INTUITIONISTIC FUZZY MODEL OPERATÖRLERİN INTUITIONISTIC FUZZY YAPILARLA İLİŞKİLERİ

SİNEM YILMAZ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2012

INTUITIONISTIC FUZZY MODEL OPERATÖRLERİN INTUITIONISTIC FUZZY YAPILARLA İLİŞKİLERİ

SİNEM YILMAZ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

MERSİN
HAZİRAN - 2012

Sinem YILMAZ tarafından Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU danışmanlığında hazırlanan " Intuitionistic Fuzzy Model Operatörlerin Intuitionistic Fuzzy Yapılarla İlişkileri " başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
Prof. Dr. Naime EKİCİ	
Doç. Dr. Hamza MENKEN	
Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU	

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 04./09./2012.tarih ve 2012.16..../.462..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. A. Murat GİZİR
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

INTUITIONISTIC FUZZY MODEL OPERATÖRLERİN INTUITIONISTIC FUZZY YAPILARLA İLİŞKİLERİ

Sinem YILMAZ

ÖZ

Intuitionistic fuzzy(IF) operatör teori 1999 yılından bu yana çalışılan yeni bir alandır. Bu operatörlerin bazı ilişkileri halen birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Ancak intuitionistic fuzzy yapıların, intuitionistic fuzzy operatörler altında korunup korunmadığı henüz incelenmemiştir. Bu tezde intuitionistic fuzzy yapıların intuitionistic fuzzy operatörler altında korunup korunmadığı çalışılmıştır. Böylece intuitionistic fuzzy teoride farklı çalışma alanları arasındaki ilişkiler ortaya koyulmuştur.

Anahtar Kelimeler: Intuitionistic fuzzy küme, Intuitionistic fuzzy operatör, Intuitionistic fuzzy yapılar.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

THE RELATIONS OF INTUITIONISTIC FUZZY MODEL OPERATORS WITH INTUITIONISTIC FUZZY STRUCTURES

Sinem YILMAZ

ABSTRACT

Since 1999, intuitionistic fuzzy operatör theory has been studied. Some relations of this operators have been studied by many researchers. However, intuitionistic fuzzy structures haven't been investigated yet whether under intuitionistic fuzzy operators preserved. In this thesis, it was studied whether the intuitionistic fuzzy structures preserved under intuitionistic fuzzy operators. Then, it has been revealed the relations between different fields of study in the intuitionistic fuzzy theory.

KeyWords: Intuitionistic fuzzy set, Intuitionistic fuzzy operator, Intuitionistic fuzzy structures.

Advisor: Asst. Prof. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Öncelikle, bu çalışmanın konusunun belirlenmesi, araştırma aşaması ve hazırlanması sürecinde her türlü yardımını ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU' na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın bütün aşamalarında bilgi ve desteğini esirgemeyen başta bölüm başkanımız Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV' e, matematik bölümünün değerleri hocalarına ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca bu süreçte desteğini esirgemeyen, her zaman yanımda olan sevgili aileme sonsuz teşekkürler.

Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER	**AÇIKLAMALAR**
μ	Fuzzy küme
ν	Fuzzy küme
$\leq$	Küçük eşit
$\geq$	Büyük eşit
$\sqsubseteq$	Alt küme
$\sqcap$	Fuzzy kümelerin kesişimi
$\sqcup$	Fuzzy kümelerin birleşimi
$\in$	Elemanıdır
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Ancak ve Ancak
FS	Fuzzy Küme
IFS	Intuitionistic Fuzzy Küme

1. GİRİŞ

Klasik küme teoride, kümelerin elemanlarının kümeye ait olma kriterlerinin kesin bir şekilde tanımlanması gerekmez.Bu nedenle, bazı problemlerin çözüm kümelerini kesin bir şekilde ifade etme problemiyle karşılaşılır. Örnek olarak, bir ile yakın olan illerin kümesini oluşturmak, aynı ile 200 km yakındaki illerin kümesini oluşturmaktan daha zordur, hatta imkansızdır. Buna benzer zorluk, boyu 165 cm den uzun olanlarla, uzun boyluların kümeleri oluşturulurken karşımıza çıkar. O halde, uzun boyluların kümesini oluştururken, elemanların boylarına göre bir derecelendirme yapılması gerekir. Bu derecelendirme, elemanın o kümeye ne kadar ait olduğunu gösterir.

Bu ve buna benzer problemlerin çözümü için 1965 yılında L. A. Zadeh tarafından "Fuzzy Küme Teori" ortaya atılmıştır.

Klasik mantıkta, önermelerin doğruluk değeri {0,1} kümesinin elemanlarıyken fuzzy mantıkta önermelerin doğruluk değeri [0,1] aralığının elemanıdır. Böylece, fuzzy küme teoride bir elemanın bir kümeye ait olma değeridaha hassas bir şekilde ifade edilebilir. Fuzzy küme teoride, bir elemanın bir kümeye ait olma değerine o elemanın kümeye üye olma derecesi denir.Bir elemanın bir kümeye üye olma derecesi ile üye olmama derecesinin toplamı 1 dir. Bu yöntemle elde edilen fuzzy kümeler klasik kümelerin bir genişlemesidir.1971 yılında, Rosenfeld [27] Fuzzy Gruplar'ı tanımladıktan sonra, Fuzzy Matematik Yapılar üzerine çalışmalar yapılmış, bu çalışmalar Mühendislik, Sosyal Bilimler, Genetik gibi birçok alanda uygulanma olanağı bulmuştur.

1983 yılında K. Atanassov [1] tarafından Fuzzy Küme Teori'nin genellemesi olan "Intuitionistic Fuzzy Küme Teori" tanımlanmıştır. Intuitionistic fuzzy küme teoride elemanların bir kümeye üye olma derecesi ile üye olmama dereceleri toplamı 1 olmak zorunda değildir ancak birim aralıkta olmak zorundadır.

Intuitionistic fuzzy küme kavramı tanımlandıktan sonra bu kümeler üzerindeki yapılar(cebirsel, topolojik, geometrik,…) bir çok araştırmacı için merak konusu olmuştur. Bu yapılar ve özellikleri halen birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Bunun yanı sıra intuitionistic fuzzy kümeler üzerindeki bazı birinci ve ikinci tip modal operatörlerin tanımı 1999 yılında K. Atanassov tarafından verilmiştir[4]. Daha sonraki yıllarda yeni intuitionistic fuzzy operatörler ve bunlar arasındaki ilişkiler birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır[6, 7, 8, 9, 13, 14, 16, 17, 19].

Bu tezde intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde tanımlı yapılardan intuitionistic fuzzy ideal, intuitionistic fuzzy altgrup, intuitionistic fuzzy normal altgrup, intuitionistic fuzzy halka ve intuitionistic fuzzy normal küme kavramlarından hangilerinin birinci tip intuitionistic fuzzy model operatörler altında özelliklerini koruduğu, hangilerinin korumadığı incelenmiştir.Böylece intuitionistic fuzzy teoride farklı yapılar arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

Tezin son bölümünde, bir intuitionistic fuzzy küme ile üretilen intuitionistic fuzzy altgrup tanımı verilmiş, bir intuitionistic fuzzy kümenin belirlediği intuitionistic fuzzy altgrubun nasıl elde edileceği gerek ve yeter koşul olarak ispatlanmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Fuzzy küme teori 1965 yılında L. A. Zadeh tarafından tanıtılmıştır[34]. Daha sonraki yıllarda, fuzzy kümeler üzerindeki yapılar birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. 1971 yılında A. Rosenfeld fuzzy grupoid, fuzzy ideal, fuzzy altgrup tanımlarını vermiştir[27]. Bu çalışmadan sonra özellikle matematikçiler, fuzzy küme teori yardımıyla fuzzy cebirsel yapıları ve özelliklerini incelemişlerdir. P. Bhattacharya,1987 yılında fuzzy kümelerin seviye altkümeleri ile bazı sınıflandırmalarını yapmıştır[10]. Aynı yıl içerisinde D. Duboisve H. Prade fuzzy sayıyı tanımlamıştır[19]. 1990 yılında V.N. Dixit ve arkadaşları bir fuzzy küme ile üretilen fuzzy altgrup tanımını vermişlerdir[17]. Normal fuzzy altgrup tanımı aynı yıl içerisinde A.S. Mashour ve arkadaşları tarafından verilmiş ve bazı özellikleri incelenmiştir[22].

Intuitionistic fuzzy küme teori 1983 yılında K. Atanassov tarafından ortaya atılmıştır. Intuitionistic fuzzy kümelerin bazı özellikleri aynı yazar tarafından incelenmiştir.1994 yılındaintuitionistic fuzzy sayı tanımı,P. Burillo ve arkadaşları tarafından verilmiştir[12]. Intuitionistic fuzzy grupoid, intuitionistic fuzzy ideal tanımları 2003 yılında K. Hur ve arkadaşları tarafından verilmiş, bazı özellikleri incelenmiştir.[21].Intuitionistic fuzzy alt grup 2003 yılında[22], intuitionistic fuzzy normal alt grup 2006 yılında tanımlanmıştır[29]. Intuitionistic fuzzy halka tanımı ve özellikleri 2008 yılında L. Yang tarafından verilmiştir[32].

Fuzzy operatörlerin tanımlanmasının ardından, 1999 yılında intuitionistic fuzzy kümeler üzerindeki bazı birinci tip modal operatörlerin tanımı($\boxplus$ ve $\boxtimes$), K. Atanassov tarafından verilmiştir[5]. 2004 yılında bu operatörlerin genişlemesi olan $\boxplus_{\alpha}$ ve $\boxtimes_{\alpha}$ operatörleri K. Dencheva tarafından tanıtılmıştır[17].Daha sonra; 2006 yılında K. Atanassov$\boxplus_{\alpha\beta}$ ve $\boxtimes_{\alpha\beta}$operatörlerini tanımlamıştır[7]. Bu operatörler [17] de tanıtılan operatörlerin bir genişlemesidir. $\boxplus_{\alpha\beta\gamma}$ ve $\boxtimes_{\alpha\beta\gamma}$ operatörleri sırasıyla,$\boxplus_{\alpha\beta}$ ve $\boxtimes_{\alpha\beta}$ operatörlerinin bir genişlemesi olarak aynı yazar tarafından tanıtılmıştır[8]. 2007 yılında G. Çuvalcıoğlu$\boxplus_{\alpha}$ve $\boxtimes_{\alpha}$ operatörlerinin genişlemesi olarak $E_{\alpha\beta}$ operatörünü tanımlamıştır[13]. 2008 yılında K. Atanassovo güne kadar tanımlanan birinci tip modal operatörlerin bir diyagram oluşturduğunu ortaya koymuş ve bu diyagrama $E_{\alpha\beta}$ operatörü ile $\boxplus_{\alpha\beta\gamma}$ ve $\boxtimes_{\alpha\beta\gamma}$ operatörlerinin genişlemesi olan $\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$ operatörünü eklemiştir. 2009 yılında K. Atanassov $\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\tau}$ operatörünü tanıtmış ve bu operatörün diyagramdaki operatörlerin en genel hali olduğunu ortaya koymuştur. 2010 yılında G. Çuvalcıoğlu$Z^{\omega}_{\alpha,\beta}$ operatörünü tanıtmıştır[14]. Bu operatör $E_{\alpha\beta}$, $\boxplus_{\alpha\beta}$ ve $\boxtimes_{\alpha\beta}$ operatörlerinin genişlemesi olarak diyagrama yerleşmiş ve diyagramı genişletmiştir[14]. 2012 yılında aynı araştırmacı tarafından$Z^{\omega}_{\alpha,\beta}$, $\boxplus_{\alpha\beta}$ ve $\boxtimes_{\alpha\beta}$ operatörlerinin genişlemesi olan $Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}$ operatörü tanımlanmıştır[16]. Bu operatörün tanımlanması ile diyagram son halini almıştır.Birinci tip model operatörlerin bazı özellikleri ve birbirleri ile ilişkileri birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır[8], [15], [19]. Bunların yanı sıra intuitionistic fuzzy topolojik operatörler K. Atanassov tarafından tanıtılmış ve bu operatörlerin birinci tip intuitionistic fuzzy operatörler ile ilişkileri bazı araştırmacılar tarafından incelenmiştir [5], [15],[19].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 3.1: [11]X bir küme, X de tanımlı "$\leq$" bağıntısı;

i. $\forall x \in X,\ x \leq x$

ii. $x, y \in X,\ x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$

iii. $x, y \in X,\ x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$

özelliklerini sağlıyorsa "$\leq$"bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı ve $(X,\leq)$ kümesine kısmi sıralı küme denir.

Tanım 3.2: [11]$(X,\leq)$ kısmi sıralı küme olsun. Aşağıdaki koşul sağlanırsa $(X,\leq)$ kümesine zincir denir.

"$\forall x, y \in X, x \leq y$ veya $y \leq x$"

Tanım 3.3: [11]$(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Aşağıdaki koşul sağlanırsa L ye kafes denir.

"$\forall a, b \in L$ için $\sup\{a, b\} = a \vee b \in L$ ve $\inf\{a, b\} = a \wedge b \in L$"

Bu durumda kafes $(L,\vee,\wedge)$ ile gösterilir.

Tanım 3.4: [11]L bir kafes ve $T \subseteq L$ olsun.

"$\forall a, b \in T$ için $a \wedge b \in T$ ve $a \vee b \in T$"

ise T kümesine alt kafes denir.

Tanım 3.5: [11]L bir kafes olsun. $\forall$ T $\subseteq$ L için supT ve infTvarsa Lye tam kafes denir.

Önerme 3.1: [11]Bir kafesin duali kafes ve tam kafesin duali tam kafestir.

Teorem 3.1: [11]L bir tam kafes,S $\subset$ Lve I, L nin en büyük elemanı olsun.

(i) I$\in$S

(ii) T $\subset$ S ise infT$\in$S

sağlanıyorsa S tam kafestir.

Önerme 3.2: [11]L bir kafes olsun. L kafesi aşağıdaki şekilde tanımlı dağılma eşitsizliğine sahiptir.

$\forall$ x, y, z$\in$L için

i. $x\wedge(y\vee z) \geq (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

ii. $x\vee(y\wedge z) \geq (x\vee y)\wedge(x\vee z)$

Teorem 3.2: [11]Herhangi bir L kafesinde aşağıdaki özdeşlikler denktir.

i. $\forall$ x, y, z$\in$L için $x\wedge(y\vee z) = (x\wedge y)\vee(x\wedge z)$

ii. $\forall$ x, y, z$\in$L için $x\vee(y\wedge z) = (x\vee y)\wedge(x\vee z)$

Tanım 3.6: [11]L kafesi Teorem 3.2 deki koşullardan birini sağlarsaL ye dağılımlı kafes denir.

Teorem 3.3: [11]L bir dağılımlı kafes olsun. Bu takdirde, $x, y, c \in L$ için

i. $c \wedge x = c \wedge y$
ii. $c \vee x = c \vee y$ ise $x = y$

dir.

Önerme 3.3: [11]Her zincir bir dağılımlı kafestir.

Tanım 3.7: [11]L bir kafes ve $\forall\ x, y, z \in L$ için $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ koşulu sağlanıyorsa L ye modüler denir.

3.1 FUZZY KÜMELER VE FUZZY CEBİRSEL YAPILAR

Bazı problemlerin çözüm kümesi ne boş nede boştan farklı bir kümedir. Bu problemler, paradokslar olarak adlandırılır. Buna en güzel örnek, Russel paradoksudur.

Russel Paradoksu:

"Herhangi nesnelerin topluluğuna küme denir." ifadesinin küme tanımı olduğunu kabul edelim. O halde tüm kümelerin oluşturduğu topluluk da bir kümedir. Bu kümeye X diyelim. Buna göre A herhangi bir küme ise $A \in X$ tir. X de bir küme olduğuna göre $X \in X$ tir. Şimdi, bu X kümesinin bir alt kümesini inşa edelim. $Y = \{A \in X \mid A \notin A\}$ olsun.

$Y \in Y$ ya da $Y \notin Y$ önermelerinden hangisi doğrudur. Şimdi, $Y \in Y$ doğru olsun. O halde Y nin elemanları kendisinin elemanı olmayan kümeler olduğundan $Y \notin Y$ olur. Tersine $Y \notin Y$ doğru olsun. O halde Y, tanıma göre Y nin elemanıdır. Yani $Y \in Y$. Buradan şöyle bir sonuca varılır; $Y \in Y \Leftrightarrow Y \notin Y$

Bu ve buna benzer ifadelere paradoks denmesinin nedeni, klasik mantıkta herhangi bir çözümlerinin olmayışıdır. MÖ.350 yılında Eflatun, bir önermenin doğruluk değerinin "1", "0" yada "arada bir değer" olabileceğini ifade etmiştir. Ancak, oluşturulan matematik sistemde bu fikir itibar görmediği için, bir önerme ya doğru yada yanlış olarak ifade edilmiştir. Bu matematik mantıkla, çözümleri olmayan, yada doğruyken yanlış, yanlışken doğru olan ifadeler çözümsüz kalmıştır. Bunun için, doğruluk değerleri 0,1 yada bunlar arasında değer alan ifadeler, oluşturulan mantık ile kurulan matematik, elbette paradoksların çözümünde bize yardımcı olacaktır. Daha önceleri dillendirilmesine yada tartışılmasına rağmen bu mantık en detaylı şekilde 1965 yılında, L.Zadeh tarafından ilk olarak çalışılmıştır.

L. A. Zadeh fuzzy küme teorinin neden ve nasıl ortaya çıktığını şu şekilde tanımlamıştır:

"Çoğunlukla, günlük hayatta karşılaştığımız nesnelerin sınıfının üyelik kriterleri kesin bir şekilde tanımlanmamıştır. Örneğin; hayvanların sınıfının köpekleri, atları, kuşları, vs. içerdiği ancak kaya, bitki gibi nesneleri içermediği açıktır. Ancak bakteri, deniz yıldızı gibi nesneler belirsiz statüsündedirler. Benzer bir belirsizlik reel sayılar sınıfında bir sayının 1 sayısından çok büyük olma bağıntısında ortaya çıkar.

Açıktır ki, "1 sayısından çok büyük reel sayıların sınıfı" veya "güzel kadınların sınıfı", veya "uzun erkeklerin sınıfı" matematik anlamında "sınıf" veya "küme" belirtmez. Fakat yinede kesin olmayan şekilde tanımlanan bu sınıflar insanların özellikle iletişim ve somutlaştırma alanlarında önemli bir rol oynar.

Fuzzy küme kavramı "kavramsal yapı" inşası için kolaylık sağlar. Bu yapı klasik küme teorideki yapı ile paralellik gösterir ancak daha geneldir. Özellikle bilgi işleme ve sınıflandırmada daha fazla kullanım alanına sahip olabilir. Temel olarak böyle bir yapı kesin tanımlama kriterlerinden yoksun olan bir sınıfa üye olma problemleri için doğal bir yöntem belirtir."

Bunun daha iyi anlaşılabilmesi için makalesinde kullandığı örneğin orjinali aşağıdaki gibidir.

Örnek 3.1.1: $X = \mathbb{R}$(reel sayılar kümesi) ve A, 1 den çok büyük reel sayıların fuzzy kümesi olsun.μ_A, $\mathbb{R}$ de fonksiyon olmak üzere A nın karakterizasyonunu verebiliriz. Böyle bir fonksiyonun örnek değerleri şu şekilde olabilir:

$\mu_A(0) = 0$, $\mu_A(1) = 0$, $\mu_A(5) = 0{,}01$,

$\mu_A(10) = 0{,}2$, $\mu_A(100) = 0{,}95$, $\mu_A(500) = 1$.

X sayılabilir bir küme olduğunda bir fuzzy kümenin üyelik fonksiyonu olasılık fonksiyonu ile benzerlik göstermesine rağmen bu iki kavram arasında temel farklılıklar vardır. Üyelik fonksiyonlarının işlemlerinin kuralları ve temel özellikleri verildiğinde bu farklılıklar açık bir şekilde görülebilecektir.

Fuzzy küme tanımı ve fuzzy küme üzerinde tanımlı bazı işlemler şu şekilde vermiştir;

Tanım 3.1.1: [34] X bir evrensel küme olsun.

$$A = \{< x, \mu_A(x) > \mid x \in X, \mu_A : X \to [0,1]\}$$

kümesine X de Fuzzy Küme(FS) denir.

Burada, $\mu_A(x)$, $x \in X$elemanınınX kümesine üye olma derecesidir. Bu tezde X üzerindeki fuzzy kümelerin ailesini FS(X) ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.2: [34]X bir evrensel küme A, B∈FS(X) olsun. A ve B üzerindeki bazı bağıntı ve işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır.

a. $A \sqsubseteq B :\Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$*(içerme)*
b. $A = B :\Leftrightarrow A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq A$*(eşitlik)*
c. $A \sqcap B = \{ <x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)> \mid x \in X\}$*(kesişim)*
d. $A \sqcup B = \{ <x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x)> \mid x \in X\}$*(birleşim)*

e. A^c={ $<x, 1-\mu_A(x)>|\ x\in X\}$ *(tümleyen)*

Örnek 3.1.2: $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesi için $A = \{(b, 0.3), (c, 1), (d, 0.7)\}$ ve

$B = \{(a, 1), (b, 0.4), (d, 0.6), (e, 0.5)\}$ fuzzy kümeleri verilsin.

$A \sqcap B = \{(b, 0.3), (d, 0.6)\}$, $A \sqcup B = \{(a, 1), (b, 0.4), (c, 1), (d, 0.7), (e, 0.5)\}$,

$A^c = \{(a, 1), (b, 0.7), (d, 0.3), (e, 1), (f, 1)\}$ şeklinde bulunur.

Örnek 3.1.3: $X = [0, 10]$ olmak üzere X in A, B, C fuzzy kümelerinin üyelik fonksi-

yonları $\mu_A(x) = \frac{x}{x+2}$, $\mu_B(x) = \frac{x}{10}$ ve $\mu_C(x) = \frac{1}{1+(5-x)}$ şeklinde verilsin.

(a) $\mu_{A^c}(x) = 1 - \mu_A(x) = 1 - \frac{x}{x+2} = \frac{2}{x+2}$,

(b) $\mu_{A\sqcup B}(x) = \text{maks}\{\mu_A(x), \mu_B(x)\} = \text{maks}\{\frac{x}{x+2}, \frac{x}{10}\}$

$\mu_{A\sqcup B}(x) = \begin{cases} \frac{x}{x+2}, & 0 \leq x < 8 \\ \frac{x}{10}, & x \geq 8 \end{cases}$ elde edilir.

Önerme 3.1.1: [34]X bir evrensel küme A, B, C $\in$FS(X) olsun. Bu takdirde,

i. $(A \sqcup B)^c = A^c \sqcap B^c$, $(A \sqcap B)^c = A^c \sqcup B^c$

ii. $C \sqcap (A \sqcup B) = (C \sqcap A) \sqcup (C \sqcap B), C \sqcup (A \sqcap B) = (C \sqcup A) \sqcap (C \sqcup B)$

Tanım 3.1.3: [34]X bir evrensel küme, $i\in I$ için $A_i\in$FS(X) olsun. $x\in X$,

i. $(\bigcup_{i\in I} A_i)(x)=\sup_{i\in I} A_i(x)$

ii. $(\bigcap_{i\in I} A_i)(x)=\inf_{i\in I} A_i(x)$

dir.

Tanım 3.1.4: [34]X bir evrensel küme, $A \in FS(X)$ olsun. $\alpha \in [0,1]$ için

$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha\}$kümesine A nın$\alpha$ -seviye alt kümesi,

$A_{<\alpha>} = \{x \in X \mid \mu(x) > \alpha\}$ kümesine A nın güçlü α -seviye alt kümesi denir.

Örnek 3.1.4: $X = \{a, b, c, d, e, f\}$kümesi üzerinde

$A = \{(a, 1), (b, 0.9), (c, 0.6), (d, 0.3), (e, 0.1), (f, 0)\}$fuzzy kümesi için

$A_1 = \{a\}$,

$A_{0.6} = \{a, b, c\} = A_{0.55} = A_{0.5}$,

$A_{<0.9>} = \{a\} = A_1$ ve $A_{<0>} = \{a, b, c, d, e\}$ şeklindedir.

Teorem 3.1.1: [34]X bir evrensel küme ve $A, B \in FS(X)$ olsun. $\alpha \in [0,1]$ için,

i. $(A \sqcup B)_\alpha = A_\alpha \sqcup B_\alpha$
ii. $(A \sqcap B)_\alpha = A_\alpha \sqcap B_\alpha$
iii. $\alpha \in [0,1)$ için $(A^c)_{<\alpha>} = (A_{1-\alpha})^c \neq (A_\alpha)^c$

Tanım 3.1.5: [27]G bir grupoid, $A \in FS(G)$ osun.$\forall x, y \in G$ için,

$$\mu_A(xy) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

ise A fuzzy kümesine G nin fuzzy altgrupoidi denir.

Tanım 3.1.6: [27]G bir grupoid, $A \in FS(G)$ olsun.$\forall x, y \in G$ için,

i. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(y)$ ise A fuzzy kümesine G nin fuzzy sol ideali,
ii. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x)$ise A fuzzy kümesine G nin fuzzy sağ ideali denir.

Tanım 3.1.7: [27]G bir grupoid, A∈FS(G) osun. ∀x, y∈G için,

$$\mu_A(xy) \geq \max(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

ise A fuzzy kümesine G nin fuzzy ideali denir.

Tanım 3.1.8: [27]G bir grup, A∈FS(G) altgrupoid olsun. ∀x∈G için,

$$\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$$

ise Aya G nin fuzzy alt grubu denir.

Önerme 3.1.2: [27]A, G grubunun bir fuzzy alt grubu olsun. Bu takdirde, ∀x∈G için

$\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x)$ ve $\mu_A(x) \leq \mu_A(e)$ dir.

Önerme 3.1.3: [27]Fuzzy grupların kesişimi fuzzy gruptur.

Teorem 3.1.2: [18]G bir grup, A∈FS(G) ve Card ImA<∞ olsun. G nin altgrupları(G_i) aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$G_0 = < \{x \in G \mid \mu_A(x) = \sup_{z \in G} \mu_A(z)\} >,$$

$G_i = < G_{i-1}, \{x \in G \mid \mu_A(x) = \sup_{z \in G - G_{i-1}} \mu_A(z)\} > 0 \leq k \leq 1, \quad k \leq \mathrm{Card(ImA)}$ ve $G_k = G$ dir.

$\forall x \in Go$ için $\mu_{A^*}(x) = \sup_{z \in G} \mu_A(z)$,

$\forall x \in G_i - G_{i-1}$ için $\mu_{A^*}(x) = \sup_{z \in G - G_{i-1}} \mu_A(z)$ şeklinde tanımlanan A^* kümesi, A ile üretilen G nin fuzzy altgrubudur.

Önerme 3.1.4: [10]G bir grup olsun. $A \in FS(G)$ fuzzy alt gruptur. $\Leftrightarrow$ $\forall t \in [0,1]$ için $A_t \neq \emptyset$ t-seviye alt kümesi G nin alt grubudur.

Teorem 3.1.3: [10] G bir grup, A G de bir fuzzy alt grup olsun. $t_1 < t_2$olmak üzere $A_{t_1} = A_{t_2} \Leftrightarrow t_1 \leq \mu_A(x) < t_2$olacak şekilde $x \in G$ yoktur.

Uyarı:A, G grubunun fuzzy alt grubu ve $t_0 > t_1 > \ldots > t_n$ olmak üzere

$Im(A) = \{ t_0, t_1, \ldots, t_n\}$ ise A nın seviye alt gruplarının ailesi bir zincir belirtir;

$$A(e) = t_0, \qquad A_{t_0} \sqsubseteq A_{t_1} \sqsubseteq A_{t_2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq A_{t_n}$$

Önerme 3.1.5: [23]G bir grup, $A \in FS(G)$alt grup olsun. $\forall x, y \in G$ için aşağıdaki koşullar denktir;

i. $\mu_A(xyx^{-1}) \geq \mu_A(y)$
ii. $\mu_A(xyx^{-1}) = \mu_A(y)$
iii. $\mu_A(xy) = \mu_A(yx)$
iv. $xA = Ax$
v. $xAx^{-1} = A$

Tanım 3.1.9: [23]G bir grup, A G de bir fuzzy alt grup olsun. A kümesi yukarıdaki önermenin koşullardan birini sağlıyorsa A ya fuzzy normal alt grup denir.

Tanım 3.1.10: [26]X bir evrensel küme ve $\Re(X)$, X de tanımlı tüm ikili işlemlerin ailesi olmak üzere model operatör $\Omega: \Re(X) \times 2^X \longrightarrow 2^X$ tanımlı bir dönüşümdür.

Tanım 3.1.11: [26]$R \subseteq X \times X$ ve $A \subseteq X$ için $[x]_R=\{y\in X \mid (x, y)\in R\}$ olmak üzere;

$[R]A=\{x\in X \mid [x]_R \subseteq A\}$, $\quad$ $\langle R \rangle A=\{x\in X \mid [x]_R \cap A\neq\emptyset\}$

operatörleri en tanınmış model operatörlerdir.

Tanım 3.1.12: [26]X bir evrensel küme olmak üzere fuzzy model operatör,

$\Omega: \Re(X) \times FS(X) \longrightarrow FS(X)$tanımlı bir dönüşümdür.

Tanım 3.1.13: [26]T:$[0,1]^2 \rightarrow [0,1]$ dönüşümü artan, değişmeli, birleşmeli ve $\forall x \in [0,1]$ için T(x,1)=x koşulunu sağlıyorsa bu dönüşüme üçgensel norm(t-norm) denir.

T_{lc}, sol-sürekli t-normların sınıfını temsil eder.

Tanım 3.1.14: [26]$T \in T_{lc}$ ve $\forall x, y\in [0,1]$ için

$I_T(x,y)=\sup\{\lambda \in [0,1] \mid T(x,\lambda) \leq y\}$ şeklinde tanımlı kümeye T ninresiduumu denir.

Tanım 3.1.15: [26]N:$[0,1] \rightarrow [0,1]$ azalan ve $N(1) = 0$, $N(0) = 1$ koşullarını sağlayan dönüşüme negator denir.

$x \in [0,1]$ olmak üzere $N_I(x) = I(x, 0)$ dir.

Tanım 3.1.15: [26]$T\in T_{lc}$, *I*residuum ve $N = N_T$ olsun. $R\in \Re(X)$ olmak üzere $\forall A \in FS(X)$, $\forall x\in X$ için aşağıdaki fuzzy model operatörler tanımlanır:

i. $([R]_T A)(x)=\inf_{y\in X} I(R(x,y), A(y))$,
ii. $(< R >_T A)(x)=\sup_{y\in X} T(R(x,y), A(y))$,

iii. $(\parallel R \parallel_T A)(x)=\inf_{y\in X} I(A(y), R(x,y))$,

iv. $(\ll R \gg_T A)(x)=\sup_{y\in X} T(N(R(x,y)), N(A(y)))$

v. $(\parallel R_T]A)(x)=\inf_{y\in X} I(N(R(x,y))A(y))$,

vi. $(\ll R >_T A)(x)=\sup_{y\in X} T(N(R(x,y)), A(y))$

Lemma 3.1.1: [26]$\forall$ T$\in T_{lc}$ için;

i. $[R]_T X = \parallel R_T]X = X$

ii. $< R >_T \emptyset = \ll R >_T \emptyset = \emptyset$

iii. $\parallel R \parallel_T \emptyset = X$, $\ll R \gg_T X = \emptyset$

Lemma 3.1.2: [26]$A, B \in F(X)$ ve $A \sqsubseteq B$ ise

i. $[R]_T A \sqsubseteq [R]_T B$

ii. $< R >_T A \sqsubseteq < R >_T B$

iii. $\parallel R \parallel_T A \sqsupseteq \parallel R \parallel_T B$

iv. $\ll R \gg_T A \sqsupseteq \ll R \gg_T B$

3.2 INTUITIONISTIC FUZZY KÜMELER

Intuitionistic fuzzy teori, 1983 yılında fuzzy küme teorinin bir genellemesi olarak ortaya çıkmıştır. Intuitionistic fuzzy küme teorinin fuzzy küme teorinin kesin genellemesi olduğu Örnek 3.2.1 ile ortaya koyulmuştur.

Intuitionistic fuzzy küme tanımı, geometrik yorumu, fuzzy kümeden farkı ve küme üzerindeki işlemler aşağıdaki şekildedir.

Not:$L=[0,1]$ ve $L^*=\{(x_1,x_2)\in[0,1]^2 \mid x_1+x_2\leq 1\}$ öyle ki

“$(x_1,x_2)\leq(y_1,y_2)$: $\Leftrightarrow$″$x_1\leq y_1$ ve $x_2\geq y_2$″ile bir kafestir.

$(L^*,\leq)$ kafesi bir tam kafestir.$\forall A\subseteq L^*$ için supA=(sup{x∈[0,1]:(y∈[0,1]),((x, y)∈A)}, inf{y∈[0,1]:(x∈[0,1]),((x, y)∈A)}) ve

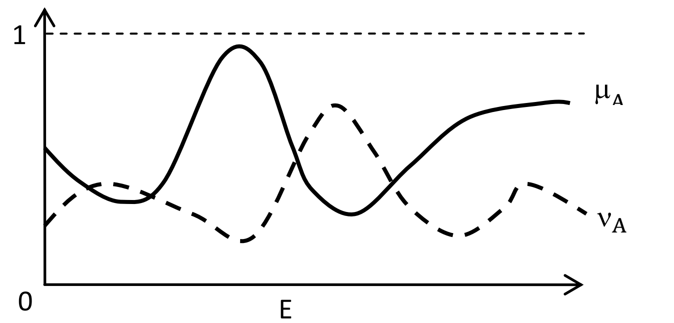
infA=(inf{x∈[0,1]:(y∈[0,1]),((x,y)∈A)}, sup{y∈[0,1]:(x∈[0,1]),((x,y)∈A)})

şeklinde tanımlanır.

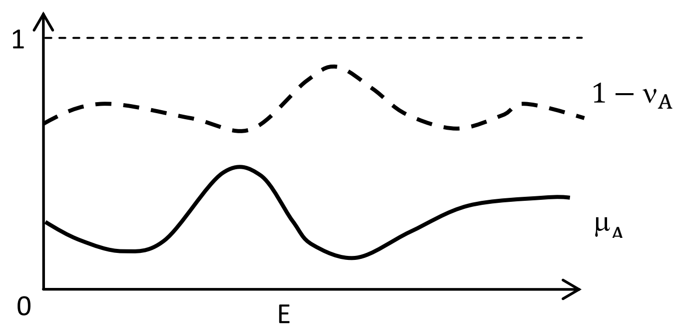
Tanım 3.2.1: [1] X bir evrensel küme olsun.$\mu_A: X \to [0,1]$ve ν_A:$X \to [0,1]$

fonksiyonları, sırasıyla, $x \in X$ in üye olma derecesi ve üye olmama derecesi olmak üzere $A = \{<x, \mu_A(x), \nu_A(x)> \mid x \in X, 0 \leq \mu_A(x) + \nu_A(x) \leq 1\}$ kümesine X, de Intuitionistic Fuzzy Küme(IFS) denir.X de intuitionistic fuzzy kümelerin ailesi IFS(X) ile gösterilir.

Intuitionistic fuzzy kümeler farklı geometrik gösterimlere sahiptir.

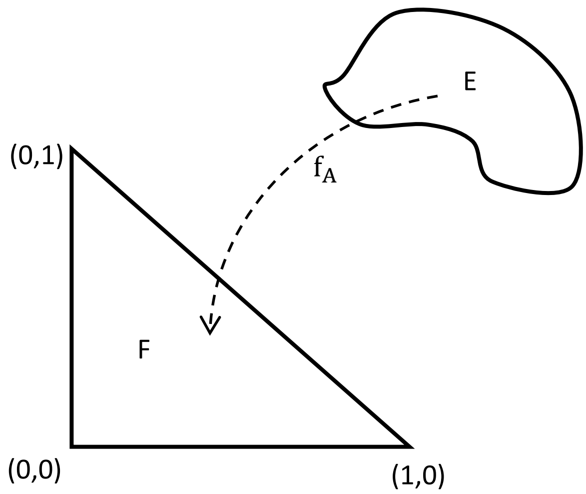


Şekil 3.2.1.a



Şekil 3.2.1.b

Şekil 3.2.1.a ve Şekil 3.2.1.bye intuitionistic fuzzy kümenin standart geometrik gösterimi denir.



Şekil 3.2.2 Intuitionistic fuzzy kümenin ikinci geometrik gösterimi.

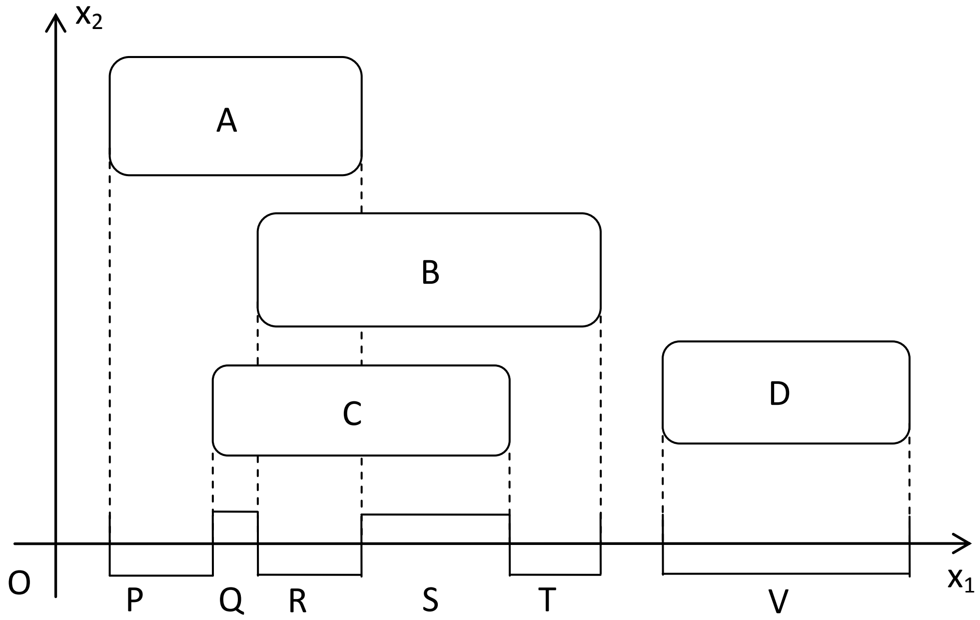
Tanım 3.2.2: [1]X bir evrensel küme, $A \in IFS(X)$ olsun.

$\pi_A(x) = 1 - (\mu_A(x) + \nu_A(x))$ değerine x in A kümesindeki hassasiyet (sezgi) derecesi denir.

Tanım 3.2.3: [1]X bir evrensel küme olsun. $A \in IFS(X)$ olmak üzere $\exists\, x \in X$ için $\pi_A\,(x) > 0$ ise A kümesine Öz Intuitionistic Fuzzy Küme denir.

Intuitionistic fuzzy küme teorinin, fuzzy küme teorinin kesin genişlemesi olduğunu gösteren öz intuitionistic fuzzy kümeye bir örnek verelim.

Örnek 3.2.1: [5]A, B, C ve D kümeleri öklit düzleminde kapalı, konveks, bağlantılı, kompakt ve $A \cap B = A \cap C = A \cap D = B \cap C = B \cap D = C \cap D = \emptyset$ olsun.Şekil 3.2.3 deki Ox_1x_2 koordinat düzlemi verilsin ve $P \cup Q \cup R, Q \cup R \cup S, R \cup S \cup T$ ve V kümeleri sırası ile A, B, C ve D kümelerinin Ox_1 ekseni üzerinde dik izdüşümleri olsun. X kümesinin Ox_1 eksenine dik uzanan bölümünün Ox_1eksenindeki y noktasına uzaklığını ℓ(y, X) ile göstereceğiz.



Şekil 3.2.3

E= $A \cup B \cup C \cup D$ evrensel küme olsun ve F, G kümeleri aşağıdaki koşulları sağlasın.

i. $A \subset F \subset A \cup C \cup D$,
ii. $B \subset G \subset B \cup C \cup D$,
iii. $F \cap G = \emptyset$,
iv. $F \cup G \subset E$

iii, iv koşullarından F kümesi öz olarak G nin tümleyenin de içerildiği görülür ve i, ii koşullarından F=A ve G=B durumlarının dahil olmadığı açıktır.

E deki noktaların sadece Ox_1 eksenindeki izdüşümlerini inceleyebildiğimizi ve $\forall x \in E$ için sadece ℓ(y, X)(X=A, B, C veya D) değerini bildiğimizi kabul edelim.

y elemanı için;

$y \in P$ ise $x \in A$ olacak şekilde bir x in izdüşümüdür. $A \subset F$ olduğundan $\mu_F(x) = 1$ dir.

$y \in Q$ ise $x \in A$ veya $x \in C$ olacak şekilde bir x in izdüşümüdür.

$x \in A \Rightarrow x \in F$ ve $x \in C \Rightarrow x \in F \vee x \in G$ dir. Bu durumda x in F deki üye olma derecesi; $\mu_F(x) = \frac{\ell(y,A)}{\ell(y,A)+\ell(y,C)}$ dir.

Aynı şekilde incelenmeye devam edildiğinde;

$$\mu_F(x) = \begin{cases} 1, & y \in P \\ \frac{\ell(y,A)}{\ell(y,A)+\ell(y,C)}, & y \in Q \\ \frac{\ell(y,A)}{\ell(y,A)+\ell(y,B)+\ell(y,C)}, & y \in R \\ 0, & y \in S \cup T \cup V \end{cases}$$

ve

$$\nu_F(x) = \begin{cases} 0, & y \in P \cup Q \cup V \\ \frac{\ell(y,B)}{\ell(y,B)+\ell(y,C)}, & y \in S \\ \frac{\ell(y,B)}{\ell(y,A)+\ell(y,B)+\ell(y,C)}, & y \in R \\ 1, & y \in T \end{cases}$$ şeklinde tanımlanır.

Böylece$\pi_A(x)$ fonksiyonunun değeri; $\pi_F(x) = \begin{cases} 0, & y \in P \cup T \\ \frac{\ell(y,C)}{\ell(y,A)+\ell(y,C)}, & y \in Q \\ \frac{\ell(y,C)}{\ell(y,A)+\ell(y,B)+\ell(y,C)}, & y \in R \\ \frac{\ell(y,C)}{\ell(y,B)+\ell(y,C)}, & y \in S \\ 1, & y \in V \end{cases}$ dir. Burada $\pi_A(x) > 0$değeri inşa edilen kümenin öz intuitionistic fuzzy küme olduğunu gösterir.

Intuitionistic fuzzy kümeler üzerindeki bazı işlemler Atanassov tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.2.4: [1]X bir evrensel küme A, B∈IFS(X) olmak üzere,

i. $A \sqsubseteq B :\Leftrightarrow \forall x \in X, \mu_A(x) \leq \mu_B(x)$ ve $\nu_A(x) \geq \nu_B(x)$*(içerme)*

ii. $A = B :\Leftrightarrow A \sqsubseteq B \wedge B \sqsubseteq A$*(eşitlik)*

iii. $A \sqcap B = \{<x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x)> \mid x \in X\}$*(kesişim)*

iv. $A \sqcup B = \{<x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x)> \mid x \in X\}$*(birleşim)*

v. $A^c = \{<x, \nu_A(x), \mu_A(x)> \mid <x, \mu_A(x), \nu_A(x)> \in A\}$*(tümleyen)*

vi. $A + B = \{<x, \mu_A(x) + \mu_B(x) - \mu_A(x).\mu_B(x), \nu_A(x).\nu_B(x)> \mid x \in X\}$

vii. $A.B = \{<x, \mu_A(x).\mu_B(x), \nu_A(x) + \nu_B(x) - \nu_A(x).\nu_B(x)> \mid x \in X\}$

dir.

Bu işlemlerin bazı temel özellikleri aynı araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bunların bazıları aşağıdaki gibidir;

Önerme 3.2.1: [5] X bir evrensel küme A, B∈IFS(X) olsun.

i. $A \sqcap B = B \sqcap A$

ii. $A \sqcup B = B \sqcup A$

iii. $A + B = B + A$

iv. $A . B = B . A$

Önerme 3.2.2: [5] X bir evrensel küme A, B∈IFS(X) olsun.

i. $(A \sqcap B) \sqcup C = (A \sqcup C) \sqcap (B \sqcup C)$

ii. $(A \sqcap B) + C = (A + C) \sqcap (B + C)$

iii. $(A \sqcap B).C = (A.C) \sqcap (B.C)$

3.3 INTUITIONISTIC FUZZY MODAL OPERATÖRLER

1999 yılında Atanassov bazı intuitionistic fuzzy operatörleri tanıtmış ve temel özelliklerini incelemiştir. Bunlardan intuitionistic fuzzy kümeyi fuzzy kümeye dönüştüren iki operatör aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.3.1: [4]X evrensel küme, A∈IFS(X) olsun.

i. $\Box A=\{< x,\mu_A(x), 1-\mu_A(x)>: x\in X\}=\{< x,\mu_A(x)>: x\in X\}$

ii. $\Diamond A=\{< x, 1-\nu_A(x), \nu_A(x)>: x\in X\}=\{< x, 1-\nu_A(x)>: x\in X\}$

Uyarı: X evrensel küme olmak üzere A∈FS(X) ise $\Box A = A = \Diamond A$,
A∈IFS(X) ise$\Box A \sqsubset A \sqsubset \Diamond A$ ve $\Box A \neq A \neq \Diamond A$ dır.

Bu durum intuitionistic fuzzy kümelerin, fuzzy kümelerin zorunlu bir genellemesi olduğunu gösteren bir örnektir. Şimdi bu operatörlerin bazı özelliklerini ve birbirleri ile ilişkilerini inceleyelim.

Teorem 3.3.1: [4]X evrensel küme, A∈IFS(X) için

i. $\Box A = (\Diamond A^c)^c$

ii. $\Diamond A = (\Box A^c)^c$

Teorem 3.3.2: [4] X evrensel küme, A, B∈IFS(X) için

i. $\Box(A\cup B) = \Box A\cup\Box B$

ii. $\Box(A\cap B) = \Box A\cap\Box B$

iii. $\Diamond(A \cup B) = \Diamond A \cup \Diamond B$

iv. $\Diamond(A \cap B) = \Diamond A \cap \Diamond B$

IF kümeler üzerinde iki topolojik operatör tanımlanmıştır. Bunlardan kapanış operatörü C ve iç operatörü I dır.

Tanım.3.3.2: [5]X evrensel küme, A∈IFS(X) olsun.

$K=\sup_{x \in X} \mu_A(x)$, $L=\inf_{x \in X} \nu_A(x)$, $k=\inf_{x \in X} \mu_A(x)$, $l=\sup_{x \in X} \nu_A(x)$ değerleri tanımlanmak üzere;

$C(A) = \{< x, K, L > | x \in X\}$ ve $I(A) = \{< x, k, l > | x \in X\}$ dır.

Her iki operatörün IF kümelerdeki yorumu sırasıyla ∃ ve ∀ nin intuitionistic fuzzy kümelerdeki yorumlarına denktir.

Bu operatörlerin diğer operatörlerle ilişkileri birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir. Bunların bazıları şu şekildedir:

Teorem 3.3.3: [5]X evrensel küme, A, B ∈ IFS(X) için,

i. $C(A), I(A) \in IFS(X)$

ii. $I(A) \sqsubseteq A \sqsubseteq C(A)$

Teorem 3.3.4: [5]X evrensel küme, A∈IFS(X) için,

i. $\Diamond A \sqsubseteq C(A)$

ii. $I(A) \sqsubseteq \Box A$

iii. $I(A^c)^c = C(A)$

Topolojik operatörler yardımı ile tanımlanan bazı operatörler aşağıdaki gibidir.

Tanım 3.3.3: [8]X evrensel küme, A∈IFS(X) olsun.

i. $C_\mu(A)=\{<x, K, \min(1-K, \nu_A(x))> | x\in X\}$

ii. $C_\nu(A)=\{<x, \mu_A(x), L> | x\in X\}$

iii. $I_\mu(A)=\{<x, k, \nu_A(x)> | x\in X\}$

iv. $I_\nu(A)=\{<x, \min(1- l, \mu_A(x)), l> | x\in X\}$

Intuitionistic fuzzy kümeler üzerinde tanımlı diğer operatörleri ve özelliklerini verelim.

Tanım 3.3.4: [6]X evrensel küme, A∈IFS(X) ve $n \in \mathbb{N}$ olsun.

i. $nA = \{< x, 1 - (1 - \mu_A(x))^n, (\nu_A(x))^n >: x \in X\}$

ii. $A^n = \{< x, (\mu_A(x))^n, 1 - (1 - \nu_A(x))^n >: x \in X\}$

Önerme 3.3.1: [6]X evrensel küme, $A \in IFS(X)$ olmak üzere $\forall B \in IFS(X)$ için $\exists\ m, n \in \mathbb{N}$ vardır öyleki $A^m \sqsubset B \sqsubset nA$ dir.

Teorem 3.3.5: [6]X evrensel küme, $A \in IFS(X)$ olsun.

i. $(\square A)^n = \square A^n$

ii. $(\Diamond A)^n = \Diamond A^n$

iii. $n(\square A) = \square n.A$

iv. $n(\Diamond A) = \Diamond n.A$

Dört parça halinde tanımlanan model operatörlerin en basitleri aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır.

Tanım 3.3.5: [4]X bir evrensel küme ve A∈IFS(X), α,β∈[0,1] olsun.

i. $\boxplus A=\{<x, \frac{\mu_A(x)}{2}, \frac{\nu_A(x)+1}{2}> \mid x \in X\}$

ii. $\boxtimes A=\{<x, \frac{\mu_A(x)+1}{2}, \frac{\nu_A(x)}{2}> \mid x \in X\}$

şeklinde tanımlanmıştır.

Teorem 3.3.6: [4]X bir evrensel küme ve A∈IFS(X) olmak üzere $\boxplus\boxtimes A \subseteq \boxtimes\boxplus A$ dir.

$\boxplus$ ve $\boxtimes$ operatörlerinin bir genişlemesi olan operatörler aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.3.6: [17]X bir evrensel küme ve A∈IFS(X), α,β∈[0,1] olsun.

i. $\boxplus_\alpha A= \{< x, \alpha\mu_A(x), \alpha\nu_A(x) + 1 - \alpha > \mid x \in X\}$

ii. $\boxtimes_\alpha A= \{< x, \alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha, \alpha\nu_A(x) > \mid x \in X\}$

Lemma 3.3.1: [13]X bir evrensel küme ve A∈IFS(X) öyle ki $\sup_{y\in X}\mu_A(y) < 1$olsun. ∀α∈[0,1] ve $\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$(\boxplus_\alpha A)m \subseteq \boxplus_\alpha A^m \subseteq \boxplus_\alpha A \subseteq \boxplus_\alpha nA \subseteq n \boxplus_\alpha A$$

$$(\boxtimes_\alpha A)m \subseteq \boxtimes_\alpha A^m \subseteq \boxtimes_\alpha A \subseteq \boxtimes_\alpha nA \subseteq n \boxtimes_\alpha A$$

Tanım 3.3.7: [7]X bir evrensel küme ve A∈IFS(X) α, β, γ, α+β∈ [0,1] olsun.

i. $\boxplus_{\alpha\beta}(A) = \{< x, \alpha\, \mu_A(x),\ \alpha\nu_A(x) + \beta > \mid x \in X\}$

ii. $\boxtimes_{\alpha\beta}(A) = \{< x, \alpha\mu_A(x) + \beta, \alpha\nu_A(x) > \mid x \in X\}$

Model operatörlerin üçüncü parçası olan operatörler $\boxplus_\alpha$ve $\boxtimes_\alpha$ operatörlerinin bir genişlemesi olarak tanımlanmıştır. Son parçada tanımlanan $\boxplus_{\alpha\beta\gamma}$ ve $\boxtimes_{\alpha\beta\gamma}$ operatörleri de bu operatörlerin genişlemesi olarak tanımlanmıştır.

Tanım 3.3.8: [8]X bir evrensel küme ve A∈IFS(X) olsun. $\alpha, \beta, \gamma \in [0,1]$, $\text{maks}\{\alpha, \beta\} + \gamma \leq 1$ olmak üzere

i. $\boxplus_{\alpha\beta\gamma}(A) = \{< x, \alpha\mu_A(x), \beta\nu_A(x) + \gamma > \mid x \in X\}$

ii. $\boxtimes_{\alpha\beta\gamma}(A) = \{< x, \alpha\mu_A(x) + \gamma, \beta\nu_A(x) > \mid x \in X\}$

dir.

2007 yılında $E_{\alpha,\beta}$ operatörü bu parçalardan bağımsız olarak $\boxplus_\alpha$ve $\boxtimes_\alpha$ operatörlerinin genellemesi olarak aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır. Ve bazı özelikleri aynı araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Tanım 3.3.9: [13]X bir evrensel küme ve A∈IFS(X)α,β∈[0,1] olsun.

$$E_{\alpha,\beta}(A)=\{<x,\beta(\alpha\, \mu_A(x)+1-\alpha),\alpha(\beta\nu_A(x)+1-\beta)>\mid x\in X\}$$

dir.

Önerme 3.3.2: [13]A∈IFS(X) olmak üzere $\forall\alpha, \beta \in [0,1]$ için$(E_{\alpha,\beta}(A))^c = E_{\alpha,\beta}(A^c)$ dir.

$E_{\alpha,\beta}$ operatörünün topolojik operatörler ileilişkileri 2008 yılında B.Doycheva tarafından incelenmiştir.

Teorem 3.3.7: [19]A∈IFS(X) ve α, β, $\alpha+\beta\in[0,1]$ olmak üzere;

i. $E_{\alpha,\beta}(I_\nu(A)) \sqsubseteq I_\nu(E_{\alpha,\beta}(A))$
ii. $I_\mu(E_{\alpha,\beta}(A)) = E_{\alpha,\beta}(I_\mu(A))$

Teorem 3.3.8: [19]A∈IFS(X) ve α, β, $\alpha+\beta\in[0,1]$ olmak üzere;

i. $C_\mu(E_{\alpha,\beta}(A)) \sqsubseteq E_{\alpha,\beta}(C_\mu(A))$
ii. $C_\nu(E_{\alpha,\beta}(A)) \sqsubseteq E_{\alpha,\beta}(C_\nu(A))$

2008 yılında K.Atanassov $E_{\alpha\beta}$ operatörü ile $\boxplus_{\alpha\beta\gamma}$ ve $\boxtimes_{\alpha\beta\gamma}$ operatörlerinin genişlemesi olarak aşağıdaki operatörü tanımlamış ve aynı çalışmasında operatörlerin oluşturduğu diyagramı tanıtmıştır.

Tanım 3.3.10: [8]X bir evrensel küme ve A∈IFS(X) α, β, γ, $\delta\in[0,1]$ öyle ki

$\text{maks}(\alpha,\beta)+\gamma+\delta\leq 1$olmak üzere

$$\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)=\{<x, \alpha\mu_A(x)+\gamma,\beta\nu_A(x)+\delta> | x\in X\}$$

dir.

2009 yılında K.Atanassov diyagramdaki operatörlerin en genel halini şu şekilde tanımlamıştır:

Tanım 3.3.11: [9]X bir evrensel küme, A∈IFS(X), α, β, γ ,δ, ε ,$\tau\in[0,1]$öyle ki

$\text{maks}(\alpha-\tau,\beta-\varepsilon)+\gamma+\delta\leq 1$ ve $\min(\alpha-\tau,\beta-\varepsilon)+\gamma+\delta\geq 0$ olsun.

$$\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta,\varepsilon,\tau}(A)=\{<x,\ \alpha\mu_A(x)-\varepsilon\nu_A(x)+\gamma,\beta\,\nu_A(x)-\tau\mu_A(x)+\delta>|\,x\in X\}$$

dir.

2010 yılında $E_{\alpha\beta}$ operatörü ile $\boxplus_{\alpha\beta}$ ve $\boxtimes_{\alpha\beta}$ operatörlerinin genellemesi olarak $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}$ operatörü G. Çuvalcıoğlu [14]tarafından tanımlanmış ve diyagramdaki yeri tanıtılmıştır.

Tanım 3.3.12: [14]X bir evrensel küme, A∈IFS(X) ve α, β, ω∈[0,1] olmak üzere;

$$Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)=\{<x,\ \beta(\alpha\mu_A(x)+\omega-\omega\alpha),\alpha(\beta\,\nu_A(x)+\omega-\omega\beta)>|\,x\in X\}$$

dir.

Bu operatörün bazı özellikleri ve diğer operatörlerle ilişkileri aşağıdaki şekildedir.

Önerme 3.3.3: [14]A∈IFS(X), α, β, ω∈[0,1] olsun.

$$Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)=(Z^{\omega}_{\beta,\alpha}(A^c))^c$$

Teorem 3.3.9: [15]A,B∈IFS(X) olmak üzere;

i. $A \sqsubseteq B \Rightarrow Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A) \sqsubseteq Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(B)$
ii. $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A \sqcap B) = Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A) \sqcap Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(B)$
iii. $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A \sqcup B) = Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A) \sqcup Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(B)$

Önerme 3.3.4: [14]A ∈ IFS(X) ve α, β∈[0,1], olmak üzere

i. $Z^{1}_{\alpha,\beta}(A) = E_{\alpha,\beta}(A)$
ii. $Z^{1}_{\alpha,1}(A) = \boxtimes_{\alpha} A$

iii. $Z^{1}_{1,\alpha}(A) = ⊞_{\alpha}$

$Z^{\omega}_{\alpha,\beta}$, $⊞_{\alpha\beta}$ ve $⊠_{\alpha\beta}$ operatörlerinin bir genişlemesi olan $Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}$ operatörü G. Çuvalcıoğlu tarafından tanımlanmıştır. Bu operatörün tanımlanması ile diyagram son halini almıştır.

Tanım 3.3.5: [16]X bir evrensel küme ve A∈IFS(X), α, β, ω, θ∈[0,1] olmak üzere;

$$Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)=\{<x, \beta(\alpha\mu_A(x)+\omega-\omega\alpha), \alpha(\beta\nu_A(x)+\theta-\theta\beta)> \mid x \in X\}$$

dir.

Bu operatörün bazı özellikleri aynı araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Teorem 3.3.10: [16]X bir evrensel küme ve A∈IFS(X), α, β, ω, θ∈[0,1] olsun.

$$\omega \leq \theta \text{ ise } Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A) \sqsubseteq Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)$$

Önerme 3.3.5: [16]X bir evrensel küme ve A∈IFS(X), α, β, ω, θ∈[0,1] olsun.

$$Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A^c)= Z^{\theta,\omega}_{\beta,\alpha}(A)^c$$

Teorem 3.3.11: [16]A,B∈IFS(X) olmak üzere;

i. $A \sqsubseteq B \Rightarrow Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A) \sqsubseteq Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(B)$

ii. $Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A \sqcap B) = Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A) \sqcap Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(B)$

iii. $Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A \sqcup B) = Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A) \sqcup Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(B)$

3.4 INTUITIONISTIC FUZZY CEBİRSEL YAPILAR

Intuitionistic fuzzy kümelerin tanımlanmasının ardından bu kümeler üzerindeki cebirsel yapılar birçok araştırmacı için merak konusu olmuştur. Daha sonraki yıllarda intuitionistic fuzzy grupoid, intuitionistic fuzzy ideal, intuitionistic fuzzy altgrup, intuitionistic fuzzy normal altgrup gibi cebirsel yapıların tanımı farklı araştırmacılar tarafından verilmiştir.

Tanım 3.4.1: [22]G bir grupoid, $A \in IFS(G)$ osun. $\forall x, y \in G$ için,

i. $\mu_A(xy) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$
ii. $\nu_A(xy) \leq \text{maks}(\nu_A(x), \nu_A(y))$

ise A kümesine G nin intuitionistic fuzzy alt grupoidi denir.

Tanım 3.4.2: [22]G bir grupoid, $A \in IFS(G)$ olsun. $\forall x, y \in G$ için,

i. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(y)$ ve $\nu_A(xy) \leq \nu_A(y)$ ise A kümesine G nin intuitionistic fuzzy sol ideali,
ii. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x)$ ve $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x)$ ise kümesine G nin intuitionistic fuzzy sağ ideali denir.

Tanım 3.4.3: [22]G bir grupoid, $A \in IFS(G)$ osun. $\forall x, y \in G$ için,

i. $\mu_A(xy) \geq \max(\mu_A(x), \mu_A(y))$
ii. $\nu_A(xy) \leq \min(\nu_A(x), \nu_A(y))$

ise A kümesine G nin intuitionistic fuzzy ideali denir.

Tanım 3.4.4: [25] G bir grup, $A \in IFS(G)$ alt grupoid olsun. $\forall x \in G$ için,

$\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$ ve $\nu_A(x^{-1}) \leq \nu_A(x)$

ise A ya G nin intuitionistic fuzzy alt grubu denir.

Tanım 3.4.5: X bir evrensel küme, $A \in IFS(X)$ olsun. $t \in [0,1]$ için

$A_t = \{x \in X \mid \mu_A(x) \geq t, \nu_A\ (x) \leq 1 - t\}$kümesine A nın seviye alt kümesi denir.

Teorem 3.4.1: G bir grup olsun. $A \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy alt gruptur. $\Leftrightarrow \forall t \in [0,1]$ için A_t seviye alt kümesi G nin alt grubudur.

Tanım 3.4.6: [29] G bir grup, $A \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy grup olmak üzere $\forall x, y \in G$ için,

i. $\mu_A(xy) = \mu_A(yx)$
ii. $\nu_A(xy) = \nu_A(yx)$

sağlanıyorsa A ya intuitionistic fuzzy normal alt grup denir.

Teorem 3.4.2: [29]G bir grup olsun. $A \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy normal alt grup ise $t \in [0,1]$ için A_t seviye alt kümesi G nin normal alt grubudur.

Tanım 3.4.7: [32]R bir halka ve $A \in IFS(R)$ olsun. A kümesi aşağıdaki koşulları sağlıyorsa bu kümeye R de bir intuitionistic fuzzy halka(IFR) denir. $\forall x, y \in R$ için

i. $\mu_A(x + y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$, $\nu_A(x + y) \leq \nu_A(x)\ \vee\ \nu_A(y)$
ii. $\mu_A(-x) \geq \mu_A(x)$, $\nu_A(-x) \leq \nu_A(x)$
iii. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y)$, $\nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$

Önerme 3.4.1: [32]R bir halka ve $A \in IFS(R)$ olsun. $\forall x \in R$için

i. $\mu_A(-x) = \mu_A(x), \nu_A(-x) = \nu_A(x)$

ii. $\mu_A(0) \geq \mu_A(x), \nu_A(0) \leq \nu_A(x)$

dir.

Teorem 3.4.3: [32]R bir halka ve $A, B \in IFS(R)$ ise $A \cap B \in IFS(R)$ dir.

Tanım 3.4.8: [24]A∈IFS(X) kümesine$\mu_A(x_0) = 1$, $\nu_A(x_1) = 1$ olacak şekilde en az iki eleman içeriyorsa intuitionistic fuzzy normal(IF-normal) küme denir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 INTUITIONISTIC FUZZY MODEL OPERATÖRLERİN INTUITIONISTIC FUZZY İDEALLERE UYGULANMASI

Teorem 4.1.1: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere □A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\square A}(xy) = \mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \vee \mu_A(y) = \mu_{\square A}(x) \vee \mu_{\square A}(y) \text{ ve}$$

$$\nu_{\square A}(xy) = 1 - \mu_A(xy) \leq \big(1 - \mu_A(x)\big) \wedge \big(1 - \mu_A(y)\big) = \nu_{\square A}(x) \wedge \nu_{\square A}(y)$$

O halde $\square A(xy) \geq \square A(x) \vee \square A(y)$ dir.

Teorem 4.1.2: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere ◊A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. $x, y \in G$ için,

$$\mu_{\Diamond A}(xy) = 1 - \nu_A(xy) \geq (1 - \nu_A(x)) \vee (1 - \nu_A(y)) = \mu_{\Diamond A}(x) \vee \mu_{\Diamond A}(y),$$

$$\nu_{\Diamond A}(xy) = \nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \wedge \nu_A(y) = \nu_{\Diamond A}(x) \wedge \nu_{\Diamond A}(y)$$

O halde $\Diamond A(xy) \geq \Diamond A(x) \vee \Diamond A(y)$ dir.

Teorem 4.1.3: G bir grupoid, $A \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $nA \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. $x, y \in G$ için,

$$\mu_{nA}(xy) = 1 - \big(1 - \mu_A(xy)\big)^n \geq 1 - \big(1 - \mu_A(x)\big)^n \vee 1 - \big(1 - \mu_A(y)\big)^n$$

$$= \mu_{nA}(x) \vee \mu_{nA}(y)$$

$$\nu_{nA}(xy) = \left(\nu_A(x)\right)^n \leq \left(\nu_A(x)\right)^n \wedge \left(\nu_A(y)\right)^n = \nu_{nA}(x) \wedge \nu_{nA}(y)$$

Teorem 4.1.4: G bir grupoid, $A \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $A^n \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. $x, y \in G$ için,

$$\mu_{A^n}(xy) = \left(\mu_A(xy)\right)^n \geq \left(\mu_A(x)\right)^n \vee \left(\mu_A(y)\right)^n = \mu_{A^n}(x) \vee \mu_{A^n}(y)$$

$$\nu_{A^n}(xy) = 1 - \left(1 - \nu_A(xy)\right)^n \geq 1 - \left(1 - \nu_A(x)\right)^n \wedge 1 - \left(1 - \nu_A(y)\right)^n$$

$$= \nu_{A^n}(x) \wedge \nu_{A^n}(y)$$

Teorem 4.1.5: G bir grupoid, $A \in IFS(G)$intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $\boxplus A \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. $x, y \in G$ için,

$$\mu_{\boxplus A}(xy) = \frac{\mu_A(xy)}{2} \geq \frac{\mu_A(x)}{2} \vee \frac{\mu_A(y)}{2} = \mu_{\boxplus A}(x) \vee \mu_{\boxplus A}(y)$$

$$\nu_{\boxplus A}(xy) = \frac{\nu_A(xy) + 1}{2} \leq \frac{\nu_A(x) + 1}{2} \wedge \frac{\nu_A(y) + 1}{2} = \nu_{\boxplus A}(x) \wedge \nu_{\boxplus A}(y)$$

Teorem 4.1.6: G bir grupoid, $A \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $\boxtimes A \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. $x, y \in G$ için,

$$\mu_{\boxtimes A}(xy) = \frac{\mu_A(xy) + 1}{2} \geq \frac{\mu_A(x) + 1}{2} \vee \frac{\mu_A(y) + 1}{2} = \mu_{\boxtimes A}(x) \vee \mu_{\boxtimes A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes A}(xy) = \frac{\nu_A(xy)}{2} \geq \frac{\nu_A(x)}{2} \wedge \frac{\nu_A(y)}{2} = \nu_{\boxtimes A}(x) \wedge \nu_{\boxtimes A}(y)$$

Teorem 4.1.7: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $\boxplus_{\alpha}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxplus_{\alpha}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) \geq \alpha\mu_A(x) \vee \alpha\mu_A(y) = \mu_{\boxplus_{\alpha}A}(x) \vee \mu_{\boxplus_{\alpha}A}(y)$$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha}A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) + 1 - \alpha \leq (\alpha\nu_A(x) + 1 - \alpha) \wedge (\alpha\nu_A(y) + 1 - \alpha)$$

$$= \nu_{\boxplus_{\alpha}A}(x) \wedge \nu_{\boxplus_{\alpha}A}(y)$$

Teorem 4.1.8: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $\boxtimes_{\alpha}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxtimes_{\alpha}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + 1 - \alpha \geq (\alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha) \vee (\alpha\mu_A(y) + 1 - \alpha)$$

$$= \mu_{\boxtimes_{\alpha}A}(x) \vee \mu_{\boxtimes_{\alpha}A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha}A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) \leq \alpha\nu_A(x) \wedge \alpha\nu_A(y) = \nu_{\boxtimes_{\alpha}A}(x) \wedge \nu_{\boxtimes_{\alpha}A}(y)$$

Teorem 4.1.9: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $\boxplus_{\alpha,\beta}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) \geq \alpha\mu_A(x) \vee \alpha\mu_A(y) = \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(x) \vee \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(y)$$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) + \beta \leq \alpha\nu_A(x) + \beta \wedge \alpha\nu_A(y) + \beta = \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(x) \vee \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(y)$$

Teorem 4.1.10: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $\boxtimes_{\alpha,\beta}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \beta \geq (\alpha\mu_A(x) + \beta) \vee (\alpha\mu_A(y) + \beta)$$

$$= \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x) \vee \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) \leq \alpha\nu_A(x) \wedge \alpha\nu_A(y) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x) \wedge \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(y)$$

Teorem 4.1.11:G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) \geq \alpha\mu_A(x) \vee \alpha\mu_A(y) = \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \vee \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \beta\nu_A(xy) + \gamma \leq (\beta\nu_A(x) + \gamma) \wedge (\beta\nu_A(y) + \gamma)$$

$$= \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \wedge \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

Teorem 4.1.12:G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \gamma \geq (\alpha\mu_A(x) + \gamma) \vee (\alpha\mu_A(y) + \gamma)$$

$$= \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \vee \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \beta\nu_A(xy) \leq \beta\nu_A(x) \wedge \beta\nu_A(y) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \wedge \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

Teorem 4.1.13: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $E_{\alpha,\beta}$(A)∈IFS(G) intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \beta(\alpha\mu_A(xy) + 1 - \alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha) \vee \beta(\alpha\mu_A(y) + 1 - \alpha)$$
$$= \mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x) \vee \mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

$$\nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \alpha(\beta\nu_A(xy) + 1 - \beta) \leq \alpha(\beta\nu_A(x) + 1 - \beta) \wedge \alpha(\beta\nu_A(y) + 1 - \beta)$$

$$= \nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x) \wedge \nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

Teorem 4.1.14: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)\in$IFS(G) intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \gamma \geq \alpha\mu_A(x) + \gamma \vee \alpha\mu_A(y) + \gamma$$

$$= \mu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(x) \vee \mu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(y)$$

$$\nu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(xy) = \beta\nu_A(xy) + \delta \leq (\beta\nu_A(x) + \delta) \wedge (\beta\nu_A(y) + \delta)$$

$$= \nu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(x) \wedge \nu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(y)$$

Teorem 4.1.15: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)\in$IFS(G) intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \beta(\alpha\mu_A(xy) + \omega - \omega\alpha)$$
$$\geq \beta(\alpha\mu_A(x) + \omega - \omega\alpha) \wedge \beta(\alpha\mu_A(y) + \omega - \omega\alpha)$$
$$= \mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \wedge \mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

$$\nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \alpha(\beta\nu_A(xy) + \omega - \omega\beta)$$
$$\leq \alpha(\beta\nu_A(x) + \omega - \omega\beta) \vee \alpha(\beta\nu_A(y) + \omega - \omega\beta)$$
$$= \nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \vee \nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

Teorem 4.1.16: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)\in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

$$\begin{aligned}\mu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(xy) &= \beta(\alpha\mu_A(xy)+\omega-\omega\alpha)\\ &\geq \beta(\alpha\mu_A(x)+\omega-\omega\alpha)\vee\beta(\alpha\mu_A(y)+\omega-\omega\alpha)\\ &= \mu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(x)\vee\mu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(y)\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}\nu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(xy) &= \alpha(\beta\nu_A(xy)+\theta-\theta\beta)\\ &\leq \alpha(\beta\nu_A(x)+\theta-\theta\beta)\wedge\alpha(\beta\nu_A(y)+\theta-\theta\beta)\\ &= \nu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(x)\wedge\nu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(y)\end{aligned}$$

Teorem 4.1.17: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere $C_\mu(A)$, $C_\nu(A)\in IFS(G)$ kümeleri intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G için,

i. $C_\mu(A)(xy) = \{< xy, \sup_{xy\in G}\mu_A(xy), \min(1-\sup_{xy\in G}\mu_A(xy), \nu_A(xy)) > |\, x, y\in G\}$

$\mu_{C_\mu}(xy) = \sup_{xy\in G}\mu_A(xy) \geq \sup_{x\in G}\mu_A(x)\vee\sup_{y\in G}\mu_A(y) = \mu_{C_\mu}(x)\vee\mu_{C_\mu}(y)$

$\nu_{C_\mu}(xy) = 1-\sup_{xy\in G}\mu_A(xy) \vee\ \nu_{C_\mu}(xy) = \nu_A(xy)$ dir.

a. $\nu_{C_\mu}(xy) = \nu_A(xy) \geq \nu_A(x)\wedge\nu_A(y) = \nu_{C_\mu}(x)\wedge\nu_{C_\mu}(y)$,

b. $\nu_{C_\mu}(xy) = 1-\sup_{xy\in G}\mu_A(xy) \leq 1-\sup_{x\in G}\mu_A(x)\wedge 1-\sup_{y\in G}\mu_A(y)$

$= \nu_{C_\mu}(x)\wedge\nu_{C_\mu}(y)$,

ii. $\mu_{C_\nu}(xy) = \mu_A(xy) \geq \mu_A(x)\vee\mu_A(y) = \mu_{C_\nu}(x)\vee\mu_{C_\nu}(y)$

$\nu_{C_\nu}(xy) = \inf_{xy\in G}\nu_A(xy) \leq \inf_{x\in G}\nu_A(x)\wedge\inf_{x\in G}\nu_A(y) = \nu_{C_\nu}(x)\wedge\nu_{C_\nu}(y)$

Teorem 4.1.18: G bir grupoid, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy ideal olmak üzere I_μ(A), I_ν(A)∈IFS(G) kümeleri intuitionistic fuzzy idealdir.

İspat. x, y∈G olmak üzere,

i. $\mu_{I_\mu}(xy) = \inf_{xy\in G} \mu_A(xy) \geq \inf_{x\in G} \mu_A(x) \vee \inf_{x\in G} \mu_A(y) = \mu_{I_\mu}(x) \vee \mu_{I_\mu}(y)$

$\nu_{I_\mu}(xy) = \nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \wedge \nu_A(y) = \nu_{I_\mu}(x) \wedge \nu_{I_\mu}(y)$

ii. $I_\nu(A)(xy) = \{< x, min(1 - \sup_{xy\in G} \nu_A(xy), \mu_A(xy)), \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) > \mid x, y\in G\}$

$\nu_{I_\nu}(xy) = \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) \leq \sup_{x\in G} \nu_A(x) \wedge \sup_{y\in G} \nu_A(y) = \nu_{I_\nu}(x) \wedge \nu_{I_\nu}(y)$

$\mu_{I_\nu}(xy) = 1 - \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) \vee \mu_{I_\nu}(xy) = \mu_A(xy)$ dir.

a. $\mu_{I_\nu}(xy) = 1 - \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) \geq 1 - \sup_{x\in G} \nu_A(x) \vee 1 - \sup_{y\in G} \nu_A(y)$

$= \mu_{I_\nu}(x) \vee \mu_{I_\nu}(y)$

b. $\mu_{I_\nu}(xy) = \mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \vee \mu_A(y) = \mu_{I_\nu}(x) \vee \mu_{I_\nu}(y)$

Böylece $I_\mu(A)(xy) \geq I_\mu(A)(x) \vee I_\mu(A)(y)$ ve $I_\nu(A)(xy) \geq I_\nu(A)(x) \vee I_\nu(A)(y)$ dir.

4.2 INTUITIONISTIC FUZZY MODEL OPERATÖRLERİN INTUITIONISTIC FUZZY ALTGRUPLARA UYGULANMASI

Teorem 4.2.1: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere □A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

i. $\mu_{\square A}(xy) = \mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) = \mu_{\square A}(x) \wedge \mu_{\square A}(y)$ ve

$\nu_{\square A}(xy) = 1 - \mu_A(xy) \leq (1 - \mu_A(x)) \vee (1 - \mu_A(y)) = \nu_{\square A}(x) \vee \nu_{\square A}(y)$

ii. $\mu_{\square A}(x^{-1}) = \mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x) = \mu_{\square A}(x)$ ve

$\nu_{\Box A}(x^{-1}) = 1 - \mu_A(x^{-1}) \leq 1 - \mu_A(x) = \nu_{\Box A}(x)$

Teorem 4.2.2: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere ◊A∈IFS(G) intuitionistic fuzzyaltgruptur.

İspat.x, y∈G için,

i. $\mu_{\Diamond A}(xy) = 1 - \nu_A(xy) \geq (1 - \nu_A(x)) \wedge (1 - \nu_A(y)) = \mu_{\Diamond A}(x) \wedge \mu_{\Diamond A}(y)$,

   $\nu_{\Diamond A}(xy) = \nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) = \nu_{\Diamond A}(x) \vee \nu_{\Diamond A}(y)$

ii. $\mu_{\Diamond A}(x^{-1}) = 1 - \nu_A(x^{-1}) \geq 1 - \nu_A(x) = \mu_{\Diamond A}(x)$ ve

   $\nu_{\Diamond A}(x^{-1}) = \nu_A(x^{-1}) \leq \nu_A(x) = \nu_{\Diamond A}(x)$

Teorem 4.2.3: G bir grup, $A \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere$nA \in$ re$nA \in IFS(G)$intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.$x, y \in G$ için,

i. $\mu_{nA}(xy) = 1 - \left(1 - \mu_A(xy)\right)^n \geq 1 - \left(1 - \mu_A(x)\right)^n \wedge 1 - \left(1 - \mu_A(y)\right)^n$

   $= \mu_{nA}(x) \wedge \mu_{nA}(y)$

   $\nu_{nA}(xy) = \left(\nu_A(x)\right)^n \leq \left(\nu_A(x)\right)^n \vee \left(\nu_A(y)\right)^n = \nu_{nA}(x) \vee \nu_{nA}(y)$

ii. $\mu_{nA}(x^{-1}) = 1 - \left(1 - \mu_A(x^{-1})\right)^n \geq 1 - \left(1 - \mu_A(x)\right)^n = \mu_{nA}(x)$

   $\nu_{nA}(x^{-1}) = \left(\nu_A(x^{-1})\right)^n \leq \left(\nu_A(x)\right)^n = \nu_{nA}(x)$

Teorem 4.2.4: G bir grup, $A \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere $A^n \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.$x, y \in G$ için,

i. $\mu_{A^n}(xy) = \left(\mu_A(xy)\right)^n \geq \left(\mu_A(x)\right)^n \wedge \left(\mu_A(y)\right)^n = \mu_{A^n}(x) \wedge \mu_{A^n}(y)$

$$\nu_{A^n}(xy) = 1-\left(1-\nu_A(xy)\right)^n \geq 1-\left(1-\nu_A(x)\right)^n \vee 1-\left(1-\nu_A(y)\right)^n$$

$$= \nu_{A^n}(x) \vee \nu_{A^n}(y)$$

ii. $\mu_{A^n}(x^{-1}) = \left(\mu_A(x^{-1})\right)^n \geq \left(\mu_A(x)\right)^n = \mu_{A^n}(x)$

$$\nu_{A^n}(x^{-1}) = 1-\left(1-\nu_A(x^{-1})\right)^n \geq 1-\left(1-\nu_A(x)\right)^n = \nu_{A^n}(x)$$

Teorem 4.2.5: G bir grup, A∈IFS(G)intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere ⊞A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.x, y∈G için,

i. $\mu_{\boxplus A}(xy) = \frac{\mu_A(xy)}{2} \geq \frac{\mu_A(x)}{2} \wedge \frac{\mu_A(y)}{2} = \mu_{\boxplus A}(x) \wedge \mu_{\boxplus A}(y)$

$$\nu_{\boxplus A}(xy) = \frac{\nu_A(xy)+1}{2} \leq \frac{\nu_A(x)+1}{2} \vee \frac{\nu_A(y)+1}{2} = \nu_{\boxplus A}(x) \vee \nu_{\boxplus A}(y)$$

ii. $\mu_{\boxplus A}(x^{-1}) = \frac{\mu_A(x^{-1})}{2} \geq \frac{\mu_A(x)}{2} = \mu_{\boxplus A}(x)$

$$\nu_{\boxplus A}(x^{-1}) = \frac{\nu_A(x^{-1})+1}{2} \leq \frac{\nu_A(x)+1}{2} = \nu_{\boxplus A}(x)$$

Teorem 4.2.6: G bir grup, A∈IFS(G)intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere ⊠A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.x, y∈G için,

i. $\mu_{\boxtimes A}(xy) = \frac{\mu_A(xy)+1}{2} \geq \frac{\mu_A(x)+1}{2} \wedge \frac{\mu_A(y)+1}{2} = \mu_{\boxtimes A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes A}(y)$

$$\nu_{\boxtimes A}(xy) = \frac{\nu_A(xy)}{2} \geq \frac{\nu_A(x)}{2} \vee \frac{\nu_A(y)}{2} = \nu_{\boxtimes A}(x) \vee \nu_{\boxtimes A}(y)$$

ii. $\mu_{\boxtimes A}(x^{-1}) = \frac{\mu_A(x^{-1})+1}{2} \geq \frac{\mu_A(x)+1}{2} = \mu_{\boxtimes A}(x)$

$$\nu_{\boxtimes A}(x^{-1}) = \frac{\nu_A(x^{-1})}{2} \geq \frac{\nu_A(x)}{2} = \nu_{\boxtimes A}(x)$$

Teorem 4.2.7: G bir grup, A∈IFS(G)intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere $\boxplus_\alpha$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.x, y∈G için,

i. $\mu_{\boxplus_\alpha A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) \geq \alpha\mu_A(x) \wedge \alpha\mu_A(y) = \mu_{\boxplus_\alpha A}(x) \wedge \mu_{\boxplus_\alpha A}(y)$

$$\nu_{\boxplus_\alpha A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) + 1 - \alpha \leq (\alpha\nu_A(x) + 1 - \alpha) \vee (\alpha\nu_A(y) + 1 - \alpha)$$
$$= \nu_{\boxplus_\alpha A}(x) \vee \nu_{\boxplus_\alpha A}(y)$$

ii. $\mu_{\boxplus_\alpha A}(x^{-1}) = \alpha\mu_A(x^{-1}) \geq \alpha\mu_A(x) = \mu_{\boxplus_\alpha A}(x)$

$$\nu_{\boxplus_\alpha A}(x^{-1}) = \alpha\nu_A(x^{-1}) + 1 - \alpha \leq \alpha\nu_A(x) + 1 - \alpha = \nu_{\boxplus_\alpha A}(x)$$

Teorem 4.2.8: G bir grup, A∈IFS(G)intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere $\boxtimes_\alpha$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.x, y∈G için,

i. $\mu_{\boxtimes_\alpha A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + 1 - \alpha \geq \alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha \wedge \alpha\mu_A(y) + 1 - \alpha$

$$= \mu_{\boxtimes_\alpha A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes_\alpha A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes_\alpha A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) \leq \alpha\nu_A(x) \vee \alpha\nu_A(y) = \nu_{\boxtimes_\alpha A}(x) \vee \nu_{\boxtimes_\alpha A}(y)$$

ii. $\mu_{\boxtimes_\alpha A}(x^{-1}) = \alpha\mu_A(x^{-1}) + 1 - \alpha \geq \alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha = \mu_{\boxtimes_\alpha A}(x)$

$$\nu_{\boxtimes_\alpha A}(x^{-1}) = \alpha\nu_A(x^{-1}) \leq \alpha\nu_A(x) = \nu_{\boxtimes_\alpha A}(x)$$

Teorem 4.2.9: G bir grup, A∈IFS(G)intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere $\boxplus_{\alpha,\beta}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.x, y∈G için,

i. $\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) \geq \alpha\mu_A(x) \wedge \alpha\mu_A(y) = \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(x) \wedge \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(y)$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) + \beta \leq \alpha\nu_A(x) + \beta \vee \alpha\nu_A(y) + \beta$$

$$= \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(x) \vee \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(y)$$

ii. $\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(x^{-1}) = \alpha\mu_A(x^{-1}) \geq \alpha\mu_A(x) = \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(x)$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(x^{-1}) = \alpha\nu_A(x^{-1}) + \beta \leq \alpha\nu_A(x) + \beta = \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(x)$$

Teorem 4.2.10: G bir grup, A∈IFS(G)intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere $\boxtimes_{\alpha,\beta}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.x, y∈G için,

i. $\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \beta \geq \alpha\mu_A(x) + \beta \wedge \alpha\mu_A(y) + \beta$

$$= \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) \leq \alpha\nu_A(x) \vee \alpha\nu_A(y) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x) \vee \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(y)$$

ii. $\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x^{-1}) = \alpha\mu_A(x^{-1}) + \beta \geq \alpha\mu_A(x) + \beta = \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x)$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x^{-1}) = \alpha\nu_A(x^{-1}) \leq \alpha\nu_A(x) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x)$$

Teorem 4.2.11: G bir grup, A∈IFS(G)intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere $\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.x, y∈G için,

i. $\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) \geq \alpha\mu_A(x) \wedge \alpha\mu_A(y)$

$$= \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \wedge \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \beta\nu_A(xy) + \gamma \leq \beta\nu_A(x) + \gamma \vee \beta\nu_A(y) + \gamma$$

$$= \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \vee \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

ii. $\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x^{-1}) = \alpha\mu_A(x^{-1}) \geq \alpha\mu_A(x) = \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x)$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x^{-1}) = \beta\nu_A(x^{-1}) + \gamma \leq \beta\nu_A(x) + \gamma = \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x)$$

Teorem 4.2.12: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere $\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.x, y∈G için,

i. $\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \gamma \geq (\alpha\mu_A(x) + \gamma) \wedge (\alpha\mu_A(y) + \gamma)$

$$= \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \beta\nu_A(xy) \leq \beta\nu_A(x) \vee \beta\nu_A(y) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \vee \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

ii. $\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x^{-1}) = \alpha\mu_A(x^{-1}) + \alpha \geq \alpha\mu_A(x) + \gamma = \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x)$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x^{-1}) = \beta\nu_A(x^{-1}) \leq \beta\nu_A(x) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x)$$

Teorem 4.2.13: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere $E_{\alpha,\beta}$(A)∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.x, y∈G için,

i. $\mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \beta(\alpha\mu_A(xy) + 1 - \alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha) \wedge$
$\beta(\alpha\mu_A(y) + 1 - \alpha) = \mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x) \wedge \mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(y)$

$$\nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \alpha(\beta\nu_A(xy) + 1 - \beta) \leq \alpha(\beta\nu_A(x) + 1 - \beta) \vee \alpha(\beta\nu_A(y) + 1 - \beta)$$

$$= \nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x) \vee \nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

ii. $\mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x^{-1}) = \beta(\alpha\mu_A(x^{-1}) + 1 - \alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha)$

$$= \mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x)$$

$$\nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x^{-1}) = \alpha(\beta\nu_A(x^{-1}) + 1 - \beta) \leq \alpha(\beta\nu_A(x) + 1 - \beta) = \nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x)$$

Teorem 4.2.14: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere $\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$(A)∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

i. $$\mu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \gamma \geq (\alpha\mu_A(x) + \gamma) \wedge (\alpha\mu_A(y) + \gamma)$$
$$= \mu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(x) \wedge \mu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(y)$$

$$\nu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(xy) = \beta\nu_A(xy) + \delta \leq (\beta\nu_A(x) + \delta) \vee (\beta\nu_A(y) + \delta$$

$$= \nu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(x) \vee \nu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(y)$$

ii. $$\mu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(x^{-1}) = \alpha\mu_A(x^{-1}) + \gamma \geq \alpha\mu_A(x) + \gamma = \mu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(x)$$

$$\nu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(x^{-1}) = \beta\nu_A(x^{-1}) + \delta \leq \beta\nu_A(x) + \delta = \nu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(x)$$

Teorem 4.2.15: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)$∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

i. $$\mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \beta(\alpha\mu_A(xy) + \omega - \omega\alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + \omega - \omega\alpha) \wedge$$
$$\beta(\alpha\mu_A(y) + \omega - \omega\alpha) = \mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \wedge \mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

$$\nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \alpha(\beta\nu_A(xy) + \omega - \omega\beta)$$
$$\leq \alpha(\beta\nu_A(x) + \omega - \omega\beta) \vee \alpha(\beta\nu_A(y) + \omega - \omega\beta)$$
$$= \nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \vee \nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

ii. $$\mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x^{-1}) = \beta(\alpha\mu_A(x^{-1}) + \omega - \omega\alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + \omega - \omega\alpha) =$$
$$\mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x)$$

$$\nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x^{-1}) = \alpha(\beta\nu_A(x^{-1}) + \omega - \omega\beta) \leq \alpha(\beta\nu_A(x) + \omega - \omega\beta) = \nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x)$$

Teorem 4.2.16: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere $Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)$∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat.x, y∈G için,

i. $\mu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(xy) = \beta(\alpha\mu_A(xy) + \omega - \omega\alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + \omega - \omega\alpha) \wedge$

$\beta(\alpha\mu_A(y) + \omega - \omega\alpha) = \mu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(x) \wedge \mu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(y)$

$$\nu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(xy) = \alpha(\beta\nu_A(xy) + \theta - \theta\beta)$$

$$\leq \alpha(\beta\nu_A(x) + \theta - \theta\beta) \vee \alpha(\beta\nu_A(y) + \theta - \theta\beta)$$

$$= \nu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(x) \vee \nu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(y)$$

ii. $\mu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(x^{-1}) = \beta(\alpha\mu_A(x^{-1}) + \omega - \omega\alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + \omega - \omega\alpha) =$

$\mu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(x)$

$$\nu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(x^{-1}) = \alpha(\beta\nu_A(x^{-1}) + \theta - \theta\beta) \leq \alpha(\beta\nu_A(x) + \theta - \theta\beta) = \nu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(x)$$

Teorem 4.2.17: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere C_μ(A), C_ν(A)∈IFS(G) kümeleri intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

i. $C_\mu(A)(xy) = \{<$

$xy, \sup_{xy\in G} \mu_A(xy), \min(1 - \sup_{xy\in G} \mu_A(xy), \nu_A(xy)) > | x, y \in G\}$

$$\mu_{C_\mu}(xy) = \sup_{xy\in G} \mu_A(xy) \geq \sup_{x\in G} \mu_A(x) \wedge \sup_{y\in G} \mu_A(y) = \mu_{C_\mu}(x) \wedge \mu_{C_\mu}(y)$$

$$\mu_{C_\mu}(x^{-1}) = \sup_{x^{-1}\in G} \mu_A(x^{-1}) \geq \sup_{x\in G} \mu_A(x) = \mu_{C_\mu}(x)$$

$\nu_{C_\mu}(xy) = 1 - \sup_{xy\in G} \mu_A(xy) \vee \nu_{C_\mu}(xy) = \nu_A(xy)$ dir.

a. $\nu_{C_\mu}(xy) = \nu_A(xy) \geq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) \Rightarrow \nu_{C_\mu}(xy) \leq \nu_{C_\mu}(x) \vee \nu_{C_\mu}(y)$,

$\nu_{C_\mu}(x^{-1}) = \nu_A(x^{-1}) \geq \nu_A(x) = \nu_{C_\mu}(x)$

b. $\nu_{C_\mu}(xy) = 1 - \sup_{xy\in G} \mu_A(xy) \leq 1 - \sup_{x\in G} \mu_A(x) \vee 1 - \sup_{y\in G} \mu_A(y)$

$$=\nu_{C_\mu}(x) \vee \nu_{C_\mu}(y),$$

$$\nu_{C_\mu}(x^{-1}) = 1 - \sup_{x^{-1}\in G} \mu_A(x^{-1}) \leq 1 - \sup_{x\in G} \mu_A(x) = \nu_{C_\mu}(x)$$

ii. $\mu_{C_\nu}(xy) = \mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) = \mu_{C_\nu}(x) \wedge \mu_{C_\nu}(y)$

$\nu_{C_\nu}(xy) = \inf_{xy\in G} \nu_A(xy) \leq \inf_{x\in G} \nu_A(x) \vee \inf_{x\in G} \nu_A(y) = \nu_{C_\nu}(x) \vee \nu_{C_\nu}(y)$

$\mu_{C_\nu}(x^{-1}) = \mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x) = \mu_{C_\nu}(x)$

$\nu_{C_\nu}(x^{-1}) = \inf_{xy\in G} \nu_A(x^{-1}) \leq \inf_{x\in G} \nu_A(x) = \nu_{C_\nu}(x)$

Teorem 4.2.18: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy altgrup olmak üzere I_μ(A), I_ν(A)∈IFS(G) kümeleri intuitionistic fuzzy altgruptur.

İspat. x, y∈G olmak üzere,

i. $\mu_{I_\mu}(xy) = \inf_{xy\in G} \mu_A(xy) \geq \inf_{x\in G} \mu_A(x) \wedge \inf_{x\in G} \mu_A(y) = \mu_{I_\mu}(x) \wedge \mu_{I_\mu}(y)$

$\nu_{I_\mu}(xy) = \nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) = \nu_{I_\mu}(x) \vee \nu_{I_\mu}(y)$

$\mu_{I_\mu}(x^{-1}) = \inf_{xy\in G} \mu_A(x^{-1}) \geq \inf_{x\in G} \mu_A(x) = \mu_{I_\mu}(x)$

$\nu_{I_\mu}(x^{-1}) = \nu_A(x^{-1}) \leq \nu_A(x) = \nu_{I_\mu}(x)$

ii. $I_\nu(A)(xy) = \{< x, min(1 - \sup_{xy\in G} \nu_A(xy), \mu_A(xy)), \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) >$

$| x, y\in G\}$

$\nu_{I_\nu}(xy) = \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) \leq \sup_{x\in G} \nu_A(x) \vee \sup_{y\in G} \nu_A(y) = \nu_{I_\nu}(x) \vee \nu_{I_\nu}(y)$

$\nu_{I_\nu}(x^{-1}) = \sup_{x^{-1}\in G} \nu_A(x^{-1}) \leq \sup_{x\in G} \nu_A(x) = \nu_{I_\nu}(x)$

$\mu_{I_\nu}(xy) = 1 - \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) \vee \mu_{I_\nu}(xy) = \mu_A(xy)$ dir.

a. $\mu_{I_\nu}(xy) = 1 - \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) \geq 1 - \sup_{x\in G} \nu_A(x) \wedge 1 - \sup_{y\in G} \nu_A(y)$

$$= \mu_{I_\nu}(x) \wedge \mu_{I_\nu}(y)$$

$$\mu_{I_\nu}(x^{-1}) = 1 - \sup_{x^{-1}\in G} \nu_A(x^{-1}) \geq 1 - \sup_{x\in G} \nu_A(x) = \mu_{I_\nu}(x)$$

b. $\mu_{I_\nu}(\mathrm{xy}) = \mu_A(\mathrm{xy}) \geq \mu_A(\mathrm{x}) \wedge \mu_A(\mathrm{y}) = \mu_{I_\nu}(\mathrm{x}) \wedge \mu_{I_\nu}(\mathrm{y})$

$$\mu_{I_\nu}(\mathrm{x}^{-1}) = \mu_A(\mathrm{x}^{-1}) \geq \mu_A(\mathrm{x}) = \mu_{I_\nu}(\mathrm{x})$$

4.3 INTUITIONISTIC FUZZY MODEL OPERATÖRLERİN INTUITIONISTIC FUZZY NORMAL ALTGRUPLARA UYGULANMASI

Teorem 4.3.1: G bir grup, A∈IFS(G)intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $\Box$A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$\mu_{\Box A}(\mathrm{xy}) = \mu_A(\mathrm{xy}) = \mu_A(\mathrm{yx}) = \mu_{\Box A}(\mathrm{yx})$,

$\nu_{\Box A}(\mathrm{xy}) = 1 - \mu_A(\mathrm{xy}) = 1 - \mu_A(\mathrm{yx}) = \nu_{\Box A}(\mathrm{yx})$

O halde $\Box A(\mathrm{xy}) = \Box A(\mathrm{yx})$ dir.

Teorem 4.3.2: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere ◊A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$\mu_{\Diamond A}(\mathrm{xy}) = 1 - \nu_A(\mathrm{xy}) = 1 - \nu_A(\mathrm{yx}) = \mu_{\Diamond A}(\mathrm{yx})$,

$$\nu_{\Diamond A}(\mathrm{xy}) = \nu_A(\mathrm{xy}) = \nu_A(\mathrm{yx}) = \nu_{\Diamond A}(\mathrm{yx})$$

O halde $\Diamond A(\mathrm{xy}) = \Diamond A(\mathrm{yx})$dir.

Teorem 4.3.3: G bir grup, $A \in \mathrm{IFS(G)}$intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $nA \in \mathrm{IFS(G)}$intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat.$\mathrm{x, y} \in \mathrm{G}$ için,

$$\mu_{nA}(\mathrm{xy}) = 1 - \left(1 - \mu_A(\mathrm{xy})\right)^n = 1 - \left(1 - \mu_A(\mathrm{yx})\right)^n = \mu_{nA}(\mathrm{yx})$$

$$\nu_{nA}(xy) = \left(\nu_A(xy)\right)^n = \left(\nu_A(yx)\right)^n = \nu_{nA}(yx)$$

Böylece $nA(xy) = nA(xy)$ dir.

Teorem 4.3.4: G bir grup, $A \in IFS(G)$intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $A^n \in IFS(G)$intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat.$x, y \in G$ için,

$$\mu_{A^n}(xy) = \left(\mu_A(xy)\right)^n = \left(\mu_A(yx)\right)^n = \mu_{A^n}(yx)$$

$$\nu_{A^n}(xy) = 1 - \left(1 - \nu_A(xy)\right)^n = 1 - \left(1 - \nu_A(yx)\right)^n = \nu_{A^n}(yx)$$

Böylece $A^n(xy) = A^n(yx)$ dir.

Teorem 4.3.5: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere ⊞A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxplus A}(xy) = \frac{\mu_A(xy)}{2} = \frac{\mu_A(yx)}{2} = \mu_{\boxplus A}(yx),$$

$$\nu_{\boxplus A}(xy) = \frac{\nu_A(xy) + 1}{2} = \frac{\nu_A(yx) + 1}{2} = \nu_{\boxplus A}(yx)$$

O halde $\boxplus A(xy) = \boxplus A(yx)$ dir.

Teorem 4.3.6: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere ⊠A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxtimes A}(xy) = \frac{\mu_A(xy)+1}{2} = \frac{\mu_A(yx)+1}{2} = \mu_{\boxtimes A}(yx),$$

$$\nu_{\boxtimes A}(xy) = \frac{\nu_A(xy)}{2} = \frac{\nu_A(yx)}{2} = \nu_{\boxtimes A}(yx)$$

O halde $\boxtimes A(xy) = \boxtimes A(yx)$ dir.

Teorem 4.3.7: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $\boxplus_\alpha$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxplus_\alpha A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) = \alpha\mu_A(yx) = \mu_{\boxplus_\alpha A}(yx),$$

$$\nu_{\boxplus_\alpha A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) + 1 - \alpha = \alpha\nu_A(yx) + 1 - \alpha = \nu_{\boxplus_\alpha A}(yx)$$

O halde $\boxplus_\alpha$ A(xy)=$\boxplus_\alpha$ A(yx)dir.

Teorem 4.3.8: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $\boxtimes_\alpha$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxtimes_\alpha A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + 1 - \alpha = \alpha\mu_A(yx) + 1 - \alpha = \mu_{\boxtimes_\alpha A}(yx),$$

$$\nu_{\boxtimes_\alpha A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) = \alpha\nu_A(yx) = \nu_{\boxtimes_\alpha A}(yx)$$

O halde $\boxtimes_\alpha$ A(xy) =$\boxtimes_\alpha$ A(yx) dir.

Teorem 4.3.9: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $\boxplus_{\alpha,\beta}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) = \alpha\mu_A(yx) = \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(yx),$$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) + \beta = \alpha\nu_A(yx) + \beta = \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(yx)$$

O halde $\boxplus_{\alpha,\beta}$ A(xy)=$\boxplus_{\alpha,\beta}$ A(yx) dir.

Teorem 4.3.10: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $\boxtimes_{\alpha,\beta}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \beta = \alpha\mu_A(yx) + \beta = \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(yx),$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) = \alpha\nu_A(yx) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(yx)$$

O halde $\boxtimes_{\alpha,\beta}$ A(xy) =$\boxtimes_{\alpha,\beta}$ A(yx) dir.

Teorem 4.3.11: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) = \alpha\mu_A(yx) = \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(yx),$$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \beta\nu_A(xy) + \gamma = \beta\nu_A(yx) + \gamma = \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(yx)$$

O halde $\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}$ A(xy)=$\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}$ A(yx)dir.

Teorem 4.3.12: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}$ A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \gamma = \alpha\mu_A(yx) + \gamma = \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(yx),$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \beta\nu_A(xy) = \beta\nu_A(yx) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(yx)$$

O halde $\boxtimes_{\alpha\beta\gamma}$(A)(xy)=$\boxtimes_{\alpha\beta\gamma}$(A)(yx) dir.

Teorem 4.3.13: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $E_{\alpha,\beta}(A)\in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \beta(\alpha\mu_A(xy) + 1 - \alpha) = \beta(\alpha\mu_A(yx) + 1 - \alpha) = \mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(yx),$$

$$\nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \alpha(\beta\nu_A(xy) + 1 - \beta) = \alpha(\beta\nu_A(yx) + 1 - \beta) = \nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(yx)$$

O halde $E_{\alpha,\beta}(A)(xy) = E_{\alpha,\beta}(A)(yx)$ dir.

Teorem 4.3.14: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)\in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \gamma = \alpha\mu_A(yx) + \gamma = \mu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(yx)$$

$$\nu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(xy) = \beta\nu_A(xy) + \delta = \beta\nu_A(yx) + \delta = \nu_{\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)}(yx)$$

O halde $\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)(xy) = \boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)(yx)$ dir.

Teorem 4.3.15: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)\in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \beta(\alpha\mu_A(xy) + \omega - \omega\alpha) = \beta(\alpha\mu_A(yx) + \omega - \omega\alpha) = \mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(yx)$$

$$\nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \alpha(\beta\nu_A(xy) + \omega - \omega\beta) = \alpha(\beta\nu_A(yx) + \omega - \omega\beta) = \nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(yx)$$

Böylece $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)(xy) = Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)(yx)$ dir.

Teorem 4.3.16: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere $Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A) \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

$$\mu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(xy) = \beta(\alpha\mu_A(xy) + \omega - \omega\alpha) = \beta(\alpha\mu_A(yx) + \omega - \omega\alpha) = \mu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(yx)$$

$$\nu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(xy) = \alpha(\beta\nu_A(xy) + \theta - \theta\beta) = \alpha(\beta\nu_A(yx) + \theta - \theta\beta) = \nu_{Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)}(yx)$$

Böylece $Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)(xy) = Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}(A)(yx)$ dir.

Teorem 4.3.17: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere C_μ(A), C_ν(A)∈IFS(G) kümeleri intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G için,

i. $C_\mu(A)(xy) = \{< xy, \sup_{xy\in G} \mu_A(xy), \min(1 - \sup_{xy\in G} \mu_A(xy), \nu_A(xy)) > |\, x, y \in G\}$

$\mu_{C_\mu}(xy) = \sup_{xy\in G} \mu_A(xy) = \sup_{x\in G} \mu_A(yx) = \mu_{C_\mu}(yx)$

$\nu_{C_\mu}(xy) = 1 - \sup_{xy\in G} \mu_A(xy) \vee \nu_{C_\mu}(xy) = \nu_A(xy)$ dir.

a. $\nu_{C_\mu}(xy) = \nu_A(xy) = \nu_A(yx) = \nu_{C_\mu}(yx)$,

b. $\nu_{C_\mu}(xy) = 1 - \sup_{xy\in G} \mu_A(xy) = 1 - \sup_{x\in G} \mu_A(yx) = \nu_{C_\mu}(yx)$,

ii. $\mu_{C_\nu}(xy) = \mu_A(xy) = \mu_A(yx) = \mu_{C_\nu}(yx)$

$\nu_{C_\nu}(xy) = \inf_{xy\in G} \nu_A(xy) = \inf_{x\in G} \nu_A(yx) = \nu_{C_\nu}(yx)$

Böylece $C_\mu(A)(xy) = C_\mu(A)(yx)$ ve $C_\nu(A)(xy) = C_\nu(A)(yx)$ dir.

Teorem 4.3.18: G bir grup, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy normal altgrup olmak üzere I_μ(A), I_ν(A)∈IFS(G) kümeleri intuitionistic fuzzy normal altgruptur.

İspat. x, y∈G olmak üzere,

iii. $\mu_{I_\mu}(xy) = \inf_{xy\in G} \mu_A(xy) = \inf_{x\in G} \mu_A(yx) = \mu_{I_\mu}(yx)$

$\nu_{I_\mu}(xy) = \nu_A(xy) = \nu_A(yx) = \nu_{I_\mu}(yx)$

iv. $I_\nu(A)(xy) = \{< x, min(1 - \sup_{xy\in G} \nu_A(xy), \mu_A(xy)), \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) >$

$| x, y\in G\}$

$\nu_{I_\nu}(xy) = \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) = \sup_{x\in G} \nu_A(yx) = \nu_{I_\nu}(yx)$

$\mu_{I_\nu}(xy) = 1 - \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) \vee \mu_{I_\nu}(xy) = \mu_A(xy)$ dir.

a. $\mu_{I_\nu}(xy) = 1 - \sup_{xy\in G} \nu_A(xy) = 1 - \sup_{x\in G} \nu_A(yx) = \mu_{I_\nu}(yx)$

b. $\mu_{I_\nu}(xy) = \mu_A(xy) = \mu_A(yx) = \mu_{I_\nu}(yx)$

Böylece $I_\mu(A)(xy) = I_\mu(A)(yx)$ ve $I_\nu(A)(xy) = I_\nu(A)(yx)$ dir.

4.4 INTUITIONISTIC FUZZY MODEL OPERATÖRLERİN INTUITIONISTIC FUZZY HALKALARA UYGULANMASI

Teorem 4.4.1: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere □A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈R için,

i. $\mu_{\Box A}(xy) = \mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) = \mu_{\Box A}(x) \wedge \mu_{\Box A}(y)$ ve

$\nu_{\Box A}(xy) = 1 - \mu_A(xy) \leq \left(1 - \mu_A(x)\right) \vee \left(1 - \mu_A(y)\right) = \nu_{\Box A}(x) \vee \nu_{\Box A}(y)$

ii. $\mu_{\Box A}(x + y) = \mu_A(x + y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) = \mu_{\Box A}(x) \wedge \mu_{\Box A}(y)$ ve

$\nu_{\Box A}(x + y) = 1 - \mu_A(x + y) \leq \left(1 - \mu_A(x)\right) \vee \left(1 - \mu_A(y)\right)$

$= \nu_{\Box A}(x) \vee \nu_{\Box A}(y)$

iii. $\mu_{\Box A}(-x) = \mu_A(-x) \geq \mu_A(x) = \mu_{\Box A}(x)$ ve

$\nu_{\Box A}(-x) = 1 - \mu_A(-x) \leq 1 - \mu_A(x) = \nu_{\Box A}(x)$

Teorem 4.4.2: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere ◊A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈R için,

i. $\mu_{\Diamond A}(xy) = 1 - \nu_A(xy) \geq (1 - \nu_A(x)) \wedge (1 - \nu_A(y)) = \mu_{\Diamond A}(x) \wedge \mu_{\Diamond A}(y)$,

$\nu_{\Diamond A}(xy) = \nu_A(xy) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) = \nu_{\Diamond A}(x) \vee \nu_{\Diamond A}(y)$

ii. $\mu_{\Diamond A}(x+y) = 1 - \nu_A(x+y) \geq (1 - \nu_A(x)) \wedge (1 - \nu_A(y)) = \mu_{\Diamond A}(x) \wedge \mu_{\Diamond A}(y)$,

$\nu_{\Diamond A}(x+y) = \nu_A(x+y) \leq \nu_A(x) \vee \nu_A(y) = \nu_{\Diamond A}(x) \vee \nu_{\Diamond A}(y)$

iii. $\mu_{\Diamond A}(-x) = 1 - \nu_A(-x) \geq 1 - \nu_A(x) = \mu_{\Diamond A}(x)$ ve

$\nu_{\Diamond A}(-x) = \nu_A(-x) \leq \nu_A(x) = \nu_{\Diamond A}(x)$.

Teorem 4.4.3: R bir halka, $A \in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $nA \in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. $x, y \in R$ için,

i. $\mu_{nA}(xy) = 1 - \left(1 - \mu_A(xy)\right)^n \geq 1 - \left(1 - \mu_A(x)\right)^n \wedge 1 - \left(1 - \mu_A(y)\right)^n$

$= \mu_{nA}(x) \wedge \mu_{nA}(y)$

$\nu_{nA}(xy) = \left(\nu_A(xy)\right)^n \leq \left(\nu_A(x)\right)^n \vee \left(\nu_A(y)\right)^n = \nu_{nA}(x) \vee \nu_{nA}(y)$

ii. $\mu_{nA}(x+y) = 1 - \left(1 - \mu_A(x+y)\right)^n$

$\geq 1 - \left(1 - \mu_A(x)\right)^n \wedge 1 - \left(1 - \mu_A(y)\right)^n = \mu_{nA}(x) \wedge \mu_{nA}(y)$

$\nu_{nA}(x+y) = \left(\nu_A(x+y)\right)^n \leq \left(\nu_A(x)\right)^n \vee \left(\nu_A(y)\right)^n = \nu_{nA}(x) \vee \nu_{nA}(y)$

iii. $\mu_{nA}(x^{-1}) = 1 - \left(1 - \mu_A(x^{-1})\right)^n \geq 1 - \left(1 - \mu_A(x)\right)^n = \mu_{nA}(x)$

$\nu_{nA}(x^{-1}) = \left(\nu_A(x^{-1})\right)^n \leq \left(\nu_A(x)\right)^n = \nu_{nA}(x)$.

Teorem 4.4.4: R bir halka, $A \in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $A^n \in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. $x, y \in R$ için,

i. $\mu_{A^n}(xy) = (\mu_A(xy))^n \geq (\mu_A(x))^n \wedge (\mu_A(y))^n = \mu_{A^n}(x) \wedge \mu_{A^n}(y)$

$$\nu_{A^n}(xy) = 1 - (1 - \nu_A(xy))^n \geq 1 - (1 - \nu_A(x))^n \vee 1 - (1 - \nu_A(y))^n$$
$$= \nu_{A^n}(x) \vee \nu_{A^n}(y)$$

ii. $\mu_{A^n}(x + y) = (\mu_A(x + y))^n \geq (\mu_A(x))^n \wedge (\mu_A(y))^n = \mu_{A^n}(x) \wedge \mu_{A^n}(y)$

$$\nu_{A^n}(x + y) = 1 - (1 - \nu_A(x + y))^n$$
$$\geq 1 - (1 - \nu_A(x))^n \vee 1 - (1 - \nu_A(y))^n = \nu_{A^n}(x) \vee \nu_{A^n}(y)$$

iii. $\mu_{A^n}(x^{-1}) = (\mu_A(x^{-1}))^n \geq (\mu_A(x))^n = \mu_{A^n}(x)$

$$\nu_{A^n}(x^{-1}) = 1 - (1 - \nu_A(x^{-1}))^n \geq 1 - (1 - \nu_A(x))^n = \nu_{A^n}(x)$$

Teorem 4.4.5: R bir halka, $A \in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $\boxplus A \in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. $x, y \in R$ için,

i. $\mu_{\boxplus A}(xy) = \frac{\mu_A(xy)}{2} \geq \frac{\mu_A(x)}{2} \wedge \frac{\mu_A(y)}{2} = \mu_{\boxplus A}(x) \wedge \mu_{\boxplus A}(y)$

$$\nu_{\boxplus A}(xy) = \frac{\nu_A(xy) + 1}{2} \leq \frac{\nu_A(x) + 1}{2} \vee \frac{\nu_A(y) + 1}{2} = \nu_{\boxplus A}(x) \vee \nu_{\boxplus A}(y)$$

ii. $\mu_{\boxplus A}(x + y) = \frac{\mu_A(x+y)}{2} \geq \frac{\mu_A(x)}{2} \wedge \frac{\mu_A(y)}{2} = \mu_{\boxplus A}(x) \wedge \mu_{\boxplus A}(y)$

$$\nu_{\boxplus A}(x + y) = \frac{\nu_A(x + y) + 1}{2} \leq \frac{\nu_A(x) + 1}{2} \vee \frac{\nu_A(y) + 1}{2} = \nu_{\boxplus A}(x) \vee \nu_{\boxplus A}(y)$$

iii. $\mu_{\boxplus A}(-x) = \frac{\mu_A(-x)}{2} \geq \frac{\mu_A(x)}{2} = \mu_{\boxplus A}(x)$

$\nu_{\boxplus A}(-x) = \frac{\nu_A(-x)+1}{2} \leq \frac{\nu_A(x)+1}{2} = \nu_{\boxplus A}(x)$

Teorem 4.4.6: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $\boxtimes A \in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈R için,

i. $\mu_{\boxtimes A}(xy) = \frac{\mu_A(xy)+1}{2} \geq \frac{\mu_A(x)+1}{2} \wedge \frac{\mu_A(y)+1}{2} = \mu_{\boxtimes A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes A}(y)$

$\nu_{\boxtimes A}(xy) = \frac{\nu_A(xy)}{2} \geq \frac{\nu_A(x)}{2} \vee \frac{\nu_A(y)}{2} = \nu_{\boxtimes A}(x) \vee \nu_{\boxtimes A}(y)$

ii. $\mu_{\boxtimes A}(x+y) = \frac{\mu_A(x+y)+1}{2} \geq \frac{\mu_A(x)+1}{2} \wedge \frac{\mu_A(y)+1}{2} = \mu_{\boxtimes A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes A}(y)$

$\nu_{\boxtimes A}(x+y) = \frac{\nu_A(x+y)}{2} \geq \frac{\nu_A(x)}{2} \vee \frac{\nu_A(y)}{2} = \nu_{\boxtimes A}(x) \vee \nu_{\boxtimes A}(y)$

iii. $\mu_{\boxtimes A}(-x) = \frac{\mu_A(-x)+1}{2} \geq \frac{\mu_A(x)+1}{2} = \mu_{\boxtimes A}(x)$

$\nu_{\boxtimes A}(-x) = \frac{\nu_A(-x)}{2} \geq \frac{\nu_A(x)}{2} = \nu_{\boxtimes A}(x)$

Teorem 4.4.7: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $\boxplus_\alpha A \in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈ R için,

i. $\mu_{\boxplus_\alpha A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) \geq \alpha\mu_A(x) \wedge \alpha\mu_A(y) = \mu_{\boxplus_\alpha A}(x) \wedge \mu_{\boxplus_\alpha A}(y)$

$\nu_{\boxplus_\alpha A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) + 1 - \alpha \leq (\alpha\nu_A(x) + 1 - \alpha) \vee (\alpha\nu_A(y) + 1 - \alpha)$

$= \nu_{\boxplus_\alpha A}(x) \vee \nu_{\boxplus_\alpha A}(y)$

ii. $\mu_{\boxplus_\alpha A}(x+y) = \alpha\mu_A(x+y) \geq \alpha\mu_A(x) \wedge \alpha\mu_A(y) = \mu_{\boxplus_\alpha A}(x) \wedge \mu_{\boxplus_\alpha A}(y)$

$\nu_{\boxplus_\alpha A}(x+y) = \alpha\nu_A(x+y) + 1 - \alpha$

$\leq (\alpha\nu_A(x) + 1 - \alpha) \vee (\alpha\nu_A(y) + 1 - \alpha) = \nu_{\boxplus_\alpha A}(x) \vee$

$\nu_{\boxplus_\alpha A}(y)$

iii. $\mu_{\boxplus_\alpha A}(-x) = \alpha\mu_A(-x) \geq \alpha\mu_A(x) = \mu_{\boxplus_\alpha A}(x)$

$\nu_{\boxplus_\alpha A}(-x) = \alpha\nu_A(-x) + 1 - \alpha \leq \alpha\nu_A(x) + 1 - \alpha = \nu_{\boxplus_\alpha A}(x)$

Teorem 4.4.8: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $\boxtimes_\alpha A \in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈ R için,

i. $$\mu_{\boxtimes_\alpha A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + 1 - \alpha \geq \alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha \wedge \alpha\mu_A(y) + 1 - \alpha$$
$$= \mu_{\boxtimes_\alpha A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes_\alpha A}(y)$$

ii. $$\mu_{\boxtimes_\alpha A}(x + y) = \alpha\mu_A(x + y) + 1 - \alpha$$
$$\geq \alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha \wedge \alpha\mu_A(y) + 1 - \alpha$$
$$= \mu_{\boxtimes_\alpha A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes_\alpha A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes_\alpha A}(x + y) = \alpha\nu_A(x + y) \leq \alpha\nu_A(x) \vee \alpha\nu_A(y) = \nu_{\boxtimes_\alpha A}(x) \vee \nu_{\boxtimes_\alpha A}(y)$$

iii. $$\mu_{\boxtimes_\alpha A}(-x) = \alpha\mu_A(-x) + 1 - \alpha \geq \alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha = \mu_{\boxtimes_\alpha A}(x)$$

$$\nu_{\boxtimes_\alpha A}(-x) = \alpha\nu_A(-x) \leq \alpha\nu_A(x) = \nu_{\boxtimes_\alpha A}(x)$$

Teorem 4.4.9: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $\boxplus_{\alpha,\beta} A \in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈ R için,

i. $$\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) \geq \alpha\mu_A(x) \wedge \alpha\mu_A(y) = \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(x) \wedge \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(y)$$
$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) + \beta \leq (\alpha\nu_A(x) + \beta) \vee (\alpha\nu_A(y) + \beta)$$

$$= \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(x) \vee \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(y)$$

ii. $$\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(x + y) = \alpha\mu_A(x + y) \geq \alpha\mu_A(x) \wedge \alpha\mu_A(y)$$
$$= \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(x) \wedge \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(y)$$
$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(x + y) = \alpha\nu_A(x + y) + \beta \leq (\alpha\nu_A(x) + \beta) \vee (\alpha\nu_A(y) + \beta)$$

$$= \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(x) \vee \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(y)$$

iii. $$\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(-x) = \alpha\mu_A(-x) \geq \alpha\mu_A(x) = \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta} A}(x)$$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(-x) = \alpha\nu_A(-x) + \beta \le \alpha\nu_A(x) + \beta = \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta}A}(x)$$

Teorem 4.4.10: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $\boxtimes_{\alpha,\beta}A \in$ IFS(R) intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈ R için,

i. $$\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \beta \ge \alpha\mu_A(x) + \beta \wedge \alpha\mu_A(y) + \beta$$
$$= \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(xy) = \alpha\nu_A(xy) \le \alpha\nu_A(x) \vee \alpha\nu_A(y) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x) \vee \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(y)$$

ii. $$\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x+y) = \alpha\mu_A(x+y) + \beta \ge \alpha\mu_A(x) + \beta \wedge \alpha\mu_A(y) + \beta$$
$$= \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x+y) = \alpha\nu_A(x+y) \le \alpha\nu_A(x) \vee \alpha\nu_A(y)$$

$$= \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x) \vee \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(y)$$

iii. $$\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(-x) = \alpha\mu_A(-x) + \beta \ge \alpha\mu_A(x) + \beta = \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x)$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(-x) = \alpha\nu_A(-x) \le \alpha\nu_A(x) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta}A}(x)$$

Teorem 4.4.11: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A \in$ IFS(R) intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈ R için,

i. $$\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) \ge \alpha\mu_A(x) \wedge \alpha\mu_A(y)$$
$$= \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \wedge \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$
$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \beta\nu_A(xy) + \gamma \le \beta\nu_A(x) + \gamma \vee \beta\nu_A(y) + \gamma$$

$$= \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \vee \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

ii. $\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x+y) = \alpha\mu_A(x+y) \geq \alpha\mu_A(x) \wedge \alpha\mu_A(y)$

$$= \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \wedge \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x+y) = \beta\nu_A(x+y) + \gamma \leq \beta\nu_A(x) + \gamma \vee \beta\nu_A(y) + \gamma$$

$$= \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \vee \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

iii. $\mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(-x) = \alpha\mu_A(-x) \geq \alpha\mu_A(x) = \mu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x)$

$$\nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(-x) = \beta\nu_A(-x) + \gamma \leq \beta\nu_A(x) + \gamma = \nu_{\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x)$$

Teorem 4.4.12: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}(A)$∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈ R için,

i. $\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \gamma \geq \alpha\mu_A(x) + \gamma \wedge \alpha\mu_A(y) + \gamma$

$$= \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(xy) = \beta\nu_A(xy) \leq \beta\nu_A(x) \vee \beta\nu_A(y) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \vee \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

ii. $\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x+y) = \alpha\mu_A(x+y) + \gamma \geq \alpha\mu_A(x) + \gamma \wedge \alpha\mu_A(y) + \gamma$

$$= \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \wedge \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x+y) = \beta\nu_A(x+y) \leq \beta\nu_A(x) \vee \beta\nu_A(y)$$

$$= \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x) \vee \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(y)$$

iii. $\mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(-x) = \alpha\mu_A(-x) + \alpha \geq \alpha\mu_A(x) + \gamma = \mu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x)$

$$\nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(-x) = \beta\nu_A(-x) \leq \beta\nu_A(x) = \nu_{\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}A}(x)$$

Teorem 4.4.13: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $E_{\alpha,\beta}(A)\in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈ R için,

i. $\mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \beta(\alpha\mu_A(xy) + 1 - \alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha) \wedge \beta(\alpha\mu_A(y) + 1 - \alpha) = \mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x) \wedge \mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(y)$

$\nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \alpha(\beta\nu_A(xy) + 1 - \beta) \leq \alpha(\beta\nu_A(x) + 1 - \beta) \vee \alpha(\beta\nu_A(y) + 1 - \beta)$

$= \nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x) \vee \nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(y)$

ii. $\mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x + y) = \beta(\alpha\mu_A(x + y) + 1 - \alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha) \wedge \beta(\alpha\mu_A(y) + 1 - \alpha) = \mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x) \wedge \mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(y)$

$\nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x + y) = \alpha(\beta\nu_A(x + y) + 1 - \beta)$

$\leq \alpha(\beta\nu_A(x) + 1 - \beta) \vee \alpha(\beta\nu_A(y) + 1 - \beta)$

$= \nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x) \vee \nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(y)$

iii. $\mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(-x) = \beta(\alpha\mu_A(-x) + 1 - \alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + 1 - \alpha)$

$= \mu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x)$

$\nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(-x) = \alpha(\beta\nu_A(-x) + 1 - \beta) \leq \alpha(\beta\nu_A(x) + 1 - \beta) = \nu_{E_{\alpha,\beta}(A)}(x)$

Teorem 4.4.14: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)\in IFS(R)$ intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈ R için,

i. $\mu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(xy) = \alpha\mu_A(xy) + \gamma \geq \alpha\mu_A(x) + \gamma \wedge \alpha\mu_A(y) + \gamma = \mu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(x) \wedge \mu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(y)$

$\nu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(xy) = \beta\nu_A(xy) + \delta \leq \beta\nu_A(x) + \delta \vee \beta\nu_A(y) + \delta$

$$= \nu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(x) \vee \nu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(y)$$

ii. $\mu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(x+y) = \alpha\mu_A(x+y) + \gamma \geq \alpha\mu_A(x) + \gamma \wedge \alpha\mu_A(y) + \gamma$

$$= \mu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(x) \wedge \mu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(y)$$

$$\nu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(x+y) = \beta\nu_A(x+y) + \delta \leq \beta\nu_A(x) + \delta \vee \beta\nu_A(y) + \delta$$

$$= \nu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(x) \vee \nu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(y)$$

iii. $\mu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(-x) = \alpha\mu_A(-x) + \gamma \geq \alpha\mu_A(x) + \gamma = \mu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(x)$

$$\nu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(-x) = \beta\nu_A(-x) + \delta \leq \beta\nu_A(x) + \delta = \nu_{\boxdot\alpha,\beta,\gamma,\delta(A)}(x)$$

Teorem 4.4.15: R bir halka, A∈IFS(G) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)$∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈ R için,

i. $\mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \beta(\alpha\mu_A(xy) + \omega - \omega\alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + \omega - \omega\alpha) \wedge$
$\beta(\alpha\mu_A(y) + \omega - \omega\alpha) = \mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \wedge \mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$

$$\nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \alpha(\beta\nu_A(xy) + \omega - \omega\beta)$$
$$\leq \alpha(\beta\nu_A(x) + \omega - \omega\beta) \vee \alpha(\beta\nu_A(y) + \omega - \omega\beta)$$
$$= \nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \vee \nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

ii. $\mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x+y) = \beta(\alpha\mu_A(x+y) + \omega - \omega\alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + \omega - \omega\alpha) \wedge$
$\beta(\alpha\mu_A(y) + \omega - \omega\alpha) = \mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \wedge \mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$

$$\nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x+y) = \alpha(\beta\nu_A(x+y) + \omega - \omega\beta)$$
$$\leq \alpha(\beta\nu_A(x) + \omega - \omega\beta) \vee \alpha(\beta\nu_A(y) + \omega - \omega\beta)$$
$$= \nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \vee \nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

iii. $\mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(-x) = \beta(\alpha\mu_A(-x) + \omega - \omega\alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + \omega - \omega\alpha) =$
$\mu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x)$

$$\nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(-x) = \alpha(\beta\nu_A(-x) + \omega - \omega\beta) \leq \alpha(\beta\nu_A(x) + \omega - \omega\beta)$$

$$= \nu_{Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)}(x)$$

Teorem 4.4.16: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere $Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)$∈IFS(G) intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat.x, y∈ R için,

i. $$\mu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \beta(\alpha\mu_A(xy) + \omega - \omega\alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + \omega - \omega\alpha) \wedge \beta(\alpha\mu_A(y) + \omega - \omega\alpha) = \mu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \wedge \mu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

$$\nu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(xy) = \alpha(\beta\nu_A(xy) + \theta - \theta\beta)$$
$$\leq \alpha(\beta\nu_A(x) + \theta - \theta\beta) \vee \alpha(\beta\nu_A(y) + \theta - \theta\beta)$$
$$= \nu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \vee \nu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

ii. $$\mu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(x+y) = \beta(\alpha\mu_A(x+y) + \omega - \omega\alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + \omega - \omega\alpha) \wedge \beta(\alpha\mu_A(y) + \omega - \omega\alpha) = \mu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \wedge \mu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

$$\nu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(x+y) = \alpha(\beta\nu_A(x+y) + \theta - \theta\beta)$$
$$\leq \alpha(\beta\nu_A(x) + \theta - \theta\beta) \vee \alpha(\beta\nu_A(y) + \theta - \theta\beta)$$
$$= \nu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(x) \vee \nu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(y)$$

iii. $$\mu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(-x) = \beta(\alpha\mu_A(-x) + \omega - \omega\alpha) \geq \beta(\alpha\mu_A(x) + \omega - \omega\alpha)$$
$$= \mu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(x)$$

$$\nu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(-x) = \alpha(\beta\nu_A(-x) + \theta - \theta\beta) \leq \alpha(\beta\nu_A(x) + \theta - \theta\beta)$$

$$= \nu_{Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)}(x)$$

Teorem 4.4.17: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere C_μ(A), C_ν(A)∈IFS(R) kümeleri intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈R için,

i. $C_\mu(\mathrm{A})(\mathrm{x}) = \{< xy, \sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}), \min(1 - \sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}), \nu_\mathrm{A}(\mathrm{x})) > | \mathrm{x}\in\mathrm{R}\}$

$\mu_{C_\mu}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \sup_{\mathrm{x}+\mathrm{y}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \geq \sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \wedge \sup_{\mathrm{y}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{y}) = \mu_{C_\mu}(\mathrm{x}) \wedge \mu_{C_\mu}(\mathrm{y})$

$\mu_{C_\mu}(\mathrm{xy}) = \sup_{\mathrm{xy}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{xy}) \geq \sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \wedge \sup_{\mathrm{y}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{y}) = \mu_{C_\mu}(\mathrm{x}) \wedge \mu_{C_\mu}(\mathrm{y})$

$$\mu_{C_\mu}(-\mathrm{x}) = \sup_{-\mathrm{x}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(-\mathrm{x}) \geq \sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) = \mu_{C_\mu}(\mathrm{x})$$

$\nu_{C_\mu}(\mathrm{x}) = 1 - \sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \nu_{C_\mu}(\mathrm{x}) = \nu_\mathrm{A}(\mathrm{x})$ dir.

a. $\nu_{C_\mu}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \nu_\mathrm{A}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \geq \nu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \nu_\mathrm{A}(\mathrm{y}) \Rightarrow \nu_{C_\mu}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \leq \nu_{C_\mu}(\mathrm{x}) \vee \nu_{C_\mu}(\mathrm{y})$

$\nu_{C_\mu}(\mathrm{xy}) = \nu_\mathrm{A}(\mathrm{xy}) \geq \nu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \nu_\mathrm{A}(\mathrm{y}) \Rightarrow \nu_{C_\mu}(\mathrm{xy}) \leq \nu_{C_\mu}(\mathrm{x}) \vee \nu_{C_\mu}(\mathrm{y})$,

$\nu_{C_\mu}(-\mathrm{x}) = \nu_\mathrm{A}(-\mathrm{x}) \geq \nu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) = \nu_{C_\mu}(\mathrm{x})$

b. $\nu_{C_\mu}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = 1 - \sup_{\mathrm{x}+\mathrm{y}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \leq 1 - \sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee 1 - \sup_{\mathrm{y}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{y}) = \nu_{C_\mu}(\mathrm{x}) \vee \nu_{C_\mu}(\mathrm{y})$,

$$\nu_{C_\mu}(\mathrm{xy}) = 1 - \sup_{\mathrm{xy}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{xy}) \leq 1 - \sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee 1 - \sup_{\mathrm{y}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{y})$$

$$= \nu_{C_\mu}(\mathrm{x}) \vee \nu_{C_\mu}(\mathrm{y})$$

$$\nu_{C_\mu}(-\mathrm{x}) = 1 - \sup_{\mathrm{x}^{-1}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(-\mathrm{x}) \leq 1 - \sup_{\mathrm{x}\in\mathrm{R}} \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) = \nu_{C_\mu}(\mathrm{x})$$

iii. $\mu_{C_\nu}(\mathrm{xy}) = \mu_\mathrm{A}(\mathrm{xy}) \geq \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \wedge \mu_\mathrm{A}(\mathrm{y}) = \mu_{C_\nu}(\mathrm{x}) \wedge \mu_{C_\nu}(\mathrm{y})$

$\nu_{C_\nu}(\mathrm{xy}) = \inf_{\mathrm{xy}\in\mathrm{G}} \nu_\mathrm{A}(\mathrm{xy}) \leq \inf_{\mathrm{x}\in\mathrm{G}} \nu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \inf_{\mathrm{x}\in\mathrm{G}} \nu_\mathrm{A}(\mathrm{y}) = \nu_{C_\nu}(\mathrm{x}) \vee \nu_{C_\nu}(\mathrm{y})$

$$\mu_{C_\nu}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \geq \mu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \wedge \mu_\mathrm{A}(\mathrm{y}) = \mu_{C_\nu}(\mathrm{x}) \wedge \mu_{C_\nu}(\mathrm{y})$$

$\nu_{C_\nu}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \inf_{\mathrm{xy}\in\mathrm{G}} \nu_\mathrm{A}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \leq \inf_{\mathrm{x}\in\mathrm{G}} \nu_\mathrm{A}(\mathrm{x}) \vee \inf_{\mathrm{x}\in\mathrm{G}} \nu_\mathrm{A}(\mathrm{y})$

$= \nu_{C_\nu}(\mathrm{x}) \vee \nu_{C_\nu}(\mathrm{y})$

$\mu_{C_\nu}(-\mathrm{x}) = \mu_{A}(-\mathrm{x}) \geq \mu_{A}(\mathrm{x}) = \mu_{C_\nu}(\mathrm{x})$

$\nu_{C_\nu}(-\mathrm{x}) = \inf_{xy\in G} \nu_{A}(-\mathrm{x}) \leq \inf_{x\in G} \nu_{A}(\mathrm{x}) = \nu_{C_\nu}(\mathrm{x})$

Teorem 4.4.18: R bir halka, A∈IFS(R) intuitionistic fuzzy halka olmak üzere I_μ(A), I_ν(A)∈IFS(R) kümeleri intuitionistic fuzzy halkadır.

İspat. x, y∈ R olmak üzere,

i. $\mu_{I_\mu}(\mathrm{xy}) = \inf_{xy\in G} \mu_{A}(\mathrm{xy}) \geq \inf_{x\in G} \mu_{A}(\mathrm{x}) \wedge \inf_{x\in G} \mu_{A}(\mathrm{y}) = \mu_{I_\mu}(\mathrm{x}) \wedge \mu_{I_\mu}(\mathrm{y})$

$\nu_{I_\mu}(\mathrm{xy}) = \nu_{A}(\mathrm{xy}) \leq \nu_{A}(\mathrm{x}) \vee \nu_{A}(\mathrm{y}) = \nu_{I_\mu}(\mathrm{x}) \vee \nu_{I_\mu}(\mathrm{y})$

$\mu_{I_\mu}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \inf_{xy\in G} \mu_{A}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \geq \inf_{x\in G} \mu_{A}(\mathrm{x}) \wedge \inf_{x\in G} \mu_{A}(\mathrm{y}) = \mu_{I_\mu}(\mathrm{x}) \wedge \mu_{I_\mu}(\mathrm{y})$

$\nu_{I_\mu}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \nu_{A}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \leq \nu_{A}(\mathrm{x}) \vee \nu_{A}(\mathrm{y}) = \nu_{I_\mu}(\mathrm{x}) \vee \nu_{I_\mu}(\mathrm{y})$

$\mu_{I_\mu}(-\mathrm{x}) = \inf_{xy\in G} \mu_{A}(-\mathrm{x}) \geq \inf_{x\in G} \mu_{A}(\mathrm{x}) = \mu_{I_\mu}(\mathrm{x})$

$\nu_{I_\mu}(-\mathrm{x}) = \nu_{A}(-\mathrm{x}) \leq \nu_{A}(\mathrm{x}) = \nu_{I_\mu}(\mathrm{x})$

i. $I_\nu(\mathrm{A})(\mathrm{xy}) = \{< x, min(1 - \sup_{xy\in R} \nu_{A}(\mathrm{xy}), \mu_{A}(\mathrm{xy})), \sup_{xy\in R} \nu_{A}(\mathrm{xy}) > |\, \mathrm{x}, \mathrm{y} \in \mathrm{R}\}$

$\nu_{I_\nu}(\mathrm{xy}) = \sup_{xy\in R} \nu_{A}(\mathrm{xy}) \leq \sup_{x\in R} \nu_{A}(\mathrm{x}) \vee \sup_{y\in R} \nu_{A}(\mathrm{y}) = \nu_{I_\nu}(\mathrm{x}) \vee \nu_{I_\nu}(\mathrm{y})$

$\nu_{I_\nu}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) = \sup_{xy\in R} \nu_{A}(\mathrm{x}+\mathrm{y}) \leq \sup_{x\in R} \nu_{A}(\mathrm{x}) \vee \sup_{y\in R} \nu_{A}(\mathrm{y})$

$= \nu_{I_\nu}(\mathrm{x}) \vee \nu_{I_\nu}(\mathrm{y})$

$\nu_{I_\nu}(-\mathrm{x}) = \sup_{x^{-1}\in R} \nu_{A}(-\mathrm{x}) \leq \sup_{x\in R} \nu_{A}(\mathrm{x}) = \nu_{I_\nu}(\mathrm{x})$

$\mu_{I_\nu}(\mathrm{xy}) = 1 - \sup_{xy\in R} \nu_{A}(\mathrm{xy}) \vee \mu_{I_\nu}(\mathrm{xy}) = \mu_{A}(\mathrm{xy})$ dir.

a. $\mu_{I_\nu}(\mathrm{xy}) = 1 - \sup_{xy\in R} \nu_{A}(\mathrm{xy}) \geq 1 - \sup_{x\in R} \nu_{A}(\mathrm{x}) \wedge 1 - \sup_{y\in R} \nu_{A}(\mathrm{y})$

$$= \mu_{I_\nu}(x) \wedge \mu_{I_\nu}(y)$$

$$\mu_{I_\nu}(xy) = 1 - \sup_{xy\in R} \nu_A(xy) \geq 1 - \sup_{x\in R} \nu_A(x) \wedge 1 - \sup_{y\in R} \nu_A(y)$$

$$= \mu_{I_\nu}(x) \wedge \mu_{I_\nu}(y)$$

$$\mu_{I_\nu}(-x) = 1 - \sup_{x^{-1}\in R} \nu_A(-x) \geq 1 - \sup_{x\in R} \nu_A(x) = \mu_{I_\nu}(x)$$

b. $\mu_{I_\nu}(xy) = \mu_A(xy) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) = \mu_{I_\nu}(x) \wedge \mu_{I_\nu}(y)$

$\mu_{I_\nu}(x+y) = \mu_A(x+y) \geq \mu_A(x) \wedge \mu_A(y) = \mu_{I_\nu}(x) \wedge \mu_{I_\nu}(y)$

$\mu_{I_\nu}(-x) = \mu_A(-x) \geq \mu_A(x) = \mu_{I_\nu}(x)$

4.5 INTUITIONISTIC FUZZY MODEL OPERATÖRLERİN INTUITIONISTIC FUZZY NORMAL KÜMELERE UYGULANMASI

Teorem 4.5.1: X bir evrensel küme, $A \in IFS(X)$ normal ise $\square A \in IFS(X)$ normaldir.

İspat. A IF-normal olduğundan $x_0, x_1 \in X$ için $\mu_A(x_0) = 1$ ve $\nu_A(x_1) = 1$ dır.

O halde

$\mu_{\square A}(x_0) = \mu_A(x_0) = 1$, $\nu_{\square A}(x_0) = 1 - \mu_A(x_0) = 0$ ve

$\nu_{\square A}(x_1) = 1 - \mu_A(x_1) = 1$, $\mu_{\square A}(x_1) = \mu_A(x_1) = 0$ dır. Böylece $\square A$ IF-normaldir.

Teorem 4.5.2: X bir evrensel küme, $A \in IFS(X)$ normal ise $\lozenge A \in IFS(X)$ normaldir.

İspat. A IF-normal olduğundan $x_0, x_1 \in X$ için $\mu_A(x_0) = 1$ ve $\nu_A(x_1) = 1$ dır.

O halde

$\mu_{\lozenge A}(x_0) = 1 - \nu_A(x_0) = 1$, $\nu_{\lozenge A}(x_0) = \nu_A(x_0) = 0$ ve

$\nu_{\lozenge A}(x_1) = \nu_A(x_1) = 1$, $\mu_{\lozenge A}(x_1) = 1 - \nu_A(x_1) = 0$ dır. Böylece $\lozenge A$ IF-normaldir.

Teorem 4.5.3: X bir evrensel küme, $A \in \mathrm{IFS}(X)$ normal ise $nA \in \mathrm{IFS}(G)$ normaldir.

İspat. A IF-normal olduğundan $x_0, x_1 \in X$ için $\mu_A(x_0) = 1$ ve $\nu_A(x_1) = 1$ dır.

O halde

$$\mu_{nA}(x_0) = 1 - \left(1 - \mu_A(x_0)\right)^n = 1, \nu_{nA}(x_0) = \left(\nu_A(x_0)\right)^n = 0 \text{ ve}$$

$$\nu_{nA}(x_1) = \left(\nu_A(x_1)\right)^n = 0, \ \mu_{nA}(x_1) = 1 - \left(1 - \mu_A(x_1)\right)^n = 0 \text{ dır.}$$

Böylece nA IF-normaldir.

Teorem 4.5.4: X bir evrensel küme, $A \in \mathrm{IFS}(X)$ normal ise $A^n \in \mathrm{IFS}(G)$ normaldir.

İspat. A IF-normal olduğundan $x_0, x_1 \in X$ için $\mu_A(x_0) = 1$ ve $\nu_A(x_1) = 1$ dır.

O halde

$$\mu_{A^n}(x_0) = \left(\mu_A(x_0)\right)^n = 1, \ \nu_{A^n}(x_0) = 1 - \left(1 - \nu_A(x_0)\right)^n = 0 \text{ ve}$$

$$\mu_{A^n}(x_1) = \left(\mu_A(x_1)\right)^n = 0, \ \nu_{A^n}(x_1) = 1 - \left(1 - \nu_A(x_1)\right)^n = 1 \text{ dir.}$$

Böylece A^n IF-normaldir.

4.6 INTUITIONISTIC FUZZY KÜMENİN BELİRLEDİĞİ INTUITIONISTIC FUZZY ALTGRUP

Teorem 4.6.1: G sonlu bir grup $A \in \mathrm{IFS}(G)$ olsun. G nin alt gruplarının

$G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_k = G$ maksimal bir zinciri olmak üzere

$(t_0, s_0), (t_1, s_1), \ldots, (t_r, s_r) \in \mathrm{Im}A$ ve $(t_0, s_0) > (t_1, s_1 > \ldots > (t_r, s_r)$ ile

$A(G_0) = (t_0, s_0)$, $A(G_1 - G_0) = (t_1, s_1)$, …, $A(G_r - G_{r-1}) = (t_r, s_r)$.ise A, G nin intuitionistic fuzzy alt grubudur.

Tersine; G nin bir intuitionistic fuzzy alt grubu bu koşulları sağlar.

İspat. $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_k = G$ maksimal zincir, $(t_0, s_0) > (t_1, s_1) > \ldots > (t_r, s_r)$ olmak üzere

$A(G_0) = (t_0, s_0)$, $A(G_1 - G_0) = (t_1, s_1)$, …, $A(G_r - G_{r-1}) = (t_r, s_r)$ olacak şekilde $A \in IFS(G)$ olsun. $x, y \in G$ için,

i. $x, y \in G_i - G_{i-1} \Rightarrow \mu_A(x) = \mu_A(y)$ ve $\nu_A(x) = \nu_A(y) \Rightarrow A(x)=A(y)=(t_i, s_i)$

$G_i < G$ olduğundan $xy \in G_i \Rightarrow xy \in G_i - G_{i-1}$ veya $xy \in G_{i-1}$

$$\Rightarrow \mu_A(xy) \geq t_i,\ \nu_A(xy) \leq s_i$$

$$\Rightarrow A(xy) \geq (t_i, s_i) = \min\{A(x), A(y)\}$$

Benzer şekilde $A(x^{-1})=(t_i, s_i)=A(x)$ dir.

ii. $x \in G_i - G_{i-1}$ ve $y \in G_j - G_{j-1}$ olmak üzere $i>j$ olsun. O halde $A(x)=(t_i, s_i)$ ve $A(y)=(t_j, s_j)$ dir.

$i>j$ ve $G_i < G$ olduğundan $xy \in G_i$dir.

$A(xy) \geq (t_i, s_i) = \min\{A(x), A(y)\}$ ve $A(x^{-1}) = (t_i, s_i) = A(x)$ elde edilir.

Böylece A, G nin intuitionistic fuzzy alt grubudur.

Tersine; $A \in IFS(G)$ intuitionistic fuzzy alt grup olsun. $Im(A)=\{(t_0, s_0), (t_1, s_1), \ldots, (t_r, s_r)\}$ olmak üzere $A_{t_0}, A_{t_1}, \ldots, A_{t_r}$ A nın seviye alt grupları olsun. $A_{t_r} = G$ ve $A_{t_0} \neq < e >$ olmak üzere $A_{t_0} \sqsubset A_{t_1} \sqsubset \ldots \sqsubset A_{t_r}$ zinciri maksimal zincir ise istenen elde edilir. Eğer bu maksimal zincir değil ise uygun alt gruplar yardımı ile düzenler-sek; $G_0=A_{t_0}$ ve $G_k=A_{t_r}=G$ olmak üzere $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_0$ zinciri maksimal zincir olsun. $\exists i$, $0 < i < k$ için $A_{t_1}=G_i$ dir.

Şimdi, $0 < i_1 < k$ için $A_{t_1}=G_{i_1}$ olsun.$A_{t_0}(= G_0) \sqsubset G_{i_1} \sqsubset A_{t_1}(=G_i)$ şeklindeki her G_{i_1} için $A(G_i - G_{i-1}) = (t_1, s_1)$ dir. Benzer şekilde $G_{t_i} \sqsubset G_j \sqsubset G_{t_{i+1}}$ şeklindeki her G_j için $A(G_j - G_{j-1})=(t_{i+1}, s_{i+1})$ elde edilir. O halde $A(G_r - G_{r-1})=(t_r, s_r)$ elde edilir.

Teorem 4.6.2: G bir grup, A∈IFS(G) ve Card(ImA)<∞ olsun. G nin G_i alt grupları aşağıdaki şekilde tanımlansın.

$G_0 = <\{x \in G \mid A(x) = \sup_{z\in G} A(z)\}>$,

$G_i = <G_{i-1}, \{x \in G \mid A(x) = \sup_{z\in G-G_{i-1}} A(z)\}>$, $1 \leq i \leq k$ ve $k \leq$ Card(ImA), $G_k = G$.

$\forall x \in G_0$, $A^*(x) = \sup_{z\in G} A(z)$ ve

$\forall x \in G_i - G_{i-1}$, $A^*(x) = \sup_{z\in G-G_{i-1}} A(z)$ ile tanımlanan A*∈IFS(G) kümesi A ile üretilen intuitionistic fuzzy alt gruptur.

Teoremin ispatından önce aşağıdaki önermeyi ispatlayalım.

Önerme 4.6.1: G bir grup, A∈IFS(G) ve A*=<A> olsun. $(\alpha, \beta), (\omega, \theta) \in$ ImA* için $(\alpha,\beta) \leq (\omega,\theta)$ ya da $(\omega,\theta) \leq (\alpha,\beta)$ dır.

İspat. $(\alpha,\beta), (\omega,\theta) \in$ ImA* ve karşılaştırılamaz olsun.

Genelliği bozmayacak şekilde $\alpha < \omega$ ve $\beta < \theta$ seçelim.

$\forall x \in G_0$, $A^*(x) = \sup_{z\in G} A(z) = (\alpha,\beta)$ ve

$\forall x \in G_i - G_{i-1}$, $A^*(x)=\sup_{z\in G-G_{i-1}} A(z)=(\omega,\theta)$ kabul edelim. Böylece

$\mu_{A*}(x) = \sup_{z\in G} \mu_A(z) = \alpha$, $\nu_{A*}(x) = \inf_{z\in G} \nu_A(z) = \beta$ ve

$\mu_{A*}(x) = \sup_{z\in G-G_{i-1}} \mu_A(z) = \omega$, $\nu_{A*}(x) = \inf_{z\in G-G_{i-1}} \nu_A(z) = \theta$ olduğundan $\alpha \geq \omega$ ve $\beta \leq \theta$dir. O halde $(\alpha,\beta) \geq (\omega,\theta)$ veya $(\alpha,\beta) \leq (\omega,\theta)$ dir.

Şimdi teoremi ispatlayalım.

İspat. A* ın tanımından A⊑A* dır. $G_0 \subseteq G_1 \subseteq \ldots \subseteq G_k = G$, G_i alt grupları maksimal zincir oluşturur.

$(t_0, s_0), (t_1, s_1), \ldots, (t_r, s_r) \in$ ImA* ve $(t_0, s_0) > (t_1, s_1) > \ldots > (t_r, s_r)$ ile

$A^*(G_0) = (t_0, s_0)$, $A^*(G_1 - G_0) = (t_1, s_1), \ldots, A^*(G_r - G_{r-1}) = (t_r, s_r)$dır. O halde A^*, G nin intuitionistic fuzzy alt grubudur. Şimdi $A^*=\langle A\rangle$ olduğunu gösterelim.

$B \in IFS(G)$, intuitionistic fuzzy alt grup ve $A \sqsubseteq B \sqsubseteq A^*$ olsun.

i. $e \in G$ için

$\mu_{A*}(e)=\sup_{z\in G} \mu_A(z) \leq \sup_{z\in G} \mu_B(z) \leq \mu_B(e)$,
$\nu_{A*}(e)=\inf_{z\in G} \nu_A(z) \geq \inf_{z\in G} \nu_B(z) \geq \nu_B(e)$ olduğundan $A^*(e) \sqsubseteq B(e)$

ii. $\{B_{t_i}\}$, B kümesinin seviye alt gruplarının bir zinciri olsun.

$K_0=\{x\in G \mid A(x)=\sup_{z\in G} A(z)\}$ olmak üzere $e \neq x \in K_o$ olsun.

$\mu_{A*}(x) = \sup_{z\in G} \mu_A(z) = \mu_A(x) \leq \mu_B(x) \Rightarrow \sup_{z\in G} \mu_A(z) \leq \inf_{x\in K_0} \mu_B(x)$

$\inf_{x\in K_0} \mu_B(x) = t_i$ seçelim $\forall x \in K_o$ için $\mu_B(x) \geq t_i$ ve

$\nu_{A*}(x)=\inf_{z\in G} \nu_A(z)=\nu_A(x) \geq \nu_B(x) \Rightarrow \inf_{z\in G} \nu_A(z) \geq \sup_{x\in K_0} \nu_B(x)$ $\sup_{x\in K_0} \nu_B(x)=s_i$ seçelim $\forall x\in K_o$ için $\nu_B(x) \leq s_i \leq 1-t_i$dir. Böylece $K_o \subseteq B_{t_i} \Rightarrow G_0=\langle K_o\rangle \subseteq B_{t_i}$ olur. $\forall x\in G_0$ için $A^*(x) \sqsubseteq B(x)$ dir.

$x\in G_1 - G_0$ olsun. $K_1=G_0 \cup \{ x\in G \mid A(x)=\sup_{z\in G-G_0} A(z)\}$, $G_1=\langle K_1\rangle$ olmak üzere $x\in K_1-G_0$ için

$\mu_{A*}(x)=\sup_{z\in G-G_0} \mu_A(z)=\mu_A(x) \leq \inf_{x\in K_1-G_0} \mu_B(x) \leq \mu_B(x)$

$\inf_{x\in K_1-G_0} \mu_B(x)=t_{i1}$ seçelim $\forall x\in K_1-G_0$ için $\mu_B(x) \geq t_{i1}$ ve

$\nu_{A*}(x)=\inf_{z\in G-G_0} \nu_A(z)=\nu_A(x) \geq \sup_{x\in K_1-G_0} \nu_B(x) \geq \nu_B(x)$

$\sup_{x\in K_1-G_0} \nu_B(x)=s_{i1}$ seçelim $\forall x\in K_1-G_0$ için $\nu_B(x) \leq s_{i1} \leq 1-t_{i1}$ dir. Böylece $K_1-G_0 \subseteq B_{t_{i1}}$ ve $G_0 \subseteq B_{t_i} \subseteq B_{t_{i1}}$ olduğundan $G_1=\langle K_1\rangle \subseteq B_{t_{i1}}$ dir. $\forall x\in G_1 - G_0$ için $A^*(x) \sqsubseteq B(x)$ dir.

O halde $\forall x\in G_i - G_{i-1}$, $2 \leq i \leq k$ için $A^*(x) \sqsubseteq B(x)$ dir. $A^*=B$ olduğundan A^*, A ile üretilen intuitionistic fuzzy alt gruptur, $A^*=\langle A\rangle$dır.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu tezin sonucunda aşağıdaki tabloda da görüldüğü gibi normallik kavramı ilk dört operatör uygulandığında özelliklerini korumakta ancak diğer operatörlerde korumamaktadır. İncelediğimiz diğer intuitionistic fuzzy cebirsel yapılar ise tüm birinci tip model operatörler uygulandığında özelliklerini korumaktadırlar.

Bu tezin son bölümünde tanımlanan "bir intuitionistic fuzzy küme ile üretilen intuitionistic fuzzy grup" kavramına operatörler uygulanarak özellikleri incelenmemiştir. Bundan sonraki aşamada operatörler uygulanarak bu incelemeler yapılabilir. Bunun yanı sıra bu çalışmada incelediğimiz cebirsel yapıların ikinci tip model operatörler ile ilişkileri incelenebilir.

	IF İdeal	IF Altgrup	IF Normal Altgrup	IF Halka	IF Normal
$\square$	✓	✓	✓	✓	✓
$\Diamond$	✓	✓	✓	✓	✓
nA	✓	✓	✓	✓	✓
A^n	✓	✓	✓	✓	✓
$\boxplus$	✓	✓	✓	✓	–
$\boxtimes$	✓	✓	✓	✓	–
$\boxplus_\alpha$	✓	✓	✓	✓	–
$\boxtimes_\alpha$	✓	✓	✓	✓	–
$\boxplus_{\alpha\beta}$	✓	✓	✓	✓	–
$\boxtimes_{\alpha\beta}$	✓	✓	✓	✓	–
$\boxplus_{\alpha\beta\gamma}$	✓	✓	✓	✓	–
$\boxtimes_{\alpha\beta\gamma}$	✓	✓	✓	✓	–
$E_{\alpha,\beta}$	✓	✓	✓	✓	–
$\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}$	✓	✓	✓	✓	–
$Z^{\omega}_{\alpha,\beta}$	✓	✓	✓	✓	–
$Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}$	✓	✓	✓	✓	–
C_μ	✓	✓	✓	✓	–
C_ν	✓	✓	✓	✓	–
I_μ	✓	✓	✓	✓	–
I_ν	✓	✓	✓	✓	–

KAYNAKLAR

[1] Atanassov K.T. “Intuitionistic Fuzzy Sets”, VII ITKR.s Session, So.a, June (1983)

[2] Atanassov K.T., “Intuitionistic Fuzzy Sets”, Fuzzy Sets andSystems, 20:87-96, (1986)

[3] Atanassov K.T., “Operators overInterval-valued intuitionistic fuzzy sets,” Fuzzy Sets andSystems, 64(2): 159-174, (1994)

[4] Atanassov K.T., “Intuitionistic Fuzzy Sets”, Phiysica-Verlag, Heidelberg, NewYork,(1999)

[5] Atanassov K.T., “Intuitionistic Fuzzy Sets, Theoryand Applications”, Physica-VerlagHeidelberg, Germany, 319 s., (1999).

[6] Atanassov K.T., “Remark on Two Operations Over Intuitionistic Fuzzy Sets”, Int. J. of Uncer-atanity, Fuzzynessand Knowledge Syst. 9(1): 71-75, (2001)

[7] Atanassov K.T., “Themost general form of onetype of intuitionistic fuzzy modal operators”,NIFS, 12 (2): 36-38. (2006)

[8] Atanassov K.T., “SomeProperties of the operators fromonetype of intuitionistic fuzzy modal operators”, Advanced Studies on Contemporary Mathematics, 15(1): 13-20, (2007)

[9] Atanassov K.T., “Theoremforequivalence of thetwomost general intuitionistic fuzzy modal operator”s, NIFS, 15(1): 26-31, (2008)

[10] Bhattacharya, P. “Fuzzy Subgroups: SomeCharacterizations”, Journol of Mat. Analysis andAppl., 128: 241-252, (1987)

[11] Birkhoff G., “LatticeTheory”, American Mathematical Society, United States of America, 418 s., (1940).

[12] Burillo P.,Bustince H. andMohedano V., "Some Definition Of İntuitionistic Fuzzy Number", Fuzzy BulgarianEnthusiasts, 28-30, (1994)

[13] Çuvalcıoğlu, G., "SomeProperties of $E_{\alpha,\beta}$operator", Advanced Studies on Contemporary Mathematics, 14(2), 305-310, (2007)

[14] Çuvalcıoğlu, G."Expand the modal operatordiagramwith$Z^{\omega}_{\alpha,\beta}$", Jangjeon Math. Soc., 13(3): 403-412, (2010)

[15] Çuvalcıoğlu, G., Yılmaz, S. "Someproperties of OTMOs on IFSs", Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 20(4): 621-628, (2010)

[16] Çuvalcıoğlu, G. "On theDiagram of OneType Modal Operators on Intuitionistic Fuzzy Sets: LastExpandingwith$Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}$",Iranian J. of Fuzzy Systems, (Basımda)

[17] Dencheva, K. "Extension of intuitionistic fuzzy modal operators ⊞ and ⊠" Proc.ofthe Second Int. IEEE Symp. IntelligentSystems, 3: 22-24, (2004)

[18] Dixit, V. N., Kumar, R. andAjmal, N. "Level SubgroupsandUnion of Fuzzy Subgroups", Fuzzy Sets andsystems, 37: 359-371, (1990)

[19] Doycheva B., "Inequalitieswith intuitionistic fuzzy topologicaland Gökhan Çuvalcıoglu's operators", NIFS, 14(1): 20-22, (2008)

[20] Dubois, D. andPrade H. "TheMean Value of a Fuzzy Number", Fuzzy Sets andSystems24: 279–300, (1987)

[21] Grzegorzewski, P. "Intuitionistic fuzzy numbers",Proceedings of the IFSA", World Congress. (2003)

[22] Hur, K.,Jang, Y. andKang, H. W. "Intuitionistic Fuzzy Subgroupoids", International Journal of Fuzzy LogicandIntelligentSystems, 3(1): 72-77, (2003)

[23] Mashour, A. S.,Ghanim, M. H. andSidky F. I "Normal Fuzzy Subgroups", Univ. u NovomSaduZb. Rad. Prirod.-Mat. Fak. Ser. Mat., 20(2): 53-59, (1990)

[24] Nebi, H. M. “A New RankingMethodfor Intuitionistic Fuzzy Numbers”, International Journal of Fuzzy System, 12(1): 80-86, (2010)

[25] Palaniappan, N.,Naganathan, S. andArjunan, K. “A Study on Intuitionistic L-Fuzzy Subgroups”, Applied Math. Sciences, 53(3): 2619-2624, (2009)

[26] Radzikowska, A. M. andKerre, E. E. “Characterisation of Main Classes of Fuzzy Relation Using Fuzzy Modal Operators”, Fuzzy Sets andSystems, 15: 223-247, (2005)

[27] Rosenfeld, A. “Fuzzy Groups”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35: 512-517, (1971)

[28] Shan, D. Li, F.,Cheng, C., “On Properties of Four IFS Operators”, Fuzzy Sets andSystems: 151-155, (2005)

[29] Sharma, P. K. “(α,β)-Cut of Intuitionistic Fuzzy Groups”, Internat. Math. Forum, 53(6): 2605-2614, (2011)

[30] Xu Z.S., “Intuitionistic fuzzy aggregation operators, IEEE Transations on Fuzzy Systems” 15: 1179–1187, (2007)

[31] Xu Z.S, “Modelsformultipleattributedecision-makingwith intuitionistic fuzzy information”, International Journal of Uncertainty, Fuzzinessand Knowledge-BasedSystems 15(3):285–297, (2007)

[32] Yan, L. “Intuitionistic Fuzzy Ring andItsHomomorphism Image”, 2008 InternarionalSeminar on FutureBioMedical Information Engineering, 75-77, (2008)

[33] Zhang W.X.,Le H.L. “Theextended fuzzy operatorand fuzzy true-valuedpossibility,” Journal of Xi'anJiaotongUniversity, Xi’an., 18(1): 1-12, (1982)

[34] Zadeh, L. A. “Fuzzy Sets”, Information and Control, 8: 338-353, (1965)

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Sinem YILMAZ

Doğum Tarihi: 05.07.1986

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Lise/Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	Yüksel Acun Anadolu Lisesi	1997–2004
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2004–2008
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2009–

Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Araştırma Görevlisi	Mersin Üniversitesi	2011–

ESERLER

1. Çuvalcıoglu, G., Yılmaz, S. Some properties of OTMOs on IFSs, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 20(4), 621-628, (2010)

2. Çuvalcıoglu, G., Yılmaz, S. Z(alfa, beta, omega, theta) Operatörünün Diğer Operatörlerle İlişkileri, XXIV. Ulusal Matematik Sempozyumu, BURSA, (2011)