SOYUT KONVEKSLİK VE BAZI EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

İLKNUR YEŞİLCE

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2012

SOYUT KONVEKSLİK VE BAZI EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

İLKNUR YEŞİLCE

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

MERSİN
HAZİRAN - 2012

İlknur YEŞİLCE tarafından Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV danışmanlığında ve Prof. Dr. Gabil ADİLOV eş danışmanlığında hazırlanan " Soyut Konvekslik ve Bazı Eşitsizlikler Üzerine" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

Prof. Dr. Gabil ADİLOV G. Adilov

Prof. Dr. Nazım KERİMOV

Prof. Dr. Rauf AMİROV R. Amirov

Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 04/09/2013 tarih ve 2013/16/1467 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. A. Murat GİZİR
Enstitü Müdürü

SOYUT KONVEKSLİK VE BAZI EŞİTSİZLİKLER ÜZERİNE

İlknur YEŞİLCE

ÖZ

Bu tezde, Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler ile ilgili çok sayıda makale incelenerek, sonuçları:

a) Klasik konvekslik için elde edilen Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerin iyileştirilmesi

b) Farklı soyut konvekslik sınıfları için Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerin elde edilmesi

yönünde özetlenmiştir.

L_j-konveks fonksiyonlar tanımlanmış, özellikleri çalışılmış ve bu fonksiyonlar sınıfı için Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler incelenmiştir. Ayrıca, farklı bölgeler için Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerinin somut ifadeleri elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, Soyut Konvekslik, Soyut Konveks Fonksiyonlar, L_j-konveks Fonksiyonlar, Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler.

Danışman: Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

Eş Danışman: Prof. Dr. Gabil ADİLOV, Akdeniz Üniversitesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü

ON ABSTRACT CONVEXITY AND SOME INEQUALITIES

İlknur YEŞİLCE

ABSTRACT

In this thesis, many article related to Hermite-Hadamard type inequality are investigated and their results are summarized as follows:

a) Refining the Hermite-Hadamard type inequalities for classic convexity

b) Obtaining the Hermite-Hadamard type inequalities for different classes of abstract convexity.

L_j-convex functions are defined, their properties are studied and Hermite-Hadamard type inequalities for L_j-convex functions are analyzed. Furthermore, concrete expressions of Hermite-Hadamard type inequalities in various areas are obtained.

Key Words: Convexity, Abstract Convexity, Abstract Convex Functions, L_j-convex Functions, Hermite-Hadamard Type Inequalities

Advisor: Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV, Department of Mathematics, Mersin University

Co-advisor: Prof. Dr. Gabil ADİLOV, Department of Science and Mathematics, University of Akdeniz

TEŞEKKÜR

Öncelikle, yalnızca ders konusunda değil, hayatın her aşamasında daima benim yanımda olan, desteğini hiç bir zaman esirgemeyen, minnet duygumun hiçbir zaman tükenmeyeceği, üzerimde çok büyük emeği olan ve hiçbir zaman beni yalnız bırakmayacağına emin olduğum değerli hocam Prof. Dr. Gabil Adilov'a, çok iyi bir hoca olan ve ondan çok şey öğrendiğim, yolumu çizmemde büyük emeği geçen Prof. Dr. Fahreddin Abdullayev'e, bütün bölüm hocalarıma ve çalışma arkadaşlarıma teşekkür ederim. Daima beni destekleyen ve her zaman yanımda olduklarını hissettiren aileme de sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Tezimi projeye dönüştürmemde destek veren Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi'ne teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

SİMGE VE KISALMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	Negatif Olmayan Reel Sayılar
$\overline{\mathbb{R}}_+$	$\mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$
$\mathbb{R}^n$	n Boyutlu Öklit Uzayı
$\mathbb{R}^n_+$	$\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i \geq 0,\ i = 1, 2, ..., n\}$
$\mathbb{R}^n_{++}$	$\{(x_1, x_2, ..., x_n) : x_i > 0,\ i = 1, 2, ..., n\}$
$\mathbb{R}_{+\infty}$	$\mathbb{R} \cup \{+\infty\}$
$\overline{\mathbb{R}}$	$\mathbb{R} \cup \{-\infty, +\infty\}$
$C[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında Sürekli Fonksiyonlar Kümesi
$I[n]$	$\{1, 2, ..., n\}$
$I_0[n]$	$\{0, 1, 2, ..., n\}$
$:=$	Tanım Olarak Eşittir
$\langle . , . \rangle$	Minimum Tip Fonksiyon
$\langle . , . \rangle^+$	Maksimum Tip Fonksiyon
$\text{dom } f$	$\{x : f(x) < \infty\}$
$\text{int}(D)$	D Bölgesinin İçi
$\text{cl}(D)$	D Bölgesinin Kapanışı
$k = \overline{1, n}$	$k = 1, 2, ..., n$
$x \preceq_j y$	$\{x_j \leq y_j \text{ ve } x_j y_i \leq y_j x_i\ ,\ i \in I\}$
D'	D Kümesinin Tümleyeni
$\mu_D(x)$	D Radyant Kümesinin Minkowski Fonksiyonu
$\upsilon_D(x)$	D Ko-Radyant Kümesinin Minkowski Fonksiyonu
$\limsup$	Üst Limit
$\liminf$	Alt Limit

H.-H.	Hermite-Hadamard
IPH	Artan Pozitif Homojen (Increasing Positively Homogeneous)
InR	Artan Radyant (Increasing Radiant)
ICR	Artan Ko-Radyant (Increasing Co-Radiant)
ICAR	Artan ve Işınlar Üzere Konveks (Increasing Convex Along Rays)
IPH(j)	$\preceq_j$ Kısmi Sıralamasına Göre Artan Pozitif Homojen
■	İspatın Bittiğini Gösterir

1. GİRİŞ

Konveks Analiz'in Optimizasyon Teorisine, Yaklaşım Teorisine, Eşitsizlikler Teorisine v.s çok sayıda uygulamaları mevcuttur ([1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15]). Eşitsizlikler Teorisindeki uygulamaların önemli bir kısmı da Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerin elde edilmesidir.

Eğer $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyon

(yani $\forall\lambda\in[0,1]$ *ve* $x,y\in[a,b]$ için $f(\lambda x+(1-\lambda)y)\leq\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)$)

ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)\right]$$

eşitsizliği doğrudur. Buna Hermite-Hadamard tip eşitsizlik denir.

Son yıllarda Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler ve bunların uygulamalarına olan ilgi daha da artmıştır. Bu yöndeki çalışmalar aşağıdaki gibi sınıflandırılabilir:

1) Klasik konveks fonksiyonlar için bilinen Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerin daha iyi versiyonlarının elde edilmesi için çalışılabilir. Bu istikamette yapılan önemli incelemeler [16], [17], [18], [19], [20], [21] v.b. çalışmalarda bulunabilir. Örneğin, [16] $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyonu için

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right]\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx\leq$$

$$\leq\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right]\leq\frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği Hermite-Hadamard eşitsizliğine göre daha iyi bir eşitsizliktir.

2) Son yıllarda, konvekslik kavramının soyutlaştırılması üzerine de çok sayıda çalışmalar yapılmıştır. Bu çalışmalar sonucu elde edilen konvekslik sınıfları için Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerin incelenmesi de büyük önem taşımaktadır. Bu yönde çok sayıda araştırmalar yapılmıştır. Mesela, Godnova-Levin tip fonksiyonlar ([22]), r-konveks fonksiyonlar ([23]), kuazikonveks fonksiyonlar ([24], [25]), p-fonksiyonlar ([26]), multikativ konveks fonksiyonlar ([27]), artan radyant fonksiyonlar ([28]), artan ve ışınlar üzere konveks fonksiyonlar ([29]).

Örneğin,

i) Eğer $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{++}$, log-convex fonksiyon

(yani $\forall t\in[0,1]$ ve $x,y\in[a,b]$ için $f\left(tx+(1-t)y\right)\leq\left[f(x)\right]^{t}\left[f(y)\right]^{1-t}$)

ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b \ln f(x)dx\right]\leq\sqrt{f(a)f(b)}$$

eşitsizliği doğrudur.

ii) Eğer $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{+}$, p-fonksiyon

(yani $\forall\lambda\in[0,1]$ ve $x,y\in[a,b]$ için $f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq f(x)+f(y)$)

ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx\leq 2\left[f(x)+f(y)\right]$$

eşitsizliği doğrudur.

iii) Eğer $f:[a,b]\to\mathbb{R}_{+}$ kuazikonveks fonksiyon

(yani $\forall\lambda\in[0,1]$ *ve* $x,y\in[a,b]$ için $f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq\max\left\{f(x),f(y)\right\}$)

ise,

$$f(u)\leq\frac{1}{\min\{u-a,b-u\}}\int_a^b f(x)dx$$

eşitsizliği her $u\in[a,b]$ için doğrudur.

Bu tez çalışmasında soyut konveks fonksiyon sınıflarından L_j-konveks fonksiyonlar incelenmiş özellikleri öğrenilmiştir. Bu fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerin elde edilmesi problemi üzerinde çalışılmış ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Elde edilen eşitsizlikler, verilen farklı bölgeler için somut olarak ifade edilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Aşağıdaki tarihsel inceleme ile başlayalım([30] ve [10, s.137]):

22 Kasım 1881'de Hermite (1822–1901) "Mathesis" dergisine bir mektup göndermişti. Mektubun, konveks fonksiyonlar için doğru olan

$$(b-a)\,f\left(\frac{a+b}{2}\right)<\int_a^b f(x)\,dx<(b-a)\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.1}$$

eşitsizliklerini de içeren bir kısmı bu dergide yayınlanmıştır. Hermite'in bu kısa notu matematik literatüründe hiçbir yerde geçmemiş olduğundan, bu önemli eşitsizlikler Hermite'in sonuçları olarak bilinmemekteydi. Hermite'in notları ne yetkili "Jahrbuch über die Fortschritte der Mathematik" dergisinde, ne de "Sous les auspices de l'Académie des sciences de Paris par Emile Picard (1905-1917), membre de l'Institut" de basılmış olan Hermite'in toplu notlarında kaydedilmemiştir. Jordan ve Mansion'un yayınladıkları (1901) "Hermite" broşüründe de, Mathesis'deki nota yer verilmemiştir [30].

Fejér (1880-1959), trigonometrik polinomlar üzerinde çalışırken (1906), Hermite'in sonuçlarının genelleştirilmesi olan, aşağıdaki teoremle ifade edilen, eşitsizlikler elde etmiş, ancak yine Hermite'den bahsetmemiştir:

Teorem 2.1. f, (a,b) aralığında konveks bir fonksiyon, g aynı aralıkta pozitif bir fonksiyon olsun. Ayrıca g fonksiyonu her $t\in\left[0,(a+b)/2\right]$ için,

$$g(a+t)=g(b-t),\qquad 0\le t\le\frac{1}{2}(a+b)$$

eşitsizliğini sağlasın. Bu koşullar altında aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\int_a^b g(x)\,dx\le\int_a^b f(x)\,g(x)\,dx\le\frac{f(a)+f(b)}{2}\int_a^b g(x)\,dx \tag{2.2}$$

$g(x)\equiv 1$ durumunda Hermite eşitsizliğinin elde edileceği açıktır.

Aslında, konvekslik kavramı bile, Hermite tarafından 1881'de elde edilen, 1883'te bir elemanter matematik dergisi olan Mathesis'de basılan bir sonuçtan gelmektedir. Ama maalesef, Hermite'in bu önemli çalışması, sıklıkla, doğru olmayan kimliklerle anılmıştır [30]. Böylece, (a,b) aralığında bir f fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşulu veren çok önemli sonuçlar elde etmesine rağmen Hermite'in ismini matematik literatürüne geçirememiştir.

(2.1) eşitsizliği,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{2.3}$$

için bir ara değer bulma eşitsizliğidir. Hermite'in notlarının basılmasından yirmi yıldan fazla bir zaman sonra, J. L. W. V. Jensen (1905-1906), (2.3) eşitsizliğini kullanarak konveks fonksiyonları (yani J-konveks fonksiyonları) tanımlamıştır [31].

(2.1) eşitsizliği 1893 yılında Hadamard tarafından da ispatlandığından "Hadamard Eşitsizliği" olarak bilinmekteydi ([10], [30], [32] v.s.). Kompleks fonksiyonlar teorisinin önde gelen isimlerinden biri olan Beckenbach da, Hermite'in elde ettiği sonuçlardan haberdar olmadığı için (2.1) eşitsizliğinin Hadamard tarafından ispatlandığını yazmıştır [33, p.441].

(2.1)'deki birinci eşitsizliğin, ikinci eşitsizlikten daha kuvvetli olduğunun altını çizelim; yani bir f konveks fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır ([10, s.140]):

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{f(a)+f(b)}{2}-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{2.4}$$

Gerçekten,

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx+\frac{2}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx\le\frac{1}{2}\left[f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

olmak üzere (2.4) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx\le\frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

Bunu (2.1) eşitsizliğini iki kez uygulayarak elde edebiliriz ($\left[a,(a+b)/2\right]$ ve $\left[(a+b)/2,b\right]$ aralıkları üzerinde). $a=-1,\ b=1$ alarak, Bullen (1978) tarafından elde edilmiş sonuca ulaşırız. (2.4) Bullen eşitsizliği olarak isimlendirilir ([32]).

Son yıllarda Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerin öğrenilmesine olan ilgi daha da artmıştır. Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerinin iyileştirilmiş versiyonlarının elde edilmesi yönünde çalışmalar Niculescu, C.P. ve Persson, L.-E.

[16], Anwar, M. ve Pecaric, J. [17], Hussain, S. ve Anwar, M. [18,21], Dragomir, S.S. [20] ve Mcandrew, A. [19] makalelerinde incelenmiştir.

Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler yardımıyla konveksliğin tanımlanması Hardy, Littlewood ve Polya'nın [34], Pecaric, J., Proschan, F. ve Tong, Y.L. [10], Roberts, A.W. ve Varberg, P.E. [35] çalışmalarında verilmiştir. Çok daha genel sonuçlar Rado, T. tarafından ([36, 1935])'de, Vasic, P.M. ve Lackovic, I.B. tarafından ([37], 1974, 1976)'da, Lupaş, A. ([38], 1976)'da, Pecaric, J. ve Beesack, P.R. tarafından ([39], 1986)'da verilmiştir.

Bu alana olan ilgi, farklı konvekslik kavramlarının verilmesini ve doğal olarak bu kavramlar için H.-H. tip eşitsizliklerin araştırılmasını da tetiklemiştir. Pecaric, J., Proschan, F. ve Tong, Y.L. [10] çalışmalarında log-convex fonksiyonlar, Gill, P.M., Pearce, C.E.M. ve Pecaric, J. [23] çalışmalarında r-convex fonksiyonlar, Dragomir, S.S., Pecaric, J.E. ve Persson, L.E. [40] çalışmalarında Godnova-Levin fonksiyonlar ve p-fonksiyonlar, Dragomir, S.S. ve Pearce, C.E.M. [41] çalışmalarında kuazikonveks fonksiyonlar, Dragomir, S.S. ve Fitzpatrick, S. [42] çalışmalarında birinci anlamda s-konveks fonksiyonlar, [43] çalışmalarında ikinci anlamda s-konveks fonksiyonlar, Dragomir, S.S. [44] çalışmasında m-konveks fonksiyonlar, Adilov, G. ve Kemali, S. [45] çalışmalarında artan pozitif homojen fonksiyonlar, Sharikov, E.V. [28] çalışmasında artan radyant fonksiyonlar, Rubinov, A. [7] çalışmasında artan ve ışınlar üzere konveks fonksiyonlar, Adilov, G. [47] çalışmasında artan ko-radyant fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip eşitsizlikleri incelemişlerdir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. TEMEL KAVRAMLAR

3.1.1. Klasik Konvekslikle İlgili Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 3.1.1.1. ([48]) $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. $y \in S$ olmak üzere

$$f(y) = \lim_{r \to 0} \sup \left\{ f(x) : \|x - y\| \le r \right\}$$

koşulu sağlanıyorsa f 'ye y noktasında üstten yarı süreklidir denir. Eğer her $y \in S$ için bu koşul sağlanıyorsa f 'ye S 'de üstten yarı süreklidir denir.

Tanım 3.1.1.2. ([48]) $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. $y \in S$ olmak üzere

$$f(y) = \lim_{r \to 0} \inf \left\{ f(x) : \|x - y\| \le r \right\}$$

koşulu sağlanıyorsa f 'ye y noktasında alttan yarı süreklidir denir. Eğer her $y \in S$ için bu koşul sağlanıyorsa f 'ye S'de alttan yarı süreklidir denir.

Tanım 3.1.1.3. ([49]) C, $\mathbb{R}^n$ 'nin bir alt kümesi olsun. Eğer her $x \in C, y \in C$ ve $0 < \lambda < 1$ için,

$$(1 - \lambda)x + \lambda y \in C$$

ise, C kümesine konveks küme denir.

Bu tanım daha genel şöyle verilir:

Teorem 3.1.1.1. ([49]) C, $\mathbb{R}^n$ 'nin bir alt kümesi ve $m \ge 2$ olsun. C kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall x_1, x_2, ..., x_m \in C$, $\lambda_i \ge 0$ ve $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ için,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m \in C$$

sağlanmalıdır.

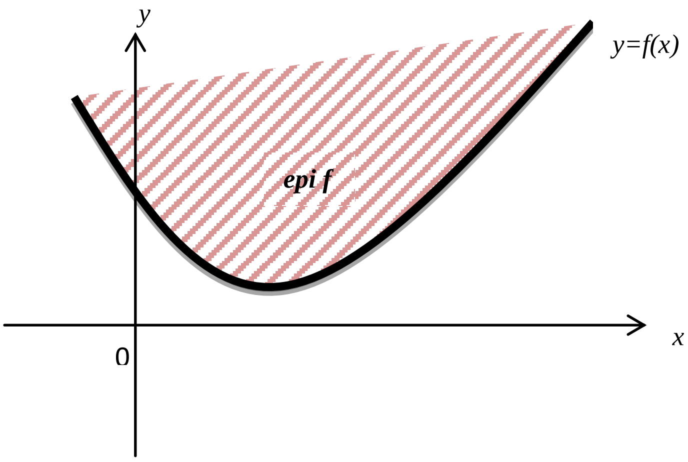
Tanım 3.1.1.4. ([49]) $K \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer $\forall x \in K$ ve $\lambda > 0$ için $\lambda x \in K$ ise bu kümeye koni denir.

Teorem 3.1.1.2. ([49]) $K \subset \mathbb{R}^n$ konisinin konveks olması için gerek ve yeter koşul K 'nın toplama ve pozitif bir skaler ile çarpma işlemine göre kapalı olmasıdır.

Tanım 3.1.1.5. ([49]) $S \subset \mathbb{R}^n$, $f : S \to \overline{\mathbb{R}}$ olmak üzere;

$$\left\{(x,\mu) : x \in S,\ \mu \in \mathbb{R},\ f(x) \le \mu\right\}$$

biçiminde ifade edilen kümeye *f* fonksiyonunun epigrafı denir ve *epif* ile gösterilir. Özel olarak, $S \subset \mathbb{R}$ için *f* 'in epigrafı *f* 'nin grafiğinin üstünde kalan kümeyi belirtir.



Şekil 3.1. $S \subset \mathbb{R}$ için f 'nin epigrafı

Tanım 3.1.1.7. ([49]) $C \subset \mathbb{R}^n$, $f : C \to \mathbb{R}$ olsun. *f* fonksiyonu için aşağıdaki gibi verilen kümeye *f* 'nin tanım kümesi denir ve *domf* ile gösterilir:

$$domf = \left\{x : \exists \mu,\ (x,\mu) \in epif\right\} = \left\{x : f(x) < \infty\right\}$$

Tanım 3.1.1.7. ([49]) $C \subset \mathbb{R}^n$, $f : C \to \mathbb{R}$ olsun. $epif \subset \mathbb{R}^{n+1}$;

$$epif = \left\{(x,\mu) : f(x) \le \mu,\ \forall x \in C\right\}$$

kümesi konveks ise, *f(x)* fonksiyonuna *C* kümesi üzerinde konveks fonksiyon denir.

Teorem 3.1.1.3. ([49]) $f : C \to (-\infty, +\infty]$ ve C konveks küme olsun. f 'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in C$ için,

$$f\left((1-\lambda)x+\lambda y\right) \leq (1-\lambda)f(x)+\lambda f(y), \qquad 0<\lambda<1$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.1.1.4. ([49]) $f : \mathbb{R}^n \to [-\infty, +\infty]$ olsun. f 'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul $f(x)<\alpha$ ve $f(y)<\beta$ olduğunda

$$f\left((1-\lambda)x+\lambda y\right) \leq (1-\lambda)\alpha+\lambda\beta, \qquad 0<\lambda<1$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.1.1.5. ([49]) (Jensen's Inequality) $f : \mathbb{R}^n \to (-\infty, +\infty]$ olsun. f fonksiyonu konvekstir ancak ve ancak

$$f\left(\lambda_1 x_1+\lambda_2 x_2+...+\lambda_m x_m\right) \leq \lambda_1 f(x_1)+\lambda_2 f(x_2)+...+\lambda_m f(x_m)$$

burada, $\lambda_1 \geq 0, ..., \lambda_m \geq 0,\ \ \lambda_1+\lambda_2+...+\lambda_m=1$ dir.

Teorem 3.1.1.6. ([49]) f fonksiyonu (α, β) açık aralığı üzerinde reel değerli, ikinci mertebeden sürekli türevlenebilen bir fonksiyon olsun. f 'nin (α, β) açık aralığı üzerinde konveks olması için gerek ve yeter koşul f 'nin ikinci mertebeden türevinin negatif olmamasıdır.

Teorem 3.1.1.7. ([49]) $C \subset \mathbb{R}^n$ açık küme ve f, C üzerinde reel değerli, ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlenebilen bir fonksiyon olsun. f, C üzerinde konvekstir ancak ve ancak f ' in Hessian matrisinin:

$$Q_x=\left(q_{ij}(x)\right), \qquad q_{ij}(x)=\frac{\partial^2 f}{\partial\xi_i \partial\xi_j}(\xi_1, ..., \xi_n),$$

$\forall x \in C$ için, pozitif olmasıdır.

Teorem 3.1.1.8. ([49]) $F, \mathbb{R}^{n+1}$ üzerinde bir konveks küme ve

$$f(x) = \inf\{\mu : (x, \mu) \in F\}$$

olsun. O halde *f* fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ 'de konvekstir.

Tanım 3.1.1.8. ([49]) Bir fonksiyonun negatifi (-1 ile çarpımından elde edilen yeni fonksiyon) konveks ise, bu fonksiyona konkav fonksiyon denir.

Tanım 3.1.1.9. ([49]) Sonlu ve hem konveks hem konkav olan fonksiyona afin fonksiyon denir.

Teorem 3.1.1.9. $f : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun kapalı konveks fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul $h : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ afin fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = \sup\{h(x) : h \leq f\}, \qquad \forall x \in X$$

olmasıdır. Burada, $h \leq f \Leftrightarrow \forall x \in X$ için $h(x) \leq f(x)$.

3.1.2. Soyut Konvekslikle İlgili Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 3.1.2.1. ([7]) *H*, *X* kümesi üzerinde tanımlı sonlu fonksiyonların bir kümesi ve $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. Eğer *H* 'nin

$$f(x) = \sup\{h(x) : h \in U\}, \qquad \forall x \in X$$

olacak biçimde bir *U* alt kümesi varsa, *f* fonksiyonu *H* 'ye göre soyut konvekstir (veya *H*-konvekstir) denir. Burada H fonksiyonlar sınıfına elemanter fonksiyonlar ailesi denir.

$H = \varnothing$ olması durumunda $f(x) = -\infty$ olarak kabul edilecektir. Bu verilen tanım aşağıdaki gibi de ifade edilebilir.

Tanım 3.1.2.2. ([7]) *Y*, $f : X \to \mathbb{R}_{+\infty}$ fonksiyonlarının sınıfı ve $H \subset Y$ olsun. Eğer her $f \in Y$ fonksiyonu *H*-konveks ise, *H* kümesine *Y* 'nin süpremal üreteç sınıfı denir.

Teorem 3.1.2.1. ([7]) f 'nin H-konveks olması için gerek ve yeter koşul bu fonksiyonun

$$f(x) = \sup\left\{h(x) : h \in H,\ h \le f\right\},\ \forall x \in X$$

biçiminde gösterilebilmesidir.

Tanım 3.1.2.3. ([7]) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun.

$$\operatorname{supp}(f,h) = \{h \in H : h \le f\}$$

kümesine f 'nin destek kümesi denir. Burada H elemanter fonksiyonların kümesini gösterir.

Tanım 3.1.2.4. ([7]) $f : X \to \overline{\mathbb{R}}$ olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan $co_H f(x)$ fonksiyonuna;

$$co_H f(x) = \sup\left\{h(x) : h \in \operatorname{supp}(f,h)\right\},\quad x \in X$$

f 'nin H-konveks kabuğu denir.

Bu tanıma göre; f, H-konvekstir ancak ve ancak $f = co_H f$ 'dır.

3.2. KLASİK KONVEKSLİK İÇİN HERMITE-HADAMARD TİP EŞİTSİZLİKLER VE İYİLEŞTİRİLMİŞ VERSİYONLARI

3.2.1. Klasik Konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler

Hermite-Hadamard eşitsizliği konveks fonksiyonların integral ortalamasının değerlendirilmesi ile ilgilidir. Bu eşitsizlik, klasik konveks fonksiyonlar için aşağıdaki şekilde elde edilmiştir: $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$'de sürekli ve konveks olmak üzere,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{f(a)+f(b)}{2} \tag{3.2.1.1}$$

eşitsizliğini sağlar.

Ayrıca, eşitlik her iki tarafta da sadece afin fonksiyonlar için sağlanır.

Uyarı 3.2.1.1. (3.2.1.1)'deki birinci eşitsizlik, ikinci eşitsizlikten daha kuvvetlidir; yani bir f konveks fonksiyonu için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır ([10, s.140]):

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \qquad (3.2.1.2)$$

Gerçekten,

$$\frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)dx + \frac{2}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^b f(x)dx \le \frac{1}{2}\left[f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]+\frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

olmak üzere (3.2.1.2) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \frac{1}{2}\left[f(a)+f(b)+2f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right].$$

3.2.2. Hermite-Hadamard Eşitsizliği Yardımıyla Konveksliğin Tanımlanması

Hermite-Hadamard eşitsizliğinin her iki yanı konveks fonksiyonları nitelendirir. Yani $[a,b]$ aralığında sürekli f fonksiyonu her bir $x_1, x_2 \in [a,b]$ için H.-H. eşitsizliğini sağlıyorsa, f fonksiyonu bu $[a,b]$'de konvekstir[16].

Hardy, Littlewood ve Polya'nın ([34, s.98]) klasik kitabında konveks fonksiyonların nitelendirilmesinde aşağıdaki sonuç verilmiştir (ayrıca [10, s.139]'a bakın):

Teorem 3.2.2.1. Sürekli bir f fonksiyonunun, (a,b) aralığında konveks olması için gerek ve yeter koşul, $a \le x-h < x+h \le b$ eşitsizliğini sağlayan her $h>0$ sayısı için

$$f(x) \le \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)dt, \qquad (3.2.2.1)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

f, $[a,b]$ aralığında sürekli olduğunda, bu sonucun (3.2.1.1)'in birinci eşitsizliğine denk olduğu gösterilebilir. Buna rağmen, (3.2.1.1) eşitsizliğinden, (3.2.2.1)'deki gibi konvekslik belirleme ölçütüne geçişi kimin ve ne zaman yaptığı tam olarak bilinmemektedir [10, s.139].

$f \in C(I)$, $h>0$ ve $x \in I_1(h) = \{t : t-h, t+h \in I\}$ için;

$$S_h(f,x) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} f(t)\,dt$$

ile tanımlanan S_h operatörüne, genellikle, Steklov fonksiyonu denir. Bununla birlikte bu bir operatör dönüşümüdür. Sonlu bir $I=[a,b]$ aralığı için, h'ın maksimum değeri $\frac{b-a}{2}$ olabilir. Bu durumda, $I_1(h)$ tek bir nokta içerir ve S_h bir fonksiyonel olur. Şimdi (3.2.2.1)'deki Hermite-Hadamard eşitsizliği $x \in I_1(h)$ için $f(x) \le S_h(f,x)$ formunu alır ve fonksiyonun konveksliğine denktir. Tekrarlanmış Steklov operatörleri ($h>0$ mertebesi ile) S_h^n, $n \in \mathbb{N}$, $x \in I_n(h) = \{t : t-nh, t+nh \in I\}$ olmak üzere

$$S_h^0(f,x) = f(x);\ S_h^n(f,h) = \frac{1}{2h}\int_{x-h}^{x+h} S_h^{n-1}(f,x)\,dt$$

ile tanımlanır(örnekler için [10, s.140] bakın). $S_h^1 = S_h$ olduğundan (3.2.2.1) eşitsizliği, $S_h^0(f,x) \le S_h^1(f,x)$ biçimini alır.

Aşağıdaki iki teorem Teorem 3.2.2.1'in birer genelleştirilmeleridir(örnek için [10, s.140]'a bakın):

Teorem 3.2.2.2. Bir $f \in C(I)$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul her $h>0$, kaydedilmiş her n ve her $x \in I_n(h)$ için

$$f(x) \le S_h^n(f,x) \tag{3.2.2.2}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.2.2.3. Bir $f \in C(I)$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul her $h>0$, kaydedilmiş her n ve her $x \in I_n(h)$ için

$$S_h^{n-1}(f,x) \le S_h^n(f,x) \tag{3.2.2.3}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.2.2.3'ün (3.2.2.1) eşitsizliğini temel alan konvekslik ölçütünü genelleştirdiği kolaylıkla görülebilir ($h \to 0$ iken (3.2.2.1)'i elde ederiz).

([35, s.15])'de, Roberts ve Varberg tarafından aşağıdaki sonuç verilir (ayrıca [10, s.147]).

Teorem 3.2.2.4. Bir $f \in C[a,b]$ fonksiyonunun konveks olması için gerek ve yeter koşul $s<t$ şartını sağlayan her $s,t \in [a,b]$ için

$$\frac{1}{t-s}\int_s^t f(x)\,dx \le \frac{f(s)+f(t)}{2} \tag{3.2.2.4}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Çok daha genel sonuçlar Rado tarafından verilmiştir ([36, 1935]). Hermite-Hadamard eşitsizliğinin başka bir genelleşmesi de (1974, 1976) [37]'de Vasic ve Lackovic tarafından ve (1976) [38]'de Lupaş tarafından verilmiştir. Pozitif lineer fonksiyoneller için ise 1986'da Pecaric ve Beesack tarafından gösterilmiştir [39](ayrıca [10, s.146] bakın).

3.2.3. Hermite-Hadamard Eşitsizliklerinin Bazı İyileştirmiş Versiyonları

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon olsun. Sırasıyla, $\left[a,\frac{a+b}{2}\right]$ ve $\left[\frac{a+b}{2},b\right]$ aralıkları için H.-H. eşitsizlikleri;

$$f\left(\frac{3a+b}{4}\right) \le \frac{2}{b-a}\int_a^{\frac{a+b}{2}} f(x)\,dx \le \frac{1}{2}\left[f(a)+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]$$

ve

$$f\left(\frac{a+3b}{4}\right) \le \frac{2}{b-a}\int_{\frac{a+b}{2}}^{b} f(x)\,dx \le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+f(b)\right]$$

biçiminde elde edilir. Bu eşitsizlikler taraf tarafa toplandığında,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{3a+b}{4}\right)+f\left(\frac{a+3b}{4}\right)\right] \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le$$
$$\le \frac{1}{2}\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)+\frac{f(a)+f(b)}{2}\right] \le \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

eşitsizliği elde edilerek f'in integral ortalaması için daha iyi sonuçlar bulunabilir.

H.-H. eşitisizliğinin aşağıdaki iyileştirmeleri ise [20]'de elde edilmiştir. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks fonksiyonunun genel hali için;

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|\frac{f(x)+f(a+b-x)}{2}\right|dx - \left|f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right|$$

ve

$$\frac{f(a)+f(b)}{2} - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq$$
$$\geq \begin{cases} \left|\left|f(a)\right| - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left|f(x)\right|dx\right|, & f(a)=f(b) \;\; ise \\ \left|\frac{1}{f(b)-f(a)}\int_{f(a)}^{f(b)} |x|dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left|f(x)\right|dx\right|, & f(a)\neq f(b) \;\; ise \end{cases}$$

Konveks fonksiyon bir de diferansiyellenebilir ise, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin daha iyileşmiş versiyonlarını sağlar [19]:

Teorem 3.2.3.1. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b) aralığında diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx - f\left(\frac{a+b}{2}\right) \geq \left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|dx - \frac{b-a}{4}\left|f'\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|\right|$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.3.2. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (a,b)'de diferansiyellenebilir konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlik sağlanır

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2} + f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right] - \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \geq$$
$$\geq \frac{1}{2}\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \left|f(x)-f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right|dx - \frac{1}{b-a}\int_a^b \left|x-\frac{a+b}{2}\right|\left|f'(x)\right|dx\right|$$

Monoton ve konveks fonksiyonların alt sınıfı için aşağıdaki sonuç verilebilir.

Teorem 3.2.3.3. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$, (a,b) aralığında konveks ve monoton olsun. Öyleyse,

$$\frac{1}{2}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \geq$$
$$\geq\left|\frac{1}{4}\left[f(b)-f(a)\right]+\frac{1}{b-a}\int_a^b \operatorname{sgn}\left(\frac{a+b}{2}-x\right)f(x)\,dx\right|$$

eşitsizliği sağlanır.

Konveks bir fonksiyonun subdiferansiyel olduğu durumlarda ise Hermite-Hadamard eşitsizliğinin iyileşmesi aşağıdaki teoremle ifade edilebilir[18].

Teorem 3.2.3.4. Bir f fonksiyonu (a,b) aralığında konveks ve Lebesgue integrallenebilir olsun. Bu durumda her $x\in(a,b)$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy+\varphi(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-f(x)\geq$$
$$\geq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|f(y)-f(x)\right|dy-\left|\varphi(x)\right|\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2(b-a)}\right|$$

Burada $\varphi:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x\in(a,b)$ için $\varphi(x)\in\left[f_-^{'}(x),\, f_+^{'}(x)\right]$ koşulunu sağlar.

Yine, konveks fonksiyonlar için H.-H. tip eşitsizliklerin iyileştirmelerinden birkaçını daha verebiliriz[18]:

Teorem 3.2.3.5. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ konveks bir fonksiyon ise her $x\in(a,b)$ için

$$\frac{1}{2}\left[f(x)+\frac{f(b)(b-x)+f(a)(x-a)}{b-a}\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy\geq$$
$$\geq\frac{1}{2}\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|f(x)-f(y)\right|dy-\frac{1}{b-a}\int_a^b|x-y|\left|f'(y)\right|dy\right|$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.2.3.5'in başka bir versiyonu da, f fonksiyonunun yalnızca (a,b) aralığında konveks olduğu durum için aşağıdaki biçimdedir[18].

Teorem 3.2.3.6. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$'de monoton ve (a,b) aralığında konveks olsun. Bu durumda, her $x\in(a,b)$ için

$$\frac{1}{2}\left[f(x)+\frac{(x-a)f(a)+(b-x)f(b)}{b-a}\right]-\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy\geq$$
$$\geq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b \operatorname{sgn}(x-y)f(y)\,dy+\frac{1}{2(b-a)}\left[f(x)(a+b-2x)+(x-a)f(a)+(b-x)f(b)\right]\right|$$

eşitsizliği doğrudur.

[21]'de Sabir Hussain tarafından ispatlanan sonucu verelim.

Teorem 3.2.3.7. *f*, (a,b)'de konveks ve Lebesgue integrallenebilir ise her $x\in(a,b)$ için

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy-f_+^{'}(x)\left(x-\frac{a+b}{2}\right)-f(x)\geq$$
$$\geq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|f(y)-f(x)\right|dy-\left|f_+^{'}(x)\right|\frac{(x-a)^2+(b-x)^2}{2(b-a)}\right|$$

eşitsizliği sağlanır.

Aşağıdaki teoremler ile bu sonuçların daha genel halleri verilmektedir[17].

Teorem 3.2.3.8. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ (2n)-konveks ve (2n-1) kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Öyleyse, her $x\in(a,b)$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır.

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(y)\,dy-(b-a)f(x)\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(b-x)^{k+1}-(a-x)^{k+1}}{(k+1)!(b-a)}f^{(k)}(x)\geq$$
$$\geq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|f(y)-f(x)-\sum_{k=1}^{2n-2}\frac{(y-x)^k}{k!}f^{(k)}(x)\right|dy-\left|f^{(2n-1)}(x)\frac{(b-x)^{2n}-(a-x)^{2n}}{(2n)!(b-a)}\right|\right|$$

Teorem 3.2.3.9. $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu (2n)-konveks ve (2n-1) kez diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$f(x)-\frac{2n}{b-a}\int_a^b f(y)dy-\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{2n-k}{k!(b-a)}\left[(x-b)^k f^{(k-1)}(b)-(x-a)^k f^{(k-1)}(a)\right]\geq$$

$$\geq\left|\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|f(y)-f(x)-\sum_{k=1}^{2n-1}\frac{(x-y)^k}{k!}f^{(k)}(x)\right|dy-\frac{1}{b-a}\int_a^b\left|\frac{(x-y)^{2n-1}}{(2n-1)!}f^{(2n-1)}(y)\right|dy\right|$$

eşitsizliği doğrudur.

3.3. FARKLI KONVEKSLİK SINIFLARI İÇİN HERMITE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

3.3.1. Log-convex Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

I, reel sayıların bir aralığı olsun.

Eğer bir $f:I\to\mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu için $\log f$ konveks ise, ya da denk olarak her $x,y\in I$ ve $t\in[0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik varsa [10, s.7]:

$$f\left(tx+(1-t)y\right)\leq\left[f(x)\right]^t\left[f(y)\right]^{1-t}$$

f fonksiyonuna log-convex denir.

$f:I\to\mathbb{R}_{++}$ log-convex fonksiyonu için Hermite-Hadamard eşitsizliği:

$$\ln\left[f\left(\frac{a+b}{2}\right)\right]\leq\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx\leq\frac{\ln f(a)+\ln f(b)}{2}$$

biçimindedir. Buradan da; *f* log-convex fonksiyonu için Hermite-Hadamard eşitsizliği

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\leq\exp\left[\frac{1}{b-a}\int_a^b\ln f(x)dx\right]\leq\sqrt{f(a)f(b)}$$

şeklinde ifade edilebilir.

3.3.2. r-convex Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Eğer $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f:[a,b] \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu her $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right) \leq \begin{cases} \left[\lambda f^r(x)+(1-\lambda) f^r(y)\right]^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ f^{\lambda}(x)+ f^{1-\lambda}(y), & r=0 \end{cases}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa f fonksiyonu $[a,b]$'de r-konvekstir denir([32]).

r-konveks fonksiyonlar için Hadamard tip eşitsizlik:

Teorem 3.3.2.1. ([23]) f, $[a,b]$'de pozitif r-konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(t)\,dt \leq L_r\left(f(a), f(b)\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Burada $L_r(x,y)$ x,y pozitif sayılarının, r derecesinden, genelleşmiş logaritmik ortalamasıdır ve aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$L_r(x,y) = \begin{cases} \dfrac{r}{r+1}\dfrac{x^{r+1}-y^{r+1}}{x^r-y^r}, & r \neq 0,-1,\ x \neq y \\ \dfrac{x-y}{\ln x - \ln y}, & r=0, x \neq y \\ \dfrac{\ln x - \ln y}{x-y}, & r=-1,\ x \neq y \\ x, & x=y \end{cases}$$

3.3.3. Godnova-Levin Fonksiyonları için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

1985'de, E.K. Godnova ve V.I. Levin ([40] ve [50, ss.410–433] bakın) aşağıdaki fonksiyonlar sınıfını incelemişler:

$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f: I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için,

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right) \leq \frac{f(x)}{\lambda}+\frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlarsa f fonksiyonuna Godnova-Levin fonksiyonu denir. Bu fonksiyonlar sınıfı *Q(I)* ile gösterilir.

Q(I) fonksiyonlar sınıfı için elde edilen Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler aşağıdaki teoremle ifade edilmiştir:

Teorem 3.3.3.1. $f \in Q(I),\ a,b \in I$ için $a<b$ ve $f \in L_1[a,b]$ olsun. Bu durumda aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{4}{b-a}\int_a^b f(x)dx \tag{3.3.3.1}$$

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b p(x)\, f(x)dx \leq \frac{f(a)+f(b)}{2}$$

(3.3.3.1)'deki 4 sabiti en iyi olasılıktır, burada $p(x) = \dfrac{(b-x)(x-a)}{(b-a)^2},\quad x \in [a,b]$

3.3.4. Kuazikonveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

Tanım 3.3.4.1. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \leq \max\{f(x), f(y)\}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, f fonksiyonuna Jensen Kuazikonveks (veya kısaca J-Kuazikonveks) dönüşüm denir.

JQC(I), I'da J-Kuazikonveks fonksiyonlar sınıfı olmak üzere, Hermite-Hadamard tipinin aşağıdaki eşitsizliği sağlanır [41]:

Teorem 3.2.4.1. Eğer, $a<b$ ve $a,b \in I \subseteq \mathbb{R}$ olmak üzere $f \in JQC(I) \cap L_1[a,b]$ ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx + I(a,b)$$

eşitsizliği doğrudur. Burada

$$I(a,b) := \frac{1}{2(b-a)}\int_a^b \left| f(x) - f(a+b-x) \right| dx$$

Tanım 3.3.4.2. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[f\left(tx+(1-t)y\right)+ f\left((1-t)x+ty\right)\right] \le \max\left\{ f(x), f(y)\right\},$$

eşitsizliği, ya da, denk olarak, her $x, y+\delta \in I$ olmak üzere $x < y$ ve $\delta > 0$ için;

$$\frac{1}{2}\left[f(y)+ f(\delta)\right] \le \max\left\{ f(x), f(y+\delta)\right\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu Wright-Kuazikonvekstir (veya kısaca W-Kuazikonvekstir) denir.

Aşağıdaki Hermite-Hadamard tip eşitsizliğin sağlandığı gösterilmiştir [41]:

Teorem 3.3.4.2. $f : I \to \mathbb{R}$, I'da W-Kuazikonveks bir fonksiyon ve $a < b$ olmak üzere $a, b \in I$ için $f \in L_1[a,b]$ olduğunu varsayalım. Bu durumda

$$\frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le \max\left\{ f(a), f(b)\right\}$$

eşitsizliği doğrudur.

3.3.5. P-fonksiyonlar, Kuazikonveks Fonksiyonlar ve Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

Eğer, $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $p : I \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$p\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right) \le p(x)+ p(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona P-tipi bir fonksiyon (ya da kısaca, P-fonksiyon) denir.

P(I), I'da tanımlı P-fonksiyon sınıfı olsun. İntegrallenebilen bir $f \in P(I)$ fonksiyonu için, H.-H.-tipi eşitsizlik, [40]'da da ispatlandığı gibi,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{2}{b-a}\int_a^b f(x)dx \le 2\left(f(a)+ f(b)\right)$$

olur.

Tanım 3.3.5.1. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \leq \max\left\{ f(x), f(y) \right\}$$

ise, f fonksiyonuna kuazikonveks fonksiyon denir.

K(I) ile kuazikonveks fonksiyonlar sınıfı gösterilirse, değerleri negatif olmayan fonksiyonlar için

$$K(I) \subset P(I) \subset Q(I)$$

kapsamalarının sağlandığını kolayca gösterebiliriz. Böylece *Q(I)* ve *P(I)* fonksiyonlar sınıfı için elde edilen H.-H. eşitsizlikleri pozitif değerli kuazikonveks fonksiyonlar için de geçerlidir.

3.3.6. Birinci Anlamda s-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

$f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer her $x, y \in \mathbb{R}_+$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f\left(\alpha x + \beta y\right) \leq \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, *f* fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir.

Şimdi birinci anlamda s-konveks fonksiyonlar için bazı Hermite-Hadamard tip eşitsizlikleri verebiliriz [42]:

Teorem 3.3.6.1. $s \in (0,1]$ olmak üzere, $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ fonksiyonu birinci anlamda s-konveks bir fonksiyon olsun. Eğer, $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}_+$ ve $f \in L_1[a,b]$ ise, aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$f\left(\frac{a+b}{2^{1/s}}\right) \leq \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx$$

İkinci sonuç, Hermite-Hadamard eşitsizliğinin ikinci kısmı ile ilgilidir:

Teorem 3.3.6.2. f ve s için yukarıdaki varsayımlar sağlansın. Bu durumda

$$\psi(t) := \frac{1}{2}\left[1 + \left(1 - t^s\right)^{\frac{1}{s}-1} t^{s-1}\right], \qquad t \in [0,1]$$

olmak üzere,

$$\int_0^1 f\left(ta + \left(1 - t^s\right)^{\frac{1}{s}} b\right)\psi(t)\,dt \le \frac{f(a) + f(b)}{2}$$

eşitsizliği doğrudur.

3.3.7. İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

[51] makalesinde, H. Hudzik ve L. Maligranda aşağıdaki fonksiyon sınıflarını incelemişlerdir:

Tanım 3.3.7.1. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $s \in [0,1]$ olsun. Eğer her $x, y \ge 0$ ve $\alpha + \beta = 1$ olmak üzere $\alpha, \beta \ge 0$ için

$$f(\alpha x + \beta y) \le \alpha^s f(x) + \beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir.

Aşağıdaki teorem, s-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliğini verir [43]:

Teorem 3.3.7.1. $f : \mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}_+$, ikinci anlamda s-konveks bir fonksiyon, $s \in (0,1)$ ve $a < b$ olmak üzere $a, b \in \mathbb{R}_+$ olsun. Eğer $f \in L_1[a,b]$ ise,

$$2^{s-1} f\left(\frac{a+b}{2}\right) \le \frac{1}{b-a}\int_a^b f(x)\,dx \le \frac{f(a) + f(b)}{s+1}$$

eşitsizliği sağlanır.

3.3.8. m-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

[52] makalesinde, G.H. Toader m-konveksliği tanımlamıştır (ayrıca [53] ve [54] bakın):

Tanım 3.3.8.1. $m\in[0,1]$ ve $b>0$ olmak üzere, $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için,

$$f\left(tx+m(1-t)y\right)\le tf(x)+m(1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona m-konveks fonksiyon denir.

Bu fonksiyon sınıfı için Hermite-Hadamard tip bir sonuç [44]:

Teorem 3.3.8.1. $m\in(0,1]$ ve $0\le a<b$ olmak üzere, $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ bir m-konveks fonksiyon olsun. Eğer $f\in L_1[a,b]$ ise,

$$f\left(\frac{a+b}{2}\right)\le\frac{1}{b-a}\int_a^b\frac{f(x)+mf\left(\frac{x}{m}\right)}{2}dx$$
$$\le\frac{m+1}{4}\left[\frac{f(a)+f(b)}{2}+m\frac{f\left(\frac{a}{m}\right)+f\left(\frac{b}{m}\right)}{2}\right]$$

eşitsizliği doğrudur.

3.3.9. Artan Pozitif Homojen (IPH) Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

Tanım 3.3.9.1. ([7]) f fonksiyonu $\mathbb{R}^n_{++}$ veya $\mathbb{R}^n_{+}$ üzerinde tanımlı fonksiyon olsun.

a) Eğer $\forall x\ge y$ için $f(x)\ge f(y)$ ise, f fonksiyonu artandır denir. Burada, $x\ge y\Leftrightarrow x_i\ge y_i,\ i\in I[n]$.

b) Eğer $\forall x\in\mathbb{R}^n_{++}$ ve $\lambda>0$ için $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ ise f fonksiyonuna homojen fonksiyon denir.

Tanım 3.3.9.2. ([7]) Q, $\mathbb{R}^n_{++}$ veya $\mathbb{R}^n_+$ olarak alınır ve f fonksiyonu aşağıdaki durumları sağlar ise, bu fonksiyona birinci dereceden artan pozitif homojen (IPH) fonksiyon denir:

a) Eğer $\forall x, y \in Q$ için $x \geq y$ ise $f(x) \geq f(y)$ olsun, yani f artan fonksiyondur;

b) Eğer $\forall x \in Q$ ve $\lambda > 0$ için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, yani f birinci dereceden pozitif homojen fonksiyondur.

Her $x, l \in \mathbb{R}^n_{++}$ için $\langle l, x\rangle = \min\limits_{1\leq i\leq n} \frac{x_i}{l_i}$, $\langle x, l\rangle^+ = \max\limits_{1\leq i\leq n} \frac{l_i}{x_i}$ ‘dir ve bu fonksiyonlara, sırasıyla, min-tip ve max-tip fonksiyonlar denir.

Teorem 3.3.9.1. $f : D \to [0, \infty]$ fonksiyonu $D \subset \mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı olsun. Aşağıda verilen iddialar birbirine denktir:

i) f fonksiyonu $\langle l, .\rangle : D \to [0, \infty]$ fonksiyonlar ailesine göre konvekstir,

ii) Her $l, x \in D$ için, $f(l)\langle l, x\rangle \leq f(x)$ eşitsizliği doğrudur,

iii) f fonksiyonu D üzerinde IPH'dir.

$D \subset \mathbb{R}^n_{++}$ olmak üzere, $f : D \to [0, \infty]$ bir IPH fonksiyon ve D üzerinde integrallenebilir ise, her $u \in D$ için,

$$f(u)\int_D \langle u, x\rangle dx \leq \int_D f(x)dx \leq f(u)\int_D \langle u, x\rangle^+ dx$$

iki taraflı Hermite-Hadamard tip eşitsizliği elde edilmiş olur.[45]

3.3.10. Artan Radyant (InR) Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

Tanım 3.3.10.1. ([7]) Q, $\mathbb{R}^n_+$ içinde konik küme ve $U \subset Q$ olsun. Eğer

$$(x \in U,\ \ 0 < \lambda \leq 1) \Rightarrow \lambda x \in U$$

ise U kümesi Q'nun radyant alt kümesidir denir.

Tanım 3.3.10.2. ([7]) $Q \subset \mathbb{R}^n_+$ kapalı koni, V boş kümeden farklı ve $V \subset Q$ olsun. Eğer

$$(x \in V,\ \ \lambda \geq 1) \Rightarrow \lambda x \in V$$

ise V kümesi Q'nun ko-radyant alt kümesidir denir.

Tanım 3.3.10.3. ([28]) $f: Q \to \overline{\mathbb{R}}_{+} = [0,+\infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer *f* fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa *f* artan radyant fonksiyondur denir:

a) Eğer $\forall x, y \in Q$ için $x \geq y$ ise $f(x) \geq f(y)$;

b) Eğer $\forall x \in Q$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $f(\lambda x) \leq \lambda f(x)$.

$\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı ϕ fonksiyonu

$$\phi(u,x) = \begin{cases} 0\,, & \text{eğer} \quad \langle u,x\rangle < 1 \\ \langle u,x\rangle, & \text{eğer} \quad \langle u,x\rangle \geq 1 \end{cases}$$

ve $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı ϕ_u fonksiyonu $\phi_u(x) = \phi(u,x)$ olsun. Bilindiği gibi

$$U = \left\{ \frac{1}{c}\phi_u : u \in \mathbb{R}^n_{++}\,,\ \ c \in (0,+\infty] \right\}$$

kümesi $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı InR fonksiyonların süpremal üreteç sınıfıdır ([28]). Burada, $c = +\infty$ ise $c\phi_u(x) = \sup\limits_{h>0}\left(h\phi_u(x)\right)$ olur.

$D \subset \mathbb{R}^n_{++}$, $f: D \to \mathbb{R}_{+\infty}$ olmak üzere, *f* fonksiyonu InR fonksiyon ve *D* üzerinde integrallenebilir olsun. Her $u \in D$ için,

$$f(u)\int\limits_D \phi(u,x)\,dx \leq \int\limits_D f(x)\,dx$$

eşitsizliği vardır.

f, D üzerinde integrallenebilen bir InR fonksiyon olsun. $u \in D$ ve *D(u)* kümesi,

$$D(u) = \left\{ x \in D : \langle u,x\rangle^{+} \leq 1 \right\}$$

olmak üzere

$$\int\limits_{D(u)} f(x)\,dx \leq f(u) \int\limits_{D(u)} \phi_u^{+}(x)\,dx$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $\phi_x^{+}(l)$ fonksiyonu

$$\phi_x^{+}(l) = \begin{cases} \langle x,l\rangle^{+}, & \text{eğer} \quad \langle x,l\rangle^{+} \leq 1 \\ +\infty, & \text{eğer} \quad \langle x,l\rangle^{+} > 1 \end{cases}$$

biçiminde alınır.[46]

3.3.11. Artan Ko-Radyant (ICR) Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

ICR fonksiyonlar IPH fonksiyonlardan daha geniş bir sınıftır.

Tanım 3.3.11.1. ([7]) $f: Q \to \mathbb{R}_{+\infty}$ bir fonksiyon olsun.

a) Eğer $\forall x \in Q$ ve $\lambda \in [0,1]$ için $f(\lambda x) \le \lambda f(x)$ ise *f* fonksiyonu radyanttır denir.

b) Eğer $\forall x \in Q$ ve $\lambda \ge 1$ için $f(\lambda x) \le \lambda f(x)$ ise *f* fonksiyonu ko-radyanttır denir.

$\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde verilen ψ_l fonksiyonu,

$$\psi_l(x) = \begin{cases} \langle l, x \rangle, & \langle l, x \rangle \le 1 \text{ ise} \\ 1, & \langle l, x \rangle > 1 \text{ ise} \end{cases}$$

olsun. Burada $l \in \mathbb{R}^n_{++}$'dir. *H* ile gösterilen,

$$H = \left\{ c\psi_l : l \in \mathbb{R}^n_{++},\ c \in [0, \infty] \right\}$$

küme, $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı olan artan ko-radyant (ICR) fonksiyonların süpremal üreteç sınıfıdır ([47]).

Teorem 3.3.11.1. $f: D \to [0, \infty]$ bir fonksiyon ve $D \subset \mathbb{R}^n_{++}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar denktir:

i) *f* fonksiyonu, $l \in D$, $c \in [0, \infty]$ olmak üzere $c\psi_l : D \to [0, \infty]$, fonksiyonlar ailesine göre soyut konvekstir,

ii) *f* fonksiyonu, *D* üzerinde artan ko-radyant fonksiyondur,

iii) Her $l, x \in D$ için $f(l)\psi_l(x) \le f(x)$'dir.

$D \subset \mathbb{R}^n_{++}$, ve $f: D \to [0, \infty]$ fonksiyonu *D* üzerinde integrallenebilen bir ICR fonksiyon olsun. O halde $\forall u \in D$ için,

$$f(u) \int_D \psi_u(x)\, dx \le \int_D f(x)\, dx$$

eşitsizliği sağlanır.

f bir ICR fonksiyon ve *D* üzerinde integrallenebilir olsun. O halde $\forall u \in D$ için,

$$\int_D f(x)\,dx \le f(u)\int_D \psi_u^+(x)\,dx$$

eşitsizliği doğrudur. Burada $\psi_x^+(l)$ ile

$$\psi_x^+(l)=\begin{cases}\langle x,l\rangle^+, & \langle x,l\rangle^+ \ge 1 \text{ ise}\\ 1, & \langle x,l\rangle^+ \le 1 \text{ ise}\end{cases}$$

fonksiyonu gösterilmiştir.[47]

3.3.12. Artan ve Işınlar Üzere Konveks (ICAR) Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Eşitsizlikleri

$K \subset \mathbb{R}^n$ bir konik küme ve $f : K \to \mathbb{R}_{+\infty}$ olsun. Eğer f 'nin sıfırdan başlayan ışın üzerine daraltılmışı bir değişkenli konveks bir fonksiyon ise, bu fonksiyona ışınlar üzere konveks fonksiyon denir. Başka bir deyişle, her bir $x \in K$ için,

$$f_x(t) = f(tx),\ t \ge 0$$

fonksiyonu konveks ise, $f : K \to \mathbb{R}_{+\infty}$ fonksiyonuna ışınlar üzere konveks fonksiyon denir.

Burada *Q*, $\mathbb{R}_+^n$ veya $\mathbb{R}_{++}^n$ olarak alınacaktır.

Tanım 3.3.12.1. ([7]) $f : Q \to \mathbb{R}_{+\infty}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $x \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$f_x(\alpha) = f(\alpha x)$$

fonksiyonu $[0,+\infty)$ üzerinde konveks ise, *f* fonksiyonu ışınlar üzere konvekstir denir ve kısaca ICAR ile gösterilir.

Teorem 3.3.12.1. Aşağıdaki gibi tanımlanan *h* fonksiyonlarının sınıfı H_L olsun,

$$h(x) = \langle l,x\rangle - c$$

burada $\langle l,x\rangle$ min-tip fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}$. Bir $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_{+\infty}$ fonksiyonunun H_L-konveks olması için gerek ve yeter koşul *f* 'nin alttan yarısürekli ve ICAR fonksiyon olmasıdır.

$D \subset \mathbb{R}_{+}^{n}$ kümesi kapalı bir bölge yani $cl(\operatorname{int} D) = D$ olsun. *Q(D)* kümesi

$$Q(D) = \left\{ x^{*} \in D : \frac{1}{A(D)} \int_{D} \langle x^{*}, x \rangle \, dx = 1 \right\}$$

olur.

Q(D) kümesi boş kümeden farklı ve *f, D* üzerinde sürekli bir ICAR fonksiyon olsun. O halde,

$$\max_{u \in Q(D)} f(u) \leq \frac{1}{A(D)} \int_{D} f(x) \, dx$$

eşitsizliği sağlanır.[46]

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. L_j-KONVEKS FONKSİYONLAR VE HERMITE-HADAMARD TİP EŞİTSİZLİKLER

$K \subset \mathbb{R}^n$ bir uçlu koni ve $C \subset K$ bir koni olsun. C konisinin, K konisi tarafından belirlenen genelleştirilmiş $\leq_K$ kısmi sıralamasına sahip olduğunu varsayalım (yani, $x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$). Her bir $y \in C$ için,

$$l_y(x) = \sup\{\alpha > 0 : \alpha y \leq_K x\},\ x \in C$$

ile tanımlanmış $l_y : C \to \mathbb{R}_{+\infty}$ fonksiyonları tanımlanabilir (Burada, $\sup\varnothing = 0$'dır.).

Verilen kısmi sıralamaya göre monotonluk özellikleri $L = \{l_y \mid y \in C\}$ elemanter fonksiyonlar sınıfına dayalı soyut konveks fonksiyonların özellikleri ile paralel olarak incelenir.

$\mathbb{R}^n_+$ ve $\mathbb{R}^n_{++}$ konilerinde monotonluk özellikleri [7]'de çalışılmıştır. Bu tip fonksiyonlar için farklı yazarlar tarafından H.-H. tip eşitsizlikler de elde edilmiştir ([7], [45], [46], [47]).

$C = K$ ve $\operatorname{int} K \neq \varnothing$ durumu için monotonik analiz J. Dutta, J.E. Martinez-Legaz ve A.M. Rubinov tarafından [55]'de ve daha genel durumlar [56]'da incelenmiştir.

Farklı bir kısmi sıralama bağıntısı da G. Adilov ve A.M. Rubinov tarafından [57]'de verilmiş ve B-konveks fonksiyonlar kümesi bu yönde öğrenilmiştir.

Bu tezde de, verilen bir sıralamaya göre L_j fonksiyonlar ailesi oluşturulur ve bu aileye göre soyut konveks fonksiyonlar sınıfı tanımlanır. Bu fonksiyon sınıfı için H.-H. tip eşitsizlikler incelenir, formüller şeklinde ifade edilir ve verilen farklı bölgeler için eşitsizliklerin somut ifadeleri bulunur.

4.1.1. L_j-konveks Fonksiyonlar

Her $z \in \mathbb{R}^n_{++}$ noktası için $\mathbb{R}^n_{++}$ konisinin aşağıdaki gibi belirlenen $(n+1)$ parçalanmasını ele alalım: $I[n]=\{1,2,...,n\}$ olmak üzere,

$$N_0(z)=\left\{x \in \mathbb{R}^n_{++} \,\middle|\, 0 < x_i \le z_i, \quad i \in I[n]\right\}$$
$$N_j(z)=\left\{x \in \mathbb{R}^n_{++} \,\middle|\, z_j \le x_j \quad \text{ve} \quad \forall i \in I[n] \quad \text{için} \quad x_i z_j \le z_i x_j\right\}, \quad j \in I[n]$$

$N_0(z)$ kümesinin kapalı, konveks ve radyant bir küme, $N_j(z)$ $\left(j=\overline{1,n}\right)$ kümelerinin ise, kapalı, konveks ve ko-radyant oldukları açıktır.

Bu kümelere göre aşağıdaki gibi $(n+1)$ tane bağıntı tanımlayalım: $x, y \in \mathbb{R}^n_{++}$ için,

$$x \preceq_0 y \Leftrightarrow x \in N_0(y)$$
$$x \preceq_j y \Leftrightarrow y \in N_j(x), \quad j \in I[n]$$

Bu bağıntıların birer kısmi sıralama bağıntısı olduğunu gösterelim.

Lemma 4.1.1.1. $\preceq_j \left(j \in I_0[n]\right)$ bağıntısı $\mathbb{R}^n_{++}$'da kısmi sıralama bağıntısıdır.

İspat: $j=0$ için $\preceq_0$ bağıntısının koordinatlara göre kısmi sıralama bağıntısı olduğu açıktır. Yani $x, y \in \mathbb{R}^n_{++}$ için,

$$x \preceq_0 y \Leftrightarrow y - x \in \mathbb{R}^n_{++}$$

$j \in I[n]$ için $\preceq_j$ bağıntılarının da her birinin birer kısmi sıralama bağıntısı olduğunu gösterelim.

Her $j \in I[n]$ ve $x \in \mathbb{R}^n_{++}$ için $x \preceq_j x$'dir. Yani $\preceq_j$ bağıntısı yansıma özelliğine sahiptir. Gerçekten, $x_j \le x_j$ ve $x_i x_j \le x_j x_i$ olduğundan $x \in N_j(x)$ dir.

Şimdi ters simetri özelliğinin sağlandığını gösterelim. $x, z \in \mathbb{R}^n_{++}$ olmak üzere, $z \preceq_j x$ ve $x \preceq_j z$ olsun. Bu durumda

$$z \preceq_j x \Leftrightarrow z_j \le x_j \quad \text{ve} \quad x_i z_j \le z_i x_j \;, \quad i \in I[n]$$
$$x \preceq_j z \Leftrightarrow x_j \le z_j \quad \text{ve} \quad z_i x_j \le x_i z_j \;, \quad i \in I[n]$$

Burada $z_j \le x_j$ ve $x_j \le z_j$ olduğundan $x_j = z_j$ olur. İkinci kısım eşitsizliklerden ve elde edilen bu eşitsizlikten $x_i \le z_i$ ve $z_i \le x_i$ olur. Yani $\forall i \in I[n]$ için $x_i = z_i$, dolayısıyla $x = z$.

Geçişme özelliğini ele alalım. $x, y, z \in \mathbb{R}^n_{++}$ için $x \preceq_j y$, $y \preceq_j z$ ise $x \preceq_j z$ olduğunu gösterelim.

$$x \preceq_j y \Leftrightarrow x_j \le y_j \quad \text{ve} \quad y_i x_j \le x_i y_j \ , \ i \in I[n]$$
$$y \preceq_j z \Leftrightarrow y_j \le z_j \quad \text{ve} \quad z_i y_j \le y_i z_j \ , \ i \in I[n]$$

$x_j \le y_j$ ve $y_j \le z_j$ olduğundan $x_j \le z_j$ dir.

İkinci eşitsizliklerden;

$$y_i x_j \le x_i y_j \ \Rightarrow \ y_i x_j (z_i y_j) \le x_i y_j (z_i y_j)$$
$$y_i y_j (z_i x_j) \le x_i y_j (z_i y_j) \le x_i y_j (y_i z_j)$$
$$y_i y_j (z_i x_j) \le y_i y_j (x_i z_j)$$
$$z_i x_j \le x_i z_j \ , \qquad i \in I[n]$$

elde ederiz. Böylece $x_j \le z_j$ ve $\forall i \in I[n]$ için $z_i x_j \le x_i z_j$ olduğundan $x \preceq_j z$ dir. ■

$N_j(y)$ $\left(y \in \mathbb{R}^n_{++},\ j \in I_0[n] = I[n] \cup \{0\}\right)$ kümeleri ve $\preceq_j$ sıralamalarına göre Minkowski fonksiyonlarını yazalım. $y \in \mathbb{R}^n_{++}$ için $N_0(y)$ radyant bir küme, $\preceq_0$ bağıntısı ise koordinatlara göre kısmi sıralama olduğundan Minkowski fonksiyonu

$$\mu_{N_0(y)}(x) := \inf\{\alpha > 0 : x \in \alpha N_0(y)\} = \inf\{\alpha > 0 : x \preceq_0 \alpha y\}$$

şeklindedir. Bu fonksiyonları $l_{0,y}$ ile gösterelim, yani

$$l_{0,y}(x) := \mu_{N_0(y)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n_{++}$$

$j \in I[n]$ ve $y \in \mathbb{R}^n_{++}$ için $N_j(y)$ kümeleri ko-radyant olduklarından Minkowski fonksiyonları

$$\upsilon_{N_j(y)}(x) := \sup\{\alpha : x \in \alpha N_j(y)\} = \sup\{\alpha : \alpha y \preceq_j x\}$$

şeklinde tanımlanırlar. Bu fonksiyonları da $l_{j,y}$ ile gösterelim, yani

$$l_{j,y}(x) := \upsilon_{N_j(y)}(x), \qquad x \in \mathbb{R}^n_{++}$$

Uyarı 4.1.1.1. $y \in \mathbb{R}^n_{++}$ ve $j \in I[n]$ için $N_j(y)$ kümesi

$$V_j(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ : \frac{x_i}{y_i} \le \frac{x_j}{y_j} \quad \left(i \in I[n]\right) \right\}$$

konisi ile

$$H_j(y) = \left\{ x \in \mathbb{R}^n : x_j \ge y_j \right\}$$

yarım uzayının kesişimi şeklinde ifade edilebilir.

$V_j(y)$ konilerinden yararlanarak $l_{j,y}$ fonksiyonlarını farklı bir şekilde ifade edebiliriz. Eğer $x \in V_j(y)$ ise,

$$l_{j,y}(x) = \sup\left\{\alpha : \alpha y \preceq_j x\right\} = \sup\left\{\alpha : \alpha y_j \le x_j\right\} = \frac{x_j}{y_j}$$

olur. $x \notin V_j(y)$ durumunda $\alpha y \preceq_j x$ eşitsizliğini sağlayan α ’lar kümesi boş küme olduğundan $l_{j,y}(x) = 0$ ’dır. Dolayısıyla

$$l_{j,y}(x) = \begin{cases} \dfrac{x_j}{y_j}, & x \in V_j(y) \\ 0, & x \notin V_j(y) \end{cases}$$

Her $j \in I_0[n]$ için $L_j = \left\{ l_{j,y} \middle| y \in \mathbb{R}^n_{++} \right\}$ fonksiyonlar ailesine göre konveksliği inceleyelim.

Tanım 4.1.1.1. $j \in I_0[n]$ olsun. $f : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{+\infty}$ fonksiyonu birinci dereceden homojen ve $\preceq_j$ kısmi sıralamasına göre artan ise, *f*, *IPH(j)* fonksiyondur denir.

Teorem 4.1.1.1. Her $j \in I_0[n]$ ve $y \in \mathbb{R}^n_{++}$ için $l_{j,y}$ fonksiyonu *IPH(j)* fonksiyondur.

İspat: $j = 0$ için

$$\begin{aligned} l_{0,y}(\lambda x) &= \inf\left\{\alpha > 0 : \lambda x \in \alpha N_0(y)\right\} = \inf\left\{\alpha > 0 : \lambda x \preceq_0 \alpha y\right\} \\ &= \inf\left\{\alpha > 0 : x \preceq_0 \frac{\alpha}{\lambda} y\right\} = \lambda \inf\left\{\alpha' > 0 : x \preceq_0 \alpha' y\right\} = \lambda l_{0,y}(x) \end{aligned}$$

$j \in I[n]$ için

$$\begin{aligned} l_{j,y}(\lambda x) &= \sup\left\{\alpha : \lambda x \in \alpha N_j(y)\right\} = \sup\left\{\alpha : \alpha y \preceq_j \lambda x\right\} \\ &= \sup\left\{\alpha : \frac{\alpha}{\lambda} y \preceq_j x\right\} = \lambda \sup\left\{\alpha' : \alpha' y \preceq_j x\right\} = \lambda l_{j,y}(x) \end{aligned}$$

Böylece, $l_{j,y}\left(j\in I_0[n]\right)$ birinci dereceden pozitif homojen bir fonksiyondur.

Şimdi artan olduğunu gösterelim. $j=0$ olsun. Eğer $x_1 \preceq_0 x_2$ ise $\{\alpha>0: x_2 \preceq_0 \alpha y\}\subset\{\alpha>0: x_1 \preceq_0 \alpha y\}$'dir ve buradan $l_{0,y}(x_1)\le l_{0,y}(x_2)$ olur. $j\in I[n]$ için $x_1 \preceq_j x_2$ ise $\{\alpha>0:\alpha y \preceq_j x_1\}\subset\{\alpha>0:\alpha y \preceq_j x_2\}$'dir ve buradan $l_{j,y}(x_1)\le l_{j,y}(x_2)$ olur. ■

Aşağıdaki teoremin doğruluğu [57]'deki Sonuç 2.6'dan çıkar:

Teorem 4.1.1.2. $f:\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}_+$ fonksiyonunun L_j-konveks $\left(j\in I_0[n]\right)$ olması için gerekli ve yeterli koşul f'in IPH(j) fonksiyon olmasıdır.

IPH(j) fonksiyonlarının bazı önemli özelliklerini aşağıdaki teorem ile verelim.

Teorem 4.1.1.3. $j\in I[n]$ ve $f:\mathbb{R}^n_{++}\to\mathbb{R}_{+\infty}$ fonksiyonu IPH(j) fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

(i) Her $x\in\mathbb{R}^n_{++}$ için $f(x)\ge 0$

(ii) Eğer $x^*\in\mathbb{R}^n_{++}$ için $f(x^*)=+\infty$ ise, her $x\in\left\{x\in\mathbb{R}^n_{++}\,\middle|\,\exists\lambda>0,\ \lambda x^* \preceq_j x\right\}$ için de $f(x)=+\infty$'dur.

(iii) Eğer $x^*\in\mathbb{R}^n_{++}$ için $f(x^*)=0$ ise, her $x\in\left\{x\in\mathbb{R}^n_{++}\,\middle|\,\exists\lambda>0,\ x \preceq_j \lambda x^*\right\}$ için de $f(x)=0$'dır.

İspat: (i) $x\in\mathbb{R}^n_{++}$ olsun. $\frac{1}{2}x \preceq_j x$ olduğundan $\frac{1}{2}f(x)=f\left(\frac{x}{2}\right)\le f(x)$ olur. Yani $f(x)\ge 0$.

(ii) $x\in\mathbb{R}^n_{++}$ ve $\lambda x^* \preceq_j x$ eşitsizliğini sağlayacak bir $\lambda>0$ sayısı olsun. Bu durumda $f(x)\ge f(\lambda x^*)=\lambda f(x^*)=+\infty$ olur.

(iii) $x\in\mathbb{R}^n_{++}$ ve $x \preceq_j \lambda x^*$ olacak şekilde $\lambda>0$ sayısı olsun. Bu durumda $0\le f(x)\le f(\lambda x^*)=\lambda f(x^*)=0$ olur. ■

4.1.2. L_j-konveks Fonksiyonlar için Hermite-Hadamard Tip Eşitsizlikler

L_j-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerin elde edilmesinde önemli rolü olan bir teorem ispatlayalım.

Teorem 4.1.2.1. $j \in I[n]$ ve $p : \mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_+$ için aşağıdakiler denktir:

(i) p, IPH(j) fonksiyondur.

(ii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n_{++}$ ve $\lambda y \preceq_j x$ koşulunu sağlayan $\lambda > 0$ için $p(x) \geq \lambda p(y)$.

(iii) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n_{++}$ için $p(x) \geq l_{j,y}(x)\, p(y)$.

İspat: (i) $\Rightarrow$ (ii) olduğu açıktır.

(ii) $\Rightarrow$ (i) olduğunu gösterelim. $\lambda = 1$ alındığında (ii)'den p'nin monotonluğu çıkar. Birinci dereceden pozitif homojen olduğunu gösterelim. $\lambda > 0$ olmak üzere $x = \lambda y$ olsun. (ii)'den $p(x) \geq \lambda p(y)$ elde edilir. Öte yandan $y = \lambda^{-1} x$ olduğundan yine (ii)'den $p(y) \geq \lambda^{-1} p(x)$ olur. Böylece, $p(\lambda y) = \lambda p(y)$ elde edilir.

Şimdi de (ii) $\Rightarrow$ (iii) olduğunu gösterelim. Eğer $p(y) = 0$ ise, $\forall x$ için $p(x) \geq 0 = l_{j,y}(x)\, p(y)$ olur. $p(y) > 0$ olduğunu ve $\lambda > 0$ için $\lambda y \preceq_j x$ olduğunu varsayalım. (ii)'den $\lambda \leq \dfrac{p(x)}{p(y)}$ doğrudur. $l_{j,y}$'nin tanımından $\left(l_{j,y}(x) = \sup\{\lambda : \lambda y \preceq_j x\}\right)$

$$l_{j,y}(x) \leq \frac{p(x)}{p(y)}$$

elde edilir.

(iii) $\Rightarrow$ (ii) olduğu direkt $l_{j,y}$'nin tanımından çıkar. ■

Teorem 4.1.2.1 teoreminin bir sonucu olarak L_j-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard tip eşitsizliği elde edebiliriz.

Sonuç 4.1.2.1. [58] $D \subset \mathbb{R}^n_{++}$ olmak üzere $p : D \to [0,\infty]$ L_j-konveks fonksiyon ve D'de integrallenebilir olsun. Bu durumda her $y \in D$ için

$$p(y)\int_D l_{j,y}(x)\,dx \le \int_D p(x)\,dx \tag{4.1.2.1}$$

eşitsizliği doğrudur.

Doğruluğu Teorem 4.1.2.1'in (iii) şıkkından kolayca elde edilebilir.

Hermite-Hadamard tip eşitsizlikleri, [28,29]'da verilen *Q(D)* kümeleri yoluyla inceleyelim.

$D \subset \mathbb{R}^n_{++}$ kapalı, sınırlı ve $cl(\operatorname{int} D) = D$ koşulunu sağlayan bir küme olsun. $A(D) = \int_D dx$ olmak üzere

$$\frac{1}{A(D)}\int_D l_{j,x^*}(x)\,dx = 1 \tag{4.1.2.2}$$

koşulunu sağlayan tüm $x^* \in D$ noktalarından oluşan kümeyi *Q(D)* ile gösterelim.

Teorem 4.1.2.2. *p, D*'de tanımlı L_j-konveks ve *D*'de integrallenebilir bir fonksiyon olsun. Eğer *Q(D)* boştan farklı ise,

$$\sup_{x^* \in Q(D)} p(x^*) \le \frac{1}{A(D)}\int_D p(x)\,dx \tag{4.1.2.3}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat: Eğer $p(x^*) = +\infty$ olursa, $p(x) \ge l_{j,y}(x)\,p(y)$ eşitsizliğini kullanarak, *p*'nin integrallenemeyeceği gösterilebilir. Bu da *p*'nin integrallenebilirliği ile çelişir. Dolayısıyla $p(x^*) < +\infty$ dur. Teorem 4.1.2.1. (iii)'den

$$\forall x \in D \quad \text{için} \quad p(x) \ge l_{j,x^*}(x)\,p(x^*)$$

sağlanır. $x^* \in Q(D)$ olduğundan dolayı (4.1.2.2)'den

$$\begin{aligned} p(x^*) &= p(x^*)\frac{1}{A(D)}\int_D l_{j,x^*}(x)\,dx \\ &= \frac{1}{A(D)}\int_D p(x^*)\,l_{j,x^*}(x)\,dx \le \frac{1}{A(D)}\int_D p(x)\,dx \end{aligned}$$

olur. ■

Uyarı 4.1.2.1. (4.1.2.3)'den kolayca görülebileceği gibi her bir $x^* \in Q(D)$ için,

$$p(x^*) \leq \frac{1}{A(D)} \int_D p(x)\,dx \tag{4.1.2.4}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $p(x) = l_{j,x^*}(x)$ alınırsa, (4.1.2.4) eşitliğe dönüşür.

p, bir $D \subset \mathbb{R}^n_{++}$ kapalı, sınırlı, bağlantılı kümesinde tanımlı L_j-konveks fonksiyon olsun ve D'de integrallenebilir olsun. $\forall x, y \in D$ için

$$p(x) \geq l_{j,y}(x)\,p(y)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\varphi_{j,x}(y) = \frac{1}{l_{j,y}(x)} = \begin{cases} \dfrac{y_j}{x_j}, & x \in V_j(y) \\ \infty, & x \notin V_j(y) \end{cases}$$

olmak üzere

$$p(y) \leq \varphi_{j,x}(y)\,p(x) \tag{4.1.2.5}$$

elde edilir. (4.1.2.5)'den yararlanarak kolayca ispatlanabilen bir teorem verelim:

Teorem 4.1.2.3. $D \subset \mathbb{R}^n_{++}$ olmak üzere, $p : D \to \mathbb{R}$ fonksiyonu D'de integrallenebilir ve L_j-konveks olsun. Bu durumda; $\forall y \in D$ için;

$$\int_D p(x)\,dx \leq p(y) \int_D \varphi_{j,y}(x)\,dx$$

eşitsizliği doğrudur.

4.2. BAZI ÖZEL BÖLGELERDE L_j-KONVEKS FONKSİYONLAR İÇİN HERMITE-HADAMARD EŞİTSİZLİKLERİ

$\mathbb{R}^2_{++}$ konisinden olan bazı özel bölgeler üzerinde, L_j-konveks fonksiyonlar için Hermite-Hadamard eşitsizliklerinin somut şekli elde edilecektir.

Önce herhangi bir $D\subset\mathbb{R}^2_{++}$ bölgesi ve her $y\in D$ için $\int\limits_D l_{j,y}(x)\,dx$ integralinin hesabı formülünü elde edelim.

$D\subset\mathbb{R}^2_{++}$ ve $y=(y_1,y_2)\in D$ olsun. Bu durumda genel olarak,

$$V_j(y)=\left\{x\in\mathbb{R}^n_{++}:\frac{x_i}{y_i}\le\frac{x_j}{y_j}\big(i\in I[n]\big)\right\},\qquad l_{j,y}(x)=\begin{cases}\dfrac{x_j}{y_j}, & x\in V_j(y)\\ 0, & x\notin V_j(y)\end{cases}$$

olduğundan, $\mathbb{R}^2_{++}$'da;

$$V_1(y)=\left\{x\in\mathbb{R}^2_{++}:\frac{x_2}{y_2}\le\frac{x_1}{y_1}\right\},\qquad V_2(y)=\left\{x\in\mathbb{R}^2_{++}:\frac{x_1}{y_1}\le\frac{x_2}{y_2}\right\}$$

ve,

$$l_{1,y}(x)=\begin{cases}\dfrac{x_1}{y_1}, & x\in V_1(y)\\ 0, & x\notin V_1(y)\end{cases}\qquad l_{2,y}(x)=\begin{cases}\dfrac{x_2}{y_2}, & x\in V_2(y)\\ 0, & x\notin V_2(y)\end{cases}$$

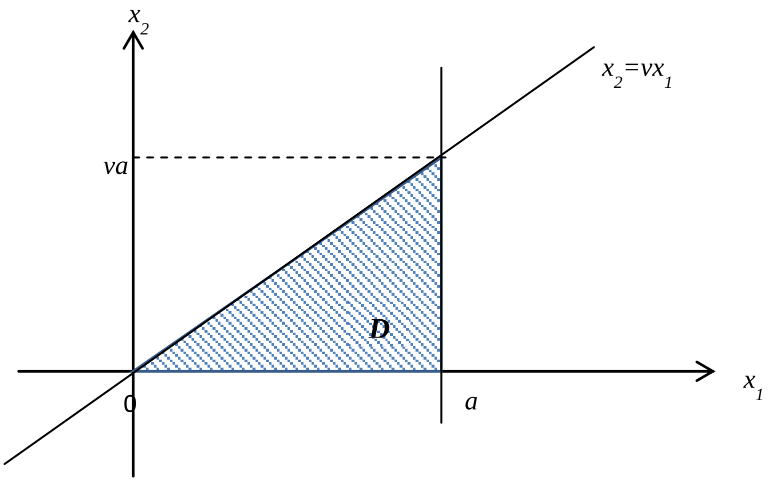
olur.

Bunları dikkate alırsak ve $V_j'(y)$ kümesi $V_j(y)$'nin tümleyeni olmak üzere $(j=1,2)$ D integrallenme alanını $D_j(y)=D\cap V_j(y)$ ve $D\setminus D_j(y)=D\cap V_j'(y)$ gibi iki parçaya ayırırsak

$$\begin{aligned}\int\limits_D l_{j,y}(x)\,dx&=\int\limits_{D_j(y)} l_{j,y}(x)\,dx+\int\limits_{D\setminus D_j(y)} l_{j,y}(x)\,dx\\&=\int\limits_{D_j(y)}\frac{x_j}{y_j}\,dx+\int\limits_{D\setminus D_j(y)}0\,dx=\frac{1}{y_j}\int\limits_{D_j(y)}x_j\,dx\end{aligned}$$

formülünü elde ederiz. Şimdi de bu formüle dayanarak farklı bölgeler için Hermite-Hadamard eşitsizliklerini inceleyelim.

4.2.1. $D=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{R}^2_{++}:0<x_1\le a,\quad 0<x_2\le vx_1\right\}$ Şeklindeki Üçgensel Bölgeler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği



Şekil 4.1. $D=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{R}^2_{++}:0<x_1\le a,\quad 0<x_2\le vx_1\right\}$ üçgensel bölgesi

$y\in D$ için, $D_j\left(y\right)$ kümeleri aşağıdaki gibi olacaktır:

$$D_1\left(y\right)=\left\{x\in D:0<x_1\le a,\quad 0<x_2\le\frac{y_2}{y_1}x_1\right\}$$

$$D_2\left(y\right)=\left\{x\in D:0<x_1\le a,\quad \frac{y_2}{y_1}x_1<x_2\le vx_1\right\}$$

$j=1$ için;

$$\int_D l_{1,y}\left(x\right)dx=\frac{1}{y_1}\int_{D_1(y)}x_1dx=\frac{1}{y_1}\int_0^a\int_0^{\frac{y_2x_1}{y_1}}x_1dx_2dx_1=\frac{y_2}{y_1^2}\frac{a^3}{3}$$

Buradan, verilen D bölgesi için, (4.1.2.1) eşitsizliği

$$p\left(y_1,y_2\right)\le\frac{3y_1^2}{a^3y_2}\int_D p\left(x_1,x_2\right)dx_1dx_2$$

şeklinde olur.

$j=2$ için;

$$\int_D l_{2,y}(x)dx = \frac{1}{y_2}\int_{D_2(y)} x_2 dx = \frac{1}{y_2}\int_0^a \int_{\frac{y_2 x_1}{y_1}}^{vx_1} x_2 dx_2 dx_1$$

$$= \frac{1}{2y_2}\int_0^a \left[v^2 - \left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2\right] x_1^2 dx_1 = \frac{v^2y_1^2 - y_2^2}{2y_2y_1^2}\frac{a^3}{3}$$

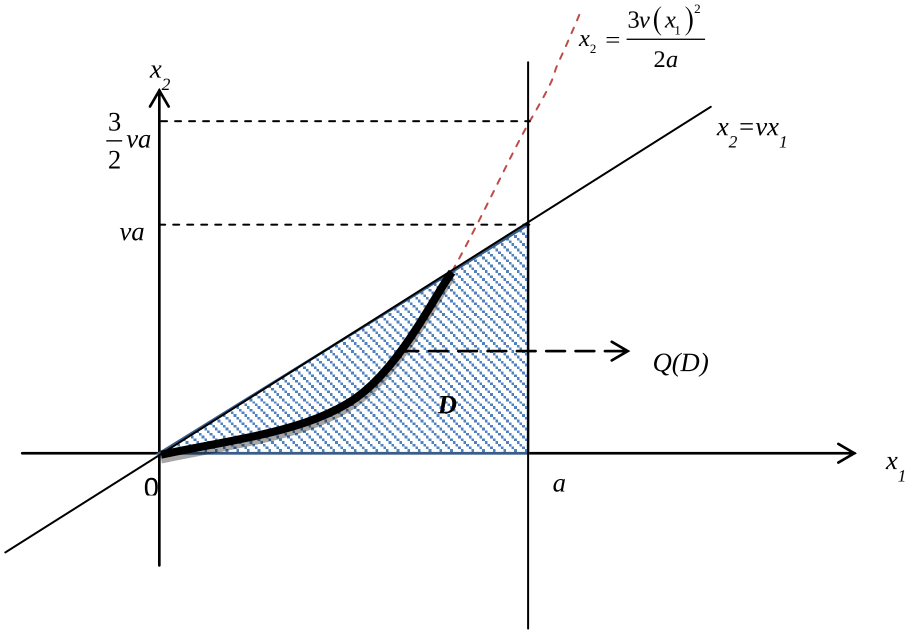
Buradan, verilen D bölgesi için, (4.1.2.1) eşitsizliği

$$p(y_1,y_2) \le \frac{6y_1^2y_2}{a^3\left(v^2y_1^2 - y_2^2\right)}\int_D p(x_1,x_2)dx_1dx_2$$

şeklinde olur.

Bu bölgeye uygun gelen *Q(D)* kümesini belirleyebiliriz. $A(D)=\frac{va^2}{2}$ olduğundan, bir $y^* \in D$ noktasının *Q(D)*'den olması için gerekli ve yeterli koşul *j*=1 için;

$$\frac{2}{va^2}\frac{y_2^*}{\left(y_1^*\right)^2}\frac{a^3}{3} = 1 \Leftrightarrow y_2^* = \frac{3v\left(y_1^*\right)^2}{2a}$$



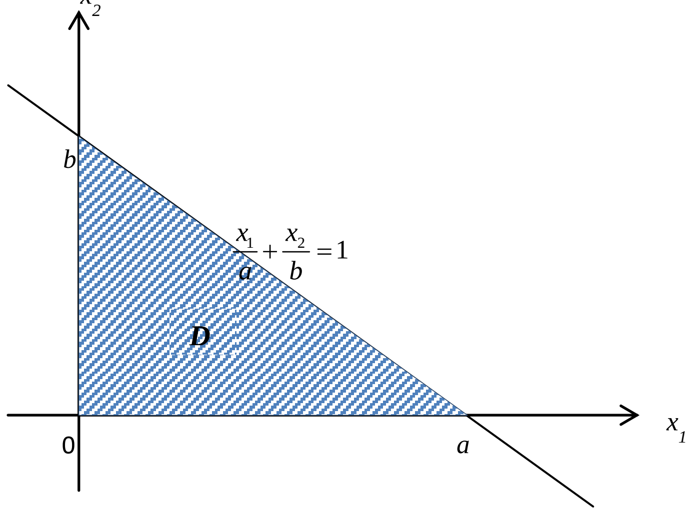
Şekil 4.2. $j=1$ durumunda *D* üçgensel bölgesi için *Q(D)* kümesi

j=2 için;

$$\frac{2}{va^2}\frac{\left(v^2\left(y_1^*\right)^2-\left(y_2^*\right)^2\right)a^3}{6\left(y_1^*\right)^2 y_2^*}=1\Leftrightarrow y_1^*=\left(\frac{a\left(y_2^*\right)^2}{av^2-3y_2^*v}\right)^{1/2}$$

olmasıdır.

4.2.2. $D=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{R}^2_{++}:\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}\le 1\right\}$ Şeklindeki Üçgensel Bölgeler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği



Şekil 4.3. $D=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{R}^2_{++}:\frac{x_1}{a}+\frac{x_2}{b}\le 1\right\}$ üçgensel bölgesi

$y\in D$ için $D_j\left(y\right)$ $\left(j=1,2\right)$ kümeleri

$$D_1(y)=\left\{x\in D:0<x_2\leq\frac{aby_2}{ay_2+by_1},\quad \frac{y_1}{y_2}x_2\leq x_1\leq a-\frac{a}{b}x_2\right\}$$

$$D_2(y)=\left\{x\in D:0<x_1\leq\frac{aby_1}{ay_2+by_1},\quad \frac{y_2}{y_1}x_1\leq x_2\leq b-\frac{b}{a}x_1\right\}$$

biçimindedir.

$j=1$ için;

$$\int_D l_{1,y}(x)\,dx=\int_{D_1(y)} l_{1,y}(x)\,dx=\frac{1}{y_1}\int_{D_1(y)} x_1 dx$$

$$=\frac{1}{y_1}\int_0^{\frac{aby_2}{ay_2+by_1}}\int_{\frac{y_1x_2}{y_2}}^{a-\frac{ax_2}{b}} x_1 dx_1 dx_2=\frac{1}{2y_1}\int_0^{\frac{aby_2}{ay_2+by_1}}\left[\left(a-\frac{a}{b}\right)^2-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2\right]x_2^2 dx_2$$

$$=\frac{a^3by_2\left[(ab-a)^2y_2^2-b^2y_1^2\right]}{6y_1(ay_2+by_1)^3}$$

elde edilir.

$j=2$ için;

$$\int_D l_{2,y}(x)\,dx=\int_{D_2(y)} l_{2,y}(x)\,dx=\frac{1}{y_2}\int_{D_2(y)} x_2 dx$$

$$=\frac{1}{y_2}\int_0^{\frac{aby_1}{ay_2+by_1}}\int_{\frac{y_2x_1}{y_1}}^{b-\frac{bx_1}{a}} x_2 dx_2 dx_1=\frac{1}{2y_2}\int_0^{\frac{aby_1}{ay_2+by_1}}\left[\left(b-\frac{b}{a}\right)^2-\left(\frac{y_2}{y_1}\right)^2\right]x_1^2 dx_1$$

$$=\frac{b^3ay_1\left[(ba-b)^2y_1^2-a^2y_2^2\right]}{6y_2(ay_2+by_1)^3}$$

bulunur.

Bu bölge için, (4.1.2.1) eşitsizliği

j=1 için;

$$p(y_1,y_2)\leq\frac{6y_1(ay_2+by_1)^3}{a^3by_2\left[(ab-a)^2y_2^2-b^2y_1^2\right]}\int_D p(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

j=2 için;

$$p\left(y_1,y_2\right)\leq\frac{6y_2\left(ay_2+by_1\right)^3}{b^3ay_1\left[\left(ba-b\right)^2y_1^2-a^2y_2^2\right]}\int_D p\left(x_1,x_2\right)dx_1dx_2$$

şekinde olur.

Verilen bölge için *Q(D)* kümesini inşa edelim. $A\left(D\right)=\frac{ab}{2}$ olduğundan,

j=1 için,

$$y^*\in Q\left(D\right)\Leftrightarrow\frac{a^2y_2^*\left[\left(ab-a\right)^2\left(y_2^*\right)^2-b^2\left(y_1^*\right)^2\right]}{3y_1^*\left(ay_2^*+by_1^*\right)^3}=1$$

olur. Dolayısıyla

$$Q\left(D\right)=\left\{y^*\in D:\frac{a^2y_2^*\left[\left(ab-a\right)^2\left(y_2^*\right)^2-b^2\left(y_1^*\right)^2\right]}{3y_1^*\left(ay_2^*+by_1^*\right)^3}=1\right\}.$$

j=2 için,

$$y^*\in Q\left(D\right)\Leftrightarrow\frac{b^2y_1^*\left[\left(ba-b\right)^2\left(y_1^*\right)^2-a^2\left(y_2^*\right)^2\right]}{3y_2^*\left(ay_2^*+by_1^*\right)^3}=1$$

sağlanır. Yani

$$Q\left(D\right)=\left\{y^*\in D:\frac{b^2y_1^*\left[\left(ba-b\right)^2\left(y_1^*\right)^2-a^2\left(y_2^*\right)^2\right]}{3y_2^*\left(ay_2^*+by_1^*\right)^3}=1\right\}$$

4.2.3. $D=\left\{\left(x_1,x_2\right)\in\mathbb{R}_{++}^2:x_1\leq a,\quad x_2\leq b\right\}$ Şeklindeki Dikdörtgensel Bölgeler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

İki durum söz konusu olabilir: $y\in D$ için;

a) $\frac{y_2}{y_1} \leq \frac{b}{a}$

b) $\frac{y_2}{y_1} \geq \frac{b}{a}$

a) durumunu ele alalım, yani $\frac{y_2}{y_1} \leq \frac{b}{a}$ olsun. Bu durumda

$$D_1(y) = \left\{ x \in D : 0 < x_1 \leq a, \quad 0 < x_2 \leq \frac{y_2}{y_1} x_1 \right\}$$
$$D_2(y) = \left\{ x \in D : 0 < x_1 \leq a, \quad \frac{y_2}{y_1} x_1 < x_2 \leq b \right\}$$

olur. Buradan

$j = 1$ için;

$$\int_D l_{1,y}(x)\,dx = \int_{D_1(y)} l_{1,y}(x)\,dx = \frac{1}{y_1} \int_{D_1(y)} x_1\,dx$$
$$= \frac{1}{y_1} \int_0^a \int_0^{\frac{y_2 x_1}{y_1}} x_1\,dx_2\,dx_1 = \frac{1}{y_1} \int_0^a \left(\frac{y_2}{y_1} \right) x_1^2\,dx_1 = \frac{a^3 y_2}{3y_1^2}$$

$j = 2$ için;

$$\int_D l_{2,y}(x)\,dx = \int_{D_2(y)} l_{2,y}(x)\,dx = \frac{1}{y_2} \int_{D_2(y)} x_2\,dx$$
$$= \frac{1}{y_2} \int_0^a \int_{\frac{y_2 x_1}{y_1}}^{b} x_2\,dx_2\,dx_1 = \frac{1}{2y_2} \int_0^a \left[b^2 - \left(\frac{y_2}{y_1} \right)^2 x_1^2 \right] dx_1 = \frac{3y_1^2 b^2 a - y_2^2 a^3}{6y_1^2 y_2}$$

bulunur. Bunları dikkate alarak (4.1.2.1) eşitsizliğini

j=1 için,

$$p(y_1, y_2) \leq \frac{3y_1^2}{a^3 y_2} \int_D p(x_1, x_2)\,dx_1\,dx_2$$

j=2 için,

$$p(y_1, y_2) \leq \frac{6y_1^2 y_2}{3y_1^2 b^2 a - y_2^2 a^3} \int_D p(x_1, x_2)\, dx_1 dx_2$$

şeklinde elde ederiz.

Şimdi de *Q(D)* kümesini üretelim. $A(D) = ab$ olduğundan,

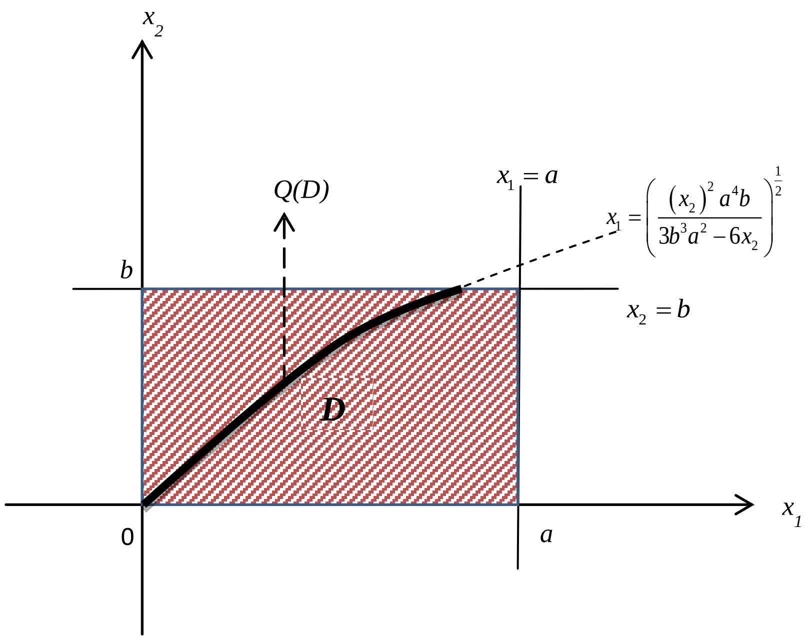
j=1 durumunda,

$$y^* \in Q(D) \Leftrightarrow y_2^* = \frac{3b\left(y_1^*\right)^2}{a^2}$$

j=2 durumunda ise,

$$y^* \in Q(D) \Leftrightarrow y_1^* = \left(\frac{\left(y_2^*\right)^2 a^4 b}{3b^3 a^2 - 6y_2^*} \right)^{\frac{1}{2}}$$

olur.



Şekil 4.4. $j = 2$ durumunda *D* dikdörtgensel bölgesi için *Q(D)* kümesi

Şimdi de b) durumunu inceleyelim, yani $\frac{y_2}{y_1} \geq \frac{b}{a}$ olsun. O halde,

$$D_1(y)=\left\{x\in D:\frac{y_1}{y_2}x_2\le x_1\le a,\quad 0<x_2\le b\right\}$$

$$D_2(y)=\left\{x\in D:0<x_1\le \frac{y_1}{y_2}x_2,\quad 0<x_2\le b\right\}$$

olur. Buradan,

$j=1$ için;

$$\int_D l_{1,y}(x)\,dx=\int_{D_1(y)} l_{1,y}(x)\,dx=\frac{1}{y_1}\int_{D_1(y)} x_1\,dx$$

$$=\frac{1}{y_1}\int_0^b\int_{\frac{y_1x_2}{y_2}}^{a} x_1\,dx_1\,dx_2=\frac{1}{2y_1}\int_0^b\left(a^2-\left(\frac{y_1}{y_2}\right)^2x_2^2\right)dx_2=\frac{3y_2^2a^2b-b^3y_1^2}{6y_1y_2^2}$$

elde edilir. Böylece bu durum için (4.1.2.1) eşitsizliği;

$$p(y_1,y_2)\le\frac{6y_1y_2^2}{3y_2^2a^2b-b^3y_1^2}\int_D p(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

şeklinde bulunur.

$j=2$ için;

$$\int_D l_{2,y}(x)\,dx=\int_{D_2(y)} l_{2,y}(x)\,dx=\frac{1}{y_2}\int_{D_2(y)} x_2\,dx$$

$$=\frac{1}{y_2}\int_0^b\int_0^{\frac{y_1x_2}{y_2}} x_2\,dx_1\,dx_2=\frac{1}{y_2}\int_0^b\frac{y_1}{y_2}x_2^2\,dx_2=\frac{b^3y_1}{3y_2^2}$$

biçimindedir. Dolayısıyla, (4.1.2.1) eşitsizliği;

$$p(y_1,y_2)\le\frac{3y_2^2}{b^3y_1}\int_D p(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

şeklinde elde edilir.

Bu durum için de Q(D) kümesini böyle ifade edebiliriz.

j=1 ise;

$$y^* \in Q(D) \Leftrightarrow y_2^* = \left(\frac{b^2 \left(y_1^*\right)^2}{3a^2 - 6y_1^* a} \right)^{1/2}$$

j=2 ise;

$$y^* \in Q(D) \Leftrightarrow y_1^* = \frac{3a\left(y_2^*\right)^2}{b^2}$$

Her iki durum birlikte dikkate alındığında;

j=1 için

$$Q(D) = \left\{ y^* \in D : \frac{y_2^*}{y_1^*} \leq \frac{b}{a},\ y_2^* = \frac{3b\left(y_1^*\right)^2}{a^2} \right\} \cup$$

$$\left\{ y^* \in D : \frac{y_2^*}{y_1^*} \geq \frac{b}{a},\ y_2^* = \left(\frac{b^2 \left(y_1^*\right)^2}{3a^2 - 6y_1^* a} \right)^{1/2} \right\}$$

j=2 için

$$Q(D) = \left\{ y^* \in D : \frac{y_2^*}{y_1^*} \leq \frac{b}{a},\ y_1^* = \left(\frac{\left(y_2^*\right)^2 a^4 b}{3b^3 a^2 - 6y_2^*} \right)^{1/2} \right\} \cup$$

$$\left\{ y^* \in D : \frac{y_2^*}{y_1^*} \geq \frac{b}{a},\ y_1^* = \frac{3a\left(y_2^*\right)^2}{b^2} \right\}$$

elde edilir.

4.2.4. $D = \left\{ (x_1, x_2) \in \mathbb{R}_{++}^2 : x_1^2 + x_2^2 \leq r^2 \right\}$ Biçimindeki Dairesel Bölgeler için Hermite-Hadamard Eşitsizliği

$y \in D$ için, $D_1(y)$ kümesi,

$$D_1^*(y) = \left\{ x \in D : 0 < x_1 \leq \frac{r y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}}, 0 < x_2 \leq \frac{y_2}{y_1} x_1 \right\}$$

$$D_1^{**}(y) = \left\{ x \in D : \frac{r y_1}{\sqrt{y_1^2 + y_2^2}} \leq x_1 \leq r\ ,\ 0 < x_2 \leq \sqrt{r^2 - x_1^2} \right\}$$

olmak üzere

$$D_1(y)=D_1^*(y)\cup D_1^{**}(y)$$

biçiminde, $D_2(y)$ kümesi ise,

$$D_2(y)=\left\{x\in D:0<x_1\le\frac{ry_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}\ ,\ \frac{y_2}{y_1}x_1\le x_2\le\sqrt{r^2-x_1^2}\right\}$$

biçimindedir.

j=1 için;

$$\int_D l_{1,y}(x)\,dx=\frac{1}{y_1}\int_{D_1(y)}x_1dx=\frac{1}{y_1}\int_{D_1^*(y)}x_1dx+\frac{1}{y_1}\int_{D_1^{**}(y)}x_1dx$$

$$=\frac{1}{y_1}\int_0^{\frac{ry_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}}\int_0^{\frac{y_2}{y_1}x_1}x_1dx_2dx_1+\frac{1}{y_1}\int_{\frac{ry_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}}^{r}\int_0^{\sqrt{r^2-x_1^2}}x_1dx_2dx_1$$

$$=\frac{1}{y_1}\int_0^{\frac{ry_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}}\left(\frac{y_2}{y_1}x_1^2\right)dx_1+\frac{1}{y_1}\int_{\frac{ry_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}}^{r}x_1\sqrt{r^2-x_1^2}\,dx_1$$

$$=\frac{r^3y_2}{3y_1\sqrt{y_1^2+y_2^2}}$$

olur. Bu durumda, verilen D bölgesi için (4.1.2.1) eşitsizliği

$$p(y_1,y_2)\le\frac{3y_1\sqrt{y_1^2+y_2^2}}{r^3y_2}\int_D p(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

şeklinde olur.

j=2 için;

$$\int_D l_{2,y}(x)\,dx=\frac{1}{y_2}\int_{D_2(y)}x_2dx=\frac{1}{y_2}\int_0^{\frac{ry_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}}\int_{\frac{y_2}{y_1}x_1}^{\sqrt{r^2-x_1^2}}x_2dx_2dx_1$$

$$=\frac{1}{2y_2}\int_0^{\frac{ry_1}{\sqrt{y_1^2+y_2^2}}}\left(r^2-\left(1+\frac{y_2^2}{y_1^2}\right)x_1^2\right)dx_1=\frac{r^3y_1}{3y_2\sqrt{y_1^2+y_2^2}}$$

elde edilir ve buradan (4.1.2.1) eşitsizliği

$$p(y_1,y_2)\le \frac{3y_2\sqrt{y_1^2+y_2^2}}{r^3y_1}\int_D p(x_1,x_2)\,dx_1dx_2$$

bulunur.

Bu bölge için *Q(D)* kümesini üretelim. $A(D)=\dfrac{\pi r^2}{4}$ olmak üzere,

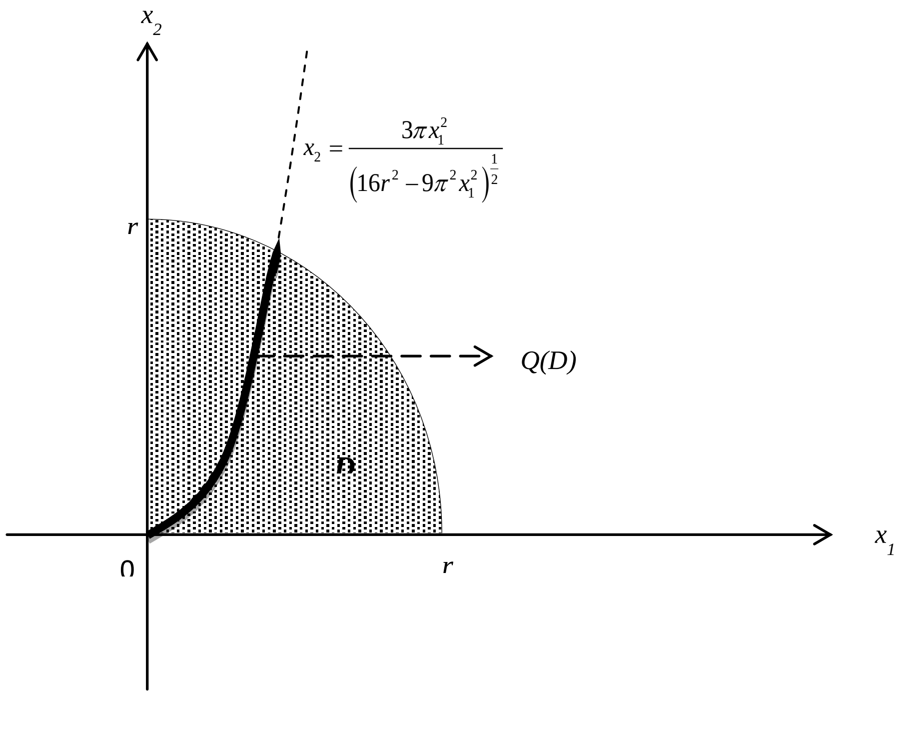
j=1 durumunda,

$$y^*\in Q(D)\Leftrightarrow \frac{4r\left(y_2^*\right)^2}{3\pi\left(y_1^*\right)^2\left(\left(y_1^*\right)^2+\left(y_2^*\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}=1$$

yani,

$$Q(D)=\left\{y^*\in D: y_2^*=\frac{3\pi\left(y_1^*\right)^2}{\left(16r^2-9\pi^2\left(y_1^*\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}\right\}$$

biçimindedir.



Şekil 4.5. $j=1$ durumunda *D* dairesel bölgesi için *Q(D)* kümesi

j=2 durumunda ise,

$$y^* \in Q(D) \Leftrightarrow \frac{4r\left(y_1^*\right)^2}{3\pi\left(y_2^*\right)^2\left(\left(y_1^*\right)^2+\left(y_2^*\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}}=1$$

yani,

$$Q(D)=\left\{ y^* \in D : y_1^* = \frac{3\pi\left(y_2^*\right)^2}{\left(16r^2-9\pi^2\left(y_2^*\right)^2\right)^{\frac{1}{2}}} \right\}$$

olur.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Konveks Analizin önemli uygulama alanlarından biri de “Eşitsizlikler Teorisi” dir. Bu tezde, konvekslik kavramı ile sıkı bağlı olan Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler konusu ele alınmak üzere:

1. Klasik konvekslik için verilmiş ([16], [32]) Hermite-Hadamard eşitsizliğinin tarihi araştırılmış (“Kaynak Araştırmaları” bölümünde)

2. Bu eşitsizliklerin iyileştirilmesi yönünde yapılan birçok çalışma incelenmiş ve en önemlileri “Materyal ve Yöntem” bölümünde verilmiş

3. Farklı konvekslik kavramları için Hermite-Hadamard tip eşitsizliklerin elde edilmesi üzerine yapılan çok sayıda çalışma, derlenerek en önemli sonuçlar yine “Materyal ve Yöntem” bölümünde sunulmuş

4. L_j-konveks fonksiyonlar sınıfı tanımlanmış ve bazı önemli özellikleri incelenmiş (Teorem 4.1.1.3.)

5. L_j-konveks fonksiyonlar sınıfı için Hermite-Hadamard tip eşitsizlikler elde edilmiş (Teorem 4.1.2.1., Sonuç 4.1.2.1. ve Teorem 4.1.2.3.)

6. Bazı önemli bölgeler için, bu eşitsizliklerin somut ifadeleri verilmiştir (Bölüm 4.2.).

5.2. ÖNERİLER

$L = \bigcup_{j \in I_0[n]} L_j$ fonksiyonlar kümesini elemanter fonksiyonlar ailesi olarak alıp, L-konveks fonksiyonlar sınıfı tanımlanarak, incelenebilir ve bu fonksiyonlar için de H.-H. tip eşitsizlikler elde edilebilir.

Benzer incelemeler B-konveks fonksiyon sınıfı için de yapılabilir.

Yapılan derlemeler listesini biraz daha genişleterek, bu alanda faydalı olabilecek bir kitap şeklinde yayımlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Adilov, G. and Tinaztepe, G.," The Sharpening Some Inequalities via Abstract Convexity", Mathematical Inequalities and Applications, Vol.12,p.33-51, (2009).

[2] Ben-Tal, A., "On Generalized Means and Generalized Convex Functions", Journal of Optimization Theory and Applications, Vol 21(1), p.1-13, (1977).

[3] Beckenbach, E.F., "Generalized Convex Functions", Bull. Amer. Math. Soc. 43, 363-371, (1937).

[4] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Polya, G., "İnequalities", Cambridge University Press, Cambridge, England, (1934).

[5] Van de Vel, M., "Theory of Convex Structures", Vol. 50. North Holland Mathematical Library, Elsevier, (1993).

[6] Bessenyei, M., "Hermite-Hadamard-Type Inequalities For Generalized Convex Functions", Journal of Inequalities In Pure and Applied Mathematics, Vol. 9, (2008).

[7] Rubinov, A., "Abstract Convexity and Global Optimization", Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht-London, (2000).

[8] Beckenbach, E.F. and Bellman, R., "Inequalities", Springer, Berlin, (1961).

[9] Glover, B.M. and Rubinov, A.M., "Duality for Increasing Positively Homogeneous Functions and Normal Sets", RAIRO-Operations Research, 32, pp. 105-123, (1998).

[10] Pearic, J.E., Proschan, F. and Tong Y.L., "Convex Functions", Partial Orderings and Statistical Applications, Academic Press Inc., (1992).

[11] Rubinov, A.M. and Kutateladze, S.S., “Minkowski Duality and its Applications”, Russian Mathematical Surveys 27, (1972).

[12] Rubinov, A.M., “Abstract Convexity: examples and applications”, Optimization, 47, 1-13, (2000).

[13] Rubinov, A.M., “Some Properties of Increasing Convex-along-rays Functions”, Processings of the Centre for Mathematics and its Applications 19, pp. 593-614, (1999).

[14] Singer, I., “Abstract Convex Analysis”, Wiley-Interscience Publication, New York, (1997).

[15] Tuy, H., “Convex Analysis and Global Optimization”, Kluwer Academic Publishers Dordrecht, (1998).

[16] Niculescu, C.P. and Persson, L.-E., “Old and new on the Hermite-Hadamard inequality”, Real Anal. Exchange, Volume 29, Number 2, 663-685, (2003).

[17] Anwar, M. and Pecaric, J., ”On a generalization of the Hermite-Hadamard inequality II”, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol. 9, Issue 4, Article 105, 4 pp., (2008).

[18] Hussain, S. and Anwar, M., “On generalization of the Hermite-Hadamard inequality”, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol. 8(2), Art. 60, (2007).

[19] Dragomir, S.S. and Mcandrew, A., “Refinements of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions”, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol. 6(5), Art. 140, (2005).

[20] Dragomir, S.S., “Refinements of the Hermite-Hadamard inequality for convex functions”, Tamsui Oxford J. of Math. Sci., Vol. 17(2), 131–137, (2001).

[21] Hussain, S. and Anwar, M., “On generalization of the Hermite-Hadamard inequality”, Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Vol. 8(2), Art. 60, (2007).

[22] Dragomir, S.S., Pecaric, J.E. and Presson, L.E., “Some Inequalities of Hadamard Type”, Soochow J. Of Math., 21, 335-341, (1995).

[23] Gill, P.M., Pearce, C.E.M. and Pecaric, J.E., “Hadamard’s Inequalities for r-convex Functions”, J. Math. Anal. Appl., 215, 461-470, (1997).

[24] Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., “Quasi-convex Functions and Hadamard’s Inequality”, Bulletin of Australian Mathematical Society, 57, pp. 377-385, (1998).

[25] Rubinov, A.M. and Dutta, J., “Hadamard Type Inequality for Quasiconvex Functions in Higher Dimensions”, (Preprint) RGMIA Res. Rep. Coll. 4 (1) Article 9 [Online: http://rgmia.vu.edu.au/v4n1.html], (2001).

[26] Pearce, C.E.M. and Rubinov, A.M., “P-functions, quasiconvex functions and Hadamard-type inequalities”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 240, 92-104, (1999).

[27] Niculescu, C.P., “A multiplicative mean value and its applications, in inequality theory and applications” (Y.J. Cho, J.K. Kim and S.S. Dragomir(Ed.s)), Nova Science Publishers, p. 249-261, (2001).

[28] Sharikov, E.V., "Hermite-Hadamard Type Inequalities for Increasing Radiant Functions", Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics, Volume 4, Issue 2, Article 47, (2003).

[29] Dragomir, S.S., Dutta, J. and Rubinov, A.M., "Hermite-Hadamard Type Inequalities for Increasing Convex Along-rays Functions", Analysis (Munich) 24, no. 2, pp. 171-181, (2004).

[30] Mitrinovic, D.S. and Lackovic I., "Hermite and Convexity", Aequat. Math., 28, 229-232, (1985).

[31] Jensen, J.L.W.V., "Sur les fonctions convexes et les in´egalit´es entre les voleurs mogernmes", Acta. Math., 30, 175-193, (1906).

[32] Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M., "Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications", RGMIA Monographs, Victoria University [ON-LINE:http://rgmia.vu.edu.au/monographs], (2000).

[33] Beckenbach, E.F., "Convex functions", Bull. Amer. Math. Soc., 54, 439-460, (1948).

[34] Hardy, G.H., Littlewood, J.E. and Polya, G., "Inequalities", 2nd Ed., Cambridge University Press, (1952).

[35] Roberts, A.W. and Varberg, P.E., "Convex Functions", Academic Press, (1973).

[36] Rado, T., "On convex functions", Trans. Amer. Math. Soc., 37, 266-285, (1935).

[37] Vasic, P.M. and Lackovic, I.B., "Some complements to the paper: "On an inequality for convex functions"", Univ. Beograd Publ. Elek. Fak., Ser. Mat. Fiz., No. 544-576, 59-62, (1976).

[38] Lupaş, A., "A generalisation of Hadamard's inequality for convex functions", Univ. Beograd. Publ. Elek. Fak. Ser. Mat. Fiz., No. 544-576, 115-121, (1976).

[39] Pecaric, J. and Beesack, P.R., "On Jessen's inequality for convex functions II", J. Math. Anal. Appl., 118, 125-144, (1986).

[40] Dragomir, S.S., Pecaric, J.E. and Persson, L.E., "Some inequalities of Hadamard type", Soochow J. of Math. (Taiwan), 21, 335-341, (1995).

[41] Dragomir, S.S. and Pearce, C.E.M, "Quasi-convex functions and Hadamard's inequality", Bull. Austral. Math. Soc., 57, 377-385, (1998).

[42] Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S., "The Hadamard's inequality for s−convex functions in the first sense", Demonstratio Math., 31 (3), 633-642, (1998).

[43] Dragomir, S.S. and Fitzpatrick, S., "The Hadamard's inequality for s−convex functions in the second sense", Demonstratio Math., 32 (4), 687-696, (1999).

[44] Dragomir, S.S., "On some new inequalities of Hermite-Hadamard type for m−convex functions", Tamkang Journal of Mathematics, 33(1), (2002).

[45] Adilov, G. and Kemali, S., "Hermite-Hadamard Type İnequalities for İncreasing Positively Homogeneous Functions", Journal of Inequalities and Applications, Vol. 2007, oi:10.1155/2007/21430, p. 1-10, (2007).

[46] Adilov, G. and Kemali, S., "Abstract convexity and Hermite-Hadamard Type İnequalities", Journal of İnequalities and Applications. Volume 2009, Article ID 943534, 13pages, doi:10.1155/953534

[47] Adilov, G., "Increasing co-radiant Functions and Hermite-Hadamard Type Inequalities", Mathematical Inequalities and Applications, Volume 14, Issue 1, p. 45-60, (2011).

[48] Minoux, M., "Mathematical programming: theory and algorithms", Wiley, pp. 489, Chichester, (1986).

[49] Rockafellar, R. Tyrrell, "Convex Analysis", Princeton University Press, Princeton, New Jersey,(1970).

[50] Mitrinovic, D.S., Pecaric, J.E. and Fink, A.M., "Classical and New Inequalities in Analysis", Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

[51] Hudzik, H. and Maligranda, L., "Some remarks on s−convex functions", Aequationes Math., 48, 100-111, (1994).

[52] Toader, G.H., "Some generalisations of the convexity", Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj- Napoca (Romania), 329-338, (1984).

[53] Toader, G.H., "On a generalisation of the convexity", Mathematica, 30 (53), 83-87, (1988).

[54] Dragomir, S.S. and Toader, G.H., "Some inequalities for m−convex functions", Studia Univ. Babe¸s-Bolyai, Math., 38 (1), 21-28, (1993).

[55] Dutta, J., Martinez-Legaz, J.E. and Rubinov, A.M., "Monotonic analysis over cones: I", Optimization, Vol. 53, No. 2, pp. 129-146, (2004).

[56] Dutta, J., Martinez-Legaz, J.E. and Rubinov, A.M., “Monotonic analysis over cones: II”, Optimization, Vol. 53, Nos. 5-6, pp. 529-547, (2004).

[57] Adilov, G. and Rubinov, A.,” B-Convex Sets and Functions”, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 27 (3-4), p.237-257,(2006).

[58] Adilov, G., Yesilce, I., ”Some inequalities for L(j)-convex functions”, Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications Konferansı Tam Metin Kitabı, Sunny Beach, 19-24, (2010).

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: İlknur YEŞİLCE

Doğum Tarihi: 07/09/1986

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Fen-Matematik	Eryaman Yabancı Dil Ağırlıklı Lise	2000-2004
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2005-2009
Yüksek Lisans			

(Varsa) Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Arş. Gör.	Mersin Üniversitesi	2009-

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. G. Adilov, İ. Yesilce, ”Some inequalities for L(j)-convex functions”, Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications Konferansı Tam Metin Kitabı, Sunny Beach, 19-24, (2010).

2. G.Adilov, İ.Yeşilce, “B-measurable and B^{-1}-measurable Maps”, International Conference on Applied Analysis and Algebra, 29 June – 2 July 2011, İstanbul, TURKEY.

3. G.Adilov, G.Tınaztepe, İ.Yeşilce, “Separation of B^{-1}-convex Sets by B^{-1}-measurable Maps”, The 8^{th} Congress of the International Society for Analysis, its Application and Computation, 22-27 August 2011, Moscow, RUSSIA.

4. G.Adilov, İ.Yeşilce, “Konvekslik kavramının soyutlaştırılması üzerine”, 6. Ankara Matematik Günleri, 2-3 Haziran 2011, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.