BİR SINIF STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN AYRIŞIM PROBLEMİ

FATMA AYÇA ÇETİNKAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2012

BİR SINIF STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN AYRIŞIM PROBLEMİ

FATMA AYÇA ÇETİNKAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. Erol YAŞAR

MERSİN
HAZİRAN– 2012

Fatma Ayça ÇETİNKAYA tarafından Doç. Dr. Erol YAŞAR danışmanlığında ve Doç. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU eş danışmanlığında hazırlanan "Bir Sınıf Sturm-Liouville Operatörü İçin Ayrışım Problemi" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Gabil ADİLOV

Prof. Dr. Nazım KERİMOV

Doç.Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

Doç.Dr. Erol YAŞAR

Doç.Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 04/09/2012 tarih ve 2012-16/468 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. A. Murat GİZİR
Enstitü Müdürü

BİR SINIF STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN AYRIŞIM FORMÜLÜ

Fatma Ayça ÇETİNKAYA

ÖZ

Bu çalışmada aşağıdaki süreksiz katsayılı sınır değer problemleri ele alınmıştır:

1) $-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x) y$

$$y(0) = 0$$

2) $-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x) y$

$$y'(0) = 0$$

Çalışmada bu sınır değer problemlerinin rezolvent operatörlerinin biçimi incelenmiş, Titchmarsh metodu uygulanarak özfonksiyonlara göre ayrışım formülü bulunmuş ve bu formüle denk olan Parseval eşitliği elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Ayrışım Formülü, Rezolvent Operatör, Süreksiz Katsayı

Danışman: Doç. Dr. Erol YAŞAR, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

Eş Danışman: Doç. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

EXPANSION FORMULA FOR A CLASS OF STURM-LIOUVILLE OPERATOR

Fatma Ayça ÇETİNKAYA

ABSTRACT

This work is devoted to the boundary value problems given below:

1) $$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y$$
$$y(0) = 0$$

2) $$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y$$
$$y'(0) = 0$$

Resolvent operators for this boundary value problems are constructed, expansion formula with respect to eigenfunctions is obtained with the method of Titchmarsh; also the Parseval equation equivalent to this Formula is examined.

Key Words: Expansion Formula, Resolvent Operator, Discontinuous Coefficient

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Erol YAŞAR, Department of Mathematics, Mersin University

Co-advisor: Assoc. Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında bilimsel anlamda hiçbir özveriden kaçınmayan çok değerli tez danışmanlarım Doç. Dr. Hanlar Reşidoğlu'na ve Yrd. Doç Dr. Erol Yaşar'a; olmak istediğim kişi olmama imkan tanıdıkları ve her surette yolumu aydınlattıkları için babama, anneme ve kardeşlerime; dönem arkadaşından çok yol arkadaşı oldukları için İlknur Yeşilce ve Özge Akçay'a; ayrıca yüksek lisans ders ve tez aşamasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen bölümdeki hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma, Mersin Üniversitesi BAP Koordinatörlüğüne teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGE ve KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
λ	Spektral parametre
$\Delta(\lambda)$	Karakteristik fonksiyon
$D(L)$	L operatörünün tanım bölgesi
W	Wronskiyen
$\dot{e}(\lambda, x)$	λ ya göre türev
$e'(\lambda, x)$	x e göre türev
$\square$	İspatın bittiğini gösterir

1. GİRİŞ

Operatörlerin spektral teorisi; matematik, fizik ve mekaniğin çeşitli dallarında geniş bir şekilde kullanılmaktadır. Matematiksel fiziğin bazı problemlerinde, özellikle kuantum mekaniğinde singüleriteye sahip diferansiyel operatörlerin öğrenilmesi önem kazanmaktadır.

Lineer operatörlerin spektral teorisinin esas kaynakları, lineer cebir ve dalga teorisi problemleridir. Bu problemlerin arasındaki benzerliklerin farkına varılması çok eskilere dayanır. Matematikte l_2 ve H soyut Hilbert uzayı tanımlandıktan sonra H de lineer özeşlenik operatörler teorisi hızla gelişmeye başlamıştır. XIX. ve XX. yüzyıllarda birçok matematikçi sayesinde bu teori mükemmel bir seviyeye ulaşmıştır. Özel olarak, bu çalışmalarda özdeğerler, özfonksiyonlar, spektral fonksiyon, normlaştırıcı sayılar, vb. spektral veriler tanımlanmış ve farklı yöntemlerle bunlar için formüller bulunmuştur. Regüler ve singüler olmak üzere iki tür diferansiyel operatör tanımlanmış ve bunların spektral teorileri yapılandırılmıştır.

İkinci mertebeden regüler operatörler için spektral teori günümüzde Sturm-Liouville teorisi olarak bilinir. Diskret spektruma sahip ve uzayın tamamında tanımlı operatörlerin özdeğerlerinin dağılımı, özellikle Kuantum mekaniğinde çok önem taşımaktadır. Birinci mertebeden iki denklemin (Dirac denklemi) regüler sistemleri daha sonraki yıllarda ele alınmıştır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında Titchmarsh vermiştir. Doğru ekseninde tanımlı azalan (artan) potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlere göre ayrışım formülü Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Bu operatör fizikte geniş uygulamalara sahip Schrödinger operatörü ile yakın ilişki içerisindedir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında Levitan tarafından yapılmıştır. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi esaslandırmak için kendine has bir yöntem vermiştir.

Tezde singüler durumda, Sturm-Liouville operatörü için farklı sınır koşulları altında ayrışım problemleri incelenmiştir.

Bulgular ve tartışmalar kısmında, süreksiz katsayılı

$$-y''+q(x)y=\lambda^2\rho(x)y\,,\quad 0\le x<\infty \tag{1.1}$$

denklemi ve sırasıyla

$$y(0)=0 \tag{1.2}$$

$$y'(0)=0 \tag{1.3}$$

sınır koşulları ile üretilen sınır değer problemi ele alınır. Burada λ spektral parametre, $q(x)$ ise $\int_0^\infty (x+1)\left|q(x)\right|dx<\infty$ koşullunu sağlayan reel değerli bir fonksiyondur. Tezde, bu iki problemin $q(x)\equiv 0$ olduğu durumlar da ele alınmıştır.

(1.1) denkleminin çözümünün yeni integral gösterimi kullanılarak, Wronskiyen tanımlanmış; çözümün özellikleri incelenmiş, saçılma fonksiyonu ve normlaştırıcı sayılar tanımlanmıştır. Saçılma fonksiyonunun kutup noktalarının üst yarı düzlemde dağılımı incelenmiştir. Bunlardan yararlanarak H Hilbert uzayındaki sınır değer probleminin bir operatör denkleme denk olduğu gösterilmiş ve Hilbert uzayında, bu operatörün rezolvent operatörü inşa edilmiştir. Rezolvent operatöre ilişkin yardımcı lemmalar ispatlanmıştır. Kontür üzeri integralleme kullanılarak ele alınan sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülü elde edilmiştir ve H Hilbert uzayında L operatörünün spekturm kümesi incelenmiş ve spekturm kümesinin sonlu sayıda negatif özdeğerlerden ve pozitif tarı eksende yerleşen sürekli spektrumdan oluştuğu gösterilmiştir.

2.KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Regüler problemler için ayrışım formülünü birkaç metodla elde etmek mümkündür. Bunlardan en önemlileri; integral denklemler metodu, sonlu farklar metodu, eğrisel integrasyon metodu vb. dir. (Bknz. [1,2]) Daha önce klasik Sturm-Liouville problemi çin kullanılan, eğrisel integrasyon ve rezidü teorisi yöntemi, [3] de, singüler probleme uygulanmıştır.

Klasik Sturm-Liouville problemi için ayrışım formülü [3], [2], [4] ve [5] çalışmalarında verilmiştir. [4] te çözümün operatör dönüşüm

$$e(\lambda,x)=e^{i\lambda x}+\int_x^{\infty}K(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

ifadesi kullanılır, burada $\sigma(x)=\int_x^{\infty}\left|q(t)\right|dt$, $\sigma_1(x)=\int_x^{\infty}\sigma(t)dt$ olmak üzere; $K(x,t)$

$$\left|K(x,t)\right|\leq\frac{1}{2}\sigma\left(\frac{x+t}{2}\right)\exp\left\{\sigma_1(x)-\sigma_1\left(\frac{x+t}{2}\right)\right\}$$

eşitsizliğini sağlar.

Süreksiz durumda ise, yarı eksendeki problem iki kısıma ayrılarak [6] ve [7] çalışmalarında incelenmiştir. Bu durumda; $\left[0,\infty\right)$ aralığı $\left[0,a\right]$ ve $\left[a,\infty\right)$ (a süreksizlik noktası) aralıklarına indirgenerek incelemeler yapılmış ve $e(\lambda,x)$ in [4] teki ifadesini kullanılmıştır. [8] de çözüm için yeni bir integral gösterim elde edilmiştir. Bu gösterim

$$f(x,\lambda)=f_0(x,\lambda)+\int_{\mu^+(x)}^{\infty}K(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

biçimindedir. Burada

$$f_0(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

denklemin $q(x)\equiv 0$ halindeki çözümüdür ve $\mu^{\pm}(x)=\pm x\sqrt{\rho(x)}+a(1\mp\sqrt{\rho(x)})$ biçimindedir. Ayrıca, kapalı üst yarı düzlemdeki tüm λ lar için $K(x,.)\in L_1(\mu^+(x),+\infty)$ dir. (Bknz. [9], [10]) Tezde, sonuçlar bu integral gösterim kullanılarak elde edilmiştir. Sınır koşullarında spektral parametre içeren problem ise, [9] ve [10] çalışmalarında ele alınmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN YARI EKSENDE AYRIŞIM PROBLEMİ.

3.1.1 Ayrışım Formülü

Tanım 3.1.1.1 Sturm-Liouville problemi olarak bilinen

$$Ly(x) = -y'' + q(x)y = \lambda y \tag{3.1.1.1}$$

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \tag{3.1.1.2}$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \tag{3.1.1.3}$$

probleminin tanımlı olduğu $[a,b]$ aralığı sonlu ve problemdeki $q(x)$ fonksiyonu bu aralıkta toplanabilir ise, bu sınır değer problemine *regülerdir* denir. Diğer durumlarda, yani $[a,b]$ aralığının sonlu olmadığı veya $q(x)$ in $[a,b]$ de toplanabilir olmadığı veya bu iki durumun her ikisinin geçerli olması halinde ise probleme *singülerdir* denir.

Tanım 3.1.1.2 Eğer (3.1.2.1)-(3.1.2.3) sınır değer problemi belli bir λ_1 değeri için aşikar olmayan bir $y(x,\lambda_1)$ çözümüne sahipse, λ_1 e (3.1.1.1)-(3.1.1.3) sınır değer probleminin bir *özdeğeri*, $y(x,\lambda_1)$ e ise bu özdeğere karşılık gelen *özfonksiyon* denir.

Tanım 3.1.1.3 Eğer (3.1.1.1)-(3.1.1.3) sınır değer problemi belli bir λ_1 değeri için aşikar olmayan bir $y(x,\lambda_1)$ çözümüne sahipse, λ_1 e (3.1.1.1)-(3.1.1.3) sınır değer probleminin bir *özdeğeri*, $y(x,\lambda_1)$ e ise bu özdeğere karşılık gelen *özfonksiyon* denir.

Tanım 3.1.1.4 H bir Hilbert uzayı ve A bu uzayda tanımlı bir operatör olmak üzere, $R_\lambda = (A-\lambda I)^{-1}$ ifadesi H uzayının tamamında mevcut ve sınırlı olacak biçimde bir $\lambda \in \mathbb{C}$ bulunabiliyorsa, bu λ değerine A operatörünün *regüler noktası* denir. R_λ operatörü ise A nın *rezolventi* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.1.5 Bir $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm $f(x)$ fonksiyonları için

$$Af(x)=\int_a^b k(x,\xi)\,f(\xi)d\xi$$

biçiminde tanımlanan A operatörüne $k(x,\xi)$ çekirdeğine sahip *integral operatör* denir. Burada $\xi\in[a,b]$ dir.

Tanım 3.1.1.6 L operatörü

$$l(y)=p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\dots+p_n(x)y$$

diferansiyel ifadesi ve

$$U_\nu(y)=0 \qquad \nu=1,2,\dots,n$$

sınır koşullarından oluşan diferansiyel operatör olsun, burada $\dfrac{1}{p_0(x)}$, $p_1(x),\dots,p_n(x)$ katsayıları süreklidir. Ayrıca $U_\nu(y)$ sınır koşulları aşağıdaki biçimde bir lineer form oluşturur:

$$U_\nu(y)=\alpha_0 y_a+\alpha_1 y_a'+\dots+\alpha_{n-1}y_a^{(n-1)}+\beta_0 y_b+\beta_1 y_b'+\dots+\beta_{n-1}y_b^{(n-1)}=0$$

L^{-1} operatörü, sürekli çekirdeğe sahip bir integral operatördür. Bu çekirdek, L operatörünün *Green fonksiyonu* olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.1.1 Eğer $Ly=0$ denklemi, sadece $y=0$ çözümüne sahipse, $[a,b]$ aralığında sürekli herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için $Ly=f$ denkleminin bir çözümü vardır ve bu çözüm

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)\,f(\xi)d\xi$$

şeklinde ifade edilir, burada $G(x,\xi)$ L operatörünün Green fonksiyonudur.

Teorem 3.1.1.2 $f(x)$ in ikinci mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olduğunu ve (3.1.1.2)-(3.1.1.3) sınır koşullarını sağladığını kabul edelim. Bu durumda $f(x)$, (3.1.1.1)-(3.1.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıyla, mutlak ve düzgün yakındak bir Fourier serisine açılabilir. O halde

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x) \qquad a_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx$$

sağlanır.

Şimdi aşağıdaki regüler sınır değer problemini ele alalım:

$$y'' + \{\lambda - q(x)\} y = f(x) \tag{3.1.1.4}$$

$$y(0)\cos\alpha + y'(0)\sin\alpha = 0 \tag{3.1.1.5}$$

$$y(\pi)\cos\beta + y'(\pi)\sin\beta = 0 \tag{3.1.1.6}$$

problemini ele alalım ve bu problemin özfonksiyonların

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \quad a_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x) dx \tag{3.1.1.7}$$

formundaki ayrışımının gerçeklendiğini kabul edelim. O halde

$$y(x,\lambda) = \int_0^{\pi} G(x,t;\lambda) f(t) dt \tag{3.1.1.8}$$

formülü ile tanımlanan $y(x,\lambda)$ rezolventi

$$y(x,\lambda) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a_n}{\lambda - \lambda_n} v_n(x)$$

özfonksiyon açılımına sahiptir ve (3.1.1.4) denklemini sağlar. Burada $u(x,\lambda)$ (3.1.1.4) denkleminin $u(0,\lambda) = \sin\alpha, u'(0,\lambda) = -\cos\alpha$ koşullarını sağlayan çözümü; $v(x,\lambda)$ ise aynı denklemin $v(\pi,\lambda) = \sin\beta, v'(\pi,\lambda) = -\cos\beta$ koşullarını sağlayan çözümleri olmak üzere,

$$G(x,t;\lambda) = \frac{1}{w(\lambda)} \begin{cases} u(x,\lambda)v(t,\lambda) & x \le t, \\ u(t,\lambda)v(x,\lambda) & x \ge t, \end{cases}$$

biçimindedir.

(3.1.1.4) denklemini çözerek ve $y(x,\lambda)$ fonksiyonunun kutuplardaki rezidülerini bularak, bir $f(x)$ fonksiyonunun ayrışım formülündeki terimleri belirleyebiliriz. $w(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları (3.1.1.4)-(3.1.1.6) probleminin özdeğerleriyle çakışıktır ve basittir.

$v(x,\lambda_n) = k_n u(x,\lambda_n)$ olduğunu kabul edelim. Sınır koşullarından, k_n in sonlu ve sıfırdan farklı olduğunu söyleyebiliriz.

$y(x,\lambda)$ fonksiyonu, $\lambda = \lambda_n$ noktasında

$$\frac{k_n}{w'(\lambda_n)} u(x, \lambda_n) \int_0^\pi u(t, \lambda_n) f(t) dt$$

rezidüsüne sahiptir.

Bu bahsettiklerimiz bize ayrışım formülünün

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{k_n}{w'(\lambda_n)} u(x, \lambda_n) \int_0^\pi u(t, \lambda_n) f(t) dt$$

şeklinde olacağını söyler.

(3.1.1.8) ile tanımlanan, $y(x, \lambda)$ fonksiyonun, kompleks λ düzleminde eğrisel integralini alarak, $f(x)$ fonksiyonunun limit durumunu; üzerinden integral aldığımız eğriyi, $y(x, \lambda)$ nın singülaritelerinin olduğu reel eksene taşıyarak da $f(x)$ in özfonksiyonlara göre ayrışım formülünü elde ederiz.

Burada, singüler durumda; ayrışım formülünün, regüler durumun limiti şeklinde elde edilebildiğini belirtmekte fayda vardır.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1 İKİNCİ MERTEBEDEN SÜREKSİZ KATSAYILI SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN SPEKTRAL PROBLEM

4.1.1 Çözümün Yeni İntegral Gösterimi

Pozitif yarı eksende verilen aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x) y \tag{4.1.1.1}$$

$$y(0) = 0 \tag{4.1.1.2}$$

Burada λ spektral parametre, $q(x)$ ise

$$\int_0^\infty x\left|q(x)\right| dx < \infty \tag{4.1.1.3}$$

koşulunu sağlayan reel değerli bir fonksiyondur. Ayrıca, $\rho(x)$ katsayısı $0 < \alpha \neq 1$ olmak üzere

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, & 0 \le x \le a \\ 1\ , & x \ge a \end{cases}$$

biçimindedir.

$$f_0(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right) e^{i\lambda\mu^+(x)} + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right) e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

(4.1.1.1) denkleminin $q(x) \equiv 0$ olduğundaki çözümüdür. Burada $\mu^\pm(x) = \pm x\sqrt{\rho(x)} + a(1 \mp \sqrt{\rho(x)})$ biçimindedir. [8] kullanılarak, kapalı üst yarı düzlemdeki tüm λ lar için $K(x,.) \in L_1(\mu^+(x), +\infty)$ olmak üzere (4.1.1.1) denkleminin aşağıdaki şekilde tek bir $f(x,\lambda)$ çözümü olduğu gösterilebilir:

$$f(x,\lambda) = f_0(x,\lambda) + \int_{\mu^+(x)}^\infty K(x,t) e^{i\lambda t} dt.$$

4.1.2 Spektral Verilerin Özellikleri

Lemma 4.1.2.1 $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ fonksiyonlarının Wronskiyenleri x'e bağlı değildir ve reel $\lambda \neq 0$ için

$$W\left[f(x,\lambda), \overline{f(x,\lambda)} \right] = f(x,\lambda)\overline{f'(x,\lambda)} - f'(x,\lambda)\overline{f(x,\lambda)} = 2i\lambda$$

dır. Bu nedenle $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ fonksiyonları (4.1.1.1) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur.

İspat: $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ (4.1.1.1) denkleminin çözümleri olduğundan

$$-f''(x,\lambda) + q(x) f(x,\lambda) = \lambda^2 \rho(x) f(x,\lambda)$$

$$-\overline{f(x,\lambda)}'' + q(x)\overline{f(x,\lambda)} = \lambda^2 \rho(x)\overline{f(x,\lambda)}$$

yazabiliriz.

$$\frac{d}{dx} W\left[f(x,\lambda), \overline{f(x,\lambda)} \right] = f(x,\lambda)\overline{f(x,\lambda)}'' - f''(x,\lambda)\overline{f(x,\lambda)} =$$

$$= \left[q(x) - \lambda^2 \rho(x) \right] \overline{f(x,\lambda)} f(x,\lambda) - \left[q(x) - \lambda^2 \rho(x) \right] f(x,\lambda)\overline{f(x,\lambda)} = 0$$

Böylece wronskiyenin x e bağlı olmadığı elde edilir.

$\lim_{x\to\infty} W\left[f(x,\lambda), \overline{f(x,\lambda)} \right] = 0$ olduğundan $W\left[f(x,\lambda), \overline{f(x,\lambda)} \right] = 2i\lambda$ dır.□

$w(x,\lambda)$ (4.1.1.1) denkleminin $w(0,\lambda)=0,\ w'(0,\lambda)=1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

Lemma 4.1.2.2 Reel $\lambda \neq 0$ için

$$-2i\lambda \frac{w(x,\lambda)}{f(0,\lambda)} = \overline{f(x,\lambda)} - S(\lambda) f(x,\lambda) \tag{4.1.2.1}$$

ve

$$S(\lambda) = \frac{\overline{f(0,\lambda)}}{f(0,\lambda)} \tag{4.1.2.2}$$

ifadeleri sağlanır.

İspat: $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ (4.1.1.1) denkleminin temel çözümleri olduğundan

$$w(x,\lambda) = c_1 f(x,\lambda) + c_2 \overline{f(x,\lambda)}$$

yazabiliriz.

$$W\left[f(x,\lambda), w(x,\lambda) \right]_{x=0} = f'(0,\lambda) w(0,\lambda) - f(0,\lambda) w'(0,\lambda) = -f(0,\lambda)$$

$$W\left[\overline{f(x,\lambda)}, w(x,\lambda) \right]_{x=0} = \overline{f'(0,\lambda)} w(0,\lambda) - \overline{f(0,\lambda)} w'(0,\lambda) = -\overline{f(0,\lambda)}$$

eşitliklerini göz önüne alırsak, $c_1 = \frac{\overline{f(0,\lambda)}}{2i\lambda}$ ve $c_2 = -\frac{f(0,\lambda)}{2i\lambda}$ elde ederiz.

O halde

$$w(x,\lambda) = \frac{\overline{f(0,\lambda)}}{2i\lambda} f(x,\lambda) - \frac{f(0,\lambda)}{2i\lambda}\overline{f(x,\lambda)} \tag{4.1.2.3}$$

yazabiliriz.

Şimdi, tüm reel λ lar için $f(0,\lambda) \neq 0$ olduğunu gösterelim. Tersini kabul edelim. O halde, $f(0,\lambda_0) = 0$ olacak şekilde bir λ_0 reel sayısı vardır. Bu durumda,

$$f'(0,\lambda_0)\overline{f(0,\lambda_0)} - f(0,\lambda_0)\overline{f'(0,\lambda_0)} = 2i\lambda_0$$

eşitliğinden bir çelişki elde ederiz. (4.1.2.3) nın her tarafını $f(0,\lambda)$ ile bölüp $-2i\lambda$ ile çarparsak (4.1.2.1) ün doğruluğunu görmüş oluruz. Burada

$$S(\lambda) = \frac{\overline{f(0,\lambda)}}{f(0,\lambda)}$$

şeklinde tanımlanır.

$\overline{S(\lambda)} = \frac{f(0,\lambda)}{\overline{f(0,\lambda)}} = \left[S(\lambda)\right]^{-1}$ olduğundan $S(\lambda) = \left[\overline{S(\lambda)}\right]^{-1}$ ve

$S(\lambda)\cdot\overline{S(\lambda)} = \frac{\overline{f(0,\lambda)}}{f(0,\lambda)}\cdot\frac{f(0,\lambda)}{\overline{f(0,\lambda)}} = 1$ olduğundan $|S(\lambda)| = 1$ buluruz. □

$\varphi(\lambda) = f(0,\lambda)$ tanımlansın.

Lemma 4.1.2.3 $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları sanal eksende yerleşir.

İspat: Tüm $\lambda \neq 0$ lar için $\varphi(\lambda) \neq 0$ olduğundan, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun olabilecek olan tek sıfırı $\lambda = 0$ dır. $\varphi(\lambda)$ nın üst yarı düzlemdeki analitikliğinden, $\varphi(\lambda)$ nın sıfırlarının, sayılabilir çoklukta elemana sahip bir küme oluşturduğu söylenebilir.

μ_1 ve μ_2 $(\operatorname{Im}\mu_j \geq 0, j = 1,2)$ nin $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun iki sıfırı olduğunu kabul edelim ve aşağıdaki eşitlikleri yazalım:

$$-f''(x,\mu_1) + q(x) f(x,\mu_1) = \mu_1^2 \rho(x) f(x,\mu_1),$$

$$-\overline{f''(x,\mu_2)} + q(x)\overline{f(x,\mu_2)} = \overline{\mu_2}^2 \rho(x)\overline{f(x,\mu_2)}.$$

Eşitlikleri sırasıyla $\overline{f(x,\mu_2)}$ ve $f(x,\mu_1)$ ile çarpıp, sonuç eşitliklerinden ikincisini birinciden çıkardıktan sonra, sıfırdan sonsuza integral alırsak;

$$(\mu_1^2-\overline{\mu_2}^2)\int_0^\infty \rho(x)\,f(x,\mu_1)\,\overline{f(x,\mu_2)}dx - W\left\{f(x,\mu_1),\overline{f(x,\mu_2)}\right\}_{x=0}=0. \qquad (4.1.2.4)$$

buluruz. Buradan, $\varphi(\lambda)$ nın herhangi iki μ_1 ve μ_2 sıfırı için

$$W\left\{f(x,\mu_1),\overline{f(x,\mu_2)}\right\}_{x=0}=0$$

yazabiliriz. O halde (4.1.2.4)

$$(\mu_1^2-\overline{\mu_2}^2)\int_0^\infty \rho(x)\,f(x,\mu_1)\,\overline{f(x,\mu_2)}dx=0 \qquad (4.1.2.5)$$

halini alır. Özel olarak, $\mu_2=\mu_1$ durumu $\mu_1^2-\overline{\mu_1}^2=0$ olmasını veya $\lambda_1\geq 0$ iken $\mu_1=i\lambda_1$ olmasını gerektirir. Bu ise, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sanal eksen üzerinde yerleştiğini gösterir. □

Lemma 4.1.2.4 $\varphi(\lambda)$ fonksiyonun sıfırları basittir.

İspat: $f(x,\lambda)$ fonksiyonunun λ ya ve x e göre türevlerini sırasıyla $\dot{f}(x,\lambda)$ ve $f'(x,\lambda)$ ile gösterelim.

$$-f''(x,\lambda)+q(x)\,f(x,\lambda)=\lambda^2\rho(x)\,f(x,\lambda)$$

eşitliğinin λ ya göre türevinden

$$-\dot{f}''(x,\lambda)+q(x)\,\dot{f}(x,\lambda)=2\lambda\rho(x)\,f(x,\lambda)+\lambda^2\rho(x)\,\dot{f}(x,\lambda)$$

olur. Son iki eşitlikten ve $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun tanımından

$$2\lambda\int_0^\infty \rho(x)\left|f(x,\lambda)\right|^2 dx=-f'(0,\lambda)\dot{\varphi}(\lambda)+\varphi(\lambda)\,\dot{f}'(0,\lambda)$$

elde edilir. Burada $\lambda=i\mu_k$ alınırsa,

$$2i\mu_k\int_0^\infty \rho(x)\left|f(x,i\mu_k)\right|^2 dx=-f'(0,i\mu_k)\dot{\varphi}(i\mu_k) \qquad (4.1.2.6)$$

bulunur, dolayısıyla $f'(0,i\mu_k)\dot{\varphi}(i\mu_k)\neq 0$ ki, bu da $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının basit olması demektir. □

Lemma 4.1.2.5 $\varphi(\lambda)$ fonksiyonu üst düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ sonlu sayıda $\lambda_k \ (k = 1, 2, ..., n)$ sıfırlarına sahiptir.

İspat: δ, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun, birbirine komşu olan, iki sıfırı arasındaki uzaklığın infimumu olsun. $\delta > 0$ olduğunu gösterelim.

Aksini kabul edelim. O halde $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\tilde{\lambda}_k - \lambda_k\right\} = 0$, $\tilde{\lambda}_k \geq \lambda_k > 0$ ve $\max\limits_{k} \tilde{\lambda}_k < M$ sağlanacak biçimde, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarından oluşan, $\left\{i\tilde{\lambda}_k\right\}$ ve $\left\{i\lambda_k\right\}$ dizileri vardır. (4.1.1.1) denkleminin $f(x,\lambda)$ çözümünün özelliğinden (Bknz. [4]) yeterince büyük A sayıları için,

$f(x,\lambda) > \dfrac{1}{2}\exp(-\lambda x)$ eşitsizliğinin $x \in [A, \infty]$ ve $\lambda \in [0, \infty)$ a göre gerçeklendiğini söyleyebiliriz. Buradan ise

$$\int\limits_A^\infty f(x, i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x, i\lambda_k)}dx > \frac{e^{-A(\tilde{\lambda}_k+\lambda_k)}}{4(\tilde{\lambda}_k+\lambda_k)} > \frac{e^{-2MA}}{8M} \tag{4.1.2.7}$$

sağlanır.

Diğer taraftan (4.1.2.6) dan,

$$0 = \int\limits_0^\infty f(x, i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x, i\lambda_k)}dx = \int\limits_A^\infty f(x, i\tilde{\lambda}_k)\left[\overline{f(x, i\lambda_k)} - \overline{f(x, i\tilde{\lambda}_k)}\right]dx +$$

$$+\int\limits_0^A f(x, i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x, i\tilde{\lambda}_k)}dx + \int\limits_0^A f(x, i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x, i\lambda_k)}dx$$

olur. $k \to \infty$ iken $x \in [0, A)$ için $\lim\limits_{k\to\infty}\left[f(x, i\tilde{\lambda}_k) - f(x, i\lambda_k)\right] = 0$ olduğundan,

$$0 \geq \varliminf_{k\to\infty}\int\limits_A^\infty f(x, i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x, i\tilde{\lambda}_k)}dx \tag{4.1.2.8}$$

sağlanır. (4.1.2.7) ve (4.1.2.8) ifadeleri bir çelişki oluşturur. O halde kabulümüzün yanlış olduğunu ve dolayısıyla $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısının sonlu olduğunu söyleyebiliriz. □

$\lambda = i\lambda_j \ (\lambda_j > 0), j = 1, 2, ..., n$ ler $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları olsunlar. Ayrıca m_j^{-1} nin $f(i\lambda_j, x)$ fonksiyonunun $L_{2,\rho}(0,\infty)$ daki normu olduğunu kabul edelim.

O halde, (4.1.2.6) dan

$$m_j^{-2} \equiv \int_0^\infty \rho(x)\left|f(x,i\lambda_j)\right|^2 dx = -\frac{1}{2i\lambda_j}\dot{\varphi}(i\lambda_j)f'(0,i\lambda_j) \qquad (4.1.2.9)$$

yazabiliriz. Bu sayılar (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin *normlaştırıcı sayıları* olarak adlandırılır.

4.1.3 Rezolvent Operatörün İnşa Edilmesi

Bu bölümde (4.1.1.1), (4.1.1.2) probleminin rezolvent operatörünü inşa edeceğiz. $H_\rho = L_{2,\rho}(0,\infty)$ uzayındaki iç çarpımı

$$\langle f,g\rangle := \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$

ile tanımlayalım. Burada $f(x), g(x) \in L_{2,\rho}(0,\infty)$ dur. $l(f) = \{-f''(x) + q(x)f(x)\}$ olmak üzere $L: f \to l(f)$ operatörünün tanım kümesi

$$D(L) = \left\{ f(x) \in L_{2,\rho}(0,\infty) : f(x), f'(x) \in AC\left[0,\infty\right), l(f) \in L_{2,\rho}(0,\infty), f(0) = 0 \right\}$$

biçimindedir. (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer problemi $Ly = \lambda^2\rho(x)y$ eşitliğine denktir.

Eğer λ^2, L operatörünün spektrum noktası değilse $R_{\lambda^2}(L) = (L - \lambda^2 I)^{-1}$ rezolvent operatörü vardır. Şimdi rezolvent operatörünün biçimini bulalım.

Teorem 4.1.3.1 Tüm λ^2 $(\mathrm{Im}\lambda \geq 0, \varphi(\lambda) \neq 0)$ sayıları L operatörünün rezolvent kümesine aittir. $R_{\lambda^2}(L)$ rezolventi

$$R_{\lambda^2}(L) = \int_0^\infty G(x,t;\lambda)g(t)\rho(t)dt$$

çekirdeğine sahip bir integral operatördür.Burada

$$G(x,t;\lambda) = -\frac{1}{\varphi(\lambda)}\begin{cases} w(x,\lambda)f(t,\lambda), & t \geq x \\ f(x,\lambda)w(t,\lambda), & t \leq x \end{cases}$$

dir.

İspat: $g(x) \in D(L)$ nin sonsuzlukta sonlu değere sahip bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. L nin rezolvent operatörünü inşa etmek için

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x) y + g(x)\rho(x) \tag{4.1.3.1}$$

$$y(0) = 0 \tag{4.1.3.2}$$

sınır değer problemi çözülmelidir. (4.1.3.1), (4.1.3.2) probleminin çözümünü

$$y(x,\lambda) = c_1(x,\lambda) w(x,\lambda) + c_2(x,\lambda) f(x,\lambda) \tag{4.1.3.3}$$

biçiminde arayalım. Burada $w(x,\lambda)$ ve $f(x,\lambda)$ fonksiyonları $\operatorname{Im}\lambda > 0$ için homojen problemin çözümleridir.

Sabitlerin değişimi yöntemini uygulayarak, aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz:

$$\begin{cases} c_1'(x,\lambda) w(x,\lambda) + c_2'(x,\lambda) f(x,\lambda) = 0 \\ c_1'(x,\lambda) w'(x,\lambda) + c_2'(x,\lambda) f'(x,\lambda) = -\rho(x) g(x). \end{cases} \tag{4.1.3.4}$$

$y(x,\lambda) \in L_{2,\rho}(0,\infty)$ olması için $c_1(\infty,\lambda) = 0$ olmalıdır. Bu bilgiyi ve (4.1.3.2) denklemler sistemini göz önünde bulundurursak,

$$c_1(x,\lambda) = -\frac{1}{\varphi(\lambda)} \int_x^\infty f(t,\lambda) g(t) \rho(t) dt,$$

$$c_2(x,\lambda) = c_2(0,\lambda) - \frac{1}{\varphi(\lambda)} \int_0^x w(t,\lambda) g(t) \rho(t) dt \tag{4.1.3.5}$$

(4.1.3.3) i (4.1.3.4) te yerine yazıp, (4.1.2.9) yi dikkate alarak, teoremin ispatını bitiririz. □

Lemma 4.1.3.2 $g(x) \in D(L)$ iki kez türevlenebilen, sonsuzlukta sonlu değer alan bir fonksiyon olsun. O halde $|\lambda| \to \infty, \operatorname{Im}\lambda > 0$ iken

$$\int_0^\infty G(x,t;\lambda) g(t) \rho(t) dt = -\frac{g(x)}{\lambda^2} + \frac{Z(x,\lambda)}{\lambda^2} \tag{4.1.3.6}$$

dir. Burada $\tilde{g}(t) = -g'' + q(t) g(t)$ iken $Z(x,\lambda) = \int_0^\infty G(x,t;\lambda) \tilde{g}(t) \rho(t) dt$ dir.

İspat: Teorem 4.1.3.1 i kullanarak ve kısmi integrasyon yaparak

$$\int_0^\infty G(x,t;\lambda) g(t) \rho(t) dt = -\frac{1}{\varphi(\lambda)} \left\{ w(x,\lambda) \int_x^\infty f(t,\lambda) g(t) \rho(t) dt + \right.$$

$$\left. + f(x,\lambda) \int_0^x w(t,\lambda) g(t) \rho(t) dt \right\}$$

$$=\frac{W\{f(x,\lambda),w(x,\lambda)\}}{\lambda^2\varphi(\lambda)}g(x)+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty G(x,t;\lambda)\tilde{g}(t)\rho(t)dt,$$

buluruz.Buradan (4.1.3.6) nın gerçeklendiği kolayca görülür. □

4.1.4 Kontür Üzere İntegralleme Yöntemiyle Özfonksiyonlara Göre Ayrışım Formülünün Elde Edilmesi

Bu bölümde (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülünü bulacağız.

$S(\lambda),\lambda_j,m_j$ (j=1,2,...,n) leri yukarıda tanımlandıkları şekliyle, (4.1.1.1),(4.1.1.2) sınır değer probleminin sınır çözümlerini ise aşağıdaki gibi alalım:

$$u(x,\lambda)=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[f(x,\lambda)-S(\lambda)f(x,\lambda)\right],\qquad 0<\lambda^2<\infty,$$

$$u(x,i\lambda_j)=m_j f(x,i\lambda_j),\qquad j=1,2,...,n.$$

Bir eğri boyunca integralleme yapılarak, bu çözümlerin tam bir sistem oluşturdukları gösterilebilir.

Teorem 4.1.4.1 Parseval eşitliğine denk olan ayrışım formülü sağlanır:

$$\delta(x-t)\rho(x)^{-1}=\sum_{j=1}^{n}u(x,i\lambda_j)u(t,i\lambda_j)+\int_0^\infty u(x,\lambda)\overline{u(t,\lambda)}d\lambda, \qquad (4.1.4.1)$$

burada δ Dirac delta fonksiyonudur. Ayrıca $x\to\infty$ iken aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir:

$$u(x,\lambda)=e^{-i\lambda x}-S(\lambda)e^{i\lambda x}+o(1)\qquad (0<\lambda^2<\infty),$$

$$u(x,i\lambda_j)=m_j e^{-\lambda_j x}\left[1+o(1)\right]\qquad (j=1,2,...,n). \qquad (4.1.4.2)$$

İspat:

$$F(x,\lambda)=\int_0^\infty G(x,t;\lambda)g(t)\rho(t)dt$$

alalım ve Γ_R nin sıfır merkezli R yarıçaplı pozitif yönlendirilmiş bir çember olduğunu kabul edelim.

$$D=\{z:|z|\le R,\ |\operatorname{Im} z|\ge\varepsilon\}$$

bölgesinin pozitif yönlendirilmiş sınırını $\Gamma_{R,\varepsilon}$ ile gösterelim ve bu eğri üzerinden integral alalım.

(4.1.3.6) eşitliğinin her tarafını $\frac{1}{2\pi i}\lambda$ ile çarpıp, λ ya göre integral alırsak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda F(x,\lambda)d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{g(x)}{\lambda}d\lambda + Z_{R,\varepsilon}(x)$$

elde ederiz. Burada $Z_{R,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{Z(x,\lambda)}{\lambda}d\lambda$ dır

$w(x,\lambda)$ ve $f(x,\lambda)$ fonksiyonlarının özelliklerinden, $R\to\infty$ ve $\varepsilon\to 0$ iken $\forall x\in[0,T]\subset[0,\infty)$ için $Z_{R,\varepsilon}\to 0$ sağlanır.

Bu son eşitlikten, $R\to\infty$ ve $\varepsilon\to 0$ iken

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda F(x,\lambda)d\lambda = -g(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left[F(x,\lambda+i0) - F(x,\lambda-i0)\right]d\lambda$$

yazabiliriz.

Diğer taraftan, rezidü teorisinden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda F(x,\lambda)d\lambda = \sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{\lambda=i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] + \sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{\lambda=-i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right]$$

olur. Son iki eşitliği kullanarak,

$$g(x) = -\sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{\lambda=i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] - \sum_{j=1}^{n}\operatorname*{Res}_{\lambda=-i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] +$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left[F(x,\lambda+i0) - F(x,\lambda-i0)\right]d\lambda \qquad (4.1.4.3)$$

elde ederiz.

Şimdi, $\psi(x,\lambda)$ nın (4.1.1.1) denkleminin $\psi(0,\lambda)=1$, $\psi'(0,\lambda)=0$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olduğunu kabul edelim. $W\{w(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\}=1$ olduğu açıktır. O halde $f(x,\lambda) = c_1 w(x,\lambda) + c_2\psi(x,\lambda)$ yazabiliriz. Buradan

$$f(x,\lambda) = f'(0,\lambda)w(x,\lambda) + f(0,\lambda)\psi(x,\lambda)$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla,

$$G(x,t;\lambda)=-\frac{1}{\varphi(\lambda)}\begin{cases} w(x,\lambda)\left[f'(0,\lambda)w(t,\lambda)+f(0,\lambda)\psi(t,\lambda)\right], & x\le t<\infty, \\ \left[f'(0,\lambda)w(x,\lambda)+f(0,\lambda)\psi(x,\lambda)\right]w(t,\lambda), & 0\le t\le x, \end{cases}$$

$$=-\frac{f'(0,\lambda)}{\varphi(\lambda)}w(x,\lambda)w(t,\lambda)-\begin{cases} w(x,\lambda)\psi(t,\lambda), & x\le t, \\ \psi(x,\lambda)w(t,\lambda), & t\le x, \end{cases} \qquad (4.1.4.4)$$

olur.

Benzer şekilde $\operatorname{Im}\lambda\ge 0$ için

$$F(x,\lambda)=-\frac{1}{\varphi(\lambda)}f'(0,\lambda)w(x,\lambda)\int_0^\infty w(t,\lambda)g(t)\rho(t)dt-$$

$$-\psi(x,\lambda)\int_0^x w(t,\lambda)g(t)\rho(t)dt-w(x,\lambda)\int_x^\infty \psi(t,\lambda)g(t)\rho(t)dt$$

dır. O halde,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right]=-\frac{i\lambda_j}{\dot\varphi(i\lambda_j)}f'(0,i\lambda_j)\int_0^\infty w(t,i\lambda_j)g(t)\rho(t)dt$$

yazabiliriz.

Buradan,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=i\lambda_j}\left[\lambda\int_0^\infty G(x,t;\lambda)g(t)\rho(t)dt\right]+\operatorname*{Res}_{\lambda=-i\lambda_j}\left[\lambda\int_0^\infty \overline{G(x,t;\lambda)}g(t)\rho(t)dt\right]=$$

$$=\left(-\frac{2i\lambda_j}{\dot\varphi(i\lambda_j)}\right)f'(0,i\lambda_j)w(x,i\lambda_j)\int_0^\infty w(t,i\lambda_j)g(t)\rho(t)dt$$

$$=\frac{\left(2i\lambda_j\right)^2}{\dot\varphi(i\lambda_j)^2 m_j^{\,2}}w(x,i\lambda_j)\int_0^\infty w(t,i\lambda_j)g(t)\rho(t)dt$$

$$=u(x,i\lambda_j)\int_0^\infty u(t,i\lambda_j)g(t)\rho(t)dt \qquad (4.1.4.5)$$

olur. Şimdi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\left[F(x,\lambda+i0)-F(x,\lambda-i0)\right]d\lambda$$

ifadesini hesaplayalım.

(4.1.4.4) den ve $F(x,\lambda-i0)=\overline{F(x,\lambda+i0)}$ eşitliğinden

$$G(x,t;\lambda+i0)-G(x,t;\lambda-i0)=\left[-\frac{f'(0,\lambda+i0)}{\varphi(\lambda+i0)}+\frac{f'(0,\lambda-i0)}{\varphi(\lambda-i0)}\right]w(x,\lambda)w(t,\lambda)$$

$$=\left[\frac{\varphi(\lambda)}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}\overline{f'(0,\lambda)}-\frac{\overline{\varphi(\lambda)}}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}f'(0,\lambda)\right]w(x,\lambda)w(t,\lambda)=\frac{2i\lambda}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}w(x,\lambda)w(t,\lambda)$$

yazabiliriz.

Buradan $\overline{u(x,\lambda)}=\sqrt{\dfrac{1}{2\pi}}\left[f(x,\lambda)-\overline{S(\lambda)}\,\overline{f(x,\lambda)}\right]$iken,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\left[F(x,\lambda+i0)-F(x,\lambda-i0)\right]d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^{\infty}\frac{\lambda^2}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}w(x,\lambda)\int_0^{\infty}w(t,\lambda)g(t)\rho(t)dtd\lambda$$

$$=\int_0^{\infty}u(x,\lambda)\int_0^{\infty}\overline{u(t,\lambda)}g(t)\rho(t)dtd\lambda \qquad (4.1.4.6)$$

olduğunu söyleyebiliriz.

O halde, (4.1.4.4), (4.1.4.5) i (4.1.4.6) de dikkate alırsak, özfonksiyonlar için ayrışım formülünü aşağıdaki şekilde buluruz:

$$g(x)=\sum_{j=1}^{n}u(x,i\lambda_j)\int_0^{\infty}u(t,i\lambda_j)g(t)\rho(t)dt+\int_0^{\infty}u(x,\lambda)\int_0^{\infty}\overline{u(t,\lambda)}g(t)\rho(t)dtd\lambda$$

(4.1.4.7)

(4.1.4.1) formülü (4.1.4.7) formülüne denk olan Parseval eşitliğidir. Teoremdeki asimptotik ifadeler $x\to\infty$ iken (4.1.4.1) nin sağladığı özelliklerdir. □

(4.1.4.7) ü Stieltjes integrali biçiminde yazarsak

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}w(x,\lambda)\left(\int_0^{\infty}w(t,\lambda)g(t)\rho(t)dt\right)d\sigma(\lambda) \qquad (4.1.4.8)$$

olur. Burada $d\sigma(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\lambda^2d\lambda}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2} & \lambda\geq 0\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{(2i\lambda_j)^2\delta(\lambda-i\lambda_j)}{m_j^{\,2}\dot{\varphi}(i\lambda_j)^2} & \lambda<0\end{cases}$ L operatörünün spektral fonksiyonudur.

(4.1.4.8) de $G(\lambda)=\int_0^\infty w(x,\lambda)g(x)\rho(x)dx$ alırsak

$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty} G(\lambda)w(x,\lambda)d\sigma(\lambda)$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafını $g(x)$ ile çarparsak

$$\int_0^\infty g^2(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty} G^2(\lambda)d\sigma(\lambda)$$

Parseval eşitliğini elde ederiz.

4.1.5 Spektrum Kümesinin İncelenmesi

Lemma 4.1.5.1 L operatörünün pozitif yarı eksende özdeğeri yoktur.

İspat: $\lambda_0^{\,2}>0$ L operatörünün bir özdeğeri ve $y_0(x)=y(x,\lambda_0)$ bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. $f(x,\lambda_0)$ ve $\overline{f(x,\lambda_0)}$ temel çözümler sistemi olduğundan, (4.1.1.1) denkleminin genel çözümü

$$y_0(x)=c_1 f(x,\lambda_0)+c_2\overline{f(x,\lambda_0)}$$

biçiminde yazılabilir. $x\to\infty$ iken; $f(x,\lambda_0)\to e^{i\lambda_0 x}$ ve $\overline{f(x,\lambda_0)}\to e^{-i\lambda_0 x}$ olduğundan,

$$y_0(x)=c_1e^{i\lambda_0 x}+c_2e^{-i\lambda_0 x}+o(1)$$

yazılabilir. Bu eşitliğin temel kısmi periyodik olduğundan, fonksiyon c_1 ve c_2 nin hiçbir değeri için $L_2(0,\infty)$ a ait değildir. □

Lemma 4.1.5.2 $-\lambda_0^{\,2}(\lambda_0\neq 0)$ ın bir özdeğer olması için gerek ve yeter koşul $\varphi(\lambda_0)=0$ olmasıdır.

İspat: $\operatorname{Im}\lambda_0>0$ için $\varphi(\lambda_0)=0$ olduğunu kabul edelim. O halde $f(0,\lambda_0)=0$ dır. Dolayısıyla, $f(0,\lambda_0)$ (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin bir çözümüdür. $x\to\infty$ iken $f(x,\lambda_0)$ üstel biçimde arttığından, $f(x,\lambda_0)\in L_2(0,\infty)$ dur ve dolayısıyla $f(x,\lambda_0)$, L operatörünün $-\lambda_0^{\,2}$ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur.

Tersine, $-\lambda_0^{\,2}(\lambda_0\neq 0)$ bir özdeğer ve $y(x,\lambda_0)$ L operatörünün bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonu olsun. O halde $y(0,\lambda_0)=0$ dır. $y'(0,\lambda_0)\neq 0$ olduğu açıktır. Genelliği kaybetmeksizin, $y'(0,\lambda_0)=1$ olduğunu kabul edelim ve $x\to\infty$ iken $\hat{f}(x,\lambda)$ nın (4.1.1.1) denkleminin sonlu olmayan çözümü olduğunu kabul edelim ([5]). $f(x,\lambda)$ ve $\hat{f}(x,\lambda)$ (4.1.1.1) denkleminin temel çözümler sistemi olduğundan $y(x,\lambda_0)=c_1 f(x,\lambda)+c_2\hat{f}(x,\lambda)$ yazılabilir. $x\to\infty$ iken, $c_2=0$ ve $c_1\neq 0$ elde edilir. Son eşitlikte $x=0$ yazarsak, $y(0,\lambda_0)=c_1 f(0,\lambda_0)$ veya $f(0,\lambda_0)=\varphi(\lambda_0)=0$ bulunur. Dolayısıyla, tüm $-\lambda_0^{\,2}$ özdeğerleri için (sabit farkıyla farklanabilen) tek bir $y(x,\lambda_0)=cf(x,\lambda)$ $(c\neq 0)$ özfonksiyonu vardır. □

Lemma 4.1.5.3 L operatörü sonlu sayıda $-\lambda_1^{\,2},-\lambda_2^{\,2},...,\lambda_n^{\,2}$ özdeğerine sahiptir.

İspat: Lemma 4.1.1.2 de, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun $\operatorname{Im}\lambda>0$ üst yarı düzleminde sonlu sayıda $i\lambda_1,i\lambda_2,...,i\lambda_n$ özdeğere sahip olduğunu göstermiştik. O halde, Lemma 4.1.5.2 den L operatörünün sonlu sayıda negatif özdeğere sahip olduğunu söyleyebiliriz. □

O halde, (4.1.1.3) sağlandığında (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer problemi sonlu sayıda negatif özdeğere sahiptir ve sürekli spektrum poizitf yarı eksende yerleşir.

4.1.6 $q(x)\equiv 0$ İken (4.1.1.1),(4.1.1.2) Sınır Değer Probleminin Özellikleri

$q(x)\equiv 0$ iken (4.1.1.1),(4.1.1.2) problemi

$$-y''=\lambda^2\rho(x)y,\qquad 0\le x<\infty \tag{4.1.6.1}$$

$$y(0)=0, \tag{4.1.6.2}$$

biçimindedir. Bu problemin çözümü daha önce de belirttiğimiz gibi

$$f_0(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

biçimindedir. Burada yine, $\mu^{\pm}(x)=\pm x\sqrt{\rho(x)}+a(1\mp\sqrt{\rho(x)})$ olduğunu hatırlamakta yarar vardır. Şimdi (4.1.6.1), (4.1.6.2) probleminin özelliklerini inceleyelim:

Lemma 4.1.6.1: $f_0(x,\lambda)$ ve $\overline{f_0(x,\lambda)}$ fonksiyonlarının wronskiyeni x e bağlı değildir ve reel $\lambda \neq 0$ için

$$W[f_0(x,\lambda), \overline{f_0(x,\lambda)}] = f_0'(x,\lambda)\overline{f_0(x,\lambda)} - f_0(x,\lambda)\overline{f_0'(x,\lambda)} = 2i\lambda$$

dır.

$w_0(x,\lambda)$ (4.1.6.1) denkleminin $w_0(0,\lambda)=0,\ w_0'(0,\lambda)=1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

Lemma 4.1.6.2 Reel $\lambda \neq 0$ için

$$-2i\lambda\frac{w_0(x,\lambda)}{f_0(0,\lambda)} = \overline{f_0(x,\lambda)} - S_0(\lambda)f_0(x,\lambda)$$

ve

$$S_0(\lambda) = \frac{\overline{f_0(0,\lambda)}}{f_0(0,\lambda)}$$

ifadeleri gerçeklenir.

$\varphi_0(\lambda) = f_0(0,\lambda)$ tanımlansın.

Lemma 4.1.6.3 $\varphi_0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları sanal eksende yerleşir.

Lemma 4.1.6.4 $\varphi_0(\lambda)$ fonksiyonun sıfırları basittir.

Lemma 4.1.6.5 $\varphi_0(\lambda)$ fonksiyonu üst düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ sonlu sayıda $\lambda_k\ (k=1,2,...,n)$ sıfırlarına sahiptir.

$\lambda = i\lambda_j\ (\lambda_j > 0)\ j=1,2,...,n$ ler $\varphi_0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları olsunlar. Ayrıca m_j^{-1} nin $f_0(x,i\lambda_j)$ fonksiyonunun $L_{2,\rho}(0,\infty)$ daki normu olduğunu kabul edelim.

(4.1.6.1), (4.1.6.2) probleminin *normlaştırıcı sayıları*

$$m_j^{-2} \equiv \int_0^\infty \rho(x)\left|f_0(x,i\lambda_j)\right|^2 dx = -\frac{1}{2i\lambda_j}\dot{\varphi}_0(i\lambda_j)f_0'(i\lambda_j)$$

biçimindedir.

Şimdi (4.1.6.1), (4.1.6.2) probleminin rezolvent operatörünü inşa edelim:

$H_\rho = L_{2,\rho}(0,\infty)$ uzayındaki iç çarpımı

$$\langle f, g \rangle := \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$

ile tanımlayalım. Burada $f(x), g(x) \in L_{2,\rho}(0,\infty)$ dur. $l(f) = \{-f''(x)\}$ olmak üzere $L : f \to l(f)$ operatörünün tanım kümesi

$D(L) = \left\{ f(x) \in L_{2,\rho}(0,\infty) : f(x), f'(x) \in AC[0,\infty), l(f) \in L_{2,\rho}(0,\infty), f(0) = 0 \right\}$

biçimindedir. (4.1.1.1),(4.1.1.2) sınır değer problemi $Ly = \lambda^2 \rho(x) y$ eşitliğine denktir.

Eğer λ^2, L operatörünün spektrum noktası değilse $R_{\lambda^2}(L) = (L - \lambda^2 I)^{-1}$ rezolvent operatörü vardır. Şimdi rezolvent operatörünün biçimini bulalım.

Teorem 4.1.6.1 Tüm λ^2 $(\mathrm{Im}\lambda \geq 0, \varphi_0(\lambda) \neq 0)$ sayıları L operatörünün rezolvent kümesine aittir. $R_{\lambda^2}(L)$ rezolventi

$$R_{\lambda^2}(L) = \int_0^\infty G_0(x,t;\lambda) g(t) \rho(t) dt$$

çekirdeğine sahip bir integral operatördür.Burada

$$G_0(x,t;\lambda) = -\frac{1}{\varphi_0(\lambda)} \begin{cases} w_0(x,\lambda) f_0(t,\lambda), & t \geq x \\ f_0(x,\lambda) w_0(t,\lambda), & t \leq x \end{cases}$$

dir.

Lemma 4.1.6.6 $g(x) \in D(L)$ iki kez türevlenebilen, sonsuzlukta sonlu değer alan bir fonksiyon olsun. O halde $|\lambda| \to \infty, \mathrm{Im}\,\lambda > 0$ iken

$$\int_0^\infty G_0(x,t;\lambda) g(t) \rho(t) dt = -\frac{g(x)}{\lambda^2} + \frac{Z(x,\lambda)}{\lambda^2}$$

dir. Burada, $\tilde{g}(t) = -g''(t) + q(t) g(t)$ iken $Z(x,\lambda) = \int_0^\infty G_0(x,t;\lambda) \tilde{g}(t) \rho(t) dt$ dir.

$S_0(\lambda), \lambda_j, m_j$ (j=1,2,...,n) leri yukarıda tanımlandıkları şekliyle alarak, $q(x) \equiv 0$ iken (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin özfonksiyonlara göre ayrışım formülünü aşağıdaki biçimde verebiliriz:

Teorem 4.1.6.1 Parseval eşitliğine denk olan ayrışım formülü sağlanır:

$$\delta(x-t)\rho(x)^{-1} = \sum_{j=1}^{n} u_0(x,i\lambda_j)u_0(t,i\lambda_j) + \int_0^\infty u_0(x,\lambda)\overline{u_0(t,\lambda)}d\lambda.$$

Burada δ Dirac delta fonksiyonudur ve $u_0(x,\lambda)$, $u_0(x,i\lambda_j)$ çözümleri

$$u_0(x,\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[f_0(x,\lambda) - S_0(\lambda) f_0(x,\lambda)\right], \qquad 0<\lambda^2 < \infty,$$

$$u_0(x,i\lambda_j) = m_j f_0(x,i\lambda_j), \qquad j = 1,2,...,n,$$

eşitliklerini sağlar.

Ayrıca $x\to\infty$ iken aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir:

$$u_0(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} - S_0(\lambda)e^{i\lambda x} + o(1) \qquad (0<\lambda^2<\infty),$$

$$u_0(x,i\lambda_j) = m_j e^{-\lambda_j x}\left[1+o(1)\right] \qquad (j = 1,2,...,n).$$

4.2 BİR SINIF SÜREKSİZ KATSAYILI STURM-LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN AYRIŞIM FORMÜLÜ

4.2.1 Çözümün İfadesi

Pozitif yarı eksende

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2\rho(x)y \qquad (4.2.1.1)$$

$$y'(0) = 0 \qquad (4.2.1.2)$$

sınır değer problemini ele alacağız. Burada λ spektral parametre, $q(x)$ ise

$$\int_0^\infty (1+x)\left|q(x)\right|dx < \infty \qquad (4.2.1.3)$$

koşulunu sağlayan reel değerli bir fonksiyondur. Ayrıca, $\rho(x)$ katsayısı $0<\alpha\neq 1$ olmak üzere

$$\rho(x) = \begin{cases} \alpha^2, & 0\le x\le a \\ 1\;, & x\ge a \end{cases}$$

biçimindedir.

$$f_0(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

(4.2.1.2) denkleminin $q(x)\equiv 0$ olduğundaki çözümüdür. Burada $\mu^{\pm}(x)=\pm x\sqrt{\rho(x)}+a(1\mp\sqrt{\rho(x)})$ biçimindedir. [8] kullanılarak, kapalı üst yarı düzlemdeki tüm λ lar için $K(x,.)\in L_1(\mu^+(x),+\infty)$ olmak üzere (4.2.1.1) denkleminin aşağıdaki şekilde tek bir $f(x,\lambda)$ çözümü olduğu gösterilebilir:

$$f(x,\lambda)=f_0(x,\lambda)+\int_{\mu^+(x)}^{\infty}K(x,t)e^{i\lambda t}dt \qquad (4.2.1.4)$$

4.2.2 Spektral Veriler

Lemma 4.2.2.1 $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ fonksiyonları (4.2.1.1) denkleminin çözümleri olduğunu kabul edelim. Bu fonksiyonların Wronskiyenleri x'e bağlı değildir ve reel $\lambda\neq 0$ için

$$W\left[f(x,\lambda),\overline{f(x,\lambda)}\right]=f'(x,\lambda)\overline{f(x,\lambda)}-f(x,\lambda)\overline{f'(x,\lambda)}=2i\lambda$$

dır.

İspat: $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ (4.2.1.1) denkleminin çözümleri olduğundan

$$-f''(x,\lambda)+q(x)f(x,\lambda)=\lambda^2\rho(x)f(x,\lambda)$$

$$-\overline{f(x,\lambda)}''+q(x)\overline{f(x,\lambda)}=\lambda^2\rho(x)\overline{f(x,\lambda)}$$

yazabiliriz.

$$\frac{d}{dx}W\left[f(x,\lambda),\overline{f(x,\lambda)}\right]=f''(x,\lambda)\overline{f(x,\lambda)}-f(x,\lambda)\overline{f(x,\lambda)}''=$$

$$=\left[q(x)-\lambda^2\rho(x)\right]\overline{f(x,\lambda)}f(x,\lambda)-\left[q(x)-\lambda^2\rho(x)\right]f(x,\lambda)\overline{f(x,\lambda)}=0$$

Böylece Wronskiyenin x e bağlı olmadığı elde edilir.

$\lim\limits_{x\to\infty}W\left[f(x,\lambda),\overline{f(x,\lambda)}\right]=0$ olduğundan $W\left[f(x,\lambda),\overline{f(x,\lambda)}\right]=2i\lambda$ dır. □

$w(x,\lambda)$ (4.2.2.1) denkleminin $w(0,\lambda)=1,\ w'(0,\lambda)=0$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

Lemma 4.2.2.2 Reel $\lambda \neq 0$ için

$$2i\lambda \frac{w(x,\lambda)}{f'(0,\lambda)} = \overline{f(x,\lambda)} - S(\lambda) f(x,\lambda) \tag{4.2.2.1}$$

ve

$$S(\lambda) = \frac{\overline{f'(0,\lambda)}}{f'(0,\lambda)} \tag{4.2.2.2}$$

ifadeleri sağlanır.

İspat: $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ (4.2.2.1) denkleminin temel çözümleri olduğundan

$$w(x,\lambda) = c_1 f(x,\lambda) + c_2 \overline{f(x,\lambda)}$$

yazabiliriz.

$$W\left[f(x,\lambda), w(x,\lambda)\right]_{x=0} = f'(0,\lambda) w(0,\lambda) - f(0,\lambda) w'(0,\lambda) = f'(0,\lambda)$$

$$W\left[\overline{f(x,\lambda)}, w(x,\lambda)\right]_{x=0} = \overline{f'(0,\lambda)} w(0,\lambda) - \overline{f(0,\lambda)} w'(0,\lambda) = \overline{f(0,\lambda)}$$

eşitliklerini göz önüne alırsak, $c_1 = -\frac{\overline{f'(0,\lambda)}}{2i\lambda}$ ve $c_2 = \frac{f'(0,\lambda)}{2i\lambda}$ elde ederiz.

O halde

$$w(x,\lambda) = -\frac{\overline{f'(0,\lambda)}}{2i\lambda} f(x,\lambda) + \frac{f'(0,\lambda)}{2i\lambda} \overline{f(x,\lambda)} \tag{4.2.2.3}$$

yazabiliriz.

Şimdi, tüm reel λ lar için $f'(0,\lambda) \neq 0$ olduğunu gösterelim. Tersini kabul edelim. O halde, $f'(0,\lambda_0) = 0$ olacak şekilde bir λ_0 reel sayısı vardır. Bu durumda,

$$f'(0,\lambda_0) \overline{f(0,\lambda_0)} - f(0,\lambda_0) \overline{f'(0,\lambda_0)} = 2i\lambda_0$$

eşitliğinden bir çelişki elde ederiz. (4.2.2.3) nın her tarafını $f'(0,\lambda)$ ile bölüp $2i\lambda$ ile çarparsak (4.2.2.1) ün doğruluğunu görmüş oluruz. Burada

$$S(\lambda) = \frac{\overline{f'(0,\lambda)}}{f'(0,\lambda)}$$

şeklinde tanımlanır.

$\overline{S(\lambda)} = \frac{f'(0,\lambda)}{\overline{f'(0,\lambda)}} = \left[S(\lambda)\right]^{-1}$ olduğundan $S(\lambda) = \left[\overline{S(\lambda)}\right]^{-1}$ ve

$S(\lambda)\cdot\overline{S(\lambda)}=\dfrac{\overline{f'(0,\lambda)}}{f'(0,\lambda)}\cdot\dfrac{f'(0,\lambda)}{\overline{f'(0,\lambda)}}=1$ olduğundan $|S(\lambda)|=1$ buluruz. □

$\varphi(\lambda)=f'(0,\lambda)$ tanımlansın.

Lemma 4.2.2.3 $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları sanal eksende yerleşir.

İspat: Tüm $\lambda\neq 0$ lar için $\varphi(\lambda)\neq 0$ olduğundan, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun olabilecek olan tek sıfırı $\lambda=0$ dır. $\varphi(\lambda)$ nın üst yarı düzlemdeki analitikliğinden, $\varphi(\lambda)$ nın sıfırlarının, sayılabilir çoklukta elemana sahip bir küme oluşturduğu söylenebilir.

μ_1 ve μ_2 $(\operatorname{Im}\mu_j\geq 0, j=1,2)$ nin $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun iki sıfırı olduğunu kabul edelim ve aşağıdaki eşitlikleri yazalım:

$$-f''(x,\mu_1)+q(x)f(x,\mu_1)=\mu_1^2\rho(x)f(x,\mu_1),$$

$$-\overline{f(x,\mu_2)}''+q(x)\overline{f(x,\mu_2)}=\overline{\mu_2}^2\rho(x)\overline{f(x,\mu_2)}.$$

Eşitlikleri sırasıyla $\overline{f(x,\mu_2)}$ ve $f(x,\mu_1)$ ile çarpıp, sonuç eşitliklerinden ikincisini birinciden çıkardıktan sonra, sıfırdan sonsuza integral alırsak;

$$(\mu_1^2-\overline{\mu_2}^2)\int_0^\infty \rho(x)f(x,\mu_1)\overline{f(x,\mu_2)}dx-W\left\{f(x,\mu_1),\overline{f(x,\mu_2)}\right\}_{x=0}=0. \qquad (4.2.2.4)$$

buluruz. Buradan, $\varphi(\lambda)$ nın herhangi iki μ_1 ve μ_2 sıfırı için

$$W\left\{f(x,\mu_1),\overline{f(x,\mu_2)}\right\}_{x=0}=0$$

yazabiliriz. O halde (4.2.2.4)

$$(\mu_1^2-\overline{\mu_2}^2)\int_0^\infty \rho(x)f(x,\mu_1)\overline{f(x,\mu_2)}dx=0 \qquad (4.2.2.5)$$

halini alır. Özel olarak, $\mu_2=\mu_1$ durumu $\mu_1^2-\overline{\mu_1}^2=0$ olmasını veya $\lambda_1\geq 0$ iken $\mu_1=i\lambda_1$ olmasını gerektirir. Bu ise, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sanal eksen üzerinde yerleştiğini gösterir. □

Lemma 4.2.2.4 $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları basittir.

İspat: $f(x,\lambda)$ fonksiyonunun λ ya ve x e göre türevlerini sırasıyla $\dot{f}(x,\lambda)$ ve $f'(x,\lambda)$ ile gösterelim.

$$-f''(x,\lambda)+q(x)f(x,\lambda)=\lambda^2\rho(x)f(x,\lambda)$$

eşitliğinin λ ya göre türevinden

$$-\dot{f}''(x,\lambda)+q(x)\dot{f}(x,\lambda)=2\lambda\rho(x)f(x,\lambda)+\lambda^2\rho(x)f(x,\lambda)$$

olur. Son iki eşitlikten ve $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun tanımından

$$2\lambda\int_0^\infty \rho(x)\left|f(x,\lambda)\right|^2 dx=-f'(0,\lambda)\dot{\varphi}(\lambda)+\varphi(\lambda)\dot{f}'(0,\lambda)$$

elde edilir. Burada $\lambda=i\mu_k$ alınırsa,

$$2i\mu_k\int_0^\infty \rho(x)\left|f(x,i\mu_k)\right|^2 dx=-f'(0,i\mu_k)\dot{\varphi}(i\mu_k) \tag{4.2.2.6}$$

bulunur, dolayısıyla $f'(0,i\mu_k)\dot{\varphi}(i\mu_k)\neq 0$ ki, bu da $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının basit olması demektir. □

Lemma 4.2.2.5 $\varphi(\lambda)$ fonksiyonu üst düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda>0)$ sonlu sayıda λ_k $(k=1,2,...,n)$ sıfırlarına sahiptir.

İspat: δ, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun, birbirine komşu olan, iki sıfırı arasındaki uzaklığın infimumu olsun. $\delta>0$ olduğunu gösterelim.

Aksini kabul edelim. O halde $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\tilde{\lambda}_k-\lambda_k\right\}=0$, $\tilde{\lambda}_k\geq\lambda_k>0$ ve $\max\limits_k\tilde{\lambda}_k<M$ sağlanacak biçimde, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarından oluşan, $\left\{i\tilde{\lambda}_k\right\}$ ve $\left\{i\lambda_k\right\}$ dizileri vardır. (4.2.1.1) denkleminin $f(x,\lambda)$ çözümünün özelliğinden (Bknz. [4]) yeterince büyük A sayıları için,

$f(x,\lambda)>\dfrac{1}{2}\exp(-\lambda x)$ eşitsizliğinin $x\in\left[A,\infty\right]$ ve $\lambda\in\left[0,\infty\right)$ a göre gerçeklendiğini söyleyebiliriz. Buradan ise

$$\int_A^\infty f(x,i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x,i\lambda_k)}dx>\frac{e^{-A(\tilde{\lambda}_k+\lambda_k)}}{4(\tilde{\lambda}_k+\lambda_k)}>\frac{e^{-2MA}}{8M} \tag{4.2.2.7}$$

sağlanır.

Diğer taraftan (4.2.2.5) den,

$$0=\int_0^\infty f(x,i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x,i\lambda_k)}dx=\int_A^\infty f(x,i\tilde{\lambda}_k)\left[\overline{f(x,i\lambda_k)}-\overline{f(x,i\tilde{\lambda}_k)}\right]dx+$$

$$+\int_0^A f(x,i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x,i\tilde{\lambda}_k)}dx+\int_0^A f(x,i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x,i\lambda_k)}dx$$

olur. $k\to\infty$ iken $x\in[0,A)$ için $\lim\limits_{k\to\infty}\left[f(x,i\tilde{\lambda}_k)-f(x,i\lambda_k)\right]=0$ olduğundan,

$$0\geq\varliminf_{k\to\infty}\int_A^\infty f(x,i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x,i\tilde{\lambda}_k)}dx \tag{4.2.2.8}$$

sağlanır. (4.2.2.7) ve (4.2.2.8) ifadeleri bir çelişki oluşturur. O halde kabulümüzün yanlış olduğunu ve dolayısıyla $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısının sonlu olduğunu söyleyebiliriz. □

$\lambda=i\lambda_j\ (\lambda_j>0), j=1,2,...,n$ ler $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları olsunlar. Ayrıca m_j^{-1} nin $f(i\lambda_j,x)$ fonksiyonunun $L_{2,\rho}(0,\infty)$ daki normu olduğunu kabul edelim.

O halde, (4.2.2.6) dan (4.2.1.1), (4.2.1.2) probleminin *normlaştırıcı sayılarını*

$$m_j^{-2}\equiv\int_0^\infty \rho(x)\left|f(x,i\lambda_j)\right|^2dx=-\frac{1}{2i\lambda_j}\dot{\varphi}(i\lambda_j)f(0,i\lambda_j) \tag{4.2.2.9}$$

şeklinde yazabiliriz.

4.2.3 Rezolvent Operatörün İnşası

Bu bölümde (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin rezolvent operatörünü inşa edeceğiz.

$H_\rho=L_{2,\rho}(0,\infty)$ uzayındaki iç çarpımı

$$\langle f,g\rangle:=\int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$

ile tanımlayalım. Burada $f(x),g(x)\in L_{2,\rho}(0,\infty)$ dur.

$l(f)=\{-f''(x)+q(x)f(x)\}$ olmak üzere $L:f\to l(f)$ operatörünün tanım kümesi

$$D(L)=\left\{f(x)\in L_{2,\rho}(0,\infty):f(x),f'(x)\in AC[0,\infty),l(f)\in L_{2,\rho}(0,\infty),f'(0)=0\right\}$$

biçimindedir. (4.2.2.1), (4.2.2.2) sınır değer problemi $Ly = \lambda^2 \rho(x) y$ eşitliğine denktir. Ayrıca L operatörü H_ρ uzayında öz eşleniktir.

Eğer λ^2, L operatörünün spektrum noktası değilse $R_{\lambda^2}(L) = (L - \lambda^2 I)^{-1}$ rezolvent operatörü vardır. Şimdi rezolvent operatörünün biçimini bulalım.

Teorem 4.2.3.1 Tüm λ^2 $(\mathrm{Im}\lambda \geq 0,\ \varphi(\lambda) \neq 0)$ sayıları L operatörünün rezolvent kümesine aittir. $R_{\lambda^2}(L)$ rezolventi

$$R_{\lambda^2}(L) = \int_0^\infty G(x,t;\lambda) g(t) \rho(t) dt$$

çekirdeğine sahip bir integral operatördür. Burada

$$G(x,t;\lambda) = \frac{1}{\varphi(\lambda)} \begin{cases} w(x,\lambda) f(t,\lambda), & t \geq x \\ f(x,\lambda) w(t,\lambda), & t \leq x \end{cases}$$

dir.

İspat: $g(x) \in D(L)$ nin sonsuzlukta sonlu değere sahip bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. L nin rezolvent operatörünü inşa etmek için

$$-y'' + q(x) y = \lambda^2 \rho(x) y + g(x) \rho(x) \tag{4.2.3.1}$$

$$y'(0) = 0 \tag{4.2.3.2}$$

sınır değer problemi çözülmelidir. (4.2.3.1), (4.2.3.2) probleminin çözümünü

$$y(x,\lambda) = c_1(x,\lambda) w(x,\lambda) + c_2(x,\lambda) f(x,\lambda) \tag{4.2.3.3}$$

biçiminde arayalım. Burada $w(x,\lambda)$ ve $f(x,\lambda)$ fonksiyonları $\mathrm{Im}\lambda > 0$ için homojen problemin çözümleridir.

Sabitlerin değişimi yöntemini uygulayarak, aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz:

$$\begin{cases} c_1'(x,\lambda) w(x,\lambda) + c_2'(x,\lambda) f(x,\lambda) = 0 \\ c_1'(x,\lambda) w'(x,\lambda) + c_2'(x,\lambda) f'(x,\lambda) = -\rho(x) g(x). \end{cases} \tag{4.2.3.4}$$

$y(x,\lambda) \in L_{2,\rho}(0,\infty)$ olması için $c_1(\infty,\lambda) = 0$ olmalıdır. Bu bilgiyi ve (4.2.3.4) denklemler sistemini göz önünde bulundurursak,

$$c_1(x,\lambda) = \frac{1}{\varphi(\lambda)} \int_x^\infty f(t,\lambda) g(t) \rho(t) dt,$$

$$c_2(x,\lambda) = c_2(0,\lambda) + \frac{1}{\varphi(\lambda)}\int_0^x w(t,\lambda)g(t)\rho(t)dt \tag{4.2.3.5}$$

(4.2.3.5) i (4.2.3.4) te yerine yazıp, (4.2.3.2) yi dikkate alarak, teoremin ispatını bitiririz. □

Lemma 4.2.3.1 $g(x) \in D(L)$ iki kez türevlenebilen, sonsuzlukta sonlu değer alan bir fonksiyon olsun. O halde $|\lambda| \to \infty, \operatorname{Im}\lambda > 0$ iken

$$\int_0^\infty G(x,t;\lambda)g(t)\rho(t)dt = \frac{g(x)}{\lambda^2} + \frac{Z(x,\lambda)}{\lambda^2} \tag{4.2.3.6}$$

dir. Burada $\tilde{g}(t) = -g''(t) + q(t)g(t)$ iken $Z(x,\lambda) = \int_0^\infty G(x,t;\lambda)\tilde{g}(t)\rho(t)dt$ dir.

İspat: Teorem 4.2.3.1 yi kullanarak ve kısmi integrasyon yaparak

$$\int_0^\infty G(x,t;\lambda)g(t)\rho(t)dt = \frac{1}{\varphi(\lambda)}\left\{ w(x,\lambda)\int_x^\infty f(t,\lambda)g(t)\rho(t)dt + \right.$$

$$\left. + f(x,\lambda)\int_0^x w(t,\lambda)g(t)\rho(t)dt \right\}$$

$$= \frac{W\{f(x,\lambda), w(x,\lambda)\}}{\lambda^2\varphi(\lambda)}g(x) + \frac{1}{\lambda^2}\int_0^\infty G(x,t;\lambda)\tilde{g}(t)\rho(t)dt,$$

buluruz. Buradan, (4.2.3.6) nın doğruluğu kolayca görülür. □

4.2.4 Ayrışım Formülü ve Spektral Fonksiyon

Bu bölümde (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülünü bulacağız.

$S(\lambda), \lambda_j, m_j$ $(j = 1,2,...,n)$ leri yukarıda tanımlandıkları şekliyle, (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin çözümlerini ise aşağıdaki gibi alalım:

$$u(x,\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\overline{f(x,\lambda)} - S(\lambda)f(x,\lambda)\right], \quad 0 < \lambda^2 < \infty,$$

$$u(x,i\lambda_j) = m_j f(x,i\lambda_j), \; j = 1,2,...,n.$$

Bir eğri boyunca integralleme yaparak, bu çözümlerin tam bir sistem oluşturdukları gösterilebilir.

Teorem 4.2.4.1 Parseval eşitliğine denk olan ayrışım formülü sağlanır:

$$\delta(x-t)\rho^{-1}(x) = \sum_{j=1}^{n} u(x,i\lambda_j)u(t,i\lambda_j) + \int_0^\infty u(x,\lambda)\overline{u(t,\lambda)}d\lambda. \qquad (4.2.4.1)$$

Burada δ Dirac delta fonksiyonudur. Ayrıca $x\to\infty$ iken aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir:

$$u(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} - S(\lambda)e^{i\lambda x} + o(1) \quad (0<\lambda^2<\infty),$$

$$u(x,i\lambda_j) = m_j e^{-\lambda_j x}[1+o(1)] \quad (j=1,2,...,n). \qquad (4.2.4.2)$$

İspat:

$$F(x,\lambda) = \int_0^\infty G(x,t;\lambda)g(t)\rho(t)dt$$

alalım ve Γ_R nin sıfır merkezli R yarıçaplı pozitif yönlendirilmiş bir çember olduğunu kabul edelim.

$$D = \{z : |z| \le R,\ |\operatorname{Im} z| \ge \varepsilon\}$$

bölgesinin pozitif yönlendirilmiş sınırını $\Gamma_{R,\varepsilon}$ ile gösterelim ve bu eğri üzerinden integral alalım.

(4.2.3.6) eşitliğinin her tarafını $\frac{1}{2\pi i}\lambda$ ile çarpıp, λ ya göre integral alırsak

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda F(x,\lambda)d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{g(x)}{\lambda}d\lambda + Z_{R,\varepsilon}(x)$$

elde ederiz. Burada $Z_{R,\varepsilon}(x) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{Z(x,\lambda)}{\lambda}d\lambda$ dır.

$w(x,\lambda)$ ve $f(x,\lambda)$ fonksiyonlarının özelliklerinden, $R\to\infty$ ve $\varepsilon\to 0$ iken, $\forall x\in[0,T]\subset[0,\infty)$ için $Z_{R,\varepsilon}\to 0$ sağlanır.

Ayrıca, son eşitlikten, $R\to\infty$ ve $\varepsilon\to 0$ iken

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda F(x,\lambda)d\lambda = g(x) + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left[F(x,\lambda+i0) - F(x,\lambda-i0)\right]d\lambda$$

yazabiliriz.

Diğer taraftan, rezidü teorisinden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda F(x,\lambda)d\lambda = \sum_{j=1}^{n} \underset{\lambda=i\lambda_j}{\operatorname{Res}}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] + \sum_{j=1}^{n} \underset{\lambda=-i\lambda_j}{\operatorname{Res}}\left[\lambda F(x,\lambda)\right]$$

olur. Son iki eşitliği kullanarak,

$$g(x) = \sum_{j=1}^{n} \underset{\lambda=i\lambda_j}{\operatorname{Res}}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] + \sum_{j=1}^{n} \underset{\lambda=-i\lambda_j}{\operatorname{Res}}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] -$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left[F(x,\lambda+i0) - F(x,\lambda-i0)\right]d\lambda \tag{4.2.4.3}$$

elde ederiz.

Şimdi, $\psi(x,\lambda)$ nın (4.2.1.1) denkleminin $\psi'(0,\lambda)=1$, $\psi(0,\lambda)=0$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olduğunu kabul edelim. $W\{w(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\}=1$ olduğu açıktır. O halde $f(x,\lambda)=c_1 w(x,\lambda)+c_2\psi(x,\lambda)$ yazabiliriz.

Buradan $f(x,\lambda)=f(0,\lambda)w(x,\lambda)+f'(0,\lambda)\psi(x,\lambda)$

olduğu kolayca görülür.

Dolayısıyla,

$$G(x,t;\lambda) = \frac{1}{\varphi(\lambda)}\begin{cases} w(x,\lambda)\left[f(0,\lambda)w(t,\lambda)+f'(0,\lambda)\psi(t,\lambda)\right], & x \le t < \infty, \\ \left[f(0,\lambda)w(x,\lambda)+f'(0,\lambda)\psi(x,\lambda)\right]w(t,\lambda), & 0 \le t \le x, \end{cases}$$

$$= \frac{f(0,\lambda)}{\varphi(\lambda)}w(x,\lambda)w(t,\lambda) + \begin{cases} w(x,\lambda)\psi(t,\lambda), & x \le t, \\ \psi(x,\lambda)w(t,\lambda), & t \le x, \end{cases} \tag{4.2.4.4}$$

olur. Benzer şekilde $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ için

$$F(x,\lambda) = \frac{1}{\varphi(\lambda)} f'(0,\lambda)w(x,\lambda)\int_0^{\infty} w(t,\lambda)g(t)\rho(t)dt +$$

$$+\psi(x,\lambda)\int_0^{x} w(t,\lambda)g(t)\rho(t)dt + w(x,\lambda)\int_x^{\infty}\psi(t,\lambda)g(t)\rho(t)dt$$

dır. O halde,

$$\underset{\lambda=i\lambda_j}{\operatorname{Res}}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] = \frac{i\lambda_j}{\dot{\varphi}(i\lambda_j)} f(0,i\lambda_j)\int_0^{\infty} w(t,i\lambda_j)g(t)\rho(t)dt$$

yazabiliriz.

Buradan,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=i\lambda_j}\left[\lambda\int_0^\infty G(x,t;\lambda)g(t)\rho(t)dt\right]+\operatorname*{Res}_{\lambda=-i\lambda_j}\left[\lambda\int_0^\infty \overline{G(x,t;\lambda)}g(t)\rho(t)dt\right]=$$

$$=\frac{2i\lambda_j}{\dot{\varphi}(i\lambda_j)}f(0,i\lambda_j)w(x,i\lambda_j)\int_0^\infty w(t,i\lambda_j)g(t)\rho(t)dt$$

$$=\frac{\left(2i\lambda_j\right)^2}{\dot{\varphi}(i\lambda_j)^2 m_j^{\,2}}w(x,i\lambda_j)\int_0^\infty w(t,i\lambda_j)g(t)\rho(t)dt$$

$$=u(x,i\lambda_j)\int_0^\infty u(t,i\lambda_j)g(t)\rho(t)dt \qquad (4.2.4.5)$$

olur. Şimdi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\left[F(x,\lambda+i0)-F(x,\lambda-i0)\right]d\lambda$$

ifadesini hesaplayalım.

(4.2.4.4) ten ve $F(x,\lambda-i0)=\overline{F(x,\lambda+i0)}$ eşitliğinden

$$G(x,t;\lambda+i0)-G(x,t;\lambda-i0)=\left[\frac{f(0,\lambda+i0)}{\varphi(\lambda+i0)}-\frac{f'(0,\lambda-i0)}{\varphi(\lambda-i0)}\right]w(x,\lambda)w(t,\lambda)$$

$$=\left[\frac{\varphi(\lambda)}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}f(0,\lambda)-\frac{\overline{\varphi(\lambda)}}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}\overline{f(0,\lambda)}\right]w(x,\lambda)w(t,\lambda)$$

$$=\frac{2i\lambda}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}w(x,\lambda)w(t,\lambda)$$

yazabiliriz.

Buradan $\overline{u(x,\lambda)}=\sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[f(x,\lambda)-\overline{S(\lambda)}\,\overline{f(x,\lambda)}\right]$iken,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\left[F(x,\lambda+i0)-F(x,\lambda-i0)\right]d\lambda=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda^2}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}w(x,\lambda)\int_0^\infty w(t,\lambda)g(t)\rho(t)dtd\lambda$$

$$=\int_0^\infty u(x,\lambda)\int_0^\infty u(t,\lambda)g(t)\rho(t)dtd\lambda \qquad (4.2.4.6)$$

olduğunu söyleyebiliriz.

O halde, (4.2.4.5),(4.2.4.6) yı (4.2.4.3) te dikkate alırsak, özfonksiyonlar için ayrışım formülünü aşağıdaki şekilde buluruz:

$$g(x)=\sum_{j=1}^{n}u(x,i\lambda_j)\int_0^\infty u(t,i\lambda_j)g(t)\rho(t)dt+\int_0^\infty u(x,\lambda)\int_0^\infty \overline{u(t,\lambda)}g(t)\rho(t)dtd\lambda \tag{4.2.4.7}$$

(4.2.4.1) formülü (4.2.4.7) formülüne denk olan Parseval eşitliğidir. Teoremdeki asimptotik ifadeler $x\to\infty$ iken (4.2.4.1) in sağladığı özelliklerdir.□

(4.2.4.7) yi Stieltjes integrali biçiminde yazarsak

$$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}w(x,\lambda)\left(\int_0^\infty w(t,\lambda)g(t)\rho(t)dt\right)d\sigma(\lambda) \tag{4.2.4.8}$$

olur. Burada $d\sigma(\lambda)=\begin{cases}\dfrac{2}{\pi}\dfrac{\lambda^2 d\lambda}{|\varphi(\lambda)|^2} & \lambda\geq 0\\ \displaystyle\sum_{j=1}^{n}\frac{(2i\lambda_j)^2\delta(\lambda-i\lambda_j)}{m_j^{\,2}\dot{\varphi}(i\lambda_j)^2} & \lambda<0\end{cases}$ L operatörünün spektral fonksiyonudur.

(4.2.4.8) de $G(\lambda)=\int_0^\infty w(x,\lambda)g(x)\rho(x)dx$ alırsak

$g(x)=\int_{-\infty}^{\infty}G(\lambda)w(x,\lambda)d\sigma(\lambda)$ olur. Bu eşitliğin her iki tarafını $g(x)$ ile çarparsak

$$\int_0^\infty g^2(x)dx=\int_{-\infty}^{\infty}G^2(\lambda)d\sigma(\lambda)$$

Parseval eşitliğini elde ederiz.

4.2.5 $q(x)\equiv 0$ Durumunda (4.2.1.1), (4.2.1.2) Sınır Değer Probleminin Özellikleri

$q(x)\equiv 0$ iken (4.2.1.1), (4.2.1.2) problemi

$$-y''=\lambda^2\rho(x)y,\qquad 0\leq x<\infty \tag{4.2.5.1}$$

$$y'(0)=0 \tag{4.2.5.2}$$

halini alır. Bu problemin çözümü daha önce de belirttiğimiz gibi

$$f^0(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

biçimindedir. Burada yine, $\mu^{\pm}(x) = \pm x\sqrt{\rho(x)} + a(1 \mp \sqrt{\rho(x)})$ olduğunu hatırlamakta yarar vardır. Şimdi (4.2.5.1), (4.2.5.2) probleminin bazı özelliklerini inceleyelim:

Lemma 4.2.5.1 $f^0(x,\lambda)$ ve $\overline{f^0(x,\lambda)}$ fonksiyonları (4.2.5.1) denkleminin çözümleri olsun. Bu fonksiyonların Wronskiyenleri x'e bağlı değildir ve reel $\lambda \neq 0$ için

$$W\left[f^0(x,\lambda), \overline{f^0(x,\lambda)} \right] = f^{0\prime}(x,\lambda)\overline{f^0(x,\lambda)} - f^0(x,\lambda)\overline{f^0(x,\lambda)}' = 2i\lambda$$

dır.

$w^0(x,\lambda)$ (4.2.2.1) denkleminin $w^0(0,\lambda) = 1,\ w^{0\prime}(0,\lambda) = 0$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

Lemma 4.2.5.2 Reel $\lambda \neq 0$ için

$$2i\lambda \frac{w^0(x,\lambda)}{f^{0\prime}(0,\lambda)} = \overline{f^0(x,\lambda)} - S^0(\lambda) f^0(x,\lambda)$$

ve

$$S^0(\lambda) = \frac{\overline{f^0(0,\lambda)}'}{f^{0\prime}(0,\lambda)}$$

ifadeleri sağlanır.

$\varphi^0(\lambda) = f^{0\prime}(0,\lambda)$ tanımlansın.

Lemma 4.2.5.3 $\varphi^0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları sanal eksende yerleşir.

Lemma 4.2.5.4 $\varphi^0(\lambda)$ fonksiyonun sıfırları basittir.

Lemma 4.2.5.5 $\varphi^0(\lambda)$ fonksiyonu üst düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda > 0)$ sonlu sayıda $\lambda_k\ (k = 1,2,...,n)$ sıfırlarına sahiptir.

$\lambda = i\lambda_j\ (\lambda_j > 0), j = 1,2,...,n$ ler $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları olsunlar. Ayrıca m_j^{-1} nin $f(i\lambda_j, x)$ fonksiyonunun $L_{2,\rho}(0,\infty)$ daki normu olduğunu kabul edelim.

(4.5.1.1), (4.5.1.2) probleminin *normlaştırıcı sayıları*

$$m_j^{-2} \equiv \int_0^\infty \rho(x)\left| f^0(x,i\lambda_j)\right|^2 dx = -\frac{1}{2i\lambda_j}\dot{\varphi}^0(i\lambda_j) f^0(0,i\lambda_j)$$

biçimindedir.

Şimdi (4.5.1.1), (4.5.1.2) sınır değer probleminin rezolvent operatörünü inşa edelim.

$H_\rho = L_{2,\rho}(0,\infty)$ uzayındaki iç çarpımı

$$\langle f,g\rangle := \int_0^\infty f(x)\overline{g(x)}\rho(x)dx$$

ile tanımlayalım. Burada $f(x), g(x) \in L_{2,\rho}(0,\infty)$ dur. $l(f) = \{-f''(x)\}$ olmak üzere $L: f \to l(f)$ operatörünün tanım kümesi

$$D(L) = \left\{ f(x) \in L_{2,\rho}(0,\infty) : f(x),\, f'(x) \in AC\left[0,\infty\right), l(f) \in L_{2,\rho}(0,\infty),\, f'(0) = 0\right\}$$

biçimindedir. (4.5.1.1),(4.5.1.2) sınır değer problemi $Ly = \lambda^2\rho(x)y$ eşitliğine denktir.

Eğer λ^2, L operatörünün spektrum noktası değilse $R_{\lambda^2}(L) = (L-\lambda^2 I)^{-1}$ rezolvent operatörü vardır. Şimdi rezolvent operatörünün biçimini bulalım.

Teorem 4.2.5.1 Tüm λ^2 $(\mathrm{Im}\lambda \geq 0,\ \varphi(\lambda) \neq 0)$ sayıları L operatörünün rezolvent kümesine aittir. $R_{\lambda^2}(L)$ rezolventi

$$R_{\lambda^2}(L) = \int_0^\infty G^0(x,t;\lambda)g(t)\rho(t)dt$$

çekirdeğine sahip bir integral operatördür. Burada

$$G^0(x,t;\lambda) = -\frac{1}{\varphi^0(\lambda)}\begin{cases} w^0(x,\lambda)f^0(t,\lambda), & t \geq x \\ f^0(x,\lambda)w^0(t,\lambda), & t \leq x \end{cases} \quad \text{dir.}$$

Lemma 4.2.5.6 $g(x) \in D(L)$ iki kez türevlenebilen, sonsuzlukta sonlu değer alan bir fonksiyon olsun. O halde $|\lambda| \to \infty, \mathrm{Im}\,\lambda > 0$ iken

$$\int_0^\infty G^0(x,t;\lambda)g(t)\rho(t)dt = \frac{g(x)}{\lambda^2} + \frac{Z(x,\lambda)}{\lambda^2}$$

dir. Burada $\tilde{g}(t) = -g''(t) + q(t)g(t)$ iken $Z(x,\lambda) = \int_0^\infty G^0(x,t;\lambda)\tilde{g}(t)\rho(t)dt$ dir.

Şimdi (4.2.5.1),(4.2.5.2) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülünü ve bu formüle denk olan Parseval eşitliğini verelim. $S^0(\lambda), \lambda_j, m_j$ $(j=1,2,...,n)$ leri yukarıda tanımlandıkları şekliyle, (4.2.5.1),(4.2.5.2) sınır değer probleminin çözümlerini ise aşağıdaki gibi alırsak:

$$u^0(x,\lambda) = \sqrt{\frac{1}{2\pi}}\left[\overline{f^0(x,\lambda)} - S^0(\lambda)f^0(x,\lambda)\right],\ \ 0<\lambda^2<\infty,$$

$$u^0(x,i\lambda_j) = m_j f^0(x,i\lambda_j),\ j=1,2,...,n.$$

Bir eğri boyunca integralleme yaparak, bu çözümlerin tam bir sistem oluşturdukları gösterilebilir.

Teorem 4.2.5.2 Parseval eşitliğine denk olan ayrışım formülü sağlanır:

$$\delta(x-t)\rho^{-1}(x) = \sum_{j=1}^{n} u^0(x,i\lambda_j)u^0(t,i\lambda_j) + \int_0^\infty u^0(x,\lambda)\overline{u^0(t,\lambda)}d\lambda.$$

Burada δ Dirac delta fonksiyonudur. Ayrıca $x\to\infty$ iken aşağıdaki asimptotik formüller geçerlidir:

$$u^0(x,\lambda) = e^{-i\lambda x} - S^0(\lambda)e^{i\lambda x} + o(1)\quad (0<\lambda^2<\infty),$$

$$u^0(x,i\lambda_j) = m_j e^{-\lambda_j x}[1+o(1)]\quad (j=1,2,...,n).$$

5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Pozitif yarı eksende Sturm-Liouville operatörü ile oluşturulan süreksiz katsayılı sınır değer problemlerinin,

1) Çözümlerinin özellikleri incelendi
2) Rezolvent operatörleri inşa edildi.
3) Özfonksiyonlara göre ayrışım formülleri elde edildi.

5.2 Öneriler

Değişik sınır değer koşullarıyla üretilen ikinci mertebeden süreksiz katsayılı sınır değer problemlerinin yukarıdaki özellikleri incelenerek literatüre katkıda bulunulabilir.

KAYNAKLAR

[1] Levitan B. M., Sargsjan I. S., Sturm-Liouville and Dirac Operators, kluwer Academic Publishers, Volume 59.

[2] Levitan B. M., Sargsjan I. S.,Introduction to Spectral Theory, American Mathematical Society, 1975.

[3] Titchmarsh E. C., Eigenfunctions Expansions, Oxford, 1962.

[4] Marchenko V. A., Sturm Liouville Operators and Applications, AMS Chelsea Publishing, 2011.

[5] Naimark M. A., Linear Differantial Operators, Frederick Ungar Publishing, 1967.

[6] Gasymov M. G., The Direct and Inverse Problem of Spectral Analysis for a Class of Equations With a Discontinuous Coefficient, Nonclassical Methods in Geophysics, Nauka, Novosibirsk, USSR, (1977), 37-44.

[7] Darwish A. A., The Inverse Scattering Problem for a Singular Boundary Value Problem, New Zealand Journal of Marhematics, Volume 22, (1993), 37-56.

[8] Guseinov I. M., Pashaev R. T., On an Inverse Problem for a Second Order Differantial Operator, In Usp. Math. Nauk., Voluma 57, No: 3, (2002), 597-598.

[9] Mamedov Kh. R., On an Inverse Scattering Problem for a Discontinuous Sturm-Liouville Equation with a Spectral Parameter in the boundary Condition, Boundary Value Problem, (2010), 17pp.

[10] Mamedov Kh. R., Uniqueness of the Solution of the Inverse Problem of Scattering Theory for Sturm Liouville Operator with Discontinuous Coefficient, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, (2006), 163-172.

[11] Mamedov Kh. R., Palamut N., On adirect Problem of Scattering Theory for a Class of Sturm-Liouville Operators with Discontinuous Coefficient, Proceedings of Jangjeon Mathematical Society, 12 (2009), No. 243-251.

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Fatma Ayça Çetinkaya

Doğum Tarihi: 28/05/1984

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Fen-Matematik	Adana ÇEAŞ Seyhan Anadolu Lisesi	1999–2002
Lisans	Matematik	Ankara Üniversitesi	2002–2008
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2009–2012

(Varsa) Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Araştırma Görevlisi	Mersin Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi	2009-

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. “On a Spectral Expansion Formula for a Class of Second Order Differential Equation with Discontinuous Coefficient”, International Conference of Applied Analysis and Algebra, 29 Haziran-2 Temmuz 2011, Yıldız Teknik Üniversitesi, İstanbul.

2. “Bir Sınıf Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Özellikleri Üzerine”, XXIV. Ulusal Matematik Sempozyumu, 07-10 Eylül 2011, Uludağ Üniversitesi, Bursa.