

**BİR BOYUTTA PÖSCHL-TELLER
POTANSİYELİNDE GÖRELİ PARÇACIKLARIN
BAĞLI DURUMLARI**

HİLMİ YANAR

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

FİZİK ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

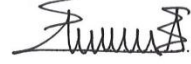
**Danışman
Doç. Dr. Ali HAVARE**

**MERSİN
HAZİRAN-2012**

Hilmi YANAR tarafından Doç. Dr. Ali HAVARE danışmanlığında hazırlanan “ Bir Boyutta Pöschl-Teller Potansiyelinde Göreli Parçacıkların Bağlı Durumları” başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Doç. Dr. Ali HAVARE



Doç. Dr. Kenan SÖĞÜT



Doç. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU



Doç. Dr. Hamza MENKEN



Yrd. Doç. Dr. Serdar YILMAZ



Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 04/07/2012 tarih ve 2012...L.G./4.6.0... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. A. Murat GİZİR
Enstitü Müdürü



Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

BİR BOYUTTA PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİNDE GÖRELİ PARÇACIKLARIN BAĞLI DURUMLARI

Hilmi Yanar

ÖZ

Bu çalışmada q parametrelî hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli için görelî olmayan ve görelî kuantum mekaniğinde yer alan bir boyutlu denklemler çözülerek saçılma ve bağli durumların elde edilmesi amaçlanmaktadır. Ayrıca bu çalışmanın başka bir amacı da elde edilen çözümler kullanılarak her bir parçacık için geçiş rezonansların olup olmadığının araştırılmasıdır.

Anahtar kelimeler: q parametrelî hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli, görelî ve görelî olmayan parçacık denklemleri, bağli ve saçılma durumları.

Danışman: Doç. Dr. Ali HAVARE, Mersin Üniversitesi, Fizik Ana Bilim Dalı

BOUND STATES OF RELATIVISTIC PARTICLES FOR PÖSCHL-TELLER POTENTIAL IN ONE DIMENSION

Hilmi Yanar

ABSTRACT

In this study, it is aimed to obtain the bound and scattering states by solving equations with one dimensional in the non relativistic and relativistic quantum mechanics for the hyperbolic Pöschl-Teller potential with q parameter. Also another aim of this study is to search whether transmission resonances occur for each particle by using obtained solutions.

Key words: Hyperbolic Pöschl-Teller potential with q parameter, Relativistic and non relativistic particles equations, Bound and scattering states.

Supervisor: Assoc. Prof. Dr. Ali Havare, Mersin University, Department of Physics

TEŞEKKÜR

Lisans ve yüksek lisans dönemleri boyunca yardımlarını benden esirgemeyen başta danışman hocam Doç. Dr. Ali HAVARE'ye olmak üzere, Doç. Dr. Kenan SÖĞÜT'e ve Dr. Oktay AYDOĞDU'ya teşekkürlerimi sunarım. Ayrıca bilgi paylaşımında bulunduğum arkadaşlarım Soner ALPDOĞAN ve Ahmet TAŞ'a teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi her türlü desteği vermenin yanı sıra her an yanımda olan sevgili Anneme ve Babama ve tezin yazım aşamasında bana yardımcı olan kardeşim Buket YANAR'a ve arkadaşım Asuman KAHRİMAN'a teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bu tez çalışmasına maddi destek veren Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZ	i
ABSTRACT	ii
TEŞEKKÜR	iii
İÇİNDEKİLER	iv
ÇİZELGELER DİZİNİ	vi
ŞEKİLLER DİZİNİ	vii
SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ	ix
1. GİRİŞ	1
2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI	3
2.1. PÖSCHL-TELLER POTANSİYEL TİPLERİ.....	3
2.2. PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ KULLANILARAK SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN YAPILAN ÇALIŞMALAR	4
2.3. PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ KULLANILARAK KLEIN-GORDON DENKLEMİ İÇİN YAPILAN ÇALIŞMALAR	5
2.4. PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ KULLANILARAK DIRAC DENKLEMİ İÇİN YAPILAN ÇALIŞMALAR	5
3. MATERYAL VE YÖNTEM	7
3.1. ROSEN-MORSE TİPİ POTANSİYEL İÇİN KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN BAĞLI DURUMLARI	7
3.2. ASİMETRİK HULTHEN POTANSİYELİNDEN VEKTÖR BOZONLARININ SAÇILMASI	11
3.2.1. Saçılma Durumları	16
3.2.2. Bağlı Durumlar.....	22
4. BULGULAR VE TARTIŞMA	27
4.1. q PARAMETRELİ HİPERBOLİK PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ	27
4.2. SCHRÖDINGER DENKLEMİ	29
4.2.1. q Parametrelî Hiperbolik Pöschl-Teller Potansiyeli için Schrödinger Denkleminin Çözümü	29
4.2.2. Bağlı Durumlar için Enerji Bağlılığının Elde Edilmesi.....	31
4.2.3. Yansıma ve Geçme Olasılık Yoğunluklarının Hesaplanması	32
4.2.4. Elde Edilen Sonuçların Çizimsel Değerlendirilmesi.....	35

4.3. KLEIN-GORDON DENKLEMİ	39
4.3.1. q Parametrelî Hiperbolik Pöschl-Teller Potansiyeli için Klein-Gordon Denkleminin Çözümü	39
4.3.2. Bağlı Durumlar için Enerji Bağlıntısının Elde Edilmesi.....	41
4.3.3. Yansıma ve Geçme Olasılık Yoğunluklarının Hesaplanması	41
4.3.4. Elde Edilen Sonuçların Çizimsel Değerlendirilmesi.....	43
4.4. DIRAC DENKLEMİ	47
4.4.1. q Parametrelî Hiperbolik Pöschl-Teller Potansiyeli için Dirac Denkleminin Çözümü.....	47
4.4.2. Bağlı Durumlar için Enerji Bağlıntısının Elde Edilmesi.....	50
4.4.3. Yansıma ve Geçme Olasılık Yoğunluklarının Hesaplanması	50
4.4.4. Elde Edilen Sonuçların Çizimsel Değerlendirilmesi.....	52
4.5. DUFFIN-KEMMER-PETIAU (DKP) DENKLEMİ	55
4.5.1. q Parametrelî Hiperbolik Pöschl-Teller Potansiyeli için DKP Denkleminin Çözümü.....	55
4.5.2. Bağlı Durumlar için Enerji Bağlıntısının Elde Edilmesi.....	58
4.5.3. Yansıma ve Geçme Olasılık Yoğunluklarının Hesaplanması	58
4.5.4. Elde Edilen Sonuçların Çizimsel Değerlendirilmesi.....	61
5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER	65
KAYNAKLAR	69
ÖZGEÇMİŞ.....	72

ÇİZELGELER DİZİNİ

Sayfa

Çizelge 2.1.1.	Pöschl-Teller Potansiyel Tipleri	3
Çizelge 3.2.1.1.	Denklem (3.2.1.14) ve Denklem (3.2.1.15)'deki sabitlerin açık biçimleri	19
Çizelge 3.2.2.1.	Denklem (3.2.2.14), Denklem (3.2.2.15) ve Denklem (3.2.2.16)'daki sabitlerin açık biçimleri	25
Çizelge 5.1.	Görelî olmayan ve görelî parçacıklar için bağli durumları veren enerji bağıntıları	66
Çizelge 5.2.	Geçme olasılık yoğunluğunun enerjiye göre değişiminin görelî ve görelî olmayan parçacık denklemleri için karşılaştırılması	67
Çizelge 5.3.	Geçme olasılık yoğunluğunun q ve α parametrelerine göre değişiminin görelî ve görelî olmayan parçacık denklemleri için karşılaştırılması	68

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

Şekil 3.1.1.	$V_2 = -\frac{V_1}{3}$ olması durumunda Rosen-Morse potansiyelinin q 'nun beş farklı değeri için konuma göre çizimi	8
Şekil 3.2.1.1.	Asimetrik Hulthen potansiyeli için geçiş katsayısının enerjiye göre değişimi I	20
Şekil 3.2.1.2.	Asimetrik Hulthen potansiyeli için geçiş katsayısının enerjiye göre değişimi II	21
Şekil 3.2.1.3.	Asimetrik Hulthen potansiyeli için geçiş katsayısının V_0 'a göre değişimi.....	21
Şekil 3.2.2.1.	Potansiyelin ilk bağlı durum enerjisine göre çizimi	26
Şekil 4.1.1.	λ parametresinin iki farklı değerine karşılık gelen potansiyelin konuma göre değişimi.....	27
Şekil 4.1.2.	α parametresinin iki farklı değerine karşılık gelen potansiyelin konuma göre değişimi.....	28
Şekil 4.1.3.	q parametresinin iki farklı değerine karşılık gelen potansiyelin konuma göre değişimi.....	29
Şekil 4.2.4.1.	Schrödinger parçacığı için yansımaya (R) ve geçme (T) olasılık yoğunluklarının enerjiye (E) göre değişimi	36
Şekil 4.2.4.2.	Schrödinger parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun enerjiye göre değişimi	36
Şekil 4.2.4.3.	Schrödinger parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun λ 'ya göre değişimi.....	37
Şekil 4.2.4.4.	Schrödinger parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun q parametresine göre değişimi	38
Şekil 4.2.4.5.	Schrödinger parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun α parametresine göre değişimi	38
Şekil 4.3.4.1.	Klein-Gordon parçacığı için yansımaya (R) ve geçme (T) olasılık yoğunluklarının enerjiye (E) göre değişimi.....	44

Şekil 4.3.4.2.	Klein-Gordon parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun enerjiye göre değişimi	45
Şekil 4.3.4.3.	Klein-Gordon parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun λ 'ya göre değişimi	45
Şekil 4.3.4.4.	Klein-Gordon parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun q parametresine göre değişimi	46
Şekil 4.3.4.5.	Klein-Gordon parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun α parametresine göre değişimi	46
Şekil 4.4.4.1.	Dirac parçacığı için yansıma (R) ve geçme (T) olasılık yoğunluklarının enerjiye (E) göre değişimi	53
Şekil 4.4.4.2.	Dirac parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun enerjiye göre değişimi.....	53
Şekil 4.4.4.3.	Dirac parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun λ 'ya göre değişimi.....	54
Şekil 4.4.4.4.	Dirac parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun q parametresine göre değişimi	54
Şekil 4.4.4.5.	Dirac parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun α parametresine göre değişimi	55
Şekil 4.5.4.1.	DKP parçacığı için yansıma (R) ve geçme (T) olasılık yoğunluklarının enerjiye (E) göre değişimi	62
Şekil 4.5.4.2.	DKP parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun enerjiye göre değişimi.....	62
Şekil 4.5.4.3.	DKP parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun λ 'ya göre değişimi.....	63
Şekil 4.5.4.4.	DKP parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun q parametresine göre değişimi	63
Şekil 4.5.4.5.	DKP parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun α parametresine göre değişimi	64

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

- \hbar : Planck sabiti
 c : Işık hızı
 m : Kütle
 E : Enerji
 T : Geçiş olasılık yoğunluğu
 R : Yansıma olasılık yoğunluğu
 I : Birim matris
 ψ : Dalga fonksiyonu
 β^μ : Kemmer matrisleri
 γ^μ : Dirac matrisleri
 $g^{\mu\nu}$: Metrik tensörü
 σ^i : Pauli spin matrisleri
 j^μ : Dörtlü akım yoğunluğu
 Ψ_K : Kemmer dalga fonksiyonu
 Ψ_D : Dirac dalga fonksiyonu
 V_v : Vektör potansiyel
 V_s : Skaler potansiyel
 ${}_2F_1$: Hipergeometrik fonksiyonlar
DKP : Duffin-Kemmer-Petiau

1.GİRİŞ

Fizikteki en önemli problemlerden biri parçacıkların çarpışması ve saçılması problemi [1]. Atomların, moleküllerin ve temel parçacıkların yapısı saçılma yöntemi kullanılarak açıklanabilir. Saçılma veya çarpışma iki durumda oluşabilir: Birincisi, iki veya daha fazla parçacığın birbiri ile çarpışması veya saçılması; ikincisi, ise parçacıkların bir potansiyelden saçılmasıdır. Saçılma durumunun oluşabilmesi için potansiyel ile etkileşen parçacığın enerjisi sıfırdan büyük olmalıdır. Genel olarak potansiyel, yapısına bağlı olarak, engel veya kuyu biçiminde olabilir. Eğer potansiyelden büyük negatif enerjili bir parçacık potansiyel kuyusu ile etkileşirse burada saçılma durumu yerine bağlı durumlar oluşur.

Potansiyel kavramı, fiziksel sistemlere bağlı olarak değişmektedir. Örneğin; elektriksel yüklü parçacıklar arasındaki temel etkileşme Coulomb potansiyeli ile açıklanırken çekirdek içerisindeki nükleonlar arasındaki etkileşme ise Yukawa potansiyeli ile betimlenmektedir [2]. Bunların dışında bazı fiziksel etkileşmeleri betimlemek için Hulthen, Woods-Saxon, Cusp, Morse, Rosen-Morse ve Pöschl-Teller gibi potansiyeller tanımlanmaktadır [3, 4, 5, 6, 7, 8]. Yukarıda belirtilen potansiyeller yapılarına ve uygulama alanlarına bağlı olarak değişik biçimlerde ifade edilmektedir.

Bu çalışmada Pöschl-Teller potansiyel biçimlerinden q parametrelî hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli ele alınmaktadır. Pöschl-Teller potansiyeli, fizikte ve kimyasal fizikte geniş uygulama alanı bulan önemli bir çift atomlu moleküler potansiyel modelidir [8,9]. Bu potansiyel, aynı zamanda bir eş çekirdek moleküler iyonunun bir boyutlu modelinin güçlü alan iyonlaşma dinamiğini incelemek için elektron-çekirdek potansiyeli olarak da kullanılabilir [10]. Ayrıca Pöschl-Teller potansiyeli, harmonik bir potansiyel olmamasından dolayı harmonik olmayan davranışı sergileyen her türlü fiziksel problemi açıklamak için önerilebilmektedir [8].

Parçacıkları betimleyen parçacık denklemleri ise parçacıkların özelliklerine bağlı olarak adlandırılmaktadır. Schrödinger denklemi kütleli, spini-0 ve görelî olmayan parçacıkları betimleyen kuantum mekaniğinin temel denklemdir. Klein-Gordon denklemi spin-0, görelî ve kütleli parçacıkları; Dirac denklemi spin-1/2 görelî ve kütleli parçacıkları; Duffin-Kemmer-Petiau (DKP) denklemi ise spin-1 ve spin-0 görelî ve kütleli parçacıkları betimler.

Klein-Gordon ve Dirac denklemlerinin Pöschl-Teller potansiyelinin değişik biçimleri için (3+1) boyutta tartışıldığı, fakat (1+1) boyutta incelenmediği kaynak taraması yapıldığında görülmektedir. Ayrıca aynı potansiyel için DKP denklemi de tartışılmamıştır. Bu nedenle bu tezin temel konusu bir boyutlu Klein-Gordon, Dirac ve DKP denklemlerinin Pöschl-Teller potansiyeli için çözülmesi ve kütleli spin-0, kütleli spin-1/2 ve kütleli spin-1 parçacıkları için saçılma ve bağlı durumların elde edilmesidir.

Yukarıda belirtilen çözümlene bağlamında bu çalışma, bu alanda bir ilk olacağından daha sonra bu alanda yapılacak olan çalışmalara bir örnek oluşturacaktır. Ayrıca kaynaklar bölümünde verilen çalışmaların pek çoğunun son yıllarda yapılmış olmaları bu tezin konusunun güncel olduğunu göstermektedir.

Tez, giriş bölümü dışında, dört bölümden oluşmaktadır. Kaynak araştırmaları bölümünde Pöschl-Teller potansiyel tipleri için daha önce yapılan çalışmalar tarih sırasına göre ele alınmaktadır. Materyal ve yöntem bölümünde tezde kullanılan yöntem kaynak oluşturan makalelerden iki tanesi ayrıntılı bir biçimde verilmektedir. Bulgular ve tartışma bölümünde q parametrelî hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli için Schrödinger, Klein-Gordon, Dirac ve DKP denklemleri çözülerek saçılma ve bağlı durumlar incelenmektedir. Ayrıca saçılma durumları için elde edilen sonuçlar çizimsel olarak değerlendirilmektedir. Tezin sonuç ve öneriler bölümünde ise dört denklem için elde edilen sonuçlar karşılaştırılmakta ve yorumlanmaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

2.1. PÖSCHL-TELLER POTANSİYEL TİPLERİ

Pöschl-Teller potansiyeli ilk olarak 1933 yılında G. Pöschl ve E. Teller tarafından “Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators” (Harmonik olmayan salınımcılar için Kuantum Mekaniksel Yaklaşımlar) adlı makalede ele alınmaktadır. Bu çalışmada yer alan potansiyel yapısına bağlı olarak, trigonometrik biçimi ile tanımlanmaktadır. Daha sonra trigonometrik Pöschl-Teller potansiyeli olarak adlandırılan bu potansiyelin, Pöschl ve Teller tarafından karbondioksit (CO_2) gibi çok atomlu moleküllerin salınımlarının betimlenmesinde kullanılabileceği ifade edilmiştir. Ayrıca 1932 yılında ortaya konulan Rosen-Morse potansiyelinin özel bir durumu olan hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli de ilk kez bu makalede ele alınmaktadır. Bu potansiyelin ise yine Pöschl ve Teller tarafından çift atomlu moleküllerin betimlenmesine olanak sağlayacağı belirtilmektedir [8]. Genel olarak Pöschl-Teller potansiyel tipleri Çizelge 2.1.1.’de verilmektedir:

Çizelge 2.1.1. Pöschl-Teller Potansiyel Tipleri

POTANSİYEL ADLARI	BİÇİMLERİ
Trigonometrik Pöschl-Teller Potansiyeli [8]	$V(x) = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \left[\frac{\nu(\nu-1)}{\sin^2 \alpha x} + \frac{\mu(\mu-1)}{\cos^2 \alpha x} \right]$
Süper simetrik Değiştirilmiş Pöschl-Teller Potansiyeli [11]	$V(x) = \alpha^2 \left[\frac{\kappa(\kappa+1)}{\sinh^2 \alpha x} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cosh^2 \alpha x} \right]$
Hiperbolik (Modified) Pöschl-Teller Potansiyeli [2]	$V(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cosh^2 \alpha x}$
q Parametrelî Hiperbolik Pöschl-Teller Potansiyeli [12]	$V(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cosh_q^2 \alpha x}$
Genelleştirilmiş Pöschl-Teller Potansiyeli [13]	$V(x) = V_1 \frac{1}{\sinh^2 \alpha x} - V_2 \frac{\cosh \alpha x}{\sinh^2 \alpha x}$
q Parametrelî Genelleştirilmiş Pöschl-Teller Potansiyeli [14]	$V(x) = V_1 \frac{1}{\sinh_q^2 \alpha x} - V_2 \frac{\cosh_q \alpha x}{\sinh_q^2 \alpha x}$
İkinci-Tip Pöschl-Teller Potansiyeli [15]	$V(x) = -\frac{A(A+\alpha)}{\cosh^2 \alpha x} + \frac{B(B-\alpha)}{\sinh^2 \alpha x}$

2.2. PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ KULLANILARAK SCHRÖDINGER DENKLEMİ İÇİN YAPILAN ÇALIŞMALAR

G. Pöschl ve E. Teller, 1933 yılında trigonometrik Pöschl-Teller potansiyeli için Schrödinger denklemini çözerek bağlı durumları betimleyen enerji bağıntısını elde etmişlerdir [8].

Shishan Dong ve Shi-Hai Dong, 2001 yılında değiştirilmiş Pöschl-Teller potansiyeli için faktörizasyon yöntemini kullanarak Schrödinger denklemini çözmüşler ve özdeğerler ile özfonksiyonları bulmuşlardır [16].

2008 yılında S. Cruz y Cruz ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada hiperbolik ve trigonometrik Pöschl-Teller potansiyelleri için Schrödinger denklemini çözülmüş ve her iki potansiyel için uyumcul (koherent) durumlar elde edilmiştir [17].

Wen-Chao Qiang ve arkadaşları 2009 yılında yaptıkları çalışmada ikinci Pöschl-Teller benzeri potansiyel için Schrödinger denklemini çözerek saçılma durumlarını tartışmışlardır [18].

2009 yılında M.R. Setare ve A.Fallahpour tarafından yazılan makalede q parametrelî hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli için basamak işlemcileri kullanılarak Schrödinger denklemini çözülmüş ve genelleştirilmiş uyumcul (koherent) durumlar oluşturmuştur [19].

D. Agboola, 2010 yılında Nikiforov-Uvarov yöntemini kullanarak değiştirilmiş Pöschl-Teller potansiyeli için D boyutta Schrödinger denklemini çözmüş ve bu potansiyel için özdeğerleri ve özfonksiyonları elde etmiştir [20].

2012 yılında Majid Hamzavi ve Sameer M. Ikhdair, Nikiforov-Uvarov yöntemini kullanarak trigonometrik Pöschl-Teller potansiyeli için Schrödinger denkleminin yaklaşık çözümlerini elde ederek l -durumları için enerji özdeğerlerini ve bunlara karşılık gelen özfonksiyonları bulmuşlardır [21].

Chen Chang-Yuan ve arkadaşları tarafından 2012 yılında yapılan çalışmada merkezî terim için yeni bir yaklaşıklık ortaya konularak bu yaklaşıklık, keyfi açıl momentum durumları için değiştirilmiş Pöschl-Teller potansiyelli Schrödinger denklemine uygulanmıştır. Ayrıca aynı çalışmada saçılma durumları için yaklaşık analitiksel çözümler türetilerek boylandırılmış dalga fonksiyonu hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiştir [22].

2.3. PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ KULLANILARAK KLEIN-GORDON DENKLEMİ İÇİN YAPILAN ÇALIŞMALAR

2008 yılında Wen-Chao Qiang ve Shi-Hai Dong, ikinci-tip Pöschl-Teller potansiyeli için Klein-Gordon denklemini çözerek isteksel l -durumlarını betimleyen boylandırılmış dalga fonksiyonlarını elde etmişlerdir [23].

Tao Chen ve arkadaşları, 2009 yılında yaptıkları çalışmada genelleştirilmiş Pöschl-Teller potansiyeli için Klein-Gordon denklemini Süper simetrik kuantum mekaniğini ve fonksiyon analiz yöntemlerini kullanarak çözmüşler ve isteksel yörüngesel açısız momentumlu durumları betimleyen boylandırılmamış dalga fonksiyonlarını ve bağlı durumları betimleyen enerji bağıntısını elde etmişlerdir [13].

Wen-Li Chen ve arkadaşları tarafından 2009 yılında yapılan çalışmada ikinci-tip Pöschl-Teller benzeri potansiyel için Klein-Gordon denkleminin bağlı ve saçılma durumlarını betimleyen çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca bağlı durumlar için görelî enerji bağıntısı ve saçılma durumları için de faz kayması bağıntısı türetilmiştir [24].

Altuğ Arda ve arkadaşları 2010 yılında, Nikiforov-Uvarov yöntemini kullanarak kütleli konuma bağlı olması durumunda q parametrelî Pöschl-Teller potansiyeli için bir boyutta Klein-Gordon denkleminin özdeğerlerini ve onlara karşılık gelen özfonksiyonları elde etmişlerdir [12].

K. J. Oyewumi ve T. T. Ibrahim, 2010 yılında yaptıkları çalışmada q parametrelî hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli için üç boyutta Klein-Gordon denkleminin bağlı durumları betimleyen çözümlerini elde etmişlerdir [25].

2.4. PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ KULLANILARAK DIRAC DENKLEMİ İÇİN YAPILAN ÇALIŞMALAR

C.-S. Jia ve arkadaşları tarafından 2007 yılında yapılan çalışmada süper simetri kuantum mekaniği formalizmi ve fonksiyon analiz yöntemi kullanılarak, Pöschl-Teller vektör ve skaler potansiyelleri için Dirac denklemi çözülmüş ve bağlı durumlar için çözümler elde edilmiştir [26].

Ying Xu ve arkadaşları 2008 yılında yaptıkları çalışmada sanki-spin (pseudospin) simetri altında Pöschl-Teller potansiyeli için Dirac denkleminin isteksel spin-yörünge kuantum sayısını betimleyen yaklaşık çözümlerini elde etmişlerdir [9].

Chun-Sheng Jia ve arkadaşları tarafından 2009 yılında yapılan çalışmada sanki-merkezcil terimini içeren genelleştirilmiş Pöschl-Teller potansiyeli için (3+1) boyutta Dirac denkleminin yaklaşık çözümleri elde edilmiştir. Ayrıca bu çalışmada Sanki-spin simetri koşulu altında fonksiyon analiz yöntemi kullanılarak iki bileşenli Dirac parçacık spinörleri ve bağlı durum enerji özdeğerleri bulunmuştur [27].

Gao-Feng Wei ve Shi-Hai Dong, 2009 yılında genelleştirilmiş Pöschl-Teller potansiyeli için Dirac denklemini spin simetrisi durumunda çözmüşler ve bağlı durumlar için dalga fonksiyonlarını ve enerji denklemini elde etmişlerdir [14].

Gao-Feng Wei ve Shi-Hai Dong, 2009 yılında Dirac denkleminin sanki-spin (pseudospin) simetrik çözümünü değiştirilmiş Pöschl-Teller potansiyeli için elde etmişlerdir. Aynı zamanda bu çalışmada cebirsel ve fonksiyon analiz yöntemlerini kullanarak bağlı durumlar için enerji bağıntısını ve dalga fonksiyonlarını bulmuşlardır [28].

2010 yılında, Xu-Yang Liu ve arkadaşları tarafından yapılan çalışmada trigonometrik Pöschl-Teller potansiyeli için Dirac denklemi çözülmüş ve spin simetrisini göz önüne alarak görelî bağlı durumlar elde edilmiştir [29].

Gao-Feng Wei ve Shi-Hai Dong, 2010 yılında, spin simetrisi koşulu altında ikinci-tip Pöschl-Teller potansiyeli için Dirac denkleminin bağlı durumlarını veren bir çalışma yapmışlardır. Bu çalışmada bağlı durumlar için enerji bağıntısını ve spinör dalga fonksiyonlarını elde etmek için cebirsel ve fonksiyon analiz yöntemleri kullanılmıştır [15].

D. Agboola, 2011 yılında vektör ve skaler değiştirilmiş Pöschl-Teller potansiyelleri için spin simetrisini göz önüne alarak Dirac denkleminin çözümlerini ortaya koymuştur. Agboola bu çalışmada Nikiforov-Uvarov yöntemini kullanarak görelî enerji spektrumunu elde etmiş ve iki bileşenli spinör dalga fonksiyonlarını Jacobi polinomları cinsinden bulmuştur [30].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tezde kullanılan yöntemle kaynak oluşturabilecek iki makale ele alınmaktadır: Birinci kesimde “Bound states of the Klein-Gordon equation with vector and scalar Rosen-Morse-type potentials” (Rosen-Morse tipi potansiyel için Klein-Gordon denkleminin bağlı durumları) [31] adlı makale incelenirken ikinci kesimde ise “Scattering of vector bosons by asymmetric Hulthen potential” (Asimetrik Hulthen potansiyelinden vektör bozonlarının saçılması) [33] adlı makale yer almaktadır.

3.1. ROSEN-MORSE TİPİ POTANSİYEL İÇİN KLEIN-GORDON DENKLEMİNİN BAĞLI DURUMLARI

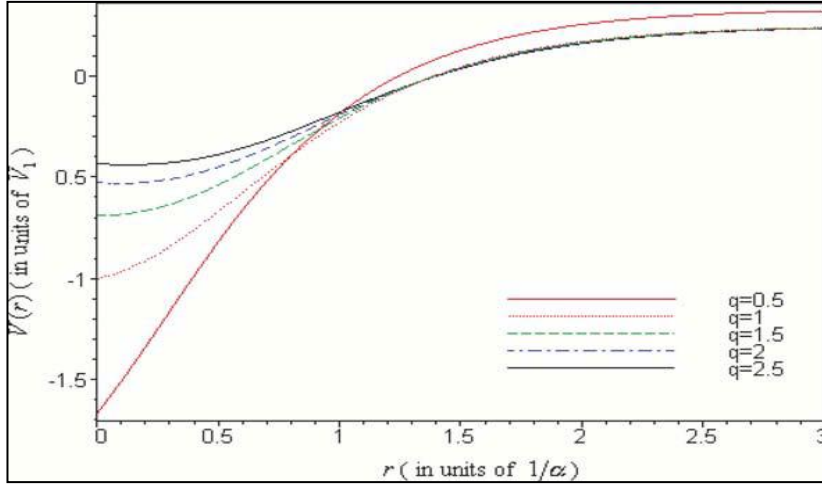
Klein-Gordon denkleminin, $V(r)$ vektör potansiyel, $S(r)$ skaler potansiyel, m parçacığın kütlesi ve E parçacığın enerjisi olmak üzere

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + [E - V(r)]^2 - [m + S(r)]^2 \right\} u(r) = 0 \quad (3.1.1)$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\hbar = c = 1$ dir. Rosen-Morse tipi potansiyel ise aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$V(r) = -V_1 \sec^2 h_q \alpha r - V_2 \tanh_q \alpha r \quad (3.1.2)$$

Burada q , V_1 , V_2 ve α sabit olup potansiyelin biçimini belirlerler. q parametresi $-1 \leq q < 0$ veya $q > 0$ değerlerini alır. q parametresinin küçükten büyüğe doğru değerler alması durumunda potansiyelin derinliğinin azaldığı Şekil 3.1.1.’de görülmektedir



Şekil 3.1.1. $V_2 = -\frac{V_1}{3}$ olması durumunda Rosen-Morse potansiyelinin q 'nin beş farklı değeri için konuma göre çizimi.

Vektör potansiyel ile skaler potansiyelin birbirine eşit olması durumunda elde edilen Rosen-Morse potansiyeli için Denklem (3.1.1) aşağıdaki biçimi alır:

$$\left\{ \frac{d^2}{dr^2} + [(E^2 - m^2) + 2(E + m)(V_1 \sec h_q^2 \alpha r + V_2 \tanh_q \alpha r)] \right\} u(r) = 0 \quad (3.1.3)$$

Burada

$$\tilde{E}^2 = E^2 - m^2, \quad \tilde{V}_1 = 2(E + m)V_1, \quad \tilde{V}_2 = 2(E + m)V_2 \quad (3.1.4a)$$

kısaltmaları ile birlikte yeni değişken

$$z = \frac{1 + \tanh_q \alpha r}{2} \quad (3.1.4b)$$

ve dalga fonksiyonu

$$u(r) = z^{-p} (1 - z)^{-\omega} F(z) \quad (3.1.5)$$

biçiminde tanımlanırsa Denklem (3.1.3)

$$z(1-z)\frac{d^2F(z)}{dz^2} + [-2p+1-(-2p-2\omega+1+1)z]\frac{dF(z)}{dz} - \left[(p+\omega)^2 - p - \omega - \frac{\tilde{V}_1}{q\alpha^2} - \frac{\left(\frac{\tilde{E}}{2\alpha}\right)^2 + p^2 - \frac{\tilde{V}_2}{4\alpha^2}}{z(1-z)} - \frac{-p^2 + \omega^2 + \frac{\tilde{V}_2}{2\alpha^2}}{1-z} \right] F(z) = 0 \quad (3.1.6)$$

denklemine dönüşür. Gauss hipergeometrik fonksiyonların sağladığı Denklem [32]

$$z(1-z)\frac{d^2u}{dz^2} + [\gamma - (\alpha + \beta + 1)z]\frac{du}{dz} - \alpha\beta u = 0 \quad (3.1.7a)$$

ve bu denklemin çözümü

$$u(z) = C_{12}F_1(\alpha, \beta, \gamma; z) + z^{1-\gamma}C_{22}F_1(\alpha - \gamma + 1, \beta - \gamma + 1, 2 - \gamma; z) \quad (3.1.7b)$$

olduğu bilinmektedir. Buna Gauss hipergeometrik fonksiyonlar denir. Denklem (3.1.6)'nın Gauss hipergeometrik denkleme benzemesi için

$$\left(\frac{\tilde{E}}{2\alpha}\right)^2 + p^2 - \frac{\tilde{V}_2}{4\alpha^2} = 0 \quad (3.1.8a)$$

$$-p^2 + \omega^2 - \frac{\tilde{V}_2}{2\alpha^2} = 0 \quad (3.1.8b)$$

eşitliklerinin sağlanması gerekmektedir. Bu durumda Denklem (3.1.6)'nın bir çözümü hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$u(r) = \left(\frac{1 + \tanh_q \alpha r}{2} \right)^{-p} \left(\frac{1 - \tanh_q \alpha r}{2} \right)^{-\omega} \quad (3.1.9)$$

$${}_2F_1 \left(-p - \omega + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{V}_1}{q\alpha^2} + \frac{1}{4}}, -p - \omega + \frac{1}{2} + \sqrt{\frac{\tilde{V}_1}{q\alpha^2} + \frac{1}{4}}, -2p + 1; \frac{1 + \tanh_q \alpha r}{2} \right)$$

Bağlı durumları betimleyen enerji bağıntısını elde etmek için

$$-p - \omega + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{V}_1}{q\alpha^2} + \frac{1}{4}} = -n; \quad n = 0, 1, 2, 3, \dots \quad (3.1.10)$$

kuantizasyon koşulu kullanılır. Bu koşul Gauss hipergeometrik fonksiyonların serisel ifadesinin sonlu olması için gerekli olan koşuldur. Bu kuantizasyon koşulu ve Denklem (3.1.8b) kullanılarak

$$p + \omega = n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{V}_1}{q\alpha^2} + \frac{1}{4}} \quad (3.1.11)$$

$$p - \omega = \frac{\tilde{V}_2}{2\alpha^2} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{V}_1}{q\alpha^2} + \frac{1}{4}} \right)} \quad (3.1.12)$$

bağıntıları elde edilir. Bu bağıntılar ile Denklem (3.1.8a) ve Denklem (3.1.8b) kullanılarak \tilde{E} için aşağıdaki denklem bulunur:

$$\tilde{E}^2 = - \left(\frac{\tilde{V}_2}{2\alpha} \right)^2 \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{V}_1}{q\alpha^2} + \frac{1}{4}} \right)^2} - \alpha^2 \left(n + \frac{1}{2} - \sqrt{\frac{\tilde{V}_1}{q\alpha^2} + \frac{1}{4}} \right)^2 \quad (3.1.13)$$

Bu Denklemde (3.1.4a)'da verilen eşitlikler kullanılırsa enerjinin sağladığı denklem

$$m^2 - E^2 = \frac{(E+m)^2 V_2^2}{\alpha^2} \frac{1}{\left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8(E+m)V_1}{q\alpha^2}} \right)^2} + \alpha^2 \left(n + \frac{1}{2} - \frac{1}{2} \sqrt{1 + \frac{8(E+m)V_1}{q\alpha^2}} \right)^2 \quad (3.1.14)$$

biçiminde elde edilir.

3.2. ASİMETRİK HULTHEN POTANSİYELİNDEN VEKTÖR BOZONLARININ SAÇILMASI

DKP denklemi 1930'lu yılların sonlarına doğru elektromanyetik alan içerisindeki kütleli vektör (spin-1) ve kütleli skaler (spin-0) bozonları betimlemek için aşağıdaki biçimde verilmektedir [33] ($\hbar = c = 1$):

$$[i\beta^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - m]\Psi_K(\vec{r}, t) = 0. \quad (3.2.1)$$

Burada β^μ , 16×16 'lık Kemmer matrislerini, A_μ vektör potansiyeli, m parçacığın kütleli ve e parçacığın yükünü temsil etmektedir. Bu matrislerin sıralama bağıntısı ilk olarak Duffin tarafından aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır [34]:

$$\beta^\mu \beta^\nu \beta^\lambda + \beta^\lambda \beta^\nu \beta^\mu = g^{\mu\nu} \beta^\lambda + g^{\lambda\nu} \beta^\mu \quad (3.2.2)$$

Burada $g^{\mu\nu} = \text{köşegen}(+1, -1, -1, -1)$, Minkowski uzay-zamanındaki metrik tensörüdür. $\Psi_K(t, \vec{x})$, dalga fonksiyonu 16-bileşenlidir. DKP denkleminin spin-1 parçası, klasik modelin kuantizasyonundan elde edilmiştir [35-36] ve bu klasik modelde beta matrisleri

$$\beta^\mu = \gamma^\mu \otimes I + I \otimes \gamma^\mu \quad (3.2.3)$$

olarak verilir. Burada γ^μ , standart Dirac matrisleridir. Bu modelde spin-1 parçacıklı sistem, kütlesi eşit spin-1/2 olan iki parçacıklı bir sistem olarak ele alınır. Bu durumda Ψ_K dalga fonksiyonu şöyle yazılır:

$$\Psi_K = \Psi_D \otimes \Psi_D \quad (3.2.4)$$

Burada Ψ_K DKP denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonu iken Ψ_D ise Dirac denkleminin çözümü olan dalga fonksiyonudur. (1+1) boyutta Dirac gamma matrisleri, Pauli spin matrisleri ile yer değiştirir [37]:

$$\beta^\mu = \sigma^\mu \otimes I + I \otimes \sigma^\mu \quad (\mu = 0, 1) \quad (3.2.5)$$

Dirac gamma matrisleri, $\gamma^0 = \sigma^z$, $\gamma^1 = i\sigma^x$ biçiminde seçilir. Bu seçim olası seçimlerden yalnızca bir tanesidir. (1+1) boyutta spin-1 için DKP denklemi şu biçimde yazılır:

$$[i(\sigma^\mu \otimes I + I \otimes \sigma^\mu)(\partial_\mu + ieA_\mu) - m]\Psi_K = 0. \quad (3.2.6)$$

Burada Ψ_K aşağıdaki biçimde verilir:

$$\Psi_K = \begin{pmatrix} \Psi_1 \\ \Psi_0 \\ \Psi_{\bar{0}} \\ \Psi_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.7)$$

Bu durumda Denklem (3.2.6) bağımlı dört denkleme indirgenir:

$$\begin{aligned} [2(\partial_0 + ieA_0) + im]\Psi_1 + i(\partial_1 + ieA_1)(\Psi_0 + \Psi_{\bar{0}}) &= 0 \\ (\partial_1 + ieA_1)(\Psi_1 + \Psi_2) + m\Psi_0 &= 0 \\ (\partial_1 + ieA_1)(\Psi_1 + \Psi_2) + m\Psi_{\bar{0}} &= 0 \\ [-2(\partial_0 + ieA_0) + im]\Psi_2 + i(\partial_1 + ieA_1)(\Psi_0 + \Psi_{\bar{0}}) &= 0 \end{aligned} \quad (3.2.8)$$

Bu denklem sisteminde

$$\tilde{m} = \frac{m}{2}, \quad \Psi(t, x) = e^{-iEt} \chi(x), \quad \chi = \begin{pmatrix} \chi_1 \\ \chi_0 \\ \chi_0 \\ \chi_2 \end{pmatrix} \quad (3.2.9)$$

eşitlikleri kullanılırsa ve gerekli işlemler yapılırsa aşağıdaki biçimde ikinci dereceden bir diferansiyel denklem elde edilir:

$$[(\partial_1 + ieA_1)^2 - (-iE + ieA_0)^2 - \tilde{m}^2](\chi_1 + \chi_2) = 0 \quad (3.2.10)$$

Bir boyutlu Asimetrik Hulthen potansiyeli

$$eA_0 = V(x) = V_0 \left[\theta(-x) \frac{1}{e^{-ax} - q} + \theta(x) \frac{1}{e^{bx} - \tilde{q}} \right] \quad (3.2.11)$$

biçiminde tanımlanır.

$x < 0$ değerleri için asimetrik Hulthen potansiyeli Denklem (3.2.10)'da yerine yazılır ve

$$y = qe^{ax} \quad (3.2.12)$$

değişken değiştirmesi yapılırsa

$$\left[y^2 \frac{d^2}{dy^2} + y \frac{d}{dy} + \left(\frac{V_0}{aq} \right)^2 \left(\frac{y}{1-y} \right)^2 + \frac{E^2 - \tilde{m}^2}{a^2} - \frac{2V_0E}{a^2q} \left(\frac{y}{1-y} \right) \right] (\chi_1 + \chi_2) = 0 \quad (3.2.13)$$

denklemi elde edilir. Dalga fonksiyonu

$$\chi_1(y) + \chi_2(y) = y^\mu (1-y)^\varepsilon f(y) \quad (3.2.14)$$

biçiminde tanımlanır ve Denklem (3.2.13)'de yerine yazılırsa aşağıdaki denklem bulunur:

$$y(1-y)\frac{d^2 f(y)}{dy^2} + [(1+2\mu) - (2\mu+2\varepsilon+1)y]\frac{df(y)}{dy} - [(\mu+\varepsilon+\beta)(\mu+\varepsilon-\beta)]f(y) = 0 \quad (3.2.15a)$$

Burada, denklemin içindeki parametreler

$$\mu = \frac{i\sqrt{E^2 - \tilde{m}^2}}{a}, \quad \varepsilon = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{V_0}{aq}\right)^2}}{2}, \quad \beta = \frac{\sqrt{\tilde{m}^2 - \left(E + \frac{V_0}{q}\right)^2}}{a} \quad (3.2.15b)$$

biçiminde tanımlanır. Denklem (3.2.15a), Gauss hipergeometrik denkleme benzediği için çözüm aşağıdaki biçimde yazılır:

$$f(y) = A {}_2F_1(\mu + \varepsilon - \beta, \mu + \varepsilon + \beta, 1 + 2\mu; y) + B y^{-2\mu} {}_2F_1(-\mu + \varepsilon - \beta, -\mu + \varepsilon + \beta, 1 - 2\mu; y) \quad (3.2.16)$$

Buna göre genel çözüm ise Denklem (3.2.14)'ün kullanılması ile aşağıdaki biçimi alır:

$$(\chi_1 + \chi_2)_{sol} = A y^\mu (1-y)^\varepsilon {}_2F_1(\mu + \varepsilon - \beta, \mu + \varepsilon + \beta, 1 + 2\mu; y) + B y^{-\mu} (1-y)^\varepsilon {}_2F_1(-\mu + \varepsilon - \beta, -\mu + \varepsilon + \beta, 1 - 2\mu; y) \quad (3.2.17)$$

$x > 0$ değerleri için

$$z = \tilde{q} e^{-bx} \quad (3.2.18)$$

değişken değiştirilmesi yapılırsa Denklem (3.2.10)

$$\left[z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + \left(\frac{V_0}{b\tilde{q}} \right)^2 \left(\frac{z}{1-z} \right)^2 + \frac{E^2 - \tilde{m}^2}{b^2} - \frac{2V_0 E}{b^2 \tilde{q}} \left(\frac{z}{1-z} \right) \right] (\chi_1 + \chi_2) = 0 \quad (3.2.19)$$

biçimine dönüşür. Buradaki dalga fonksiyonu

$$\chi_1(y) + \chi_2(y) = z^{\tilde{\mu}}(1-z)^{-\tilde{\varepsilon}} g(z) \quad (3.2.20)$$

olarak tanımlanır ve Denklem (3.2.19)'da yerine yazılırsa aşağıdaki denklem elde edilir:

$$z(1-z) \frac{d^2 g(z)}{dz^2} + [(1+2\tilde{\mu}) - (2\tilde{\mu} + 2\tilde{\varepsilon} + 1)z] \frac{dg(z)}{dz} - [(\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\beta})(\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon} - \tilde{\beta})]g(z) = 0 \quad (3.2.21a)$$

Burada, denklemdeki parametreler

$$\tilde{\mu} = \frac{i\sqrt{E^2 - \tilde{m}^2}}{b}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{V_0}{b\tilde{q}}\right)^2}}{2}, \quad \tilde{\beta} = \frac{\sqrt{\tilde{m}^2 - \left(E + \frac{V_0}{\tilde{q}}\right)^2}}{b} \quad (3.2.21b)$$

biçimindedir. Denklem (3.2.21a), Gauss Hipergeometrik denkleme benzediği için çözüm

$$g(z) = C {}_2F_1(\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon} - \tilde{\beta}, \tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\beta}, 1 + 2\tilde{\mu}; z) + Dz^{-2\tilde{\mu}} {}_2F_1(-\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon} - \tilde{\beta}, -\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\beta}, 1 - 2\tilde{\mu}; z) \quad (3.2.22)$$

olur. O zaman genel çözüm ise Denklem (3.2.20)'nin kullanılması ile birlikte aşağıdaki biçimi alır:

$$\begin{aligned} (\chi_1 + \chi_2)_{sağ} = & Cz^{\tilde{\mu}}(1-z)^{-\tilde{\varepsilon}} {}_2F_1(\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon} - \tilde{\beta}, \tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\beta}, 1 + 2\tilde{\mu}; z) \\ & + Dz^{-\tilde{\mu}}(1-z)^{-\tilde{\varepsilon}} {}_2F_1(-\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon} - \tilde{\beta}, -\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\beta}, 1 - 2\tilde{\mu}; z) \end{aligned} \quad (3.2.23)$$

Elde edilen bu çözümler, dalga fonksiyonlarının ilk ve son bileşenlerinin çizgisel bir birleşimidir. Diğer bileşenler, aşağıdaki ifadeler yardımıyla elde edilir:

$$\Psi_0 = -\frac{1}{m}(\partial_1 + ieA_1)(\Psi_1 + \Psi_2) \quad (3.2.24a)$$

$$(\Psi_1 - \Psi_2) = \frac{2i}{m} (\partial_0 + ieA_0)(\Psi_1 + \Psi_2) \quad (3.2.24b)$$

$$\frac{d {}_2F_1(a, b, c; x)}{dx} = \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1, c+1; x) \quad (3.2.24c)$$

3.2.1. Saçılma Durumları

Saçılma durumlarını bulabilmek için elde edilen bu çözümlerin asimptotik ifadelerine bakılması gerekmektedir.

$x < 0$ değerleri için; $x \rightarrow -\infty$ 'a giderken $y \rightarrow 0$ 'a gider, bu durumda Gauss Hipergeometrik fonksiyonlarının asimptotik davranışı aşağıdaki biçimi alır:

$${}_2F_1(a, b, c; t) \rightarrow 1 \quad ; \quad t \rightarrow 0 \quad (3.2.1.1)$$

Gelen dalgayı betimleyen dalga fonksiyonu ve bu fonksiyonun asimptotik davranışı, sırası ile aşağıdaki biçimde olur:

$$\Psi_{gel} = y^\mu (1-y)^\varepsilon \times \left[\begin{array}{c} \left\{ \frac{1}{m} \left[E - \frac{V_0}{q} \left(\frac{y}{1-y} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\} F_{gel} \\ \frac{a}{m} \left\{ \left[\frac{-\mu + y(\mu + \varepsilon)}{1-y} \right] F_{gel} + \left[\frac{\beta^2 - (\mu + \varepsilon)^2}{1+2\mu} \right] y \tilde{F}_{gel} \right\} \\ \frac{a}{m} \left\{ \left[\frac{-\mu + y(\mu + \varepsilon)}{1-y} \right] F_{gel} + \left[\frac{\beta^2 - (\mu + \varepsilon)^2}{1+2\mu} \right] y \tilde{F}_{gel} \right\} \\ \left\{ \frac{-1}{m} \left[E - \frac{V_0}{q} \left(\frac{y}{1-y} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\} F_{gel} \end{array} \right] \quad (3.2.1.2)$$

$$\Psi_{gel} \rightarrow q^{ik/a} e^{ikx} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{E}{m} + \frac{1}{2} \right) \\ \frac{-ik}{m} \\ \frac{-ik}{m} \\ \left(\frac{-E}{m} + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right] \quad (3.2.1.3)$$

Denklem (3.2.1.2)'de aşağıda belirtilen tanımlamalar kullanılmıştır:

$$\begin{aligned} F_{gel} &= {}_2F_1(\mu + \varepsilon - \beta, \mu + \varepsilon + \beta; 1 + 2\mu; y) \\ \tilde{F}_{gel} &= {}_2F_1(\mu + \varepsilon - \beta + 1, \mu + \varepsilon + \beta + 1; 2 + 2\mu; y) \end{aligned} \quad (3.2.1.4)$$

Yansıyan dalgayı betimleyen dalga fonksiyonu ve bu fonksiyonun asimptotik davranışı, sırası ile aşağıdaki biçimini alır:

$$\Psi_{yan} = y^{-\mu}(1-y)^\varepsilon \begin{bmatrix} \left\{ \frac{1}{m} \left[E - \frac{V_0}{q} \left(\frac{y}{1-y} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\} F_{yan} \\ \frac{a}{m} \left\{ \left[\frac{\mu + y(-\mu + \varepsilon)}{1-y} \right] F_{yan} + \left[\frac{\beta^2 - (-\mu + \varepsilon)^2}{1-2\mu} \right] y \tilde{F}_{yan} \right\} \\ \frac{a}{m} \left\{ \left[\frac{\mu + y(-\mu + \varepsilon)}{1-y} \right] F_{yan} + \left[\frac{\beta^2 - (-\mu + \varepsilon)^2}{1-2\mu} \right] y \tilde{F}_{yan} \right\} \\ \left\{ \frac{-1}{m} \left[E - \frac{V_0}{q} \left(\frac{y}{1-y} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\} F_{yan} \end{bmatrix} \quad (3.2.1.5)$$

$$\Psi_{yan} \rightarrow q^{-ik/a} e^{-ikx} \begin{bmatrix} \left(\frac{E}{m} + \frac{1}{2} \right) \\ \frac{ik}{m} \\ \frac{ik}{m} \\ \left(\frac{-E}{m} + \frac{1}{2} \right) \end{bmatrix} \quad (3.2.1.6)$$

Denklem (3.2.1.5)'de

$$\begin{aligned} F_{yan} &= {}_2F_1(-\mu + \varepsilon - \beta, -\mu + \varepsilon + \beta; 1 - 2\mu; y) \\ \tilde{F}_{yan} &= {}_2F_1(-\mu + \varepsilon - \beta + 1, -\mu + \varepsilon + \beta + 1; 2 - 2\mu; y) \end{aligned} \quad (3.2.1.7)$$

biçiminde kısaltmalar yapılmıştır. Geçen dalga fonksiyonu ve bu fonksiyonun asimptotik davranışı ise sırası ile aşağıdaki biçimde yazılır:

$$\Psi_{geç} = z^{\tilde{\mu}}(1-z)^{-\tilde{\varepsilon}} \left[\begin{array}{c} \left\{ \frac{1}{m} \left[E - \frac{V_0}{\tilde{q}} \left(\frac{z}{1-z} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\} F_{geç} \\ \frac{b}{m} \left\{ \left[\frac{-\tilde{\mu} + z(\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon})}{1-z} \right] F_{geç} + \left[\frac{-\tilde{\beta}^2 + (\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon})^2}{1-2\tilde{\mu}} \right] z\tilde{F}_{geç} \right\} \\ \frac{b}{m} \left\{ \left[\frac{-\tilde{\mu} + z(\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon})}{1-z} \right] F_{geç} + \left[\frac{-\tilde{\beta}^2 + (\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon})^2}{1-2\tilde{\mu}} \right] z\tilde{F}_{geç} \right\} \\ \left\{ \frac{-1}{m} \left[E - \frac{V_0}{\tilde{q}} \left(\frac{z}{1-z} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\} F_{geç} \end{array} \right] \quad (3.2.1.8)$$

$$\Psi_{geç} \rightarrow \tilde{q}^{-ik/b} e^{ikx} \left[\begin{array}{c} \left(\frac{E}{m} + \frac{1}{2} \right) \\ -ik \\ m \\ -ik \\ m \\ \left(\frac{-E}{m} + \frac{1}{2} \right) \end{array} \right] \quad (3.2.1.9)$$

Burada, aşağıda tanımlanan eşitlikler kullanılmıştır:

$$\begin{aligned} F_{geç} &= {}_2F_1(-\tilde{\mu} - \tilde{\varepsilon} - \tilde{\beta}, -\tilde{\mu} - \tilde{\varepsilon} + \tilde{\beta}; 1 - 2\tilde{\mu}; z) \\ \tilde{F}_{geç} &= {}_2F_1(-\tilde{\mu} - \tilde{\varepsilon} - \tilde{\beta} + 1, -\tilde{\mu} - \tilde{\varepsilon} + \tilde{\beta} + 1; 2 - 2\tilde{\mu}; z) \end{aligned} \quad (3.2.1.10)$$

DKP denklemi için dörtlü akım yoğunluğu aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$j^\mu = \bar{\Psi} \beta^\mu \Psi ; \quad \bar{\Psi} = (\Psi^*)^T (\gamma^0 \otimes \gamma^0) \quad (3.2.1.11)$$

Bu dörtlü akım yoğunluğu ve dalga fonksiyonlarının $x = 0$ noktasındaki süreklilik koşulundan elde edilen

$$N_1 \Psi_{gel}(x=0) + N_2 \Psi_{yan}(x=0) = N_3 \Psi_{geç}(x=0) \quad (3.2.1.12)$$

eşitlik kullanıldığında geçiş (T) ve yansıma (R) katsayıları, sırası ile,

$$T = \left| \frac{j_{geç}}{j_{gel}} \right| = \left| \frac{N_3}{N_1} \right|^2 \quad (3.2.1.13a)$$

$$R = \left| \frac{j_{yan}}{j_{gel}} \right| = \left| \frac{N_2}{N_1} \right|^2 \quad (3.2.1.13b)$$

biçiminde bulunur. Buradaki katsayılar, aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\frac{N_3}{N_1} = \frac{q^\mu(1-q)^\varepsilon}{\tilde{q}^{-\tilde{\mu}}(1-\tilde{q})^{-\tilde{\varepsilon}}} \times \left\{ \frac{F_{gel}(q)[\gamma_0 F_{yan}(q) + \tilde{\gamma}_0 \tilde{F}_{yan}(q)] - F_{yan}(q)[\alpha_0 F_{gel}(q) + \tilde{\alpha}_0 \tilde{F}_{yan}(q)]}{\alpha_1 F_{geç}(\tilde{q})[\gamma_0 F_{yan}(q) + \tilde{\gamma}_0 \tilde{F}_{yan}(q)] - F_{yan}(q)[\beta_0 F_{gel}(\tilde{q}) + \tilde{\beta}_0 \tilde{F}_{yan}(\tilde{q})]} \right\} \quad (3.2.1.14)$$

$$\frac{N_2}{N_1} = \frac{q^{2\mu}}{F_{yan}(q)} \left[\frac{N_3}{N_1} \frac{\tilde{q}^{-\tilde{\mu}}(1-\tilde{q})^{-\tilde{\varepsilon}}}{q^\mu(1-q)^\varepsilon} \frac{\beta_2}{\alpha_2} F_{geç}(\tilde{q}) - F_{yan}(q) \right] \quad (3.2.1.15)$$

Çizelge 3.2.1.1. Denklem (3.2.1.14) ve Denklem (3.2.1.15)'deki sabitlerin açık biçimleri.

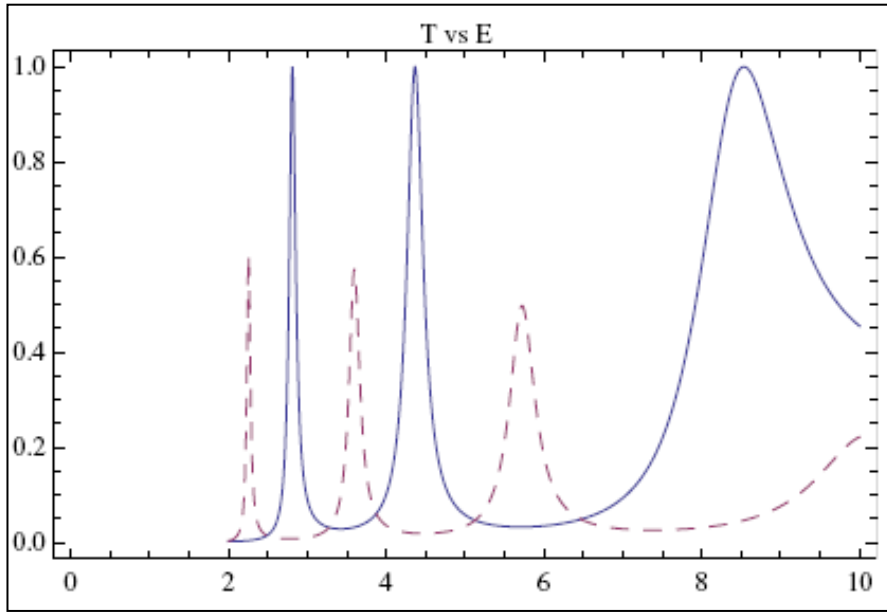
$\alpha_1 = \frac{1}{m} \left[E - \frac{V_0}{1-q} \right] + \frac{1}{2}$	$\alpha_0 = \frac{a}{m} \left[\frac{-\mu + q(\mu + \varepsilon)}{1-q} \right]$
$\tilde{\alpha}_0 = \frac{aq}{m} \left[\frac{\beta^2 - (\mu + \varepsilon)^2}{1 + 2\mu} \right]$	$\alpha_2 = \frac{-1}{m} \left[E - \frac{V_0}{1-q} \right] + \frac{1}{2}$
$\gamma_0 = \frac{a}{m} \left[\frac{\mu + q(-\mu + \varepsilon)}{1-q} \right]$	$\tilde{\gamma}_0 = \frac{aq}{m} \left[\frac{\beta^2 - (-\mu + \varepsilon)^2}{1 - 2\mu} \right]$
$\beta_1 = \frac{1}{m} \left[E - \frac{V_0}{1-\tilde{q}} \right] + \frac{1}{2}$	$\beta_0 = \frac{b}{m} \left[\frac{-\tilde{\mu} + \tilde{q}(\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon})}{1-\tilde{q}} \right]$
$\tilde{\beta}_0 = \frac{b\tilde{q}}{m} \left[\frac{\tilde{\beta}^2 - (\tilde{\mu} + \tilde{\varepsilon})^2}{1 - 2\tilde{\mu}} \right]$	$\beta_1 = \frac{-1}{m} \left[E - \frac{V_0}{1-\tilde{q}} \right] + \frac{1}{2}$

Geçiş Rezonans durumları için gerekli olan eşitliğin elde edilebilmesi için, $R = 0$ olmalıdır. Denklem (3.2.1.13b) ve Denklem (3.2.1.15) kullanılarak rezonans durumları için koşul aşağıdaki biçimde elde edilir:

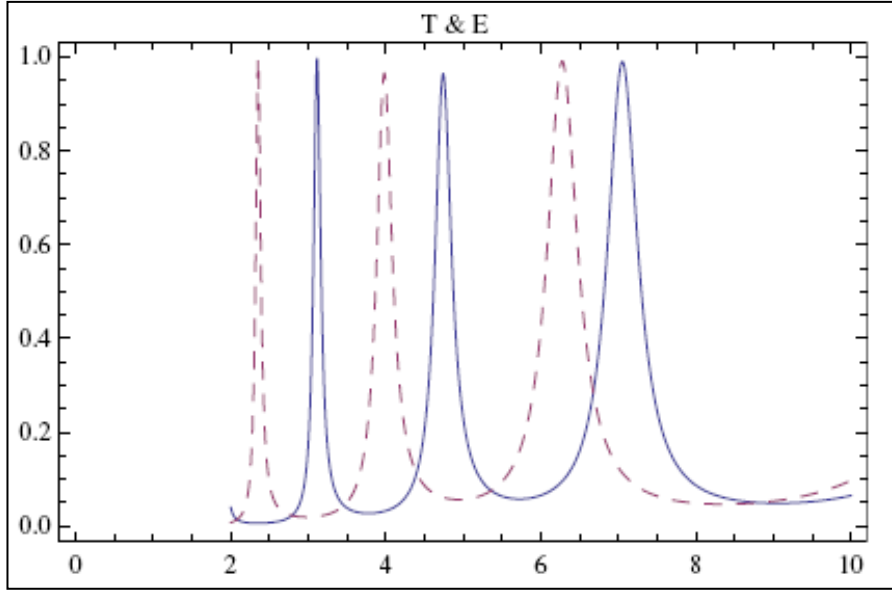
$$F_{gel}(q)F_{geç}(\tilde{q})F_{yan}(q)\left[\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\gamma_0-\frac{\beta_2}{\alpha_2}\alpha_0\right]+F_{gel}(q)F_{geç}(\tilde{q})\tilde{F}_{yan}(q)\left(\frac{\beta_2}{\alpha_2}-\frac{\beta_1}{\alpha_1}\right)\tilde{\gamma}_0 \quad (3.2.1.16)$$

$$-\tilde{F}_{gel}(q)F_{geç}(\tilde{q})F_{yan}(q)\frac{\beta_2}{\alpha_2}\tilde{\alpha}_0+F_{gel}(q)\tilde{F}_{geç}(\tilde{q})F_{yan}(q)\tilde{\beta}_0=0$$

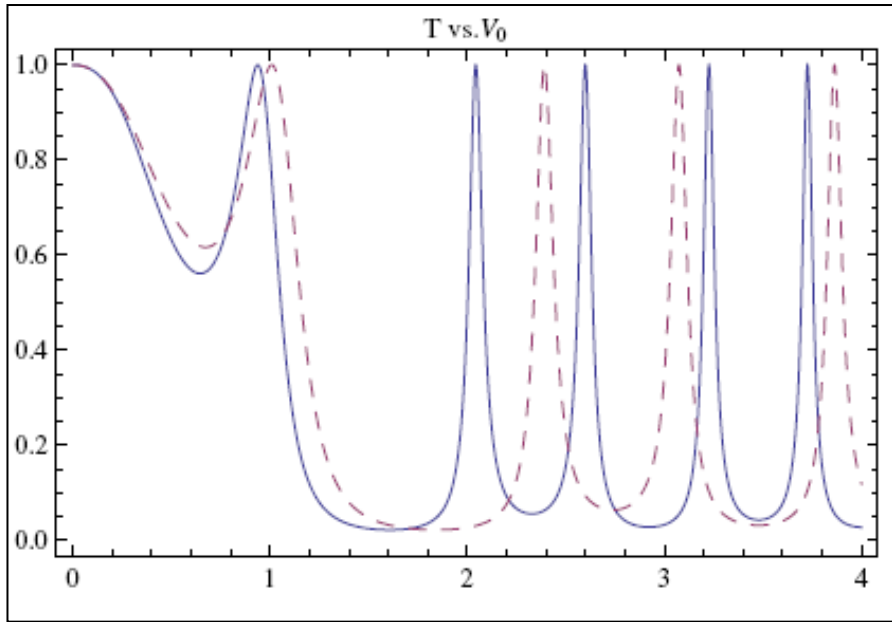
Şekil 3.2.1.1’de, görüldüğü gibi geçiş rezonans tepelerinin, q ve \tilde{q} ’nın birbirinden farklı olması durumunda yerleri değişmektedir ve bu tepelerin yüksekliği azalmaktadır. Şekil 3.2.1.2’de, bu potansiyelin biçimini belirleyen a ve b parametrelerinin değerlerinin değişmesiyle geçiş rezonans tepelerinin enerji aralıklarının değiştiği görülmektedir. Şekil 3.2.1.3 ise geçiş rezonans katsayısının, potansiyele göre değişimini göstermektedir; bu şekilde a ve b ’nin farklı değerleri geçiş rezonans tepelerinin aralığının değiştiği gözlenmektedir. Potansiyelin biçimini belirleyen parametreler arasında a ve b ’nin farklı değerlerinde oluşan eğrinin periyodikliği değişmezken q ve \tilde{q} ’nin farklı değerlerinde ise periyodiklik bozulmaktadır.



Şekil 3.2.1.1. Asimetrik Hulthen potansiyeli için geçiş katsayısının enerjiye göre değişimi I. Burada $a = b = 0.6$, $m = 1$ ve $V_0 = 4$. Kesiksiz çizgi için $q = \tilde{q} = 0.7$ ve kesikli çizgi için $q = 0.7$, $\tilde{q} = 0.8$ ’dir.



Şekil 3.2.1.2. Asimetrik Hulthen potansiyeli için geçiş katsayısının enerjiye göre değişimi II. Burada $q = \tilde{q} = 0.8$, $m = 1$ ve $V_0 = 4$. Kesiksiz çizgi için $a = 0.7$, $b = 0.5$ ve kesikli çizgi için $a = 0.6$, $b = 0.8$ 'dir.



Şekil 3.2.1.3. Asimetrik Hulthen potansiyeli için geçiş katsayısının V_0 'a göre değişimi. Burada, $q = \tilde{q} = 0.5$, $m = 1$ ve $E = 4$. Kesikli çizgi için $a = b = 0.6$ ve kesiksiz çizgi için $a = 0.6$, $b = 0.8$ 'dir.

3.2.2. Bağlı Durumlar

Bağlı durum enerjisini elde etmek için Denklem (3.2.11)'de verilen Asimetrik Hulthen potansiyeli

$$eA_0 = V(x) = -V_0 \left[\theta(-x) \frac{1}{e^{-ax} - q} + \theta(x) \frac{1}{e^{bx} - \tilde{q}} \right] \quad (3.2.2.1)$$

biçiminde tanımlanır.

$x < 0$ değerleri için asimetrik Hulthen potansiyeli Denklem (3.2.10)'da yerine yazılır ve Denklem (3.2.12) kullanılırsa

$$\left[y^2 \frac{d^2}{dy^2} + y \frac{d}{dy} + \left(\frac{-V_0}{aq} \right)^2 \left(\frac{y}{1-y} \right)^2 + \frac{E^2 - \tilde{m}^2}{a^2} + \frac{2V_0 E}{a^2 q} \left(\frac{y}{1-y} \right) \right] (\chi_1 + \chi_2) = 0 \quad (3.2.2.2)$$

denklemini elde edilir. Burada dalga fonksiyonunun

$$\chi_1(y) + \chi_2(y) = y^\xi (1-y)^\varepsilon w(y) \quad (3.2.2.3)$$

biçiminde tanımlanmasıyla Denklem (3.2.2.2)

$$y(1-y) \frac{d^2 w(y)}{dy^2} + [(1+2\xi) - (2\xi + 2\varepsilon + 1)y] \frac{dw(y)}{dy} - [(\xi + \varepsilon + \nu)(\xi + \varepsilon - \nu)] w(y) = 0 \quad (3.2.2.4)$$

denklemine dönüşür. Bu denklemdeki parametreler aşağıdaki biçimde verilir:

$$\xi = \frac{\sqrt{\tilde{m}^2 - E^2}}{a}, \quad \varepsilon = \frac{1 + \sqrt{1 - 4 \left(\frac{V_0}{aq} \right)^2}}{2}, \quad \nu = \frac{\sqrt{\tilde{m}^2 - \left(E - \frac{V_0}{q} \right)^2}}{a} \quad (3.2.2.5)$$

Denklem (3.2.2.4), Gauss hipergeometrik denkleme benzediği için çözüm

$$w(y) = C_1 {}_2F_1(\xi + \varepsilon - \nu, \xi + \varepsilon + \nu, 1 + 2\xi; y) + C_2 y^{-2\xi} {}_2F_1(-\xi + \varepsilon - \nu, -\xi + \varepsilon + \nu, 1 + 2\xi; y) \quad (3.2.2.6)$$

olur. Genel çözüm ise Denklem (3.2.2.3)'ün kullanılması ile aşağıdaki biçimde bulunur:

$$(\chi_1 + \chi_2)_{sol} = C_1 y^\xi (1-y)^\varepsilon F_1(\xi + \varepsilon - \nu, \xi + \varepsilon + \nu, 1 + 2\xi; y) + C_2 y^{-\xi} (1-y)^\varepsilon F_1(-\xi + \varepsilon - \nu, -\xi + \varepsilon + \nu, 1 + 2\xi; y) \quad (3.2.2.7)$$

$x > 0$ değerleri için asimetrik Hulthen potansiyeli Denklem (3.2.10)'da yerine yazılır ve Denklem (3.2.18) kullanılırsa

$$\left[z^2 \frac{d^2}{dz^2} + z \frac{d}{dz} + \left(\frac{-V_0}{b\tilde{q}} \right)^2 \left(\frac{z}{1-z} \right)^2 + \frac{E^2 - \tilde{m}^2}{b^2} + \frac{2V_0 E}{b^2 \tilde{q}} \left(\frac{z}{1-z} \right) \right] (\chi_1 + \chi_2) = 0 \quad (3.2.2.8)$$

denklemini elde edilir. Burada dalga fonksiyonunun

$$\chi_1(y) + \chi_2(y) = z^{\tilde{\xi}} (1-z)^{-\tilde{\varepsilon}} s(z) \quad (3.2.2.9)$$

biçiminde tanımlanmasıyla Denklem (3.2.2.8) aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$z(1-z) \frac{d^2 s(z)}{dz^2} + [(1+2\tilde{\xi}) - (2\tilde{\xi} - 2\tilde{\varepsilon} + 1)z] \frac{ds(z)}{dz} - [(\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\nu})(\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon} - \tilde{\nu})] s(z) = 0 \quad (3.2.2.10)$$

Bu denklemdeki parametreler

$$\tilde{\xi} = \frac{i\sqrt{E^2 - \tilde{m}^2}}{b}, \quad \tilde{\varepsilon} = \frac{1 + \sqrt{1 - 4\left(\frac{V_0}{b\tilde{q}}\right)^2}}{2}, \quad \tilde{\nu} = \frac{\sqrt{\tilde{m}^2 - \left(E - \frac{V_0}{\tilde{q}}\right)^2}}{b} \quad (3.2.2.11)$$

biçiminde tanımlanır. Denklem (3.2.2.10), Gauss Hipergeometrik denkleme benzediği için, çözüm

$$s(z) = C_3 {}_2F_1(\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon} - \tilde{\nu}, \tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\nu}, 1 + 2\tilde{\xi}; z) + C_4 z^{-2\tilde{\xi}} {}_2F_1(-\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon} - \tilde{\nu}, -\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\nu}, 1 - 2\tilde{\xi}; z) \quad (3.2.2.12)$$

olur ve genel çözüm ise Denklem (3.2.2.9)'un kullanılması ile aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$\begin{aligned}
 (\chi_1 + \chi_2)_{sağ} &= C_3 z^{\tilde{\xi}} (1-z)^{-\tilde{\xi}} {}_2F_1(\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon} - \tilde{\nu}, \tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\nu}, 1 + 2\tilde{\xi}; z) \\
 &+ C_4 z^{-\tilde{\xi}} (1-z)^{-\tilde{\xi}} {}_2F_1(-\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon} - \tilde{\nu}, -\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon} + \tilde{\nu}, 1 + 2\tilde{\xi}; z).
 \end{aligned}
 \tag{3.2.2.13}$$

Sonsuzda ve eksi sonsuzdaki düzenli çözümler sırası ile aşağıda verilmektedir:

$$\Psi_{sağ} = z^{\tilde{\xi}} (1-z)^{-\tilde{\xi}} \left[\begin{array}{c} \left\{ \frac{1}{m} \left[E + \frac{V_0}{\tilde{q}} \left(\frac{z}{1-z} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\} F_{sağ} \\ \frac{b}{m} \left\{ \left[\frac{-\tilde{\xi} + z(\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon})}{1-z} \right] F_{sağ} + \left[\frac{-\tilde{\nu}^2 + (\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon})^2}{1-2\tilde{\xi}} \right] z \tilde{F}_{sağ} \right\} \\ \frac{b}{m} \left\{ \left[\frac{-\tilde{\xi} + z(\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon})}{1-z} \right] F_{sağ} + \left[\frac{-\tilde{\nu}^2 + (\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon})^2}{1-2\tilde{\xi}} \right] z \tilde{F}_{sağ} \right\} \\ \left\{ \frac{-1}{m} \left[E - \frac{V_0}{\tilde{q}} \left(\frac{z}{1-z} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\} F_{geç} \end{array} \right]
 \tag{3.2.2.14}$$

$$\Psi_{sol} = y^{\xi} (1-y)^{\varepsilon} \left[\begin{array}{c} \left\{ \frac{1}{m} \left[E + \frac{V_0}{q} \left(\frac{y}{1-y} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\} F_{sol} \\ \frac{a}{m} \left\{ \left[\frac{-\xi + y(\xi + \varepsilon)}{1-y} \right] F_{sol} + \left[\frac{v^2 - (\xi + \varepsilon)^2}{1-2\xi} \right] y \tilde{F}_{sol} \right\} \\ \frac{a}{m} \left\{ \left[\frac{-\xi + y(\xi + \varepsilon)}{1-y} \right] F_{sol} + \left[\frac{v^2 - (\xi + \varepsilon)^2}{1-2\xi} \right] y \tilde{F}_{sol} \right\} \\ \left\{ \frac{-1}{m} \left[E + \frac{V_0}{q} \left(\frac{y}{1-y} \right) \right] + \frac{1}{2} \right\} F_{sol} \end{array} \right]
 \tag{3.2.2.15}$$

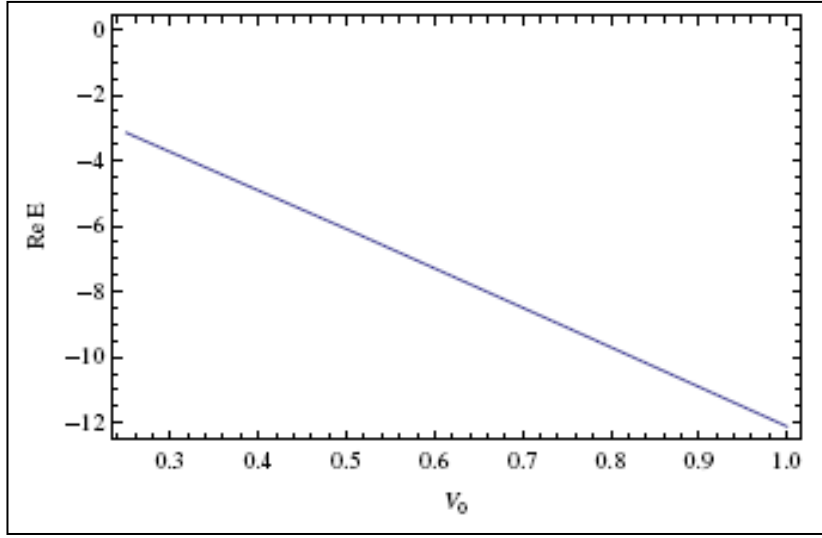
Dalga fonksiyonlarının $x=0$ 'da kendilerinin ve birinci türevlerinin süreklilik koşulları kullanılırsa, bağlı durumları betimleyen enerji özdeğer koşulu aşağıdaki biçimde bulunur:

$$\begin{aligned}
 & \left[\frac{1}{m} \left(E + \frac{V_0}{1-\tilde{q}} \right) + \frac{1}{2} \right] F_{sağ} \left[\frac{a}{m} \left(\frac{-\xi + q(\xi + \varepsilon)}{1-q} \right) F_{sol}(q) \right. \\
 & \left. + \frac{aq}{m} \left(\frac{v^2 - (\xi + \varepsilon)^2}{1-2\xi} \right) \tilde{F}_{sol}(q) \right] - \left[\frac{1}{m} \left(E + \frac{V_0}{1-q} \right) + \frac{1}{2} \right] F_{sol}(q) \\
 & \times \left[\frac{b}{m} \left(\frac{-\tilde{\xi} + \tilde{q}(\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon})}{1-\tilde{q}} \right) F_{sağ}(\tilde{q}) + \frac{b\tilde{q}}{m} \left(\frac{-\tilde{v}^2 - (\tilde{\xi} + \tilde{\varepsilon})^2}{1-2\tilde{\xi}} \right) \tilde{F}_{sağ}(\tilde{q}) \right] = 0
 \end{aligned} \tag{3.2.2.16}$$

Bu denklem kullanılarak bağlı durum enerjileri sayısal olarak hesaplanabilir. Şekil 3.2.2.1’de, enerjinin potansiyele bağlı olarak değişimi gösterilmektedir. Potansiyel kuyunun büyüklüğü arttırılırsa, sistemin bağlı durum enerjisi azalır ve bu bağlı durum enerjisi, parçacığın negatif kütesine eşit olduğunda, bağlı durumlar negatif enerji sürekliliği ile birleşir. Bu durumda potansiyel kritik değere sahip olur ve bu değere süper kritik potansiyel adı verilir. Süper kritik potansiyelin değeri, Denklem (3.2.2.16)’da $\xi \rightarrow 0$, $\tilde{\xi} \rightarrow 0$ ve $E \rightarrow -m$ ifadelerinin yazılmasıyla $V = V_0 = 0.268019$ olarak bulunur.

Çizelge 3.2.2.1. Denklem (3.2.2.14), Denklem (3.2.2.15) ve Denklem (3.2.2.16)’daki sabitlerin açık biçimleri.

$F_{sol} = {}_2F_1(\xi + \varepsilon - v, \xi + \varepsilon + v; 1 + 2\xi; y)$
$\tilde{F}_{sol} = {}_2F_1(\xi + \varepsilon - v + 1, \xi + \varepsilon + v + 1; 2 + 2\xi; y)$
$F_{sol}(q) = {}_2F_1(\xi + \varepsilon - v, \xi + \varepsilon + v; 1 + 2\xi; q)$
$\tilde{F}_{sol}(q) = {}_2F_1(\xi + \varepsilon - v + 1, \xi + \varepsilon + v + 1; 2 + 2\xi; q)$
$F_{sağ} = {}_2F_1(-\tilde{\xi} - \tilde{\varepsilon} - \tilde{v}, -\tilde{\xi} - \tilde{\varepsilon} + \tilde{v}; 1 - 2\tilde{\xi}; z)$
$\tilde{F}_{sağ} = {}_2F_1(-\tilde{\xi} - \tilde{\varepsilon} - \tilde{v} + 1, -\tilde{\xi} - \tilde{\varepsilon} + \tilde{v} + 1; 2 - 2\tilde{\xi}; z)$
$F_{sağ}(\tilde{q}) = {}_2F_1(-\tilde{\xi} - \tilde{\varepsilon} - \tilde{v}, -\tilde{\xi} - \tilde{\varepsilon} + \tilde{v}; 1 - 2\tilde{\xi}; \tilde{q})$
$\tilde{F}_{sağ}(\tilde{q}) = {}_2F_1(-\tilde{\xi} - \tilde{\varepsilon} - \tilde{v} + 1, -\tilde{\xi} - \tilde{\varepsilon} + \tilde{v} + 1; 2 - 2\tilde{\xi}; \tilde{q})$



Şekil 3.2.2.1. Potansiyelin ilk bağli durum enerjisine göre çizimi. Burada $a = 0.4$, $b = 0.5$, $q = 0.1$, $\tilde{q} = 0.15$ 'dir.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

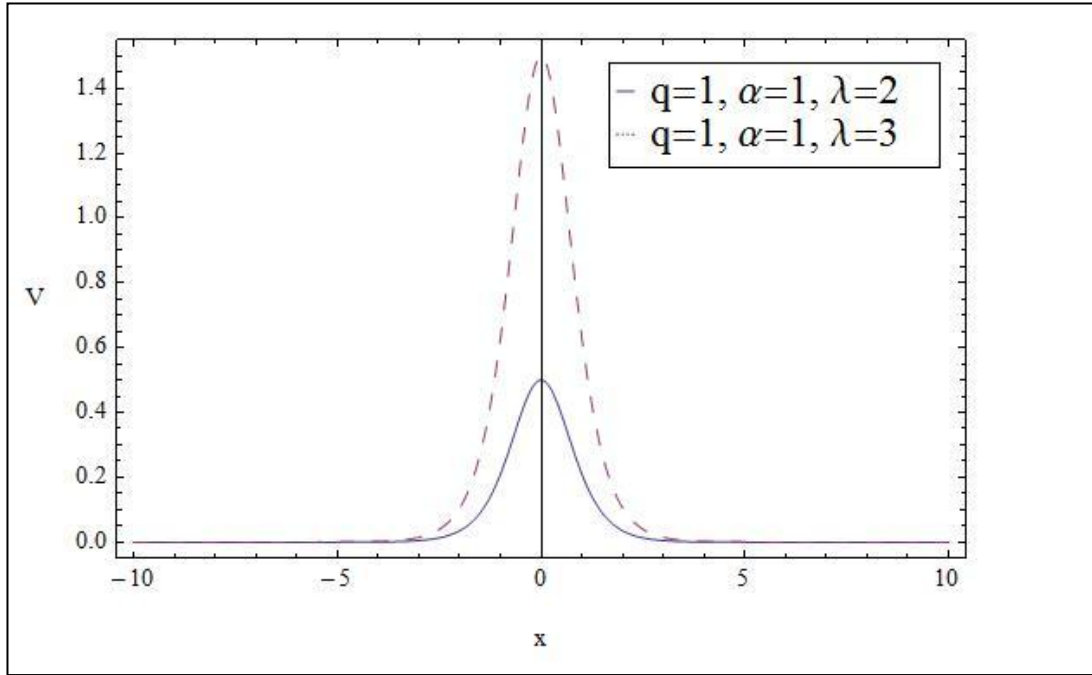
4.1. q PARAMETRELİ HİPERBOLİK PÖSCHL-TELLER POTANSİYELİ

q parametrelî hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli

$$V(x) = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cosh_q^2 \alpha x}$$

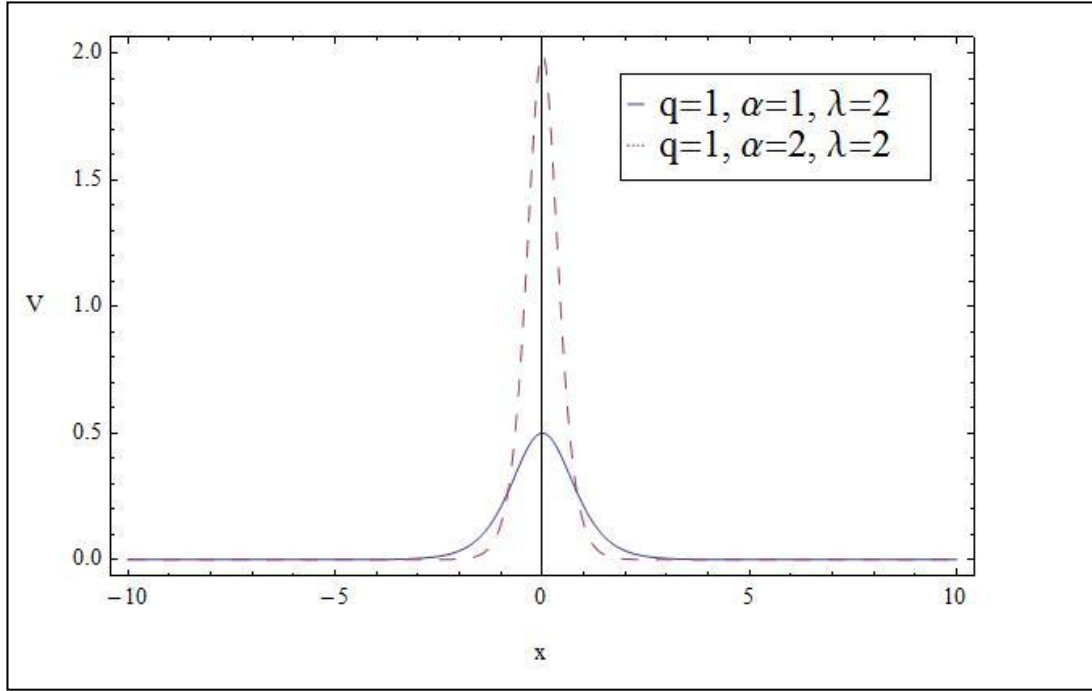
biçiminde tanımlanır [12]. Burada; m , parçacığın kütlesi; \hbar , Planck sabitinin 2π 'ye bölümü; α , λ ve q potansiyelin biçimini belirleyen parametrelerdir. Potansiyelin bağlı olduğu parametrelere göre nasıl değiştiği çizimsel olarak Şekil 4.1.1., Şekil 4.1.2. ve Şekil 4.1.3.'de verilmektedir.

Şekil 4.1.1., α ve q parametreleri sabit tutularak, λ 'ya verilen farklı iki değer için potansiyelin çizimini göstermektedir. Bu şekilden λ arttıkça potansiyel engelinin yüksekliğinin arttığı anlaşılmaktadır. Bu bağlamda λ 'nın potansiyeldeki fonksiyonu değerlendirildiğinde potansiyelin yüksekliğini değiştiren bir parametre olduğu ortaya çıkmaktadır.



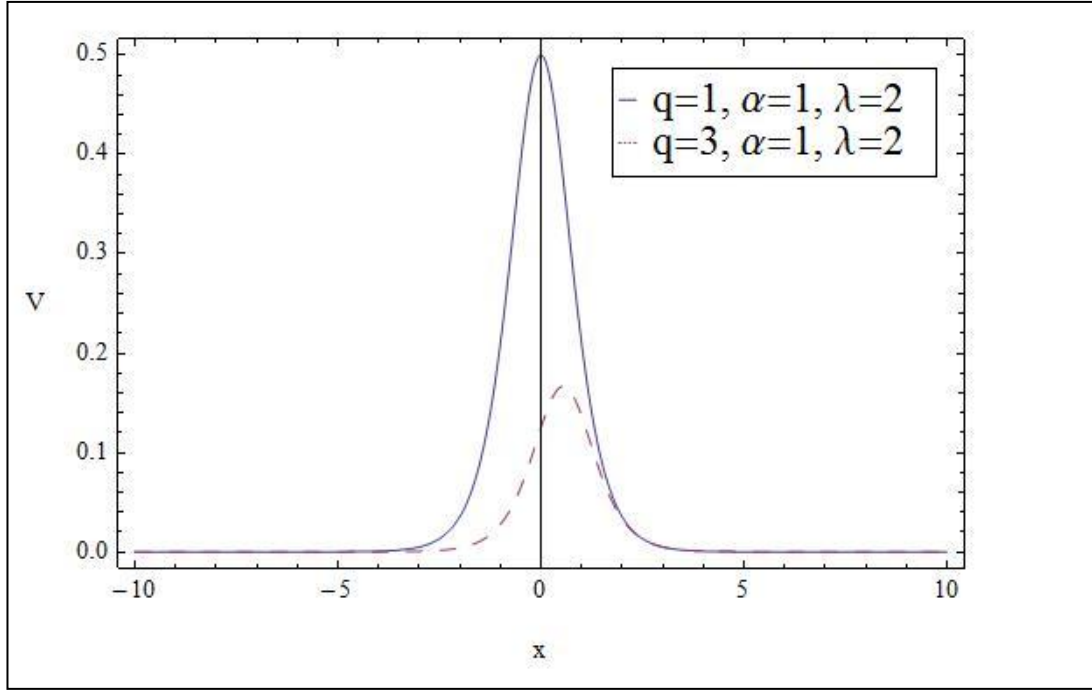
Şekil 4.1.1. λ parametresinin iki farklı değerine karşılık gelen potansiyelin konuma göre değişimi.

Potansiyelde λ ile q parametrelerinin sabit tutularak α 'nın farklı iki değeri için potansiyelin konuma göre değişimini veren çizimler Şekil 4.1.2.'de verilmektedir. Bu şekilde verilen çizimlere bakıldığında α 'nın artan değerlerine karşılık potansiyel engelinin yüksekliğinin arttığı fakat genişliğinin azaldığı görülmektedir. Buna göre α 'nın potansiyelin yüksekliği ile genişliği arasında ters orantılı bir ilişkiyi ifade eden bir parametre olduğu anlaşılmaktadır.



Şekil 4.1.2. α parametresinin iki farklı değerine karşılık gelen potansiyelin konuma göre değişimi.

Şekil 4.1.3. ise, λ ve α parametreleri sabit tutularak ve q parametresine pozitif farklı iki değer verilerek potansiyel için elde edilen çizimleri göstermektedir. Bu şekilde verilen çizimlere göre q parametresinin artan değerlerine karşılık potansiyel engelinin yüksekliği azalmakta ve aynı zamanda potansiyelin simetrisi bozulmaktadır. Bu sonuca göre potansiyelde pozitif gerçel sayı değerlerini alan q parametresinin potansiyelin biçimini belirleyen bir parametre olduğu görülmektedir.



Şekil 4.1.3. q parametresinin iki farklı değerine karşılık gelen potansiyelin konuma göre değişimi.

4.2. SCHRÖDINGER DENKLEMİ

4.2.1. q Parametrelî Hiperbolik Pöschl-Teller Potansiyeli için Schrödinger Denkleminin Çözümü

Bir boyutlu uzaysal Schrödinger denklemi

$$-\frac{\hbar^2}{2m} \frac{d^2\psi}{dx^2} + V(x)\psi(x) = E\psi(x) \quad (4.2.1.1)$$

biçiminde ifade edilir. q parametrelî hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli ise

$$V(x) = \frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cosh_q^2 \alpha x} \quad (4.2.1.2)$$

olarak tanımlanır. Bu potansiyel Denklem (4.2.1.1)'de yerine yazılır ve

$$y = x - \frac{1}{2\alpha} \ln q \quad (4.2.1.3)$$

değişken değiştirmesi yapılırsa Denklem (4.2.1.1) aşağıdaki biçime dönüşür:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \left[\frac{2mE}{\hbar^2} - \frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{q \cosh^2 \alpha y} \right] \psi = 0 \quad (4.2.1.4)$$

Burada $\frac{2mE}{\hbar^2} = \kappa^2$ olarak tanımlanır ve yeniden

$$z = \frac{1 - \tanh \alpha y}{2} \quad (4.2.1.5)$$

biçiminde bir değişken değiştirmesi yapılırsa Denklem (4.2.1.4)

$$z(1-z) \frac{d^2\psi}{dz^2} + (1-2z) \frac{d\psi}{dz} + \left[\frac{\kappa^2}{4\alpha^2 z(1-z)} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{q} \right] \psi = 0 \quad (4.2.1.6)$$

biçimini alır. Dalga fonksiyonu

$$\psi(z) = z^\mu (1-z)^\nu U(z) \quad (4.2.1.7)$$

olarak tanımlanır ve gerekli işlemler yapılırsa Denklem (4.2.1.6) aşağıdaki biçime dönüşür:

$$z(1-z) \frac{d^2U}{dz^2} + [(2\mu+1) - (2\mu+2\nu+2)z] \frac{dU}{dz} + \frac{1}{z(1-z)} [I_0 + I_1 z - I_2 z^2] U = 0 \quad (4.2.1.8)$$

Bu denklemde yer alan I_0 , I_1 ve I_2 niceliklerinin açık ifadeleri aşağıdaki biçimde verilmektedir:

$$\begin{aligned}
 I_0 &= \frac{\kappa^2}{4\alpha^2} + \mu^2 \\
 I_1 &= -\frac{\lambda(\lambda-1)}{q} - 2\mu^2 - \mu - \nu - 2\mu\nu \\
 I_2 &= -\frac{\lambda(\lambda-1)}{q} - \mu^2 - \mu - \nu - \nu^2 - 2\mu\nu
 \end{aligned} \tag{4.2.1.9}$$

Denklem (4.2.1.8), hipergeometrik diferansiyel denkleme benzetilerek doğrudan çözümü yazılabilir. Bu denklemin hipergeometrik diferansiyel denkleme benzemesi için $I_0 = 0$, $I_1 = I_2$ ve $a.b = -I_2$ olmalıdır. Bu eşitlikler kullanılarak

$$\begin{aligned}
 \mu &= i \frac{\kappa}{2\alpha} & a &= \mu + \nu + \sigma + \frac{1}{2} \\
 \nu &= i \frac{\kappa}{2\alpha} & b &= \mu + \nu - \sigma + \frac{1}{2} \\
 \sigma &= \sqrt{\frac{1}{4} - \frac{\lambda(\lambda-1)}{q}} & c &= 1 + 2\mu
 \end{aligned} \tag{4.2.1.10}$$

bağıntıları elde edilir. Böylece Denklem (4.2.1.8)' in çözümü

$$U(z) = c_1 {}_2F_1(a, b, c; z) + c_2 z^{1-c} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c, 2-c; z) \tag{4.2.1.11}$$

olur. Genel çözüm ise $a+1-c = A$, $b+1-c = B$, $2-c = C$ tanımları yapılarak ve Denklem (4.2.1.7) dikkate alınarak

$$\psi = c_1 z^\mu (1-z)^\nu {}_2F_1(a, b, c; z) + c_2 z^{-\mu} (1-z)^\nu {}_2F_1(A, B, C; z) \tag{4.2.1.12}$$

biçiminde elde edilir.

4.2.2. Bağlı Durumlar için Enerji Bağıntısının Elde Edilmesi

Bağlı durumları tartışabilmek için potansiyelin kuyu biçiminde olması gerekir. Bu nedenle q parametrelî hiperbolik potansiyel

$$V(x) = -\frac{\hbar^2 \alpha^2}{2m} \frac{\lambda(\lambda-1)}{\cosh_q^2 \alpha x} \quad (4.2.2.1)$$

biçiminde tanımlanır. Enerji bağıntısını elde etmek için hiperbolik fonksiyonlar içerisindeki a ve b niceliklerinden biri $-n$ tamsayısına eşitlenir.

$$a = -n \quad (4.2.2.2)$$

Denklem (4.2.2.2) ve Denklem (4.2.1.10) kullanılarak enerji bağıntısı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_n = -\frac{\alpha^2}{2m} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{q}} \right]^2 \quad (4.2.2.3)$$

4.2.3. Yansıma ve Geçme Olasılık Yoğunluklarının Hesaplanması

Schrödinger denklemi için olasılık akım yoğunluğu

$$\vec{J} = \frac{i\hbar}{2m} (\psi \vec{\nabla} \psi^* - \psi^* \vec{\nabla} \psi) \quad (4.2.3.1)$$

biçimindedir. Geçme (T) ve yansıma (R) olasılık yoğunlukları sırası ile aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$T = \left| \frac{J_{geçen}}{J_{gelen}} \right| \quad R = \left| \frac{J_{yansıyan}}{J_{gelen}} \right| \quad (4.2.3.2)$$

Yansıma ve geçme olasılık katsayılarını bulabilmek için akım yoğunluğunun asimptotik ifadesine gereksinim vardır. Bu nedenle dalga fonksiyonunun x 'in artı sonsuz ve eksi sonsuzdaki değerleri için davranışının ne olduğunun bilinmesi gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki çözümlenmektedir:

$x \rightarrow -\infty$ iken $z=1$ dir. Bu nedenle hipergeometrik fonksiyonların $z=1$ deki ifadeleri

$${}_2F_1(a, b, c, 1) = \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} (1-z)^{c-a-b} \quad (4.2.3.3)$$

$${}_2F_1(A, B, C, 1) = \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)} + \frac{\Gamma(C)\Gamma(-C+A+B)}{\Gamma(A)\Gamma(B)} (1-z)^{C-A-B}$$

biçiminde verilir. Bu eşitlikler kullanılarak, $\mu = i \frac{\kappa}{2\alpha}$ ve $\nu = i \frac{\kappa}{2\alpha}$ ifadeleri ile birlikte

Denklem (4.2.1.3) ve Denklem (4.2.1.5), Denklem (4.2.1.12)'de yerine yazılırsa asimptotik çözüm

$$\psi \rightarrow A_1 e^{i\kappa x} + A_2 e^{-i\kappa x} \quad (4.2.3.4)$$

biçiminde elde edilir. Burada

$$A_1 = c_1 q^{-i\frac{\kappa}{2\alpha}} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + c_2 q^{-i\frac{\kappa}{2\alpha}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)}$$

$$A_2 = c_1 q^{i\frac{\kappa}{2\alpha}} \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} + c_2 q^{i\frac{\kappa}{2\alpha}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(-C+A+B)}{\Gamma(A)\Gamma(B)}$$

olarak tanımlanır. Böylece yansıma olasılık yoğunluğu

$$R = \frac{J_{yansiyen}}{J_{gelen}} = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} \quad (4.2.3.5)$$

biçiminde bulunur.

$x \rightarrow \infty$ iken $z=0$ olur. Bu durumda hipergeometrik fonksiyonların $z=0$ deki ifadeleri ise

$${}_2F_1(a, b, c, 0) = 1 \quad {}_2F_1(A, B, C, 0) = 1 \quad (4.2.3.6)$$

biçiminde olur.

Bu koşullar kullanılarak, $\mu = i \frac{\kappa}{2\alpha}$ ve $\nu = i \frac{\kappa}{2\alpha}$ ifadelerinin yanı sıra Denklem (4.2.1.3) ve Denklem (4.2.1.5)'in, Denklem (4.2.1.12)'de yerine konulması durumunda dalga fonksiyonunun asimptotik ifadesi aşağıdaki biçimde olur:

$$\psi \rightarrow D_1 q^{i \frac{\kappa}{2\alpha}} e^{-i\kappa x} + q^{-i \frac{\kappa}{2\alpha}} D_2 e^{i\kappa x} \quad (4.2.3.7)$$

Potansiyelin bu bölgesinde yansıyan dalga bulunmadığından $D_1 = 0$ dır. Buna göre geçme olasılık yoğunluğu

$$T = \frac{J_{geçen}}{J_{gelen}} = \frac{\left| q^{-i \frac{\kappa}{2\alpha}} D_2 \right|^2}{|A_1|^2} \quad (4.2.3.8)$$

biçimini alır.

Denklem (4.2.3.5) ve Denklem (4.2.3.8)'de yer alan A_1, A_2 ve D_2 katsayılarını bulabilmek için dalga fonksiyonunun ve birinci türevinin süreklilik koşullarını kullanmak gerekir. Dalga fonksiyonunun süreklilik koşulu, $x=0$ ($z = \frac{1}{2}$) da, $x < 0$ için dalga fonksiyonu ψ_{sol} ve $x > 0$ için dalga fonksiyonu $\psi_{sağ}$ olmak üzere

$$\psi_{sol} \Big|_{x=0} = \psi_{sağ} \Big|_{x=0} \quad (4.2.3.9)$$

eşitliği yazılır. Dalga fonksiyonunun türevinin süreklilik koşulu ise

$$\left. \frac{d\psi_{sol}}{dx} \right|_{x=0} = \left. \frac{d\psi_{sağ}}{dx} \right|_{x=0} \quad (4.2.3.10)$$

olur. $x < 0$ ve $x > 0$ bölgelerindeki çözümler sırası ile

$$\psi_{sol} = c_1 z^\mu (1-z)^\nu {}_2F_1(a, b, c; z) + c_2 z^{-\mu} (1-z)^\nu {}_2F_1(A, B, C; z) \quad (4.2.3.11a)$$

$$\psi_{sağ} = D_2 z^{-\mu} (1-z)^\nu {}_2F_1(A, B, C; z) \quad (4.2.3.11b)$$

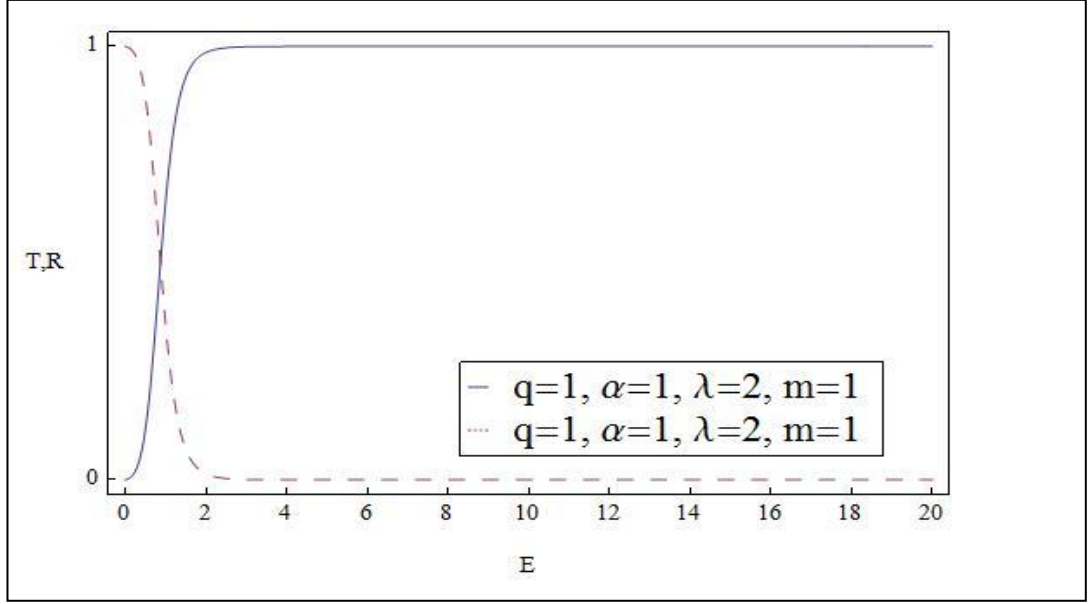
biçimindedir. Denklem (4.2.3.9) ve Denklem (4.2.3.10) kullanılarak $c_1 = 0$ ve $c_2 = D_2$ elde edilir. Bu eşitlikler kullanarak Denklem (4.2.3.5) ve Denklem (4.2.3.8) yeniden düzenlenirse aşağıdaki biçimleri alırlar:

$$R = \frac{|A_2|^2}{|A_1|^2} = \frac{\left| c_2 q^{\frac{i\kappa}{2\alpha}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(-C+A+B)}{\Gamma(A)\Gamma(B)} \right|^2}{\left| c_2 q^{-\frac{i\kappa}{2\alpha}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)} \right|^2} \quad (4.2.3.12)$$

$$T = \frac{\left| q^{-\frac{i\kappa}{2\alpha}} D_2 \right|^2}{|A_1|^2} = \frac{\left| q^{-\frac{i\kappa}{2\alpha}} c_2 \right|^2}{\left| c_2 q^{-\frac{i\kappa}{2\alpha}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)} \right|^2} \quad (4.2.3.13)$$

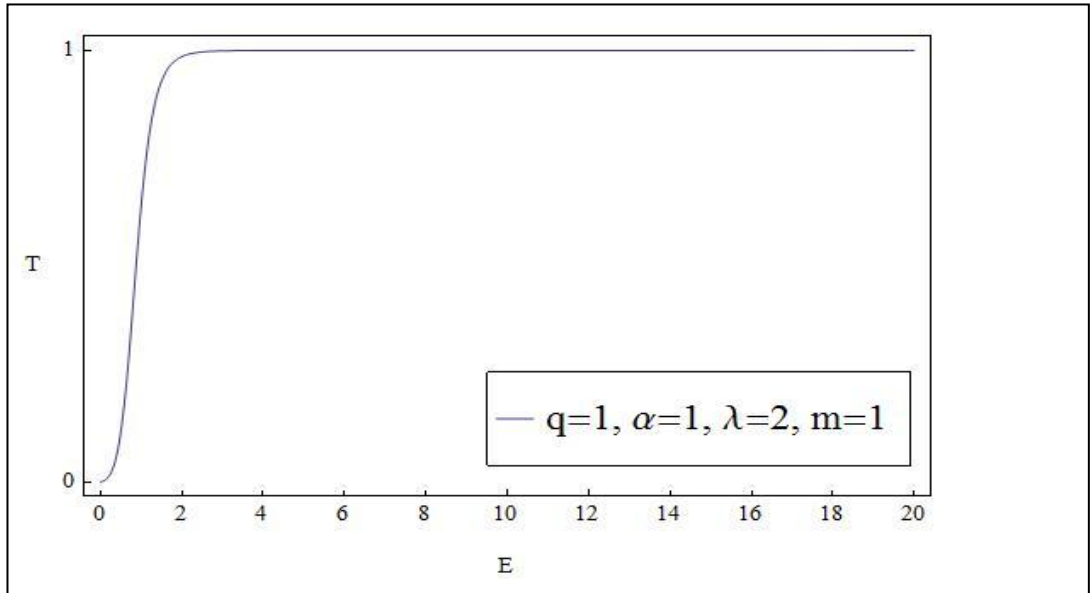
4.2.4. Elde Edilen Sonuçların Çizimsel Değerlendirilmesi

Olasılık korunumu yasasına göre yansıma olasılık yoğunluğu ile geçme olasılık yoğunluğunun toplamı gelme olasılık yoğunluğuna eşittir. Bu ilişki Şekil 4.2.4.1.'de görülmektedir.



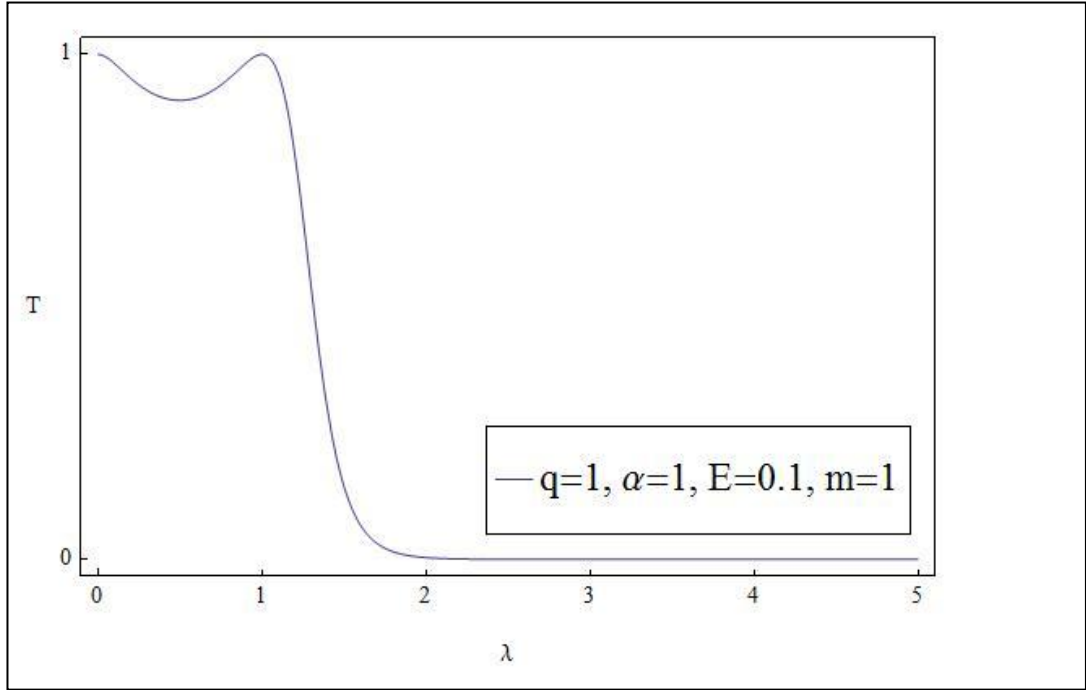
Şekil 4.2.4.1. Schrödinger parçacığı için yansıma (R) ve geçme (T) olasılık yoğunluklarının enerjiye (E) göre değişimi.

Şekil 4.2.4.2., geçme olasılık katsayısının enerjiye göre değişimini göstermektedir. Şekilde görüldüğü gibi enerjinin artması durumunda geçme olasılık yoğunluğu artmakta ve belli bir değerden sonra 1'e asimptotik olarak yaklaşmaktadır.



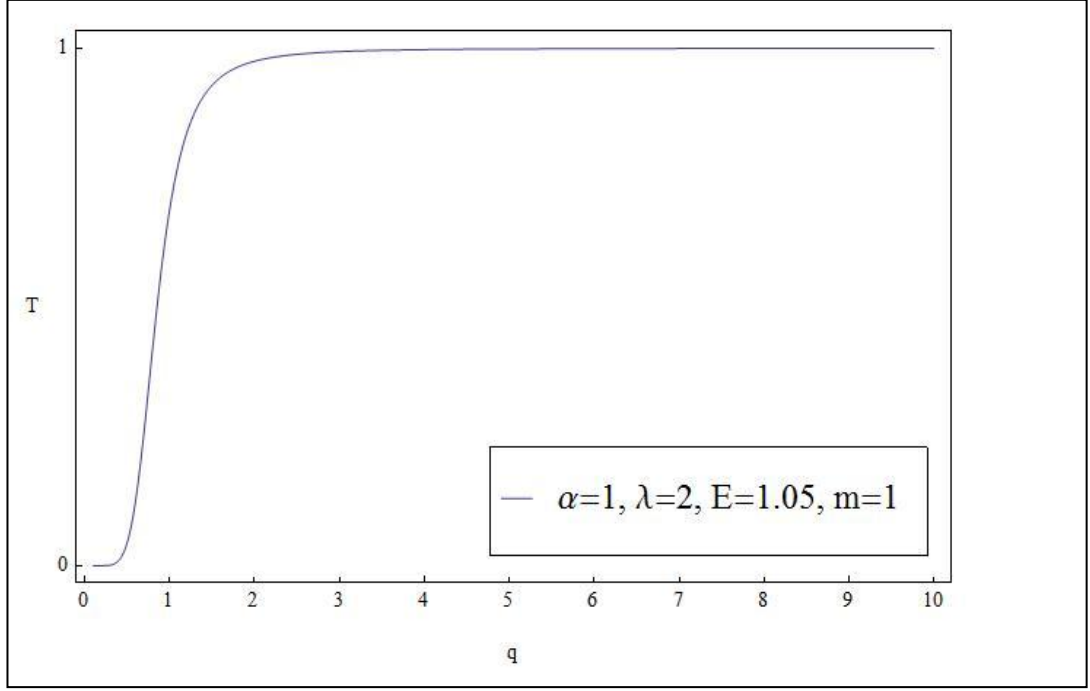
Şekil 4.2.4.2. Schrödinger parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun enerjiye göre değişimi.

Şekil 4.2.4.3., geçme olasılık katsayısının λ 'ya göre değişimini içermektedir. Şekilden λ arttıkça geçme olasılık yoğunluğunun azaldığı ancak $\lambda = 0$ ve $\lambda = 1$ değerlerinde geçme olasılık yoğunluğunun maksimum olduğu görülmektedir. λ 'nın bu değerleri için potansiyel sıfırdır. Ayrıca λ , 0 ile 1 arasında değer alması durumunda potansiyel kuyu biçimini almaktadır. Bu nedenle geçme olasılık katsayısının λ 'ya göre değişimi, λ 'nın birden büyük değerleri için değerlendirilmelidir.

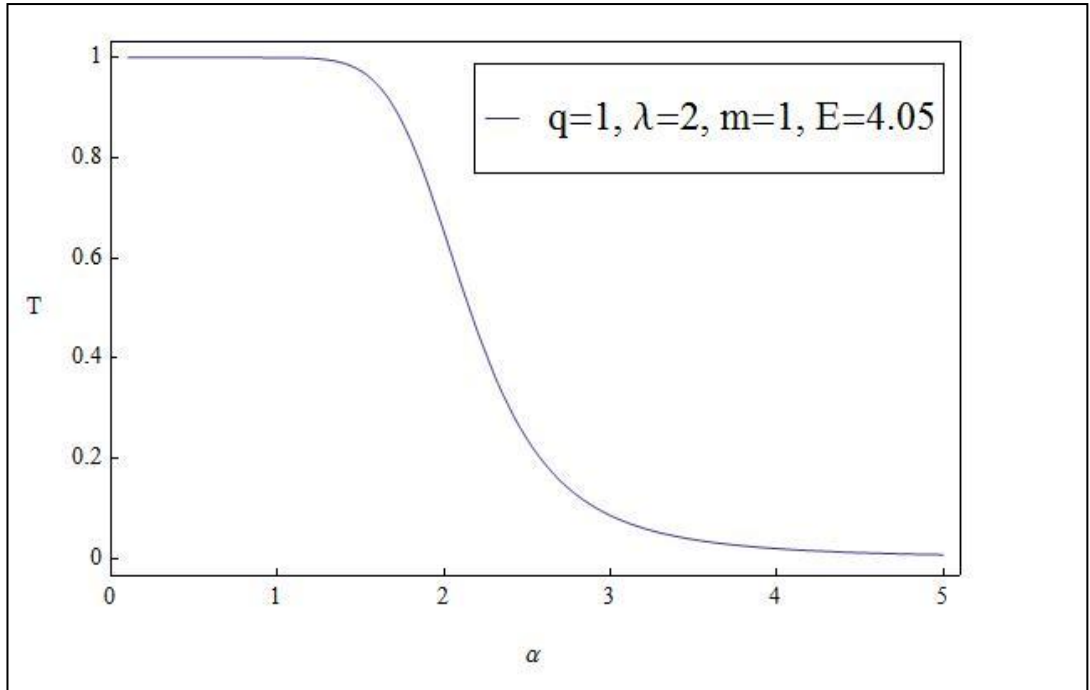


Şekil 4.2.4.3. Schrödinger parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun λ 'ya göre değişimi.

Geçme olasılık yoğunluğunun q parametresine göre değişimi Şekil 4.2.4.4.'de verilmektedir. Bu şekle göre q parametresi arttığında geçme olasılık yoğunluğu da artmaktadır. Şekil 4.2.4.5. ise geçme olasılık yoğunluğunun α parametresine göre değişimini göstermektedir. Şekilden α parametresinin artması durumunda geçme olasılık yoğunluğunun azaldığı görülmektedir.



Şekil 4.2.4.4. Schrödinger parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun q parametresine göre değişimi.



Şekil 4.2.4.5. Schrödinger parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun α parametresine göre değişimi.

4.3. KLEIN-GORDON DENKLEMİ

4.3.1. q Parametrel Hiperbolik Pöschl-Teller Potansiyeli için Klein-Gordon

Denkleminin Çözümü

Zamandan bağımsız, bir boyutlu Klein-Gordon denklemi, V_s skaler ve V_v vektörel potansiyel olmak üzere, $\hbar = c = 1$ olması durumunda

$$\frac{d^2\psi(x)}{dx^2} + \left\{ [E - V_v(x)]^2 - [m + V_s]^2 \right\} \psi(x) = 0 \quad (4.3.1.1)$$

biçiminde verilir. Burada m parçacığın kütlesi ve E parçacığın enerjisidir. Denklem (4.2.1.2) bu denklemde yerine yazılır, Denklem (4.2.1.3)'deki değişken değiştirmesi yapılır ve $V_s = V_v$ eşitliği kullanılırsa Denklem (4.3.1.1) aşağıdaki denkleme indirgenir:

$$\frac{d^2\psi}{dy^2} + \left[(E^2 - m^2) - 2(E + m) \left(\frac{\alpha^2}{2m} \frac{\lambda(\lambda-1)}{q \cosh^2 \alpha y} \right) \right] \psi = 0 \quad (4.3.1.2)$$

Denklem (4.2.1.5)'de verilen değişken tanımı kullanılırsa Denklem (4.3.1.2)

$$z(1-z) \frac{d^2\psi}{dz^2} + (1-2z) \frac{d\psi}{dz} + \frac{1}{z(1-z)} \left[\left(\frac{E^2 - m^2}{4\alpha^2} \right) - 2 \frac{(E+m)}{4\alpha^2} \frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{2mq} z(1-z) \right] \psi = 0 \quad (4.3.1.3)$$

biçimine dönüşür. Burada $\frac{E^2 - m^2}{4\alpha^2} = \tilde{\kappa}^2$ ve $\frac{\lambda(\lambda-1)(E+m)}{4mq} = \tilde{B}$ olarak

tanımlanırsa Denklem (4.3.1.3) aşağıdaki biçimi alır:

$$z(1-z) \frac{d^2\psi}{dz^2} + (1-2z) \frac{d\psi}{dz} + \frac{1}{z(1-z)} \left[\tilde{\kappa}^2 - \tilde{B} z(1-z) \right] \psi = 0 \quad (4.3.1.4)$$

Dalga fonksiyonu

$$\psi(z) = z^{\tilde{\mu}}(1-z)^{\tilde{\nu}} \varphi(z) \quad (4.3.1.5)$$

biçiminde tanımlanır ve Denklem (4.3.1.4)'de yerine yazılırsa

$$z(1-z) \frac{d^2 \varphi}{dz^2} + [(2\tilde{\mu}+1) - (2\tilde{\mu} + 2\tilde{\nu} + 2)z] \frac{d\varphi}{dz} + \frac{1}{z(1-z)} [I_0 + I_1 z - I_2 z^2] \varphi = 0 \quad (4.3.1.6)$$

denklemini elde edilir. Burada I_0 , I_1 ve I_2 aşağıdaki biçimdedir:

$$\begin{aligned} I_0 &= \tilde{\kappa}^2 + \tilde{\mu}^2 \\ I_1 &= -2\tilde{\mu}^2 - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} - 2\tilde{\mu}\tilde{\nu} - \tilde{B} \\ I_2 &= -\tilde{\mu}^2 - \tilde{\mu} - \tilde{\nu} - \tilde{\nu}^2 - 2\tilde{\mu}\tilde{\nu} - \tilde{B} \end{aligned} \quad (4.3.1.7)$$

Denklem (4.3.1.6), hipergeometrik diferansiyel denkleme benzetilerek doğrudan çözümü yazılabilir. Bu denklemin hipergeometrik diferansiyel denkleme benzetmesi için $I_0 = 0$, $I_1 = I_2$ ve $a.b = -I_2$ olmalıdır. Bu koşullar kullanılarak aşağıdaki eşitlikler elde edilir:

$$\begin{aligned} \tilde{\mu} &= i\tilde{\kappa} & a &= \tilde{\mu} + \tilde{\nu} + \tilde{\sigma} + \frac{1}{2} \\ \tilde{\nu} &= i\tilde{\kappa} & b &= \tilde{\mu} + \tilde{\nu} - \tilde{\sigma} + \frac{1}{2} \\ \tilde{\sigma} &= \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{B}} & c &= 1 + 2\tilde{\mu} \end{aligned} \quad (4.3.1.8)$$

Buna göre Denklem (4.3.1.6)'nın çözümü

$$\varphi(z) = A_1 {}_2F_1(a, b, c; z) + A_2 z^{1-c} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c, 2-c; z) \quad (4.3.1.9)$$

olur. Genel çözüm ise, $a+1-c = A$, $b+1-c = B$, $2-c = C$ tanımları yapılarak ve Denklem (4.3.1.5) dikkate alınarak

$$\psi = A_1 z^{\tilde{\mu}} (1-z)^{\tilde{\nu}} {}_2F_1(a, b, c; z) + A_2 z^{-\tilde{\mu}} (1-z)^{\tilde{\nu}} {}_2F_1(A, B, C; z) \quad (4.3.1.10)$$

biçiminde bulunur.

4.3.2. Bağlı Durumlar için Enerji Bağıntısının Elde Edilmesi

Denklem(4.2.2.1), Denklem(4.2.2.2) ve Denklem(4.3.1.8) kullanılarak enerji bağıntısı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{1,2} = \frac{-\alpha^2 \lambda (\lambda - 1)}{8mq} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\alpha^2 \lambda (\lambda - 1)}{4mq} \right]^2 - 4 \left[\frac{\alpha^2}{4} - m^2 + \frac{\alpha^2 \lambda (\lambda - 1)}{4q} - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \alpha^2 \right]} \quad (4.3.2.1)$$

4.3.3. Yansıma ve Geçme Olasılık Yoğunluklarının Hesaplanması

Klein-Gordon denklemi için olasılık akım yoğunluğu

$$J^\beta = \frac{1}{2} (\psi^* \partial^\beta \psi - \psi \partial^\beta \psi^*) \quad (4.3.3.1)$$

biçimindedir.

Yansıma ve geçme olasılık katsayılarını bulabilmek için akım yoğunluğunun asimptotik ifadesine gereksinim vardır. Bu nedenle dalga fonksiyonunun x 'in artı sonsuz ve eksi sonsuzdaki değerleri için davranışının ne olduğunun bilinmesi gerekmektedir. Bunun için aşağıdaki çözümlenmektedir: $x \rightarrow -\infty$ iken $z=1$ dir. Bu nedenle hipergeometrik fonksiyonların $z=1$ deki ifadeleri Denklem (4.2.3.3)'de verilmiştir. Denklem (4.2.3.3)'de verilen bağıntılar kullanılarak $\mu = i\tilde{\kappa}$ ile $\nu = i\tilde{\kappa}$ ifadeleri ile birlikte Denklem (4.2.1.3) ve Denklem (4.2.1.5), Denklem (4.3.1.10)'da yerine yazılırsa aşağıdaki çözüm elde edilir:

$$\psi \rightarrow B_1 e^{i\tilde{\kappa}x} + B_2 e^{-i\tilde{\kappa}x} \quad (4.3.3.2)$$

Buradaki katsayılar aşağıdaki biçimde verilmektedir:

$$B_1 = A_1 q^{-i\tilde{\kappa}} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + A_2 q^{-i\tilde{\kappa}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)}$$

$$B_2 = A_1 q^{i\tilde{\kappa}} \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} + A_2 q^{i\tilde{\kappa}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(-C+A+B)}{\Gamma(A)\Gamma(B)}$$

Buna göre yansıma olasılık yoğunluğu

$$R = \frac{J_{yansiyen}}{J_{gelen}} = \frac{|B_2|^2}{|B_1|^2} \quad (4.3.3.3)$$

biçiminde bulunur.

$x \rightarrow \infty$ iken $z=0$ olur. Bu durumda hipergeometrik fonksiyonların $z=0$ daki ifadeleri ise Denklem (4.2.3.6)'da verilmektedir.

Denklem (4.2.3.6)'da verilen, $\mu = i\tilde{\kappa}$ ve $\nu = i\tilde{\kappa}$ ifadelerinin yanı sıra ve Denklem (4.2.1.3) ve Denklem (4.2.1.5), Denklem (4.3.1.10)'da yerine yazılması durumunda dalga fonksiyonunun asimptotik ifadesi aşağıdaki biçimde olur:

$$\psi \rightarrow D_1 q^{i\tilde{\kappa}} e^{-i\tilde{\kappa}x} + q^{-i\tilde{\kappa}} D_2 e^{i\tilde{\kappa}x} \quad (4.3.3.4)$$

Burada $D_1 = 0$ dır. Çünkü potansiyelin bu bölgesinde yansıyan dalga bulunmamaktadır. Buna göre geçme olasılık yoğunluğu

$$T = \frac{J_{geçen}}{J_{gelen}} = \frac{|q^{-i\tilde{\kappa}} D_2|^2}{|B_1|^2} \quad (4.3.3.5)$$

biçimini alır.

Denklem (4.3.3.3) ve Denklem (4.3.3.5)'de yer alan B_1, B_2 ve D_2 katsayılarını bulabilmek için dalga fonksiyonunun ve türevinin süreklilik koşullarını kullanmak gerekir. $x < 0$ ve $x > 0$ bölgelerindeki çözümler

$$\psi_{sol} = A_1 z^{\tilde{\mu}} (1-z)^{\tilde{\nu}} {}_2F_1(a, b, c; z) + A_2 z^{-\tilde{\mu}} (1-z)^{\tilde{\nu}} {}_2F_1(A, B, C; z) \quad (4.3.3.6a)$$

$$\psi_{sağ} = D_2 z^{-\tilde{\mu}} (1-z)^{\tilde{\nu}} {}_2F_1(A, B, C; z) \quad (4.3.3.6b)$$

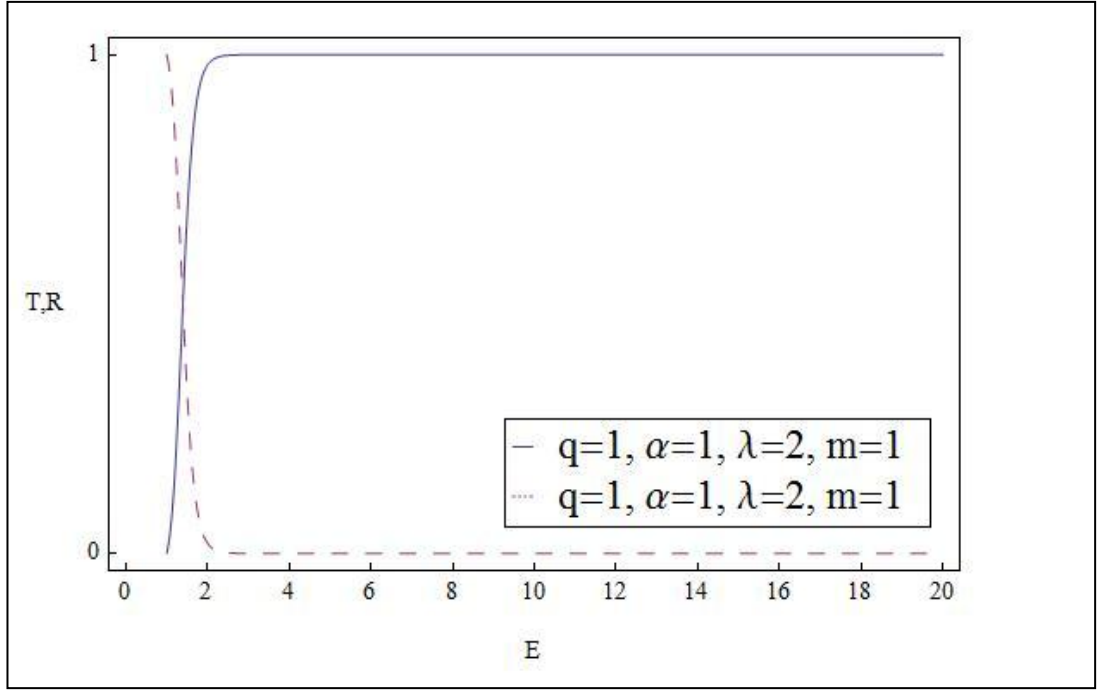
biçimindedir. Denklem (4.2.3.9) ve Denklem (4.2.3.10) koşulları kullanılarak $A_1 = 0$ ve $A_2 = D_2$ eşitlikleri elde edilir. Bu koşullar altında Denklem (4.3.3.3) ve Denklem (4.3.3.5) yeniden düzenlenirse sırası ile aşağıdaki biçimleri alırlar:

$$R = \frac{|B_2|^2}{|B_1|^2} = \frac{\left| A_2 q^{i\tilde{\kappa}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(-C+A+B)}{\Gamma(A)\Gamma(B)} \right|^2}{\left| A_2 q^{-i\tilde{\kappa}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)} \right|^2} \quad (4.3.3.7)$$

$$T = \frac{|q^{-i\tilde{\kappa}} D_2|^2}{|B_1|^2} = \frac{|q^{-i\tilde{\kappa}} A_2|^2}{\left| A_2 q^{-i\tilde{\kappa}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)} \right|^2} \quad (4.3.3.8)$$

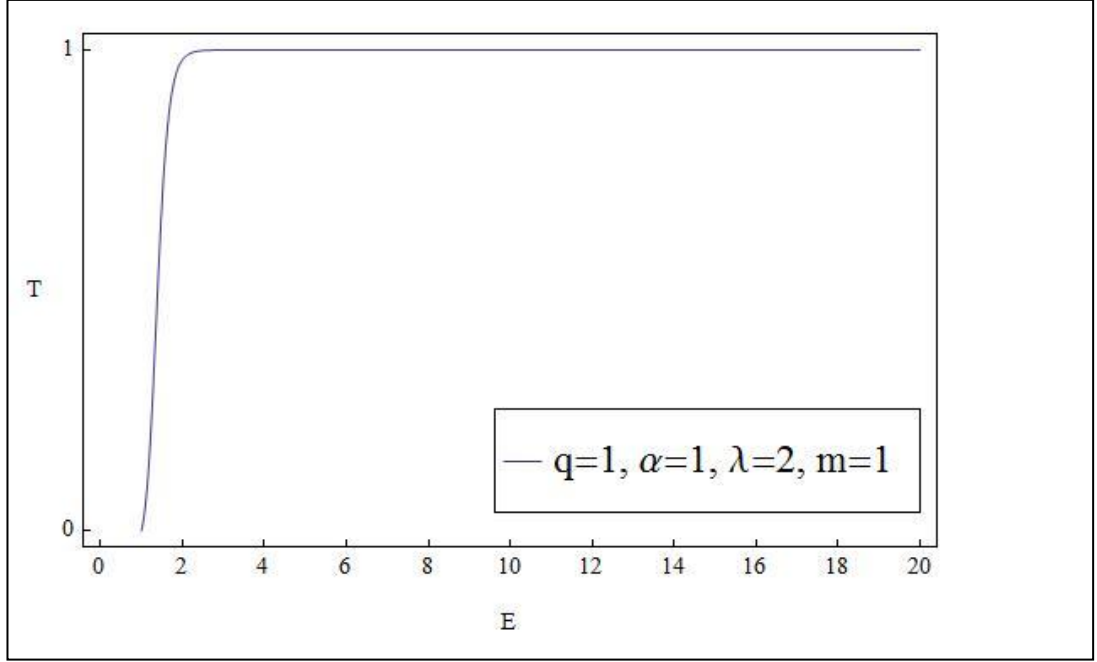
4.3.4. Elde Edilen Sonuçların Çizimsel Değerlendirilmesi

Olasılık korunumu yasasına göre yansıma olasılık yoğunluğu ile geçme olasılık yoğunluğunun toplamı gelme olasılık yoğunluğuna eşittir. Bu ilişki Şekil 4.3.4.1.'de görülmektedir.

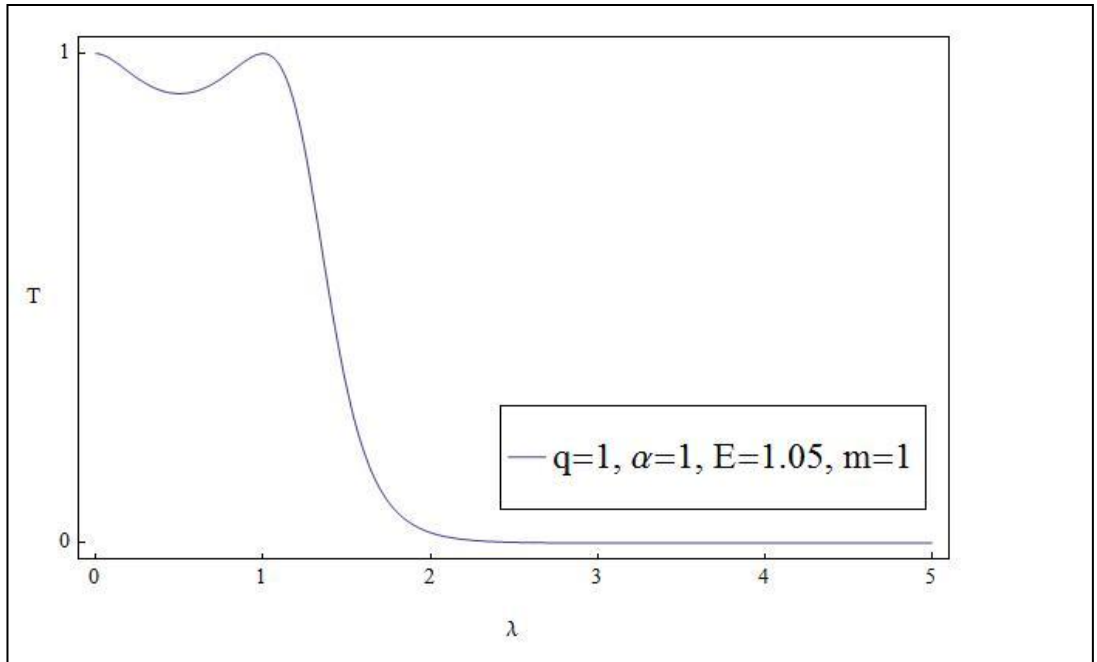


Şekil 4.3.4.1. Klein-Gordon parçacığı için yansıma (R) ve geçme(T) olasılık yoğunluklarının enerjiye (E) göre değişimi.

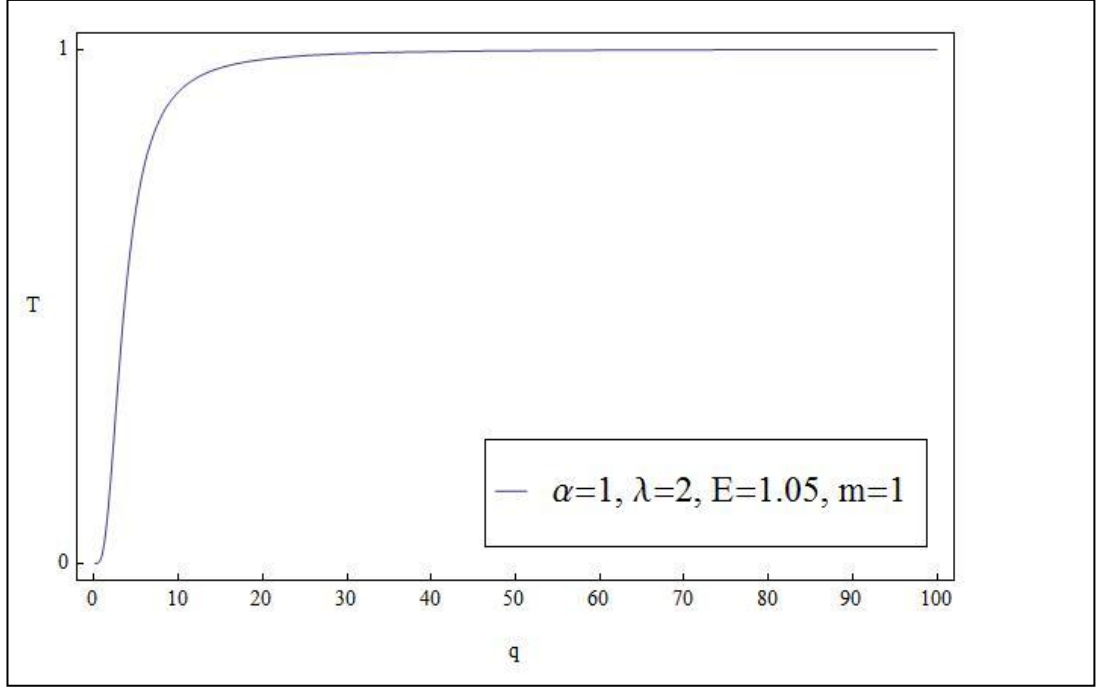
Şekil 4.3.4.2., geçme olasılık katsayısının enerjiye göre değişimini göstermektedir. Şekilde görüldüğü gibi enerjinin artması durumunda geçme olasılık yoğunluğu artmaktadır. Geçme olasılık yoğunluğunun potansiyelin biçimini belirleyen λ, q ve α parametrelerine göre değişimi sırası ile Şekil 4.3.4.3., Şekil 4.3.4.4. ve Şekil 4.3.4.5.'de verilmektedir.



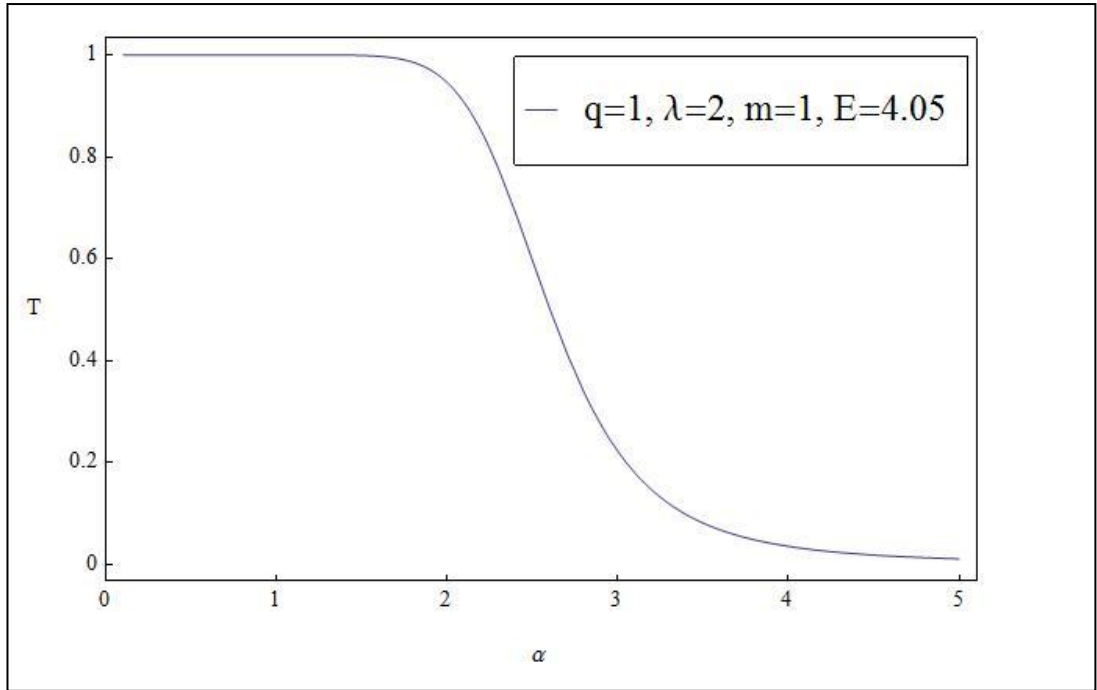
Şekil 4.3.4.2. Klein-Gordon parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun enerjiye göre değişimi.



Şekil 4.3.4.3. Klein-Gordon parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun λ 'ya göre değişimi.



Şekil 4.3.4.4. Klein-Gordon parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun q parametresine göre değişimi.



Şekil 4.3.4.5. Klein-Gordon parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun α parametresine göre değişimi.

4.4. DIRAC DENKLEMİ

4.4.1. q Parametrelili Hiperbolik Pöschl-Teller Potansiyeli için Dirac Denkleminin Çözümü

Dirac denklemi, A_μ dörtlü vektör potansiyel, e parçacığın yükü, m parçacığın kütlesi, V_s skaler potansiyel ve γ^μ Dirac matrisleri olmak üzere ($\hbar = c = 1$)

$$\left[\gamma^\mu \left(i \frac{\partial}{\partial x^\mu} - e A_\mu \right) - (m + V_s) \right] \psi = 0 \quad (4.4.1.1)$$

biçiminde verilmektedir. Bir boyutta çalışıldığı için gamma matrisleri $\gamma^1 = i\sigma_1$ ve $\gamma^0 = \sigma_3$ olarak seçilebilir. Burada σ_1 ve σ_3 pauli matrisleri olup aşağıdaki biçimde ifade edilir:

$$\sigma_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ 1 & 0 \end{pmatrix} \quad \sigma_3 = \begin{pmatrix} 1 & 0 \\ 0 & -1 \end{pmatrix} \quad (4.4.1.2)$$

Dalga fonksiyonu ise iki bileşenlidir:

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} U_1(x) \\ U_2(x) \end{pmatrix} \quad (4.4.1.3)$$

$\psi(x,t) = e^{-iEt} \psi(x)$ ve $A_1 = 0$ alınarak Denklem (4.4.1.1) açılır ve γ^1 ile γ^0 ifadeleri yerine yazılırsa aşağıdaki biçimde çiftlenimli denklemler bulunur:

$$\frac{dU_1(x)}{dx} + (E - V_v + m + V_s)U_2 = 0 \quad (4.4.1.4)$$

$$\frac{dU_2(x)}{dx} + (-E + V_v + m + V_s)U_1 = 0 \quad (4.4.1.5)$$

Bu denklemler, Skaler potansiyel V_s ile vektörel potansiyel V_v birbirine eşit alındığında aşağıdaki denklemlere indirgenirler.

$$\frac{dU_1(x)}{dx} = (-E - m)U_2(x) \quad (4.4.1.6)$$

$$\frac{dU_2(x)}{dx} = (E - 2V_v - m)U_1(x) \quad (4.4.1.7)$$

Denklem (4.4.1.6)'dan $U_2(x)$ çekilir Denklem (4.4.1.7)'de yerine yazılırsa $U_1(x)$ 'in sağladığı denklem aşağıdaki biçimde bulunur:

$$\frac{d^2U_1(x)}{dx^2} + [E^2 - m^2 - 2(E + m)V_v]U_1(x) = 0 \quad (4.4.1.8)$$

Pöschl-Teller potansiyelini veren Denklem (4.2.1.2), Denklem (4.4.1.8)'de yerine yazılır ve Denklem (4.2.1.3)'de verilen değişken değiştirme kullanılırsa Denklem (4.4.1.8) aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\frac{d^2U_1}{dy^2} + \left[(E^2 - m^2) - \frac{2\alpha^2 \lambda(\lambda - 1)(E + m)}{2mq} \frac{1}{\cosh^2 \alpha y} \right] U_1 = 0 \quad (4.4.1.9)$$

Denklem (4.2.1.5)'de yer alan değişken değiştirmesi kullanıldıktan ve gerekli işlemler yapıldıktan sonra Denklem (4.4.1.9)

$$z(1-z) \frac{d^2U_1}{dz^2} + (1-2z) \frac{dU_1}{dz} + \frac{1}{z(1-z)} [\varepsilon^2 - Dz(1-z)] U_1 = 0 \quad (4.4.1.10)$$

biçimini alır. Burada $\varepsilon^2 = \frac{E^2 - m^2}{4\alpha^2}$ ve $D = \frac{\lambda(\lambda - 1)(E + m)}{mq}$ dur. Dalga fonksiyonu

$$U_1 = z^\gamma (1-z)^\eta \omega(z) \quad (4.4.1.11)$$

biçiminde tanımlanır ve bu tanımlama Denklem (4.4.1.10)'da yerine yazılıp gerekli işlemler yapılırsa

$$z(1-z)\frac{d^2\omega}{dz^2} + [(2\gamma+1)-(2\gamma+2\eta+2)z]\frac{d\omega}{dz} + \frac{1}{z(1-z)}[I_0 + I_1z - I_2z^2]\omega = 0 \quad (4.4.1.12)$$

elde edilir. Burada I_0 , I_1 ve I_2 aşağıdaki biçimdedir.

$$\begin{aligned} I_0 &= \varepsilon^2 + \gamma^2 \\ I_1 &= -2\gamma^2 - \gamma - \eta - 2\gamma\eta - D \\ I_2 &= -\gamma^2 - \gamma - \eta - \eta^2 - 2\gamma\eta - D \end{aligned} \quad (4.4.1.13)$$

Denklem (4.4.1.12) hipergeometrik denkleme benzetilerek çözümü doğrudan yazılabilir. Bu denklemin hipergeometrik denkleme benzemesi için $I_0 = 0$, $I_1 = I_2$ ve $a.b = -I_2$ olmalıdır. Bu koşullar kullanıldığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned} \gamma &= i\varepsilon & a &= \gamma + \eta + \delta + \frac{1}{2} \\ \eta &= i\varepsilon & b &= \gamma + \eta - \delta + \frac{1}{2} \\ \delta &= \sqrt{\frac{1}{4} - D} & c &= 1 + 2\gamma \end{aligned} \quad (4.4.1.14)$$

Bu durumda Denklem (4.4.1.12)'nin çözümü

$$\omega(z) = G_1 {}_2F_1(a, b, c; z) + G_2 z^{1-c} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c, 2-c; z) \quad (4.4.1.15)$$

olur. Genel çözüm ise; $a+1-c = A$, $b+1-c = B$, $2-c = C$ tanımları yapılarak aşağıdaki biçimde yazılır:

$$U_1(z) = G_1 z^\gamma (1-z)^\eta {}_2F_1(a, b, c; z) + G_2 z^{-\gamma} (1-z)^\eta {}_2F_1(A, B, C; z) \quad (4.4.1.16)$$

4.4.2. Bağlı Durumlar için Enerji Bağıntısının Elde Edilmesi

Denklem (4.2.2.1), Denklem (4.2.2.2) ve Denklem (4.4.1.14)'deki bağıntılar kullanılarak enerji bağıntısı aşağıdaki biçimde elde edilir:

$$E_{1,2} = \frac{-\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{2mq} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{mq} \right]^2 - 4 \left[\frac{\alpha^2}{4} - m^2 + \frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{q} - \left(n + \frac{1}{2}\right)^2 \alpha^2 \right]} \quad (4.4.2.1)$$

4.4.3. Yansıma ve Geçme Olasılık Yoğunluklarının Hesaplanması

Dirac denklemi için olasılık akım yoğunluğu

$$J^\mu = \bar{\psi} \gamma^\mu \psi \quad (4.4.3.1)$$

Biçiminde tanımlanır. Burada $\bar{\psi} = \psi^\dagger \gamma^0$ dir. Bir boyutlu olasılık akım yoğunluğu ise

$$J^1 = \bar{\psi} i \sigma^1 \psi \quad (4.4.3.2)$$

olarak verilir.

Schrödinger ve Klein-Gordon denklemini çözümü için kullanılan değişkenle Dirac denkleminin çözümünde kullanılan değişken aynı olduğundan asimptotik ifadeler doğrudan yazılabilir.

$x \rightarrow -\infty$ için dalga fonksiyonunun bileşenleri aşağıdaki biçimi alırlar:

$$U_1(x) \rightarrow S_1 e^{2i\alpha \varepsilon x} + S_2 e^{-2i\alpha \varepsilon x} \quad (4.4.3.3)$$

$$U_2(x) \rightarrow \frac{2i\alpha \varepsilon}{(-E - m)} (S_1 e^{2i\alpha \varepsilon x} - S_2 e^{-2i\alpha \varepsilon x}) \quad (4.4.3.4)$$

Burada S_1 ve S_2 ifadeleri aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$S_1 = G_1 q^{-i\varepsilon} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + G_2 q^{-i\varepsilon} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)}$$

$$S_2 = G_1 q^{i\varepsilon} \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} + G_2 q^{i\varepsilon} \frac{\Gamma(C)\Gamma(-C+A+B)}{\Gamma(A)\Gamma(B)}$$

$x \rightarrow \infty$ için ise bileşenler sırası ile aşağıdaki biçimde elde edilirler:

$$U_1(x) \rightarrow D_2 q^{-i\varepsilon} e^{2i\alpha\varepsilon x} \quad (4.4.3.5)$$

$$U_2(x) \rightarrow \frac{2i\alpha\varepsilon}{(-E-m)} (q^{-i\varepsilon} D_2 e^{2i\alpha\varepsilon x}) \quad (4.4.3.6)$$

Elde ettiğimiz bu asimptotik ifadeler, Denklem (4.2.3.2)'deki ifadeler ve Denklem (4.4.3.2) kullanılarak yansıma ve geçme olasılık yoğunlukları aşağıdaki biçimde bulunur:

$$R = \frac{J_{yansiy\u0131yan}}{J_{gelen}} = \frac{|S_2|^2}{|S_1|^2} \quad T = \frac{J_{ge\u00e7en}}{J_{gelen}} = \frac{|q^{-i\varepsilon} D_2|^2}{|S_1|^2} \quad (4.4.3.7)$$

Burada yer alan katsayılar arasında bir ilişki kurabilmek için Denklem (4.2.3.9) ve Denklem (4.2.3.10)'da yer alan sınır koşullarının ve $x < 0$ ile $x > 0$ bölgelerindeki çözümlerin kullanılması gerekmektedir. $x < 0$ ile $x > 0$ bölgelerindeki çözümler aşağıdaki biçimdedir.

$$U_{1sol} = G_1 z^\gamma (1-z)^\eta {}_2F_1(a, b, c; z) + G_2 z^{-\gamma} (1-z)^\eta {}_2F_1(A, B, C; z) \quad (4.4.3.8)$$

$$U_{1sağ} = D_2 z^{-\gamma} (1-z)^\eta {}_2F_1(A, B, C; z)$$

Koşulların sağlanabilmesi için $G_1 = 0$ ve $G_2 = D_2$ olması gerektiği ortaya çıkar. Bu durumda Denklem (4.4.3.7)'de verilen R ve T ifadeleri sırası ile

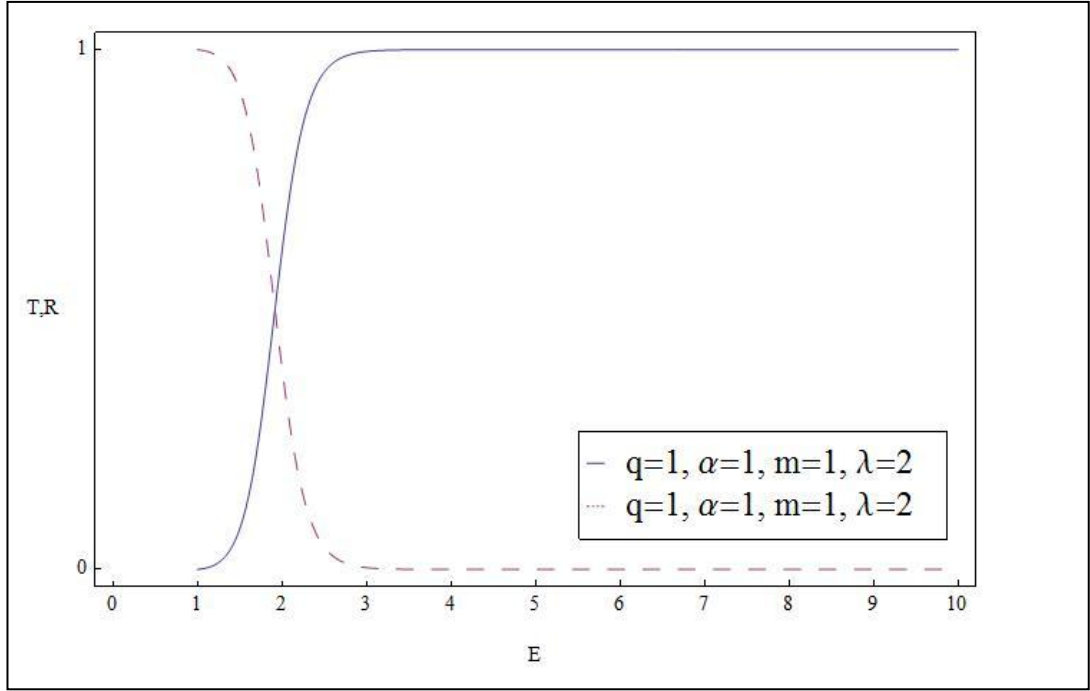
$$R = \frac{|S_2|^2}{|S_1|^2} = \frac{\left| G_2 q^{i\varepsilon} \frac{\Gamma(C)\Gamma(-C+A+B)}{\Gamma(A)\Gamma(B)} \right|^2}{\left| G_2 q^{-i\varepsilon} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)} \right|^2} \quad (4.4.3.9)$$

$$T = \frac{|q^{-i\varepsilon} D_2|^2}{|S_1|^2} = \frac{|q^{-i\varepsilon} G_2|^2}{\left| G_2 q^{-i\varepsilon} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)} \right|^2} \quad (4.4.3.10)$$

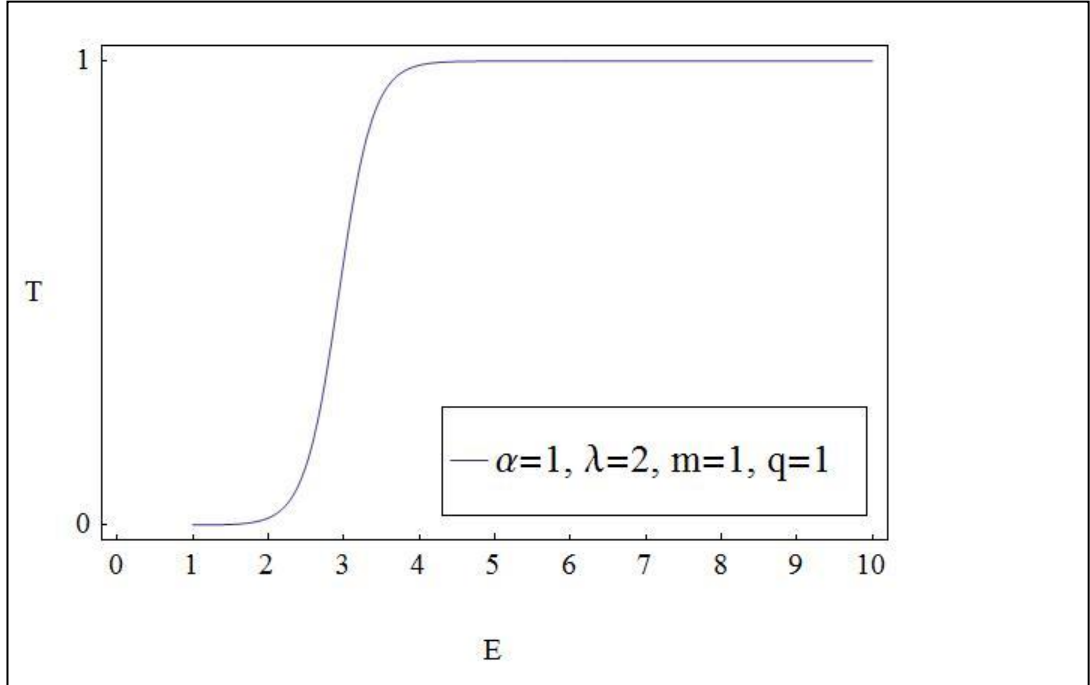
biçiminde elde edilir.

4.4.4. Elde Edilen Sonuçların Çizimsel Değerlendirilmesi

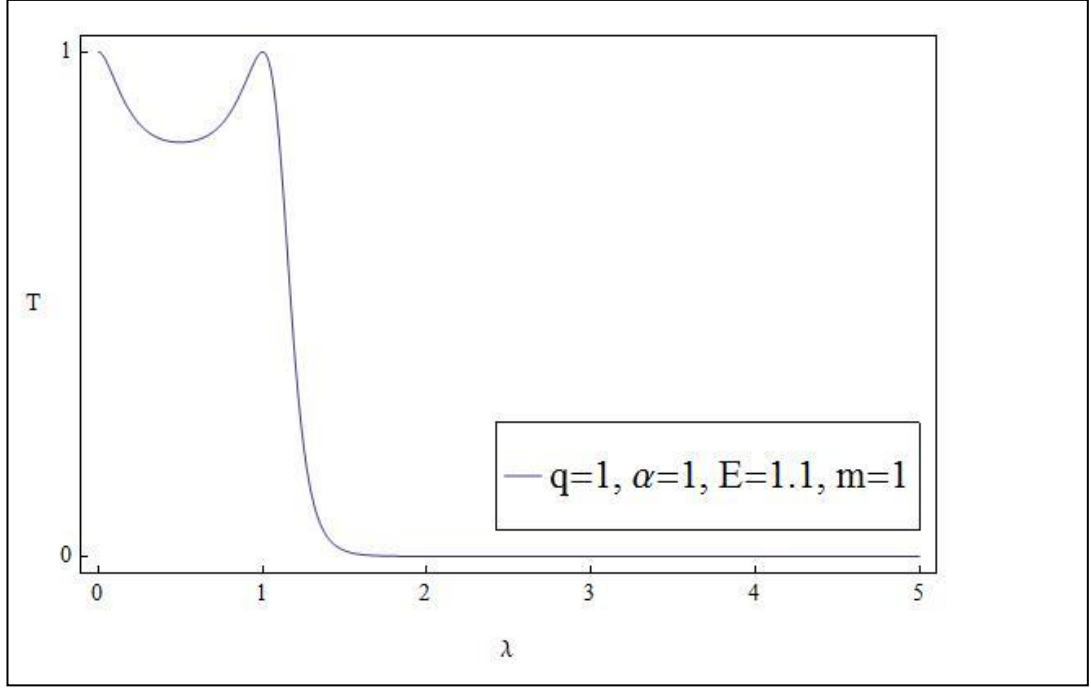
Geçme ve yansıma olasılık yoğunluklarının enerjiye göre değişimi Şekil 4.4.4.1.'de verilmektedir. Burada $T + R = 1$ koşulunun sağlandığı görülür. Bunun yanı sıra enerjinin belli bir değerinden sonra geçme olasılık yoğunluğunun enerjinin artmasına karşılık hızlı bir şekilde artış gösterdiği Şekil 4.4.4.2.'de görülmektedir. Ayrıca potansiyelin biçimini belirleyen λ, q ve α parametrelerinin geçme olasılık yoğunluğunu nasıl etkilediği Şekil 4.4.4.3., Şekil 4.4.4.4. ve Şekil 4.4.4.5.'de gösterilmektedir. Bu çizimlerden, Geçme olasılık yoğunluğunun λ ve α 'nın artmasıyla azaldığı, q parametresinin artması ile de arttığı sonucuna varılır.



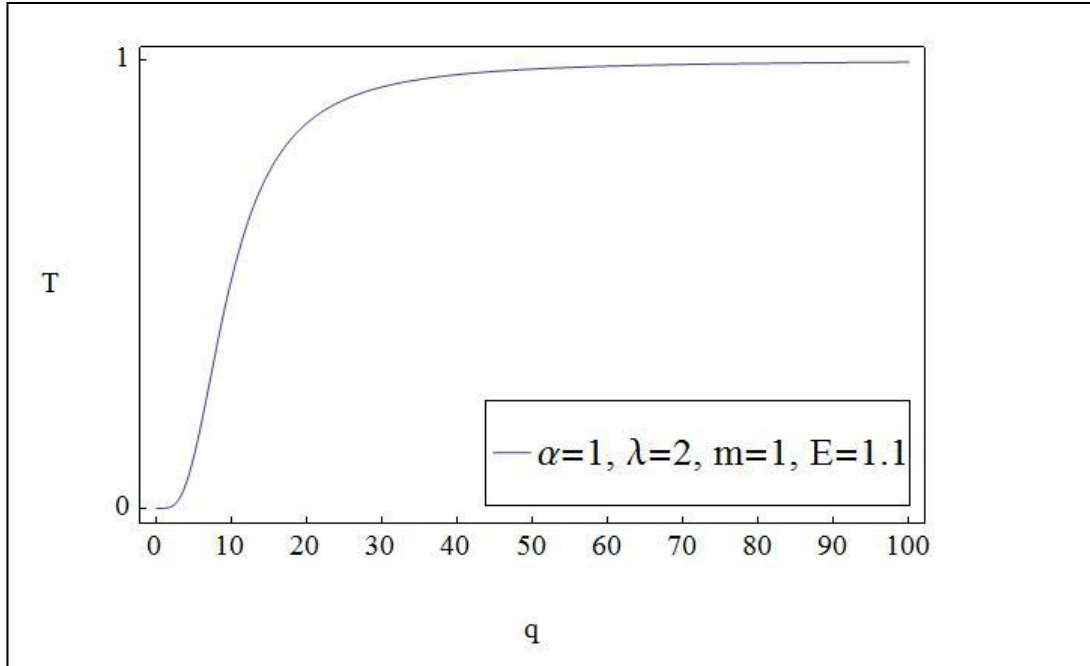
Şekil 4.4.4.1. Dirac parçacığı için yansıma (R) ve geçme (T) olasılık yoğunluklarının enerjiye (E) göre değişimi.



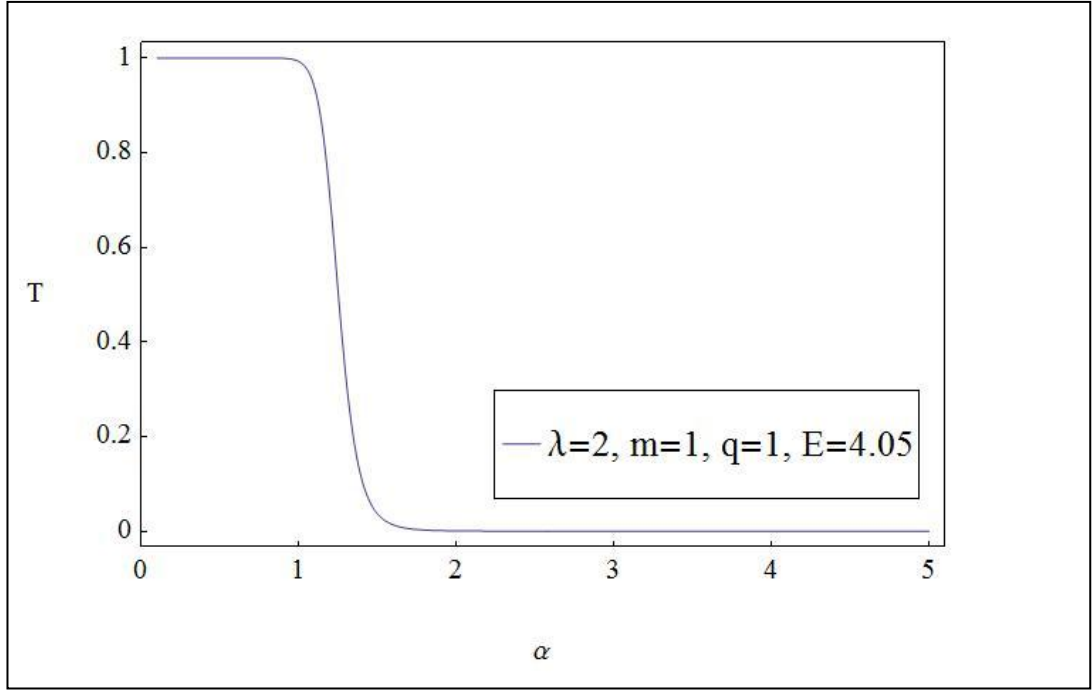
Şekil 4.4.4.2. Dirac parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun enerjiye göre değişimi.



Şekil 4.4.4.3. Dirac parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun λ 'ya göre değişimi.



Şekil 4.4.4.4. Dirac parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun q parametresine göre değişimi.



Şekil 4.4.4.5. Dirac parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun α parametresine göre değişimi.

4.5. DUFFIN-KEMMER-PETIAU (DKP) DENKLEMİ

4.5.1. q Parametrelî Hiperbolik Pöschl-Teller Potansiyeli için DKP Denkleminin Çözümü

DKP denklemi, A_μ dörtlü vektör potansiyel, e parçacığın yükü, m parçacığın kütlesi, V_s skaler potansiyel ve β^μ kemmer matrisleri olmak üzere ($\hbar = c = 1$)

$$[i\beta^\mu (\partial_\mu + ieA_\mu) - (m + V_s)]\Psi(t, \vec{x}) = 0 \quad (4.5.1.1)$$

biçiminde ifade edilir. Bu denklem, Denklem (3.2.4), Denklem (3.2.5) ve Denklem (3.2.7) kullanılarak $\gamma^0 = \sigma_z$ ve $\gamma^1 = i\sigma_x$ seçimi ile birlikte bir boyutlu uzaysal denkleme dönüştürülür. Dönüşen bu denklemde dalga fonksiyonu $\Psi(\vec{x}, t) = e^{-iEt}\psi(x)$ olarak alınıp gerekli işlemler yapıldıktan sonra aşağıdaki bağlaşımlı denklemler dizgesi elde edilir:

$$\frac{d(\psi_0 + \psi_{\bar{0}})}{dx} = [-2(V_v - E) - (m + V_s)]\psi_1 \quad (4.5.1.2)$$

$$\psi_0 = -\frac{1}{m + V_s} \frac{d(\psi_1 + \psi_2)}{dx} \quad (4.5.1.3)$$

$$\psi_{\bar{0}} = -\frac{1}{m + V_s} \frac{d(\psi_1 + \psi_2)}{dx} \quad (4.5.1.4)$$

$$\frac{d(\psi_0 + \psi_{\bar{0}})}{dx} = [2(V_v - E) - (m + V_s)]\psi_2 \quad (4.5.1.5)$$

Burada vektör potansiyelin birinci bileşeni $A_1 = 0$ ve uzaysal dalga fonksiyonu

$$\psi(x) = \begin{pmatrix} \psi_1(x) \\ \psi_0(x) \\ \psi_{\bar{0}}(x) \\ \psi_2(x) \end{pmatrix} \quad (4.5.1.6)$$

olarak seçilmektedir.

Bu bağımlı dört denklemden bağımsız ikinci dereceden bir diferansiyel denklem bulunur:

$$\frac{d^2(\psi_1 + \psi_2)}{dx^2} + [(E - V_v)^2 - (\frac{m + V_s}{2})^2](\psi_1 + \psi_2) = 0 \quad (4.5.1.7)$$

Burada $V_v = \frac{V_s}{2}$ ve $\tilde{m} = \frac{m}{2}$ biçiminde tanımlama yapıldığında Denklem (4.5.1.7)

aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$\frac{d^2(\psi_1 + \psi_2)}{dx^2} + [(E^2 - \tilde{m}^2) - 2(E + \tilde{m})V_v](\psi_1 + \psi_2) = 0 \quad (4.5.1.8)$$

Denklem (4.2.1.2), bu denklemde yerine yazılır ve Denklem (4.2.1.3) ve (4.2.1.5)'deki değişken değiştirmesi kullanılırsa

$$z(1-z)\frac{d^2(\psi_1+\psi_2)}{dz^2}+(1-2z)\frac{d(\psi_1+\psi_2)}{dz}+\frac{1}{z(1-z)}[\tilde{\varepsilon}^2-\tilde{D}z(1-z)](\psi_1+\psi_2)=0 \quad (4.5.1.9)$$

elde edilir. Burada $\tilde{\varepsilon}^2 = \frac{E^2 - \tilde{m}^2}{4\alpha^2}$ ve $\tilde{D} = \frac{\lambda(\lambda-1)(E + \tilde{m})}{mq}$ dur.

Dalga fonksiyonu

$$(\psi_1 + \psi_2) = z^{\tilde{\gamma}}(1-z)^{\tilde{\eta}}\tilde{\omega}(z) \quad (4.5.1.10)$$

biçiminde tanımlanırsa Denklem (4.5.1.9) aşağıdaki denkleme dönüşür:

$$z(1-z)\frac{d^2\tilde{\omega}}{dz^2}+[(2\tilde{\gamma}+1)-(2\tilde{\gamma}+2\tilde{\eta}+2)z]\frac{d\tilde{\omega}}{dz}+\frac{1}{z(1-z)}[I_0+I_1z-I_2z^2]\tilde{\omega}=0 \quad (4.5.1.11)$$

Burada I_0 , I_1 ve I_2 aşağıdaki biçimdedir:

$$\begin{aligned} I_0 &= \tilde{\varepsilon}^2 + \tilde{\gamma}^2 \\ I_1 &= -2\tilde{\gamma}^2 - \tilde{\gamma} - \tilde{\eta} - 2\tilde{\gamma}\tilde{\eta} - \tilde{D} \\ I_2 &= -\tilde{\gamma}^2 - \tilde{\gamma} - \tilde{\eta} - \tilde{\eta}^2 - 2\tilde{\gamma}\tilde{\eta} - \tilde{D} \end{aligned} \quad (4.5.1.12)$$

Denklem (4.5.1.11) hipergeometrik denkleme benzetilerek çözümünü doğrudan yazılabilir. Bu denklemin hipergeometrik denkleme benzemesi için $I_0 = 0$, $I_1 = I_2$ ve $a.b = -I_2$ olmalıdır. Bu koşullar kullanıldığında aşağıdaki bağıntılar elde edilir.

$$\begin{aligned}
 \tilde{\gamma} &= i\tilde{\varepsilon} & a &= \tilde{\gamma} + \tilde{\eta} + \tilde{\delta} + \frac{1}{2} \\
 \tilde{\eta} &= i\tilde{\varepsilon} & b &= \tilde{\gamma} + \tilde{\eta} + \tilde{\delta} + \frac{1}{2} \\
 \tilde{\delta} &= \sqrt{\frac{1}{4} - \tilde{D}} & c &= 1 + 2\tilde{\gamma}
 \end{aligned} \tag{4.5.1.13}$$

Bu durumda Denklem (4.5.1.11)'in çözümü

$$\tilde{\omega}(z) = \tilde{G}_1 {}_2F_1(a, b, c; z) + \tilde{G}_2 z^{1-c} {}_2F_1(a+1-c, b+1-c, 2-c; z) \tag{4.5.1.14}$$

olur. Genel çözüm ise $a+1-c = A$, $b+1-c = B$, $2-c = C$ olmak üzere aşağıdaki biçimde bulunur:

$$(\psi_1 + \psi_2)(z) = \tilde{G}_1 z^{\tilde{\gamma}} (1-z)^{\tilde{\eta}} {}_2F_1(a, b, c; z) + \tilde{G}_2 z^{-\tilde{\gamma}} (1-z)^{\tilde{\eta}} {}_2F_1(A, B, C; z) \tag{4.5.1.15}$$

Dalga fonksiyonunun diğer bileşenleri Denklem (4.5.1.3) ve Denklem (4.5.1.4) kullanılarak elde edilir.

4.5.2. Bağlı Durumlar için Enerji Bağlılığının Elde Edilmesi

Denklem (4.2.2.1), Denklem (4.2.2.2) ve Denklem (4.5.1.13)'deki bağıntılar kullanılarak enerji bağıntısı aşağıdaki biçimde bulunur:

$$E_{1,2} = \frac{-\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{2mq} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{mq} \right]^2 - 4 \left[\frac{\alpha^2}{4} - \tilde{m}^2 + \frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1) \tilde{m}}{mq} - (n + \frac{1}{2})^2 \alpha^2 \right]} \tag{4.5.2.1}$$

4.5.3. Yansıma ve Geçme Olasılık Yoğunluklarının Hesaplanması

DKP denklemi için olasılık akım yoğunluğu

$$j^\mu = \bar{\psi} \beta^\mu \psi \tag{4.5.3.1}$$

biçiminde ifade edilir. Burada $\bar{\psi} = \psi^+(\gamma^0 \otimes \gamma^0)$ dır. γ^0 ve β^μ ifadeleri denklem (4.5.3.1)'de yerine yazılırsa

$$j = i[(\psi_1 + \psi_2)^*(\psi_0 + \psi_{\bar{0}}) - (\psi_0 + \psi_{\bar{0}})^*(\psi_1 + \psi_2)] \quad (4.5.3.2)$$

denklemini elde edilir. Buradan yola çıkarak, yansıma ve geçme olasılık yoğunluklarını bulmak için sadece $(\psi_1 + \psi_2)$ ve $(\psi_0 + \psi_{\bar{0}})$ dalga fonksiyonlarının asimptotik ifadelerine bakmak yeterli olacaktır.

$x \rightarrow -\infty$ durumunda

$$(\psi_1 + \psi_2)(x) \rightarrow \tilde{S}_1 e^{2i\alpha\tilde{\epsilon}x} + \tilde{S}_2 e^{-2i\alpha\tilde{\epsilon}x} \quad (4.5.3.3)$$

elde edilir. $(\psi_0 + \psi_{\bar{0}})$ dalga fonksiyonunun asimptotik ifadesi için Denklem (4.5.1.3) ve Denklem (4.5.1.4) kullanıldığında

$$(\psi_0 + \psi_{\bar{0}})(x) \rightarrow \frac{-4i\alpha\tilde{\epsilon}}{m + V_s} (\tilde{S}_1 e^{2i\alpha\tilde{\epsilon}x} - \tilde{S}_2 e^{-2i\alpha\tilde{\epsilon}x}) \quad (4.5.3.4)$$

bulunur. Aşağıda \tilde{S}_1 ve \tilde{S}_2 'nin açık ifadeleri verilmektedir.

$$\tilde{S}_1 = \tilde{G}_1 q^{-i\tilde{\epsilon}} \frac{\Gamma(c)\Gamma(c-a-b)}{\Gamma(c-a)\Gamma(c-b)} + \tilde{G}_2 q^{-i\tilde{\epsilon}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)}$$

$$\tilde{S}_2 = \tilde{G}_1 q^{i\tilde{\epsilon}} \frac{\Gamma(c)\Gamma(-c+a+b)}{\Gamma(a)\Gamma(b)} + \tilde{G}_2 q^{i\tilde{\epsilon}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(-C+A+B)}{\Gamma(A)\Gamma(B)}$$

$x \rightarrow \infty$ durumunda ise

$$(\psi_1 + \psi_2)(x) \rightarrow q^{-i\tilde{\epsilon}} \tilde{D}_2 e^{-2i\alpha\tilde{\epsilon}x} \quad (4.5.3.5)$$

$$(\psi_0 + \psi_{\tilde{0}})(x) \rightarrow \frac{-4i\alpha\tilde{\epsilon}q^{-i\tilde{\epsilon}}}{m + V_s} (\tilde{D}_2 e^{2i\alpha\tilde{\epsilon}x}) \quad (4.5.3.6)$$

ifadeleri elde edilir. Elde ettiğimiz bu asimptotik ifadelerin ve Denklem (4.5.3.2)'nin kullanılması ile yansıma ve geçme olasılık yoğunlukları aşağıdaki biçimde bulunur.

$$R = \frac{J_{yansiy\u0131n}}{J_{gelen}} = \frac{|\tilde{S}_2|^2}{|\tilde{S}_1|^2} \quad T = \frac{J_{ge\u00e7en}}{J_{gelen}} = \frac{|\tilde{D}_2|^2}{|\tilde{S}_1|^2} \quad (4.5.3.7)$$

Buradaki katsayılar arasında bir ilişki kurulabilmesi için

$$\psi_{gelen}(x=0) + \psi_{yansiy\u0131n}(x=0) = \psi_{ge\u00e7en}(x=0) \quad (4.5.3.8)$$

s\u00fcreklilik koşulunun kullanılması gerekmektedir. Gelen, yansiy\u0131n ve ge\u00e7en dalga fonksiyonları sırası ile aşağıda verilmiştir.

$$\psi_{gelen} = z^{\tilde{\gamma}} (1-z)^{\tilde{\eta}} \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left(\frac{m+2E}{m+V_s} \right) \tilde{G}_1 {}_2F_1(a, b, c; z) \\ \left(\frac{2\alpha}{m+V_s} \right) [(\tilde{\gamma}(1-z) - \tilde{\eta}z) {}_2F_1(a, b, c; z) + z(1-z) \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1, c+1; z)] \tilde{G}_1 \\ \left(\frac{2\alpha}{m+V_s} \right) [(\tilde{\gamma}(1-z) - \tilde{\eta}z) {}_2F_1(a, b, c; z) + z(1-z) \frac{ab}{c} {}_2F_1(a+1, b+1, c+1; z)] \tilde{G}_1 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{m-2E+2V_s}{m+V_s} \right) \tilde{G}_1 {}_2F_1(a, b, c; z) \end{array} \right) \quad (4.5.3.9)$$

$$\psi_{yansiy\u0131n} = z^{-\tilde{\gamma}} (1-z)^{\tilde{\eta}} \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left(\frac{m+2E}{m+V_s} \right) \tilde{G}_2 {}_2F_1(A, B, C; z) \\ \left(\frac{2\alpha}{m+V_s} \right) [(-\tilde{\gamma}(1-z) - \tilde{\eta}z) {}_2F_1(A, B, C; z) + z(1-z) \frac{AB}{C} {}_2F_1(A+1, B+1, C+1; z)] \tilde{G}_2 \\ \left(\frac{2\alpha}{m+V_s} \right) [(-\tilde{\gamma}(1-z) - \tilde{\eta}z) {}_2F_1(A, B, C; z) + z(1-z) \frac{AB}{C} {}_2F_1(A+1, B+1, C+1; z)] \tilde{G}_2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{m-2E+2V_s}{m+V_s} \right) \tilde{G}_2 {}_2F_1(A, B, C; z) \end{array} \right) \quad (4.5.3.10)$$

$$\psi_{geçen} = z^{-\tilde{\gamma}}(1-z)^{\tilde{\eta}} \left(\begin{array}{c} \frac{1}{2} \left(\frac{m+2E}{m+V_s} \right) \tilde{D}_2 {}_2F_1(A, B, C; z) \\ \left(\frac{2\alpha}{m+V_s} \right) [(-\tilde{\gamma}(1-z) - \tilde{\eta}z) {}_2F_1(A, B, C; z) + z(1-z) \frac{AB}{C} {}_2F_1(A+1, B+1, C+1; z)] \tilde{D}_2 \\ \left(\frac{2\alpha}{m+V_s} \right) [(-\tilde{\gamma}(1-z) - \tilde{\eta}z) {}_2F_1(A, B, C; z) + z(1-z) \frac{AB}{C} {}_2F_1(A+1, B+1, C+1; z)] \tilde{D}_2 \\ \frac{1}{2} \left(\frac{m-2E+2V_s}{m+V_s} \right) \tilde{D}_2 {}_2F_1(A, B, C; z) \end{array} \right)$$

(4.5.3.11)

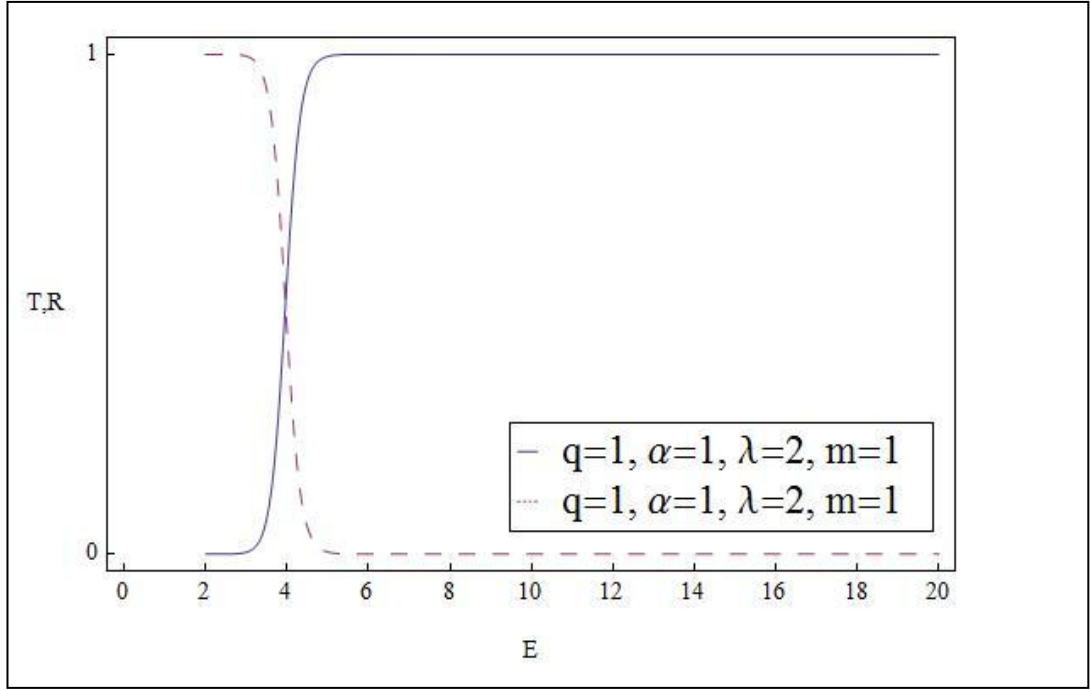
Bu dalga fonksiyonları Denklem (4.5.3.8)'de yerine konulduğunda $\tilde{G}_1 = 0$ ve $\tilde{G}_2 = \tilde{D}_2$ olması gerektiği görülür. Bu durumda (4.5.3.7)'deki bağıntılar aşağıdaki biçime dönüşür:

$$R = \frac{|\tilde{S}_2|^2}{|\tilde{S}_1|^2} = \frac{\left| \tilde{G}_2 q^{i\tilde{\epsilon}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(-C+A+B)}{\Gamma(A)\Gamma(B)} \right|^2}{\left| \tilde{G}_2 q^{-i\tilde{\epsilon}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)} \right|^2} \quad (4.5.3.12)$$

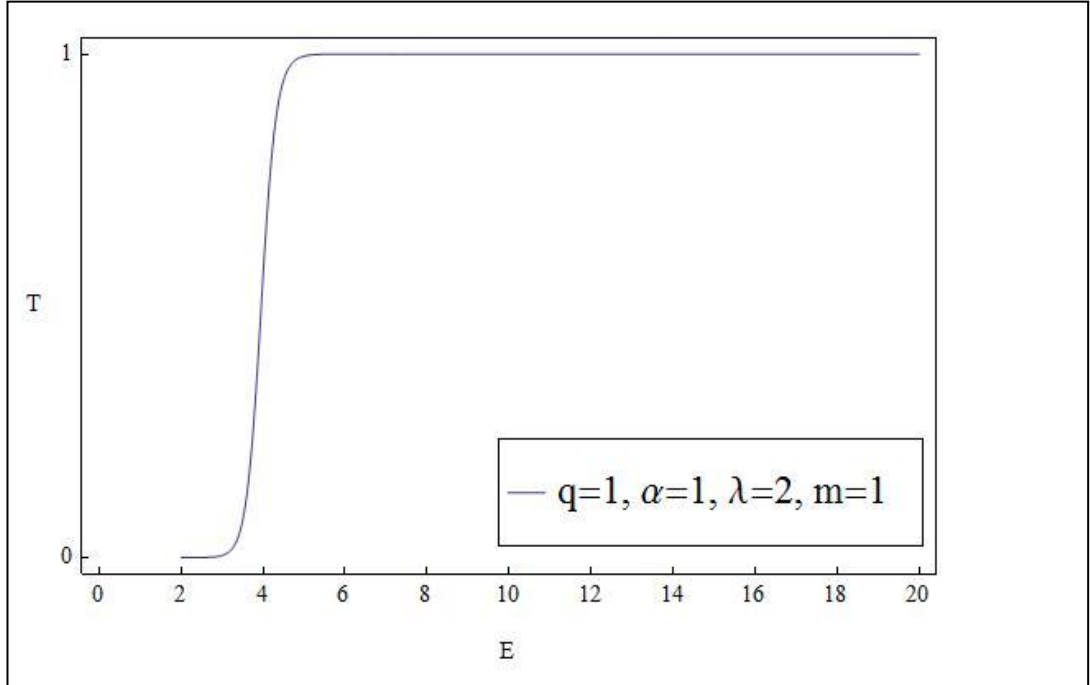
$$T = \frac{|\tilde{D}_2|^2}{|\tilde{S}_1|^2} = \frac{|\tilde{G}_2|^2}{\left| \tilde{G}_2 q^{-i\tilde{\epsilon}} \frac{\Gamma(C)\Gamma(C-A-B)}{\Gamma(C-A)\Gamma(C-B)} \right|^2} \quad (4.5.3.13)$$

4.5.4. Elde Edilen Sonuçların Çizimsel Değerlendirilmesi

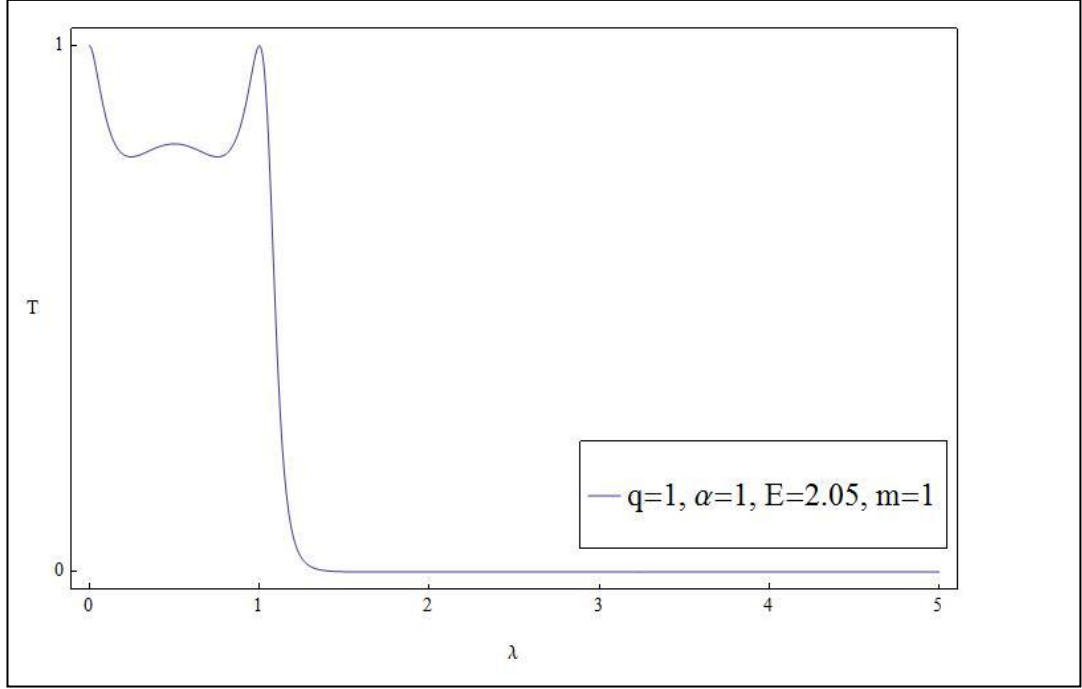
Geçme ve yansıma olasılık yoğunluklarının enerjiye göre değişimi Şekil 4.5.4.1.'de verilmektedir. Burada $T+R=1$ koşulunun sağlandığı görülür. Bunun yanı sıra enerjinin belli bir değerinden sonra geçme olasılık yoğunluğunun enerjinin artmasına karşılık hızlı bir şekilde artış gösterdiği Şekil 4.5.4.2.'de görülmektedir. Ayrıca potansiyelin biçimini belirleyen λ, q ve α parametrelerinin geçme olasılık yoğunluğunu nasıl etkilediği Şekil 4.5.4.3., Şekil 4.5.4.4. ve Şekil 4.5.4.5.'de gösterilmektedir. Bu çizimlerden, geçme olasılık yoğunluğunun λ ve α 'nın artmasıyla azaldığı, q parametresinin artması ile de arttığı sonucuna varılır.



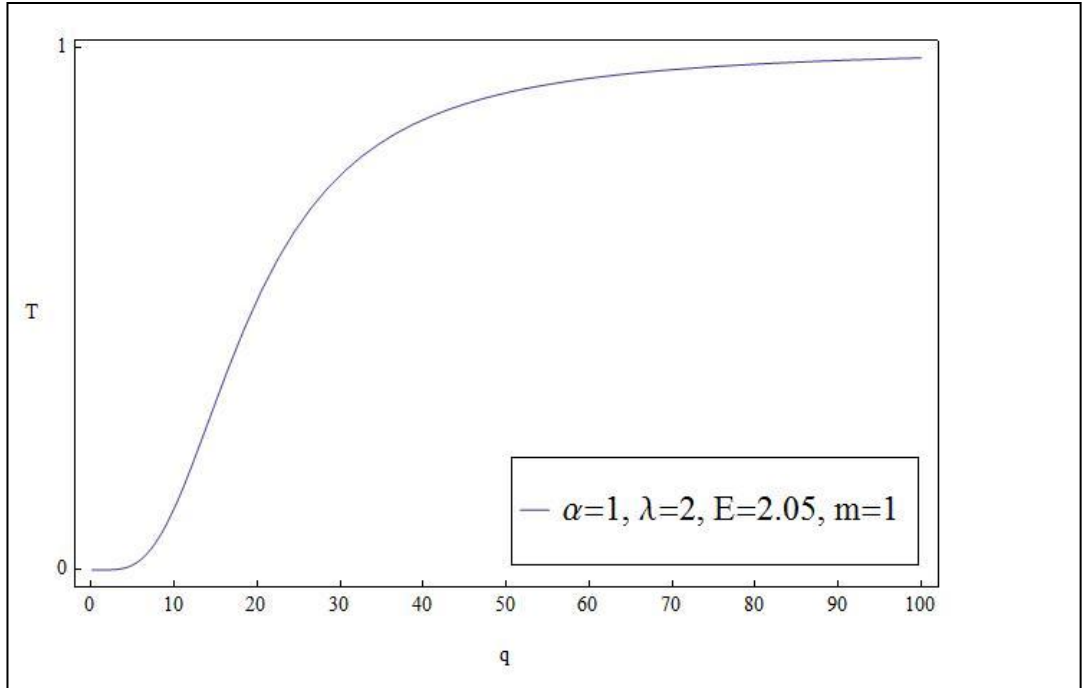
Şekil 4.5.4.1. DKP parçacığı için yansıma (R) ve geçme (T) olasılık yoğunluklarının enerjiye (E) göre değişimi.



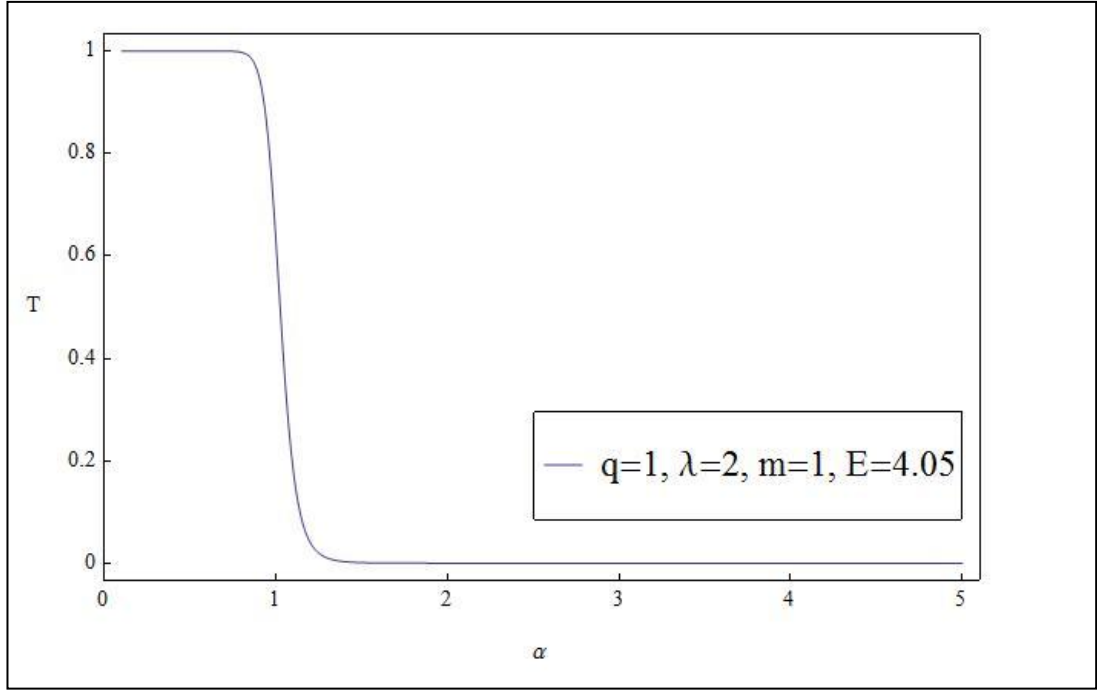
Şekil 4.5.4.2. DKP parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun enerjiye göre değişimi.



Şekil 4.5.4.3. DKP parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun λ 'ya göre değişimi.



Şekil 4.5.4.4. DKP parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun q parametresine göre değişimi.



Şekil 4.5.4.5. DKP parçacığı için geçme olasılık yoğunluğunun α parametresine göre değişimi.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu çalışmada q parametrelî hiperbolik Pöschl-Teller potansiyeli için görelî olmayan ve görelî kuantum mekaniğinde yer alan bir boyutlu denklemler çözülerek saçılma ve bağlı durumları betimleyen dalga fonksiyonları Gauss hipergeometrik fonksiyonlar cinsinden ifade edilmiştir. Bu çözümler kullanılarak saçılma durumları için geçme ve yansıma katsayıları elde edilmiş ve bu katsayılar potansiyeli betimleyen parametrelerin farklı birkaç değeri için “Mathematica” yazılım programı kullanılarak çizimsel biçimde değerlendirilmiştir. Ayrıca elde edilen çözümlerin sonlu değerler alabilmeleri koşulu kullanılarak bağlı durumlar için enerji özdeğerlerini veren bağıntılar elde edilmiştir. Her bir parçacık (Schrödinger, Klein-Gordon, Dirac, DKP) için elde edilen bu bağıntılar bir arada Çizelge 5.1.’de verilmektedir.

Bu çizelgede her bir denklem için belirtilen enerji bağıntılarının gerçel olabilmesi için gerekli koşullar bulunmaktadır. Schrödinger parçacıkları için gerekli koşul q parametresinin 1’den küçük değerler almasıdır. Görelî parçacıklar (Klein-Gordon, Dirac, DKP) için gerekli koşullar ise sırası ile $q \geq -\frac{1}{32}$, $q \geq -\frac{1}{8}$ ve $q \geq -\frac{1}{4}$ dür.

Çizelge 5.1. Görelî olmayan ve görelî parçacıklar için bağli durumları veren enerji bağıntıları.

PARÇACIK DENKLEMLERİ	BAĞLI DURUMLAR İÇİN ENERJİ BAĞINTISI
Schrödinger denklemi	$E_n = -\frac{\alpha^2}{2m} \left[\left(n + \frac{1}{2} \right) + \sqrt{\frac{1}{4} + \frac{\lambda(\lambda-1)}{q}} \right]^2$
Klein-Gordon denklemi	$E_{1,2} = \frac{-\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{8mq} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{4mq} \right]^2 - 4 \left[\frac{\alpha^2}{4} - m^2 + \frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{4q} - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \alpha^2 \right]}$
Dirac denklemi	$E_{1,2} = \frac{-\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{2mq} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{mq} \right]^2 - 4 \left[\frac{\alpha^2}{4} - m^2 + \frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{q} - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \alpha^2 \right]}$
DKP denklemi	$E_{1,2} = \frac{-\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{2mq} \mp \frac{1}{2} \sqrt{\left[\frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{mq} \right]^2 - 4 \left[\frac{\alpha^2}{4} - \frac{m^2}{4} + \frac{\alpha^2 \lambda(\lambda-1)}{2q} - \left(n + \frac{1}{2} \right)^2 \alpha^2 \right]}$

Çizelge 5.2.'de görelî olmayan ve görelî kuantum mekaniğinde yer alan denklemler için elde edilen geçme olasılık yoğunluklarının enerjiye göre değişimlerinin karşılaştırılması verilmektedir. Burada görelî kuantum mekaniği denklemlerinde geçiş durumunun oluşması için gerekli enerji değerinin, Schrödinger denkleminde geçiş durumunun oluşması için gerekli enerji değerinden daha büyük olduğu görülmektedir. Bunun nedeni görelî kuantum mekaniğinde durgun haldeki bir parçacık için kütle ile enerjinin aynı değere sahip olmasıdır.

Çizelge 5.2. Geçme olasılık yoğunluğunun enerjiye göre değişiminin görelî ve görelî olmayan parçacık denklemleri için karşılaştırılması.

	T ve E
Schrödinger	$q = 1, \alpha = 1, \lambda = 2, m = 1$ değerleri için Geçme olasılık yoğunluğunun, enerjinin artması durumunda $E = 0$ değerinden başlayarak yaklaşık olarak $E = 2$ değerine kadar arttığı ve $E = 2$ değerinden itibaren 1'e asimptotik olarak yaklaştığı şekil 4.2.4.2.'den görülmektedir.
Klein-Gordon	Şekil 4.3.4.2., geçme olasılık yoğunluğunun $E = 1$ değerinden başlayarak yaklaşık olarak $E = 2$ değerine kadar arttığını ve bu değerden sonra ise 1'e asimptotik olarak yaklaştığını göstermektedir.
Dirac	Şekil 4.4.4.2.'ye göre geçme olasılık yoğunluğu $E = 1$ ile $E = 2$ değerleri arasında yavaş, $E = 2$ ile $E = 3.5$ değerleri arasında hızlı bir biçimde artmaktadır. Bu değerden sonra ise maksimum değerine ulaşmaktadır.
DKP	Geçme olasılık yoğunluğunun $E = 2$ ile $E = 3$ değerleri arasında yavaş, $E = 3$ ile $E = 4.5$ değerleri arasında hızlı bir artış gösterdiği ve bu değerden sonra ise 1'e yaklaştığı şekil 4.5.4.2.'den görülmektedir.

Görelî kuantum mekaniğinde tartışılan üç denklem için elde edilen geçme katsayısının enerjiye göre yapılan çizimleri incelendiğinde rezonans durumlarının oluşmadığı görülmektedir. Bunun nedeni bu üç denkleme eklenen skaler potansiyelin vektörel potansiyele eşit alınmasıdır. Skaler potansiyel ile vektörel potansiyelin birbirine eşit olması durumunda görelî kuantum mekaniği denklemleri Schrödinger denklemi tipine indirgenmektedir. Bu yüzden görelî parçacıklar için elde edilen geçme katsayılarının, potansiyeli betimleyen parametrelere ve enerjiye göre çizimleri, Schrödinger parçacığı için bulunan geçme katsayısının, potansiyeli betimleyen parametrelere ve enerjiye göre çizimlerine benzemektedir.

Çizelge 5.3.'de ise bu çalışmada ele alınan dört denklem için geçme olasılık yoğunluklarının potansiyelin bağlı olduğu q ve α parametrelerine göre değişiminin karşılaştırılması verilmektedir.

Çizelge 5.3. Geçme olasılık yoğunluğunun q ve α parametrelerine göre değişiminin görelî ve görelî olmayan parçacık denklemleri için karşılaştırılması.

	T ve q	T ve α
Schrödinger	$E = 1.05, \alpha = 1, \lambda = 2, m = 1$ değerleri için geçme olasılık yoğunluğunun yaklaşık olarak $q = 2$ değerinden sonra 1'e asimptotik olarak yaklaştığı Şekil 4.2.4.4.'den görülmektedir.	$E = 4.05, q = 1, \lambda = 2, m = 1$ değerleri için geçme olasılık yoğunluğunun α parametresinin artması ile azaldığı ve yaklaşık olarak $\alpha = 4$ değerinden sonra sıfır olduğu Şekil 4.2.4.5.'den görülmektedir.
Klein-Gordon	Şekil 4.3.4.4.'e göre geçme olasılık yoğunluğu $q = 20$ değerinden itibaren 1 olmaktadır.	4.3.4.5.'e göre geçme olasılık yoğunluğu $\alpha = 5$ değerinden itibaren sıfır olmaktadır.
Dirac	Şekil 4.4.4.4., geçme olasılık yoğunluğunun $q = 40$ değerinden itibaren maksimum değerine ulaştığını göstermektedir.	Şekil 4.4.4.5., geçme olasılık yoğunluğunun $\alpha = 1.8$ değerinden sonra sıfır yani minimum değere ulaştığını göstermektedir
DKP	$E = 2.05, \alpha = 1, \lambda = 2, m = 1$ değerleri için geçme olasılık yoğunluğunun q parametresinin artması ile arttığı ve yaklaşık olarak $q = 90$ değerinden sonra 1'e asimptotik olarak yaklaştığı Şekil 4.5.4.4.'den görülmektedir.	Şekil 4.5.4.5.'e göre geçme olasılık yoğunluğu $\alpha = 1.3$ değerinden sonra sıfır olmaktadır.

Tezde ele alınan potansiyel için görelî parçacıkları betimleyen denklemler, skaler potansiyelin sıfır alınması durumunda mevcut diferansiyel denklem çözüm teknikleri ile çözülememektedir. Bu nedenle yeni bir çözüm tekniği ya da yaklaşıklık geliştirilerek bu çalışma yeniden değerlendirilebilir.

KAYNAKLAR

- [1] Jasprit Singh, “Quantum Mechanics Fundamentals and Applications to Technology”, John Wiley&Sons, Inc, USA, 379s., (1997).
- [2] Flugge, S., “Practical Quantum Mechanics, 2nd ed.”, Springer-Verlag, Berlin, 189s., (1994).
- [3] L.Hulthen. “Über die Eigenlösungen der Schrödingergleichung des Deuterons”, Ark. Mat. Astron. Fys. A, 28: 1-12(1942).
- [4] Woods R D and Saxon D S. "Diffuse Surface Optical Model for Nucleon-Nuclei Scattering", Phys. Rev. 95: 577 (1954).
- [5] Villalba V. M. and Greiner W. “Transmission resonances and supercritical states in a one-dimensional cusp potential”, Phys. Rev. A, 67: 052707, (2003).
- [6] P.M. Morse. “Diatomic Molecules According to the Wave Mechanics. II. Vibrational Levels”, Physical Review, 34: 57(1929).
- [7] N. Rosen and Philip M. Morse. “On the Vibrations of Polyatomic Molecules”, Physical Review, 42: 210 (1932).
- [8] Pöschl G and Teller E. “Bemerkungen zur Quantenmechanik des anharmonischen Oszillators”, Z. Physik, 83: 143 (1933).
- [9] Ying Xu, Su He and Chun-sheng Jia. “Approximate analytical solutions of Dirac equation with the Pöschl-Teller potential including the spin-orbit coupling term”, J. Phys. A:Math. Theor, 41: 255302 (2008).
- [10] Corso P P, Fiordilino E and Persico F. “Ionization Dynamics of a model molecular ion” J. Phys. B: At. Mol. Opt. Phys, 38: 1015 (2005).
- [11] J.I.Diaz, J.Negro, L.M. Nieto and O.Rosas-Ortiz, “The supersymmetric modified Pöschl-Teller and delta-well potentials”, Journal of Physics A, 32: 8447 (1999).
- [12] Altuğ Arda, Ramazan Sever, Cevdet Tezcan “Analytical Solutions to the Klein-Gordon Equation with Position-Dependent Mass for q-Parameter Pöschl-Teller Potential”, Chinese Phys. Lett. 27: 010306 (2010).
- [13] Tao Chen, Yong-Feng Diao, Chun-Sheng Jia, “Bound state solutions of the Klein-Gordon equation with the generalized Pöschl-Teller potential” Phys. Scr. 79: 065014 (2009).

- [14] Gao-Feng Wei, Shi-Hai Dong “The spin symmetry for deformed generalized Pöschl-Teller potential” Phys. Lett. A, 373: 2428-2431 (2009).
- [15] Gao-Feng Wei and Shi-Hai Dong. “A novel algebraic approach to spin symmetry for Dirac equation with scalar and vector second Pöschl-Teller potentials”, Eur. Phys. J. A, 43: 185–190 (2010).
- [16] Shishan Dong and Shi-Hai Dong. “An alternative approach to study the dynamical group for the modified Pöschl–Teller potential”, Czechoslovak Journal of Physics, Vol. 52 (2002).
- [17] S. Cruz y Cruz, S. Kuru, J. Negro. “Classical motion and coherent states for Pöschl–Teller potentials”, Physics Letters A, 372: 1391–1405(2008).
- [18] Wen-Chao Qiang, Wen-Li Chen, Kai-Li ve Gao-Feng Wei. “The scattering states of the l -wave Schrödinger equation with the second Pöschl–Teller-like potential”, Phys. Scr, 79: 025005 (2009).
- [19] M.R.Setare and A.Fallahpour. “Generalized Coherent States for q -Deformed Hyperbolic Pöschl-Teller Potential”, Int J Theor Phys, 48: 1263-1270 (2009).
- [20] D. Agboola. “Solutions to the Modified Pöschl-Teller potential in D -dimensions”, Chinese Phys. Lett, 27: 040301 (2010).
- [21] Majid Hamzavi and Sameer M. Ikhdair. “Approximate l -State Solution of the Rotating Trigonometric Pöschl-Teller Potential”, Arxiv, <http://arxiv.org/ftp/arxiv/papers/1205/1205.0941.pdf> (04.05.2012).
- [22] Chen Chang-Yuan, Lu Fa-Lin and You Yuan. “Scattering states of modified Pöschl Teller potential in D -dimension”, Chinese Phys. B, 21: 030302 (2012).
- [23] Wen-Chao Qiang and Shi-Hai Dong. “Analytical approximations to the l -wave solutions of the Klein–Gordon equation for a second Pöschl–Teller like potential”, Physics Letters A, 372: 4789–4792 (2008).
- [24] Wen-li chen, Gao-feng wei and Wen-chao qiang. “The approximate analytical solutions of the Klein-Gordon equation with the second pöschl teller like potential for nonzero angular momentum”, Modern Physics Letters A, Vol. 24, No. 17: 1371-1382(2009).
- [25] K. J. Oyewumi, T.T. Ibrahim. “Relativistic Treatment of the Spin-Zero Particles Subject to the q -Deformed Hyperbolic Modified Pöschl-Teller Potential”, J. Vectorial Relativity Vol. 5, No. 3: 19-26 (2010).

- [26] C.-S. Jia, P. Guo, Y.-F. Diao, L.-Z. Yi and X.-J. Xie. “Solutions of Dirac equations with the Pöschl-Teller potential”, *Eur. Phys. J. A* 34: 41–48 (2007).
- [27] Chun-Sheng Jia, Tao Chen and Li-Gong Cui. “Approximate analytical solutions of the Dirac equation with the generalized Pöschl–Teller potential including the pseudo-centrifugal term”, *Physics Letters A*, 373: 1621–1626(2009).
- [28] Gao-Feng Wei and Shi-Hai Dong. “Algebraic approach to pseudospin symmetry for the Dirac equation with scalar and vector modified Pöschl-Teller potentials”, *Europhys. Lett*, 87: 40004 (2009).
- [29] Xu-Yang Liu, Gao-Feng Wei, Xin-Wei Cao and Hong-Gang Bai. “Spin Symmetry for Dirac Equation with the Trigonometric Pöschl-Teller Potential”, *Int J Theor Phys*, 49: 343–348(2010).
- [30] D Agboola. “Dirac equation with spin symmetry for the modified Pöschl–Teller potential in D dimensions”, *Pramana – J. Phys*, Vol. 76, No. 6: 875–885(2011).
- [31] Liang-Zhong Yi, Yong-Feng Diao, Jian-Yi Liu, Chun-Sheng Jia. “Bound states of the Klein-Gordon equation with vector and scalar Rosen-Morse-type potentials”, *Physics Letters A*, 333: 212-217(2004).
- [32] Ralph P. Boas, “Special Functions of Mathematical Physics”, Birkhaeuser Verlag, Basel, 253s., (1988). [Arnold F. Nikiforov, Vasilii B. Uvarov, “Specjal’nye funkicii matematiceskoj fiziki by science”, Moscow(1978).]
- [33] Sogut K and Havare A. “Scattering of vector bosons by asymmetric Hulthen potential”, *J.Phys. A: Math. Theor*, 43: 225204, (2010).
- [34] Duffin, R., J., “On The Characteristic Matrices of Covariant Systems”, *Phys. Rev.*, 54:1114, (1938)
- [35] Barut A. O., “Excited states of zitterbewegung”, *Phys. Letter B*, 237: 436-439, (1990).
- [36] Unal N., “Path integral quantization of a spinning particle”, *Found. Phys.*, 28: 755-762, (1998).
- [37] Unal N., “Duffin-Kemmer-Petiau equation, Proca equation and Maxwells equation in 1+1 D ”, *Concepts of Phys.* 2: 273-282, (2005).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Hilmi Yanar

Doğum Tarihi: 15/04/1987

Öğrenim Durumu: Yüksek Lisans

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Fen		2001-2004
Lisans	Fizik Bölümü	Mersin Üniversitesi	2004-2009
Yüksek Lisans	Fizik Anabilim Dalı	Mersin Üniversitesi	2009-2012

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

Sözlü Bildiri

1. H. Yanar ve A. Havare, “Schrödinger parçacıklarının genel q parametrelî hiperbolik potansiyelden saçılma durumları”, XXVIII. Uluslararası Fizik Kongresi, Muğla, 404-405, (Eylül 2011)