma}},$$

eşitsizliğini $\forall \gamma, \quad 0 < \gamma < \frac{1-\left(K^2-1\right)(p-2)}{pK^4}$, için sağlar.

Teorem 4.1.1.5. $2 < p < 4$;

$1 < K < \min\left\{ \sqrt{\frac{3}{2}}, \sqrt{\frac{2p(p-1)}{p^2-4p+8}} \right\}$,

$\max\left\{ \frac{p\left(K^2-2\right)+2}{(4-p)\left(K^2+2\right)(p-1)}, 0 \right\} < \beta < \min\left\{ \frac{4}{p} - 1, \frac{p}{2} - 1 \right\}$ sayıları için $G \in PQ(K, 0, \beta)$

olsun. Bu durumda $B_{n,p}(z)$ $(n \geq 2)$ polinomları

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{C(\bar{G})} \leq \frac{c_5}{n^{\gamma}},$$

eşitsizliğini $\forall \gamma, \quad 0 < \gamma < \frac{1-\left(K^2-1\right)(p-2)}{pK^4}$, için sağlar.

Teorem 4.1.1.6. $K \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ verilmiş sayısı için $2 < p < 2 + \frac{1}{K^2 - 1}$ olsun; $K \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$, $0 < \beta < \min\left\{ \frac{p\left(K^2 - 2\right) + 2}{\left(4 - p\right)\left(K^2 + 2\right)\left(p - 1\right)}, \frac{p}{2} - 1, \frac{4}{p} - 1 \right\}$ sayıları için $G \in PQ\left(K, 0, \beta\right)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}\left(z\right)$ $\left(n \geq 2\right)$ polinomları

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{C\left(\bar{G}\right)} \leq \frac{c_6}{n^{\gamma}},$$

eşitsizliğini $\forall \gamma$, $0 < \gamma < \frac{1 - \left(K^2 - 1\right)\left(p - 2\right)}{pK^4}$, için sağlar.

Teorem 4.1.1.7. $p = 2$; $K > 1$, $0 < \alpha < \frac{1}{2}$ sayıları için $G \in PQ\left(K, \alpha, 0\right)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}\left(z\right)$ $\left(n \geq 2\right)$ polinomları

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{C\left(\bar{G}\right)} \leq c_7 \sqrt{\ln \ln n} \left(\frac{1}{\ln n} \right)^{\frac{1 - 2\alpha}{2\alpha}}$$

eşitsizliğini sağlar.

Teorem 4.1.1.8. $1 < p \leq 2$; $1 < K \leq \min\left\{ K_1, \sqrt{\frac{2}{2 - p}} \right\}$, $\frac{4K^2}{pK^2 + 2} - 1 < \beta < \beta_1$ sayıları için $G \in PQ\left(K, 0, \beta\right)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}\left(z\right)$ $\left(n \geq 2\right)$ polinomları

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{C\left(\bar{G}\right)} \leq c_8 \frac{\sqrt{\ln n}}{n^{\gamma}},$$

eşitsizliğini $\forall \gamma, 0 < \gamma < \frac{\left(4 - p\right)\left(1 + \beta\right)}{2p\left(1 + \beta\right)K^2} - \frac{2}{p}\left(2\beta + 2 - p\right)$, için sağlar. Burada,

$$\beta_1 := \frac{\sqrt{16p^2K^4 + 128K^2 - 8p^2K^2 + p^2} - \left(16K^2 - 4pK^2 + p\right)}{16K^2}$$

ve

$$K_1 := \max\left\{ K : \frac{4K^2}{pK^2 + 2} - 1 < \beta_1 \right\}$$

dır.

Teorem 4.1.1.9. $1<p\le 2$; $K>1$, $\quad 0<\beta<\min\left\{1;\ \dfrac{(1-2K^4)(2-p)}{2K^4},\ \dfrac{4K^2}{pK^2+2}-1\right\}$ sayıları için $G\in PQ(K,0,\beta)$ olsun. Bu durumda, $B_{n,p}(z)$ $(n\ge 2)$ polinomları

$$\left\|\varphi-B_{n,p}\right\|_{C(\overline{G})}\le c_9 n^{-\gamma}$$

eşitsizliğini $\forall\gamma, 0<\gamma<\left(\dfrac{1}{pK^4}-\dfrac{2}{p}\right)(2\beta+2-p)$, için sağlar.

$$\left\|\varphi-B_{n,p}\right\|_{C(\overline{G})}\le c_1\begin{cases}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3-p}{2\alpha p}}, & 0<\alpha\le\dfrac{1}{p},\\[2ex] \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{(4-p)(1+\alpha)}{2p\alpha}}, & \dfrac{1}{p}<\alpha<\dfrac{4}{p}-1\end{cases}$$

eşitsizliğini sağlar.

4.1.2. Yardımcı Sonuçlar

$L, K-$ yarıkonform eğri olsun. Böylece, L' ye göre $\alpha(.)$ yarıkonform yansıması vardır öyle ki $\alpha(G)=\Omega, \alpha(\Omega)=G$ ve L'nin noktalarını sabit tutar. $[17, p.76]$' daki sonuçları kullanarak L' ye göre öyle bir $C(K)-$yarıkonform $\alpha(.)$ yansıması bulunabilinir öyle ki, L' nin belli bir komşuluğunda aşağıdaki koşulları sağlar:

$$\left|z_1-\alpha(z)\right|\approx\left|z_1-z\right|, z_1\in L, \varepsilon<|z|<\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\left|\alpha_{\bar z}\right|\approx\left|\alpha_z\right|\approx 1, \varepsilon<|z|<\frac{1}{\varepsilon},$$

$$\left|\alpha_{\bar z}\right|\approx\left|\alpha_z\right|^2, |z|<\varepsilon, \left|\alpha_{\bar z}\right|\approx|z|^{-2}, |z|>\frac{1}{\varepsilon}, \tag{4.1.2.1}$$

$$\left|\alpha(z)-z'\right|\approx\left|z-z'\right|, z'\in L;$$

$$J_\alpha:=\left|\alpha_z\right|^2-\left|\alpha_{\bar z}\right|^2 : J_\alpha\approx 1$$

Lemma 4.1.2.1. [21] L, $K-$yarıkonform eğri olsun ;

$z_1 \in L,\ \ z_2, z_3 \in G \cap \{z : |z - z_1| \le c_1 d(z_1, L_{R_0})\}$,

$w_j = \hat{\varphi}(z_j)\ \ \ (z_2, z_3 \in G \cap \{z : |z - z_1| \le c_2 d(z_1, L_{r_0})\}), w_j = \Phi(z_j)$, $j = 1,2,3.$

Bu durumda;

1) $|z_1 - z_2| \prec |z_1 - z_3|$ *ve* $|w_1 - w_2| \prec |w_1 - w_3|$ ifadeleri denktir.

ve, dolayısıyla,

$|z_1 - z_2| \approx |z_1 - z_3|$ *ve* $|w_1 - w_2| \approx |w_1 - w_3|$ ifadeleri de denktir.

2) Eğer $|z_1 - z_2| \prec |z_1 - z_3|$ ise aşağıdaki ifadeler sağlanır:

$$\left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^{-2}} \prec \left|\frac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right| \prec \left|\frac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^2}, \quad z_3 \in L_{r_0}$$

Böylece,

$$|w_1 - w_2|^{K^2} \prec |z_1 - z_2| \prec |w_1 - w_3|^{K^{-2}}. \qquad (4.1.2.2.)$$

Burada, $1 < R_0 \le 2$ ve $r_0 = R_0^{-1}$ sayıları tespit edilmiş sabitlerdir.

Lemma 4.1.2.2. [34,35] L, $K-$yarıkonform eğri olsun. Böylece, $\forall z \in L$ ve $z_0 \in G$ için G bölgesinde, z ile z_0 noktalarını birleştiren $l(z, z_0)$ yayı vardır öyle ki aşağıdaki özellikleri sağlar:

i) $\forall \varsigma \in l(z, z_0)$ için $d(\varsigma, L) \approx |\varsigma - z|$,

ii) $\forall \varsigma_1, \varsigma_2 \in l(z, z_0)$ için eğer $\hat{l}(\varsigma_1, \varsigma_2)$, $l(z, z_0)$ ’ ın alt yayı ise $mes\,\hat{l}(\varsigma_1, \varsigma_2) \prec |\varsigma_1 - \varsigma_2|$.

Lemma 4.1.2.3. [7] L, $K-$yarıkonform eğri olsun. Her ölçülebilir $l \subset D$ yayı için

$mes\, l \approx mes\, \alpha(l)$ sağlanır.

İspat : (4.1.2.3.) l yayının doğal parametrizasyonu $z=z(s)$, $0\le s\le mes\,l$ olsun. l ölçülebilir bir eğri olduğundan her yerde $\dfrac{dz}{ds}$ vardır öyle ki $\left|\dfrac{dz}{ds}\right|=1$. Sonuç olarak, (2.1)'e göre aşağıdaki ifade elde edilir:

$$mes\,\alpha(l)=\int_0^{mesl}\left|\frac{d\alpha(s)}{ds}\right|ds=\int_0^{mesl}\left|\frac{d\alpha(s)}{ds}\right|\left|\frac{dz}{ds}\right|ds\approx mesl\,.$$

Lemma 4.1.2.4. $L,\ K-$yarıkonform eğri olsun.

$$G^{\varepsilon}=\left\{z: z\in G\cap D, d(z,L)<\varepsilon<\frac{1}{2}d(\partial D,L)\right\}$$ olsun. Bu durumda

a) $mes\,G^{\varepsilon}\approx mes\,\alpha(G^{\varepsilon})$,

b) $mes\,\widehat{\varphi}(G^{\varepsilon})\prec\varepsilon^{\delta}$, $\delta^{-1}:=\min(2,K^2)$ eşitsizlikleri sağlanır.

İspat (4.1.2.4.) a) $\alpha(.)$ dönüşümünün Jakobianı

$J_{\alpha}(z):=\left|\alpha_z(z)\right|^2-\left|\alpha_{\bar{z}}(z)\right|^2$ olsun. Böylece, (2.1)'e göre aşağıdaki ifade elde edilir:

$$mes\alpha(G^{\varepsilon})=\iint_{G^{\varepsilon}}-J_{\alpha}(z)\,d\sigma_z\approx\iint_{G^{\varepsilon}}d\sigma_z\approx mesG^{\varepsilon}$$

b) $$mes\widehat{\varphi}(G^{\varepsilon})\le\sup_{z\in\bar{G}^{\varepsilon}}\pi\left(1-\left|\widehat{\varphi}(z)\right|^2\right)\prec\sup_{z\in\bar{G}^{\varepsilon}}\left(1-\left|\widehat{\varphi}(z)\right|\right).$$

Bundan dolayı, (4.1.2.1.) göre

$$d(z,L)\succ\left(1-\left|\widehat{\varphi}(z)\right|\right)^{K^2}\qquad(4.1.2.3.)$$

elde edilir.

Diğer yandan,

$$d(z,L)\succ\left(1-\left|\widehat{\varphi}(z)\right|\right)^{2}$$

keyfi kontinuum [25, p.181] için sağlanır ve böylece ispat biter.

Lemma 4.1.2.5. [36] L, $K-$yarıkonform eğri olsun. Bu durumda,

$\forall u,\ 0<u<R_0-1$ için

$$mes\alpha\ (G_{1+u}/G) \prec u^{\frac{1}{K^2}}$$

sağlanır.

4.1.3. $G\in PQ(K,\alpha,\beta)$ Bölgesinin Bazı Özellikleri

Tanım: $G\subset\mathbb{C}$ de bir bölge; $L:=\partial G,$ sonlu sayıda K_j-yarıkonform yayların $z_0, z_1, z_2,...,z_m$ noktalarındaki birleşimi ve $K:=\max\limits_{1\le j\le m} K_j$ olsun. Eğer L, z_0 noktasındaki yerel $K-$yarıkonform ve $z_1, z_2,...,z_m$ noktalarında ise bu noktalar (x,y) yerel koordinat sisteminin başlangıç noktaları ve $-\infty<c_1<c_2<\infty,\ -\infty<c_3<c_4<\infty,\ \varepsilon_i>0,\ i=\overline{1,4}$ olmak üzere;

a) $j=\overline{1,p}$ için

$$\{z=x+iy: c_1x^{1+\alpha}\le y\le c_2x^{1+\alpha}, 0\le x\le\varepsilon_1\}\subset\overline{\Omega},$$

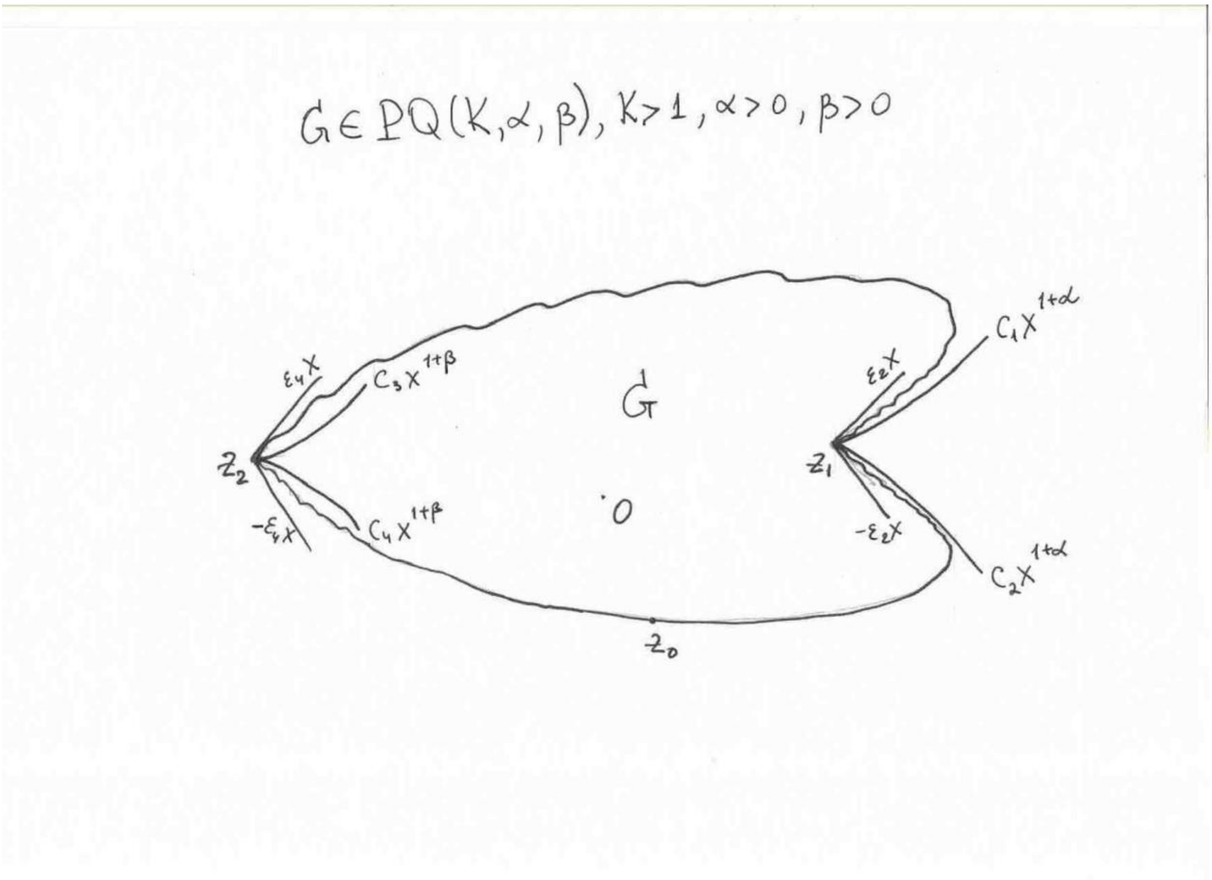
$$\{z=x+iy: |y|\ge\varepsilon_2 x,\ 0\le x\le\varepsilon_1\}\subset\overline{G}$$

b) $j=\overline{p+1,m}$ için

$$\{z=x+iy: c_3x^{1+\beta}\le y\le c_4x^{1+\beta}, 0\le x\le\varepsilon_3\}\subset\overline{G},$$

$$\{z=x+iy: |y|\ge\varepsilon_4 x,\ 0\le x\le\varepsilon_3\}\subset\overline{\Omega}$$

koşulları sağlanırsa "G bölgesi $PQ(K,\alpha,\beta), K\ge1,\alpha\ge0,\beta\ge0$ sınıfındandır" denir. Bu tanımdaki G bölgesine bir örnek Şekil-5 de gösterilmiştir.



Şekil-5

Farz edelim ki $G\in PQ(K,\alpha,\beta)$ bölgesi verilsin. Genelliği kaybetmeksizin , $\alpha>0,\ \beta>0;\ p=1,\ m=2,\ z_1=1,\ z_2=-1;\quad (-1,1)\subset G$ olsun ve yerel koordinat sistemi z_1 ve z_2 noktalarına öyle yerleştirilsin ki, eksenleri genel koordinat sisteminde OX ve OY ‘e paralel olsun.

$L^1 := \{z : z\in L, \operatorname{Im} z\geq 0\}$, $L^2 := \{z : z\in L, \operatorname{Im} z\leq 0\}$ olarak alınsın. z_0 noktası L^2 üzerinde keyfi bir nokta olsun.

$G\in PQ(K,\alpha,\beta)$ bölgesi, $z_1=1,\ z_2=-1$ noktalarının yakın komşuluklarında iç ve dış sıfır açılara sahiptir. $w=\Phi(z)$ $(w=\tilde{\varphi}(z))$ fonksiyonu $G\in PQ(K,\alpha,\beta)$ bölgesi için , $z_2=-1$ $(z_1=1)$ noktasının yakın komşuluğunda Lemma 2.1 ‘ in şartlarını sağlar. Sonuç olarak, Lemma 2.1 den aşağıdakiler elde edilir:

$\forall z\in M_1 := \{z\in G : |z+1|>\varepsilon_1\}$ ve $\forall z\in M_2 := \{z\in \Omega : |z-1|>\varepsilon\}$ için uygun olarak

$$d(z,L) \prec \left(|\tilde{\varphi}(z)|-1\right)^{K^{-2}}; \; |z-1| \prec |\tilde{\varphi}(z)-\tilde{\varphi}(1)|^{K^{-2}}, \tag{4.1.3.1}$$
$$d(z,L) \prec \left(|\phi(z)|-1\right)^{K^{-2}}; \; |z+1| \prec |\phi(z)-\phi(-1)|^{K^{-2}}$$

sağlanır. Diğer yandan, $w=\Phi(z)$ ve $w=\tilde{\varphi}(z)$ fonksiyonlarının özelliklerini kullanarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$|z-1| \prec \left[-\ln|\Phi(z)-\Phi(1)|\right]^{-\alpha^{-1}}, \; |z+1| \prec \left[-\ln|\tilde{\varphi}(z)-\tilde{\varphi}(-1)|\right]^{-\beta^{-1}}. \tag{4.1.3.2}$$

Lemma 4.1.3.1. $K>1, \alpha>0, \beta>0$ sayıları için $z_0 \in G$ olmak üzere $G \in PQ(K,\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda, $\forall z \in G \setminus \{z_0\}$ için öyle ki $|z-z_j|<\varepsilon_j$, $j=1,2$

$$|\varphi(z,z_0)-\varphi(z_j,z_0)| < \left[\frac{|z-z_j|}{d(z_0,L)}\right]^{\frac{1}{2}}.$$

sağlanır.

4.1.4. Polinomların C-Normunda Değerlendirilmesi

Lemma 4.1.4.1. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $0 \in G$; $L := \partial G$ Jordan eğrisi ve $z \in L$ keyfi seçilmiş bir nokta olsun. 0 ile $z \in L$ noktalarını birleştiren ve G 'nin içinde kalan en az bir $\gamma(0,z)$ yayı varsa öyle ki aşağıdaki özellikleri

i) Her bir $\zeta_1, \zeta_2 \in \gamma(0,z)$ için $mes\,\gamma(\zeta_1,\zeta_2) \prec |\zeta_1-\zeta_2|$,

ii) $f(t)$ monoton artan bir fonksiyon olmak üzere $\forall \zeta \in \gamma(0,z)$ için $f(|\zeta-z|) \prec d(\zeta,L)$

sağlasın. Bu durumda, derecesi n 'yi aşmayan ve $P_n(0)=0$ koşulunu sağlayan tüm $P_n(z)$ polinomları için

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \prec \left\{\int_{\varepsilon n^{-2}}^{c} f^{-\frac{2}{p}}(t)\,dt\right\} \|P_n\|_{A_p^1(G)}, \quad p>0$$

olur.

Sonuç 4.1.4.1. Keyfi $K \geq 1,\ \alpha \geq 0,\ \beta > 0$ sayıları için $G \in PQ(K,\alpha,\beta)$ olsun. Böylece,

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \prec \beta_n \|P_n\|_{A_p^1(G)},$$

koşulu sağlanır. Burada,

$$\beta_n = \begin{cases} n^{\frac{2}{p}(2\beta+2-p)}, & p<2, \\ \ln n, & p=2, \\ c, & p>2. \end{cases}$$

4.1.5. Cauchy İntegralinin L_p − Normunda Değerlendirilmesi

$G \subset \mathbb{C}$ keyfi bir Jordan bölgesi ve $\gamma \in \Omega$ yayı, bitim noktası olan $z_0 \in L = \partial G$ hariç, düzlendirilebilir bir eğri olmak üzere; aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) Her bir $\zeta_1,\ \zeta_2 \in \gamma$ için $mes\gamma(\zeta_1, \zeta_2) \prec |\zeta_1 - \zeta_2|$,

ii) $g(t)$ monoton artan bir fonksiyon vardır öyle ki; $\forall \zeta \in \gamma$ için $g(|\zeta - z_0|) \prec d(\zeta, L)$.

Lemma 4.1.5.1. Yukarda verilen G bölgesi için γ yayı üzerinde ölçülebilir $f(t)$ fonksiyonu verilsin öyle ki belli bir $\upsilon(t)$ monoton artan ve $\upsilon(0) = 0$ koşullu fonksiyonu için

$$|f(\zeta)| \prec \upsilon(|\zeta - z_0|),\ \forall \zeta \in \gamma$$

sağlansın. Bu durumda,

$$F_\gamma(z) := \int_\gamma \frac{f(\zeta)}{\zeta - z} d\zeta, \quad z \notin \gamma$$

fonksiyonu aşağıdaki eşitsizliği sağlar:

$$\|F_\gamma\|^2_{A_p^1(G)} \preccurlyeq \ell^{\frac{4(1-p)}{p}} \left[\int_0^{\ell} \upsilon(t)\,dt\right]^2 + \begin{cases} \ell^{\frac{2(2-p)}{p}} \displaystyle\int_0^{c\ell} \upsilon^2(t)\left[\frac{1}{t}+\frac{h_{0,1}(t)}{t^2}+h_{2,1}(t)\right]dt & ;1<p<2 \\ \displaystyle\int_0^{c\ell}\upsilon^2(t)\left[t^{\frac{4-3p}{p}}+\frac{1}{t^2}h^{2/p}_{0,\frac{p}{2}}(t)+h^{2/p}_{p,\frac{p}{2}}(t)\right]dt & ;p\ge 2 \end{cases}$$

dir. Burada $h_{\lambda,\mu}(t) := \int_0^t \frac{r^{1-\lambda}}{g^{\mu}(r)}dr$, $\ell := mes(\gamma)$ dır

Sonuç 4.1.5.1. Keyfi $K>1,\ 0<\beta<\min\left\{1,\frac{4}{p}-1\right\};\ \nu(t)=\sqrt{t}$ için $G\in PQ(K,0,\beta)$ olsun. Bu durumda,

$$\|F_\gamma'\|_{A_p(G)} \prec \begin{cases} |\ln l|^{\frac{1}{2}}.l^{\frac{2}{p}-\frac{1+\beta}{2}}, & \beta<1;\ 1<p\le 2, \\ l^{\frac{2}{p}-\frac{1+\beta}{2}}, & \beta<\frac{4}{p}-1;\ 2<p<4 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

Sonuç 4.1.5.2. Bazı $K>1,\ 0<\alpha<\min\left\{1,\frac{4}{p}-1\right\};\ \nu(t)=\sqrt{t}$ için $G\in PQ(K,\alpha,0)$ olsun. Bu durumda,

$$\|F_\gamma'\|_{A_p(G)} \prec \begin{cases} |\ln l|^{\frac{1}{2}}.l^{\frac{2}{p}-\frac{1+\alpha}{2}}, & \alpha<1, \quad 1<p\le 2, \\ l^{\frac{2}{p}-\frac{1+\alpha}{2}}, & \alpha<\frac{4}{p}-1,\ 2<p<4 \end{cases}$$

eşitsizliği sağlanır.

4.1.6. $A_p^1(G)$ −Normunda Yaklaşım

Herhangi bir $\alpha>0,\ \beta>0$ sabitleri için $G\in PQ(K,\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda basitlik için, fakat genelliği kaybetmeksizin, G bölgesi sayfa 44 de ifade edildiği gibi alınır.

L_j, $i, j=1,2$ eğrisi yarıkonform eğridir. $\alpha_j(.)$, L_j -ye göre yarıkonform yansıma olsun.

$$\gamma_1^1 := \left\{ z = x + iy : y = \frac{2c_1 + c_2}{3} (x-1)^{1+\alpha} \right\};$$

$$\gamma_1^2 := \left\{ z = x + iy : y = \frac{c_1 + 2c_2}{3} (x-1)^{1+\alpha} \right\};$$

$$\gamma_2^1 := \alpha_1 \left\{ z = x + iy : y = \frac{2c_3 + c_4}{3} (x+1)^{1+\beta} \right\};$$

$$\gamma_2^2 := \alpha_2 \left\{ z = x + iy : y = \frac{c_3 + 2c_4}{3} (x+1)^{1+\beta} \right\},$$

buradaki $c_j \ (=1,2,3,4)$ sabitleri $G \in PQ(K,\alpha,\beta)$ sınıfının tanımından alınmıştır. Lemma 4.1.2.3 ten görülür ki, $mes\gamma_j^i(\varsigma_1,\varsigma_2) \prec |\varsigma_1 - \varsigma_2|$, $\forall \varsigma_1,\varsigma_2 \in \gamma_j^i$, $i,j=1,2$.

Yeterince küçük $0<\varepsilon<1$ sayısı için $R := 1 + cn^{\varepsilon-1}$ olsun. Ayrıca L_R seviye eğrisi ile γ_j^i yaylarının kesim noktaları $z_j^i \ (i,j=1,2)$ olarak işaretlenir ve böyle noktalar kesişimin birinci noktaları olsunlar: $\tilde{L}_R^1 := \{z : z \in L_R, \operatorname{Im} z \ge 0\}$ ve $\tilde{L}_R^2 := L_R / \tilde{L}_R^1$. Bu noktalar L_R seviye eğrisini dört kısma ayırır: $L_R^1 := L_R^1(z_1^1, z_2^1)$ (z_1^1, z_2^1 bitiş noktaları), $L_R^2 := L_R^2(z_2^2, z_1^2)$, $L_R^3 := L_R^3(z_1^2, z_1^1)$, $L_R^4 := L_R^4(z_2^2, z_2^1)$, $L_R := \bigcup_{j=1}^{4} L_R^j$. ± 1 noktaları ile z_i^j noktalarını birleştiren alt yaylar γ_i^j ile gösterilsin. $\Gamma_R^j := \gamma_1^j(R) \cup \gamma_2^j(R) \cup L_R^j$, $U_j := \operatorname{int}(\Gamma_R^j \cup L^j)$, $i,j=1,2$.

φ fonksiyonunu G bölgesinden $U_1 \cup U_2$ -ye aşağıdaki şekilde genişletilir:

$$\tilde{\varphi}(z) := \begin{cases} \varphi(z), & z \in \overline{G} \\ \varphi(\alpha_j(z)), & z \in U_j. \end{cases} \qquad (4.1.6.1.)$$

Aşikardır ki,

$$\tilde{\varphi}_{\bar{z}}(z) = \begin{cases} 0, & z \in G \\ \varphi'_{\alpha_j}(\alpha_j(z)).\alpha_{j,\bar{z}}(z) & z \in U_j \end{cases}. \qquad (4.1.6.2.)$$

Cauchy-Pompeiu formülünden yararlanarak, keyfi bir $z \in G$ için

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R^1 \cup \Gamma_R^2} \frac{\tilde{\varphi}(\varsigma)}{\varsigma - z} d\varsigma - \frac{1}{\pi} \iint_{U_1 \cup U_2} \frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)}{\varsigma - z} d\sigma_{\varsigma}$$

yazılabilir. Bu durumda, yukarıdaki ifade aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\varphi(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{L_R}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma - z}d\varsigma$$

$$+\sum_{i,j=1}^{2}\frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma_i^j(R)}\frac{\tilde{\varphi}(\varsigma)-\varphi\left((-1)^i\right)}{\varsigma - z}d\varsigma - \frac{1}{\pi}\iint_{U_1\cup U_2}\frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)}{\varsigma - z}d\sigma_{\varsigma} \qquad (4.1.6.3.)$$

Burada,

$$f(\varsigma) := \begin{cases} \tilde{\varphi}(\varsigma), & \varsigma \in L_R^1 \cup L_R^2 \\ \varphi(1), & \varsigma \in L_R^3 \\ \varphi(-1), & \varsigma \in L_R^4 \end{cases}$$

dır.

Lemma 4.1.6.1. $1 < p \le 2$; $K > 1, \alpha > 0, \beta \ge 0$ sayıları için $G \in PQ(K,\alpha,\beta)$ olsun. Bu durumda, $\forall n \ge 3$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{A_p^1(G)} \prec \begin{cases} \sqrt{\ln\ln n}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{1}{\alpha p}}, & 0 < \alpha \le \dfrac{2}{p}-1, \\ \sqrt{\ln\ln n}\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{(4-p)(1+\alpha)}{2p\alpha}}, & \dfrac{2}{p}-1 < \alpha < 1, \end{cases} \qquad (4.1.6.4.)$$

sağlanır.

Lemma 4.1.6.2. $1 < p \le 2$; $K > 1$, $\beta > 0$ sayıları için $G \in PQ(K,0,\beta)$ olsun. Bu durumda, $\forall n \ge 3$ ve keyfi küçük $\varepsilon > 0$ için

$$\left\|\varphi - B_{n,p}\right\|_{A_p^1(G)} \prec \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{pK^4}}, & 0 < \beta < \min\left\{1; \dfrac{4K^2}{pK^2+2}-1\right\}, & K > 1, \\ \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{pK^4}}, & 0 < \beta \le \dfrac{4K^2}{pK^2+2}-1, & K < \sqrt{\dfrac{2}{2-p}}, \\ \dfrac{\sqrt{\ln n}}{n^{\frac{(4-p)(1+\beta)-\varepsilon}{2p(1+\beta)K^2}}}, & \dfrac{4K^2}{pK^2+2}-1 < \beta < 1, & K < \sqrt{\dfrac{2}{2-p}}, \end{cases}$$

(4.1.6.5.)

sağlanır.

Lemma 4.1.6.3. $2 < p < 3$; $K > 1$, $0 < \alpha < \frac{4}{p} - 1$, $\beta \geq 0$ sayıları için $G \in PQ(K, \alpha, \beta)$ olsun. Bu durumda, $\forall n \geq 2$ için

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{A_p^1(G)} \prec \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\ln n} \right)^{\frac{3-p}{2\alpha p}}, & 0 < \alpha \leq \dfrac{1}{p}, \\ \left(\dfrac{1}{\ln n} \right)^{\frac{4-p(1+\alpha)}{2\alpha p}}, & \dfrac{1}{p} < \alpha < \dfrac{4}{p} - 1, \end{cases} \tag{4.1.6.6.}$$

sağlanır.

Lemma 4.1.6.4.

a) $2 < p < 4$; $1 < K < \sqrt{\frac{3}{2}}$, $\beta > 0$ sayıları için $G \in PQ(K, 0, \beta)$ olsun. Bu durumda $\forall n \geq 2$ ve keyfi küçük $\varepsilon > 0$ için

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{A_p^1(G)}$$

$$\prec \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n} \right)^{\frac{1-(K^2-1)(p-2)-\varepsilon}{pK^4}}, & 0 < \beta \leq \dfrac{p(K^2-2)+2}{(4-p)(K^2+2)(p-1)}, \quad \sqrt{\dfrac{2(p-1)}{p}} < K < \sqrt{\dfrac{3}{2}}, \\ \left(\dfrac{1}{n} \right)^{\frac{4-p(1+\beta)-\varepsilon}{2p(1+\beta)K^2}}, & \max\left\{ \dfrac{p(K^2-2)+2}{(4-p)(K^2+2)(p-1)}, 0 \right\} < \beta < \dfrac{4}{p} - 1, \quad 1 < K < \sqrt{\dfrac{3}{2}}, \end{cases}$$

b) $2 < p < 2 + \frac{1}{K^2 - 1}$; $K \geq \sqrt{\frac{3}{2}}$ ve $\beta > 0$ sayıları için $G \in PQ(K, 0, \beta)$ olsun. Bu durumda $\forall n \geq 2$ ve keyfi küçük $\varepsilon > 0$ için

$$\left\| \varphi - B_{n,p} \right\|_{A_p^1(G)}$$

$$\prec \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n} \right)^{\frac{1-(K^2-1)(p-2)-\varepsilon}{pK^4}}, & 0 < \beta \leq \dfrac{p(K^2-2)+2}{(4-p)(K^2+2)(p-1)}, \\ \left(\dfrac{1}{n} \right)^{\frac{4-p(1+\beta)-\varepsilon}{2p(1+\beta)K^2}}, & \dfrac{p(K^2-2)+2}{(4-p)(K^2+2)(p-1)} < \beta < \dfrac{4}{p} - 1, \end{cases} \tag{4.1.6.7}$$

sağlanır.

İspat: Lemma 4.1.3.1.-4.1.3.4' lerin ispatları benzer olduğu için ispatlar beraber verilir. (4.1.3.3.)' deki ilk terim $\overline{G}$ 'da analitik olduğu için derecesi n'i aşmayan $P_n(z)$ polinomu $[30, p.142]$ vardır öyle ki;

$$\left|\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R}\frac{f(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2}d\varsigma - P_n'(z)\right| \prec \frac{1}{n}, \quad z\in\overline{G}. \tag{4.1.6.8.}$$

Böylece, (4.1.3.3.) den aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\left\|\varphi' - P_n'\right\|_{A_p(G)} \prec \frac{1}{n} + \sum_{i,j=1}^{2}\left\|\int_{\gamma_i^j(R)}\frac{\left(\tilde{\varphi}(\varsigma) - \varphi(-1)\right)^i}{(\varsigma - z)^2}d\varsigma\right\|_{A_p(G)}$$

$$+\left\|\iint_{U_1\cup U_2}\frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)}{(\varsigma - z)^2}d\sigma_{\varsigma}\right\|_{A_p(G)} = \frac{1}{n} + \sum_{k=1}^{5}J_k \tag{4.1.6.9.}$$

(4.1.2.1) ve Lemma 4.1.2.6.'ya göre,

$$\left|\tilde{\varphi}(\varsigma) - \varphi(-1)\right| = \left|\varphi(\alpha_j(\varsigma)) - \varphi(\pm 1)\right| \prec \left|\varsigma \pm 1\right|^{\frac{1}{2}}, \quad \varsigma\in\gamma_j^i(R), \; i, j = 1, 2. \tag{4.1.6.10.}$$

elde edilir.

Böylece, $\forall\alpha > 0$, $\beta < \min\left\{1; \frac{4}{p} - 1\right\}$ sayıları için

$$\left\|\int_{\gamma_1^i(R)}\frac{\tilde{\varphi}(\varsigma) - \varphi(1)}{(\varsigma - z)^2}d\varsigma\right\|_{A_p(G)} \prec \begin{cases} \left|\ln l_{1,i}\right|^{\frac{1}{2}} . l_{1,i}^{\frac{2}{p} - \frac{1+\alpha}{2}}, & \alpha < 1;\; 1 < p \le 2 \\ l_{1,i}^{\frac{2}{p} - \frac{1+\alpha}{2}}, & \alpha < \frac{4}{p} - 1;\; 2 < p < 4. \end{cases} \tag{4.1.6.11.}$$

$$\left\| \int_{\gamma_2^i(R)} \frac{\tilde{\varphi}(\varsigma)-\varphi(-1)}{(\varsigma - z)^2} d\varsigma \right\|_{A_p(G)} \prec \begin{cases} \left|\ln l_{2,i}\right|^{\frac{1}{2}} . l_{2,i}^{\frac{2}{p}-\frac{1+\beta}{2}}, & \beta < 1;\ 1 < p \le 2 \\ l_{2,i}^{\frac{2}{p}-\frac{1+\beta}{2}}, & \beta < \frac{4}{p} - 1;\ 2 < p < 4. \end{cases} \tag{4.1.6.12}$$

değerlendirmeleri Sonuç 4.1.5.2 ve 4.1.5.3 den yararlanarak elde edilir. Burada $l_{j,i} := mes\gamma_j^i(R)$, $i, j = 1, 2.$ Diğer yandan, Lemma 4.1.2.1 ve (4.1.3.1.) ‘e göre

$$d(z_2^i, L^j) \prec n^{-\frac{1}{K^2}}$$

dır. Böylece (4.1.2.1.) ve (4.1.3.2.)’ den $l_{j,i}$, $i, j = 1, 2,$ için aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$l_{j,i} \prec \left| z_j^i - (-1)^{j-1} \right|$$

$$\prec \begin{cases} (\ln n)^{-\alpha^{-1}}, & i = 1, 2,\ j = 1,\ \alpha > 0, \\ \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{(1+\beta)K^2}}, & i = 1, 2,\ j = 2,\ \beta > 0. \end{cases}$$

Sonuç olarak, (4.1.6.11.) ve (4.1.6.12.) den aşağıdaki ifade elde edilir:

$$\left\| \int_{\gamma_1^i(R)} \frac{\tilde{\varphi}(\varsigma)-\varphi(1)}{(\varsigma - z)^2} d\varsigma \right\|_{A_p(G)} \prec \begin{cases} \frac{\sqrt{\ln\ln n}}{(\ln n)^{\frac{(4-p)(1+\alpha)}{2p\alpha}}}, & 0 < \alpha < 1; \\ & 1 < p \le 2 \\ \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{(4-p)(1+\alpha)}{2p\alpha}}, & 0 < \alpha < \frac{4}{p} - 1; \\ & 2 < p < 4. \end{cases} \tag{4.1.6.13.}$$

$$\left\| \int_{\gamma_2^i(R)} \frac{\tilde{\varphi}(\varsigma)-\varphi(-1)}{(\varsigma - z)^2} d\varsigma \right\|_{A_p(G)} \prec \begin{cases} \sqrt{\ln n}.\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{(4-p)(1+\beta)-\varepsilon}{2p(1+\beta)K^2}}, & \alpha = 0;\ \beta < 1; \\ & 1 < p \le 2 \\ \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{(4-p)(1+\beta)-\varepsilon}{2p(1+\beta)K^2}}, & \beta < \frac{4}{p} - 1; \\ & 2 < p < 4. \end{cases} \tag{4.1.6.14.}$$

Teorem 3.2.12’yi kullanarak bulunur

$$\iint_{U_1 \cup U_2} \left|\tilde{\varphi}_{\bar{\varsigma}}(\varsigma)\right|^p d\sigma_\varsigma \approx \iint_{U_1 \cup U_2} \left|\varphi'(\alpha_J(\varsigma))\right|^p d\sigma_\varsigma$$

$$\prec \sum_{j=1}^{2} \iint_{\alpha(U_j)} \left|\varphi'(\varsigma)\right|^p d\sigma_\varsigma,$$

(4.1.6.2.) , (4.1.2.1.) ve Calderon-Zigmund eşitsizliğini kullanılarak aşağıdaki ifade yazılabilir:

$$J_5 \prec \left(\sum_{j=1}^{2} \iint_{\alpha(U_j)} \left|\varphi'(\varsigma)\right|^p d\sigma_\varsigma \right)^{\frac{1}{p}}. \tag{4.1.6.15.}$$

Durum 1) $1 < p \le 2$ olsun. Bu durumda, Genelleşmiş Hölder eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki elde edilir:

$$\iint_{\alpha(U_j)} \left|\varphi'(\varsigma)\right|^p d\sigma_\varsigma \le \left(\iint_{\alpha(U_j)} \left|\varphi'(\varsigma)\right|^2 d\sigma_\varsigma \right)^{\frac{p}{2}} \left(\iint_{\alpha(U_j)} d\sigma_\varsigma \right)^{1-\frac{p}{2}} \tag{4.1.6.16}$$

$$= \left(mes\varphi(\alpha(U_j))\right)^{\frac{p}{2}} \left(mes\alpha(U_j)\right)^{1-\frac{p}{2}}.$$

Yeteri kadar büyük c ve küçük $\varepsilon_0 < \dfrac{1}{2}$ için

$$V_1^j := \left\{ \varsigma : \varsigma \in \alpha_j(U_j), \left|\varsigma - 1\right| \le c\,(\ln n)^{-\alpha^{-1}} \right\};$$

$$V_2^j := \alpha_j(U_j) / V_1^j,\ j = 1,2,\ \alpha > 0;$$

$$U_{\varepsilon_0} := \left\{ \varsigma : \left|\varsigma + 1\right| \le \varepsilon_0 \right\};\ \tilde{V}_j^1 := U_j \cap U_{\varepsilon_0},\ j = 1,2,\ \alpha = 0.$$

olarak seçilsin. Böylece, Lemma 4.1.2.4. den

$$mes\varphi(V_1^j) \prec (\ln n)^{-\alpha^{-1}};\ mes\varphi(\alpha_j(\tilde{V}_j^1)) \prec n^{\frac{\varepsilon-1}{K^4}};\ mes\varphi(\alpha_j(U_j / \tilde{V}_j^1)) \prec n^{\frac{\varepsilon-1}{K^4}},$$

$$mes\alpha_j(V_1^j) \prec (\ln n)^{-\alpha^{-1}};\ mes\alpha_j(\tilde{V}_j^1) \prec n^{\frac{\varepsilon-1}{K^2}};\ mes\alpha_j(U_j / \tilde{V}_j^1) \prec n^{\frac{\varepsilon-1}{K^2}}$$

değerlendirmeleri elde edilir.

Bu durumda (4.1.6.15.) den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$J_5 \prec \begin{cases} (\ln n)^{-\frac{1}{\alpha p}}, & \alpha > 0 \\ n^{\frac{\varepsilon-1}{pK^4}}, & \alpha = 0. \end{cases} \tag{4.1.6.17.}$$

Durum 2) $p>2$ olsun. w - düzlemine geçerek ve (21) 'den yararlanarak

$$\iint_{\alpha_j(U_j)} |\varphi'(\varsigma)|^p d\sigma_\varsigma \approx \iint_{\varphi(\alpha_j(U_j))} |\psi'(w)|^{2-p} d\sigma_w$$

$$\approx \iint_{\varphi(\alpha_j(U_j))} \left(\frac{r_0-|w|}{d(\psi(w),L)}\right)^{p-2} d\sigma_w$$

$$= \iint_{\varphi(V_1^j)} \left(\frac{r_0-|w|}{d(\psi(w),L)}\right)^{p-2} d\sigma_w$$

$$+ \iint_{\varphi(V_2^j)} \left(\frac{r_0-|w|}{d(\psi(w),L)}\right)^{p-2} d\sigma_w$$

$$=: J_{5,1}+J_{5,2}. \qquad (4.1.6.18.)$$

şeklinde elde edilir. Şimdi $J_{5,1}$ ve $J_{5,2}$ -yi ayrı –ayrılıkta değerlendirelim.

$$r_0-|w| \prec d^{-\frac{1}{2}}(\psi(w),L)$$

olduğundan, Lemma 4.1.3.1.' den

$$J_{5,1} := \iint_{\varphi(V_1^j)} \left(\frac{r_0-|w|}{d(\psi(w),L)}\right)^{p-2} d\sigma_w$$

$$\prec \iint_{\varphi(V_1^j)} \left(\frac{1}{r_0-|w|}\right)^{p-2} d\sigma_w$$

$$\leq \iint_{r_*<|w|<r_0} \left(\frac{1}{r_0-|w|}\right)^{p-2} d\sigma_w$$

$$\prec (r_0-r_*)^{3-p}$$

$$= |\varphi(\xi)-\varphi(\tilde{z})|^{3-p}, \; p<3,$$

bulunur. Burada $r_* := |\tilde{w}|$ öyle ki $\tilde{w} := \inf\{|w| : w\in\varphi(V_1^j),\ j=1,2.\}$, $\tilde{z} := \psi(\tilde{w})$ ve olarak seçilirse, (4.1.2.1.), (4.1.3.2.) ve Lemma 4.1.3.1.'e göre

$$J_{5,1} \prec |\varphi(\xi)-\varphi(\alpha_j(z_1^j))|^{3-p}$$

$$\prec \left|\xi - \alpha_j\left(z_1^j\right)\right|^{\frac{3-p}{2}}$$

$$\approx \left|\xi - z_1^j\right|^{\frac{3-p}{2}}$$

$$\prec \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3-p}{2\alpha}} \tag{4.1.6.19.}$$

elde edilir. Benzeri şekilde, (4.1.2.1.), (4.1.3.1.) ve Lemma 4.1.2.1.'e göre

$$J_{5,2} \prec \iint_{\varphi\left(V_2^j\right)} \left(\frac{r_0 - |w|}{d\left(\psi(w), L\right)}\right)^{p-2} d\sigma_w$$

$$\prec \iint_{\varphi\left(V_2^j\right)} \left(\frac{1}{r_0 - |w|}\right)^{\left(K^2-1\right)(p-2)} d\sigma_w$$

$$\prec \iint_{r_* < |w| < r_0} \left(\frac{1}{r_0 - |w|}\right)^{\left(K^2-1\right)(p-2)} d\sigma_w$$

$$\prec \left(r_0 - r_*\right)^{1-\left(K^2-1\right)(p-2)}, \; p < 2 + \frac{1}{K^2-1},$$

Burada $r^* := |\tilde{w}|$ öyle ki $\tilde{w} := \inf\left\{|w| : w \in \varphi\left(V_2^j\right)\right\}, \; j = 1,2.$ ve

$\tilde{z} := \psi(\tilde{w})$. $\tilde{\xi} \in L : d(\tilde{z}, L) = \left|\tilde{\xi} - \tilde{z}\right|$ olarak seçilirse, (4.1.2.1.), (4.1.3.1.) ve Lemma 4.1.2.1.'e göre

$$J_{5,2} \prec \left(r_0 - r^*\right)^{1-\left(K^2-1\right)(p-2)}$$

$$\approx \left|\varphi\left(\tilde{\xi}\right) - \varphi(\tilde{z})\right|^{1-\left(K^2-1\right)(p-2)}$$

$$\prec \left|\tilde{\xi} - \alpha_j(\tilde{z})\right|^{\frac{1-\left(K^2-1\right)(p-2)}{K^2}}$$

$$\approx \left|\tilde{\xi} - \tilde{z}\right|^{\frac{1-\left(K^2-1\right)(p-2)}{K^2}}$$

$$\prec \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1-\left(K^2-1\right)(p-2)-\varepsilon}{K^4}}. \tag{4.1.6.20.}$$

bulunur.

(4.1.6.15.), (4.1.6.18.), (4.1.6.19.) ve (4.1.6.20) den aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$J_5 \prec \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3-p}{2\alpha p}} + \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1-\ K^2-1\ \ p-2\ -\varepsilon}{pK^4}}$$

$$\prec \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3-p}{2\alpha p}},\ p<3,\ \alpha>0. \qquad (4.1.6.21.)$$

Eğer $\alpha = 0$ ise

$$J_5 \prec \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1-\ K^2-1\ p-2}{pK^4}}, \quad p < 2+\frac{1}{K^2-1}.$$

Sonuç olarak,

$$J_5 \prec \begin{cases} \ln n\ ^{-\frac{1}{\alpha p}}, & \alpha>0, \qquad 1<p\le 2, \\ n^{\frac{\varepsilon-1}{pK^4}}, & \alpha=0, \qquad 1<p\le 2, \\ \left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3-p}{2\alpha p}}, & \alpha>0\ , \qquad 2<p<3, \\ \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1-\ K^2-1\ \ p-2\ -\varepsilon}{pK^4}}, & \alpha=0, \quad 2<p<2+\frac{1}{K^2-1}. \end{cases} \qquad (4.1.6.22.)$$

(4.1.6.9.), (4.1.6.13.), (4.1.6.14.) ve (4.1.6.22.) değerlendirmelerinden sonuç olarak bulunur ki

$$\|\varphi' - P_n'\|_{A_p\ G} \prec \frac{1}{n}$$

$$
+\begin{cases}
\sqrt{\ln\ln n}.\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{(4-p)(1+\alpha)}{2p\alpha}}, & 0<\alpha<1, \quad \beta\geq 0, \quad 1<p\leq 2,\\[2ex]
\sqrt{\ln n}.\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{(4-p)(1+\beta)-\varepsilon}{2p(1+\beta)K^2}}, & \alpha=0, \quad O<\beta<1, \quad 1<p\leq 2,\\[2ex]
\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{(4-p)(1+\alpha)}{2p\alpha}}, & 0<\alpha<\dfrac{4}{p}-1, \quad \beta\geq 0, \quad 2<p<4,\\[2ex]
\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{(4-p)(1+\beta)-\varepsilon}{2p(1+\beta)K^2}}, & \alpha=0, \quad \beta<\dfrac{4}{p}-1, \quad 2<p<4.
\end{cases}
$$

$$
+\begin{cases}
(\ln n)^{-\frac{1}{\alpha p}}, & \alpha>0, \quad 1<p\leq 2,\\[2ex]
\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{pK^4}}, & \alpha=0, \quad 1<p\leq 2,\\[2ex]
\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3-p}{2\alpha p}}, & \alpha>0, \quad 2<p<3,\\[2ex]
\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1-(K^2-1)(p-2)-\varepsilon}{pK^4}}, & \alpha=0, \quad 2<p<2+\dfrac{1}{K^2-1}
\end{cases}
\tag{4.1.6.23.}
$$

ve bu ifadelerde yer alan $\varepsilon>0$ sayısı keyfi küçük sayıdır. Böylece, (4.1.6.23.) den $p,\ \alpha,\ \beta$ ' ların farklı durumları için aşağıdakiler ortaya çıkıyor:

Durum 1: $1<p\leq 2,\ \alpha>o,\ \beta\geq 0,$

$$
\|\varphi'-P_n'\|_{A_p(G)} \prec \begin{cases}
\sqrt{\ln\ln n}.\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{1}{\alpha p}}, & 0<\alpha\leq\dfrac{2}{p}-1,\\[2ex]
\sqrt{\ln\ln n}.\left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{(4-p)(1+\alpha)}{2p\alpha}}, & \dfrac{2}{p}-1<\alpha<1.
\end{cases}
$$

Durum 2: $1<p\leq 2,\ \alpha=0$,

$$
\|\varphi'-P_n'\|_{A_p(G)}
$$

$$\prec \begin{cases} \sqrt{\ln n}.\left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{4-p\ 1+\beta\ -\varepsilon}{2p\ 1+\beta\ K^2}}, & \dfrac{4K^2}{pK^2+2}-1<\beta<1, \qquad K<\sqrt{\dfrac{2}{2-p}}, \\ \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{pK^4}}, & 0<\beta\le\dfrac{4K^2}{pK^2+2}-1, \qquad K\sqrt{\dfrac{2}{2-p}}, \\ \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{pK^4}}, & 0<\beta\le\min\left\{1;\dfrac{4K^2}{pK^2+2}-1\right\} \qquad K>1. \end{cases}$$

Durum 3: $2<p<3,\ 0<\alpha<\dfrac{4}{p}-1,\ \beta\ge 0,$

$$\left\|\varphi'-P_n'\right\|_{A_p\ G} \prec \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3-p}{2\alpha p}}, & 0<\alpha\le\dfrac{1}{p}, \\ \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{4-p\ 1+\alpha}{2\alpha p}}, & \dfrac{1}{p}<\alpha<\dfrac{4}{p}-1. \end{cases}$$

Durum 4: $2<p<\min\left\{4;2+\dfrac{1}{K^2-1}\right\},\ \alpha=0,$

a) Eğer $2<p<4$ ve $1<K<\sqrt{\dfrac{3}{2}}$ ise

$$\left\|\varphi'-P_n'\right\|_{A_p\ G} \prec$$

$$\begin{cases} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1-\ K^2-1\ \ p-2\ -\varepsilon}{pK^4}}, & 0<\beta\le\dfrac{p\ \ K^2-2\ +2}{4-p\ \ K^2+2\ \ p-1},\ \sqrt{\dfrac{2\ \ p-1}{p}}<K<\sqrt{\dfrac{3}{2}}, \\ \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{4-p\ 1+\beta\ -\varepsilon}{2p\ 1+\beta\ K^2}}, & \max\left\{\dfrac{p\ \ K^2-2\ +2}{4-p\ \ K^2+2\ \ p-1},0\right\}<\beta<\dfrac{4}{p}-1,\ 1<K<\sqrt{\dfrac{3}{2}}. \end{cases}$$

b) Eğer $2<p<2+\dfrac{1}{K^2-1}$ ve $K\ge\sqrt{\dfrac{3}{2}}$

$$\|\varphi' - P_n'\|_{A_p(G)} \prec \begin{cases} \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{1-(K^2-1)(p-2)-\varepsilon}{pK^4}}, & 0<\beta<\dfrac{p(K^2-2)+2}{4-p(K^2+2)(p-1)}, \\ \left(\dfrac{1}{n}\right)^{\frac{4-p(1+\beta)-\varepsilon}{2p(1+\beta)K^2}}, & \dfrac{p(K^2-2)+2}{4-p(K^2+2)(p-1)}<\beta<\dfrac{4}{p}-1. \end{cases}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Eğer, $\tilde{P}_n(z) := P_n(z) - P_n(0) + z\left[1 - P_n'(0)\right]$ olarak alınırsa (4.1.6.23) ifadesinin $\tilde{P}_n(z)$ polinomu için de sağlandığı görülür ve $\tilde{P}_n(0)=0,\ \ \tilde{P}_n'(0)=1$ koşulları da sağlanır.

4.1.7. Temel Teoremlerin İspatları

Lemma 4.1.7.1. $G\subset\mathbb{C}$ basit bağlantılı bölge olsun öyle ki onun için aşağıdaki koşullar sağlansın:

1) Öyle $\alpha_n\downarrow,\ \ \beta_n\uparrow,\ \gamma_n := \alpha_n\beta_n\downarrow,\ \ n\to\infty$ dizileri var ki, $(G,0)$ çiftinin $B_{n,p}(z)$ p-Bieberbach polinomları ve derecesi n'i aşmayan ve $P_n(0)=0$ şartını sağlayan $P_n(z)$ polinomu için aşağıdaki koşullar sağlansın:

$$\|\varphi - B_{n,p}\|_{A_p^1(G)} \prec \alpha_n,\ n=2,3,\dots\ ,$$

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \prec \beta_n \|P_n\|_{A_p'(G)}\ ,\ \ n=1,2,\dots$$

Ayrıca, eğer öyle $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ alt dizisi vardır

1) $\beta_{n_{k+1}} \le c\beta_{n_k}\qquad (c\ge 0)$

2) $\gamma_{n_{k+1}} \le \varepsilon\,\gamma_{n_k},\qquad (0<\varepsilon<1)\ ,\forall k=1,2,\dots$

eşitsizlikleri sağlanıyor, o halde

$$\|\varphi - B_{n,p}\|_{C(\bar{G})} \prec \gamma_n$$

dır.

Teorem 4.1.1.1. ' in ispatı:

Lemma 4.1.3.3. den $\forall p: \ 2 < p < 3$ için

$$\alpha_{n,p} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3-p}{2\alpha p}}, & 0 < \alpha \le \dfrac{1}{p}, \\ \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{4-p\;1+\alpha}{2p\alpha}}, & \dfrac{1}{p} < \alpha < \dfrac{4}{p} - 1 \end{cases}$$

elde edilir. Sonuç 4.1.4.1. den $\forall p > 2, \ \beta < \dfrac{p}{2} - 1$ için $\beta_{n,p} = c;$ ele alınır. Bu durumda ,

$$\gamma_{n,p} = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3-p}{2\alpha p}}, & 0 < \alpha \le \dfrac{1}{p}, \\ \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{4-p\;1+\alpha}{2p\alpha}}, & \dfrac{1}{p} < \alpha < \dfrac{4}{p} - 1, \end{cases}$$

$\beta < \dfrac{p}{2} - 1$ ve $2 < p < 3$ için elde edilir.

Şimdi n_k dizisi ve ε sayısını hesaplayalım.

n_k dizisi öyle seçilmelidir ki aşağıdaki koşullar sağlansın:

1) $\beta_{n_{k+1}} \le c\beta_{n_k} \qquad c \ge 0$

2) $\gamma_{n_{k+1}} \le \varepsilon\ \gamma_{n_k}, \qquad 0 < \varepsilon < 1.$

$n_k = 2^k - 2, \ k > 1$ olsun.

$$\gamma_{n_{k+1}} = \ln\ n_{k+1}+2\ ^{-\gamma_1}, \qquad \gamma_1 = \begin{cases} \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{3-p}{2\alpha p}}, & 0<\alpha\le \dfrac{1}{p}, \\ \left(\dfrac{1}{\ln n}\right)^{\frac{4-p\ 1+\alpha}{2p\alpha}}, & \dfrac{1}{p}<\alpha<\dfrac{4}{p}-1 \end{cases}$$

$\gamma_{n_{k+1},p} \le \varepsilon_1\ \gamma_{n_k,p}$ ise $\ln\ 2^{k+1}-2+2\ ^{-\gamma_1} \le \varepsilon_1\ \ln\ 2^k-2+2\ ^{-\gamma_1}$

$$\varepsilon_1 \ge \left[\frac{\ln\ 2^k}{\ln\ 2^{k+1}}\right]^{\gamma_1} = \left[\frac{k\ln 2}{k+1\ \ln 2}\right]^{\gamma_1} = \left(\frac{k}{k+1}\right)^{\gamma_1}$$

O halde $\varepsilon_1 = \dfrac{\left(\dfrac{k}{k+1}\right)^{\gamma_1}+1}{2}$ olarak seçilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.1.2. , Teorem 4.1.1.3. ve Teorem 4.1.1.4.' lerin ispatı:

Aşikardır ki

$$\min\left\{4;2+\frac{1}{K^2-1}\right\} = \begin{cases} 4, & K^2\le \dfrac{3}{2} \\ 2+\dfrac{1}{K^2-1}, & K^2>\dfrac{3}{2} \end{cases} \tag{4.1.7.1.1.}$$

$$p<2+\frac{1}{K^2-1} \Rightarrow K<\sqrt{\frac{p-1}{p-2}}, \tag{4.1.7.1.2.}$$

ve ayrıca

$$\min\left\{\frac{4}{p}-1;\frac{p}{2}-1\right\} = \begin{cases} \dfrac{p}{2}-1, & 2<p\le 2\sqrt{2} \\ \dfrac{4}{p}-1, & p>2\sqrt{2} \end{cases} \tag{4.1.7.1.3.}$$

olduklarından Teorem 4.1.1.2. ve Teorem 4.1.1.3., Teorem 4.1.1.4. lerin ispatlarını birlikte düşünebilir.

Eğer $2 < p \le 2\sqrt{2} \Rightarrow 0 < \beta < \frac{p}{2} - 1 < \frac{4}{p} - 1$ olur. Lemma 4.1.3.4. den

$$\alpha_{n,p} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{4-p\ 1+\beta\ -\varepsilon}{2p\ 1+\beta\ K^2}} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma_1}, \quad 0 < \gamma_1 = \frac{4-p\ 1+\beta\ -\varepsilon}{2p\ 1+\beta\ K^2}$$

$$\forall\beta; \quad \frac{p\ K^2-2\ +2}{4-p\ K^2+2\ p-1} < \beta < \frac{4}{p} - 1, \qquad 1 < K < \sqrt{\frac{p-1}{p-2}} \qquad (4.1.7.1.4.)$$

sağlanır. Sonuç 4.1.4.1. den $\beta_{n,p} = c$ olarak ele alınırsa, bu durumda,

$$\gamma_{n,p} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma_1-\varepsilon}$$

olur. Kolayca görülür ki, (4.1.7.1.1.) ve (4.1.7.1.4.)den

$$K < \min\left\{\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{p-1}{p-2}}\right\} \qquad (4.1.7.1.5.)$$

koşulu sağlanmalıdır. Diğer yandan, (4.1.7.1.4.)den β için aralığın boş kalmaması nedeniyle

$$\frac{p\ K^2-2\ +2}{4-p\ K^2+2\ p-1} < \frac{4}{p} - 1,$$

sağlanmalıdır. Buradan ise

$$K < \sqrt{\frac{2p\ p-1}{p^2-4p+8}} \qquad (4.1.7.1.6.)$$

koşulu elde edilir. (4.1.7.1.5.) ve (4.1.7.1.6.) den

$$K < \min\left\{\sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{p-1}{p-2}}; \sqrt{\frac{2p\ p-1}{p^2-4p+8}}\right\}$$

bulunur.

Eğer (4.1.7.1.4.) de $\beta < \frac{p}{2} - 1$ (Bu durum (4.1.7.1.3.) ye göre $2 < p < 2\sqrt{2}$ olmayı gerektirir.) ise **Teorem 4.1.1.2.**, $\beta < \frac{4}{p} - 1$ ise (Bu durum (4.1.7.1.3.) ye göre $2\sqrt{2} < p < 4$ olmayı gerektirir.) **Teorem 4.1.1.3.** elde edilir. Son olarak, n_k dizisi ve ε_1 sayısını bulunması gerekmektedir. Bunun için

$$\alpha_{n,p} = (n+1)^{\varepsilon-\frac{4-p(1+\beta)}{2p(1+\beta)K^2}} = (n+1)^{-\gamma_1}; \quad \gamma_1 = \frac{4-p(1+\beta)}{2p(1+\beta)K^2} - \varepsilon .$$

Sonuç 4.1.4.1. den $\beta_{n,p} = c$ olarak alınır. O halde, $\gamma_{n,p} = (n+1)^{-\gamma_1}$;

$n_k = 2^k - 1, \quad k > 1$

$$\gamma_{n_{k+1},p} = (n_{k+1}+1)^{-\gamma_1} = (2^{k+1})^{-\gamma_1}, \qquad \gamma_{n_k,p} = (n_k+1)^{-\gamma_1} = (2^k)^{-\gamma_1}$$

$$\gamma_{n_{k+1},p} \le \varepsilon_1 \gamma_{n_k,p} \Rightarrow \varepsilon_1 \ge \left(\frac{2^k}{2^{k+1}}\right)^{\gamma_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_1}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_1} + 1}{2}$$

olarak seçilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.1.4.' ün ispatına gelince; $p < 4 \Rightarrow \frac{3}{2} < \frac{p-1}{p-2}$ olur. Buradan da, $K < \sqrt{\frac{3}{2}}$ olduğunu görülür. Ayrıca,

$$K < \sqrt{\frac{p-1}{p-2}} \Rightarrow \frac{p(K^2-1)+2}{(4-p)K^2+2p-2} \le \frac{4}{p} - 1$$

sağlanır. Öte yandan, $p(K^2-1)+2 > 0$ koşulunun sağlanması gerekmektedir.

Buradan ise $K > \sqrt{\frac{2(p-1)}{p}}$ olması gerekir. Bu durumda Lemma 4.1.3.4.den

$$\alpha_{n,p} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma_1},$$

$$\gamma_1 = \frac{1-(K^2-1)(p-2)}{pK^4} - \varepsilon, \quad 0 < \beta < \min\left\{\frac{p(K^2-2)+2}{(4-p)K^2+2(p-1)}; \frac{p}{2} - 1\right\}$$

olur. Sonuç 4.1.4.1.den $\beta_{n,p} = c$ olarak ele alınır. O halde,

$$\gamma_{n,p} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma_1},$$

$$n_k = 2^k - 1, \quad k > 1$$

$$\alpha_{n,p} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma_1} = \; n+1 \;^{-\gamma_1}$$

olarak alınırsa,

$$2^{k+1} - 1 + 1 \;^{-\gamma_1} \leq \varepsilon_1 \;\; 2^k - 1 + 1 \;^{-\gamma_1}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 \geq \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_1}$$

olur. Buradan da,

$$\varepsilon_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_1} + 1}{2}$$

olarak seçilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.1.5' in ispatı: $2 < p < 4$ aralığını yeniden $2 < p < 2\sqrt{2}$ ve $2\sqrt{2} \leq p < 4$ şeklinde bölmemek için β nın üst sınırını $\beta < \min\left\{\frac{4}{p} - 1, \frac{p}{2} - 1\right\}$ olarak bırakıldı.

Kolayca görülür ki,

$$\frac{p \;\; K^2 - 2 \;\; + 2}{4 - p \;\; K^2 + 2 \;\; p - 1} < \frac{4}{p} - 1$$

için

$$K < \sqrt{\frac{2p \;\; p-1}{p^2 - 4p + 8}} \quad ,$$

ve

$$\frac{p \;\; K^2 - 2 \;\; + 2}{4 - p \;\; K^2 + 2 \;\; p - 1} < \frac{p}{2} - 1$$

için

$$K < \sqrt{\frac{p-1}{p-2}}$$

koşulları sağlanmalıdır. Diğer yandan, $K < \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ koşulu var olduğundan ve her

$2 < p < 4$ için $\sqrt{\dfrac{3}{2}} \leq \sqrt{\dfrac{p-1}{p-2}}$ olduğundan sonuçta

$$K < \min\left\{ \sqrt{\frac{3}{2}}; \sqrt{\frac{2p\ \ p-1}{p^2-4p+8}} \right\}$$

koşulu bulunur. Öte yandan, $K > \sqrt{\dfrac{2(p-1)}{p}}$ için $p\ \ K^2-1\ +2 > 0$ ve

$1 < K < \sqrt{\dfrac{2(p-1)}{p}}$ için $p\ \ K^2-1\ +2 < 0$ olduğundan, β için alttan

$\max\left\{ \dfrac{p\ \ K^2-2\ +2}{4-p\ \ K^2+2\ \ p-1}, 0 \right\} < \beta$ koşulunun sağlanması gerekir.

Son olarak, n_k dizisi ve ε_1 sayısını bulunması gerekmektedir. Bunun için Lemma 4.1.3.4.den

$$\alpha_{n,p} = \ n+1\ ^{\varepsilon - \frac{4-p\ 1+\beta}{2p\ 1+\beta\ K^2}} = \ n+1\ ^{-\gamma_1};\ \ \gamma_1 = \frac{4-p\ \ 1+\beta}{2p\ \ 1+\beta\ \ K^2} - \varepsilon\ .$$

ve Sonuç 4.1.4.1. den $\beta_{n,p} = c$ olarak alınır. O halde, $\gamma_{n,p} = \ n+1\ ^{-\gamma_1}$;

$n_k = 2^k - 1, \quad k > 1$

$$\gamma_{n_{k+1},p} = \ n_{k+1}+1\ ^{-\gamma_1} = \ 2^{k+1}\ ^{-\gamma_1}, \qquad \gamma_{n_{k,p}} = \ n_k+1\ ^{-\gamma_1} = \ 2^k\ ^{-\gamma_1}$$

$$\gamma_{n_{k+1},p} \leq \varepsilon_1 \gamma_{n_{k,p}} \Rightarrow \varepsilon_1 \geq \left(\frac{2^k}{2^{k+1}}\right)^{\gamma_1} = \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_1}$$

$$\varepsilon_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_1} + 1}{2}$$

olarak seçilebilir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

Teorem 4.1.1.6.' nın ispatı:

$K \geq \sqrt{\dfrac{3}{2}}$ için $2 + \dfrac{1}{K^2-1} \leq 4$ ve buna göre (1) den $p < 2 + \dfrac{1}{K^2-1}$ alınır. Bu durumda Lemma 4.1.3.4. den

$$\alpha_{n,p} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma_1}; \quad \gamma_1 = \frac{1- \; K^2 - 1 \;\; p-2}{pK^4} - \varepsilon$$

olur. Böylece,

$$0 < \beta < \min\left\{ \frac{p \;\; K^2 - 2 \;\; + 2}{4 - p \;\; K^2 + 2 \;\; p - 1}; \frac{p}{2} - 1; \frac{4}{p} - 1 \right\}$$

olarak ele alınır. Sonuç 4.1.4.1. den $\beta_{n,p} = c$ olarak ele alınır. O halde,

$$\gamma_{n,p} = \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma_1},$$

$$n_k = 2^k - 1, \quad k > 1$$

$$\alpha_{n,p} = \left(\frac{1}{n+1}\right)^{\gamma_1} = \; n+1 \;^{-\gamma_1}$$

olarak alınırsa,

$$2^{k+1} - 1 + 1 \;^{-\gamma_1} \le \varepsilon_1 \;\; 2^k - 1 + 1 \;^{-\gamma_1}$$

$$\Rightarrow \varepsilon_1 \ge \left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_1}$$

olur. Buradan da,

$$\varepsilon_1 = \frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_1} + 1}{2}$$

olarak seçilebilir.

Böylece ispat biter.

Teorem 4.1.1.7.' nin ispatı:

Lemma 4.1.3.1.den

$$\alpha_{n,p} = \begin{cases} \sqrt{\ln \ln n}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{1}{2\alpha}}, & \alpha = 0, \\ \sqrt{\ln \ln n}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\frac{1-\alpha}{2\alpha}}, & 0 < \alpha < 1, \end{cases}$$

$p=2$ için elde edilir.

$$\alpha_{n,p}=\sqrt{\ln\ln n}\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\gamma_1}, \quad \gamma_1=\frac{1-\alpha}{2\alpha}$$

şeklinde yazılsın. Sonuç 4.1.4.1. den $\beta_{n,p}=\sqrt{\ln n}$ olarak alınırsa, o halde

$$\gamma_{n,p}=\alpha_{n,p}.\beta_{n,p}=\sqrt{\ln\ln n}.\sqrt{\ln n}.\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\gamma_1}=\sqrt{\ln\ln n}.\left(\frac{1}{\ln n}\right)^{\gamma_1-\frac{1}{2}}$$

Buradan da, $\gamma_2=\gamma_1-\frac{1}{2}\Rightarrow\gamma_2=\frac{1-\alpha}{2\alpha}-\frac{1}{2}=\frac{1-2\alpha}{2\alpha}$ elde edilir.

Sonuç olarak $\alpha<\frac{1}{2}$ olur.

Diğer yandan, n_k dizisi ve ε_1 sayısı yukarıdaki teoremlerin ispatında yapılan işlemler sonucunda elde edilir. Böylece,

$$\varepsilon_1=\frac{\left(\frac{1}{2}\right)^{\gamma_2}+1}{2}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1.8.' in ispatı:

Lemma 4.1.3.2. den

$$\alpha_{n,p}=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{pK^4}}; \quad 0<\beta<\min\left\{1;\frac{4K^2}{pK^2+2}-1\right\}$$

olmak üzere bu şekilde seçeriz. Sonuç 4.1.4.1. den

$$\beta_{n,p}=n^{\frac{2}{p}2\beta+2-p}; \quad p<2$$

durumu için bu şekilde yazılır.

$$\gamma_{n,p}=\alpha_{n,p}.\beta_{n,p}=\left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1-\varepsilon}{pK^4}-\frac{2}{p}2\beta+2-p}$$

ifadesi elde edilir. Diğer yandan, n_k dizisi ve ε_1 sayısı yukarıdaki teoremlerin ispatında yapılan işlemler sonucunda elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.1.9.' un ispatı:

Lemma 4.1.3.2.den

$$\alpha_{n,p} = \frac{\sqrt{\ln n}}{n^{\frac{(4-p)(1+\beta)-\varepsilon}{2p(1+\beta)K^2}}}; \quad \frac{4K^2}{pK^2+2} - 1 < \beta < 1, \quad K < \sqrt{\frac{2}{2-p}}$$

olarak alınır. Sonuç 4.1.4.1. den

$$\beta_{n,p} = n^{\frac{2}{p}(2\beta+2-p)} \quad ; \quad p < 2$$

için bu şekilde alınır.

$$\gamma_{n,p} = \alpha_{n,p}.\beta_{n,p} = \frac{\sqrt{\ln n}}{n^{\frac{(4-p)(1+\beta)-\varepsilon}{2p(1+\beta)K^2} - \frac{2}{p}(2\beta+2-p)}}$$

elde edilir.

Şimdi, n sayısının üzeri sıfırdan büyük olmak zorunda olduğu için aşağıdaki işlem yapılır:

Yani,

$$\frac{(4-p)(1+\beta)}{2p(1+\beta)K^2} - \frac{2}{p}(2\beta+2-p) > 0$$

ifadesi sağlanmalıdır. Bu işlem sonucunda;

$$\beta < \frac{\sqrt{16p^2K^4 + 128K^2 - 8p^2K^2 + p^2} - (16K^2 - 4pK^2 + p)}{16K^2} =: \beta_1 \quad \text{elde edilir.}$$

ve, $K_1 : \frac{4K^2}{pK^2+2} - 1 < \beta < \beta_1$ koşulundan seçilir.

Böylece, $1 < K \le \min\left\{K_1; \sqrt{\frac{2}{2-p}}\right\}$ elde edilir.

Diğer yandan, (n_k) dizisi ve ε_1 sayısı yukarıdaki teoremlerin ispatında yapılan işlemler sonucunda elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde, 1.2 problemi G bölgesinin $PQ\ K,\alpha,\beta$ sınıfından olması durumu ele alınarak incelenmiş, elde edilen sonuçlar Bulgular ve Tartışmalar bölümünde; 4.1.1. Temel Sonuçlar isimli başlık altında verilmiştir. Ayrıca, yakınsama hızları, sınıfın ve uzayın parametrelerine bağlı olarak, ayrı ayrı elde edilmiştir.

4.1.1. Temel Sonuçların ispatları için gerekli lemmalar 4.1.2., yardımcı sonuçlar ile 4.1.6. $A_p\ \ G\ -$ Normunda Yaklaşım başlıkları altında verilmiştir.

Teorem 4.1.1.1'den Teorem 4.1.1.9'e kadar olan teoremlerin hepsinde kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde; 1.2 problemine bakılarak $\gamma_n := \gamma_n\ \ p,G$ yakınsama hızlarının nasıl değiştiği belirlenmiştir.

5.2.ÖNERİLER

4.1.1. Temel Sonuçlar bölümündeki teoremlerde (1.2) problemi bölgenin sınırında hem iç hem de dış sıfır açı olması hali ele alınarak incelenmiştir. Acaba, (1.2) probleminde $D \equiv \overline{\mathbb{C}}$ durumunda, yani bölgenin sınırı olan yarıkonform eğrinin global tanımı ele alındığında $B_{n,p}(z)$ polinomlar dizisinin $\varphi(z)$ fonksiyonuna yakınsama hızı nasıl olacaktır?

KAYNAKLAR

[1] Davis, P.J., "Interpolation and Approximation", Blaisdell Publishing Company 393 s. (1963)

[2] Küçükaslan, M., Abdullayev, F.G., "New Extremal Polynomials and its Approximation Properties" Novisad Journal of Mathematics, Vol 39, pp.1-12 (2009)

[3] Privalov, I.I., "Introduction to the Theory of Functions of a Complex Variable", Nauka, 478 s., (Moscow, 1984).

[4] Keldych, M.V., "Sur I'approxsimation en moyenne quadratique des fonctions analytiques", Mat. Sb., **5(47):** 391-401, (1939).

[5] Mergelyan, S.N., "Certain questions of the constructive theory of functions", Trudy Math. Inst. Steklov, **37:**91 s., (1951).

[6] Andrievskii, V.V., "Uniform Convergence of Bieberbach polynomials in domains with zero angels", Dokl. Akad. Nauk. Ukrain. SSR, Ser. (1982), 3-5. (In Russian).

[7] Andrievskii, V.V., "Uniform Convergence of Bieberbach polynomials in domains with piecewise quasiconformal boundary", Theory of Mappings and Approximation of Function, Kiev, Naukova Dumka, (1983), 3-18, (In Russian).

[8] Andrievskii, V.V., "Convergence of Bieberbach polynomials in domains with quasiconformal boundary", Trans. Ukranian Math. J. **35:** 233-236., (1984).

[9] Gaier, D., "On the convergence of Bieberbach polynomials in regions with corners", Constr. Approx. **4:** 289-305, (1988).

[10] Gaier, D., "On the convergence of Bieberbach polynomials in regions with piecewise analytic boundary", Arch. Math. **58:** 462-470, (1992).

[11] Suetin, P.K., "Polynomials Orthogonal over a region and Bieberbach polynomials", Proc. Steklov Inst. Math. **100** (1971). Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., (1974).

[12] Wu Xue-Mou, "On Bieberbach Polynomials" Acta Math. Sinica, **13:** 145-151, (1963).

[13] Adams, R.A., “Sobolev Spaces” Academic Press, 268 s., (1975).

[14] Gleason, A.M., “Fundamentals of Abstract Analysis”, Addison Wesley Publishing, USA, 404 s., (1996).

[15] Ahlfors, L.V., “Complex Analysis”, McGraw-Hill, Inc., USA, 331 s., (1969).

[16] Depree, J.D., Oehring, C.C., “Elements of Complex Analysis”, Addison Wesley Publishing Company, USA, 390 s., (1969).

[17] Ahlfors, L.V., “Lectures on quasiconformal mappings”, Wadsworth Inc., California, 146 s., (1987).

[18] Kodaria, K., “Introduction to Complex Analysis”, Cambridge Uni. Press., Cambridge, 252 s., (1984).

[19] Letho, O., Virtanen, K.I. “Quasiconformal mappings in the plane”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 258 s., (1973).

[20] Rikman, S. “Characterisation of quasiconformal arcs”, Ann. Acad. Sci. Feen. Ser. A. Mathematica, 395 s., (1966).

[21] Abdullayev, F.G., “On the orthogonal polynomials in domains with quasiconformal boundary”, Dissertation, Donetsk, 120 s., (1986).

[22] Andrievskii, V.V., Belyi, ve V.I., Dzyadyk, V.K., “Conform invariant in complex Variable”, World Federation Pub. Company. , Atlanta (1995).

[23] Abdullayev, F.G., Andrievskii, V.V., “On Orthogonal polynomials in the domains with $K-$quasiconformal boundary”, Izv. Akad. Nauk. Azerb. SSR, Ser F.T.M., **1:** 3-7, (1983).

[24] Abdullayev, F.G., Baki, A. “On the convergence of Bieberbach polynomials in domains with intierior zero angels”, Complex Analysis Theory & Appl. **34** (2001).

[25] Tamrazov, P.M., “Smoothness and polynomial Approximations” (Russian) Naukova Dumka, Kiev, (1975).

[26] Goldstein, V.M., “The Degree of Summability of Generalized Derivatives of plane quasiconformal Homeomorphisms”, Soviet Math. Dokl. **21:** 10-13. (1980).

[27] Suetin, P.K., “Series of Faber Polynomials” Gordon and Breach Science Publishers, 301 s., (1998).

[28] Abdullayev, F.G., "Uniform convergence of the Generalized Bieberbach polynomials in regions with zero angles", Czechoslovak Math. Journal, **51(126):** 643-660, (2001).

[29] Belyi, V.I., Prisker, I.E. "On the curved wedge condition and the continuity moduli of conformal mapping", Ukrain. Math. Zh. **45:** 763-769, (1993).

[30] Smirnov, V.I., Lebedev, N.A., "Functions of a Complex Variable", Constructive Theory The M.I.T. PRESS., 468 s., (1968).

[31] Pommerenke, Ch., "Univalent Functions", Vondenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 376 s., (1975).

[32] Abdullayev, F.G., Küçükaslan, M., "On the Convergence of the Fourier Series of Orthonormal Polynomials in the Domain with Piecewise Smooth boundary", Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan Vol.XIV (XXII), 3-13, (2001).

[33] Simonenko, I.B. "On the convergence of Bieberbach polynomials in the case of a Lipschitz domain", Math. USSR-Izv. **13:** 166-174 (1980).

[34] Abdullayev, F.G., "On the convergence of Fourier series by orthogonal polynomials in domains with piecewise-quasiconformal boundary." In: Theory of Mapping and Approx. Kiev, Naukova Dumka (1989), pp.3-12.

[35] Belyi, V.I, "Conformal mappings and approximation of analytic functions in domains with a quasiconformal boundary." Math.USSR-Sb.,31(1977), pp.289-317.

[36] Abdullayev, F.G., "Uniform convergence of the generalized Bieberbach polynomials in regions with non-zero angles." Acta Math.Hung.Vol.77, No.3 (1997), pp.223-246.

[37] Küçükaslan, M., C.Koşar, Abdullayev, F.G, "Uniform convergence of some extremal polynomials in domain with corners on the boundary." Journal of Inequalities and Applications. Vol.2010, Article ID 716176,9 pages doi:10.1155/2010/716176.

[38] C.Koşar, Küçükaslan, M., Abdullayev, F.G, " Uniform convergence of extremal polynomials when domains with corners and special cusps on the boundary."Proceedings of the Estonian Academy of Sciences.Vol.60/3,2011, pages doi:10.3176/proc.2011.2.

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Naciye Pelin ÖZKARTEPE

Doğum Tarihi: 20/11/1976

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Matematik		1990-1993
Lisans	Matematik	Orta Doğu Teknik Üni.	1993-1999
Yüksek Lisans			

(Varsa) Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Arş.Gör.	Mersin Üniversitesi	2010-

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. F.G.Abdullayev, N.D.Aral, N.P.Özkartepe, "Bernstein-Walsh Type Estimations fort he Unbounded Regions of Complex Planes", Math Analysis Differential Equations and Applications,Procedings.

2. F.G.Abdullayev,N.P.Özkartepe, "p-Bieberbach Polynomials and their Approximations Properties in Domains with Zero Angles",International Conference in Modern Analysis,June 20-23,2011,Donetsk,UKRAINE**.**

3. F.G.Abdullayev, N.D.Aral, N.P.Özkartepe, "The Growth of the norm algebraic polyomials of the whole complex plane" The 4. Congress of the Turkic World Mathematical Society, Baku, AZERBEIJAN.

.