İKİ BOYUTLU DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN SPEKTRAL AYRIŞIM PROBLEMİ

ÖZGE AKÇAY

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2012

İKİ BOYUTLU DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN SPEKTRAL AYRIŞIM PROBLEMİ

ÖZGE AKÇAY

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. Erol YAŞAR

MERSİN
HAZİRAN – 2012

Özge AKÇAY tarafından Doç. Dr. Erol YAŞAR danışmanlığında ve Doç. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU eş danışmanlığında hazırlanan "İki boyutlu Dirac Denklemler Sistemi İçin Spektral Ayrışım Problemi" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

Doç.Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

Doç.Dr. Erol YAŞAR

Doç.Dr. Hamza MENKEN

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 04./09./2012.tarih ve 2012.16..../..472..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. A. Murat GİZİR
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

İKİ BOYUTLU DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİ İÇİN SPEKTRAL AYRIŞIM PROBLEMİ

Özge AKÇAY

ÖZ

Bu çalışmada, pozitif yarı eksende birinci mertebeden süreksiz katsayılı Dirac diferansiyel denklemler sistemi ile farklı sınır koşulları ile üretilen sınır değer problemlerinin spektral ayrışım problemi incelenmiştir. Rezolvent operatör inşa edilmiş ve Titchmarsh metodu uygulanarak ayrışım formülü ile bu formüle denk olan Parseval eşitliği elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dirac operatör, Ayrışım Formülü, Rezolvent operatör.

Danışman: Doç. Dr. Erol YAŞAR, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

Eş Danışman: Doç. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

THE SPECTRAL EXPANSION PROBLEM FOR TWO DIMENSIONAL SYSTEM OF DIRAC OPERATOR

Özge AKÇAY

ABSTRACT

In this work, the boundary value problems generated by the first order Dirac differential equations system with discontinuous coefficient with different boundary conditions on the positive half line are investigated. The resolvent operator is constructed and the expansion formula or equivalently Parseval equality is obtained by applying the method of Titchmarch.

Key Words: Dirac operator, Expansion formula, Resolvent operator.

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Erol YAŞAR, Mathematics Department, Mersin University

Co-advisor: Assoc. Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mathematics Department, Mersin University

TEŞEKKÜR

Çalışma konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında yardımlarını hiç eksik etmeyen, daima yanımda olan çok saygı duyduğum tez danışmanlarım Doç. Dr. Hanlar Reşidoğlu'na ve Yrd. Doç. Dr. Erol Yaşar'a teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisansa başladığım dönemden itibaren desteklerini hissettiğim bölüm hocalarıma, tüm doktora, yüksek lisans arkadaşlarıma ve tezime maddi kaynak sağlayan Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri (BAP) Birimine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGE ve KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\lVert\cdot\rVert$	Öklid normu
W	Wronskian
λ	Spektral parametre
$\Omega(x)$	Potansiyel fonksiyonu
F^T	F ’in transpozu
$\overline{F}$	F ’in eşleniği
F^*	F ’ in eşleniğinin transpozu
$S(\lambda)$	Saçılma fonksiyonu
R_λ	Rezolvent operatör
$\delta(x)$	Dirac delta fonksiyonu
$AC[a,b]$	$[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfı
$D(L)$	Operatörün tanım kümesi
$\square$	İspatın bittiğini gösteri

1. GİRİŞ

Spektral teori, David Hilbert'in 1900 ve 1910 yılları arasında sonsuz boyutlu uzaylar ve integral operatörlerin analizi üzerine çalışmalarıyla hız kazanmıştır. Spektral teori birçok nitel ve nicel tekniklerle çalışılan oldukça zengin bir alandır. Örneğin, Strum-Liouville teori, değişkenlerin ayrılması, Fourier ve Laplace dönüşümleri, pertürbasyon teori, öz fonksiyon ayrışımı, varyasyon yöntemleri vb. Fiziksel problemlerde diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin uygulaması geniştir. Problemlerin öz değerlerinin, öz fonksiyonlarının, normlaştırıcı sayılarının incelenmesi, öz fonksiyonlarına göre ayrışım problemleri gibi.

Dirac denklemi 1929 yılında İngiliz fizikçi Paul Dirac'ın relativistik kuantum mekaniğinde spinleri $\frac{1}{2}$ olan parçacıkların hareketlerini modellemek için elde ettiği kuantum mekanik dalga denklemidir.

Kuantum mekaniğinde dalga fonksiyonun uzaya ve zamana bağlı değişimi veren Schrödinger denklemi Avusturyalı fizikçi Erwin Schrödinger tarafından bulunmuştur. Schrödinger denklemi ile diferansiyel denklemler için sınır değer problemine bağlı matematiksel kavramların fiziksel anlamı çok genişlemiştir. Kuantum fiziğinde spektral problem verilen potansiyelli karşılıklı etkilemede dalga fonksiyonunu Schrödinger denkleminin çözümü olarak bulmak ve dalga fonksiyonu ile ele alınan sistemin tüm gözlenen özelliklerini tanımlamaktır. Lineer olmayan Schrödinger denkleminin çözümünde yardımcı lineer problem birinci mertebeden diferansiyel denklemler sisteminden oluşur. Bu nedenle Dirac denklemler sistemi için spektral problemin incelenmesi önemlidir.

Uygulamada genel olarak süreksiz katsayılı diferansiyel denklemlerle karşılaşılır. Mekanikte, fizikte, jeofizikte ve mühendisliğin farklı alanlarında homojen olmayan veya düzgün olmayan cisimlerle karşılaşılabilir. Bu yüzden süreksizlik durumunun diferansiyel denklemlerde incelenmesi gerekmektedir.

Tezde singüler durumda birinci mertebeden iki bileşenli Dirac denklemler sistemi için farklı sınır koşullar altında ayrışım problemleri incelenmiştir.

Bulgular ve tartışma kısmının birinci ve ikinci bölümünde birinci mertebeden süreksiz katsayılı kanonik Dirac denklemler sistemi ele alınır. Regüler problem için ayrışım formülü çeşitli metotlarla elde edilir. Örneğin integral denklemler metodu, kontur integralleme metodu, sonlu farklar metodu gibi. B. M. Levitan ve I. S. Sargsjan tarafından singüler durumda ayrışım formülü regüler problemin limiti olarak elde edilmiştir. Tezde singüler durumda ele alınan problemlerde kontur integralleme yöntemi kullanılarak ayrışım formülü elde edilir. Katsayılar süreksizlik noktasına sahip olduğundan problemin çözümünde farklı teknikler kullanılır. Örneğin, potansiyel bir $x=a$ süreksizlik noktasına sahip olduğunda $[0,\infty)$ yarı ekseninde problemin çözümü $[0,a]$ ve $[a,\infty)$ aralıklarında iki problemin çözümüne indirgenir.

Birinci ve ikinci bölümde süreksiz katsayılı

$$BY'+\Omega(x)Y=\lambda\rho(x)Y\,, \qquad 0\le x<\infty \tag{1.1}$$

kanonik Dirac denklemler sistemi ile sırasıyla

$$y_1(0)=0 \tag{1.2}$$

ve

$$y_2(0)=0 \tag{1.3}$$

sınır koşulları ile üretilen sınır değer problemleri ele alınır, burada

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Omega(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \qquad Y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

$$1\neq\alpha>0 \text{ olmak üzere } \rho(x)=\begin{cases} 1, & x>a, \\ \alpha, & 0\le x<a \end{cases}$$

biçimindedir. $p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlardır. λ spektral parametredir. $\Omega(x)$ matris fonksiyonu Öklid normuna göre

$$\int_0^\infty \|\Omega(x)\|dx<\infty$$

koşulunu sağladığı kabul edilir.

(1.1) denklemler sisteminin çözümü için I. M. Guseinov tarafından verilen yeni integral gösterim kullanılır. (1.1), (1.2) sınır değer probleminin ayrışım formülü $\Omega(x)\equiv 0$ olduğu ve $\Omega(x)\neq 0$ durumlarda ayrı ayrı incelenmiştir. Sırasıyla (1.1), (1.2) ve (1.1), (1.3) sınır değer problemlerinin (1.2) ve (1.3) sınır koşulunu sağlayan özel çözümleri verilir, Wronskian tanımlanır ve hesaplanır. (1.1), (1.2) ve (1.1), (1.3) sınır değer probleminin saçılma fonksiyonu tanımlanır ve saçılma fonksiyonunun kapalı üst yarı düzlemde kutup noktalarının olmadığı gösterilir. (1.1), (1.2) sınır değer probleminin ayrışım formülü $\Omega(x)\equiv 0$ olduğu durumda saçılma fonksiyonunun biçimi açık biçimde bulunmuştur. $H_\rho = L_{2,\rho}\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)$ Hilbert uzayında sırasıyla problemlere karşılık gelen operatör verilir. Problemlerin rezolvent operatörü inşa edilir ve öz fonksiyonlarına göre ayrışım formülleri ile Parseval eşitliği elde edilir. Böylece (1.1), (1.2) ve (1.1), (1.3) sınır değer problemlerinin noktasal (diskret) spektruma sahip olmadığı ve spektrum kümesinin sadece $(-\infty,\infty)$ aralığını kapsayan sürekli spektrumdan oluştuğu sonucuna ulaşılır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Tezde birinci mertebeden iki bileşenli Dirac denklemler sistemi için farklı sınır koşulları altında problemin öz fonksiyonlara göre ayrışım problemleri incelenir. Ayrışım probleminin incelenmesi spektral teoride önemlidir. Matematiksel fizik denklemlerinde sınır değer probleminin çözümü sırasında, integral dönüşümler [örneğin; Laplace Dönüşümü, Fourier Dönüşümü vb.] veya başka bir yöntem uygulanarak sınır değer problemi değişkenlerine ayrıldığında, diferansiyel operatörlerin öz fonksiyonlara göre ayrışımı probleminin incelenmesi gerekir. Lineer olmayan Schröndinger denklemlerini çözerken Dirac denklemler sistemi için spektral problem ile karşılaşılır. İncelenen probleme bağlı olarak farklı biçimde ve boyutta birinci mertebeden diferansiyel denklemler sisteminin spektral özelliklerinin bulunması önemlidir. Örneğin boyutuna göre, katsayılarının özelliklerine göre farklı sistemlerle karşılaşılır. Sonlu veya sonsuz aralıkta ve sürekli katsayılı Dirac operatörü için ayrışım problemi M. G. Gasymov [1], M. J. Ablowitz ve H. Segur [2], V. A. Marchenko [3], B. M. Levitan ve I. S. Sargsjan [4, 5] gibi birçok yazar tarafından incelenmiştir. Yarı eksende birinci mertebeden Dirac denklemler sisteminin düz ve ters problemi M. G. Gasymov ve B. M. Levitan ’ın çalışmalarında [6] ve 2n mertebeden Dirac denklemler sistemi M. G. Gasymov’un [1] çalışmasında ele alınmıştır.

Operatör dönüşümü spektral problemlerin çözümünde önemli bir role sahiptir. I. M. Guseinov [7] çalışmasında, süreksiz katsayılı birinci mertebeden Dirac denklemler sistemi için problemin çözümünün operatör dönüşümünü değil çözümün sahip olduğu integral gösterimi vermiştir. Tezde bulgular ve tartışma kısmında incelenen problemlerde süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi için çözümün bahsedilen integral gösterimi kullanılarak ayrışım problemi E. C. Titchmarsh ’ın [8] metodu kullanılarak çözülmüştür. Sonlu aralıkta ve süreksiz katsayılı Dirac operatörü için ayrışım problemi H. M. Huseynov ve A. R. Latifova [9] tarafından çözülmüştür.

Genel olarak, fizikte uygulaması yaygın olduğundan dolayı Dirac denklemler sistemi M. J. Ablowitz ve H. Segur [2], R. G. Newton ve R. Jost [10], L.

P. Nizhnik [11, 12, 13], R. J. Kruger [14], D.G. Shepelsky [15] gibi çoğu yazar için ilgi ve araştırma alanı olmuştur.

Kh. R. Mamedov ve A. Çöl ’ün [16] çalışmasında farklı sınır koşulu ile birinci mertebeden Dirac denklemler sistemi için ayrışım problemi çözülmüştür. Yarı eksende ve süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi için ters problem I. M. Guseinov [17] ile yarı eksende ve süreksiz katsayılı sınır koşulları spektral parametre içeren Dirac denklemler sisteminin ters problemi Kh. R. Mamedov [18] tarafından incelenmiştir. Ayrıca Dirac denklemler sistemi için benzer problemler Kh. R. Mamedov ve A. Çöl ’ün [19, 20, 21, 22] çalışmalarında verilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. TEMEL TANIMLAR

Tanım 3.1.1 (Birinci Mertebeden Dirac Denklemler Sistemi)

L operatörü aşağıdaki biçime sahip matris operatörü olarak tanımlansın

$$L \equiv \begin{pmatrix} p_{11}(x) & p_{12}(x) \\ p_{21}(x) & p_{22}(x) \end{pmatrix}, \qquad p_{12}(x) \equiv p_{21}(x), \tag{3.1.1}$$

burada $p_{ik}(x)$, $(i,k=1,2)$, $[0,\pi]$ aralığında sürekli reel değerli fonksiyonlardır. $y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$ iki bileşenli vektör fonksiyonudur. O halde $B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}$ ve $I=\begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & 1 \end{pmatrix}$ olmak üzere,

$$\left(B\frac{d}{dx} + L - \lambda I \right) y = 0 \tag{3.1.2}$$

denklemi

$$\begin{aligned} &\frac{dy_2}{dx} + p_{11}(x)y_1 + p_{12}(x)y_2 = \lambda y_1, \\ &-\frac{dy_1}{dx} + p_{21}(x)y_1 + p_{22}(x)y_2 = \lambda y_2, \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

birinci mertebeden diferansiyel denklemler sistemine denktir, burada λ spektral parametre $p_{12}(x) = p_{21}(x) \equiv 0,\ p_{11}(x) = V(x) + m$ ve $p_{22}(x) = V(x) - m$ durumunda, $V(x)$ potansiyel fonksiyonu, m kütle olmak üzere, (3.1.3) sistemi görelilik kuantum teorisinde bir boyutlu durağan Dirac sistemi olarak bilinir.

$H = H(x)$ iki boyutlu uzayda düzgün ortagonal dönüşüm olsun. İki boyutlu uzayda sabitleştirilmiş ortanormal tabana göre her ortagonal dönüşüm aşağıdaki matris biçimine sahiptir:

$$H(x) = \begin{pmatrix} \cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x) \\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x) \end{pmatrix}.$$

Kolayca görülebilir ki B ve H matrisleri değişmelidir, yani $BH = HB$ dir. $y = Hz$ değişken dönüşümü yapılsın. O halde y ' nin ifadesi (3.1.2) de yerine yazılarak ve soldan H^{-1} ile çarpılarak

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}(Hz) + H^{-1}LHz = H^{-1}\lambda Hz$$

veya

$$B\frac{dz}{dx}\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH \right)z = \lambda z \tag{3.1.4}$$

elde edilir. $Q = H^{-1}B\frac{d}{dx}H + H^{-1}LH$ matrisi hesaplanmalıdır. Bunun için

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}H = \begin{pmatrix} \varphi'(x) & 0 \\ 0 & \varphi'(x) \end{pmatrix},$$

$$H^{-1}LH = \begin{pmatrix} p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22} - p_{11})\sin 2\varphi & p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix}$$

matris ifadeleri (3.1.4) de yerine yazılarak, Q matrisinin aşağıdaki biçime sahip olduğu görülür:

$$Q \equiv \begin{pmatrix} q_{11} & q_{12} \\ q_{21} & q_{22} \end{pmatrix} =$$

$$=\begin{pmatrix} \varphi' + p_{11}\cos^2\varphi + p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\sin^2\varphi & p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi \\ p_{12}\cos 2\varphi + \frac{1}{2}(p_{22}-p_{11})\sin 2\varphi & \varphi' + p_{11}\sin^2\varphi - p_{12}\sin 2\varphi + p_{22}\cos^2\varphi \end{pmatrix}.$$

$\varphi(x)$ fonksiyonu $q_{12}(x)\equiv 0$ olacak şekilde seçilsin. O halde

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x) + \frac{1}{2}\{p_{22}(x) - p_{11}(x)\}\sin 2\varphi(x) = 0.$$

Böylece, $p_{11}(x)\neq p_{22}(x)$ için

$$\varphi(x) = \frac{1}{2}arctg\,\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x)-p_{22}(x)}$$

ve

$$Q(x)=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x)\end{pmatrix}$$

biçimindedir. Böylece (3.1.4) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \qquad (3.1.5)$$

formunda yazılabilir.

Şimdi $\varphi(x)$ fonksiyonu $trQ(x)\equiv q_{11}(x)+q_{22}(x)=0$, yani

$$2\varphi'(x) + p_{11}(x) + p_{12}(x) = 0$$

olacak şekilde seçilsin. Bu durumda

$$\varphi(x) = -\frac{1}{2}\int_0^x \{p_{11}(\tau)+p_{22}(\tau)\}d\tau$$

dir. O halde (3.1.4) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}z=\lambda z \tag{3.1.6}$$

biçimini alır. (3.1.5) ve (3.1.6) denklemlerine (3.1.2) sisteminin kanonik formları denir. (3.1.2) denkleminin spektral teorisindeki çeşitli problemlerin çözümünde bu kanonik formların ya da bunlara benzer diğer kanonik formların kullanılması uygundur. Örneğin, öz değer ve öz fonksiyonların asimptotik ifadeleri çalışılırken ve (3.1.2) denkleminin öz fonksiyonlarına göre ayrışımı ile ilgili sorularda (3.1.5) kanonik formunu kullanmak uygundur. Diğer taraftan, sonsuz aralıkta tanımlı (3.1.2) denkleminin öz değerlerinin sayısının asimptotik ifadesi ve ters problemde (3.1.6) kanonik formunun kullanılması uygundur.

Tanım 3.1.2. A ve B lineer diferansiyel operatörler ve E_1, E_2 lineer fonksiyon uzayları olmak üzere $X:E_1\to E_2$ lineer operatör olsun. X operatörü aşağıdaki iki koşulu sağlarsa X operatörüne *dönüşüm operatörü* denir,

1. $AX = XB$
2. Sürekli ters operatör X^{-1} vardır.

$$A\equiv\begin{pmatrix} p_1(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_1(x) \end{pmatrix}, \qquad B\equiv\begin{pmatrix} p_2(x) & \dfrac{d}{dx} \\ -\dfrac{d}{dx} & r_2(x) \end{pmatrix}$$

olsun, burada $p_k(x)$, $r_k(x)$, $k=1,2$ $[0,\pi]$ sonlu aralığında reel değerli, sürekli fonksiyonlardır.

E_1 ve E_2 aşağıdaki koşulları sağlayan sürekli diferansiyellenebilir $f(x)$ ve $g(x)$ vektör değerli fonksiyonlar kümesinden oluşsun,

$$f_1(0)\sin\gamma + f_2(0)\cos\gamma = 0,$$

$$g_1(0)\sin\delta + f_2(0)\cos\delta = 0,$$

burada γ, δ keyfi reel sayılardır.

X matris dönüşüm operatörü

$$X\{f(x)\} = R(x)f(x) + \int_0^x K(x,s)f(s)ds$$

biçiminde ifade edilir, burada $R(x)$ ve $K(x,s)$ iki boyutlu sürekli diferansiyellenebilir matrislerdir,

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix}$$

ve $\alpha(x)$, $\beta(x)$ fonksiyonları

$$\alpha(x) = \frac{1}{\kappa}\sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x trace[A-B]d\tau + \sin^{-1}\frac{1}{\kappa}\right\},$$

$$\beta(x) = \frac{1}{\kappa}\cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x trace[A-B]d\tau + \sin^{-1}\frac{1}{\kappa}\right\},$$

$\kappa = \sec(\delta - \gamma)$.

Tanım 3.1.3

- Sonlu aralıkta tanımlı ve katsayıları sürekli olan diferansiyel operatörlere *regülerdir* denir.
- Sonsuz aralıkta tanımlı veya katsayıları (bazıları veya tamamı) toplanabilir olmayan (ya da her ikisi sağlanacak şekilde) diferansiyel operatörlere *singülerdir* denir.

Tanım 3.1.4

- H Hilbert uzayı ve A bu uzayda tanımlı operatör olsun. $R_\lambda = \left(A - \lambda I\right)^{-1}$ rezolvent operatörü varsa, $\lambda \in \mathbb{C}$ noktasına *regüler nokta* denir.
- Regüler olmayan tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ noktalarına A *operatörünün spektrumu* denir. Bir operatörün öz değerleri spektrum kümesine dâhildir.
- Bütün öz değerlerin kümesine *operatörün discrete spektrumu* denir.
- Operatörün diğer spektrum noktalarına *sürekli spektrum noktaları* denir. Bu noktaların oluşturduğu kümeye *operatörün sürekli spektrumu* denir.

Tanım 3.1.5 (Dirac Delta Fonksiyonu)

$$\delta\left(x\right) = \begin{cases} \infty, & x = 0 \\ 0, & x \neq 0 \end{cases}$$

ile birlikte $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t\right) dt = 1$ koşulunu sağlayan fonksiyona *Dirac delta fonksiyonu* denir. Dirac delta fonksiyonun özellikleri,

1. $\int_{-\infty}^{\infty} \delta\left(t-a\right) f(t)dt = f(a),$
2. $\delta\left(at\right) = \frac{1}{|a|}\delta\left(t\right),$
3. $\delta\left(-t\right) = \delta\left(t\right),$
4. $f\left(t\right)$, $t = 0$ noktasında sürekli olmak üzere,

$$f\left(t\right)\delta\left(t\right) = f\left(0\right)\delta\left(t\right).$$

3.2. SİNGÜLER DURUMDA DİRAC OPERATÖRÜ İÇİN AYRIŞIM TEOREMİ VE PARSEVAL EŞİTLİĞİ

Singüler Dirac operatörü için ayrışım teoremi ve Parseval eşitliği regüler problemin limiti olarak elde edilir [4, 5]. Aşağıdaki problem ele alınsın:

$$y_2' - \{\lambda + q_1(x)\} y_1 = 0, \qquad 0 \le x < \infty \tag{3.2.1}$$

$$y_1' + \{\lambda + q_2(x)\} y_2 = 0, \tag{3.2.2}$$

burada $q_1(x)$ ve $q_2(x)$ katsayıları herhangi sonlu $[0,b]$ aralığında sürekli olsun. $\varphi(x,\lambda)$ (3.2.1), (3.2.2) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = \cos\alpha \qquad \text{ve} \qquad \varphi_2(0,\lambda) = -\sin\alpha,$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleridir, burada α keyfi reel sayıdır. Açıktır ki $\varphi(x,\lambda)$ aşağıdaki sınır koşulunu sağlar,

$$y_1(0,\lambda)\sin\alpha + y_2(0,\lambda)\cos\alpha = 0. \tag{3.2.3}$$

Teorem 3.2.1 (Parseval eşitliği) $f(x) \in L_2(0,\infty)$ vektör değerli bir fonksiyon olsun. Monoton artan $f(x)$ fonksiyonuna bağlı olmayan $\rho(\lambda)$, $-\infty < \lambda < \infty$, fonksiyonu ve $F(\lambda)$ fonksiyonu vardır öyle ki,

$$\int_0^\infty \left\{ f_1^2(x) + f_2^2(x) \right\} dx = \int_{-\infty}^{\infty} F^2(\lambda) d\rho(\lambda),$$

burada $F(\lambda)$ fonksiyonu (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3) probleminin öz vektör fonksiyonlarına göre $f(x)$ vektör fonksiyonunun genellemiş Fourier dönüşümüdür.

$F(\lambda)$ fonksiyonu sürekli fonksiyonların dizisinin limiti biçimindedir,

$$F_n(\lambda)=\int_0^n \{ f_1(x)\varphi_1(x,\lambda)+f_2(x)\varphi_2(x,\lambda)\}\,dx\,,\ \text{yani}$$

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\{F(\lambda)-F_n(\lambda)\}^2\,d\rho(\lambda)=0\,.$$

Teorem 3.2.2 (Ayrışım teoremi) $f(x)\in L_2(0,\infty),\ \ 0\le x<\infty$ vektör değerli bir fonksiyon $\varphi(x,\lambda)$ ve $F(\lambda)$ daha önce bahsedilen özellikteki fonksiyonlar olsun.

$$\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\varphi_1(x,\lambda)d\rho(\lambda),\qquad \int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\varphi_2(x,\lambda)d\rho(\lambda)$$

integralleri her sonlu aralıkta x göre mutlak ve düzgün yakınsak olsun. O halde

$$f_1(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\varphi_1(x,\lambda)d\rho(\lambda),\qquad f_2(x)=\int_{-\infty}^{\infty}F(\lambda)\varphi_2(x,\lambda)d\rho(\lambda)\,.$$

Özel olarak, B. M. Levitan ve I. S. Sargsjan [4] çalışmasında pozitif yarı eksende ve sürekli durumda Dirac denklemler sistemi için ayrışım problemi incelemiştir. Tezde ise pozitif yarı eksende süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi için ayrışım problemi farklı bir metotla (kontur üzeri integralleme metodu kullanılarak) incelenmiştir.

$$B\frac{dy}{dx}+Q(x)y=\lambda y,\quad 0<x<\infty \tag{3.2.4}$$

$$y_1(0)=0\,, \tag{3.2.5}$$

sınır değer problemi ele alınsın [4], burada

$$y=\begin{pmatrix} y_1\\ y_2\end{pmatrix},\qquad B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\qquad Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}.$$

$p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli fonksiyonları $[0,\infty)$ yarı ekseninin her sonlu alt aralığında sürekli olduğu kabul edilsin. $\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}$, (3.2.4), (3.2.5) sınır değer probleminin aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun,

$$\varphi_1(0,\lambda)=0, \qquad \varphi_2(0,\lambda)=-1.$$

$f(x)\in L_2(0,\infty)$ keyfi vektör değerli fonksiyon olsun.

$$F_n(\lambda)=\int_0^n f^T(x)\varphi(x,\lambda)dx$$

ise, o halde (3.2.4), (3.2.5) sınır değer probleminin $f(x)$ fonksiyonuna bağlı olmayan ve monoton artan $\rho(\lambda)$, $-\infty<\lambda<\infty$, spektral fonksiyonu vardır öyle ki

$$\int_0^\infty f^T(x)f(x)dx=\int_{-\infty}^\infty F^2(\lambda)d\rho(\lambda)$$

Parseval eşitliği vardır, burada

$$\lim_{n\to\infty}\int_{-\infty}^\infty \{F(\lambda)-F_n(\lambda)\}^2 d\rho(\lambda)=0.$$

3.3. SÜREKSİZ KATSAYILI DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN İNTEGRAL GÖSTERİMİ

I. M. Guseinov [7] çalışmasında, süreksiz katsayılı birinci mertebeden Dirac denklemler sistemi için problemin çözümünün sahip olduğu integral gösterimi vermiştir. Tezde incelenen problemlerde çözümün bu integral gösterimi kullanılarak ayrışım problemi çözülmüştür.

Pozitif yarı eksende süreksiz katsayılı

$$BY' + \Omega(x)Y = \lambda\rho(x)Y, \qquad 0 \le x < \infty \tag{3.3.1}$$

Dirac denklemler sistemi ve

$$y_1(0) = 0 \tag{3.3.2}$$

sınır koşulu ile üretilmiş problem incelenir, burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \qquad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x > a, \\ \alpha, & 0 \le x < a \end{cases} \qquad 1 \ne \alpha > 0,$$

$p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlardır. λ spektral parametredir. $\Omega(x)$ matris fonksiyonu Öklid normuna göre

$$\int_0^\infty \|\Omega(x)\| dx < \infty \tag{3.3.3}$$

koşulunu sağladığı kabul edilsin. $\Omega(x) \equiv 0$ olduğunda $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ için (3.3.1) denkleminin

$$\lim_{x\to\infty} f(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

koşulunu sağlayan çözümü

$$f^0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda\mu(x)}$$

biçimindedir, burada

$$\mu(x) = \begin{cases} \alpha x - \alpha a + a, & 0 \le x \le a, \\ x, & x > a. \end{cases}$$

Teorem 3.3.1. (3.3.3) koşulu sağlansın. Bu durumda $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ için (3.3.1) denkleminin

$$\lim_{x\to\infty} f(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

koşulunu sağlayan

$$f(x,\lambda) = f^0(x,\lambda) + \int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda t} dt$$

biçimine sahip tek çözümü vardır. Burada $K(x,.)$ matris fonksiyonun bileşenleri pozitif yarı eksende toplanabilirdir ve $K(x,t)$ Öklid normuna göre

$$\int_{\mu(x)}^{\infty} \|K(x,t)\| dt \le e^{\sigma(x)} - 1$$

eşitsizliğini sağlar, burada

$$\sigma(x) = \int_{x}^{\infty} \|\Omega(t)\| dt .$$

Ayrıca $\Omega(x)$ mutlak sürekli ise

$$BK_x(x,t) + \Omega(x)K(x,t) + \rho(x)K_t(x,t)B = 0,$$

$$\rho(x)\left[BK\left(x,\mu(x)\right)-K\left(x,\mu(x)\right)B\right]=\Omega(x)$$

sağlanır.

İspat. $F(x,\lambda)$, (3.3.1) denkleminin

$$\lim_{x\to\infty} F(x,\lambda)e^{-\lambda Bx}=\begin{pmatrix}1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$$

koşulunu sağlayan çözümü olsun. O halde

$$f\left(x,\lambda\right)=F\left(x,\lambda\right)\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}$$

olduğu açıktır. $F\left(x,\lambda\right)$ fonksiyonunun

$$F(x,\lambda)=e^{-\lambda B\mu(x)}+\int_{\mu(x)}^{\infty} K\left(x,t\right)e^{-\lambda Bt}dt$$

biçimine sahip olduğunu göstermek yeterlidir. Sabitlerin değişimi yöntemi ile $F(x,\lambda)$ için

$$F(x,\lambda)=e^{-\lambda B\mu(x)}-\int_{\mu(x)}^{\infty} B\Omega\left(t\right)e^{\lambda B\mu(x)-\lambda B\mu(t)}F\left(t,\lambda\right)dt \tag{3.3.4}$$

integral denklemi elde edilir. $F(x,\lambda)$ ’nın bu integral denklemi sağlaması için

$$\int_{\mu(x)}^{\infty} K\left(x,t\right)e^{-\lambda Bt}dt=-\int_{x}^{\infty} B\Omega\left(t\right)e^{\lambda B\mu(x)-\lambda B\mu(t)}\left[e^{-\lambda B\mu(t)}+\int_{\mu(t)}^{\infty} K\left(t,s\right)e^{-\lambda Bs}ds\right]dt \tag{3.3.5}$$

eşitliğinin sağlanması gerekir. Aksine $K(x,t)$ bu eşitliği sağlarsa, $F(x,\lambda)$ matris fonksiyonu (3.3.4) integral denklemi sağlar.

$$K_{\pm}\left(x,t\right)=\frac{1}{2}\left[K\left(x,t\right)\pm BK\left(x,t\right)B\right]$$

olarak gösterilsin. $K_{\pm}(x,t)$ matris fonksiyonunun ifadesinden

$$K(x,t)=K_{+}(x,t)+K_{-}(x,t),$$

$$BK_{+}(x,t)=\frac{1}{2}\left[BK(x,t)-K(x,t)B\right]=-K_{+}(x,t)B,$$

$$BK_{-}(x,t)=\frac{1}{2}\left[BK(x,t)+K(x,t)B\right]=-K_{-}(x,t)B,$$

olduğu açıktır. (3.3.5) ifadesinin sağ tarafı sol tarafına benzetilerek $K_{\pm}(x,t)$ matris fonksiyonları için aşağıdaki integral denklemler elde edilir:

$0<x<a,\ \ \alpha x-\alpha a+a<t<-\alpha x+\alpha a+a$ için

$$K_{+}(x,t)=-\frac{1}{2\alpha}B\Omega\left(\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}\right)-\int_{x}^{\frac{t+\alpha x+\alpha a-a}{2\alpha}}B\Omega(\xi)K_{-}(\xi,t-\alpha\xi+\alpha x)\,d\xi\,,$$

$0<x<a,\ \ t>-\alpha x+\alpha a+a$ için

$$K_{+}(x,t)=-\frac{1}{2}B\Omega\left(\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2\alpha}\right)-\int_{x}^{a}B\Omega(\xi)K_{-}(\xi,t-\alpha\xi+\alpha x)\,d\xi$$

$$-\int_{x}^{\frac{t+\alpha x-\alpha a+a}{2\alpha}}B\Omega(\xi)K_{-}(\xi,t-\xi+\alpha x-\alpha a+a)\,d\xi\,,$$

$0<x<a,\ \ t>\alpha x-\alpha a+a$ için

$$K_{-}(x,t)=-\int_{x}^{a}B\Omega(\xi)K_{+}(\xi,t+\alpha\xi-\alpha x)d\xi-\int_{a}^{\infty}B\Omega(\xi)K_{+}(\xi,t+\xi-\alpha x+\alpha a-a)\,d\xi\,,$$

$t > x > a$ için

$$K_+(x,t) = -\frac{1}{2} B\Omega\left(\frac{x+t}{2}\right) - \int_x^{\frac{x+t}{2}} B\Omega(\xi) K_-(\xi, t+x-\xi)\, d\xi ,$$

$$K_-(x,t) = -\int_x^{\infty} B\Omega(\xi) K_+(\xi, t-x+\xi)\, d\xi .$$

Bu denklemler sisteminin çözülebilirliği ardışık yaklaşım metoduyla elde edilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. BİRİNCİ MERTEBEDEN PARÇALI SÜREKLİ KATSAYILI DİRAC DENKLEMLEMLER SİSTEMİ İÇİN SPEKTRAL AYRIŞIM PROBLEMİ

4.1.1. Probleme Giriş

Pozitif yarı eksende süreksiz katsayılı

$$BY' + \Omega(x)Y = \lambda\rho(x)Y\,, \qquad 0 \le x < \infty \tag{4.1.1.1}$$

kanonik Dirac diferansiyel denklemler sistemi ve

$$y_1(0) = 0 \tag{4.1.1.2}$$

sınır koşulu ile üretilen sınır değer problemi ele alınır, burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \qquad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \qquad Y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$$1 \ne \alpha > 0 \text{ olmak üzere } \rho(x) = \begin{cases} 1, & x > a, \\ \alpha, & 0 \le x < a \end{cases}$$

biçimindedir. $p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlardır. λ spektral parametredir. $\Omega(x)$ matris fonksiyonu Öklid normuna göre

$$\int_0^\infty \|\Omega(x)\| dx < \infty \tag{4.1.1.3}$$

koşulunu sağladığı kabul edilsin. $\Omega(x) \equiv 0$ olduğunda (4.1.1.1) denkleminin

$$\lim_{x\to\infty} f(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} \tag{4.1.1.4}$$

koşulunu sağlayan çözümü

$$f^0(x,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)}$$

biçimindedir, burada

$$\mu(x)=\begin{cases}\alpha x-\alpha a+a, & 0\le x\le a\\ x, & x>a\end{cases}$$

formundadır. Bu durumda (4.1.1.1) denklemi $\operatorname{Im}\lambda>0$ için (4.1.1.4) koşulunu sağlayan

$$f(x,\lambda)=f^0(x,\lambda)+\int_{\mu(x)}^{\infty}K(x,t)\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda t}dt \tag{4.1.1.5}$$

biçiminde tek bir çözüme sahiptir. Ayrıca pozitif yarı eksende $K(x,.)$ matris fonksiyonun bileşenleri toplanabilirdir ve $K(x,t)$ Öklid normuna göre

$$\int_{\mu(x)}^{\infty}\|K(x,t)\|dt\le e^{\sigma(x)}-1$$

eşitsizliğini sağlar, burada

$$\sigma(x)=\int_x^{\infty}\|\Omega(t)\|dt\,.$$

Tanım 4.1.1.1. $Y(x,\lambda)$ ve $Z(x,\lambda)$ (4.1.1.1) denkleminin çözümleri olsun.

$$W\left[Y(x,\lambda),Z(x,\lambda)\right]=Y^T\left(x,\lambda\right)BZ\left(x,\lambda\right)=y_1z_2-y_2z_1$$

ifadesine $Y(x,\lambda)$ ve $Z(x,\lambda)$ vektör fonksiyonlarının *Wronskianı* denir.

$f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ fonksiyonların Wronskianı x' e bağlı değildir,

$$W\left[f(x,\lambda),\overline{f(x,\lambda)}\right]=2i.$$

Bu nedenle reel λ için $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ (4.1.1.1) denkleminin temel çözüm sistemini oluşturur.

4.1.2. Özel Çözüm ve Saçılma Fonksiyonu

$\varphi(x,\lambda)$ (4.1.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=0 \quad \text{ve} \quad \varphi_2(0,\lambda)=1 \tag{4.1.2.1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

Lemma 4.1.2.1. Reel λ 'lar için

$$2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{f_1(0,\lambda)}=\overline{f(x,\lambda)}-S(\lambda)f(x,\lambda) \tag{4.1.2.2}$$

özdeşliği sağlanır, burada

$$S(\lambda)=\frac{\overline{f_1(0,\lambda)}}{f_1(0,\lambda)} \tag{4.1.2.3}$$

biçimine sahiptir. Ayrıca $S(\lambda)$ için

$$S(\lambda)=\left[\overline{S(\lambda)}\right]^{-1} \qquad \text{ve} \qquad |S(\lambda)|=1$$

özellikleri vardır.

İspat. $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ (4.1.1.1) denkleminin temel çözüm sistemini oluşturduğundan $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunu bu çözümlerin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir:

$$\varphi(x,\lambda)=c_1(\lambda)f(x,\lambda)+c_2(\lambda)\overline{f(x,\lambda)}, \tag{4.1.2.4}$$

burada $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ λ 'ya bağlı bilinmeyen fonksiyonlardır. (4.1.2.4) denkleminde $x=0$ alarak ve (4.1.2.1) başlangıç koşulları kullanılarak,

$$c_1(\lambda)f_1(0,\lambda)+c_2(\lambda)\overline{f_1(0,\lambda)}=0,$$

$$c_1(\lambda) f_2(0,\lambda) + c_2(\lambda)\overline{f_2(0,\lambda)} = 1$$

elde edilir. Bu iki eşitlikten

$$c_1(\lambda) = -\frac{\overline{f_1(0,\lambda)}}{2i} \qquad \text{ve} \qquad c_2(\lambda) = \frac{f_1(0,\lambda)}{2i}$$

bulunur. Bulunan ifadeler (4.1.2.4) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\varphi(x,\lambda) = -\frac{\overline{f_1(0,\lambda)}}{2i} f(x,\lambda) + \frac{f_1(0,\lambda)}{2i}\overline{f(x,\lambda)} \tag{4.1.2.5}$$

elde edilir. Gösterilmelidir ki reel λ ' lar için $f_1(0,\lambda) \neq 0$. Aksi kabul edilsin, yani en az bir λ_0 sayısı vardır öyle ki $f_1(0,\lambda_0) = 0$ dır. Wronskian'ın ifadesinden

$$f_1(0,\lambda_0)\overline{f_2(0,\lambda_0)} - f_2(0,\lambda_0)\overline{f_1(0,\lambda_0)} = 2i\,.$$

Bu eşitlikte $f_1(0,\lambda_0) = 0$ ve $\overline{f_1(0,\lambda_0)} = 0$ yazılarak $0 = 2i$ bulunur ve çelişki elde edilir. Bu yüzden reel λ 'lar için $f_1(0,\lambda) \neq 0$. Böylece (4.1.2.5) ifadesinin her iki tarafı $\frac{f_1(0,\lambda)}{2i}$ bölünerek (4.1.2.2) elde edilir ve burada $S(\lambda) = \frac{\overline{f_1(0,\lambda)}}{f_1(0,\lambda)}$ biçimine sahiptir. $S(\lambda)$ saçılma fonksiyonunun biçiminden

$$\overline{S(\lambda)} = \overline{\left[\frac{\overline{f_1(0,\lambda)}}{f_1(0,\lambda)}\right]} = \frac{f_1(0,\lambda)}{\overline{f_1(0,\lambda)}} = [S(\lambda)]^{-1},$$

$$|S(\lambda)|^2 = S(\lambda)\overline{S(\lambda)} = S(\lambda)[S(\lambda)]^{-1} = 1,$$

yani $\overline{S(\lambda)} = [S(\lambda)]^{-1}$ ve $|S(\lambda)| = 1$ elde edilir. □

Tanım 4.1.2.1. $S(\lambda)$ fonksiyonuna (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin *saçılma fonksiyonu* denir.

Lemma 4.1.2.2. $f_1(0,\lambda)$ fonksiyonun kapalı üst yarı düzlemde sıfırları yoktur.

İspat. (4.1.1.4) ifadesinden $f_1(0,\lambda)$ fonksiyonun $\operatorname{Im}\lambda > 0$ üst yarı düzlemde analitik devam ettirilebileceği görülür ve $f_1(0,\lambda)$ fonksiyonu tüm eksen üzerinde süreklidir. Lemma 4.1.2.1'de reel λ lar için $f_1(0,\lambda) \neq 0$ olduğu gösterildi. O halde gösterilmesi gereken $f_1(0,\lambda)$ nın üst yarı düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ sıfırlarının olmadığıdır. Aksi kabul edilsin, yani $\lambda = \mu$, $(\mu \in \mathbb{C})$ $f_1(0,\lambda)$ fonksiyonun sıfır olsun. $f(x,\mu)$ (4.1.1.1), (4.1.1.2) probleminin çözümü olduğu için

$$Bf^{'}(x,\mu) + \Omega(x) f(x,\mu) = \rho(x)\mu f(x,\mu)$$

yazılabilir. Bu denklemin önce eşleniği sonra transpozu alınırsa

$$-f^{*'}(x,\mu)B + f^{*}(x,\mu)\Omega(x) = \rho(x)\overline{\mu} f^{*}(x,\mu)$$

elde edilir, burada $f^{*}(x,\mu)$ fonksiyonu $\overline{f(x,\mu)}$ fonksiyonunun transpozudur.

$$Bf^{'}(x,\mu) + \Omega(x) f(x,\mu) = \rho(x)\mu f(x,\mu)$$

$$-f^{*'}(x,\mu)B + f^{*}(x,\mu)\Omega(x) = \rho(x)\overline{\mu} f^{*}(x,\mu)$$

denklemler sisteminde birinci denklemi soldan $f^{*}(x,\mu)$ ile çarpılarak

$$f^{*}(x,\mu)Bf^{'}(x,\mu) + f^{*}(x,\mu)\Omega(x) f(x,\mu) = \rho(x)\mu f^{*}(x,\mu) f(x,\mu)$$

ve ikinci denklemi sağdan $f(x,\mu)$ ile çarpılarak

$$-f^{*'}(x,\mu)Bf(x,\mu) + f^{*}(x,\mu)\Omega(x) f(x,\mu) = \rho(x)\overline{\mu} f^{*}(x,\mu) f(x,\mu)$$

bulunur. Bulunan denklemler taraf tarafa çıkarıldığında

$$f^{*}(x,\mu)Bf^{'}(x,\mu) + f^{*'}(x,\mu)Bf(x,\mu) = \left(\mu - \overline{\mu}\right)\rho(x) f^{*}(x,\mu) f(x,\mu)$$

veya

$$W^{'}[\overline{f(x,\mu)}, f(x,\mu)] = \left(\mu - \overline{\mu}\right)\rho(x)\, f^{*}(x,\mu)\, f(x,\mu)$$

elde edilir. Son ifade x'e göre 0 dan ∞'a kadar integrallendiğinde:

$$W\left[\overline{f(x,\mu)}, f(x,\mu)\right]_{x=0} + \left(\overline{\mu} - \mu\right)\int_{0}^{\infty} f^{*}(x,\mu) f(x,\mu)\rho(x)\,dx = 0. \tag{4.1.2.6}$$

Diğer taraftan

$$W\left[\overline{f(x,\mu)}, f(x,\mu)\right]_{x=0} = \overline{f_1(0,\mu)} f_2(0,\mu) - \overline{f_2(0,\mu)} f_1(0,\mu) = 0.$$

(4.1.2.6) eşitliğinde son ifade yerine yazıldığında

$$\left(\overline{\mu} - \mu\right)\int_{0}^{\infty} f^{*}(x,\mu) f(x,\mu)\rho(x)\,dx = 0$$

bulunur. Buradan $\mu = \overline{\mu}$,yani μ'lerin reel olduğu görülür. O halde $f_1(0,\mu)$ fonksiyonunun üst yarı düzlemde $(\operatorname{Im}\mu > 0)$ sıfırları olmadığı sonucuna varılır. Reel eksen üzerinde de sıfır yerinin olmadığı önceki lemmada gösterilmişti. Böylece çelişki elde edilir, yani $f_1(0,\lambda)$ fonksiyonunun kapalı üst yarı düzlemde sıfırları olmadığı sonucu çıkar. □

4.1.3. Rezolvent Operatörün İnşası

$H_{\rho} = L_{2,\rho}\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)$ Hibert uzayında iç çarpım

$$(F,G) = \int_{0}^{\infty}\left\{F_1(x)\overline{G_1(x)} + F_2(x)\overline{G_2(x)}\right\}\rho(x)\,dx$$

şeklinde tanımlansın, burada

$$F := \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix} \in H_{\rho} \quad \text{ve} \quad G := \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \end{pmatrix} \in H_{\rho}$$

biçimine sahip vektörlerdir. $L: F \to l(F)$ operatörünün tanım kümesi

$$D(L) := \left\{ F \,\middle|\, F = \left(F_1(x), F_2(x)\right) \in H_\rho, F_1(x), F_2(x) \in AC[0,b], [0,b] \subset [0,\infty), l(F) \in H_\rho, F_1(0) = 0 \right\}$$

biçimine sahiptir, burada

$$l(F) = \frac{1}{\rho(x)} \left\{ BY' + \Omega(x) Y \right\}.$$

(4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer problemi $LY = \lambda Y$ 'e karşılık gelir. Tanım kümesi $D(L)$ olan L operatörü $H_\rho = L_{2,\rho}\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)$ uzayında öz eşleniktir.

λ, L operatörünün spektrum noktası değil ise, $R_\lambda = \left(L - \lambda I\right)^{-1}$ rezolvent operatörü vardır.

Lemma 4.1.3.1. $R_\lambda = \left(L - \lambda I\right)^{-1}$ rezolvent operatörü

$$R_\lambda(x,t) = -\frac{1}{f_1(0,\lambda)} \begin{cases} \varphi(x,\lambda)\, f^T(t,\lambda), & x \le t, \\ f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda), & x \ge t, \end{cases}$$

biçiminde çekirdeğe sahip integral operatörüdür.

İspat. $L \in D(L)$ olan operatör ve $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix}$ sonlu her $(0,b)$ aralığının dışında sıfır olsun. Rezolvent operatörü inşa etmek için,

$$BY' + \Omega(x)Y = \lambda\rho(x)Y + \rho(x)F(x), \qquad (4.1.3.1)$$

$$y_1(0) = 0 \qquad (4.1.3.2)$$

probleminin çözülmesi gerekir. (4.1.3.1), (4.1.3.2) probleminin çözümünü sabitlerin değişim yöntemi uygulanarak

$$Y(x,\lambda)=c_1(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)f(x,\lambda) \tag{4.1.3.3}$$

biçiminde bulunulması isteniyor, burada $f(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ (4.1.3.2) sınır koşuluna uygun homojen denklemin çözümleridir.

$$Y(x,\lambda)=c_1(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)f(x,\lambda),$$

$$Y'(x,\lambda)=c_1'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+c_1(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)+c_2'(x,\lambda)f(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)f'(x,\lambda)$$

eşitliklerini (4.1.3.1) denkleminde yerine yazarak,

$$c_1'(x,\lambda)B\varphi(x,\lambda)+c_2'(x,\lambda)Bf(x,\lambda)+c_1(x,\lambda)\left[B\varphi'(x,\lambda)+\Omega(x)\varphi(x,\lambda)\right]$$

$$+c_2(x,\lambda)\left[Bf'(x,\lambda)+\Omega(x)f(x,\lambda)\right]=$$

$$=c_1(x,\lambda)\lambda\rho(x)\varphi(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)\lambda\rho(x)f(x,\lambda)+F(x)\rho(x)$$

elde edilir. $f(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ problemin çözümü olduğundan,

$$c_1'(x,\lambda)B\varphi(x,\lambda)+c_2'(x,\lambda)Bf(x,\lambda)=F(x)\rho(x) \tag{4.1.3.4}$$

bulunur. (4.1.3.4) eşitliği soldan $f^T(x,\lambda)$ ile çarpıldığında

$$c_1'(x,\lambda)f^T(x,\lambda)B\varphi(x,\lambda)+c_2'(x,\lambda)f^T(x,\lambda)Bf(x,\lambda)=f^T(x,\lambda)F(x)\rho(x)$$

$$c_1'(x,\lambda)f^T(x,\lambda)B\varphi(x,\lambda)=f^T(x,\lambda)F(x)\rho(x) \tag{4.1.3.5}$$

elde edilir. $Y(x,\lambda)$ çözümünün $L_{2,\rho}\left(0,\infty,\mathbb{C}^2\right)$' den olması için $c_1(\infty,\lambda)=0$ olması gerekir. (4.1.3.5) eşitliği x den ∞ kadar integrallenerek

$$\int_x^\infty c_1'(t,\lambda)dt=\frac{1}{f_1(0,\lambda)}\int_x^\infty f^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt$$

$$c_1(x,\lambda)=-\frac{1}{f_1(0,\lambda)}\int_x^\infty f^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt \tag{4.1.3.6}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.1.3.4) eşitliği soldan $\varphi^T(x,\lambda)$ ile çarpıldığında

$$c_1'(x,\lambda)\varphi^T(x,\lambda)B\varphi(x,\lambda)+c_2'(x,\lambda)\varphi^T(x,\lambda)Bf(x,\lambda)=\varphi^T(x,\lambda)F(x)\rho(x)$$

$$c_2'(x,\lambda)\varphi^T(x,\lambda)Bf(x,\lambda)=\varphi^T(x,\lambda)F(x)\rho(x) \qquad (4.1.3.7)$$

sonucu çıkar. (4.1.3.7) eşitliği 0 dan x kadar integrallenerek

$$\int_0^x c_2'(t,\lambda)dt=-\frac{1}{f_1(0,\lambda)}\int_0^x \varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)dt$$

$$c_2(x,\lambda)-c_2(0,\lambda)=-\frac{1}{f_1(0,\lambda)}\int_0^x \varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)dt$$

$$c_2(x,\lambda)=c_2(0,\lambda)-\frac{1}{f_1(0,\lambda)}\int_0^x \varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)dt \qquad (4.1.3.8)$$

elde edilir. (4.1.3.6) ve (4.1.3.8) ifadeleri (4.1.3.3) eşitliğinde yerine yazılarak,

$$Y(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)\left(-\frac{1}{f_1(0,\lambda)}\int_x^\infty f^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)dt\right)$$

$$+f(x,\lambda)\left(c_2(0,\lambda)-\frac{1}{f_1(0,\lambda)}\int_0^x \varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)dt\right)$$

$$=-\frac{1}{f_1(0,\lambda)}\int_x^\infty \varphi(x,\lambda)f^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)dt$$

$$-\frac{1}{f_1(0,\lambda)}\int_0^x f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)dt+c_2(0,\lambda)f(x,\lambda)$$

$$=\int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt+c_2(0,\lambda)f(x,\lambda)$$

elde edilir, burada $R_\lambda(x,t)$ çekirdek fonksiyonu

$$R_\lambda(x,t) = -\frac{1}{f_1(0,\lambda)}\begin{cases}\varphi(x,\lambda)\, f^T(t,\lambda), & x \le t,\\ f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda), & x \ge t\end{cases}$$

biçiminde ifade edilir. $c_2(0,\lambda)$ ifadesini bulmak için (4.1.3.2) sınır koşulu kullanılmalıdır. $Y(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1.3.2) koşulunu sağladığı için

$$y_1(0,\lambda) = c_1(0,\lambda)\varphi_1(0,\lambda) + c_2(0,\lambda)\, f_1(0,\lambda).$$

Bu eşitlikten

$$c_2(0,\lambda)\, f_1(0,\lambda) = 0$$

bulunur ve böylece $c_2(0,\lambda) = 0$ sonucuna varılır. Buradan $Y(x,\lambda)$ çözümünün

$$Y(x,\lambda) = \int_0^\infty R_\lambda(x,t) F(t)\rho(t)dt$$

biçimine sahip olduğu elde edilir. □

Lemma 4.1.3.2 $F(x)$ sonlu vektör fonksiyonu ve $F(x) \in D(L)$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t) F(t)\rho(t)\, dt = -\frac{F(x)}{\lambda} + \frac{Z(x,\lambda)}{\lambda} \tag{4.1.3.9}$$

formuna sahiptir, burada

$$Z(x,\lambda) = \int_0^\infty R_\lambda(x,t)\left[BF^{'}(t) + \Omega(t)F(t)\right]dt .$$

İspat. $\varphi(x,\lambda)$ ve $f(x,\lambda)$ problemin çözümleri olduğundan,

$$\varphi^T(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda\rho(x)}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\varphi^T(x,\lambda)B + \varphi^T(x,\lambda)\Omega(x)\right\},$$

$$f^{T}(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda\rho(x)}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}f^{T}(x,\lambda)B+f^{T}(x,\lambda)\Omega(x)\right\}.$$

$$\int_{0}^{\infty}R_{\lambda}(x,t)F(t)\rho(t)\,dt=-\frac{1}{f_{1}(0,\lambda)}\int_{0}^{x}f(x,\lambda)\varphi^{T}(t,\lambda)\rho(t)\,dt-\frac{1}{f_{1}(0,\lambda)}\int_{x}^{\infty}\varphi(x,\lambda)f^{T}(t,\lambda)\rho(t)\,dt$$

eşitliğinde bu ifadeler yerine yazılarak,

$$\int_{0}^{\infty}R_{\lambda}(x,t)F(t)\rho(t)\,dt=$$

$$=-\frac{1}{f_{1}(0,\lambda)}f(x,\lambda)\int_{0}^{x}\frac{1}{\lambda\rho(t)}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\varphi^{T}(t,\lambda)B+\varphi^{T}(t,\lambda)\Omega(t)\right\}F(t)\rho(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{f_{1}(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\lambda\rho(t)}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}f^{T}(t,\lambda)B+f^{T}(t,\lambda)\Omega(t)\right\}F(t)\rho(t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{f_{1}(0,\lambda)}f(x,\lambda)\int_{0}^{x}\frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\varphi^{T}(t,\lambda)B\right\}F(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{f_{1}(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}f^{T}(t,\lambda)B\right\}F(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{f_{1}(0,\lambda)}f(x,\lambda)\int_{0}^{x}\frac{1}{\lambda}f^{T}(t,\lambda)\Omega(t)F(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{f_{1}(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_{x}^{\infty}\frac{1}{\lambda}f^{T}(t,\lambda)\Omega(t)F(t)\,dt$$

elde edilir. Kısmi integralleme yapılarak

$$\int_{0}^{\infty}R_{\lambda}(x,t)F(t)\rho(t)\,dt=$$

$$=\frac{1}{\lambda f_{1}(0,\lambda)}f(x,\lambda)\varphi^{T}(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=0}^{t=x}-\frac{1}{\lambda f_{1}(0,\lambda)}f(x,\lambda)\int_{0}^{x}\varphi^{T}(t,\lambda)BF^{'}(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\, f^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}-\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^{\infty} f^T(t,\lambda)BF'(t)dt$$

$$-\frac{1}{f_1(0,\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \frac{1}{\lambda}\varphi^T(t,\lambda)\Omega(t)F(t)dt-$$

$$-\frac{1}{f_1(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^{\infty} \frac{1}{\lambda}f^T(t,\lambda)\Omega(t)F(t)dt$$

$$=\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\, f^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$-\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \varphi^T(t,\lambda)\left[BF'(t)+\Omega(t)F(t)\right]dt$$

$$-\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^{\infty} f^T(t,\lambda)\left[BF'(t)+\Omega(t)F(t)\right]dt$$

$$=\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\, f^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\infty} R_\lambda(x,t)\left[BF'(t)+\Omega(t)F(t)\right]dt \tag{4.1.3.10}$$

elde edilir. Şimdi

$$\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\, f^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

ifadesini hesaplanmalıdır:

$$\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\, f^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}=$$

$$=\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}f(x,\lambda)\varphi^T(x,\lambda)BF(x)-\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}f(x,\lambda)\varphi^T(0,\lambda)BF(0)$$

$$+\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\, f^T(\infty,\lambda)BF(\infty)-\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\, f^T(x,\lambda)BF(x)$$

$$=\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\left[f(x,\lambda)\varphi^T(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\, f^T(x,\lambda)\right]BF(x)-$$

$$-\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\, f(x,\lambda)\left(\varphi_1(0,\lambda),\quad \varphi_2(0,\lambda)\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_1(0)\\ F_2(0)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\begin{pmatrix}-f_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)+\varphi_1(x,\lambda)f_2(x,\lambda) & 0\\ 0 & f_2(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda)-\varphi_2(x,\lambda)f_1(x,\lambda)\end{pmatrix}F(x)$$

$$-\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\, f(x,\lambda)\left(-\varphi_2(0,\lambda)F_1(0)+\varphi_1(0,\lambda)F_2(0)\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\left(-f_1(0,\lambda)\right)F(x)-\frac{1}{\lambda f_1(0,\lambda)}\, f(x,\lambda)(-F_1(0))$$

bulunur. Bulunan ifade (4.1.3.10) da yerine yazılarak,

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)\,dt=-\frac{F(x)}{\lambda}+\frac{Z(x,\lambda)}{\lambda}$$

elde edilir, burada

$$Z(x,\lambda)=\int_0^\infty R_\lambda(x,t)\left[BF'(t)+\Omega(t)F(t)\right]dt\,.$$

Ayrıca $\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sup\limits_{x\geq 0}\left|Z(x,\lambda)\right|=0$. Gerçekten,

$$|f_1(x,\lambda)|=\left|e^{i\lambda\mu(x)}+\int_{\mu(x)}^{\infty}\left[K_{11}(x,t)-iK_{12}(x,t)\right]e^{i\lambda t}dt\right|\leq$$

$$\leq\left|e^{i\lambda\mu(x)}\right|+\int_{\mu(x)}^{\infty}\left|K_{11}(x,t)e^{i\lambda t}\right|dt+\int_{\mu(x)}^{\infty}\left|K_{12}(x,t)e^{i\lambda t}\right|dt$$

$$\leq \left|e^{i\lambda\mu(x)}\right| + \left(\int_{\mu(x)}^{\infty} \left|K_{11}(x,t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_{\mu(x)}^{\infty} \left|e^{i\lambda t}\right|^2 dt\right)^{1/2} + \left(\int_{\mu(x)}^{\infty} \left|K_{12}(x,t)\right|^2 dt\right)^{1/2} \left(\int_{\mu(x)}^{\infty} \left|e^{i\lambda t}\right|^2 dt\right)^{1/2}$$

$$\leq e^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)} + C_1 \left(\frac{e^{-2\operatorname{Im}\lambda t}}{-2\operatorname{Im}\lambda}\Bigg|_{t=\mu(x)}^{\infty} \right)^{1/2} + C_2 \left(\frac{e^{-2\operatorname{Im}\lambda t}}{-2\operatorname{Im}\lambda}\Bigg|_{t=\mu(x)}^{\infty} \right)^{1/2} = Ce^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)},$$

eşitsizliği $\forall x \in [0,b] \subset [0,\infty)$ için sağlanır, burada $C = 1 + \dfrac{C_1 + C_2}{\sqrt{2\operatorname{Im}\lambda}}$ biçimine sahip pozitif sabittir. Benzer şekilde $\forall x \in [0,b] \subset [0,\infty)$ ve M pozitif sabiti için,

$\left|f_2(x,\lambda)\right| \leq Me^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)}$. Ayrıca $\lambda \to \infty$ için

$$f(x,\lambda) = O\left(e^{\operatorname{Im}\lambda\mu(x)}\right) \tag{4.1.3.11}$$

biçimindedir. (4.1.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = 0 \quad \text{ve} \quad \varphi_2(0,\lambda) = 1$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$\varphi(x,\lambda) = \begin{pmatrix} -\sin\lambda\left(\mu(x) - (-\alpha a + a)\right) \\ \cos\lambda\left(\mu(x) - (-\alpha a + a)\right) \end{pmatrix} + \int_0^{\mu(x)-(-\alpha a+a)} A(x,t) \begin{pmatrix} -\sin\lambda t \\ \cos\lambda t \end{pmatrix} dt$$

formundadır, burada $A_{ij}(x,.) \in L_2(0,\infty)$. $\left|\sin\lambda t\right| \leq e^{-\operatorname{Im}\lambda t}$ ve $\left|\cos\lambda t\right| \leq e^{-\operatorname{Im}\lambda t}$ olduğundan,

$$\left|\varphi_1(x,\lambda)\right| \leq \left|-\sin\lambda\left(\mu(x) - (-\alpha a + a)\right)\right| + \int_0^{\mu(x)-(-\alpha a+a)} \left|A_{11}(x,t)\sin\lambda t\right| dt + \int_0^{\mu(x)-(-\alpha a+a)} \left|A_{12}(x,t)\cos\lambda t\right| dt$$

$$\leq e^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)} + N_1 e^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)} + N_2 e^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)} = Ne^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)}$$

eşitsizliği $\forall x \in [0,b] \subset [0,\infty)$ için vardır, burada $N = 1 + N_1 + N_2$ sabitlenmiş pozitif sayıdır. Benzer durum $\forall x \in [0,b] \subset [0,\infty)$ için ve K pozitif sayısı için,

$\left|\varphi_2\left(x,\lambda\right)\right| \le Ke^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)}$. $\lambda\to\infty$ için

$$\varphi\left(x,\lambda\right)=O\left(e^{\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)}\right) \qquad (4.1.3.12)$$

asimptotik ifadesi sağlanır.

$$f_1\left(x,\lambda\right)=e^{i\lambda\mu(x)}+\int\limits_{\mu(x)}^{\infty}\left[K_{11}\left(x,t\right)e^{i\lambda t}-iK_{12}\left(x,t\right)e^{i\lambda t}\right]dt$$

$$f_1\left(0,\lambda\right)=e^{i\lambda(-\alpha a+a)}+\int\limits_{-\alpha a+a}^{\infty}\left[K_{11}\left(0,t\right)e^{i\lambda t}-iK_{12}\left(0,t\right)e^{i\lambda t}\right]dt$$

$$\left|f_1\left(0,\lambda\right)\right|\ge\left|e^{i\lambda(-\alpha a+a)}\right|=e^{-\operatorname{Im}\lambda(-\alpha a+a)} \qquad (4.1.3.13)$$

eşitsizliği sağlanır. (4.1.3.11), (4.1.3.12) ve (4.1.3.13) kullanılarak

$$\left|Z\left(x,\lambda\right)\right|=\left|\int\limits_0^{\infty}R_\lambda(x,t)\left[BF^{'}(t)+\Omega\left(t\right)F(t)\right]dt\right|\le$$

$$\le\frac{\left|f\left(x,\lambda\right)\right|}{\left|f_1\left(0,\lambda\right)\right|}\left|\int\limits_0^{x}\varphi^{T}\left(t,\lambda\right)\left[BF^{'}(t)+\Omega\left(t\right)F(t)\right]dt\right|+\frac{\left|\varphi\left(x,\lambda\right)\right|}{\left|f_1\left(0,\lambda\right)\right|}\left|\int\limits_x^{\infty}f^{T}\left(t,\lambda\right)\left[BF^{'}(t)+\Omega\left(t\right)F(t)\right]dt\right|$$

$$\le e^{-\operatorname{Im}\lambda\left(\mu(x)+\alpha a-a\right)}\left|\int\limits_0^{x}\varphi^{T}\left(t,\lambda\right)\left[BF^{'}(t)+\Omega\left(t\right)F(t)\right]dt\right|+e^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)}\left|\int\limits_x^{\infty}f^{T}\left(t,\lambda\right)\left[BF^{'}(t)+\Omega\left(t\right)F(t)\right]dt\right|$$

elde edilir. Bulunan eşitsizlikte limite geçildiğinde

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{x\ge0}\left|Z\left(x,\lambda\right)\right|=0 \qquad (4.1.3.14)$$

bulunur. □

4.1.4. Öz fonksiyonlara Göre Spektral Ayrışım Formülü

Teorem 4.1.4.1. (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin öz fonksiyonlarına göre ayrışım formülü

$$\delta(t-x)\rho^{-1}(t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,\lambda)u^*(t,\lambda)\,d\lambda\,,\quad -\infty<\lambda<\infty \tag{4.1.4.1}$$

biçimine sahiptir, burada δ Dirac delta fonksiyonu, $x\to\infty$ iken

$$u(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}-S(\lambda)e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}+o(1),$$

$$u^*(x,\lambda)=e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}^T-\overline{S(\lambda)}e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}^T+o(1),$$

u^* fonksiyonu $\overline{u}$ fonksiyonun transpozudur.

İspat. Lemma 4.1.3.1 ve Lemma 4.1.3.2 kullanılarak ayrışım formülü elde edilecektir. (4.1.3.9) ifadesinin her iki tarafı $\frac{1}{2\pi i}$ ile çarpılıp 0 merkezli R yarıçaplı Γ_R çemberi boyunca λ ya göre integrallendiğinde:

$$-F(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R}d\lambda\int_0^{\infty}R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt+\varepsilon_R(x), \tag{4.1.4.2}$$

burada $\varepsilon_R(x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R}\frac{Z(x,\lambda)}{\lambda}d\lambda$. $R_\lambda(x,t)$ fonksiyonu alt ve üst yarı düzlemde analitik fonksiyon olduğundan dolayı (4.1.4.2) ifadesinin sağ tarafı

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R}d\lambda\int_0^{\infty}R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt=I_R^1+I_R^2+I_R^3$$

şeklinde yazabilir, burada

$$I_R^1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R-i\varepsilon}^{R-i\varepsilon} d\lambda \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)\,dt\,, \tag{4.1.4.3}$$

$$I_R^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{R+i\varepsilon}^{-R+i\varepsilon} d\lambda \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)\,dt \qquad , \tag{4.1.4.4}$$

$$I_R^3 = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{R-i\varepsilon}^{R+i\varepsilon} d\lambda \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)\,dt + \int_{-R+i\varepsilon}^{-R-i\varepsilon} d\lambda \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)\,dt\right\}$$

biçimindedir ve ε herhangi pozitif sayıdır. Lemma 4.1.3.2 ve (4.1.3.14) ifadesi kullanılarak, $R\to\infty$ iken $I_R^3 \to 0$ ve $\lim\limits_{R\to\infty}\sup\limits_{x\ge 0}\left|\varepsilon_R(x)\right| = 0$ bulunur. $R_\lambda(x,t)$ operatörünün biçimi kullanılarak $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} R_{\lambda\pm i\varepsilon} = R_{\lambda\pm i0}$ bulunur ve

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty R_{\lambda\pm i\varepsilon}(x,t)F(t)\rho(t)\,dt = \int_0^\infty R_{\lambda\pm i0}(x,t)F(t)\rho(t)\,dt$$

elde edilir. (4.1.4.2) eşitliğinde $R\to\infty$ limite geçildiğinde,

$$F(x) = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} d\lambda \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)\,dt = -\lim_{R\to\infty}\left[I_R^1 + I_R^2 + I_R^3\right] + \varepsilon_R(x)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^\infty \left[R_{\lambda-i0}(x,t) - R_{\lambda+i0}(x,t)\right]F(t)\rho(t)\,dt \tag{4.1.4.5}$$

$\psi(x,\lambda)$, (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin $\psi(0,\lambda) = \begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$ koşulunu sağlayan çözümü olsun. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ λ ya bağlı tam vektör fonksiyonlarıdır ve $f(x,\lambda)$ fonksiyonu bu çözümlerin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir:

$$f(x,\lambda) = f_2(0,\lambda)\varphi(x,\lambda) + f_1(0,\lambda)\psi(x,\lambda). \tag{4.1.4.6}$$

Rezolvent operatörünün biçimini kullanarak

$$-\int_0^\infty \left[R_{\lambda+i0}(x,t) - R_{\lambda-i0}(x,t)\right]F(t)\rho(t)\,dt = -\int_0^\infty \left[R_{\lambda+i0}(x,t) - \overline{R}_{\lambda+i0}(x,t)\right]F(t)\rho(t)\,dt$$

$$=\int_0^x\left[\frac{f(x,\lambda)}{f_1(0,\lambda)}-\overline{\frac{f(x,\lambda)}{f_1(0,\lambda)}}\right]\varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt+\int_x^\infty\varphi(x,\lambda)\left[\frac{f^T(t,\lambda)}{f_1(0,\lambda)}-\overline{\frac{f^T(t,\lambda)}{f_1(0,\lambda)}}\right]F(t)\rho(t)\,dt$$

bulunur. (4.1.4.6) kullanılarak,

$$\frac{f(x,\lambda)}{f_1(0,\lambda)}-\overline{\frac{f(x,\lambda)}{f_1(0,\lambda)}}=\frac{f_2(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)+f_1(0,\lambda)\psi(x,\lambda)}{f_1(0,\lambda)}-$$

$$-\frac{\overline{f_2(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)}+\overline{f_1(0,\lambda)\psi(x,\lambda)}}{\overline{f_1(0,\lambda)}}=\left[\frac{f_2(0,\lambda)}{f_1(0,\lambda)}-\frac{\overline{f_2(0,\lambda)}}{\overline{f_1(0,\lambda)}}\right]\varphi(x,\lambda)$$

$$=\frac{f_2(0,\lambda)\overline{f_1(0,\lambda)}-f_1(0,\lambda)\overline{f_2(0,\lambda)}}{|f_1(0,\lambda)|^2}\varphi(x,\lambda)=-2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{|f_1(0,\lambda)|^2}$$

sonucu çıkar. Böylece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[R_{\lambda+i0}(x,t)-R_{\lambda-i0}(x,t)\right]F(t)\rho(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varphi(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)}{|f_1(0,\lambda)|^2}F(t)\rho(t)\,dt\ .$$

Bulunan eşitlik (4.1.4.5) de yerine konularak

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^\infty d\lambda\int_0^\infty\frac{\varphi(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)}{|f_1(0,\lambda)|^2}F(t)\rho(t)\,dt \qquad (4.1.4.7)$$

veya denk olarak

$$F(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^\infty d\lambda\int_0^\infty u(x,\lambda)u^*(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt$$

sonucuna ulaşılır, burada

$$u(x,\lambda)=\overline{f(x,\lambda)}-S(\lambda)f(x,\lambda),$$

$$u^*(x,\lambda)=f^T(x,\lambda)-\overline{S(\lambda)}f^*(x,\lambda).$$

Ayrıca $x\to\infty$ iken

$$u(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}-S(\lambda)e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}+o(1)$$

$$u^{*}(x,\lambda)=e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}-\overline{S(\lambda)}e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}+o(1)$$

biçimindedir. Böylece L operatörünün öz fonksiyonlarına göre ayrışım formülü elde edilmiştir.

(4.1.4.7) formülü Stieltjes integrali biçiminde yazılarak

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\lambda)\left(\int_{0}^{\infty}\varphi^{T}(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt\right)d\sigma(\lambda)$$

elde edilir, burada

$$d\sigma(\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{d\lambda}{\left|f_1(0,\lambda)\right|^2}. \qquad -\infty<\lambda<\infty$$

Tanım 4.1.4.1. $\sigma(\lambda)$ fonksiyonuna L operatörünün *spektral fonksiyonu* denir.

Şimdi Parseval eşitliğini elde etmek için

$$\Phi(\lambda)=\int_{0}^{\infty}\varphi^{T}(x,\lambda)F(x)\rho(x)\,dx$$

gösterimi kullanılarak (4.1.4.7) formülünden

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi(\lambda)\varphi(x,\lambda)\,d\sigma(\lambda)$$

bulunur. Bulunan ifadenin her iki tarafı $F(x)$ ile çarpıp 0 dan ∞ kadar integrallendiğinde aşağıdaki Parseval eşitliği elde edilir,

$$\int_{0}^{\infty}F^{2}(x)\rho(x)\,dx=\int_{-\infty}^{\infty}\Phi^{2}(\lambda)d(\lambda).$$

4.2. BİR SINIF SÜREKSİZ KATSAYILI DİRAC DİFERANSİYEL DENKLEMLEMLER SİSTEMİ İÇİN AYRIŞIM PROBLEMİ

4.2.1. Probleme Giriş

Pozitif yarı eksende süreksiz katsayılı

$$\begin{cases} y_2' + p(x)y_1 + q(x)y_2 = \lambda\rho(x)y_1 \\ -y_1' + q(x)y_1 - p(x)y_2 = \lambda\rho(x)y_2 \end{cases}, \qquad 0 \le x < \infty \qquad (4.2.1.1)$$

Dirac denklemler sistemi ve

$$y_2(0) = 0 \qquad (4.2.1.2)$$

sınır koşulu ile üretilen sınır değer problemi ele alınsın, burada $1 \ne \alpha > 0$ için

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & x > a, \\ \alpha, & 0 \le x < a \end{cases}$$

biçimindedir. $p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlardır. λ spektral parametredir.

$$\Omega(x) := \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}$$

matris fonksiyonu Öklid normuna göre

$$\int_0^\infty \|\Omega(x)\| dx < \infty \qquad (4.2.1.3)$$

koşulunu sağladığı kabul edilsin. $\Omega(x) \equiv 0$ olduğunda (4.2.1.1) denkleminin $\operatorname{Im}\lambda > 0$ için,

$$\lim_{x \to \infty} f(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix}$$

koşulunu sağlayan çözümü

$$f^0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda\mu(x)}$$

biçimindedir, burada

$$\mu(x) = \begin{cases} \alpha x - \alpha a + a, & 0 \le x \le a \\ x, & x > a \end{cases}$$

Bu durumda (4.2.1.1) denkleminin bu koşulu sağlayan

$$f(x,\lambda) = f^0(x,\lambda) + \int_{\mu(x)}^{\infty} K(x,t) \begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda t} dt \qquad (4.2.1.4)$$

biçiminde tek bir çözümü vardır. Ayrıca pozitif yarı eksende $K(x,.)$ matris fonksiyonun bileşenleri toplanabilirdir ve $K(x,t)$ Öklid normuna göre

$$\int_{\mu(x)}^{\infty} \|K(x,t)\| dt \le e^{\sigma(x)} - 1$$

eşitsizliğini sağlar, burada

$$\sigma(x) = \int_x^{\infty} \|\Omega(t)\| dt .$$

4.2.2. Özel Çözüm ve Saçılma Fonksiyonu

$\varphi(x,\lambda)$ (4.2.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = -1, \qquad \varphi_2(0,\lambda) = 0 \qquad (4.2.2.1)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

Lemma 4.2.2.1. Reel λ 'lar için

$$2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{f_2(0,\lambda)} = \overline{f(x,\lambda)} - S(\lambda)\, f(x,\lambda) \qquad (4.2.2.2)$$

özdeşliği sağlanır, burada

$$S(\lambda) = \frac{\overline{f_2(0,\lambda)}}{f_2(0,\lambda)} \qquad (4.2.2.3)$$

biçimine sahiptir ve ayrıca $S(\lambda)$ için aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

$$S(\lambda) = \left[\overline{S(\lambda)}\right]^{-1} \qquad \text{ve} \qquad |S(\lambda)| = 1.$$

İspat. $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ (4.2.1.1) denkleminin temel çözüm sistemini oluşturduğundan $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu bu çözümlerin lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir:

$$\varphi(x,\lambda) = c_1(\lambda)\, f(x,\lambda) + c_2(\lambda)\, \overline{f(x,\lambda)}, \qquad (4.2.2.4)$$

burada $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ λ 'ya bağlı bilinmeyen fonksiyonlardır. Şimdi $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ fonksiyonları bulunmalıdır.

$$W[f(x,\lambda), \varphi(x,\lambda)] = f_1(0,\lambda)\varphi_2(0,\lambda) - f_2(0,\lambda)\varphi_1(0,\lambda) = f_2(0,\lambda),$$

$$W[\overline{f(x,\lambda)}, \varphi(x,\lambda)] = \overline{f_1(0,\lambda)}\varphi_2(0,\lambda) - \overline{f_2(0,\lambda)}\varphi_1(0,\lambda) = \overline{f_2(0,\lambda)}$$

eşitlikleri ve (4.2.2.4) kullanılarak

$$c_1(\lambda) = -\frac{\overline{f_2(0,\lambda)}}{2i} \qquad \text{ve} \qquad c_2(\lambda) = \frac{f_2(0,\lambda)}{2i}$$

bulunur. Bulunan bu ifadeler (4.2.2.4)'de yerine yazılarak:

$$\varphi(x,\lambda) = -\frac{\overline{f_2(0,\lambda)}}{2i} f(x,\lambda) + \frac{f_2(0,\lambda)}{2i}\overline{f(x,\lambda)}. \qquad (4.2.2.5)$$

Şimdi reel λ' lar için $f_2(0,\lambda) \neq 0$ olduğunu gösterilmelidir. Aksi kabul edilsin, yani en az bir λ_0 sayısı vardır öyle ki $f_2(0,\lambda_0) = 0$ dır. Wronskian'ın ifadesinden

$$f_1(0,\lambda_0)\overline{f_2(0,\lambda_0)} - f_2(0,\lambda_0)\overline{f_1(0,\lambda_0)} = 2i.$$

Bu eşitlikte $f_2(0,\lambda_0) = 0$ ve $\overline{f_2(0,\lambda_0)} = 0$ yazılarak $0 = 2i$ bulunur ve çelişki elde edilir. O halde reel λ' lar için $f_2(0,\lambda) \neq 0$ dır. Böylece (4.2.2.5) ifadesinin her iki tarafı $\dfrac{f_2(0,\lambda)}{2i}$ ile bölünerek (4.2.2.2) elde edilir ve buradan $S(\lambda)$ fonksiyonunun, $S(\lambda) = \dfrac{\overline{f_2(0,\lambda)}}{f_2(0,\lambda)}$ biçimine sahip olduğu görülür. $S(\lambda)$ fonksiyonunun biçiminden

$$\overline{S(\lambda)} = \overline{\left[\frac{\overline{f_2(0,\lambda)}}{f_2(0,\lambda)}\right]} = \frac{f_2(0,\lambda)}{\overline{f_2(0,\lambda)}} = [S(\lambda)]^{-1},$$

$$|S(\lambda)|^2 = S(\lambda)\overline{S(\lambda)} = S(\lambda)[S(\lambda)]^{-1} = 1,$$

yani sırasıyla $\overline{S(\lambda)} = [S(\lambda)]^{-1}$ ve $|S(\lambda)| = 1$

elde edilir. □

Tanım 4.2.2.1. (4.2.2.3) biçimine sahip $S(\lambda)$ fonksiyonuna (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin *saçılma fonksiyonu* denir.

Lemma 4.2.2.2. $f_2(0,\lambda)$ fonksiyonunun kapalı üst yarı düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda \geq 0)$ sıfırları yoktur.

İspat. (4.2.1.4) ifadesinden $f_2(0,\lambda)$ fonksiyonun $\operatorname{Im}\lambda > 0$ üst yarı düzlemde analitik devam ettirilebileceği görülür ve $f_2(0,\lambda)$ fonksiyonu tüm reel eksen üzerinde süreklidir. Lemma 4.2.2.1. de reel λ lar için $f_2(0,\lambda) \neq 0$ olduğu gösterildi. Şimdi $f_2(0,\lambda)$ nın üst yarı düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ sıfırları olmadığı gösterilmelidir. Kabul edilsin ki $\lambda = \mu$, $(\mu \in \mathbb{C})$ $f_2(0,\lambda)$ fonksiyonun sıfır olsun. $f(x,\mu)$ (4.2.1.1.), (4.2.1.2.) sınır değer probleminin çözümü olduğu için

$$Bf'(x,\mu) + \Omega(x) f(x,\mu) = \rho(x)\mu f(x,\mu)$$

yazılabilir. Bu denklemin önce eşleniği sonra transpozu alındığında

$$-f^{*'}(x,\mu)B + f^{*}(x,\mu)\Omega(x) = \rho(x)\overline{\mu} f^{*}(x,\mu)$$

elde edilir, burada $f^{*}(x,\mu)$ fonksiyonu $\overline{f(x,\mu)}$ fonksiyonunun transpozunu ifade etmektedir.

$$Bf'(x,\mu) + \Omega(x) f(x,\mu) = \rho(x)\mu f(x,\mu)$$

$$-f^{*'}(x,\mu)B + f^{*}(x,\mu)\Omega(x) = \rho(x)\overline{\mu} f^{*}(x,\mu)$$

denklemler sisteminde sırasıyla birinci denklem soldan $f^{*}(x,\mu)$ ile çarpılarak ve ikinci denklemi sağdan $f(x,\mu)$ ile çarpılarak

$$f^{*}(x,\mu)Bf'(x,\mu) + f^{*}(x,\mu)\Omega(x) f(x,\mu) = \rho(x)\mu f^{*}(x,\mu) f(x,\mu)$$

$$-f^{*'}(x,\mu)Bf(x,\mu) + f^{*}(x,\mu)\Omega(x) f(x,\mu) = \rho(x)\overline{\mu} f^{*}(x,\mu) f(x,\mu)$$

bulunur. Bulunan denklemler taraf tarafa çıkarıldığında

$$W'[\overline{f(x,\mu)}, f(x,\mu)] = (\mu - \overline{\mu})\rho(x) f^{*}(x,\mu) f(x,\mu)$$

elde edilir. Bulunan son eşitlik 0 dan ∞ 'a kadar x 'e göre integrallendiğinde,

$$W\left[\overline{f(x,\mu)}, f(x,\mu)\right]_{x=0} + \left(\overline{\mu}-\mu\right)\int_0^\infty f^*(x,\mu) f(x,\mu)\rho(x)\,dx = 0. \qquad (4.2.2.6)$$

Diğer taraftan Wronskian'ın tanımından

$$W\left[\overline{f(x,\mu)}, f(x,\mu)\right]_{x=0} = \overline{f_1(0,\mu)} f_2(0,\mu) - \overline{f_2(0,\mu)} f_1(0,\mu) = 0.$$

(4.2.2.6) da son eşitlik yerine yazıldığında

$$\left(\overline{\mu}-\mu\right)\int_0^\infty f^*(x,\mu) f(x,\mu)\rho(x)\,dx = 0$$

bulunur. Böylece $\mu = \overline{\mu}$ olduğu görülür, yani μ 'lerin reel olduğu elde edilir. O halde $f_2(0,\lambda)$ fonksiyonunun kapalı üst yarı düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda \geq 0)$ sıfırları olmadığı sonucuna varılır. □

4.2.3. Rezolvent Operatörün İnşası

$H_\rho = L_{2,\rho}\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)$ Hibert uzayında iç çarpım

$$(F,G) = \int_0^\infty \left\{F_1(x)\overline{G_1(x)} + F_2(x)\overline{G_2(x)}\right\}\rho(x)\,dx$$

şeklinde tanımlansın, burada

$$F := \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix} \in H_\rho \quad \text{ve} \quad G := \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \end{pmatrix} \in H_\rho$$

vektör fonksiyonlarıdır. $L : F \to l(F)$ operatörünün tanım kümesi

$$D(L) := \left\{F \,\middle|\, F = \left(F_1(x), F_2(x)\right) \in H_\rho, F_1(x), F_2(x) \in AC[0,b], [0,b] \subset [0,\infty), l(F) \in H_\rho, F_2(0) = 0\right\}$$

biçimine sahiptir, burada

$$l(F) = \frac{1}{\rho(x)}\left\{BF' + \Omega(x)F\right\}.$$

(4.2.1.1),(4.2.1.2) sınır değer problemi $LY = \lambda Y$ 'e karşılık gelir. Tanım kümesi $D(L)$ olan L operatörü $H_\rho = L_{2,\rho}(0,\infty;\mathbb{C}^2)$ uzayında öz eşleniktir.

λ, L operatörünün spektrum noktası değil ise, $R_\lambda = (L-\lambda I)^{-1}$ rezolvent operatörü vardır.

Lemma 4.2.3.1. $R_\lambda = (L-\lambda I)^{-1}$ rezolvent operatörü

$$R_\lambda(x,t) = -\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\begin{cases}\varphi(x,\lambda)\, f^T(t,\lambda), & x \le t,\\ f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda), & x \ge t,\end{cases}$$

biçiminde çekirdeğe sahip integral operatörüdür.

İspat. $L \in D(L)$ olan operatör ve $F(x) = \begin{pmatrix} F_1(x)\\ F_2(x)\end{pmatrix}$ sonlu her $(0,b)$ aralığının dışında sıfır olsun. Rezolvent operatörü inşa etmek için,

$$BY' + \Omega(x)Y = \lambda\rho(x)Y + \rho(x)F(x), \tag{4.2.3.1}$$

$$y_2(0) = 0 \tag{4.2.3.2}$$

problemi çözülmelidir. (4.2.3.1), (4.2.3.2) probleminin çözümü sabitlerin değişim yöntemi uygulanarak

$$Y(x,\lambda) = c_1(x,\lambda)\varphi(x,\lambda) + c_2(x,\lambda)\, f(x,\lambda) \tag{4.2.3.3}$$

biçiminde bulunulması isteniyor, burada $f(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ (4.2.3.2) sınır koşuluna uygun homojen denklemin çözümleridir.

$$Y(x,\lambda)=c_1(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)f(x,\lambda),$$

$$Y^{'}(x,\lambda)=c_1^{'}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+c_1(x,\lambda)\varphi^{'}(x,\lambda)+c_2^{'}(x,\lambda)f(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)f^{'}(x,\lambda)$$

eşitlikleri (4.2.3.1) denkleminde yerine yazılarak,

$$c_1^{'}(x,\lambda)B\varphi(x,\lambda)+c_2^{'}(x,\lambda)Bf(x,\lambda)+c_1(x,\lambda)\left[B\varphi^{'}(x,\lambda)+\Omega(x)\varphi(x,\lambda)\right]$$

$$+c_2(x,\lambda)\left[Bf^{'}(x,\lambda)+\Omega(x)f(x,\lambda)\right]$$

$$=c_1(x,\lambda)\lambda\rho(x)\varphi(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)\lambda\rho(x)f(x,\lambda)+F(x)\rho(x)$$

elde edilir. $f(x,\lambda)$ ve $\varphi(x,\lambda)$ problemin çözümü olduğundan,

$$c_1^{'}(x,\lambda)B\varphi(x,\lambda)+c_2^{'}(x,\lambda)Bf(x,\lambda)=F(x)\rho(x) \tag{4.2.3.4}$$

bulunur. (4.2.3.4) eşitliği soldan $f^T(x,\lambda)$ ile çarpıldığında

$$c_1^{'}(x,\lambda)f^T(x,\lambda)B\varphi(x,\lambda)+c_2^{'}(x,\lambda)f^T(x,\lambda)Bf(x,\lambda)=f^T(x,\lambda)F(x)\rho(x)$$

$$c_1^{'}(x,\lambda)f^T(x,\lambda)B\varphi(x,\lambda)=f^T(x,\lambda)F(x)\rho(x) \tag{4.2.3.5}$$

elde edilir. $Y(x,\lambda)$ çözümünün $L_{2,\rho}\left(0,\infty,\mathbb{C}^2\right)$' den olması için $c_1(\infty,\lambda)=0$ olması gerekir. (4.2.3.5) eşitliği x den ∞ kadar integrallenerek

$$\int_x^\infty c_1^{'}(t,\lambda)dt=\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\int_x^\infty f^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)dt$$

$$c_1(x,\lambda)=-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\int_x^\infty f^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)dt \tag{4.2.3.6}$$

bulunur. Benzer şekilde (4.2.3.4) eşitliği soldan $\varphi^T(x,\lambda)$ ile çarpıldığında

$$c_1^{'}(x,\lambda)\varphi^T(x,\lambda)B\varphi(x,\lambda)+c_2^{'}(x,\lambda)\varphi^T(x,\lambda)Bf(x,\lambda)=\varphi^T(x,\lambda)F(x)\rho(x)$$

$$c_2^{'}(x,\lambda)\varphi^T(x,\lambda)Bf(x,\lambda)=\varphi^T(x,\lambda)F(x)\rho(x) \tag{4.2.3.7}$$

sonucu çıkar. (4.2.3.7) eşitliği 0 dan x kadar integrallenerek

$$\int_0^x c_2'(t,\lambda)dt = -\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\int_0^x \varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt$$

$$c_2(x,\lambda)-c_2(0,\lambda) = -\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\int_0^x \varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt$$

$$c_2(x,\lambda) = c_2(0,\lambda)-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\int_0^x \varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt \qquad (4.2.3.8)$$

elde edilir. (4.2.3.6) ve (4.2.3.8) ifadeleri (4.2.3.3) eşitliğinde yerine yazılarak,

$$Y(x,\lambda) = \varphi(x,\lambda)\left(-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\int_x^\infty f^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt\right)$$

$$+\, f(x,\lambda)\left(c_2(0,\lambda)-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\int_0^x \varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt\right)$$

$$= -\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\int_x^\infty \varphi(x,\lambda)\, f^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\int_0^x f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt + c_2(0,\lambda)\, f(x,\lambda)$$

$$= \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)\,dt + c_2(0,\lambda)\, f(x,\lambda)$$

elde edilir. Burada $R_\lambda(x,t)$ çekirdek fonksiyonu

$$R_\lambda(x,t) = -\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\begin{cases} \varphi(x,\lambda)\, f^T(t,\lambda), & x \le t, \\ f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda), & x \ge t \end{cases}$$

biçiminde ifade edilir. $c_2(0,\lambda)$ ifadesinin bulunması için (4.2.3.2) sınır koşulu kullanılmalıdır. $Y(x,\lambda)$ fonksiyonu çözüm olduğu için (4.2.3.2) koşulunu sağlar:

$$y_2(0,\lambda)=c_1(0,\lambda)\varphi_2(0,\lambda)+c_2(0,\lambda)f_2(0,\lambda).$$

Bu eşitlikten $c_2(0,\lambda)f_2(0,\lambda)=0$ dır. O halde $c_2(0,\lambda)=0$ bulunur. Böylece $Y(x,\lambda)$ çözümünün

$$Y(x,\lambda)=\int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt$$

biçimine sahip olduğu elde edilir. □

Lemma 4.2.3.2. $F(x)$ sonlu vektör fonksiyonu ve $F(x)\in D(L)$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt=-\frac{F(x)}{\lambda}+\frac{Z(x,\lambda)}{\lambda} \tag{4.2.3.9}$$

formuna sahiptir, burada

$$Z(x,\lambda)=\int_0^\infty R_\lambda(x,t)\left[BF'(t)+\Omega(t)F(t)\right]dt.$$

İspat. $\varphi(x,\lambda)$ ve $f(x,\lambda)$ problemin çözümleri olduğundan aşağıdaki ifadeler sağlanır,

$$\varphi^T(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda\rho(x)}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\varphi^T(x,\lambda)B+\varphi^T(x,\lambda)\Omega(x)\right\},$$

$$f^T(x,\lambda)=\frac{1}{\lambda\rho(x)}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}f^T(x,\lambda)B+f^T(x,\lambda)\Omega(x)\right\}.$$

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt=-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\int_0^x f(t,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)\rho(t)dt-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\int_x^\infty \varphi(t,\lambda)f^T(t,\lambda)\rho(t)dt$$

eşitliğinde bu ifadeler yerine yazılarak,

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)\,dt =$$

$$=-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \frac{1}{\lambda\rho(t)}\left\{-\frac{\partial}{\partial x}\varphi^T(t,\lambda)B+\varphi^T(t,\lambda)\Omega(x)\right\}F(t)\rho(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty \frac{1}{\lambda\rho(x)}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}f^T(t,\lambda)B+f^T(t,\lambda)\Omega(x)\right\}F(t)\rho(t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\varphi^T(t,\lambda)B\right\}F(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty \frac{1}{\lambda}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}f^T(t,\lambda)B\right\}F(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \frac{1}{\lambda}\varphi^T(t,\lambda)\Omega(t)F(t)\,dt-$$

$$-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty \frac{1}{\lambda}f^T(t,\lambda)\Omega(t)F(t)\,dt$$

elde edilir. Kısmi integralleme yapılarak

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)\,dt =$$

$$=\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=0}^{t=x}-\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}f(x,\lambda)\int_0^x \varphi^T(t,\lambda)BF'(t)\,dt$$

$$+\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)f^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}-\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty f^T(t,\lambda)BF'(t)\,dt$$

$$-\frac{1}{f_2(0,\lambda)}\left\{f(x,\lambda)\int_0^x \frac{1}{\lambda}\varphi^T(t,\lambda)\Omega(t)F(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\infty \frac{1}{\lambda}f^T(t,\lambda)\Omega(t)F(t)\,dt\right\}$$

$$=\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)f^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$-\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)} f(x,\lambda)\int_0^x \varphi^T(t,\lambda)\left[BF^{'}(t)+\Omega(t)F(t)\right]dt$$

$$-\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)} \varphi(x,\lambda)\int_x^\infty f^T(t,\lambda)\left[BF^{'}(t)+\Omega(t)F(t)\right]dt$$

$$=\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)} f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)f^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^\infty R_\lambda(x,t)\left[BF^{'}(t)+\Omega(t)F(t)\right]dt \qquad (4.2.3.10)$$

elde edilir. Şimdi

$$\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)} f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)f^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}$$

ifadesi hesaplanmalıdır:

$$\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)} f(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=0}^{t=x}+\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)f^T(t,\lambda)BF(t)\Big|_{t=x}^{t=\infty}=$$

$$=\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)} f(x,\lambda)\varphi^T(x,\lambda)BF(x)-\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)} f(x,\lambda)\varphi^T(0,\lambda)BF(0)$$

$$+\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)f^T(\infty,\lambda)BF(\infty)-\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}\varphi(x,\lambda)f^T(x,\lambda)BF(x)$$

$$=\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}\left[f(x,\lambda)\varphi^T(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)f^T(x,\lambda)\right]BF(x)$$

$$-\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)} f(x,\lambda)\left(\varphi_1(0,\lambda),\quad \varphi_2(0,\lambda)\right)\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}\begin{pmatrix}F_1(0)\\ F_2(0)\end{pmatrix}$$

$$=\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}\begin{pmatrix}-f_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda)+\varphi_1(x,\lambda)f_2(x,\lambda) & 0\\ 0 & f_2(x,\lambda)\varphi_1(x,\lambda)-\varphi_2(x,\lambda)f_1(x,\lambda)\end{pmatrix}F(x)$$

$$-\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)} f(x,\lambda)\left(-\varphi_2(0,\lambda)F_1(0)+\varphi_1(0,\lambda)F_2(0)\right)$$

$$=\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)}\left(-f_2(0,\lambda)\right)F(x)-\frac{1}{\lambda f_2(0,\lambda)} f(x,\lambda)(-F_2(0))$$

bulunur. Bulunan ifade (4.2.3.9) da yerine yazılarak,

$$\int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)\,dt=-\frac{F(x)}{\lambda}+\frac{Z(x,\lambda)}{\lambda}$$

elde edilir, burada

$$Z(x,\lambda)=\int_0^\infty R_\lambda(x,t)\left[BF^{'}(t)+\Omega(t)F(t)\right]dt\,.$$

$\lim\limits_{\lambda\to\infty}\sup\limits_{x\geq 0}\left|Z(x,\lambda)\right|=0$ dır. Gerçekten, (4.2.1.1) denkleminin

$$\varphi_1(0,\lambda)=-1 \quad \text{ve} \qquad \varphi_2(0,\lambda)=0$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}-\cos\lambda\left(\mu(x)-(-\alpha a+a)\right)\\-\sin\lambda\left(\mu(x)-(-\alpha a+a)\right)\end{pmatrix}+\int_0^{\mu(x)-(-\alpha a+a)}\tilde{A}(x,t)\begin{pmatrix}-\cos\lambda t\\-\sin\lambda t\end{pmatrix}dt\,,$$

burada $\tilde{A}_{ij}(x,.)\in L_2(0,\infty)$. $\left|\sin\lambda t\right|\leq e^{-\operatorname{Im}\lambda t}$ ve $\left|\cos\lambda t\right|\leq e^{-\operatorname{Im}\lambda t}$ olduğundan,

$$\left|\varphi_1(x,\lambda)\right|\leq\left|-\cos\lambda\left(\mu(x)-(-\alpha a+a)\right)\right|+\int_0^{\mu(x)-(-\alpha a+a)}\left|\tilde{A}_{11}(x,t)\sin\lambda t\right|dt+\int_0^{\mu(x)-(-\alpha a+a)}\left|\tilde{A}_{12}(x,t)\cos\lambda t\right|dt$$

$$\leq e^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)}+\tilde{K}_1e^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)}+N\tilde{K}_2e^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)}=\tilde{K}e^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)}$$

eşitsizliği $\forall x\in[0,b]\subset[0,\infty)$ için vardır, burada $\tilde{K}=1+\tilde{K}_1+\tilde{K}_2$ sabitlenmiş pozitif sayıdır. Benzer durum $\forall x\in[0,b]\subset[0,\infty)$ için ve $\tilde{N}$ pozitif sayısı için,

$$\left|\varphi_2(x,\lambda)\right|\leq\tilde{N}e^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)}.$$

$\lambda \to \infty$ iken

$$\varphi(x,\lambda) = O\left(e^{\operatorname{Im}\lambda\mu(x)-(-\alpha a+a)}\right). \tag{4.2.3.11}$$

Ayrıca $\lambda \to \infty$ iken

$$f(x,\lambda) = O\left(e^{\operatorname{Im}\lambda\mu(x)}\right) \tag{4.2.3.12}$$

asimptotik ifadesi sağlanır.

$$f_2(x,\lambda) = -ie^{i\lambda\mu(x)} + \int_{\mu(x)}^{\infty} \left[K_{21}(x,t)e^{i\lambda t} - iK_{22}(x,t)e^{i\lambda t}\right]dt$$

$$f_2(0,\lambda) = e^{i\lambda(-\alpha a+a)} + \int_{-\alpha a+a}^{\infty} \left[K_{21}(0,t)e^{i\lambda t} - iK_{22}(0,t)e^{i\lambda t}\right]dt$$

$$\left|f_2(0,\lambda)\right| \geq \left|e^{i\lambda(-\alpha a+a)}\right| = e^{-\operatorname{Im}\lambda(-\alpha a+a)} \tag{4.2.3.13}$$

eşitsizliği sağlanır. (4.2.3.11), (4.2.3.12) ve (4.2.3.13) kullanılarak

$$\left|Z(x,\lambda)\right| = \left|\int_0^{\infty} R_\lambda(x,t)\left[BF^{'}(t) + \Omega(t)F(t)\right]dt\right| \leq$$

$$\leq \frac{\left|f(x,\lambda)\right|}{\left|f_2(0,\lambda)\right|}\left|\int_0^{x} \varphi^T(t,\lambda)\left[BF^{'}(t) + \Omega(t)F(t)\right]dt\right| + \frac{\left|\varphi(x,\lambda)\right|}{\left|f_2(0,\lambda)\right|}\left|\int_x^{\infty} f^T(t,\lambda)\left[BF^{'}(t) + \Omega(t)F(t)\right]dt\right|$$

$$\leq e^{-\operatorname{Im}\lambda(\mu(x)+\alpha a-a)}\left|\int_0^{x} \varphi^T(t,\lambda)\left[BF^{'}(t) + \Omega(t)F(t)\right]dt\right| + e^{-\operatorname{Im}\lambda\mu(x)}\left|\int_x^{\infty} f^T(t,\lambda)\left[BF^{'}(t) + \Omega(t)F(t)\right]dt\right|$$

elde edilir. Bulunan eşitsizlikte limite geçildiğinde

$$\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{x\geq 0}\left|Z(x,\lambda)\right| = 0 \tag{4.2.3.14}$$

bulunur. □

4.2.4 Parseval Eşitliği

Teorem 4.2.4.1. (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin öz fonksiyonlarına göre ayrışım formülü

$$\delta(t-x)\rho^{-1}(t)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}u(x,\lambda)u^{*}(t,\lambda)d\lambda,\quad -\infty<\lambda<\infty \tag{4.2.4.1}$$

biçimine sahiptir, burada δ Dirac delta fonksiyonu, $x\to\infty$ iken

$$u(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}-S(\lambda)e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}+o(1)$$

ve

$$u^{*}(x,\lambda)=e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}-\overline{S(\lambda)}e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}+o(1),$$

u^{*} fonksiyonu $\overline{u}$ fonksiyonun transpozudur.

İspat. Lemma 4.2.3.1 ve Lemma 4.2.3.2 kullanarak problemin öz fonksiyonlarına göre ayrışım formülü elde edilecektir. (4.2.3.9) ifadesinin her iki tarafı $\frac{1}{2\pi i}$ ile çarpılıp 0 merkezli R yarıçaplı Γ_R çemberi boyunca λ ya göre integrallendiğinde:

$$-F(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R}d\lambda\int_{0}^{\infty}R_{\lambda}(x,t)F(t)\rho(t)dt+\varepsilon_R(x), \tag{4.2.4.2}$$

burada

$$\varepsilon_R(x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R}\frac{Z(x,\lambda)}{\lambda}d\lambda.$$

$R_{\lambda}(x,t)$ fonksiyonu alt ve üst yarı düzlemde analitik fonksiyon olduğundan dolayı (4.2.4.2) ifadesinin sağ tarafı

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_R} d\lambda \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt = I_R^1 + I_R^2 + I_R^3$$

şeklinde yazabilir, burada

$$I_R^1 = \frac{1}{2\pi i}\int_{-R-i\varepsilon}^{R-i\varepsilon} d\lambda \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt\,, \tag{4.2.4.3}$$

$$I_R^2 = \frac{1}{2\pi i}\int_{R+i\varepsilon}^{-R+i\varepsilon} d\lambda \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt\,, \tag{4.2.4.4}$$

$$I_R^3 = \frac{1}{2\pi i}\left\{\int_{R-i\varepsilon}^{R+i\varepsilon} d\lambda \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt + \int_{-R+i\varepsilon}^{-R-i\varepsilon} d\lambda \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt\right\}$$

biçimindedir ve ε herhangi pozitif sayıdır. Lemma 4.2.3.2 ve (4.2.3.14) ifadesi kullanılarak, $R\to\infty$ iken $I_R^3 \to 0$ ve $\lim\limits_{R\to\infty}\sup\limits_{x\geq 0}\left|\varepsilon_R(x)\right| = 0$ bulunur. $R_\lambda(x,t)$ operatörünün biçimi kullanılarak, $\lim\limits_{\varepsilon\to 0} R_{\lambda\pm i\varepsilon} = R_{\lambda\pm i0}$ bulunur ve bu ifadeden

$$\lim_{\varepsilon\to 0}\int_0^\infty R_{\lambda\pm i\varepsilon}(x,t)F(t)\rho(t)dt = \int_0^\infty R_{\lambda\pm i0}(x,t)F(t)\rho(t)dt$$

elde edilir. (4.2.4.2) eşitliğinde $R\to\infty$ iken limite geçildiğinde,

$$F(x) = -\lim_{R\to\infty}\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_R} d\lambda \int_0^\infty R_\lambda(x,t)F(t)\rho(t)dt = -\lim_{R\to\infty}\left[I_R^1 + I_R^2 + I_R^3\right] + \varepsilon_R(x)$$

$$= -\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^\infty \left[R_{\lambda-i0}(x,t) - R_{\lambda+i0}(x,t)\right]F(t)\rho(t)dt \tag{4.2.4.5}$$

sonucuna varılır.

$\psi(x,\lambda)$ ile (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin

$$\psi_1(0,\lambda) = 0 \quad \text{ve} \qquad \psi_2(0,\lambda) = 1$$

koşullarını sağlayan çözümü gösterilsin. O halde $f(x,\lambda)$ çözümü $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ λ ya bağlı tam vektör fonksiyonlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir:

$$f(x,\lambda)=f_2(0,\lambda)\psi(x,\lambda)-f_1(0,\lambda)\varphi(x,\lambda). \tag{4.2.4.6}$$

Rezolvent operatörünün biçimi kullanılarak

$$-\int_0^\infty \left[R_{\lambda+i0}(x,t)-R_{\lambda-i0}(x,t)\right]F(t)\rho(t)dt=-\int_0^\infty \left[R_{\lambda+i0}(x,t)-\overline{R_{\lambda+i0}(x,t)}\right]F(t)\rho(t)\,dt=$$

$$=\int_0^x \left[\frac{f(x,\lambda)}{f_2(0,\lambda)}-\frac{\overline{f(x,\lambda)}}{\overline{f_2(0,\lambda)}}\right]\varphi^T(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt+\int_x^\infty \varphi(x,\lambda)\left[\frac{f^T(t,\lambda)}{f_2(0,\lambda)}-\frac{\overline{f^T(t,\lambda)}}{\overline{f_2(0,\lambda)}}\right]F(t)\rho(t)\,dt$$

bulunur. (4.2.4.6) kullanılarak,

$$\frac{f(x,\lambda)}{f_2(0,\lambda)}-\frac{\overline{f(x,\lambda)}}{\overline{f_2(0,\lambda)}}=\frac{f_2(0,\lambda)\psi(x,\lambda)-f_1(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)}{f_2(0,\lambda)}-$$

$$-\frac{\overline{f_2(0,\lambda)\psi(x,\lambda)}-\overline{f_1(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)}}{\overline{f_2(0,\lambda)}}=\left[\frac{\overline{f_1(0,\lambda)}}{\overline{f_2(0,\lambda)}}-\frac{f_1(0,\lambda)}{f_2(0,\lambda)}\right]\varphi(x,\lambda)=$$

$$=\frac{f_2(0,\lambda)\overline{f_1(0,\lambda)}-f_1(0,\lambda)\overline{f_2(0,\lambda)}}{\left|f_2(0,\lambda)\right|^2}\varphi(x,\lambda)=-2i\frac{\varphi(x,\lambda)}{\left|f_2(0,\lambda)\right|^2}$$

sonucu çıkar. Böylece

$$\frac{1}{2\pi i}\int_0^\infty\left[R_{\lambda+i0}(x,t)-R_{\lambda-i0}(x,t)\right]F(t)\rho(t)dt=\frac{1}{\pi}\int_0^\infty\frac{\varphi(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)}{\left|f_2(0,\lambda)\right|^2}F(t)\rho(t)\,dt.$$

Bulunan eşitlik (4.2.4.5) de yerine yazılarak

$$F(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_0^\infty\frac{\varphi(x,\lambda)\varphi^T(t,\lambda)}{\left|f_2(0,\lambda)\right|^2}F(t)\rho(t)\,dt \tag{4.2.4.7}$$

veya

$$F(x)=\frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty}d\lambda\int_{0}^{\infty}u(x,\lambda)u^{*}(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt$$

sonucuna ulaşılır, burada

$$u(x,\lambda)=\overline{f(x,\lambda)}-S(\lambda)f(x,\lambda)$$

$$u^{*}(x,\lambda)=f^{T}(x,\lambda)-\overline{S(\lambda)}f^{*}(x,\lambda)\,.$$

Ayrıca $x\to\infty$ iken

$$u(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}\begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix}-S(\lambda)e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix}+o(1)$$

$$u^{*}(x,\lambda)=e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1 & -i\end{pmatrix}-\overline{S(\lambda)}e^{i\lambda x}\begin{pmatrix}1 & i\end{pmatrix}+o(1)$$

biçimindedir. Böylece L operatörünün öz fonksiyonlarına göre ayrışım formülü elde edilmiştir.

(4.2.4.7) formülü Stieltjes integrali biçiminde yazılarak

$$F(x)=\int_{-\infty}^{\infty}\varphi(x,\lambda)\left(\int_{0}^{\infty}\varphi^{T}(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt\right)d\sigma(\lambda)$$

elde edilir, burada

$$d\sigma(\lambda)=\frac{1}{\pi}\frac{d\lambda}{\left|f_{2}(0,\lambda)\right|^{2}},\qquad -\infty<\lambda<\infty$$

formundadır.

Tanım 4.2.4.1. $\sigma(\lambda)$ fonksiyonuna (4.2.1.1), (4.2.1.2) probleminin *spektral fonksiyonu* denir.

Şimdi

$$\Phi(\lambda) = \int_0^\infty \varphi^T(x,\lambda) F(x) \rho(x)\, dx$$

gösterimi kullanılarak (4.2.4.7) formülünden

$$F(x) = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi(\lambda) \varphi(x,\lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

bulunur. Bulunan son ifadenin her iki tarafı $F(x)$ ile çarpıp 0 dan ∞ kadar integrallendiğinde,

$$\int_0^\infty F^2(x) \rho(x)\, dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi^2(\lambda)\, d\sigma(\lambda)$$

Parseval eşitliği elde edilir. □

4.3. $\Omega(x)\equiv 0$ DURUMDA (4.1.1.1), (4.1.1.2) PROBLEMİNİN ÖZ FONKSİYONLARINA GÖRE AYRIŞIM PROBLEMİ

4.3.1. Probleme Giriş

$\Omega(x)\equiv 0$ olduğunda (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer problemi

$$\begin{cases} y_2' = \lambda\rho(x)\,y_1, \\ -y_1' = \lambda\rho(x)\,y_2, \end{cases} \qquad 0\le x<\infty \tag{4.3.1.1}$$

$$y_1(0)=0 \tag{4.3.1.2}$$

biçimindedir, burada $1\neq\alpha>0$ olmak üzere $\rho(x)=\begin{cases}1, & x>a,\\ \alpha, & 0\le x<a\end{cases}$ biçimindedir. $p(x)$ ve $q(x)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlardır. λ spektral parametredir. (4.3.1.1) denklemler sisteminin

$$\lim_{x\to\infty} f(x,\lambda)e^{-i\lambda x} = \begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}$$

koşulunu sağlayan çözümü

$$f^0(x,\lambda)=\begin{pmatrix}1\\-i\end{pmatrix}e^{i\lambda\mu(x)}$$

biçimindedir, burada

$$\mu(x)=\begin{cases}\alpha x-\alpha a+a, & 0\le x\le a\\ x, & x>a.\end{cases}$$

4.3.2. Özel Çözüm ve Saçılma Fonksiyonu

(4.3.1.1) denklemler sisteminin

$$\varphi_1^0(0,\lambda)=0 \quad \text{ve} \qquad \varphi_2^0(0,\lambda)=1. \tag{4.3.2.1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözüm aransın:

$$y_2'(x) = \lambda\alpha y_1(x),$$

$$-y_1'(x) = \lambda\alpha y_2(x),$$

denklemler sistemi incelendiğinde,

$$y_1(x) = c_1(x)\cos\lambda\alpha x + c_2 \sin\lambda\alpha x$$

$$y_2(x) = -c_2(x)\cos\lambda\alpha x + c_1 \sin\lambda\alpha x$$

elde edilir. (4.3.2.1) sınır koşulları kullanıldığında

$$\varphi_1^0(0,\lambda) = c_1(x) = 0, \qquad \varphi_2^0(0,\lambda) = -c_2(x) = 1$$

bulunur. Böylece

$$\varphi_1^0(x,\lambda) = -\sin\lambda\alpha x, \qquad \varphi_2^0(x,\lambda) = \cos\lambda\alpha x$$

çözümü elde edilir.

Lemma 4.3.2.1. Reel λ için aşağıdaki özdeşlik sağlanır:

$$2i\frac{\varphi^0(x,\lambda)}{e^{i\lambda(-\alpha a+a)}} = \begin{pmatrix}1\\ i\end{pmatrix} e^{-i\lambda\mu(x)} - e^{-2i\lambda(-\alpha a+a)}\begin{pmatrix}1\\ -i\end{pmatrix} e^{i\lambda\mu(x)}. \qquad (4.3.2.2)$$

Tanım 4.3.2.1. $S^0(\lambda) := e^{-2i\lambda(-\alpha a+a)}$ fonksiyonuna (4.3.1.1), (4.3.1.2) sınır-değer probleminin *saçılma fonksiyonu* denir.

Saçılma fonksiyonunun biçiminden kapalı üst yarı düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda \geq 0)$ sıfırlarının olmadığı görülür.

4.3.3. Rezolvent Operatörün İnşası

$H_\rho = L_{2,\rho}\left(0,\infty;\mathbb{C}^2\right)$ Hibert uzayında iç çarpım

$$(F,G) = \int_0^\infty \left\{F_1(x)\overline{G_1(x)} + F_2(x)\overline{G_2(x)}\right\}\rho(x)\,dx$$

şeklinde tanımlansın, burada

$$F := \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2(x) \end{pmatrix} \in H_\rho \quad \text{ve} \quad G := \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2(x) \end{pmatrix} \in H_\rho$$

biçimine sahip vektörlerdir. $L_0 : F \to l(F)$ operatörünün tanım kümesi

$$D(L_0) := \left\{ F \,\middle|\, F = \left(F_1(x), F_2(x)\right) \in H_\rho, F_1(x), F_2(x) \in AC[0,b], [0,b] \subset [0,\infty), l_0(F) \in H_\rho, F_1(0) = 0 \right\}$$

biçimindedir, burada $l_0(F) = \dfrac{1}{\rho(x)} BF'$. (4.3.1.1), (4.3.1.2) sınır değer problemi $L_0 Y = \lambda Y$ ifadesine karşılık gelir.

λ, L_0 operatörünün spektrum noktası değil ise, $R_\lambda^0 = \left(L_0 - \lambda I\right)^{-1}$ rezolvent operatörü vardır.

Lemma 4.3.3.1 $R_\lambda^0 = \left(L_0 - \lambda I\right)^{-1}$ rezolvent operatörü

$$R^0{}_\lambda(x,t) = -\frac{1}{f_1^0(0,\lambda)} \begin{cases} \varphi^0(x,\lambda) f^{0T}(t,\lambda), & x \le t, \\ f^0(x,\lambda) \varphi^{0T}(t,\lambda), & x \ge t, \end{cases}$$

biçiminde çekirdeğe sahip integral operatörüdür ve

$$BY' = \lambda\rho(x)Y + \rho(x)F(x),$$

$$y_1(0) = 0$$

homojen olmayan sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki biçime sahiptir:

$$Y(x,\lambda) = \int_0^\infty R_\lambda^0(x,t) F(t) \rho(t) dt.$$

Lemma 4.3.3.2 $F(x)$ sonlu vektör fonksiyonu ve $F(x) \in D(L_0)$ olsun. Bu durumda

$$\int_0^\infty R_\lambda^0(x,t)F(t)\rho(t)\,dt = -\frac{F(x)}{\lambda} + \frac{Z(x,\lambda)}{\lambda}$$

formuna sahiptir, burada $Z(x,\lambda) = \int_0^\infty R_\lambda^0(x,t)BF'(t)dt$. Ayrıca $\lim_{\lambda\to\infty}\sup_{x\geq 0}\left|Z(x,\lambda)\right| = 0$.

4.3.4. Ayrışım Formülü, Parseval Eşitliği

Teorem 4.3.4.1 (4.3.1.1), (4.3.1.2) sınır değer probleminin öz fonksiyonlarına göre ayrışım formülü

$$F(x) = \frac{1}{4\pi}\int_{-\infty}^{\infty} d\lambda \int_0^\infty u^0(x,\lambda)u^{0*}(t,\lambda)F(t)\rho(t)\,dt$$

biçimine sahiptir,

$$u^0(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 \\ i \end{pmatrix} e^{-i\lambda\mu(x)} - e^{-2i\lambda(-\alpha a+a)}\begin{pmatrix} 1 \\ -i \end{pmatrix} e^{i\lambda\mu(x)},$$

$$u^{0*}(x,\lambda) = \begin{pmatrix} 1 & -i \end{pmatrix} e^{i\lambda\mu(x)} - e^{2i\lambda(-\alpha a+a)}\begin{pmatrix} 1 & i \end{pmatrix} e^{-i\lambda\mu(x)}.$$

Ayrıca Parseval eşitliği aşağıdaki biçime sahiptir,

$$\int_0^\infty F^2(x)\rho(x)\,dx = \int_{-\infty}^{\infty} \Phi_0^2(\lambda)d\sigma_0(\lambda),$$

burada

$$d\sigma_0(\lambda) = \frac{1}{\pi}\frac{d\lambda}{e^{2\operatorname{Im}\lambda(-\alpha a+a)}}$$

formundadır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Birinci mertebeden süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi ile farklı sınır koşullarıyla oluşturulan sınır değer problemlerinin,

1. Saçılma fonksiyonları tanımlandı ve özellikleri incelendi
2. Rezolvent operatörleri inşa edildi
3. Problemlerin öz fonksiyonlarına göre ayrışım formülleri ve denk olarakParseval eşitlikleri elde edildi.
4. Ayrıca ele alınan sınır değer problemlerinin ilkinde potansiyel fonksiyon $\Omega(x) \equiv 0$ alınarak yukarda bahsedilen durumlar incelenmiş ve denklemlerin biçimleri daha ayrıntılı görülmüştür.

5.2. Öneriler

1. Birinci dereceden süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi ile farklı sınır koşulları ile üretilen sınır değer problemlerinin spektral ayrışımının incelenmesi önerilir.
2. Süreksiz katsayının sonlu sayıda ya da sayılabilir sayıda süreksizlik noktasına sahip olduğu durumlarda Dirac denklemler sistemi içi ayrışım problemi araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Gasymov, M. G. "The Inverse Scattering Problem for a System of Dirac Equations of order 2n", (Russian) Trudy Moscov. Mat. Obst. 19: 41-119, (1968), English transl. in Trans. Mosc. Math. Soc. 19, (1968).

[2] Ablowitz, M. J. ve Segur H. " Solutions and The Inverse Scattering Transform", SIAM Studies in Applied Mathematics, 4. Society for Industrial and Applied Mathematics (SIAM), Philadelphia, 425s., (1981).

[3] Marchenko, V. A. "Strum-Liouville Operators and Aplications", Trans. from the Russian by A. Iacob, Birkhauser Verlag, Basel, Boston, Stuttgard. 367s., (1986).

[4] Levitan, B. M. ve Sargsjan, I. S. "Sturm- Liouville and Dirac Operators", Kluwer Academic Publishers Group, Dordrecht, (1991).

[5] Levitan, B. M. ve Sargsjan, I. S. "Introduction to Spektral Theory : Selfadjoint Ordinary Differential Operators", Amerikan Mathematical Society, (1975).

[6] Gasymov, M. G. ve Levitan, B. M. " The Inverse Problem for the Dirac System", (Russian) Dokl. Akad. Nauk SSSR, 167:967-970, (1966).

[7] Guseinov, I. M. "On the Representation of Jost Solutions for Dirac's Equation System with Discontinuous Coefficients", Transactions of NAS Azerbaijan, 5:41-45, (1999).

[8] E. C. Titchmarsh, "Eigenfunction Expansions Associated with Second-Order Differential Equations", Part I. Second Edition Clarendon Press, Oxford, (1962).

[9] Huseynov, H. M. ve Latifova, A. R. "On the Eigenvalues and Eigenfunctions of One Class of Dirac Operators with Discontinuous Coefficient", Institute of Mathematics and Mechanics of NAS of Azerbaijan, (2003).

[10] Newton, R. G. ve Jost, R. "The Construction of Potentials from the S-matrix for Systems of Equations", Nuova Cimento, 1(4):590–622, (1955).

[11] Nizhnik, L. P. "Inverse Scattering Problems for Hyperbolic Equations", Naukova Dumka, Kiev, 232s., (1991).

[12] Nizhnik, L. P.ve Vu, Ph. L."The Inverse Scattering Problem on the Semi-Axis with a Nonselfadjoint Potential Matrix", Ukrainian Math. J. 26: 384-398, (1975); also: Ukrain. Math. Zh. 26: 469-486, (1974).

[13] Nizhnik, L. P. "The Inverse Scattering Problem for Hpyperbolic Equations and Their Application to Nonlinear Integrable Systems", Rep. Math. Phys., 26(2):261-283, (1988).

[14] Krueger, R. J. "Inverse Problems for Nonabsorbing Media with Discontinuous Material Properties", J. Math. Phys. 23(3): 396-404, (1982)

[15] Shepelsky, D. G. "The Inverse Problem of Reconstruction of the Medium's Conductivity in a Class of Discontinuous and Increasing Function", Advances in Soviet Math. 19: 209-231, (1994)

[16] Mamedov, Kh. R., Çöl, A. "On The Expansion Formula for a Class of Dirac Operator with Discontinuous Coefficient", Internationla Journal of Computation Cognition, 7(4): 20-24, (2009).

[17] Guseinov, I. M. "The inverse scattering problem for a system of Dirac equations with discontinuous coefficients", (Russian) Dokl. Akad. Nauk Azerb. 55(1-2):13-18, (1999).

[18] Mamedov, Kh. R. "On the Inverse Problem for a Class of Dirac Equations System with a Discontinious Coefficient with a Spectral Parameter in the Boundary Condition", Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb., Ser. Phys. Tech Math Sci 28(4) Math. Mech., 65-72, (2008).

[19] Mamedov, Kh. R., Çöl, A. "On the Inverse Problem of the Scattering Theory for a Class of Systems of Dirac Equations with Discontinious Coefficient", Eur. J. Pure Appl. Math. 1(3):21-32, (2008).

[20] Mamedov, Kh. R., Çöl, A. "On An Inverse Problem For a Class Dirac Operator With Discontinious Coefficient and a Spectral Parameter In The Boundary Condition", Applied Mathematical Sciences. 4(26): 1273-1287, (2010).

[21] Mamedov, Kh. R., Çöl, A. "On an Inverse Scattering Problem for a Class of Dirac Operators with Spectral Parameter in the Boundary Condition", Journal of Math. Analysis and Applications, 393(2): 470-478 (2012).

[22] Mamedov, Kh. R., Çöl, A. "On an Inverse Scattering Problem for a Class Dirac Operator with Discontinuous Coefficient and Nonlinear Dependence on the Spectral Parameter in the Boundary Condition", Mathematical Methods in the Applied Science, DOI: 10.1002/mma.2553, (20.06.2012).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Özge AKÇAY

Doğum Tarihi: 21/06/1987

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Matematik- Fen	Erdemli Anadolu Lisesi	2001-2005
Lisans	Matematik	Akdeniz Üniversitesi	2005-2009
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2009-2012

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. "On the Expansion Formula for a Class of Dirac Operator with Discontinuous Coefficient", International Conference of Applied Analysis and Algebra, 29 Haziran-2 Temmuz 2011, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.