# KOMPLEKS DÜZLEMİN ÇEŞİTLİ BÖLGELERİNDE CEBİRSEL POLİNOMLARIN DAVRANIŞI

**NAZLIM DENİZ ARAL**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK**
**ANA BİLİM DALI**

**DOKTORA TEZİ**

**MERSİN**
**HAZİRAN – 2012**

# KOMPLEKS DÜZLEMİN ÇEŞİTLİ BÖLGELERİNDE CEBİRSEL POLİNOMLARIN DAVRANIŞI

**NAZLIM DENİZ ARAL**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK**
**ANA BİLİM DALI**

**DOKTORA TEZİ**

**Danışman**
**Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV**

**MERSİN**
**HAZİRAN - 2012**

Nazlım Deniz ARAL tarafından Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV danışmanlığında hazırlanan "Kompleks Düzlemin Çeşitli Bölgelerinde Cebirsel Polinomların Davranışı" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

Prof. Dr.Rauf AMİROV

Prof.Dr. Gabil ADİLOV

Doç.Dr.Mehmet KÜÇÜKASLAN

Yrd.Doç.Dr.Tuncay TUNÇ

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 28/09/2012 tarih ve 2012.18/517 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. A. Murat GİZİR
Enstitü Müdürü

# KOMPLEKS DÜZLEMİN ÇEŞİTLİ BÖLGELERİNDE CEBİRSEL POLİNOMLARIN DAVRANIŞI

**Nazlım Deniz ARAL**

## ÖZ


$\mathbb{C}$- kompleks düzlem; $G \subset \mathbb{C}$, $L := \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge ve $\Omega := ext\overline{G}$ olsun. $w = \Phi(z)$ ile $\Omega$ bölgesini $\Delta := \{ w : |w| > 1 \}$ bölgesine konform resmeden ve $\Phi(\infty) = \infty$, $\Phi'(\infty) > 0$ koşullarını sağlayan dönüşüm gösterilsin.

$A_p(G)$ ile $G$ bölgesinde analitik ve

$$\|f\|^p_{A_p(G)} := \iint_G |f(z)|^p \, d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı işaret edilsin, burada $\sigma$ ile $G$ üzerinde tanımlı iki boyutlu Lebesque ölçüsü gösterilmektedir.

$n$, bir doğal sayı olmak üzere, $\wp_n$ ile derecesi $n$'yi aşmayan polinomlar sınıfı gösterilsin. Bilindiği gibi Bernstein-Walsh Lemması

$$|P_n(z)| \le |\Phi(z)|^{n+1} \|P_n\|_{C(\overline{G})} \ , \ z \in \Omega \qquad (*)$$

dir [1].

Bu tezde; (*) eşitsizliği, sağ tarafındaki $\|P_n\|_{C(\overline{G})}$ sayısının $\|P_n\|_{A_2(G)}$ sayısı ile değiştirilerek, kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde incelendi.

Aynı zamanda $X$ ve $Y$, $G$ de tanımlı fonksiyonların normlu (veya yarı normlu) uzayları olmak üzere,

$$\left\|P_n^{(k)}\right\|_{X(Y)} \le A(k,n,G)\|P_n\|_Y$$

şeklindeki eşitsizliklerin bulunması problemi incelendi. Burada $A(k,n,G)$ genelde $k,n$ ve $G$'ye bağlı sabittir.


**Anahtar Kelimeler:** Cebirsel Polinom, Konform dönüşüm, Yarıkonform dönüşüm, Yarıkonform eğriler

**Danışman:** Prof. Dr. Fahreddin Abdullayev, Matematik Ana Bilim Dalı, Mersin Üniversitesi

# BEHAVIOR OF ALGEBRAIC POLYNOMIALS IN VARIOUS REGIONS OF THE COMPLEX PLANE

**NAZLIM DENİZ ARAL**

## ABSTRACT

Let $\mathbb{C}$ denote the complex plane, $G \subset \mathbb{C}$ be a finite region whose boundary $L := \partial G$ is a Jordan curve. $\Omega := ext\overline{G}$. Let $w = \Phi(z)$ be the conformal mapping of $\Omega$ onto the $\Delta := \{z : |z| > 1\}$, normalized by $\Phi(\infty) = \infty, \Phi'(\infty) > 0.$

Let us denote by $A_p(G)$ the set of functions $f$ analytic in $G$ and satisfying

$$\| f \|^p_{A^1_p} := \| f \|^p_{A_p(G)} := \iint_G |f(z)|^p \, d\sigma_z < \infty ,$$

where $\sigma$ is two-dimensional Lebesque measure.

Let us denote by $\wp_n$ the class of polynomials $P_n(z), \deg P_n \le n \ (n \in \mathbb{N})$. It is well known Bernstein-Walsh Lemma says:

$$|P_n(z)| \le |\Phi(z)|^{n+1} \|P_n\|_{C(\overline{G})} \ , \ z \in \Omega \qquad (*)$$

In this thesis, the inequality (*) has been investigated by replacing the number $\|P_n\|_{C(\overline{G})}$ by $\|P_n\|_{A_2(G)}$ for some regions of complex plane.

Moreover, the problem of finding

$$\left\| P_n^{(k)} \right\|_{X(Y)} \le A(k,n,G) \|P_n\|_Y$$

type inequalities have been investigated, where $X$ and $Y$ are the normed (or seminormed) spaces of functions on $G$ and $A(k,n,G)$ is a constant which depends on $k, n, G$.

**Keywords:** Algebraic polynomial, Conformal mapping, Quasiconformal mapping, Quasiconformal curves.

**Advisor:** Prof.Dr.Fahreddin Abdullayev, Department of Mathematics, Mersin University

## TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında, yanımda olup yol gösteren, bilgi, görüş ve önerilerini esirgemeyen, gösterdiği sabır ve anlayıştan dolayı çok değerli danışman hocam Prof.Dr.Fahreddin ABDULLAYEV'e sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım boyunca bilimsel yardımlarını esirgemeyen ve düşünceleriyle bana yol gösteren Yrd. Doç.Dr. Tuncay TUNÇ'a çok teşekkür ederim.

Ayrıca, çalışmalarım sırasında bana bilgi yönünden destek veren bütün hocalarıma, yardımlarını ve desteklerini esirgemeyen araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

**Sayfa**

## SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{C}$ | Kompleks sayılar kümesi |
| $\overline{\mathbb{C}}$ | $\mathbb{C}\cup\{\infty\}$ |
| $\overline{G}$ | $G$ bölgesinin kapanışı |
| $\partial G$ | $G$ bölgesinin sınırı |
| $:=$ | Tanım olarak eşittir. |
| $d\sigma_z$ | $dxdy$, $z = x+iy$ |
| $D \Subset G$ | $D$ bölgesi kompakt olarak $G$ bölgesinin içindedir. |
| $int(L)$ | $L$ kapalı eğrisinin sınırladığı sonlu bölge |
| $ext(L)$ | $L$ kapalı eğrisinin sınırladığı sonsuz bölge |
| $mes(\gamma)$ | $\gamma$ eğrisinin uzunluğu |
| $mes(G)$ | $G$ bölgesinin alanı |
| $\Omega$ | $ext(\overline{G})$ |
| $B(z,\delta)$ | $\{t: \lvert t-z\rvert<\delta\}$ |
| $\Delta$ | $\{w: \lvert w\rvert>1\}$ |
| $k=\overline{1,n}$ | $k=1,2,...,n$ |
| $a \prec b$ | $a \le cb,\ c>0$ $a$ ve $b$ den bağımsız sabit. |
| $a \succ b$ | $b \le ca$, $c>0$ $a$ ve $b$ den bağımsız sabit. |
| $a \asymp b$ | $a \prec b$ ve $b \prec a$ |
| $d(M,L)$ | $\inf\{\lvert z-\zeta\rvert:\ z\in M,\ \zeta\in L\}$ |
| $\delta(z)$ | $d(z,L)$ |
| $C(G)$ | $G$ bölgesinde sürekli olan fonksiyonlar kümesi |
| $C^1(G)$ | Türevi $G$ bölgesinde sürekli olan fonksiyonlar kümesi |
| $A(G)$ | $G$ bölgesinde analitik fonksiyonlar kümesi |
| $A(\overline{G})$ | $G$ bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ sürekli fonksiyonlar kümesi |

# 1. GİRİŞ

Yaklaşım Teorisi'nde önemli yer tutan problemlerden bir tanesi polinomların kendi normları veya polinomun kendisi ile türevlerinin farklı normları arasında nasıl bir bağıntının bulunduğu problemidir. Bu tür sonuçlar literatürde Markov (Markoff) (polinomların türevleri ve kendi normları arasındaki bağıntı), Bernstein, Walsh (polinomun normları arasındaki bağıntı), Nikolskii (farklı uzaylarda türevleri ve kendi normları arasında bağıntı) vs. tipi eşitsizlikler halinde rastlanmaktadır. Diğer taraftan, verilen bir polinomun verilen bir küme üzerindeki herhangi bir normunun, kümenin genişlemesi ile değişiminin gözlemlenmesi problemi de bu teorinin temel taşlarındandır. Çoğu zaman yardımcı sonuçlar olarak ihtiyaç duyulan bu tür değerlendirmeler ilerleyen zamanlarda bağımsız bir teori olarak gelişmeye devam etmiş ve halen devam etmektedir. Sonraki aşamalarda bu teori, ortogonal polinomlar teorisinde, dahil olma teorisinde vs. gibi alanlarda uygulamalar buldu.

Bu çalışmada, belirtilen problemlerden esas olarak iki tanesi üzerinde durulacaktır. Bu problemlerden ilki, polinomların farklı normları arasında nasıl bir bağıntının olacağı, diğeri ise polinomun, verilen bölge üzerindeki normu bilindiği halde, bölgenin dışındaki artışının nasıl değerlendirileceğidir. Tabii ki, bu tür problemlerin çözümü, ele alınan bölgenin özelliklerine, bakılan uzayın özelliklerine ve bunlar gibi birçok parametreye bağlı olacaktır.

Bu çalışmadaki esas amaç, kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde yukarıda ifade edilen iki problemin çözümünün incelenmesi ve elde edilen sonucun bu parametrelere nasıl bağlı olduğunun ortaya konulmasıdır.

$G\subset\mathbb{C}$, $L:=\partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge ve $\Omega:=ext\overline{G}$ olsun. $w=\Phi(z)$ ile $\Omega$ bölgesini $\Delta:=\{w:|w|>1\}$ bölgesine konform resmeden ve $\Phi(\infty)=\infty,\ \Phi'(\infty)>0$ koşullarını sağlayan dönüşüm gösterilsin. Her $R>1$ sayısı için $L_R:=\{z:|\Phi(z)|=R\}$ olmak üzere $G_R:=\operatorname{int}L_R$ , $\Omega_R:=extL_R$ olsun.

$h(z)$, $G$ bölgesinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. $A_p(h,G)$ ile $G$ bölgesinde analitik ve

$$\|f\|_{A_p(h,G)}^p := \iint_G h(z)\left|f(z)\right|^p d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı işaret edilsin. Burada $\sigma$ ile $G$ üzerinde tanımlı iki boyutlu Lebesque ölçüsü gösterilmektedir. $A_p(1,G) := A_p(G)$.

$\overline{G}$ 'da sürekli fonksiyonlar sınıfı $C(\overline{G})$ ile gösterilsin ve $f \in C(\overline{G})$ için

$$\|f\|_{C(\overline{G})} := \max\left\{|f(z)| : z \in \overline{G}\right\}$$

olsun.

$\wp_n$ ile derecesi $n$'yi aşmayan cebirsel polinomlar sınıfı gösterilsin.

Verilen bir $P_n \in \wp_n$ polinomunun ele alınan küme üzerinde herhangi bir uzaydaki ($C(\overline{G})$, $L_p(\partial G)$, $A_p(G)$) normunun (veya yarınormunun) bu kümenin genişlemesine bağlı olarak artışının bulunması ile ilgili aşağıdaki şekilde verilen eşitsizlikler Berstein-Walsh eşitsizliği [1] olarak bilinmektedir:

$$\|P_n\|_{G'} \leq A(n,G,G')\|P_n\|_G, \quad G \subset G'. \tag{1.1}$$

Eğer ele alınan küme $G$ bölgesi ve norm olarak düzgün norm ele alınırsa, bilindiği gibi, klasik Bernstein-Walsh Lemması ($G$ bölgesi için tasarlanmış haliyle)

$$\left|P_n(z)\right| \leq \left|\Phi(z)\right|^{n+1} \|P_n\|_{C(\overline{G})}, \quad z \in \Omega \tag{1.2}$$

eşitsizliğini vermektedir [1 , 2]. Buradan, özel halde

$$\|P_n\|_{C(\overline{G}_R)} \leq R^{n+1} \|P_n\|_{C(\overline{G})} \tag{1.3}$$

bulunur. Yani, $G$ bölgesi $G_R$ bölgesine kadar genişletildiğinde $\|P_n\|_{C(\overline{G}_R)}$ sayısı en fazla $\|P_n\|_{C(\overline{G})}$ sayısının $R^{n+1}$ katı kadar artacaktır.

Bu tezde; ilk önce (1.1) eşitsizliği, kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde ve çeşitli normlarda incelendi. Elde edilen sonuçlarda, polinomun normunun bölgenin geometrik özelliklerine ve uzayın parametrelerine göre nasıl değiştiği gösterildi. Daha sonra, $X$ ve $Y$, ($C(\overline{G}), L_p(\partial G), A_p(G)$) normlu uzaylarından birisi ve $P_n^{(k)}$, $P_n$'in $k$. mertebeden türevi olmak üzere,

$$\left\|P_n^{(k)}\right\|_{X(Y)} \leq A(k,n,G)\|P_n\|_Y \tag{1.4}$$

şeklindeki eşitsizliklerin bulunması problemi incelendi. Burada $A(k,n,G)$ genelde $k,n$ ve $G$ 'ye bağlı bir sabittir.

Bu tezin, Materyal ve Yöntem kısmında esas teoremlerin ispatları için gerekli tanım ve kavramların yanısıra yardımcı lemmalar ve teoremler verilecektir. Bulgular ve Tartışma kısmında esas teoremler ve sonuçlar verilecektir.

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Bernstein-Walsh tipi eşitsizliklerin ilki, 1912 yılında Bernstein tarafından bulunmuştur. (1.1)'deki işaretlemelere göre, $G=\left[-1,1\right]$ ve $X=C\left[-1,1\right]$ alınırsa $G_R := \left\{ z : z = \frac{1}{2}(w+\frac{1}{w}), \quad |w| = R > 1 \right\}$ için $G' = G_R$ olmak üzere Bernstein, (1.1)'de $A\left(n,G,G'\right)$ sabitinin $R^n$ olduğunu belirlemiştir. Dolayısıyla, Berstein eşitsizliği olarak bilinen değerlendirme kaynaklarda aşağıdaki gibi yer aldı:

$$\left\|P_n\right\|_{C(\overline{G}_R)} \leq R^n \left\|P_n\right\|_{C\left[-1,1\right]} \tag{2.1}$$

$\Gamma$ ölçülebilir Jordan eğrisi olsun. Her $p>0$ için $L_p(\Gamma)$ ile $\Gamma$ üzerinde ölçülebilir ve

$$\left\|f\right\|_{L_p(\Gamma)}^p := \int_\Gamma \left|f(z)\right|^p \left|dz\right| < +\infty$$

koşulunu sağlayan $f\left(z\right)$ fonksiyonlarının sınıfı gösterilsin.

(2.1) eşitsizliğinin benzeri, $\Gamma$ kapalı ve ölçülebilir bir Jordan eğrisi olmak üzere $L_p(\Gamma)$ uzayında Hille, Szegö, Tamarkin [2] tarafından elde edilmiştir.

$\Gamma := \partial G$, $G' = G_R := intL_R$ ve $\Gamma_R := \partial G_R$ olarak alınırsa, bu durumda (2.1)'in benzeri olan

$$\left\|P_n\right\|_{L_p(\partial G_R)} \leq R^{n+\frac{1}{p}} \left\|P_n\right\|_{L_p(\partial G)}, \quad p>0 \tag{2.2}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Verilen bölgenin üzerine bazı koşullar koyarak (2.2)'deki değerlendirme $A_p(G)$ uzayına aşağıdaki şekilde taşınabilir [4] :

$$\left\|P_n\right\|_{A_p(G_R)} \leq \left[1+c(R-1)\right]^{n+\frac{1}{p}} \left\|P_n\right\|_{A_p(G)}, \quad p>0 \tag{2.3}$$

Burada $c$ sabiti $n$ ve $R$ den bağımsızdır.

2009 yılında N.Stylianopoulos [5], yarıkonform ve ölçülebilir bir eğriyle sınırlı bölgede keyfi $P_n \in \wp_n$ polinomunun modülünün artışını bütün $\Omega$'da değerlendirirken, (1.2)'nin sağ tarafındaki $\left\|P_n\right\|_{C\left(\overline{G}\right)}$ yerine $\left\|P_n\right\|_{A_2(G)}$ sayısını kullanarak aşağıdaki sonucu elde etmiştir:

$$\left|P_n\left(z\right)\right| \le \frac{c\left(L\right)}{d\left(z,L\right)}\sqrt{n}\left\|P_n\right\|_{A_2(G)}\left|\Phi\left(z\right)\right|^{n+1} \ ,\ z \in \Omega . \tag{2.4}$$

Burada, $c\left(L\right)$, $L$'ye bağlı bir sabit ve $d\left(z,L\right)$ ise $z$ noktasının $L$ eğrisine olan uzaklığıdır.

Daha sonra, esas problemlerimizden ikincisi ile ilgili olarak, kompleks düzlemin çeşitli bölgeleri için polinomların türevlerinin $X$ normları ile onların kendi $Y$ normları karşılaştırıldı. $X$ ve $Y$ olarak farklı uzaylar ele alındığında bu tür sonuçlara, çeşitli geometrik özelliklere sahip bölgeler ve kümeler için Markov [6], Mergelyan [7], Dzjadyk [8], Suetin [9], Simonenko [10], Kulikov [11], Mamedhanov [12], Batchaev [13], Abdullayev [4,14,15], Gaier [16,17], Pritsker [18], Andrievskii [19] ve bunlar gibi bir çok çalışmalarında rastlanabilir. Yapılan çalışmalarda, aşağıdaki şekilde değerlendirmelerin

$$\left\|P_n^{(k)}\right\|_{X(Y)} \le A(n,k,G)\left\|P_n\right\|_Y \tag{2.5}$$

$$\left\|P_n\right\|_X \le B(n,G)\cdot\left\|P_n'\right\|_Y \tag{2.6}$$

ve bu eşitsizliklerde yer alan $A(n,k,G)$, $B(n,G)$ sayılarının verilen bölgelerin özelliklerine bağlı olarak nasıl değiştiğinin bulunması gibi problemler incelenmiştir.

# 3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bulgular kısmında kullanılacak bazı tanımlar ve temel teoremler verilecektir.

Bu tezde, $G$ kompleks düzlemde $L := \partial G$ Jordan eğrisiyle sınırlı sonlu bir bölge kabul edilecektir. Ek olarak, genelliği kaybetmeksizin $0 \in G$ kabul edilecektir.

## 3.1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

**Tanım 3.1.1.** Eğer, $G \cap A_1 \neq \emptyset$, $G \cap A_2 \neq \emptyset$ olacak şekilde kompleks düzlemde ayrık ve birleşimleri $G$ kümesini veren $A_1$ ve $A_2$ açık kümeleri varsa $G$ 'ya *bağlantısız* küme denir. Aksi halde $G$ *bağlantılı* küme adını alır [20].

**Tanım 3.1.2.** $G \subset \mathbb{C}$ kümesi için

**i)** $G$ bir açık kümedir,

**ii)** Her $\zeta_1, \zeta_2 \in G$ için bu noktaları birleştiren ve $\gamma \subset G$ olacak şekilde en az bir $\gamma := \gamma(\zeta_1, \zeta_2)$ eğrisi vardır koşulları sağlanıyor ise $G$ kümesine kompleks düzlemde bir *bölge* denir [21].

Kapalı ve bağlantılı bir kümeye C*ontinuum* adı verilir.

**Teorem 3.1.1.** $f$ fonksiyonunun $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $z_0 \in G$ noktasında sürekli ve $\forall z \in G$ için $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f^*(z) + (z - z_0)\varepsilon(z)$ sağlayan bir tek $f^* : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun olmasıdır. Burada $\lim_{z \to z_0} \varepsilon(z) = 0$ dır. Bu durumda $f'(z_0) = f^*(z_0)$ dır [22].

**Teorem 3.1.2.** $f$ fonksiyonu $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilirse, $z = x + iy$ olmak üzere,

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

kısmi türevleri mevcut olup bu kısmi türevler

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

ifadesini sağlar [23].

**Tanım 3.1.3.** $f$ fonksiyonunun $z_0 \in G$ noktasında $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ kısmi türevleri mevcut ise $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ ve $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$ aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$$\frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) =: f_z(z_0),$$

$$\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right) =: f_{\overline{z}}(z_0).$$

Özel halde $f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$ şeklinde ise

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y),$$

$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y),$$

olur [23].

**Teorem 3.1.3.** $f$ fonksiyonu $z_0$ noktasında türevlenebilirse

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$$

dır [23].

**Tanım 3.1.4.** $f$ fonksiyonu tanımlı olduğu $z_0$ noktasının belli bir $B(z_0,r):=\{z:|z-z_0|<r\}$ komşuluğundaki tüm noktalarda türevlenebiliyorsa $f$ fonksiyonuna $z_0$ noktasında *analitiktir* denir [21].

Eğer $G$'de tanımlı $f$ fonksiyonu, her bir $z\in G$ noktasında analitik ise $f$ fonksiyonuna $G$'de analitiktir denir. $G$'de analitik tüm fonksiyonların kümesi $A(G)$ ile, $G$'de analitik ve $\overline{G}$'da sürekli olan fonksiyonların kümesi $A\left(\overline{G}\right)$ ile gösterilir.

**Tanım 3.1.5.** $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, sınırlı bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $\varepsilon>0$ için öyle bir $\delta>0$ sayısı bulunabilir öyle ki $[a,b]$ aralığının $\sum_{k=0}^{n}(b_k-a_k)<\delta$ koşulunu sağlayan her bir ayrık $\{(a_k,b_k)\}_{k=0}^{n}$ parçalanışı için $\sum_{k=0}^{n}|f(b_k)-f(a_k)|<\varepsilon$ sağlanıyor ise $f$ fonksiyonuna $[a,b]$'de *mutlak sürekli fonksiyon* denir.

**Tanım 3.1.6.** Kompleks değişkenli reel değerli $u:G\to\mathbb{R}$, fonksiyonu verilsin. Eğer, $u$ fonksiyonu kenarları $OX$ ve $OY$ eksenlerine paralel olan her $R\Subset G$ dikdörtgeninin hemen hemen tüm yatay ve hemen hemen tüm dikey aralıklarında mutlak sürekli ise $u$ fonksiyonuna $G$'de *mutlak süreklidir* denir.

**Tanım 3.1.7.** $G\subset\mathbb{C}$; $f:G\to\mathbb{C}$, bir fonksiyon olsun. Eğer, $\operatorname{Re} f$ ve $\operatorname{Im} f:G\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $G$'de mutlak sürekli fonksiyonlar iseler $f$ fonksiyonu $G$'de *mutlak süreklidir* denir. $G$ bölgesinde mutlak sürekli fonksiyonların sınıfı $ACL(G)$ ile gösterilir.

$n\in\mathbb{N}$ olmak üzere, $0<|z_n|<1$ ve

$$\prod_{n=1}^{\infty}\frac{|z_n|}{z_n}\frac{z_n-z}{1-\overline{z_n}z}$$

sonsuz çarpımı $|z|<1$ için mutlak yakınsak ise, bu çarpım $|z|<1$'de analitik olan ve Blascke çarpımı denilen belirli bir fonksiyonu gösterir.

$f_r := f\left(re^{i\theta}\right)$, $\theta \in [0,2\pi]$, $\|f_r\|_\infty = \sup\limits_\theta \left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$ olmak üzere, $H^\infty = \left\{f : \|f_r\| < \infty,\ 0 \le r < 1\right\}$ göstersin.

**Teorem 3.1.4. (Blaschke Fonksiyonları):** $G \subset \mathbb{C}$ bölgesi verilsin. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\alpha_n \neq 0$ ve $\sum\limits_{n=1}^{\infty}\left(1-|\alpha_n|\right) < \infty$ olacak şekilde $\{\alpha_n\}$ $G$ bölgesinde bir dizi olsun. $k$ negatif olmayan bir tamsayı ve $z \in G$ için,

$$B(z) = z^k \prod_{n=1}^{\infty} \frac{\alpha_n - z}{1-\overline{\alpha_n} z} \frac{|\alpha_n|}{\alpha_n}$$

ile tanımlı $B$ fonksiyonu $H^\infty$ sınıfındandır. Ayrıca bu fonksiyon $\alpha_n$ dışında sıfır yeri içermez.

Bu $B$ fonksiyonuna *Blaschke Çarpımı* denir. Dikkat edilmelidir ki, $\alpha_n$'lerin bazıları tekrarlanabilir. Blaschke çarpımında çarpan yoksa $B(z)=1$'dir.

## 3.2. KOMPLEKS DÜZLEMDE EĞRİ VE KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

**Tanım 3.2.1.** $a,b \in \mathbb{R}$ ve $a<b$ olsun. $z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna kompleks düzlemde bir *eğri* denir ve $\gamma$ ile işaretlenir. $z(a)$ noktasına $\gamma$ eğrisinin başlangıç noktası, $z(b)$ noktasına da bitiş noktası denir.

**i)** $z(a) = z(b)$ ise $\gamma$ eğrisine *kapalı eğri* denir.

**ii)** Her $t_1, t_2 \in [a,b]$ için $t_1 \neq t_2$ olduğunda $z(t_1) \neq z(t_2)$ ise $\gamma$ eğrisine *Jordan yayı,* eğer sadece uç noktalarında $z(a) = z(b)$ ise $\gamma$ eğrisine *Jordan eğrisi* denir.

**iii)** $\forall t \in [a,b]$ için $z'(t)$ var ve sürekli ise $\gamma$ eğrisine diferansiyellenebilir eğri denir. Buna ek olarak $\forall t \in [a,b]$ için $z'(t) \neq 0$ ise $\gamma$ eğrisine *düzgün eğri* denir.

**iv)** $[a,b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç $\gamma$ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa ve bu söz konusu noktalarda $\gamma$'nın sağdan ve soldan türevleri var ve bu türevler $\gamma$'nın bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse $\gamma$ *parçalı diferansiyellenebilir* eğridir denir [24].

**v)** $\gamma$ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer $\forall t \in [a,b]$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise $\gamma$, *parçalı düzgün* eğridir denir.

**vı)** Her $z_1, z_2 \in L$ çifti için $s(z_1, z_2)$, $z_1$'i $z_2$'ye birleştiren, eğri üzerindeki en küçük yay uzunluğu olmak üzere bir $c > 1$ sabiti vardır öyleki $s(z_1, z_2) \leq c|z_1 - z_2|$ ise $L$'ye *yarı düzgün* bir eğri denir.

**Tanım 3.2.2.** $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $G$ bölgesinden alınan her bir $\gamma$ eğrisi için $\operatorname{int}\gamma \subset G$ oluyor ise $D$ bölgesine *basit bağlantılı bölge* denir. Başka bir deyişle $\overline{\mathbb{C}}$'a göre tümleyeni bağlantılı olan bölgeye basit bağlantılı bölge denir.

**Teorem 3.2.1.** (**Jordan Eğri Teoremi**) $\gamma$, $\overline{\mathbb{C}}$'da bir Jordan eğrisi olsun. Bu taktirde $\gamma$ eğrisi kompleks düzlemi ortak sınırları $\gamma$ olan biri sonlu, diğeri sonsuz iki ayrık bölgeye ayırır. Bu bölgelerin her biri basit bağlantılıdır [24].

$[a,b]$ aralığının $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ şeklindeki tüm parçalanışlarının ailesi $\mathbb{P}$ ile gösterilsin ve $\ell_n(P) := \sum_{k=1}^{n} |z(t_k) - z(t_{k-1})|$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\ell_n(P) : P \in \mathbb{P}\} < \infty$$

ise $\gamma$ eğrisine *ölçülebilir eğri* denir.

**Teorem 3.2.2.** Eğer $\gamma$ parçalı düzgün eğri ise bu eğri ölçülebilirdir ve

$$mes(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|\, dt$$

dır [24].

**Tanım 3.2.3.** $\gamma$ eğrisinin doğal denklemi $z = z(s),\ 0 \le s \le \ell,\ \ell := mes\gamma$, olsun. Eğer, $\gamma$ eğrisine her bir $z(s)$ noktasında çizilen teğetin $OX$ ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı $\theta(s) := \theta(z(s))$ $s$'in sürekli fonksiyonu ise bu eğriye *sürekli teğete sahip eğri* denir ve bu özelliğe sahip eğrilerin sınıfı $C_\theta$ ile gösterilir. Eğer $\theta'(s)$ sürekli ve sınırlı ise $\gamma$ eğrisine *sürekli eğime sahip eğri* denir.

**Tanım 3.2.4.** $a, b, c, d, e$ ve $f$ birer reel sayı olmak üzere kompleks düzlemde $G := \{z = x + iy \ :\ a < x < b,\ d < y < f\} \cup \{z = x + iy : a < x < c,\ d < y < e\}$ şeklinde tanımlanan bölgeye $L-$*şekilli bölge* denir.

**Tanım 3.2.5.** $S \subset \mathbb{C}$ bir küme ve $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $\forall z_1, z_2 \in S$ için,

$$|f(z_1) - f(z_2)| \le A |z_1 - z_2|^\alpha$$

olacak şekilde bir $A > 0$ varsa $f$ fonksiyonuna *Hölder (Lipshitz)* $\alpha$ *sınıfı*'ndandır denir ve $f \in H^\alpha(S)$ veya $f \in Lip\alpha$ ile gösterilir. $H^1(S) = H(S)$ olsun.

Aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) $f \in H(S) \Rightarrow f \in C(S)$

2) $\beta \le \alpha$ olmak üzere $f \in H^\alpha(S) \Rightarrow f \in H^\beta(S)$ dir. Yani $H^\alpha(S) \subseteq H^\beta(S)$ dır.

3) $f \in H(S), g \in H(S)$ olmak üzere,

$$f + g \in H(S),\ \ f.g \in H(S),\ \ \frac{f}{g} \in H(S)\ (g \ne 0)$$

dir [25].

**Tanım 3.2.6.** $f$ 'nin teğet dönüşümünün $z_0$ noktasında yönü değişmiyor ve

**a)** açıları değişmiyor,

**b)** kareyi kareye resmediyor

**c)** çemberi çembere resmediyor

koşullarından herhangi birini sağlıyorsa $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında $\mathbb{R}^2$ diferansiyellenebilir $f$ dönüşümüne bu noktada *konform* denir

Eğer $f : D \to \mathbb{C}$ birebir, örten ve $D$ 'nin her bir noktasında konform ise $f$ fonksiyonuna $D$ bölgesinde konform dönüşüm denir [26].

Aşağıda verilen teorem konform dönüşüm teorisinin en önemli teoremlerinden biri olan Riemann Dönüşüm Teoremi'nin bir sonucudur.

**Teorem 3.2.3.** $G \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $0 \in G$ olsun. Bu durumda $G$ bölgesini $B(0,1) := \{w : |w| < 1\}$ dairesine resmeden ve $\widehat{\varphi}(0) = 0$, $\widehat{\varphi}'(0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $w = \widehat{\varphi}(z)$ konform dönüşümü vardır [24].

**Teorem 3.2.4.** $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$ ve $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ olmak üzere

$$\Phi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

olacak şekilde bir tek $\Phi : \Omega \to \Delta$ konform dönüşümü vardır.

**Tanım 3.2.7.** $0 < r < 1$ ve $R > 1$ olsun. Bu durumda,

$$L_r := \left\{ z \in G : \left|\widehat{\varphi}(z)\right| = r < 1 \right\},\ L_R := \left\{ z \in \Omega : |\Phi(z)| = R > 1 \right\},$$

eğrilerine sırasıyla *iç* ve *dış seviye eğrileri* denir.

**Tanım 3.2.8.** $\gamma$, denklemi $z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ olan düzgün eğri ve $f$ fonksiyonu $\gamma$ eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon ise,

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt,$$

integraline $f$ nin $\gamma$ eğrisi üzerindeki *eğrisel integrali* denir.

**Teorem 3.2.5. (Cauchy Teoremi)** $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $f \in A(G)$ olsun. $\gamma$, $\overline{int\,\gamma} \subset G$ koşulunu sağlayan ölçülebilir Jordan eğrisi olsun. Bu durumda

$$\int_\gamma f(z)dz = 0$$

dır [27].

**Teorem 3.2.6. (Cauchy İntegral Formülü)** $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $f \in A(G)$ olsun. $\gamma$, $\overline{int\,\gamma} \subset G$ koşulunu sağlayan ölçülebilir Jordan eğrisi ise her $z \in int\,\gamma$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_\gamma \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi$$

dır [27].

**Teorem 3.2.7. (Cauchy Türev Formülü)** $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f$ $D$'de analitik ve $G \Subset D$ sonlu sayıda parçalı düzgün eğri ile sınırlı bölge olsun. Bu durumda, $\forall z \in G$ ve her $n = 0,1,2,...$ için

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i}\int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}}d\xi$$

dır [27].

**Teorem 3.2.8. (Sonsuz Bölgeler için Cauchy İntegral Formülü)** $L$, yönü negatif, kapalı, ölçülebilir bir Jordan eğrisi olsun. $f(z) \in A(extL)$ ve

$$\lim_{z \to \infty} f(z) = A$$

ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = A \ , \ z \in \operatorname{int} L$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\xi)}{\xi - z}d\xi = -f(z) + A \ , \ z \in extL$$

dır [28].

**Teorem 3.2.9. (Maksimum-Modulus Prensibi)** $G \subset \mathbb{C}$ Jordan eğrisi ile sınırlı, sonlu bir bölge olsun. Eğer, $f \in A\left(\overline{G}\right)$ ve $f$ sabitten farklı ise $|f|$ maksimum değerini $\partial G$ ’de alır [27].

**Tanım 3.2.9.** $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $U : G \to \mathbb{C}$ ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon ve

$$\Delta := \frac{\partial^2}{\partial x^2} + \frac{\partial^2}{\partial y^2}$$

olmak üzere $\Delta U = 0$ ise $U(x, y)$ fonksiyonuna $G$ bölgesinde harmoniktir denir.

**Teorem 3.2.10. (Ortalama Değer Teoremi)** $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $U : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $G$ ’de harmonik ise, $B(z_0, r) \subset G$ olan her $z_0 \in G$ ve $r > 0$ için

$$U(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U\left(z_0 + re^{it}\right) dt$$

dır [27].

**Teorem 3.2.11.** $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge; $U : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $G$ ’de harmonik ve $B(z_0, r) \subset G$ olsun. O zaman

$$U(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(z_0, r)} U(z) d\sigma_z$$

dır [24].

$G \subset \mathbb{C}$, $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge; $h(z) \geq 0$, $G$ ’de tanımlı integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$0 < \iint_G h(z) d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlarsa $h$ ’a, $G$ üzerinde tanımlı *ağırlık fonksiyonu* denir.

**Tanım 3.2.10.** $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $h(z)$ $G$ ’de tanımlı bir ağırlık fonksiyonu ve $p > 0$ olsun. $G$ bölgesinde tanımlı, ölçülebilir ve

$$\iint_G h(z)\left|f(z)\right|^p d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı $L_p(h,G)$ ile gösterilir.

Eğer $h(z)\equiv 1$ ise $L_p(1,G)\equiv L_p(G)$ dir.

Ayrıca, $p\geq 1$ olmak üzere $L_p(G)$ uzayında norm

$$\left\|f\right\|_{L_p(G)} := \left(\iint_G \left|f(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}}$$

dır.

**Tanım 3.2.11.** $G\subset\mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $h(z)$, $G$'de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. $p>0$ olmak üzere $G$'de analitik ve

$$\left\|f\right\|_{L_p(G)} = \left(\iint_G h(z)\left|f(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı $A_p(h,G)$ ile gösterilir. Bu sınıf

$$A_p(h,G) := \left\{f : f\in A(G)\cap L_p(h,G)\right\}$$

ile de gösterilir. Özel halde $h(z)\equiv 1$ alınırsa, $A_p(G) := A_p(1,G)$ olarak gösterilir.

$p\geq 1$ olmak üzere $A_p(G)$ uzayında norm

$$\left\|f\right\|_{A_p(G)} := \left\|f\right\|_{L_p(G)}$$

biçiminde tanımlanır.

Yukarıdaki integral Lebesque anlamındadır. Ama gerektiğinde bu integrali Rieman integralinin limiti şeklinde tanımlayabiliriz. Bu durum aşağıdaki teoremle verilmektedir.

**Teorem 3.2.12.** Lebesque anlamındaki

$$I[f] := \iint_G \left|f(z)\right|^2 d\sigma_z$$

integrali Riemann anlamındaki integrallerin limiti olarak ifade edilebilir [16].

Lebesque integralinin özellikleri ve $|f+g|^2 \le \left(|f|+|g|\right)^2 \le 2\left(|f|^2+|g|^2\right)$ eşitsizliği yardımıyla

**i)** Her $f \in A_2(G)$ ve her $c \in \mathbb{C}$ için $cf \in A_2(G)$

**ii)** $f, g \in A_2(G)$ için $f+g \in A_2(G)$

önermelerinin sağlandığı görülür.

(i) ve (ii) den $A_2(G)$ uzayı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre kapalıdır.

O halde $A_2(G)$ bir lineer uzaydır.

**Teorem 3.2.13.** $f \in A_2\left(G\right)$, $\delta\left(z_0\right) := d\left(z_0, \partial G\right)$ olmak üzere

$$\left|f\left(z_0\right)\right|^2 \le \frac{1}{\pi\delta^2\left(z_0\right)} I\left[f\right]$$

dir [16].

$f, g \in A_2(G)$ için

$$f\,\overline{g} = \frac{1}{2}|f+g|^2 + \frac{i}{2}|f+ig| - \frac{1+i}{2}|f|^2 - \frac{1+i}{2}|g|^2$$

özdeşliğinden yararlanarak

$$\iint_G f(z)\overline{g(z)}\,d\sigma_z < +\infty$$

olduğu kolayca görülür. O halde aşağıdaki tanım verilebilir.

**Tanım 3.2.12.** $f, g \in A_2(G)$ için

$$\left(f, g\right) := \iint_G f(z)\overline{g(z)}\,d\sigma_z \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan ifadeye $f$ ile $g$ nin **iç çarpımı** denir.

$A_2(G)$ uzayı (3.1)'de tanımlanan iç çarpım ile bir iç çarpım uzayıdır. Ayrıca,

$$\|f\|_{A_2(G)} := \sqrt{(f, f)} \tag{3.2}$$

normuna göre bir normlu uzaydır [3].

**Teorem 3.2.14.** $A_2(G)$ uzayı (3.2) normuna göre Banach uzayıdır [3].

**İspat:** $\{f_n\} \in A_2(G)$ bir Cauchy dizisi olsun. $f_n(z) - f_m(z)$ fonksiyonuna Teorem 3.2.13 uygulanırsa,

$$\left|f_n(z) - f_m(z)\right|^2 < \frac{\varepsilon}{\pi\delta^2}, \quad z \in B \subset G, \ \delta := dist(B, \partial G)$$

elde edilir. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin $G$ 'de düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul onun cauchy dizisi olmasıdır. Buna göre $\{f_n\}$ analitik fonksiyonlar dizisi $B \subset G$ kompaktında bir $F \in A(G)$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır yani;

$$\lim_{n\to\infty} f_n(z) = F(z), \quad z \in B \subset G.$$

Öte yandan $n, m \geq n_0$ için

$$\iint_B \left|f_n(z) - f_m(z)\right|^2 d\sigma_z \leq I\left[f_n - f_m\right] < \varepsilon$$

sağlanır. $m \to \infty$ limite geçilirse her $n \geq n_0$, her $B \subset G$ kompleks kümesi için

$$\iint_B \left|f_n(z) - F(z)\right|^2 d\sigma_z < \varepsilon$$

bulunur. $B \subset G$ keyfi kompakt olduğundan $\forall n \geq n_0$ için $I\left[f_n - F\right] \leq \varepsilon$ yani $F \in A(G)$ ve

$$\lim_{n\to\infty} \left\|f_n - F\right\|_{A_2(G)} = 0$$

dır.

Dolayısıyla $A_2(G)$ uzayından olan her Cauchy dizisi yakınsaktır ve limit fonksiyonu uzayın elemanıdır. Yani $A_2(G)$ uzayı Banach uzayıdır.

O halde Teorem 3.2.14.'ün sonucu olarak aşağıdaki teorem verilebilir.

**Teorem 3.2.15.** $A_2(G)$ lineer uzayı (3.1) iç çarpımıyla bir Hilbert uzayıdır [3].

**Teorem 3.2.16.** $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $p \geq 1,\ \dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p(G)$ , $g \in L_q(G)$ ise,

$$\text{i)}\ \left| \iint_G f(z)g(z)d\sigma_z \right| \leq \left( \iint_G |f(z)|^p\, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \left( \iint_G |g(z)|^q\, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{q}},$$

$f, g \in L_p(G)$ ise

$$\text{ii)}\ \left( \iint_G |f(z) + g(z)|^p\, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left( \iint_G |f(z)|^p\, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} + \left( \iint_G |g(z)|^p\, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Bu eşitsizliklere, sırasıyla, *Hölder Eşitsizliği* ve *Minkowski Eşitsizliği* adı verilir [29].

Özel halde $p = q = 2$ durumunda

$$\left| \iint_G f(z)g(z)d\sigma_z \right| \leq \left( \iint_G |f(z)|^2\, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}} \left( \iint_G |g(z)|^2\, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe *Shwarz Eşitsizliği* denir.

**Tanım 3.2.13.** $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $p \geq 1$ olsun.

**i)** $f \in ACL(G)$,

**ii)** $\forall B \Subset G$ kompakt kümesi için $f_x, f_y \in L_p(B)$,

koşulları sağlanıyorsa $f$ fonksiyonuna $G$ bölgesinde $L_p -$ *türevlenebilirdir* denir.

**Teorem 3.2.17. (Green Formülü)** $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$, $L_1 -$türevlenebilir bir fonksiyon ise $D \subset G$ ölçülebilir sınırlı Jordan bölgesi için

$$\int_{\partial D} f(\xi)\, d\xi = 2i \iint_D f_{\bar{\xi}}(\xi) d\sigma_\xi$$

dır [23].

## 3.3. YARI KONFORM DÖNÜŞÜM VE EĞRİLER

**Tanım 3.3.1.** $G, H \subset \mathbb{C}$ herhangi iki bölge; $f : G \to H$ ise $\forall z \in G$ için $J_f(z) := |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 > 0$ koşulunu sağlayan ve $C^1$ sınıfından olan bir homeomorfizm olsun. Eğer,

$$\sup_{z \in G} \frac{|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2}{|f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2} \leq K < \infty \tag{3.3}$$

ise $f$ fonksiyonuna $G$ bölgesi üzerinde tanımlı bir $K-$*yarı konform dönüşüm*, $K \geq 1$ sayısına da $f$ dönüşümünün *yarı konformluk katsayısı* denir [8].

Tanımdan görülür ki $f$ fonksiyonu $G$ bölgesinde $K-$yarı konform dönüşüm ve $k := \dfrac{K-1}{K+1}$ ise her $z \in G$ için $\left|\dfrac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}\right| \leq k < 1$ dir.

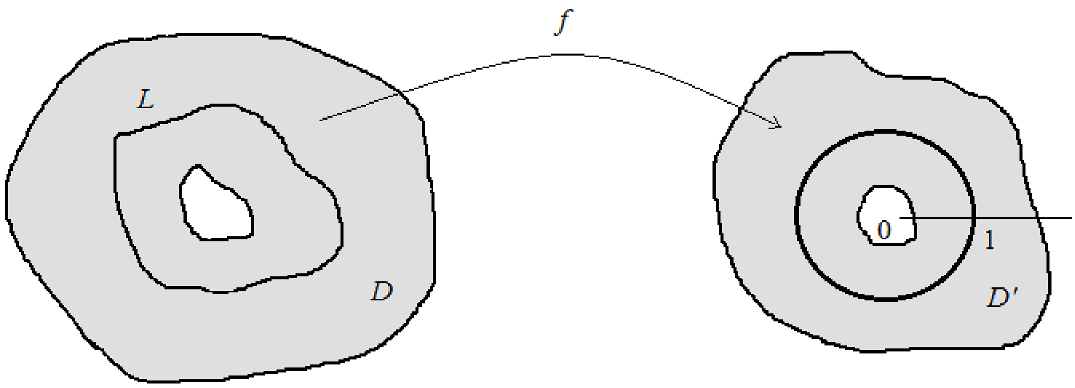
Yarı konform dönüşümün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir [8].

**i)** 1-yarı konform dönüşüm konformdur.

**ii)** $f_1$, $K_1-$yarı konform ve $f_2$, $K_2-$yarı konform dönüşümleri verilsin. $f_1 \circ f_2$ bileşke dönüşümü $K_1 \cdot K_2-$yarı konformdur.

**iii)** $f$ dönüşümü $K-$yarı konform ise $f^{-1}$de $K-$yarı konformdur.

**Tanım 3.3.2.** $f : D \supset L \to D'$, $K-$yarı konform dönüşümü olmak üzere $f(L)$ çember (veya doğru parçası) ise $L$ eğrisine $K-$*yarı konform eğri* (veya $K-$*yarı konform yay*) denir [8]. (bkn. Şekil-1)




Şekil-1

$F(L)$, $L$'yi çember veya aralığa resmeden $f : D \supset L \to D'$ tüm homeomorfizmaların kümesi ve

$$K_L := \inf_{f \in F(L)} \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

olsun.

Eğer $K_L < \infty$ ise, $L$ eğrisine *yarı konform eğri* denir. Eğer $L$, $K-$yarı konform eğri ise

$$K_L \leq K \tag{3.4}$$

dır [30], [31].

$L$ eğrisi herhangi bir $K \geq 1$ sayısı için $K$-yarı konform eğri ise, o halde $L$ ye yarı konform eğri denir.

Tanım 3.3.2'de $D = \overline{\mathbb{C}}$ veya $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

**i)** $D = \overline{\mathbb{C}}$ durumunda Tanım 3.3.2'ye $K-$yarı konform eğrinin *global tanımı* denir ve yarı konformluk katsayısı (3.3) yardımıyla hesaplanır.

**ii)** $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ durumunda Tanım 3.3.2'ye $K-$yarı konform eğrinin *lokal tanımı* denir ve yarı konformluk katsayısı (3.4) yardımıyla hesaplanır.

**Teorem 3.3.1.** $L$ bir Jordan eğrisi, $z_1, z_2 \in L, z_1 \neq z_2$ keyfi noktalar ve $\ell(z_1, z_2) \subset L$, $z_1$ ile $z_2$ noktasına birleştiren küçük çaplı yay olsun. $L$ eğrisinin yarı konform eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in L, \\ z_3 \in \ell(z_1, z_2)}} \frac{|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2|} < \infty$$

olmasıdır [23].

**Uyarı 3.3.1.** Yarı konform eğriler sıfır açı içermez.

**Teorem 3.3.2.** $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ olmak üzere $L$ analitik yay veya eğri ise $L$'nin yarı konformluk katsayısı $K = 1$ dir [32].

**Tanım 3.3.3.** $L \subset \mathbb{C}$ bir Jordan eğrisi; $y : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü altında $y(intL) = extL$, $y(extL) = intL$ ve $\forall z \in L$ için $y(z) = z$ olsun. Eğer $\overline{y} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yarı konform ise $y$ dönüşümüne $L$ eğrisine göre *yarı konform yansıma* denir [8].

**Teorem 3.3.3.** $L \subset \mathbb{C}$ bir Jordan eğrisi olsun. $L$ eğrisine göre yarı konform yansımanın olması için gerek ve yeter şart $L$ eğrisinin yarı konform eğri olmasıdır [8].

**Uyarı 3.3.2.** "$a \prec b$" ve "$a \approx b$" sembolleriyle $c$, $c_1$, $c_2$ pozitif sabitler olmak üzere sırasıyla $a \leq c.b$ ve $c_1.a \leq b \leq c_2.a$ gösterilir. Burada $c, c_1, c_2$ sabitleri $a$ ve $b$ sayılarından bağımsızdır.

**Teorem 3.3.4.** $L$ eğrisi $K$-yarı konform eğri olsun. O zaman $L$ eğrisinin belli bir komşuluğunda sınırlı kısmi türevlere sahip ve $C^1$ sınıfından olan bir yarı konform yansıma vardır [8].

Özel olarak, $L$ eğrisinin belli bir komşuluğundaki her bir $z$ için

$$|y(z) - z'| \approx |z - z'| \;,\; z' \in L \tag{3.5}$$

sağlanır [8].

**Sonuç 3.3.1.** $L$ eğrisi $K$-yarı konform eğri, $\infty \notin L$, $G = int\,L$ ve $\Omega = ext\,L$ olsun. Bu durumda, $L$'ye göre $c_1(K)-$yarı konform $y(z)$ yansıması vardır ve bu yansıma;

**i)** $a \in G$ sabit bir nokta öyle ki, $a = y(\infty)$ olmak üzere; $y(z)$ yansıması $\overline{\mathbb{C}} \setminus (L \cup \{a\})$ bölgesinde sürekli türevlenebilir.

**ii)** Yeterince küçük $\delta > 0$ sayısı ve $B(a,\delta)$ için $\widetilde{B}(a,\delta) := y(B(a,\delta))$ olsun.

$$\overline{\mathbb{C}}_\delta := \overline{\mathbb{C}} \setminus \left( \overline{B(a,\delta)} \cup \overline{\widetilde{B}(a,\delta)} \right),$$

bölgesinde (3.6) sağlanır,

**iii)** Her $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus L$ için $|y_z| \le c(K,\delta),\ c(K,\delta)^{-1} \le |y_{\bar{z}}| \le c(K,\delta)$ ve $z \notin \overline{\mathbb{C}} \setminus L$ için

$$|y_z| \prec \begin{cases} |y(z)|^2, & z \in B(a,\delta) \\ |z-a|^{-2}, & z \in \widetilde{B}(a,\delta) \end{cases}$$

ve

$$|y_{\bar{z}}| \approx \begin{cases} |y(z)|^2, & z \in B(a,\delta) \\ |z-a|^{-2}, & z \in \widetilde{B}(a,\delta) \end{cases}$$

özelliklerine sahiptir [8].

$L = \partial G$ eğrisi, lokal anlamda $K-$yarı konform eğri olsun. $F$, $\Phi$, $f$ dönüşümleri yardımıyla $1 < R_0 \le 2$ ve $r_0 = R_0^{-1}$ sayısı için Tanım 3.3.2' deki $D$ bölgesi olarak [32]'de olduğu gibi $D := G_{R_0} \setminus G_{r_0}$ olarak seçilebilir. Burada $G_R := int\, L_R$ dir. Bu durumda $\alpha(\cdot) = f^{-1}\left\{\overline{(f(\cdot))^{-1}}\right\}$ dönüşümü $L$ eğrisine göre $K^2-$yarı konform yansımadır [32]. Yani, $\alpha(\cdot)$ dönüşümü, $L$ eğrisinin üzerindeki noktaları değiştirmeyen ve herhangi $1 < \widetilde{R} < R_0$, $r_0 < \widetilde{r} < 1$ sayıları için

$$\alpha(G_{\widetilde{R}} \setminus \overline{G}) \subset G \setminus \overline{G}_{r_0}, \quad \alpha(G \setminus G_{\widetilde{r}}) \subset G_{R_0} \setminus \overline{G}$$

koşullarını sağlayan bir $K^2-$yarı konform dönüşümdür. Bu durumda, Sonuç 3.3.1'e benzer şekilde $L$'ye göre

$$|\alpha^*(z) - z_1| \approx |z - z_1|, \quad z_1 \in L,\ z \in D$$

koşulunu sağlayan $\alpha^*(\cdot)$, $c(K)-$yarı konform dönüşüm vardır. Böylece [30]'dan yararlanarak genelliği kaybetmeksizin Tanım 3.3.2'deki $D$ bölgesinde

$$\alpha(z)=\alpha^*(z),\ z\in D$$

olduğu kabul edilebilir.

**Tanım 3.3.4.** Eğer, her $\psi:\{w:|w|<1\}\to G$ konform ve yalınkat dönüşümü $\overline{\mathbb{C}}\to\overline{\mathbb{C}}$'a $K$-yarı konform $\left(K=\dfrac{1+k}{1-k}\right)$ dönüşümüne kadar genişletilebilirse $G$ bölgesine $k$-yarıdaire $(0\le k<1)$ denir.

Eğer, herhangi bir $0\le k<1$ için $G$ bölgesi ($L$ eğrisi) $k$-yarıdaire ($k$-yarıçember) ise $G$ bölgesine ($L$ eğrisine) yarıdaire (yarıçember) denir.

$R>1$ için $L^*:=y(L_R)$, $G^*:=intL^*,\Omega^*:=extL^*$ olsun. $\Phi_R:\Omega^*\to\Delta$ konform bir dönüşüm olsun $\left(\Phi_R(\infty)=\infty,\Phi_R'(\infty)>0\right)$. Bu durumda $|z-t|=d(z,L_R)$ olacak şekilde $z\in L^*$ ve $t\in L$ için

$$d(z,L)\asymp d(t,L_R)\asymp d(z,L_R^*)$$

$$|\Phi_R(z)|\le|\Phi_R(t)|\le 1+c(R-1) \tag{3.6}$$

dir. Burada $c$ bir sabittir [32].

**Lemma 3.3.1.** $L$, $K-$yarı konform eğri $z_1\in L$ ve $z_2,\ z_3\in G\cap\{z:|z-z_1|\le$ $cd(z_1,L_{R_0})\}$ $w_j=F(z_j),\ j=1,2,3$ $\left(z_2,z_3\in\Omega\cap\{z:|z-z_1|\le cd(z_1,L_{r_0})\},\ w_j=\Phi(z_j),\quad j=1,2,3\right)$olsun.

Eğer $|z_1-z_2|\prec|z_1-z_3|$ ise

**i)** $|w_1-w_2|\prec|w_1-w_3|$,

**ii)** $\left|\dfrac{w_1-w_3}{w_1-w_2}\right|^{K^{-2}}\prec\left|\dfrac{z_1-z_3}{z_1-z_2}\right|\prec\left|\dfrac{w_1-w_3}{w_1-w_2}\right|^{K^2}$,

sağlanır [33].

**Sonuç 3.3.2.** Lemma 3.3.1'de $z_3 \in L_{r_0} \left( z_3 \in L_{R_0} \right)$ ise

$$\left| w_1 - w_2 \right|^{K^2} \prec \left| z_1 - z_2 \right| \prec \left| w_1 - w_2 \right|^{K^{-2}} \tag{3.7}$$

dir.

**Lemma 3.3.2.** $G$, $0 \le k < 1$ için bir $k$-yarıdaire olsun. Bu durumda, $\forall\, w_1, w_2 \in \overline{\Omega}$ için

$$\left| \Psi\left( w_1 \right) - \Psi\left( w_2 \right) \right| \succ \left| w_1 - w_2 \right|^{1+k}$$

dir [8].

**Sonuç 3.3.3.** (3.7)'nin sol tarafı keyfi continuum için

$$d\left( z_1, L \right) \succ \left( R - 1 \right)^2 \tag{3.8}$$

biçimindedir [8].

Yarıkonform eğriyle sınırlı bölgeler için Cauchy İntegral Formülü'nün benzeri Belyi tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir [8].

**Teorem 3.3.5.** $f \in A\left( \overline{G} \right)$ ve $y$, $L = \partial G$'ye göre Sonuç 3.3.1. deki özellikleri sağlayan yarıkonform yansıma olmak üzere, $\forall z \in G$ için,

$$f\left( z \right) = -\frac{1}{\pi} \iint_G \frac{f\left( \xi \right) y_{\overline{\xi}}}{\left( y\left( \xi \right) - z \right)^2} d\sigma\left( \xi \right)$$

dir [8].

$G$ kümesi $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge, $\left\{ z_i \right\}_{i=1}^{m}$, $i = \overline{1, m}$, $L$ üzerindeki noktalar kümesi ve $\gamma_i > -2$ olmak üzere,

$$h\left( z \right) = h_0\left( z \right) \prod_{i=1}^{m} \left| z - z_i \right|^{\gamma_i} \tag{3.9}$$

ağırlık fonksiyonu olsun. Burada $h_0\left( z \right)$, $G$ de tanımlı ve $\exists c_0 > 0$ vardır öyle ki, $\forall z \in G$ için,

$$h_0\left( z \right) \ge c_0$$

sağlar.

**Lemma 3.3.3.** $p>0$ olmak üzere $f$ fonksiyonu $|z|>1$ de analitik ve sonsuzlukta en fazla $n$ 'inci dereceden kutup yerine sahip olsun. O halde $1<R_1<R_2$ koşulunu sağlayan $R_1$ ve $R_2$ için

$$\|f\|_{A_p(R_1<|z|<R_2)} \leq \left(2\frac{R_2-R_1}{R_1-1}\right)^{1/p} R_2^{n+\frac{2}{p}} \|f\|_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

elde edilir.

**İspat:** Riesz teoremine göre [34], $R_1 \leq \rho < R_2$, $1<s\leq R_1$ koşullarını sağlayan her $\rho$ ve $s$ için,

$$\int_{|z|=\rho} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \leq \int_{|z|=R_1} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \tag{3.10}$$

ve

$$\int_{|z|=R_1} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \leq \int_{|z|=s} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \tag{3.11}$$

yazılır.

(3.10) $\rho$ 'ya göre $R_1$ 'den $R_2$ 'ye ve (3.11) $s$ 'ye göre 1'den $R_1$ 'e integrallenirse,

$$\iint_{R_1<|z|<R_2} |f(z)|^p\, d\sigma_z \leq \frac{R_2^{np+2}-R_1^{np+2}}{R_1^{np+2}-1} \iint_{1<|z|<R_1} |f(z)|^p\, d\sigma_z \tag{3.12}$$

elde edilir.

$$S := \frac{R_2^{np+2}-R_1^{np+2}}{R_1^{np+2}-1} \tag{3.13}$$

seçelim.

Kesrin pay ve paydasına Lagrange teoremi [35] uygulanırsa, bazı $r_1$, $1<r_1<R_1$ ve $r_2$, $R_1<r_2<R_2$ için,

$$S = \frac{(np+2)r_2^{np+2}(R_2-R_1)}{(np+2)r_1^{np+2}(R_1-1)}$$

elde edilir. Buradan, $\frac{1}{r_1}<1$ ve $r_2<R_2$ olmasından,

$$S < \frac{R_2 - R_1}{R_1 - 1} R_2^{np+1} \tag{3.14}$$

dir. (3.12) ve (3.14) kullanılarak

$$\|f\|^p_{A_p(R_1<|z|<R_2)} = \iint\limits_{R_1<|z|<R_2} |f(z)|^p \, d\sigma_z \le S \iint\limits_{1<|z|<R_1} |f(z)|^p \, d\sigma_z = S\|f\|^p_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

$$\left(\|f\|^p_{A_p(R_1<|z|<R_2)}\right)^{1/p} \le \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 - 1}\right)^{1/p} \left(R_2^{np+1}\right)^{1/p} \left(\iint\limits_{1<|z|<R_1} |f(z)|^p \, d\sigma_z\right)^{1/p}$$

$$\|f\|^p_{A_p(R_1<|z|<R_2)} \le \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 - 1}\right)^{1/p} R_2^{n+1/p} \|f\|_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

**Lemma 3.3.4.** $L$ bir $K$-yarıkonform eğri, $h(z)$ ise (3.9) daki gibi tanımlanmış olsun. O halde, keyfi $P_n(z) \in \wp_n$, herhangi $R > 1$ ve $n = 1, 2, ...$ için

$$\|P_n\|_{A_p\left(h, G_{1+c(R-1)}\right)} \le c_1 R^{n+\frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h,G)} \ , \ p > 0 \tag{3.15}$$

dir. Burada $c, c_1$ , $n$ ve $R$ den bağımsız sabitlerdir.

**İspat:** İspat birkaç adımda verilecektir. İlk olarak bazı $c > 0$ için

$$\|P_n\|_{A_p(h, G_R \setminus G)} \prec \left[1 + c(R-1)\right]^{n+\frac{2}{p}} \|P_n\|_{A_p\left(h, G \setminus G^*\right)} \tag{3.16}$$

değerlendirmeyi göstermemiz gereklidir. Gösterelim ki $\rho_1 < \rho_2$ olacak şekilde $\rho_1, \rho_2$ sayılarını öyle seçebiliriz ki

$$G^*_{\rho_1} \subset G \tag{3.17}$$

$$G_R \subset G^*_{\rho_2} \tag{3.18}$$

$$\rho_1 \asymp R - 1 \tag{3.19}$$

$$\rho_2 \asymp R - 1 \tag{3.20}$$

sağlansın. Gerçekten, $z \in L^*$, $\tilde{z} = y(z)$ olmak üzere, $\rho_1, \rho_2$ (3.17) ve (3.18)'i sağlayan keyfi sayılar olsun. Sırasıyla

$$d\left(z, L^*_{\rho_1}\right) = |z - z_1|; \ \ d(z, L) = |z - z_2| \ \text{ve} \ d\left(z, L^*_{\rho_2}\right) = |z - z_3|$$

formüllerine göre $z_1 \in L^*_{\rho_1}$, $z_2 \in L$ ve $z_3 \in L^*_{\rho_2}$ noktaları tanımlansın. Her $z \in L^*$ ve $t \in L$ için $|z-t| = d(z, L_R)$ olmak üzere

$$d(z,L) \asymp d(t, L_R) \asymp d(z, L^*_R)$$

bağıntısından,

$$c_3 d(z_2, L_R) \le d(z,L) \le c_4 d(z_2, L^*_R) \tag{3.21}$$

olacak şekilde $z$ ve $R$ den bağımsız $c_3$ ve $c_4$ sayıları vardır.

$L^*$ bir yarıçember olduğu için $\Phi_R$ fonksiyonuna Lemma 3.3.1 uygulanarak

$$\left|\frac{z-z_2}{z-z_1}\right| \ge c_5 \left|\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)}{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_1)}\right|^{\varepsilon_1} \ge c_6 \left(\frac{|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)|}{\rho_1 - 1}\right)^{\varepsilon_1}$$

elde edilir. Buradan

$$|z-z_1| \ge c_6^{-1} \left(\frac{\rho_1 - 1}{|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)|}\right)^{\varepsilon_1} |z-z_2| \tag{3.22}$$

bulunur.

$y_R(z)$ için D-özelliğine [36] sahip olduğundan,

$$|z-z_2| \ge c_3 d(z_2, L_R) \ge c_7 \left|\tilde{z} - z_2\right|$$

elde edilir ve Lemma 3.3.1. e göre

$$|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)| \ge c_8 \left|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)\right| \ge c_8 (R-1)$$

bulunur. (3.22) den

$$|z-z_1| \le c_6^{-1} \left(\frac{\rho_1 - 1}{c_8 (R-1)}\right)^{\varepsilon_1} |z-z_2|$$

elde edilir. Böylece $c_9 = \frac{1}{2} c_8 . c_6^{-\varepsilon_1}$ olmak üzere, (3.17) ve (3.19)’a uygun olarak,

$$\rho_1 = 1 + c_9 (R-1) \tag{3.23}$$

yazılabilir.

Şimdi $\rho_2$ yi tanımlayalım. $\Phi_R$ ye Lemma 3.3.1. uygulanmasıyla

$$\left|\frac{z-\tilde{z}}{z-z_3}\right| \le c_{10} \left|\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})}{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_3)}\right|^{c}$$

elde edilir. $\left|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_3)\right| \succeq \rho_2-1$ olmasından,

$$|z-z_3| \geq c_{11}\left(\frac{\rho_2-1}{\left|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})\right|}\right)^c |z-\tilde{z}| \tag{3.24}$$

elde edilir.

$$\left|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})\right| \leq c_{12}\left|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)\right|$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\left|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})\right| &\leq \left|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)\right|+\left|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)\right| \\ &\leq c_{12}+1\left|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)\right| \leq c_{13}(R-1)\end{aligned}$$

bulunur ve (3.24) den

$$|z-z_3| \geq c_{11}\left(\frac{\rho_2-1}{c_{13}(R-1)}\right)^c |z-\tilde{z}|$$

elde edilir. $c_{14}=c_8.c_6^{-\varepsilon_1}+c_{13}.c_{11}^{c^{-1}}$ olmak üzere,

$$\rho_2=1+c_{14}(R-1) \tag{3.25}$$

seçerek (3.18) ve (3.20) koşulunu sağlayan $\rho_2$ elde edilmiş olur.

Şimdi (3.16) yı gösterelim. Bunun için $h(z)$ ağırlık fonksiyonunun singüler noktalarına göre aşağıdaki şekilde Blashke fonksiyonunu oluşturalım.

$$B_R(z)=\prod_{i=1}^{m} B_R^i(z):=\prod_{i=1}^{m}\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{1-\overline{\Phi_R(z_i)}\Phi_R(z)} \quad , \quad z\in\Omega^* \tag{3.26}$$

$B_R(z_i)=0$ ve $\left|B_R(z)\right|\equiv 1$, $z\in L^*$ olduğu kolayca görülür.

$p>0$ ve $R>1$ için

$$f_R(w):=h_0\left(\Psi_R(w)\right)\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\Psi_R(w)-\Psi_R(w_i)}{wB_R^i\left(\Psi_R(w)\right)}\right]^{\frac{\gamma_i}{p}} P_n\left(\Psi_R(w)\right)\left[\Psi_R'(w)\right]^{\frac{2}{p}} , \ w=\Phi_R(z)$$

fonksiyonunu oluşturalım. $f_R$ fonksiyonu $\Delta$ de analitik ve $w=\infty$ da en fazla $n$ inci mertebeden kutup yerine sahiptir. Lemma 3.3.3.'e göre

$$\left\|f_R\right\|_{A_p(\rho_1<|w|<\rho_2)} \leq \left(2\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\right)^{1/p}\rho_2^{\,n+\frac{2}{p}}\left\|f_R\right\|_{A_p(1<|w|<\rho_1)},$$

veya

$$\iint_{G_R \setminus G} h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

$$\leq \iint_{G^*_{\rho_2} \setminus G^*_{\rho_1}} h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

$$\leq 2\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\rho_2^{pn+2}\iint_{G^*_{\rho_1} \setminus G^*} h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

$$\leq 2\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\rho_2^{pn+2}\iint_{G \setminus G^*} h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

elde edilir. (3.23) ve (3.25) ile

$$\iint_{G_R \setminus G} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z \tag{3.27}$$

$$\preceq \prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\max_{z\in\overline{G_R \setminus G}}\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right|}{\min_{z\in\overline{G\setminus G^*}}\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right|}\right]^{\gamma_i}\rho_2^{pn+2}\iint_{G\setminus G^*} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

elde edilir.

$$\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right| = \left|\Phi_R(z)\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{\frac{1}{\Phi_R(z_i)}-\Phi_R(z)}\cdot\frac{1}{\Phi_R(z_i)}\right|$$

$$= \left|\frac{\Phi_R(z)}{\Phi_R(z_i)}\right|\cdot\left|\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{\Phi_R(z_i)-\Phi_R(z)}\right| = \left|\frac{\Phi_R(z)}{\Phi_R(z)}\right|$$

olduğu için ve (3.27) den

$$\iint_{G_R \setminus G} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

$$\prec \prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\max_{z\in\overline{G_R \setminus G}}\left|\Phi_R(z)\right|}{\min_{z\in\overline{G\setminus G^*}}\left|\Phi_R(z)\right|}\right]^{\gamma_i}\rho_2^{pn+2}\iint_{G\setminus G^*} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

$$\prec \rho_2^{pn+2}\iint_{G\setminus G^*} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

elde edilir. $\rho_2$ ve $R$ simetrik olduğundan ispat tamamlanır.

Bölgenin genişlemesine bağlı olarak polinomun artışının bulunması ile ilgili aşağıdaki lemmayı verebiliriz.

**Lemma 3.3.5. (Bernstein-Walsh Lemması)** $\Re$ tümleyeni basit bağlantılı bölge olan keyfi bir continuum ve $L_R$, $\Re$ 'nin dış seviye eğrisi olsun. Bu durumda bir $P_n(z) \in \wp_n$ verildiğinde bir $M > 0$ için

$$\max_{z \in \Re} |P_n(z)| \leq M$$

sağlanıyorsa, her $R > 1$ ve $\forall z \in \overline{G}_R$ için

$$|P_n(z)| \leq MR^n$$

eşitsizliği sağlanır [1].

$R > 1$ için $L_R := \{z : |\Phi(z)| = R\}$, $G_R := \operatorname{int} L_R$, $\Omega_R := extL_R$ olsun. O halde (1.2)

$$\|P_n\|_{C(\overline{G}_R)} \leq R^n \|P_n\|_{C(\overline{G})} \tag{3.28}$$

şeklinde yazılabilir. (3.28) değerlendirmesinin $L_p(L)$ uzayında benzeri

$$\|P_n\|_{L_p(L_R)} \leq c_1 R^{n+\frac{1}{p}} \|P_n\|_{L_p(L)} \quad , \quad p > 0$$

dir [3].

**Lemma 3.3.6.** $L$ yarıkonform ve ölçülebilir bir eğri olsun. O halde, herhangi bir $P_n \in \wp_n$ için,

$$|P_n(z)| \leq \frac{c(L)}{d(z,L)} \sqrt{n} \|P_n\|_{A_2(G)} |\Phi(z)|^{n+1} \quad , \quad z \in \Omega \tag{3.29}$$

dir.

**İspat:** $P_n \in \wp_n$ ve $z \in \Omega$ sabit bir nokta olsun. O halde $\frac{P_n}{\Phi^{n+1}}$ fonksiyonu $\Omega$ da analitik, $L = \partial G$ de sürekli ve $z = \infty$ da sıfırdır. Böylece sonsuz bölgeler için

Cauchy teoreminden ve $y(z)$ nin $\forall z \in L$ için $y(z)=z$ ve $\forall z \in \mathbb{C}$ için $y(y(z))=z$ özelliğinden, $g(\zeta):=\dfrac{P_n(\zeta)}{(\zeta-z)}$ olmak üzere

$$\frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)}=-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}d\zeta=-\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{\left(\Phi^{n+1}\circ y\right)(\zeta)}d\zeta$$

elde edilir. $\dfrac{1}{\Phi^{n+1}\circ y}$ fonksiyonu $\overline{G}$ da sürekli ve $G$ de $L^2$-türevlere sahiptir. O halde Green formülüyle,

$$\frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)}=-\frac{1}{\pi}\iint_G \left[\frac{g(\zeta)}{\Phi^{n+1}\circ y(\zeta)}\right]_{\bar{\zeta}} dA(\zeta)$$

$$=\frac{n+1}{\pi}\iint_G g(\zeta)\frac{\Phi'(y(\zeta))}{\left(\Phi^{n+2}\circ y\right)(\zeta)}y_{\bar{\zeta}}dA(\zeta) \qquad (3.30)$$

elde edilir. Lemma 3.3.1 kullanılarak

$$\iint_G \frac{\left|\Phi'(y(\zeta))\right|\left|y_{\bar{\zeta}}\right|}{\left|\left(\Phi^{n+2}\circ y\right)(\zeta)\right|^2}dA(\zeta)\leq-\frac{1}{1-k^2}\iint_G \frac{\left|\Phi'(y(\zeta))\right|^2\left|J(y(\zeta))\right|^2}{\left|\left(\Phi^{n+2}\circ y\right)(\zeta)\right|^2}dA(\zeta)$$

$$=-\frac{1}{1-k^2}\iint_\Omega \frac{\left|\Phi'(t)\right|^2}{\left|\Phi^{n+2}(\zeta)\right|^2}dA(t)$$

$$=-\frac{1}{1-k^2}\iint_\Delta \frac{dA(w)}{\left|w^{n+2}\right|^2}=-\frac{1}{1-k^2}\frac{\pi}{(n+1)}$$

elde edilir. Buradan,

$$\iint_G \left|g(\zeta)\right|^2 dA(\zeta)\leq\frac{\left\|P_n\right\|_{L_2(G)}^2}{\left(dist(z,L)\right)^2}$$

ve (3.30)'a Cauchy Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla ispat tamamlanır.

**Lemma 3.3.7.** $L$ bir $K$-yarıkonform eğri ve $P_n(z)\in\wp_n$, $P_n(z_0)=0$ olsun. O halde,

$$\|P_n\|_{C(\overline{G})} \prec \|P_n'\|_{A_p(G)} \times \begin{cases} 1 & , \; p>2 \\ \sqrt{\log n} & , \; p=2 \\ n^q & , \; 0<p<2 \end{cases}$$

dir [37].

**Tanım 3.3.5.** $G$ bir bölge ve $L := \partial G$ olsun. Eğer

i) $L$ bir yarıçember,

ii) $\Phi \in Lip\alpha$, $0<\alpha\le 1$,

koşulları sağlanırsa $G$ bölgesine $Q_\alpha$ sınıfındandır denir.

**Tanım 3.3.6.** $G$ bir bölge ve $L := \partial G$ olsun. Eğer

i) $L$ bir yarıçember,

ii) $\Phi \in Lip\alpha$, $z\in\overline{\Omega}$ ve $\Psi \in Lip\beta$, $|w|\ge 1$, $0<\alpha,\beta\le 1$,

koşulları sağlanırsa $G$ bölgesine $Q_\alpha^\beta$ sınıfındandır denir.

**Teorem 3.3.6.** $P_n(z)\in\wp_n$ ve $1\le p<\infty$ olsun. $G\in Q_\alpha$, $\frac{1}{2}<\alpha\le 1$ ve (3.9) da tanımlanan $h(z)$'de $\forall i$ için $\gamma_i = 0$ olsun. O halde

$$\|P_n\|_{C(\overline{G})} \le c.n^{\frac{2}{\alpha p}} \|P_n\|_{A_p(h,G)}$$

dir. Burada $c = c(G,h,p)$ dir [14].

Her $n\in\mathbb{N}$ için $d_n$ sayısı

$$d_n := \inf\left\{ |z-\xi| : z\in\partial G, |\Phi(\xi)| = 1+\frac{1}{n} \right\},$$

biçiminde tanımlansın.

**Teorem 3.3.7.** $G\subset\mathbb{C}$ ölçülebilir Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge olsun. $0<p<q<\infty$ olmak üzere,

$$\|P_n\|_{A_q(\partial G)} \le 2^{1-p/q} e^{1/p-1/q} d_n^{\;1/q-1/p} \|P_n\|_{A_p(\partial G)}$$

dir [18].

**Teorem 3.3.8.** $G \subset \mathbb{C}$ bir yarıdaire olsun. Bu durumda,

$$\left\|P_n\right\|_{A_q(G)} \leq 2^{1-p/q} C^{1/p-1/q} d_n^{\,2(1/q-1/p)} \left\|P_n\right\|_{A_p(G)}, \quad 0 < p < q \leq \infty$$

dir [18].

**Lemma 3.3.8.** $G$ , bir yarıdaire ve $P_n(z) \in \wp_n$ , $\deg P_n \leq n$ keyfi bir polinom olsun. Herhangi $R = 1 + \dfrac{c}{n}$ ve $n = 1, 2, \ldots$ , $m = 0, 1, 2, \ldots$, için $c_1 := c_1(G, c) > 0$ vardır öyle ki,

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_{C(\overline{G})} \leq c_1 \left\|P_n^{(m)}\right\|_{C\left(\overline{G^*}\right)}$$

dir [38].

# 4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

## 4.1. $Q_\alpha$ , $Q_\alpha^\beta$ SINIFINDAN OLAN BÖLGELERDE BERNSTEİN-WALSH TİPİ DEĞERLENDİRMELER

Bu kısımda (1.2) eşitsizliğine benzer eşitsizlikler $G$ bölgesinin $Q_\alpha$ ve $Q_\alpha^\beta$ sınıfından olması durumunda incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Aynı zamanda elde edilen sonuçlar (3.29) ile karşılaştırılarak hangi durumlarda daha iyi olduğu belirtilmiştir.

**Teorem 4.1.1.1.** $G$ Jordan eğrisiyle sınırlı bir bölge olsun. O halde, her bir $P_n \in \wp_n$ ve $R > 1$ için,

$$\left|P_n(z)\right| \le \frac{c_4}{d(L, L_R)} \left\|P_n\right\|_{A_2(G_R)} \left|\Phi(z)\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \Omega \tag{4.1}$$

dir.

Yarıkonform eğri ile sınırlı bölgelerde her $R = 1 + \dfrac{c}{n}$ için [33] deki değerlendirmeye göre,

$$\left\|P_n\right\|_{A_2(G_R)} \le \left\|P_n\right\|_{A_2(G)}$$

sağlandığından aşağıdaki sonuç elde edilir.

**Teorem 4.1.1.2**. $G$ yarıkonform eğriyle sınırlı bir bölge olsun. O halde, her bir $P_n \in \wp_n$ için,

$$\left|P_n(z)\right| \le \frac{c_4}{d\left(L, L_{1+\frac{c}{n}}\right)} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \left|\Phi(z)\right|^{n+1} \quad z \in \Omega \tag{4.2}$$

dir.

**Sonuç 4.1.1.1.** $c > 0$ olmak üzere $z \in \overline{G}_{1+\frac{c}{n}} \cap \Omega$ için (4.2) ,(3.29)'dan daha iyidir.

Şimdi daha geniş fonksiyonel özelliklere sahip bölgelerdeki sonuçları verelim.

**Teorem 4.1.1.3.** $G \in Q_\alpha^\beta$, $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$, $0 < \beta \le 1$ olsun. O halde, her bir $P_n \in \wp_n$ için,

$$\left|P_n(z)\right| \le \frac{c_6}{d(z,L)} n^\mu \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \left|\Phi_{1+\frac{1}{n}}(z)\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \Omega \tag{4.3}$$

dir. Burada $\mu := \alpha^{-1} - \beta$ dir.

**Sonuç 4.1.1.2.** $\alpha \ge \frac{2}{3}$ ve $\beta \ge \frac{2-\alpha}{2\alpha}$ sayıları için $G \in Q_\alpha^\beta$ olsun. O halde $L$ den uzaktaki $z \in \Omega$ noktaları için (4.3), (3.29) dan daha iyidir.

(4.3) de $\alpha \ge \frac{2}{3}$ ve $\beta \ge \frac{2-\alpha}{2\alpha}$ olması durumunda $\mu \le \frac{1}{2}$ olacaktır. Bu durumda $n$ nin kuvveti $\frac{1}{2}$ veya $\frac{1}{2}$ den daha küçüktür. Böylece (4.3), (3.29) dan daha iyi bir sonuç olacaktır.

**Teorem 4.1.1.4.** $G \in Q_\alpha$, $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$ olsun. Bu durumda her bir $P_n \in \wp_n$ için,

$$\left|P_n(z)\right| \le c_7 n^\nu \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \left|\Phi_{1+\frac{1}{n}}(z)\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \Omega \tag{4.4}$$

dir. Burada $\nu := \alpha^{-1}$ dir.

**Teorem 4.1.1.5.** $G \in Q_\alpha^\beta$, $\frac{1}{2} \le \alpha \le 1$, $0 < \beta \le 1$ olsun. O halde her bir $P_n \in \wp_n$ için,

$$\left|P_n(z)\right| \le \frac{c_8}{d(z,L)} n^\mu \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \left|\Phi(z)\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \overline{\Omega}_{1+\frac{1}{n}} \tag{4.5}$$

dir. Burada $\mu := \alpha^{-1} - \beta$ dır.

**Sonuç 4.1.1.3.** $\alpha \geq \frac{2}{3}$ ve $\beta \geq \frac{2-\alpha}{2\alpha}$ için $G \in Q_\alpha^\beta$ olsun. O halde herhangi bir $z \in \overline{\Omega}_{1+\frac{1}{n}}$ için (4.5), (3.29) den daha iyidir.

**Teorem 4.1.1.6.** $G \in Q_\alpha$, $\frac{1}{2} \leq \alpha \leq 1$ olsun. Bu durumda her bir $P_n \in \wp_n$ için,

$$\left|P_n(z)\right| \leq c_9 n^\nu \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \left|\Phi(z)\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \overline{\Omega}_{1+\frac{1}{n}} \tag{4.6}$$

dir. Burada $\nu := \alpha^{-1}$ dir.

**Sonuç 4.1.1.4.** **a)** Eğer $G$ konveks ise $\Psi \in Lip1$ [39,p.48] ve $\Phi \in Lip1$ [16,p.582] dir. Böylece, (4.3)(4.6) da $\mu = 0$ ve $\nu = 1$ alabiliriz.

**b)** $L := \partial G$ sürekli eğriliğe sahip düzgün bir eğri ise, tüm $0 < \alpha, \beta < 1$ için $G \in Q_\alpha^\beta$ dir . Ve (4.3)(4.6) keyfi küçük $\mu > 0$ ve keyfi $\nu < 1$ için sağlanır.

**c)** $G$, $L$ şekilli bir bölge ise $\Phi \in Lip\, 2/3$ ve $\Psi \in Lip\, 1/2$ dir. Böylece, (4.3) ve (4.6) $\mu = 1$ ve $\nu = \frac{2}{3}$ için sağlanır.

**d)** $L$, yarı düzgün bir eğri ise, bu durumda $\alpha = \frac{1}{2}\left(1 - 1/\pi \arcsin 1/c\right)^{-1}$ için $\Phi \in Lip\alpha$ ve $\beta = 2/(1+c)^2$ için $\Psi \in Lip\beta$ dir [40],[41].

**e)** $L$, $c-$yarıkonform ise, $\alpha = \frac{\pi}{2\left(\pi - \arcsin 1/c\right)}$ için $\Phi \in Lip\alpha$ ve $\beta = \frac{2\left(\arcsin 1/c\right)^2}{\pi\left(\pi - \arcsin 1/c\right)}$ için $\Psi \in Lip\beta$ dır[42]. Aynı zamanda $L$ asimptotik konform bir eğri ise tüm $0 < \alpha, \beta < 1$ için $\Phi \in Lip\alpha$ ve $\Psi \in Lip\beta$ dır. Bu durumda da $\mu$ ve $\nu$ hesaplanabilir [42].

## 4.2. $K$-YARIKONFORM EĞRİYLE SINIRLI BÖLGELERDE BERNSTEİN-WALSH TİPİ DEĞERLENDİRMELER

Bu kısımda (1.2) eşitsizliğine benzer eşitsizlikler $G$ bölgesinin $K$-yarıkonform eğriyle sınırlı bir bölge olması durumunda incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Aynı zamanda elde edilen sonuçlar (3.29) ile karşılaştırılarak hangi durumlarda daha iyi olduğu verilmiştir.

**Teorem 4.2.1.1.** $L$, $K$-yarıkonform eğri olsun. O halde her bir $P_n \in \wp_n$ için

$$\left|P_n(z)\right| \leq \frac{c_6}{d(z,L)} n^{\mu-\mu^{-1}} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \left|\Phi_{1+1/n}\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \Omega \tag{4.7}$$

elde edilir. Burada $\mu := \min\left\{2, K^4\right\}$ dir.

**Sonuç 4.2.1.1.** $K \leq \sqrt[4]{\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}}$ ve $z \in \Omega$ için $L$ den uzak noktalarda (4.7), (3.29) den daha iyidir.

$K \leq \sqrt[4]{\dfrac{1+\sqrt{17}}{4}}$ olması durumunda $\mu \leq \dfrac{1+\sqrt{17}}{4}$ olur. Böylece (4.7) de $n$ nin kuvveti $\dfrac{1}{2}$ den küçük bir değer olacaktır. Bu ise (4.7) nin daha iyi bir sonuç olduğunu gösterir.

**Teorem 4.2.1.2.** $L$, $K$-yarıkonform eğri olsun. O halde her bir $P_n \in \wp_n$ için

$$\left|P_n(z)\right| \leq c_7 n^{\mu} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \left|\Phi_{1+1/n}(z)\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \Omega \tag{4.8}$$

dir. Burada $\mu := \min\left\{2, K^4\right\}$ dir.

Şimdi sağ tarafta $\Phi_R$'yi $\Phi$ ile değiştirelim. Bu durumda $\Omega$'dan $\Omega_R$'ye geçeceğiz. Buna uygun olarak aşağıdaki sonuçları verebiliriz.

**Teorem 4.2.1.3.** $L$, $K$-yarıkonform eğri olsun. O halde her bir $P_n \in \wp_n$ için,

$$\left|P_n(z)\right| \le \frac{c_8}{d(z,L)} n^{\nu-\nu^{-1}} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \left|\Phi(z)\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \overline{\Omega}_{1+1/n} \tag{4.9}$$

dir. Burada $\nu := \min\left\{2, K^2\right\}$ dir.

**Sonuç 4.2.1.2.** $K \le \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{17}}$ ve $z \in \overline{\Omega}_{1+1/n}$ için (4.9), (3.29) dan daha iyidir.

$K \le \frac{1}{2}\sqrt{1+\sqrt{17}}$ olması durumunda $\mu \le \frac{1+\sqrt{17}}{4}$ olur. Böylece (4.9) da $n$ nin kuvveti $\frac{1}{2}$ den küçük bir değer olacaktır. Bu ise (4.9) un daha iyi bir sonuç olduğunu gösterir.

**Teorem 4.2.1.4.** $L$, $K$-yarıkonform eğri olsun. O halde her bir $P_n \in \wp_n$ için

$$\left|P_n(z)\right| \le c_9 n^{\nu} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \left|\Phi(z)\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \overline{\Omega}_{1+1/n} \tag{4.10}$$

dir. Burada $\nu := \min\left\{2, K^2\right\}$ dir.

## 4.3. $k$-YARIDAİRE OLAN BÖLGELERDE POLİNOMLARIN NORMLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Bu kısımda $G$ bölgesinin $k$-yarıdaire olması durumunda (1.4) şeklindeki problemler incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

**Teorem 4.3.1.1.** $G$, $0 \le k < 1$, $k$-yarıdaire olsun. O halde her $P_n \in \wp_n$ polinomu ve $m = 0,1,2,...$ için,

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|_{C(\overline{G})} \le c_1 n^{\left(m+\frac{2}{p}\right)(1+k)} \left\| P_n \right\|_{A_p(G)} \ , \ p>1 \tag{4.11}$$

dir.

**Teorem 4.3.1.2.** $G$, herhangi bir $0 \le k < 1$ için, $k$-yarıdaire olsun. O halde her $P_n \in \wp_n$ polinomu ve $m = 0,1,2,...$ için,

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|_{A_p(G)} \le c_2 n^{\left[(m+1)-\frac{2}{p}\right](1+k)} \left\| P_n \right\|_{A_2(G)} \ , \ p>2 \tag{4.12}$$

elde edilir.

**Teorem 4.3.1.3.** $G$, herhangi bir $0 \le k < 1$ için, $k$-yarıdaire olsun. O halde her $P_n \in \wp_n$ polinomu ve $1 < p \le q < \infty$ için

$$\left\| P_n \right\|_{A_q(G)} \le c_3 n^{2\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)(1+k)} \left\| P_n \right\|_{A_p(G)} \tag{4.13}$$

elde edilir.

## 4.4. $Q_\alpha$ SINIFINDAN OLAN BÖLGELERDE POLİNOMLARIN NORMLARININ KARŞILAŞTIRILMASI

Bu kısımda $Q_\alpha$ sınıfından olan bölgelerde (1.4) şeklindeki problemler incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

**Teorem 4.4.1.1.** Herhangi bir $0 < \alpha \le 1$ için $G \in Q_\alpha$ olsun. O halde her $P_n \in \wp_n$ polinomu ve $m = 0,1,2,...$ için,

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|_{A_p(G)} \le c_4 A(\delta, m, n, p, k) \left\| P_n \right\|_{A_p(G)} \quad , \ p>1 \tag{4.14}$$

dir. Burada $A(\delta, m, n, p, k) = \begin{cases} n^{\delta\left(m+\frac{2}{p}\right)(1+k)} & , \ \alpha < \frac{1}{2} \\ n^{\frac{1}{\alpha}\left(m+\frac{2}{p}\right)} & , \ \alpha \ge \frac{1}{2} \end{cases}$ ve $\delta = \delta(G)$, $1 \le \delta \le 2$ belirli bir sayıdır.

**Teorem 4.4.1.2.** Herhangi bir $0<\alpha\leq 1$ için $G\in Q_{\alpha}$ olsun. O halde her $P_n \in \wp_n$ polinomu ve $m=0,1,2,...$ için,

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_{A_2(G)} \leq c_5 A(\delta,m,n,\alpha)\left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \tag{4.15}$$

dir. Burada $A(\delta,m,n,\alpha)=\begin{cases} n^{\delta m} & , \ \alpha<\dfrac{1}{2} \\ n^{\frac{m}{\alpha}} & , \ \alpha\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ve $\delta=\delta(G)$, $1\leq\delta\leq 2$ belirli bir sayıdır.

**Teorem 4.4.1.3.** Herhangi bir $0<\alpha\leq 1$ için $G\in Q_{\alpha}$ olsun. O halde her $P_n \in \wp_n$ polinomu ve $1<p\leq q<\infty$ için,

$$\left\|P_n\right\|_{A_q(G)} \leq c_6 A(\delta,n,p,q,\alpha)\ \left\|P_n\right\|_{A_p(G)} \tag{4.16}$$

dir. Burada $A(\delta,n,p,q,\alpha)=\begin{cases} n^{2\delta\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} & , \ \alpha<\dfrac{1}{2} \\ n^{\frac{2}{\alpha}\left(\frac{1}{p}-\frac{1}{q}\right)} & , \ \alpha\geq\dfrac{1}{2}\end{cases}$ ve $\delta=\delta(G)$, $1\leq\delta\leq 2$ belirli bir sayıdır.

## 4.5. TEOREMLERİN İSPATI

**Teorem 4.1.1.1' in ispatı:**

$z\in\overline{G}$ keyfi sabit bir nokta olsun. Bu durumda esas lemmaya [16] göre,

$$\left|P_n(z)\right|^2 \leq \frac{1}{\pi d^2(z,L_R)}\iint_{G_R}\left|P_n(z)\right|^2 d\sigma_z$$

yazılabilir. Buradan,

$$\left|P_n(z)\right| \prec \frac{1}{d(z,L_R)}\left\|P_n\right\|_{A_2(G_R)} \quad , \quad z\in\overline{G} \tag{4.17}$$

$F_n(z) := \dfrac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)}$ fonksiyonu $\Omega$ da analitik ve $F_n(\infty) = 0$ dır. O halde Maksimum modülüs prensibine göre, her bir $z \in \overline{\Omega}$ için

$$\left| \frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)} \right| \leq \max_{z \in \overline{\Omega}} \left| \frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)} \right| = \max_{z \in L} \left| P_n(z) \right| \prec \frac{1}{d(z, L_R)} \left\| P_n \right\|_{A_2(G_R)}$$

veya

$$\left| P_n(z) \right| \prec \frac{1}{d(L, L_R)} \left\| P_n \right\|_{A_2(G_R)} \left| \Phi(z) \right|^{n+1} \quad , \quad z \in \overline{\Omega}$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.1.2.'nin ispatı:**

Teorem 4.1.1.2 yi ispatlamak için Teorem 4.1.1.1. de $R = 1 + \dfrac{1}{n}$ alarak Lemma 3.3.3 e göre

$$\left| P_n(z) \right| \prec \frac{1}{d\left( L, L_{1+\frac{c}{n}} \right)} \left\| P_n \right\|_{A_2\left( G_{1+\frac{c}{n}} \right)} \left| \Phi(z) \right|^{n+1}$$

$$\prec \frac{1}{d\left( L, L_{1+\frac{c}{n}} \right)} R^{n+\frac{1}{2}} \left\| P_n \right\|_{A_2(G)} \left| \Phi(z) \right|^{n+1}.$$

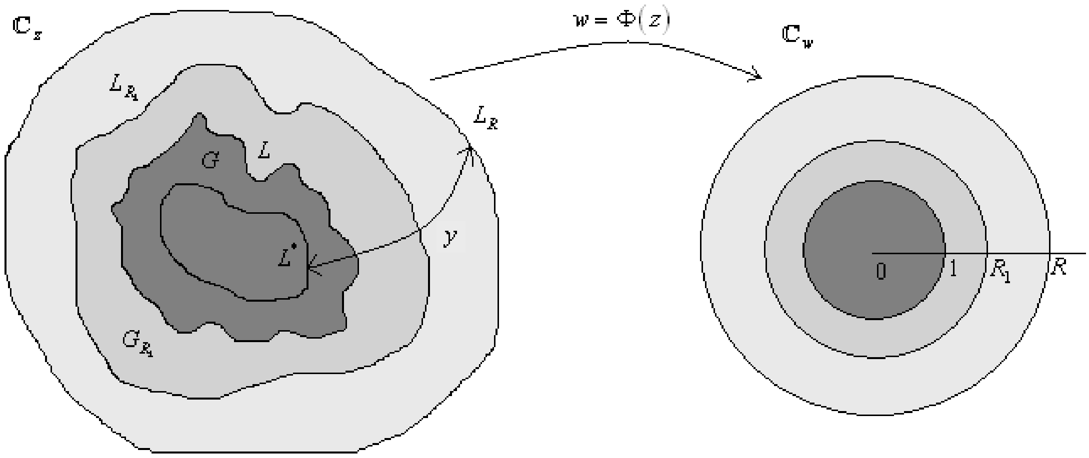
O halde buradan,

$$\left| P_n(z) \right| \leq \frac{1}{d\left( L, L_{1+\frac{c}{n}} \right)} \left\| P_n \right\|_{A_2(G)} \left| \Phi(z) \right|^{n+1} \quad , \quad z \in \Omega$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.1.3. ün ispatı:**

$R > 1$ keyfi sabit olmak üzere $L^* := y(L_R)$ oluşturalım. (3.6) ve Lemma 3.3.1.'e göre $\varepsilon_1$ sayısını $\rho_1 := 1 + \varepsilon_1 (R - 1)$ olmak üzere $\overline{G^*} \subseteq G$ olacak şekilde seçelim. $R_1 := 1 + \dfrac{\rho_1 - 1}{2}$ olsun.




Şekil 2

$z \in \Omega$ ve $w = \Phi_R(z)$ için

$$h_R(w) := \frac{P_n(\Psi_R(w))}{w^{n+1}}$$

olsun. Sonsuz bölgeler için Cauchy integral gösteriminden, $h_R(\infty) = 0$ olduğu dikkate alınarak,

$$h_R(w) := -\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R_1} h_R(t) \frac{dt}{t-w}$$

elde edilir. Her $|t| = R_1 > 1$ için $|t|^{n+1} = R_1^{n+1} > 1$ olduğundan,

$$A_n := |P_n(\Psi_R(w))|$$

$$\leq |w|^{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R_1} |P_n(\Psi_R(t))| \frac{|dt|}{|t-w|} \tag{4.18}$$

bulunur. Hölder eşitsizliğini uygulayarak,

$$A_n \prec |w|^{n+1} \left( \int_{|t|=R_1} |P_n(\Psi_R(t)) \Psi'_R(t)|^2 |dt| \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.19}$$

$$\times \left( \int_{|t|=R_1} \frac{1}{|\Psi'_R(t)||t-w|^2} |dt| \right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=: |w|^{n+1} \left( A_n^1 . B_n^1 \right)^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir.

$$f_n(t) := P_n\left(\Psi_R(t)\right).\Psi'_R(t)$$

fonksiyonunu oluşturalım. $|t| = R_1$ çemberini $n$ eşit parçaya ayıralım ve bu parçaları $\delta_n$ ile gösterelim. Her bir parçanın uzunluğu $mes\delta_n = \dfrac{2\pi R_1}{n}$ dir. $A_n^1$ e ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$A_n^1 = \sum_{k=1}^{n} \int_{\delta_k} \left|f_n(t)\right|^2 |dt| = \sum_{k=1}^{n} \left|f_n(t'_k)\right|^2 mes\delta_k \quad , \quad t'_k \in \delta_k$$

şeklinde yazılabilir. Diğer taraftan, orta değer ile ilgili değerlendirmeye göre,

$$\left|f_n(t'_k)\right|^2 \le \frac{1}{\pi\left(|t'_k|-1\right)^2} \iint_{|\xi - t'_k| < |t'_k|-1} \left|f_n(\xi)\right|^2 d\sigma_\xi$$

dir. Böylece

$$A_n^1 \prec \sum_{k=1}^{n} \frac{mes\delta_k}{\pi\left(|t'_k|-1\right)^2} \iint_{|\xi - t'_k| < |t'_k|-1} \left|f_n(\xi)\right| d\sigma_\xi \quad , \quad t'_k \in \delta_k$$

elde edilir. $t'_k$ noktalarını merkez kabul eden daireleri göz önüne alırsak en fazla iki noktada kesişirler. Böylece,

$$A_n^1 \prec \frac{mes\delta_1}{\left(|t'_1|-1\right)^2} \iint_{1<|\xi|<\rho_1} \left|f_n(\xi)\right|^2 d\sigma_\xi \prec n \iint_{1<|\xi|<\rho_1} \left|f_n(\xi)\right|^2 d\sigma_\xi$$

elde edilir. (3.6) ya göre $A_n^1$ için,

$$A_n^1 \prec n \iint_{G^*_{\rho_1} \setminus G^*} \left|P_n(z)\right|^2 d\sigma_z \prec n \iint_{G} \left|P_n(z)\right| d\sigma_z = n\left\|P_n\right\|^2_{A_2(G)} \tag{4.20}$$

elde edilir.

$B_n^1$ integralini değerlendirmek için $\Psi'_R$ için [8] deki

$$\frac{1}{4}\frac{d\left(\Psi_R(t), L^*\right)}{d\left(t, \partial B\right)} \le \left|\Psi'_R(t)\right| \le 4\frac{d\left(\Psi_R(t), L^*\right)}{d\left(t, \partial B\right)}$$

şeklindeki değerlendirme göz önüne alınarak ve $\Phi_R(z)$ için (3.8) kullanılarak,

$$B_n^1 \prec \int_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi_R(t), L^*\right)} \frac{|dt|}{|t-w|^2}$$

$$= \int_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi_R(t), L^*\right)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2-2\beta}\,|t-w|^{2\beta}}$$

$$\prec \frac{1}{d^2\left(z, L_{R_1}^*\right)} \int_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{\left(|t|-1\right)^{\frac{2}{\alpha}}} \frac{|dt|}{|t-w|^{2-2\beta}}$$

$$= \frac{1}{d^2\left(z, L_{R_1}^*\right)} \int_{|t|=R_1} \frac{1}{\left(|t|-1\right)^{2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}} \frac{|dt|}{|t-w|^{2(1-\beta)}}$$

$$\prec \frac{1}{d^2\left(z, L_{R_1}^*\right)} n^{2\left(\alpha^1-\beta\right)-1} \prec \frac{1}{d^2\left(z, L\right)} n^{2\left(\alpha^{-1}-\beta\right)-1} \tag{4.21}$$

(4.18), (4.19), (4.20)ve (4.21) den

$$\left|P_n(z)\right| \prec |w|^{n+1} \sqrt{n} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \frac{1}{d(z, L)} n^{\left(\alpha-\beta^{-1}\right)-1/2}$$

$$= \frac{n^{\left(\alpha^{-1}-\beta\right)}}{d(z, L)} \left|\Phi_R(z)\right|^{n+1} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \quad , \quad z \in \Omega$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.1.1.4.' ün ispatı:**

Teorem 4.1.1.4 ün ispatı Teorem 4.1.1.3.'e benzer olarak yapılacaktır.

$$B_n^1 \prec \int_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi_R(t), L^*\right)} \frac{|dt|}{|t-w|^2}$$

$$\prec \int_{|t|=R_1} \frac{1}{\left(|t|-1\right)^{\frac{2}{\alpha}-2}} \frac{|dt|}{|t-w|^2}$$

$$\prec \int_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{\left(|t|-1\right)^{\frac{2}{\alpha}}}$$

$$\prec n^{\frac{2}{\alpha}-1}$$

bulunur. Sonuç olarak buradan,

$$\left|P_n(z)\right| \prec |w|^{n+1} \sqrt{n} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}}$$

$$= n^{\frac{1}{\alpha}} \sqrt{n} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \left|\Phi_R(z)\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \Omega$$

elde edilir.

**Teorem 4.1.1.5 in ispatı:**

$R>1$ keyfi sabit ve $R_1:=1+\frac{R-1}{2}$ olsun. $z\in\overline{\Omega}_R$ ve $w=\Phi(z)$ için

$$h(w):=\frac{P_n(\Psi(w))}{w^{n+1}}$$

olsun. Sınırsız bölgeler için Cauchy integral gösteriminden

$$h(w):=-\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R_1} h(t)\frac{dt}{t-w}$$

elde edilir. Teorem 4.1.1.5.'in ispatındaki yöntemle benzer terimler aşağıdaki gibi değerlendirilir.

$$\widetilde{A_n}:=\left|P_n(\Psi(w))\right|$$

$$\leq |w|^{n+1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R_1}\left|P_n(\Psi(t))\right|\frac{|dt|}{|t-w|} \tag{4.22}$$

$$\prec |w|^{n+1}\left(\int\limits_{|t|=R_1}\left|P_n(\Psi(t))\Psi'(t)\right|^2|dt|\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\times\left(\int\limits_{|t|=R_1}\frac{1}{|\Psi'(t)||t-w|^2}|dt|\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$=:|w|^{n+1}\left(\widetilde{A_n^1}.\widetilde{B_n^1}\right)^{\frac{1}{2}}$$

$$\widetilde{f}_n(t):=P_n(\Psi(t)).\Psi'(t)$$

fonksiyonunu ele alalım. $|t|=R_1$ çemberini $n$ eşit parçaya ayıralım ve bu parçaları $\delta_n$ ile gösterelim. Her bir parçanın uzunluğu $mes\delta_n=\frac{2\pi R_1}{n}$ dir. $\widetilde{A_n^1}$ e ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$\widetilde{A_n^1}=\sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\delta_k}\left|\widetilde{f}_n(t)\right|^2|dt|=\sum_{k=1}^{n}\left|\widetilde{f}_n(t'_k)\right|^2 mes\delta_k \quad , \quad t'_k\in\delta_k$$

elde edilir. Diğer taraftan ortalama değer kullanılarak,

$$\widetilde{A_n^1}\leq\sum_{k=1}^{n}\frac{mes\delta_k}{\pi\left(|t'_k|-1\right)^2}\iint\limits_{|\xi-t'_k|<|t'_k|-1}\left|f_n(\xi)\right|^2 d\sigma_\xi \quad , \quad t'_k\in\delta_k$$

$$\widetilde{A_n^1} \prec \frac{mes\delta_1}{\left(|t_1'|-1\right)^2} \iint\limits_{1<|\xi|<R} \left|\widetilde{f}_n(\xi)\right|^2 d\sigma_\xi \prec n \iint\limits_{1<|\xi|<R} \left|\widetilde{f}_n(\xi)\right|^2 d\sigma_\xi$$

bulunur. (3.6) ya göre $\widetilde{A_n^1}$ için,

$$\widetilde{A_n^1} \prec n \iint\limits_{G_R \setminus G} |P_n(z)|^2 d\sigma_z \prec n \|P_n\|^2_{A_2(G_R)} \tag{4.23}$$

$\widetilde{B_n^1}$ integralini değerlendirmek için $\Psi'$ için [8] deki değerlendirme göz önüne alınarak ve (3.8) kullanılarak,

$$\widetilde{B_n^1} \prec \int\limits_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi(t),L\right)} \frac{|dt|}{|t-w|^2} \tag{4.24}$$

$$= \int\limits_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi(t),L\right)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2-2\beta}|t-w|^{2\beta}}$$

$$\prec \frac{1}{d^2\left(z,L_{R_1}\right)} \int\limits_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{\left(|t|-1\right)^{\frac{2}{\alpha}}} \frac{|dt|}{|t-w|^{2-2\beta}} =$$

$$= \frac{1}{d^2\left(z,L_{R_1}\right)} \int\limits_{|t|=R_1} \frac{1}{\left(|t|-1\right)^{2\left(\frac{1}{\alpha}-1\right)}} \frac{|dt|}{|t-w|^{2(1-\beta)}}$$

$$\prec \frac{1}{d^2\left(z,L_{R_1}\right)} n^{2\left(\alpha^1-\beta\right)-1}$$

bulunur. $\zeta = \Psi(\tau) \in L$, $\zeta_1 \in \Psi(\tau_1) \in L_{R_1}$ gösterelim öyleki $d(z,L) = |z-\zeta|$, $d\left(z,L_{R_1}\right) = |z-\zeta_1|$ olsun. Ters görüntülerini ise $\tau = \Phi(\zeta)$, $\tau_1 = \Phi(\zeta_1)$ gösterelim. Aynı zamanda $|\tau^*| = 1$, $|w-\tau^*| = |w|$, $|\tau_1^*| = R_1$, $|w-\tau_1^*| = |w| - R_1$ işaretlemeleri yapalım. $R_1 := 1 + \frac{R-1}{2}$ için $|w-\tau_1| \asymp |w-\tau_1^*| \succ |w-\tau_1^*| \asymp |w-\tau|$ dir. O halde Lemma 3.3.1. den $d(z,L) \prec d\left(z,L_{R_1}\right)$ dir. Böylece

$$\widetilde{B_n^1} \prec \frac{1}{d^2\left(z,L_{R_1}\right)} n^{2\left(\alpha^1-\beta\right)-1} \tag{4.25}$$

elde edilir. (4.22), (4.23), (4.25) ve Lemma 3.3.2 den

$$|P_n(z)| \prec |w|^{n+1} \sqrt{n} \|P_n\|_{A_2(G_R)} \frac{1}{d(z,L)} n^{\left(\alpha^{-1}-\beta\right)-1/2}$$

$$= \frac{n^{\left(\alpha^{-1}-\beta\right)}}{d\left(z,L\right)}\left|\Phi\left(z\right)\right|^{n+1}\left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \quad , \quad z \in \overline{\Omega}_{1+\frac{1}{n}}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.1.1.6.'nın ispatı:**

Teorem 4.1.1.4 ün ispatına benzer olarak Teorem 4.1.1.6.'nın ispatı Teorem 4.1.1.5.'in ispatıyla özdeştir. Bu durumda Teorem 4.1.1.5.'in ispatındaki metot kullanılarak ve (4.24) den aşağıdakiler elde edilir.

$$\begin{aligned} B_n^1 &\prec \int_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi\left(t\right),L\right)}\frac{|dt|}{|t-w|^2} \\ &\prec \int_{|t|=R_1} \frac{1}{\left(|t|-1\right)^{\frac{2}{\alpha}-2}}\frac{|dt|}{|t-w|^2} \\ &= \int_{|t|=R_1} \frac{|dt|}{\left(|t|-1\right)^{\frac{2}{\alpha}}} \\ &\prec n^{\frac{2}{\alpha}-1} \end{aligned}$$

bulunur. Sonuç olarak,

$$\begin{aligned} \left|P_n\left(z\right)\right| &\prec |w|^{n+1}\sqrt{n}\left\|P_n\right\|_{A_2(G_R)} n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{1}{2}} \\ &\prec n^{\frac{1}{\alpha}}\left\|P_n\right\|_{A_2(G)}\left|\Phi\left(z\right)\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \overline{\Omega}_{1+\frac{1}{n}} \end{aligned}$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.1.1.'in ispatı:**

Keyfi sabit $R>1$ için $L^* := y\left(L_R\right)$ oluşturalım. (3.6) ya göre $\varepsilon_1$ sayısı $\overline{G^*_{\rho_1}} \subseteq G$ olacak şekilde seçilebilir. $R_1 := 1+\frac{\rho_1-1}{2}$ alalım.

$z \in \Omega$ ve $w = \Phi_R\left(z\right)$ için

$$h_R\left(w\right) := \frac{P_n\left(\Psi_R\left(w\right)\right)}{w^{n+1}}$$

alalım. Sınırsız bölgeler için Cauchy integral gösteriminden,

$$h_R(w) = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{|t|=R_1} h_R(t)\frac{dt}{t-w}$$

elde edilir. $|t| = R_1 > 1$, $|t|^{n+1} = R_1^{n+1} > 1$ ,

$$A_n := \left|P_n\left(\Psi_R(w)\right)\right| \leq |w|^{n+1}\frac{1}{2\pi}\int\limits_{|t|=R_1}\left|P_n\left(\Psi_R(t)\right)\right|\frac{|dt|}{|t-w|} \ , \tag{4.26}$$

dir. Hölder eşitsizliği uygulanarak,

$$A_n \prec |w|^{n+1}\left(\int\limits_{|t|=R_1}\left|P_n\left(\Psi_R(t)\right)\Psi'_R\right|^2|dt|\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\int\limits_{|t|=R_1}\frac{1}{\left|\Psi'_R(t)\right|^2|t-w|^2}|dt|\right)^{1/2} =: |w|^{n+1}\left(A_n^1B_n^1\right)^{1/2} \tag{4.27}$$

bulunur.

$$f_n(t) := P_n\left(\Psi_R(t)\right)\Psi'_R(t)$$

fonksiyonunu oluşturalım. $|t| = R_1$ çemberini $n$ eşit parçaya ayıralım ve bu parçaları $\delta_n$ ile gösterelim. Her bir parçanın uzunluğu $mes\delta_n = \dfrac{2\pi R_1}{n}$ dir. $A_n^1$ e ortalama değer teoremi uygulanırsa,

$$A_n^1 = \sum_{k=1}^{n}\int\limits_{\delta_k}\left|f_n(t)\right|^2|dt| = \sum_{k=1}^{n}\left|f_n(t'_k)\right|^2 mes\delta_k \ , \ t'_k \in \delta_k$$

elde edilir. Diğer taraftan ortalama değer kullanılarak,

$$\left|f_n(t'_k)\right|^2 \leq \frac{1}{\pi\left(|t'_k|-1\right)^2}\iint\limits_{|\xi-t'_k|<|t'_k|-1}\left|f_n(\xi)\right|^2 d\sigma_\xi \ ,$$

bulunur. Bundan yaralanarak,

$$A_n^1 \prec \sum_{k=1}^{n}\frac{mes\delta_k}{\pi\left(|t'_k|-1\right)^2}\iint\limits_{|\xi-t'_k|<|t'_k|-1}\left|f_n(\xi)\right|d\sigma_\xi \ , \ t'_k \in \delta_k$$

dir. $t'_k$ noktalarını merkez kabul eden daireleri göz önüne alırsak en fazla iki noktada kesişirler. Böylece,

$$A_n^1 \prec \frac{mes\delta_1}{\left(|t'_1|-1\right)^2}\iint\limits_{1<|\xi|<\rho_1}\left|f_n(\xi)\right|^2 d\sigma_\xi \prec n\iint\limits_{1<|\xi|<\rho_1}\left|f_n(\xi)\right|^2 d\sigma_\xi$$

elde edilir. Sonuç 3.3.1. e göre, $A_n^1$ için,

$$A_n^1 \prec n \iint\limits_{G_{\rho_1}^* \setminus G^*} \left|P_n(z)\right|^2 d\sigma_z \prec n \left\|P_n\right\|_{A_2(G)}^2 \tag{4.28}$$

elde edilir.

$B_n^1$ integralini değerlendirmek için $\Psi'_R$ için [8] deki değerlendirme göz önüne alınarak ve $\Phi_R(z)$ için (3.8) kullanılarak,

$$\begin{aligned}
B_n^1 &\prec \int\limits_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi_R(t), L^*\right)} \frac{|dt|}{|t-w|^2} \\
&= \int\limits_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi_R(t), L^*\right)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2-\frac{2}{\mu}} |t-w|^{\frac{2}{\mu}}} \\
&\prec \frac{1}{d^2\left(z, L^*\right)} \int\limits_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{\left(|t|-1\right)^{2\mu}} \frac{|dt|}{|t-w|^{2-\frac{2}{\mu}}} \\
&= \frac{1}{d^2\left(z, L^*\right)} \int\limits_{|t|=R_1} \frac{1}{\left(|t|-1\right)^{2(\mu-1)}} \frac{|dt|}{|t-w|^{2\left(1-\frac{1}{\mu}\right)}} \\
&\prec \frac{1}{d^2\left(z, L_{R_1}^*\right)} n^{2\left(\mu-\mu^{-1}\right)-1} \prec \frac{1}{d^2(z, L)} n^{2\left(\mu-\mu^{-1}\right)-1}
\end{aligned} \tag{4.29}$$

bulunur. Burada $\mu := \min\left\{2, K^4\right\}$ dir. (4.26), (4.27), (4.28)ve (4.29) bağıntılarından,

$$\begin{aligned}
\left|P_n(z)\right| &\prec |w|^{n+1} \sqrt{n} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \frac{1}{d(z, L)} n^{\left(\mu-\mu^{-1}\right)-1/2} \\
&= \frac{n^{\left(\mu-\mu^{-1}\right)}}{d(z, L)} \left|\Phi_R(z)\right|^{n+1} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \quad , \quad z \in \Omega
\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2.1.4 ün ispatı:**

Teorem 4.2.1.4 ün ispatı teorem 4.2.1.3 ün ispatına benzer şekilde yapılacaktır. (4.29) ifadesinde

$$B_n^1 \prec \int\limits_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi_R(t), L^*\right)} \frac{|dt|}{|t-w|^2}$$

$$\prec \int_{|t|=R_1} \frac{1}{\left(|t|-1\right)^{2\mu-2}} \frac{dt}{|t-w|^2} \prec \int_{|t|=R_1} \frac{dt}{\left(|t|-1\right)^{2\mu}} \prec n^{2\mu-1} \tag{4.30}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\left|P_n(z)\right| \prec |w|^{n+1} \sqrt{n} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} n^{\mu-1/2} = n^{\mu} \left\|P_n\right\|_{A_2(G)} \left|\Phi_R(z)\right|^{n+1} \quad , \quad z \in \Omega$$

bulunur.

**Teorem 4.2.1.5 in ispatı:**

$R>1$ keyfi sabit ve $R_1 := 1+\dfrac{R-1}{2}$ alalım. $z \in \overline{\Omega}_R$ ve $w=\Phi(z)$ için

$$h(w) := \frac{P_n(\Psi(w))}{w^{n+1}}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım. Sınırsız bölgeler için Cauchy integral gösteriminden

$$h(w) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{|t|=R_1} h(t) \frac{dt}{t-w}$$

elde edilir. Teorem 4.2.1.3 ün ispatına benzer bir yolla

$$\widetilde{A_n} := \left|P_n(\Psi(w))\right| \le |w|^{n+1} \frac{1}{2\pi} \int_{|t|=R_1} \left|P_n(\Psi(t))\right| \frac{dt}{|t-w|}$$

$$\prec |w|^{n+1} \left( \int_{|t|=R_1} \left|P_n(\Psi(t))\Psi'(t)\right|^2 dt \right)^{1/2}$$

$$\times \left( \int_{|t|=R_1} \frac{1}{\left|\Psi'(t)\right|^2 |t-w|^2} |dt| \prec \right)^{1/2} =: |w|^{n+1} \left(\widetilde{A_n^1}\widetilde{B_n^1}\right)^{1/2} \tag{4.31}$$

bulunur.

$$\widetilde{f_n}(t) := P_n(\Psi(t))\Psi'(t)$$

tanımlayalım. $|t|=R_1$ çemberini $n$ eşit parçaya ayıralım ve bu parçaları $\delta_n$ ile gösterelim. O halde $mes\delta_n = \dfrac{2\pi R_1}{n}$ olur. $\widetilde{A_n^1}$ integraline Ortalama değer teoremini uygularsak,

$$\widetilde{A_n^1} = \sum_{k=1}^{n} \int_{\delta_k} \left|\widetilde{f_n}(t_k')\right|^2 |dt| = \sum_{k=1}^{n} \left|\widetilde{f_n}(t_k')\right|^2 mes\delta_k \quad , \quad t_k' \in \delta_k$$

elde edilir. Diğer taraftan ortalama değeri kullanarak,

$$\widetilde{A_n^1} \prec \sum_{k=1}^{n} \frac{mes\delta_k}{\pi\left(\left|t_k'\right|-1\right)^2} \iint_{\left|\zeta-t_k'\right|<\left|t_k'\right|-1} \left|\widetilde{f_n}\left(\zeta\right)\right|^2 d\sigma_\zeta \quad , \quad t_k' \in \delta_k$$

$$\widetilde{A_n^1} \prec \sum_{k=1}^{n} \frac{mes\delta_k}{\pi\left(\left|t_k'\right|-1\right)^2} \iint_{1<\left|\zeta\right|<R} \left|\widetilde{f_n}\left(\zeta\right)\right|^2 d\sigma_\zeta \prec n \iint_{1<\left|\zeta\right|<R} \left|\widetilde{f_n}\left(\zeta\right)\right|^2 d\sigma_\zeta$$

bulunur. Sonuç 3.3.1.'e göre $\widetilde{A_n^1}$ integrali için

$$\widetilde{A_n^1} \prec n \iint_{G_R \setminus G} \left|P_n\left(z\right)\right|^2 d\sigma_z \prec n\left\|P_n\right\|^2_{A_2\left(G_R\right)} \tag{4.32}$$

elde edilir. $\widetilde{B_n^1}$ 'e bakalım;

$$\begin{aligned}
\widetilde{B_n^1} &\prec \int_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi\left(t\right),L\right)} \frac{|dt|}{|t-w|^2} \\
&= \int_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi\left(t\right),L\right)} \frac{|dt|}{|t-w|^{2-\frac{2}{\nu}}|t-w|^{\frac{2}{\nu}}} \\
&\prec \frac{1}{d^2\left(z,L_{R_1}\right)} \int_{|t|=R_1} \frac{\left(|t|-1\right)^2}{\left(|t|-1\right)^{2\nu}} \frac{|dt|}{|t-w|^{2-\frac{2}{\nu}}} \\
&= \frac{1}{d^2\left(z,L_{R_1}\right)} \int_{|t|=R_1} \frac{1}{\left(|t|-1\right)^{2(\nu-1)}} \frac{|dt|}{|t-\omega|^{2\left(1-\frac{1}{\nu}\right)}} \\
&\prec \frac{1}{d^2\left(z,L_{R_1}\right)} n^{2\left(\nu-\nu^{-1}\right)-1}
\end{aligned} \tag{4.33}$$

elde edilir. Burada $\nu := \min\left\{2, K^2\right\}$ dir.

$d\left(z,L\right)=\left|z-\zeta\right|$ , $d\left(z,L_{R_1}\right)=\left|\zeta-z_1\right|$ olmak üzere $\zeta=\Psi\left(\tau\right)\in L, \zeta_1=\Psi\left(\tau_1\right)\in L_{R_1}$ alalım. $\tau=\Phi\left(\zeta\right)$ , $\tau_1=\Phi\left(\zeta_1\right)$. Aynı zamanda $\left|\tau^*\right|=1$, $\left|w-\tau^*\right|=|w|-1$, $\left|\tau_1^*\right|=R_1$, $\left|w-\tau_1^*\right|=|w|-R_1$ gösterelim. $R_1 := 1+\frac{R-1}{2}$ olduğundan $\left|w-\tau_1\right| \asymp \left|w-\tau_1^*\right| \succ \left|w-\tau^*\right| \asymp \left|w-\tau\right|$ dir. Lemma 3.3.1 den $d\left(z,L_{R_1}\right) \succ d\left(z,L\right)$ bulunur. Böylece ,

$$\widetilde{B_n^1} \prec \frac{1}{d^2\left(z,L\right)} n^{2\left(\nu-\nu^{-1}\right)-1} \tag{4.34}$$

elde edilir.(4.31), (4.32), (4.34) ve Lemma 3.3.4. den

$$\left|P_n(z)\right| \prec |w|^{n+1}\sqrt{n}\left\|P_n\right\|_{A_2(G_R)}\frac{1}{d(z,L)}n^{\left(\nu-\nu^{-1}\right)-1/2}=$$

$$=\frac{n^{\left(\nu-\nu^{-1}\right)}}{d(z,L)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1}\left\|P_n\right\|_{A_2(G)}\quad,\quad z\in\overline{\Omega}_{1+1/n}$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.2.1.6 nın ispatı:**

Teorem 4.2.1.6 nın ispatı teorem 4.2.1.4 ün ispatına benzer olarak Teorem 4.2.1.5 in ispatıyla özdeştir. Teorem 4.2.1.5 in ispatında kullanılan metot ve (4.34) den,

$$B_n^1 \prec \int_{|t|=R_1}\frac{\left(|t|-1\right)^2}{d^2\left(\Psi(t),L\right)}\frac{|dt|}{|t-w|^2}$$

$$\prec \int_{|t|=R_1}\frac{1}{\left(|t|-1\right)^{2\nu-2}}\frac{dt}{|t-w|^2}=\int_{|t|=R_1}\frac{dt}{\left(|t|-1\right)^{2\nu}}\prec n^{2\nu-1}$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\left|P_n(z)\right| \prec |w|^{n+1}\sqrt{n}\left\|P_n\right\|_{A_2(G_R)}n^{\nu-1/2}\prec n^{\nu}\left\|P_n\right\|_{A_2(G)}\left|\Phi_R(z)\right|^{n+1}\quad,\quad z\in\overline{\Omega}_{1+1/n}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.3.1.1. ve Teorem 4.4.1.1. in ispatı:**

$L$, bir yarıçember olduğundan keyfi $z\in G^*$ için Beyli integral gösterimi ile

$$P_n^{(m)}(z)=-\frac{(m+1)!}{\pi}\iint_G\frac{P_n(\zeta)\,y_{\overline{\zeta}}(\zeta)}{\left(y(\zeta)-z\right)^{m+2}}d\sigma_\zeta,\ z\in\overline{G^*}\tag{4.35}$$

yazılabilir. (4.35) de her iki tarafın modülü alınıp Hölder eşitsizliği uygulanırsa,

$$\left|P_n^{(m)}(z)\right|\le\frac{(m+1)!}{\pi}\left[\iint_G\left|P_n(\zeta)\right|^p d\sigma_\zeta\right]^{1/p}\times\left[\iint_{G_R}\frac{\left|y_{\overline{\zeta}}\right|^q}{\left|y(\zeta)-z\right|^{q(m+2)}}d\sigma_\zeta\right]^{1/q}$$

$$\prec\left[\iint_G\frac{\left|y_{\overline{\zeta}}\right|^q}{\left|y(\zeta)-z\right|^{q(m+2)}}d\sigma_\zeta\right]^{1/q}\left\|P_n\right\|_{A_p(G)}\quad,\quad\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1\tag{4.36}$$

elde edilir.

$$J^q(z) := \iint_G \frac{\left|y_{\bar{\zeta}}\right|^q}{\left|y(\zeta) - z\right|^{q(m+2)}} d\sigma_\zeta$$

olsun. $\varepsilon > 0$ için $U_\varepsilon(z) := \{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\}$ olmak üzere genelliği kaybetmeden $U_\varepsilon := U_\varepsilon(0) \subset G^*$ alabiliriz. Keyfi sabit $z \in L^*$ için

$$\begin{aligned} J^q(z) &:= \iint_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{\bar{\zeta}}\right|^q}{\left|y(\zeta) - z\right|^{q(m+2)}} d\sigma_\zeta \\ &+ \iint_G \frac{\left|y_{\bar{\zeta}}\right|^q}{\left|y(\zeta) - z\right|^{q(m+2)}} d\sigma_\zeta \\ &=: J_1(z) + J_2(z) \end{aligned} \tag{4.37}$$

Önce $J_1(z)$ integralini değerlendirelim. Sonuç 3.3.1.e göre $\left|y_{\bar{\zeta}}\right| \asymp \left|y(\zeta)\right|^2$, $\zeta \in U_\varepsilon$ dir. $z \in L^*$ ve $\zeta \in U_\varepsilon$ için $|\zeta - z| \geq \varepsilon$ olduğundan $\left|y(\zeta) - z\right| \asymp \left|y(\zeta)\right|$ dır. Bu durumda

$$\begin{aligned} J_1(z) &= \iint_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{\bar{\zeta}}\right|^q}{\left|y(\zeta) - z\right|^{q(m+2)}} d\sigma_\zeta \\ &\asymp \iint_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{\bar{\zeta}}\right|^{2q}}{\left|y(\zeta)\right|^{q(m+2)}} d\sigma_\zeta \\ &= \iint_{U_\varepsilon} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|y(\zeta)\right|^{qm}} \prec 1 \end{aligned} \tag{4.38}$$

$J_2(z)$ integralinin değerlendirilmesi için öncelikle $y(\zeta)$ yansımasının Jacobianının $\Im_y := \left|y_\zeta\right|^2 - \left|y_{\bar{\zeta}}\right|^2$ aşağıdaki eşitsizliği sağladığını göz önüne alalım.

$$\begin{aligned} \left|y_{\bar{\zeta}}\right| &= \left[\frac{\Im_y \left|y_{\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_\zeta\right|^2 - \left|y_{\bar{\zeta}}\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\Im_y}{\left(\left|y_\zeta\right|^2 / \left|y_{\bar{\zeta}}\right|^2\right) - 1}\right]^{\frac{1}{2}} \\ &\leq \left(\frac{\mathcal{X}^2}{1 - \mathcal{X}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left|\Im_y\right|^{\frac{1}{2}} \prec \left|\Im_y\right|^{\frac{1}{2}} \end{aligned}$$

Burada $\mathcal{X} := \dfrac{K_1 - 1}{K_1 + 1}$ dir.

$J_2(z)$ integralinde değişken değişimi ile

$$\begin{aligned} J_2(z) &= \iint\limits_{G \setminus U_\varepsilon} \frac{\left|y_{\bar{\zeta}}\right|^q}{\left|y(\zeta) - z\right|^{q(m+2)}} d\sigma_\zeta \\ &\prec \iint\limits_{y(G \setminus U_\varepsilon)} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta - z\right|^{q(m+2)}} \\ &\prec \iint\limits_{|\zeta - z| \geq d(z,L)} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|y(\zeta)\right|^{q(m+2)}} \\ &\prec \left(d(z,L)\right)^{2-q(m+2)} \end{aligned} \tag{4.39}$$

dir. O halde

$$\begin{aligned} J^q(z) &\prec 1 + \left(d(z,L_R)\right)^{2-q(m+2)} \\ &\prec \left(d(z,L_R)\right)^{2-q(m+2)} \quad , \ \forall z \in L^* \end{aligned} \tag{4.40}$$

elde edilir. (3.6) kullanılarak ve (4.36), (4.37)-(4.40) dan $\forall z \in L^*$ ve $t \in L$ öyle ki $\left|z - t\right| = d(z,L)$ için

$$\begin{aligned} \left|P_n^{(m)}(z)\right| &\prec d^{-\left(m+\frac{2}{p}\right)}(t,L)\left\|P_n\right\|_{A_p(G)} \\ &\prec d^{-\left(m+\frac{2}{p}\right)}(t,L_R)\left\|P_n\right\|_{A_p(G)} \quad , \ \forall z \in L^* \end{aligned} \tag{4.41}$$

dir. $G$, bir yarıdaire ise Lemma 3.3.2 ile

$$d(z,L_R) = \left|\zeta - z\right| = \left|\Psi(\tau) - \Psi(w)\right| \geq \left|\tau - w\right|^{1+k} \succ n^{-(1+k)}$$

dır. Böylece Lemma 3.3.8.dan

$$\left|P_n^{(m)}(z)\right| \prec n^{(1+k)\left(m+\frac{2}{p}\right)}\left\|P_n\right\|_{A_p(G)}$$

elde edilir. Teorem 4.3.1.1. ispatlanmış olur. $G \in Q_\alpha$ ise [8] ve [43] ile

$$d(t,L_R) \succ (R-1)^\mu \succ n^{-\mu}$$

dır. Burada $\alpha \geq \dfrac{1}{2}$ ise $\mu = \dfrac{1}{\alpha}$ , $\alpha < \dfrac{1}{2}$ ise $\mu = \delta$ , $\delta = \delta(\alpha, G)$ ,$1 \leq \delta \leq 2$ belirli bir sabittir. Böylece Lemma 3.3.8. ile

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_{A_p(G)} \prec \begin{cases} n^{\delta\left(m+\frac{2}{p}\right)} & , \ \alpha < \dfrac{1}{2} \\ n^{\frac{1}{\alpha}\left(m+\frac{2}{p}\right)} & , \ \alpha \geq \dfrac{1}{2} \end{cases} \left\|P_n\right\|_{A_p(G)} \quad , \quad p > 1$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.4.1.1.in de ispatı tamamlanmış olur.

**Teorem 4.4.1.2. nın ispatı:**

$L$ bir yarıçember olduğundan, $R = 1 + cn^{-1}$ olmak üzere her bir $L_R$'de yarıçemberdir. Böylece $L_R$'de $y_R(\zeta)$ için Sonuç 3.3.1 deki koşulları sağlayan bir $y_R$, $y_R(0) = \infty$, yansıması inşa edilebilir. Bu $y_R(\zeta)$'i kullanarak, $P_n(z)$ için Belyi'nin integral gösterimi $G_R$ için aşağıdaki gibi yazılabilir.

$$P_n^{(m)}(z) = -\frac{(m+1)!}{\pi} \iint_{G_R} \frac{P_n(\zeta)\, y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)}{\left(y_R(\zeta) - z\right)^{m+2}} d\sigma_\zeta, \ z \in G \tag{4.42}$$

(4.42)'nin her iki tarafının modülü alınırsa

$$\left|P_n^{(m)}(z)\right| \leq \frac{(m+1)!}{\pi} \iint_{G_R} \frac{\left|P_n(\zeta)\right| y_{R,\bar{\zeta}}}{\left|y_R(\zeta) - z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta$$

$$= \frac{(m+1)!}{\pi} \iint_{G_R} \frac{\left|P_n(z)\right| \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|}{\left|y_R(\zeta) - z\right|^{\frac{m+2}{2} + \frac{m+2}{2}}} d\sigma_\zeta$$

elde edilir. Hölder eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned} \left|P_n^{(m)}(z)\right|^2 &\leq \left[\frac{(m+1)!}{\pi}\right]^2 \iint_{G_R} \frac{\left|P_n(z)\right|^2}{\left|y_R(\zeta) - z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta \\ &\times \iint_{G_R} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta) - z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta \end{aligned} \tag{4.43}$$

dir. (4.43)'ün $G$ bölgesi üzerinden integralini alırsak,

$$\iint_G \left|P_n^{(m)}(z)\right|^2 d\sigma_z \leq \left[\frac{(m+1)!}{\pi}\right]^2$$

$$\times \iint_G \left[ \iint_{G_R} \frac{\left|P_n(\zeta)\right|^2}{\left|y_R(\zeta) - z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta \iint_{G_R} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta) - z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta \right] d\sigma_z$$

elde edilir. Buradan

$$\iint_G \left|P_n^{(m)}(z)\right|^2 d\sigma_z \le \frac{(m+1)!}{\pi} \sup_{z\in\overline{G}} \left\{ \iint_{G_R} \frac{\left|y_{R,\overline{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta \right\}$$

$$\times \sup_{\zeta\in\overline{G_R}} \left\{ \iint_G \frac{d\sigma_z}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}} \right\} \iint_{G_R} \left|P_n(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta \qquad (4.44)$$

$$=: A_R(z)\times B_R(z)\times \left\|P_n\right\|^2_{A_2(G_R)}$$

elde edilir.

Şimdi $A_R(z) := \sup\limits_{z\in\overline{G}} \iint\limits_{G_R} \frac{\left|y_{R,\overline{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^2} d\sigma_\zeta$ integralini değerlendirelim. $\varepsilon > 0$ için $U_\varepsilon(z) := \left\{\zeta : |\zeta - z| < \varepsilon\right\}$ ve genelliği kaybetmeden $U_\varepsilon := U_\varepsilon(0) \subset G^*$ olsun. $z\in L$ için

$$\iint_{G_R} \frac{\left|y_{R,\overline{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta = \iint_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\overline{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta$$

$$+ \iint_{G_R/U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\overline{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta$$

$$:= J_1 + J_2$$

dir. Önce $J_1$ integralini değerlendirelim. Sonuç 3.3.1.’e göre her $\zeta\in U_\varepsilon$ için $\left|y_{R,\overline{\zeta}}\right| \asymp \left|y_R(\zeta)\right|^2$ dir. $|\zeta - z| \ge \varepsilon$ olduğundan $z\in L$ ve $\zeta\in U_\varepsilon$ için

$$\left|y_R(\zeta)-z\right| \asymp \left|y_R(\zeta)\right|$$

dir. Sonuç olarak,

$$J_1 = \iint_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\overline{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta$$

$$\asymp \iint_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_R(\zeta)\right|^4}{\left|y_R(\zeta)\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta \qquad (4.45)$$

$$= \iint_{U_\varepsilon} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|y_R(\zeta)\right|^{m+2}} \prec 1$$

dir. Benzer olararak $J_2$ integralini değerlendirelim.

$\left|J_{y_R}\right| := \left|y_{R,\zeta}\right|^2 - \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2$, $y_R(\zeta)$ yansımasının Jakobiyanı aşağıdaki eşitsizliği sağladığını göz önünde bulunduralım.

$$\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right| = \left[\frac{\Im_y \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_{R,\zeta}\right|^2 - \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}\right]^{\frac{1}{2}} = \left[\frac{\Im_y}{\left(\left|y_{R,\zeta}\right|^2 \Big/ \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2\right) - 1}\right]^{\frac{1}{2}}$$

$$\leq \left(\frac{\mathcal{X}^2}{1-\mathcal{X}^2}\right)^{\frac{1}{2}} \left|\Im_y\right|^{\frac{1}{2}} \prec \left|\Im_y\right|^{\frac{1}{2}}$$

elde edilir. Burada $\mathcal{X} := \dfrac{K_1 - 1}{K_1 + 1}$ dir. Sonuç olarak $\left|\Im_{y_R}\right| \succ \left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2$ dir. Bu değerlendirmeden sonra, $J_1$ in değerlendirmesine benzer olarak $J_2$ için

$$J_2 \prec \iint_{G_R \backslash U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta) - z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta$$

$$\preceq \iint_{G_R \backslash U_\varepsilon} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|y_R(\zeta) - z\right|^{m+2}} \preceq \iint_{y_R(G_R \backslash U_\varepsilon)} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta - z\right|^{m+2}}$$

bulunur. Şimdi $\displaystyle\iint_{y_R(G_R \backslash U_\varepsilon)} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta - z\right|^{m+2}}$ integralini değerlendirelim.

$$\iint_{y_R(G_R \backslash \mathrm{U}_\varepsilon)} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta - z\right|^{m+2}} \leq \iint_{\left|\zeta - z\right| \geq d(z, L_R)} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta - z\right|^{m+2}} \tag{4.46}$$

dir. Buradan $\zeta - z_1 = re^{i\varphi}$ dönüşümü ile kutupsal koordinatlara geçilirse

$$\iint_{\left|\zeta - z\right| \geq d(z, L_R)} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta - z\right|^{m+2}} = \int_0^{2\pi} \left( \int_{d(z, L_R)}^{\infty} r^{1-(m+2)} dr \right) d\varphi = \frac{2\pi}{m} \left(d\left(z, L_R\right)\right)^{-m} \tag{4.47}$$

bulunur. Bu durumda (4.45) ve (4.47) ile

$$A_R(z) \prec 1 + \left(d\left(z, L_R\right)\right)^{-m} \prec \left(d\left(z, L_R\right)\right)^{-m} \quad , \forall z \in L \tag{4.48}$$

elde edilir.

Şimdi $A_R(z)$ deki değerlendirmeye benzer olarak $B_R(z)$ yi değerlendirelim.

$$\begin{aligned}\iint_G \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta &= \iint_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta \\ &+ \iint_{G/U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta \\ &:= J_1 + J_2\end{aligned}$$

yazalım.

$$\begin{aligned}J_1 &= \iint_{U_\varepsilon} \frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z_1\right|^{m+2}} d\sigma_\zeta \\ &\asymp \iint_{U_\varepsilon} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|Y_R(\zeta)\right|^{m+2}} \prec 1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}J_2 &= \iint_{G\setminus U_\varepsilon} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}} \\ &\prec \iint_{y_R(G\setminus U_\varepsilon)} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta-z\right|^{m+2}} \\ &\le \iint_{|\zeta-z_1|\ge d(z,L_R)} \frac{d\sigma_\zeta}{\left|\zeta-z\right|^{m+2}} \\ &\prec \left(d\left(z,L_R\right)\right)^{-m}\end{aligned}$$

bulunur. Böylece

$$B_R(z) \prec \left(d\left(z,L_R\right)\right)^{-m} \quad , \forall z \in L \tag{4.49}$$

elde edilir. (4.44),(4.48) ve (4.49) dan

$$\iint_G \left|P_n^{(m)}(z)\right|^2 d\sigma_z \prec \left(d\left(z,L_R\right)\right)^{-2m} \left\|P_n\right\|_{A_2(G_R)}^2 \ , \ \forall z \in L$$

elde edilir. $G \in Q_\alpha$ olduğundan [8] ve [43] e göre

$$d\left(z,L_R\right) \succ (R-1)^\mu \succ n^{-\mu}$$

elde edilir. Burada $\alpha \ge \frac{1}{2}$ ise $\mu = \frac{1}{\alpha}$ , $\alpha < \frac{1}{2}$ ise $\mu = \delta$ , $\delta = \delta(G)$ , $1 \le \delta \le 2$ belirli bir sayıdır.

Sonuç olarak Lemma 3.3.4. e göre

$$\left\|P_n^{(m)}\right\|_{A_2(G)} \preceq n^{\mu.m}\left\|P_n\right\|_{A_2(G_R)} \preceq n^{\mu.m}\left\|P_n\right\|_{A_2(G)}$$

bulunur. Böylece ispat tamamlanır.

**Teorem 4.3.1.2. nin ispatı:**

(4.42) ye benzer yolla aşağıdaki integral gösterimini yazabiliriz.

$$P_n^{(m)}(z) = -\frac{(m+1)!}{\pi}\iint_{G_R}\frac{P_n(\zeta)\, y_{R,\bar{\zeta}}(\zeta)}{\left(y_R(\zeta)-z\right)^{m+2}}d\sigma_\zeta,\ z\in G$$

Hölder eşitsizliğini uygulayarak,

$$\left|P_n^{(m)}(z)\right| \le \frac{(m+1)!}{\pi}\left(\iint_{G_R}\frac{\left|P_n(\zeta)\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}}d\sigma_\zeta\right)^{1/2}$$
$$\times\left(\iint_{G_R}\frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}}d\sigma_\zeta\right)^{1/2}$$

elde edilir. Burada her iki tarafın $p$. kuvvetini alıp $G$ bölgesi üzerinden integral alırsak,

$$\iint_G\left|P_n^{(m)}(z)\right|^p d\sigma_z \le \left[\frac{(m+1)!}{\pi}\right]^p$$
$$\times\iint_G\left[\left(\iint_{G_R}\frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}}d\sigma_\zeta\right)^{p/2}\left(\iint_{G_R}\frac{\left|P_n(\zeta)\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}}d\sigma_\zeta\right)^{p/2}\right]d\sigma_z \tag{4.50}$$

bulunur. Buradan

$$\iint_G\left|P_n^{(m)}(z)\right|^p d\sigma_z \le \left[\frac{(m+1)!}{\pi}\right]^p \sup_{z\in\overline{G}}\left\{\iint_{G_R}\frac{\left|y_{R,\bar{\zeta}}\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}}d\sigma_\zeta\right\}^{p/2}$$
$$\times\iint_G\left[\left\{\iint_{G_R}\frac{\left|P_n(\zeta)\right|^2}{\left|y_R(\zeta)-z\right|^{m+2}}d\sigma_z\right\}^{p/2}\right]d\sigma_z$$
$$=: A_R^1(z)\times B_R^1(z)$$

elde edilir. $A_R^1(z)$ integralinin değerlendirilmesi $A_R(z)$ nin değerlendirmesine benzer şekilde yapılır. Bu durumda $z\in L$ için

$$A_R^1(z) = \sup_{z \in \overline{G}} \left\{ \iint\limits_{G_R} \frac{\left| y_{R,\overline{\zeta}} \right|^2}{\left| y_R(\zeta) - z \right|^{m+2}} d\sigma_\zeta \right\}^{p/2}$$
$$\prec \left( d\left( z.L_R \right) \right)^{-\frac{mp}{2}}$$

bulunur.

$B_R^1(z)$ integralini değerlendirelim. Genelleşmiş Hölder eşitsizliğinden, $z \in L$ için

$$B_R^1(z) = \iint\limits_G \left[ \left\{ \iint\limits_{G_R} \frac{\left| P_n(\zeta) \right|^2}{\left| y_R(\zeta) - z \right|^{m+2}} d\sigma_z \right\}^{p/2} \right] d\sigma_z$$

$$\leq \left[ \iint\limits_{G_R} \left| P_n(\zeta) \right|^2 \left( \iint\limits_G \frac{d\sigma_z}{\left| y_R(\zeta) - z \right|^{\frac{m+2}{2}p}} \right)^{2/p} d\sigma_\zeta \right]^{p/2}$$

$$\leq \sup_{\zeta \in \overline{G_R}} \left\{ \iint\limits_G \frac{d\sigma_z}{\left| y_R(\zeta) - z \right|^{\frac{m+2}{2}p}} \right\} \times \left\| P_n \right\|_{A_2(G_R)}^p$$

$$\prec \left( d\left( z, L_R \right) \right)^{2 - \frac{m+2}{2}p} \times \left\| P_n \right\|_{A_2(G_R)}^p$$

bulunur. Böylece (4.50) den

$$\iint\limits_G \left| P_n^{(m)}(z) \right|^p d\sigma_z \prec \left( d\left( z, L_R \right) \right)^{2-(m+1)p} \times \left\| P_n \right\|^p_{A_2(G_R)}$$

elde edilir. $\zeta \in L_R$ alalım öyle ki $d(z, L_R) = |\zeta - z|$, $z \in L$ olsun. Lemma 3.3.2. yi göz önünde bulundurarak

$$d(z, L_R) = |\zeta - z| = \left| \Psi(\tau) - \Psi(w) \right| \geq |\tau - w|^{1+k} \succ n^{-(1+k)} \qquad (4.51)$$

bulunur. Lemma 3.3.4 e göre (4.49), (4.50) ve (4.51) den ispat tamamlanır.

$$\left\| P_n^{(m)} \right\|_{A_p(G)} \prec n^{(1+k)\left[ (m+1) - \frac{2}{p} \right]} \left\| P_n \right\|_{A_2(G)}$$

**Teorem 4.3.1.3. ve Teorem 4.4.1.3. nın ispatı:**

(4.41) e göre

$$\left| P_n^{(m)}(z) \right| \prec d^{-\left(m + \frac{2}{p}\right)}(t, L_R) \left\| P_n \right\|_{A_p(G)} , \; z \in L^*$$

dir. $m=0$ için

$$\left|P_n(z)\right| \prec d^{-\frac{2}{p}}(t,L_R)\left\|P_n\right\|_{A_p(G)}$$

dir. Lemma 3.3.8. ile

$$\left\|P_n\right\|_{C(\overline{G})} \leq c_1 \left\|P_n\right\|_{C\left(\overline{G^*}\right)}$$

alınır.

$$\begin{aligned}
\left\|P_n\right\|_{A_q(G)} &= \left(\iint_G \left|P_n(z)\right|^q d\sigma_z\right)^{1/q} \\
&= \left(\iint_G \left|P_n(z)\right|^{q-p}\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z\right)^{1/q} \\
&\leq \max_{z\in\overline{G}}\left|P_n(z)\right|^{1-\frac{p}{q}}\left(\iint_G \left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z\right) \\
&\prec \max_{z\in\overline{G^*}}\left|P_n(z)\right|^{1-\frac{p}{q}}\left\|P_n\right\|_{A_p(G)}^{\frac{p}{q}} \\
&\prec d^{2\left(\frac{1}{q}-\frac{1}{p}\right)}(t,L_R)\left\|P_n\right\|_{A_p(G)}
\end{aligned}$$

dir.

$G$, bir yarıdaire ise Lemma 3.3.2 ile

$$d(z,L_R)=\left|\zeta-z\right|=\left|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right|\geq\left|\tau-w\right|^{1+k}\succ n^{-(1+k)}$$

dir. $G\in Q_\alpha$ ise [8] ve [43] ile

$$d(t,L_R)\succ(R-1)^{\mu}\succ n^{-\mu}$$

dir. Böylece ispat tamamlanır.

# 5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde öncelikle bu tez çalışmasında ele alınan sonuçlar özetlenecek daha sonra bu konu ile ilgili başka nelerin yapılabileceği ile ilgili öneriler verilecektir.

## 5.1. SONUÇLAR

Bu tezde, $(1.2)$ problemi, $A_2(G)$ normunda, $G$ bölgesinin $Q_\alpha$, $Q_\alpha^\beta$ sınıflarından ve $K$-yarıkonform eğriyle sınırlı olması durumlarında, (1.4) problemi ise bölgenin $k$-yarıdaire ve $Q_\alpha$ sınıfından olması durumunda ele alınarak incelenmiş, elde edilen sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde; 4.1.1. Temel Sonuçlar isimli başlık altında verilmiştir.

4.1.1. Temel Sonuçların ispatları için gerekli Lemmalar ve Yardımcı Sonuçlar Materyal ve Yöntem başlığı altında verilmiştir.

Teorem 4.1.1.1'den Teorem 4.4.1.6'ya kadar olan teoremlerin hepsinde kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde; $(1.2)$ ve (1.4) problemlerine bakılarak (3.29)'a göre daha iyi sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır.

## 5.2.ÖNERİLER

4.1.1. Temel Sonuçlar bölümündeki teoremlerde $(1.2)$ problemi $A_2(G)$ normunda ele alınarak incelenmiştir. Acaba, $(1.2)$ problemi $A_p(G)$ ve $A_p(h,G)$ normlarına göre ele alındığında polinomun değerlendirilmesi nasıl olacaktır?

## KAYNAKLAR


[1] Walsh J.L., Interpolation and Approximation by rational Functions in the Complex Domain AMS 1960

[2] Hille, E., Szegö, G., Tamarkin, J.D. "On Some Genarelizations of A Theorem of A. Markoff", Duve Math.,Vol.3**,** s.729-739,(1937)

[3] Simirnov, V.I., Lebedev, N.A. "Functions of a Complex Variable", The M.I.T. Press,488 s. (Russian), (1968)

[4] Abdullayev, F.G. "On Some Properties of Orthogonal Polynomials Over an Area in Domains of the Complex Plane III", Ukranian Mathematical Journal, Vol.53,no:12**,**(2001)

[5] Stylianopoulos N. Strong Asymtotics for Bergman Polynomials over Domains with Corners CMFT. -2009.-Ankara, 2009

[6] Markov, V.A. "On Functions Deviating Least from Zero in A Given Interval", Imperial Academy of Science Pres,St.Petesburg, (Russian) (1982)

[7] Mergelyen, S.N.,"Certain Questions of the Constructive Theory of Functions", Trudy Math. Ins. Steklov 37**,** s.1-91,(Russian) (1951)

[8] Andrievskii, V.V., Belyi, V.I., Dzyadyk, V.K. "Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Plane" Atlanta :World Federation Publ.Com.,199 s. (1995)

[9] Suetin, P.K. "Polynomials orthogonal over a region and Bieberbach polynomials", Proc.Steklov Inst. Math. (1971)

[10] Simonenko, I.B. "On the Convergence of Bieberbach Polynomials in the case of a Lipshitz Domain", Math. USSR-Izv.13**,** s.166-174, (1980)

[11] Kulikov, I.V., "$L_p$ Convergence of Bieberbach Polynomials",Math. USSR-Izv.,s. 349-371, (1980)

[12] Mamedhanov, Dz.I. "Inequalities of S. M. Nikolskii type for Polynomials in a Complex Variable on Curves",Soviet Math. Dokl. **15**, (1974)

[13] Batchaev, I.M., "Yarıkonform Sınırlı Bölgelerin İntegral Gösterimleri ve Onların Bazı Uygulamaları", Azerbeycan Bilimler Akademisi Matematik ve Mekanik Enstitüsü, Doktora Tezi 120 s. (1981)

[14] Abdullayev, F.G. "On the Some Properties on Orthogonal Polynomials Over the Regions of Complex Plane (Part1)",Ukr. Math. J.,Vol.52, no:12:, s.1807-1817

[15] Abdullayev, F.G. "On the Interference of the Weight and Boundary Contour for Orthogonal Polynomial Over the Region",J.C.A.A. (2001)

[16] Gaier D. "Estimates of Conformal Mappings Near the Boundary" , Indiana Univ. Math. J.21:, s.581-595, (1972)

[17] Gaier, D. "On a Polynomial Lemma of Andrievskii", Arch. Math. Vol.49, s.119-123, (1987)

[18] Pritsker, I.E. "Comparing Norms of Polynomials in One and Several Variables", Journal of Mathematical Analysis and Applications, s.685-695, (1997)

[19] Andrievskii, V.V. "Convergence of Bieberbach Polynomials in Domains with Quasikonformal Boundary", Ukrain. Math. J.34, s.233-236, (1984)

[20] Zill, D.G., Shanahan, P.D. "A First Course in Complex Analysis with Applications", Jones and Bartlett Publishers, USA, 449 s., (2003)

[21] Başkan, T. "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi", 3.Baskı Vipaş, 360 s., (1998)

[22] Gleason, A.M., "Fundamentals of Abstract Analysis", Addison Wesley Publishing, USA, 404 s., (1996).

[23] Ahlfors, L.V., "Complex Analysis", McGraw-Hill, Inc., USA, 331 s., (1969).

[24] Depree, J.D., Oehring, C.C., "Elements of Complex Analysis", Addison Wesley Publishing Company, USA, 390 s., (1969).

[25] Rudin, W. "Real and Complex Analysis", Mc Graw-Hill, 452 s., (1974)

[26] Pommerenke, C. "Boundary Behaviour of Conformal Maps", Springer-Verlag, Berlin, 300 s., (1992)

[27] Saff, E.B., Snider, A.D. "Fundamentals of Complex Analysis", Prentice Hall,Upper saddle River, New Jersey, 528 s., (1993)

[28] Markushevich, A.I. "Theory of Functions of a Complex Variable", Chelsea Publishing Company.,New York, Three volumes in one, 1231 s.,(1985)

[29] Davis, P.J., "İnterpolation and Approximation", Blaisdell Publishing Company, New York 393 s.,(1963)

[30] Letho, O., Virtanen, K.I. "Quasiconformal mappings in the plane", Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 258 s., (1973).

[31] Rickman, S. "Characterization of quasiconformal arcs", Ann. Acad. Sci. Feen. Ser. A. Mathematica, 395 s., (1966).

[32] Abdullayev, F.G., "On the orthogonal polynomials in domains with quasiconformal boundary", Dissertation, Donetsk, 120 s., (1986).

[33] Abdullayev, F.G., Andrievskii, V.V., "On Orthogonal polynomials in the domains with $K-$quasiconformal boundary", Izv. Akad. Nauk. Azerb. SSR, Ser F.T.M., 1: 3-7, (1983).

[34] Goluzin, G.M. "Geometric Theory of Functions of a Complex Variable", Gostekhizdat, Moscow-Leningrad, 676 s., (1952)

[35] Halilov, H., Hasanoğlu, A., Can, M. "YM1, Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi", 1. Baskı, Alemdar O., Literatür, 470 s., (1999)

[36] Belinskii,P.P. ,General Properties of Quasiconformal Mappings [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1968)

[37] Abdullayev, F.G., "Uniform convergence of the Generalized Bieberbach polynomials in regions with zero angles", Czechoslovak Math. Journal, 51(126): 643-660, (2001).

[38] Abdullayev F.G. ,Aral, N.D. The Relation Between Different Norms of Algebraic Polynomials in the Regions of Complex Plane ,Azerbaijan J. of Math. 1(1),1-13, (2011)

[39] Pommerenke,Ch. "Univalent Functions" Vandenhoeck, Ruprecht, Göttingen 376 s.,(1975)

[40] S.E.Warschawski, On Differentiability at the boundary in Conformal Mapping, Proc.Amer.Math.Soc.,12,1961,614-620

[41] S.E.Warschawski, On Hölder Continuity at the boundary in Conformal Maps, L.of Math.and Mech.1969,18,423-427

[42] Lesley,F.D.Hölder Continuity of Conformal Mappings at the Boundary via the StripMethod,Indiana Univ.Math. J.,1982,31,pp.341-354

[43] Lesley, F.D. Conformal Mapping of Domains Satisfying Wedgw Conditions, Proc.Amer.Math.Soc. ,93,483-488 (1985)

# ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

**Adı Soyadı:** Nazlım Deniz ARAL

**Doğum Tarihi:** 04/05/1980

**Öğrenim Durumu:**

| Derece | Bölüm/Program | Lise/Üniversite | Yıl |
|---|---|---|---|
| Lise | Fen Bilimleri | Balıkesir Lisesi | 1994-1997 |
| Lisans | Matematik | Mersin Üniversitesi | 1998-2002 |
| Yüksek Lisans | Matematik | Mersin Üniversitesi | 2002-2006 |

**Görevler:**

| Görev Unvanı | Görev Yeri | Yıl |
|---|---|---|
| Arş.Gör. | Mersin Üniversitesi | 2004- |

## ESERLER

**1.** F.G. Abdullayev, N.D. Aral Int. Sci. Conf. Mathematical Analysis, Differential Equations and their Appl. “The relation between different norms of algebraic polynomials” UKRAYNA Uluslararası 2006

**2.** F.G. Abdullayev, N.D. Aral Int. Math. Conf. Math. Anal.Dif. Equ. and Appl. “On the Weight Markoff-Bernstein Type Inequalities” KUZEY KIBRIS TURK CUMHURIYETİ Uluslararası 2008

**3.** F.G.Abdullayev, N.D. Aral, N.P. Özkartepe International Mathematical Conference Mathematical. Analysis. Differential Equations and their Applications “On the Bernsteın-Walsh Type Lemma's in Regions of the Complex Plane” BULGARISTAN Uluslararası 2010

**4.** F.G.Abdullayev, N.D.Aral, N.P.Özkartepe, “Bernstein-Walsh Type Estimations fort he Unbounded Regions of Complex Planes”, Math Analysis Differential Equations and Applications,Procedings.

**5.** F.G.Abdullayev, N.D.Aral “The Relation Between Different Norms of Algebraic Polynomials in Regions of the Complex Plane” Azerbaijan Journal of Mathematics 1, 1-13, 2011

**6.** F.G.Abdullayev, N.D.Aral **“**On the Bernsteın-Walsh Type Lemma's in Regıons of the Complex Plane” Ukr.Math.Zh. 63, 291-302, 2011