BERGMAN ÇEKİRDEK FONKSİYONUNUN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YASEMİN GÖKAY DARDAĞAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN–2012

BERGMAN ÇEKİRDEK FONKSİYONUNUN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

YASEMİN GÖKAY DARDAĞAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

TEZ DANIŞMANI
Doç. Dr. Mehmet Küçükaslan

MERSİN
HAZİRAN–2012

Yasemin Gökay DARDAĞAN tarafından Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN danışmanlığında hazırlanan "Bergman Çekirdek Fonksiyonunun Yaklaşım Özellikleri" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ

Yrd. Doç. Dr. Orkun ÇOŞKUNTUNCEL

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25./07../2012..tarih ve 2012./14.../1426.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. A. Murat GİZİR
Enstitü Müdürü

BERGMAN ÇEKİRDEK FONKSİYONUNUN YAKLAŞIM ÖZELLİKLERİ

Yasemin Gökay DARDAĞAN

ÖZ

$G \subset \mathbb{C}$ kümesi $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge, $z_0 \in G$ ve $h(z)$ fonksiyonu G 'de tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Ayrıca $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ sistemi G bölgesinde $h(z)$ ağırlık fonksiyonu ile tam ortonormal sistem olsun.

Bu tezde, kısmi toplamı $K_n(z, z_0) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(z)\phi_k(z_0)$ olan $K(z, z_0)$ Bergman çekirdek fonksiyonunun $A_2(h, G)$ normunda yaklaşımı bölge sınırında özel tipten iç sıfır açı içerdiğinde incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Konform dönüşüm, Yarıkonform eğriler, Ortonormal Polinomlar, Bergman Çekirdek Fonksiyonu

Danışman: Doç. Dr. Mehmet Küçükaslan, Matematik Ana Bilim Dalı, Mersin Üniversitesi

APPROXIMATION PROPERTIES OF BERGMAN KERNEL FUNCTIONS

Yasemin Gökay DARDAĞAN

ABSTRACT

Let $G \subset \mathbb{C}$ be a region bounded by a Jordan curve $L := \partial G$, $z_0 \in G$ and $h(z) > 0$ be weight function defined on G. Also $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ be a complete orthonormal system on G.

In this thesis, we investigate the Bergman Kernel function $K(z, z_0)$ approximation to its partical sums $K_n(z, z_0) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(z)\,\overline{\phi_k(z_0)}$ when the boundry of region has a interior zero angles with a special type.

Keywords: Conformal mapping, Quasiconformal curves, Orthonormal Polynomials, Bergman Kernel Function

Advisor: Doç. Dr. Mehmet Küçükaslan, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Bu tezin hazırlanmasının her aşamasında bana büyük bir özveri ve sabırla destek olan, her geçen gün biraz daha gelişmemi sağlayan değerli danışman hocam Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN'a çok teşekkür ederim. Bölümümüze sağladığı iyi imkânlardan dolayı bölüm başkanımız Sayın Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV'e teşekkürlerimi sunarım. Başta değerli hocam Yrd. Doç. Dr. Tuncay Tunç olmak üzere lisans ve yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgilerinden faydalandığım bütün bölüm hocalarıma teşekkür ederim.

Ayrıca bugüne kadar matematiğe katkı yapan tüm bilim insanlarına emeklerinden dolayı teşekkür ederim.

Son olarak, bugünlere gelmemi sağlayan, beni maddi manevi her konuda destekleyen canımdan çok sevdiğim sevgili annem Cemile Dardağan ve sevgili babam İbrahim Dardağan'a teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$
$\overline{G}$	G bölgesinin kapanışı
$C(G)$	G bölgesinde sürekli olan fonksiyonlar kümesi
$C^1(G)$	Kendisi ve türevi G bölgesinde sürekli olan fonksiyonlar kümesi
$A(G)$	G bölgesinde analitik fonksiyonlar kümesi
$A(\overline{G})$	G bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ sürekli fonksiyonlar kümesi
$mes(\gamma)$	γ eğrisinin bir boyutlu Lebesque ölçüsü
$mes(G)$	G bölgesinin iki boyutlu Lebesque ölçüsü
$int(L)$	L kapalı eğrisinin sınırladığı sonlu bölge
$ext(L)$	L kapalı eğrisinin sınırladığı sonsuz bölge
∂G	G bölgesinin sınırı
Ω	$ext(\overline{G})$
$B(z,\delta)$	$\{t : \lvert t-z\rvert < \delta\}$
Δ	$\{w : \lvert w\rvert > 1\}$
$d\sigma_z$	$dxdy$, $z = x+iy$
:=	Tanım olarak eşittir.
$k=\overline{1,n}$	$k=1,2,...,n$
$\overline{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
$a \prec b$	$a \le cb$, c sabit olmakla a ve b den bağımsızdır.
$a \asymp b$	$a \prec b$ ve $b \prec a$
$d(M,L)$	$\inf\{\lvert z-\zeta\rvert :\ z\in M,\ \zeta\in L\}$
$\delta(z)$	$d(z,L)$

1. GİRİŞ

$G \subset \mathbb{C}$ kümesi $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge ve $z_0 \in G$ tespit edilmiş bir nokta olsun. $h(z)$ G'de tanımlı negatif olmayan G bölgesi üzerinde integrallenebilir ve hemen hemen her yerde sıfırdan farklı bir fonksiyon olsun.

Eğer, $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyonlar ailesi için

$$\iint_G h(z)\phi_n(z)\overline{\phi_m(z)}\, d\sigma_z = \delta_{n,m}$$

koşulu sağlanıyor ise $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ailesine G bölgesi üzerinde $h(z)$ ağırlıklı ortonormal sistem denir.

$\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ortonormal sistemi yardımıyla $K(z, z_0)$ Bergman Çekirdek Fonksiyonu

$$K(z, z_0) := \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(z)\overline{\phi_k(z_0)} \tag{1.1}$$

biçiminde bir gösterime sahiptir (bkz. Bölüm 3.6, Teorem 3.6.2.2).

$K(., z_0)$ fonksiyonu G'de Bergman çekirdek fonksiyonu olarak adlandırılır. Bergman Çekirdek Fonksiyonunun temel özellikleri 3. Bölüm'de, 3.6 Bergman Çekirdek Fonksiyonu başlığı altında verilmiştir.

Eğer, $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ sistemi tam ortonormal polinomlar sistemi ise, (1.1) serisinin

$$K_n(z, z_0) := \sum_{k=0}^{n} \phi_k(z)\overline{\phi_k(z_0)}$$

kısmi toplamı $A_2(h, G)$ normunda $K(., z_0)$ fonksiyonuna yaklaşır. Yani;

$$\left\| K(., z_0) - K_n(., z_0) \right\|_{A_2(h,G)} \to 0 \ (n \to \infty) \qquad \forall z \in G$$

olur. Bu yakınsama G bölgesinin her bir kompakt alt kümesinde düzgündür.

Şimdi özel olarak $G = \{z : |z| < 1\}$ birim dairesini göz önüne alalım: $z_0 \in G$, $z_0 \neq 0$ ve $h(z) = 1$ olsun. Bu durumda, $\{z^n\}_{n=0}^{\infty}$ lineer bağımsız sistemi Gram-Schmidt Ortonormalleştirme yöntemine göre ortonormalleştirilir ise

$$\phi_n(z) = \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} z^n, \; n = 0,1,2...$$

elde edilir. O halde

$$K(z, z_0) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{\infty} (j+1)(\overline{z_0} z)^j = \frac{1}{\pi(1 - \overline{z_0} z)^2}, \quad z_0, z \in \Omega \tag{1.2}$$

$$K_{n-1}(z, z_0) = \frac{1}{\pi} \sum_{j=0}^{n-1} (j+1)(\overline{z_0} z)^j = \frac{1}{\pi} \frac{n(\overline{z_0} z)^{n+1} - (n+1)(\overline{z_0} z)^n + 1}{(1 - \overline{z_0} z)^2} \tag{1.3}$$

olur.

(1.2) ve (1.3) eşitlikleri taraf tarafa çıkarılırsa

$$K(z, z_0) - K_{n-1}(z, z_0) = \frac{1}{\pi} \frac{(\overline{z_0} z)^n}{(1 - \overline{z_0} z)^2} \left\{ -n\overline{z_0} z + n + 1 \right\}$$

bulunur. Buradan,

$$\limsup_{n \to \infty} \left\| K(., z_0) - K_{n-1}(., z_0) \right\|_{L_2(\Omega)}^{\frac{1}{n}} = |z_0| \tag{1.4}$$

dır. Aynı zamanda, anlaşılır ki $B := \{z : |z| < r < 1\}$ ise

$$\limsup_{n \to \infty} \left\| K(., z_0) - K_{n-1}(., z_0) \right\|_{L_2(B)}^{\frac{1}{n}} = r|z_0| \tag{1.5}$$

dır.

Bu ise $z_0 \in B \subset G$ olduğunda (1.5)'deki yerel hatanın(1.4)'deki genel hataya oranla geometrik olarak sıfıra daha hızlı yaklaştığını gösterir.

Bu tezde, (1.4) ve (1.5)'te ifade edilen durum kompleks düzlemin genel bölgeleri için incelenecek ve $\gamma > 0$ sayısı $h(z)$ ağırlık fonksiyonuna ve G bölgesinin belirli özelliklerine bağlı $(\gamma = \gamma(h, G) > 0)$ olmak üzere

$$\left\| K(., z_0) - K_n(., z_0) \right\|_{A_2(h,G)} \leq \frac{c(B)}{n^{\gamma}}, \quad z_0 \in B \tag{1.6}$$

biçiminde eşitsizlikler hesaplanacaktır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

$G \subset \mathbb{C}$ kümesi $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge , $h(z) > 0$ ise G 'de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. $\phi_n(z) = a_n z^n + ... + a_0, \quad a_n > 0,$ biçiminde verilen $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ polinomlar sistemi

$$\iint_G h(z)\phi_n(z)\overline{\phi_m(z)}\,d\sigma_z = \delta_{n,m}$$

koşulunu sağlar ve bu polinomlar Bergman polinomları olarak adlandırılır.

$A_2(h,G)$ ile G 'de analitik ve

$$\|f\|^2_{A_2(h,G)} := \iint_G h(z)|f(z)|^2 d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı gösterilsin.

$\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ tam ortonormal sistemi yardımıyla (1.1)'deki biçimde bir gösterime sahip $K(z,z_0)$ fonksiyonuna literatürde **Bergman Çekirdek Fonksiyonu** denir.

Bergman çekirdek fonksiyonunun bilinmesi yaklaşım teorisinde özellikle G bölgesini $D = \{w : |w| < 1\}$ dairesine resmeden **Riemann Dönüşüm Fonksiyonu'**nun (bkz.3. Bölüm, Teorem 3.2.9) nümerik olarak inşa edilmesinde en önemli aşamayı oluşturmaktadır.

Bu yönde önemli çalışmalar [1], [2], [3], [4], [5], [6], [7], [8] ve [9]N. Papamicheal, C.A. Kokkinos, M. K. Warby, D.M. Hough, D.Levin, A.Sideridis, E.B. Saff, G. Misra, E.ligocka, S.Bock, M.I. Falcao, K. Gürlebeck ve diğerleri tarafından yapılmıştır.

Özellikle, [1], [3], [4], [5], [6] çalışmalarında bölgenin sınırı belirli tipten singülariteye sahip olduğunda $K(z,z_0)$ fonksiyonunun özellikleri ve Riemann Dönüşüm Fonksiyonunun inşa edilmesi problemi ile ilgilenilmiştir.

[3], [8] ve [9] çalışmalarında verilmiş bölgede Riemann Dönüşüm Fonksiyonunun bulunması için algoritma verilmiştir.

[7] çalışmasında ise bu tezin de temel sorusu olan problem incelenmiştir. Eğer $B \subset G$ bölgesinin sınırı ile ∂G ortak bir yay içeriyorsa G bölgesinde ve B bölgesinde $K_n(z,z_0)$'ın $K(z,z_0)$'a yaklaşım hızının aynı olacağı gösterilmiştir.

Şu ana kadar hiçbir çalışmada, B bölgesi tamamen ∂G içerisinde ise B'nin yaklaşım hızını ne biçimde etkileyeceği incelenmemiştir.

3. MATERYAL VE METOT

Bu bölümde, çalışma boyunca karşılaşılacak temel kavramlar ve temel teoremler hakkında genel bilgiler verilecektir.

3.1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 3.1.1. $G \subset \mathbb{C}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ kümesi verilsin. Eğer, $G \cap U \neq \varnothing$, $G \cap V \neq \varnothing$ olacak şekilde karmaşık düzlemde ayrık ve birleşimleri G kümesini veren U ve V açık kümeleri varsa G 'ya *bağlantısız* küme denir. Aksi halde *bağlantılı* küme olur.

Tanım 3.1.2. $G \subset \mathbb{C}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ kümesi verilsin.

i) Açık ve bağlantılı kümeye bölge denir.

ii) Kapalı, bağlantılı $G \subset \mathbb{C}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ kümesine *Kontinyum (*C*ontinuum)* adı verilir.

Tanım 3.1.3. (α-Yönlü Türev, Türevlenebilme)

i) $\alpha \in [0, 2\pi]$ olmak üzere, eğer,

$$\partial_\alpha f(z_0) := \lim_{r \to 0^+} \frac{f(z_0 + re^{i\alpha}) - f(z_0)}{re^{i\alpha}}$$

limiti var ve sonlu ise f fonksiyonuna z_0 noktasında α-*yönlü türevlenebilir* denir.

ii) z_0 noktasında herhangi bir $\alpha \in [0, 2\pi]$ için α-*yönlü türevi* var ve tümü birbirine eşit ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *türevlenebilirdir* denir ve

$$f'(z_0) := \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

dır.

iii) f fonksiyonu G bölgesinin her bir $z \in G$ noktasında türevlenebilirse f fonksiyonuna G bölgesinde *türevlenebilirdir* denir.

Teorem 3.1.1. f fonksiyonunun $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilir olması için gerek ve yeter koşul $z_0 \in G$ noktasında sürekli ve $\forall z \in G$ için $f(z) = f(z_0) + (z - z_0) f^*(z)$ olacak şekilde bir tek $f^* : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonunun olmasıdır.

Bu durumda $f'(z_0) = f^*(z_0)$ dır [10].

Teorem 3.1.2. f fonksiyonu $z_0 \in G$ noktasında türevlenebilirse

$$\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) \text{ ve } \frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

kısmi türevleri mevcut olup bu kısmi türevler

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial x}(z_0) = -i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$$

koşulunu sağlar [11].

Tanım 3.1.4. f fonksiyonunun $z_0 \in G$ noktasında $\frac{\partial f}{\partial x}(z_0)$, $\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)$ kısmi türevleri mevcut ise $\frac{\partial f}{\partial z}(z_0)$ ve $\frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0)$ aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$f_z(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) - i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right),$$

$$f_{\overline{z}}(z_0) = \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x}(z_0) + i\frac{\partial f}{\partial y}(z_0)\right).$$

Özel halde

$$f(z) = u(x,y) + iv(x,y)$$

şeklinde ise

$$f_z = \frac{1}{2}(u_x + v_y) + \frac{i}{2}(v_x - u_y),$$

$$f_{\overline{z}} = \frac{1}{2}(u_x - v_y) + \frac{i}{2}(v_x + u_y)$$

olur.

Teorem 3.1.3. f fonksiyonu z_0 noktasında türevlenebilir ise

$$f'(z_0) = \frac{\partial f}{\partial z}(z_0), \quad \frac{\partial f}{\partial \overline{z}}(z_0) = 0$$

dır [11].

Tanım 3.1.5. i) f fonksiyonu tanımlı olduğu z_0 noktasının belli bir $B(z_0, r)$ komşuluğundaki tüm noktalarda türevlenebilir ise f fonksiyonuna z_0 noktasında *analitik fonksiyon* denir.

ii) f fonksiyonu her bir $z \in G$ noktasında analitik ise f fonksiyonuna G'de analitiktir denir.

iii) G bölgesinde analitik tüm fonksiyonların kümesi $A(G)$ ile G'de analitik ve $\overline{G}$'da sürekli olan fonksiyonların kümesi $A(\overline{G})$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.6. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : G \to \mathbb{C}$ tanımlı fonksiyonların oluşturduğu $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine ortak tanım kümesi G bölgesi olan *fonksiyonlar dizisi* denir.

Tanım 3.1.7. i) $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortak tanım kümesi G bölgesi olan fonksiyonlar dizisi ve $z_0 \in G$ olsun. $\{f_n(z_0)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yakınsak ise $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine $z_0 \in G$ noktasında *yakınsaktır* denir.

ii) Eğer, $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisi G bölgesinin her noktasında yakınsak ise $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine G bölgesinde *noktasal yakınsaktır* denir.

$\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisi G bölgesinde noktasal yakınsak ve $f : G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun.

iii) $\forall z \in G$ için $\lim_{n\to\infty} f_n(z) = f(z)$ ise f fonksiyonuna $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisinin *limiti* denir.

Tanım 3.1.8. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, ortak tanım kümesi G bölgesi olan fonksiyonlar dizisi ve $f : G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde en az bir $n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilinir öyle ki $\forall n \geq n_0$ ve $\forall z \in G$ için $|f_n(z) - f(z)| < \varepsilon$ ise $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine G bölgesinde f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir.

Tanım 3.1.9. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortak tanım kümesi $G \subset \mathbb{C}$ bölgesi olan fonksiyon dizisi olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde öyle bir $n_0 := n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $\forall n, m > n_0$ ve $\forall z \in G$ için

$$|f_n(z) - f_m(z)| < \varepsilon$$

koşulu sağlanıyorsa $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ fonksiyonlar dizisine $G \subset \mathbb{C}$ bölgesinde bir *düzgün Cauchy dizisi* denir.

Teorem 3.1.4. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ ortak tanım bölgesi G olan fonksiyonlar dizisi olsun. $\{f_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin G'de düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul onun düzgün Cauchy dizisi olmasıdır [12].

Tanım 3.1.10. $f : [a,b] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin.

i) En az bir $M > 0$ reel sayısı bulunabilir öyle ki $\forall x \in [a,b]$ için $|f(x)| \leq M$ ise f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında sınırlıdır denir.

ii) Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $\delta > 0$ sayısı bulunabilir öyle ki $[a,b]$ aralığının $\sum_{k=0}^{n}(b_k - a_k) < \delta$ koşulunu sağlayan her bir ayrık $\{(a_k, b_k)\}_{k=0}^{n}$ parçalanışı için

$$\sum_{k=0}^{n}|f(b_k) - f(a_k)| < \varepsilon$$

sağlanıyor ise sınırlı f fonksiyonuna $[a,b]$ aralığında *mutlak sürekli fonksiyon* denir.

Tanım 3.1.11. Kompleks değişkenli reel değerli $u: G \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Eğer, u fonksiyonu kenarları OX ve OY eksenlerine paralel olan her $R \subset G$ dikdörtgeninin hemen hemen tüm yatay ve hemen hemen tüm dikey aralıklarında mutlak sürekli ise u fonksiyonuna G'de *mutlak süreklidir* denir.

Tanım 3.1.12. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $f: G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu verilsin.

i) $\operatorname{Re} f(z)$ ve $\operatorname{Im} f(z): G \to \mathbb{R}$ fonksiyonları G'de mutlak sürekli fonksiyonlar ise f fonksiyonu G'de *mutlak süreklidir* denir.

ii) G bölgesinde mutlak sürekli fonksiyonların sınıfı $ACL(G)$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.5. $f \in ACL(G)$ ise G bölgesinde hemen hemen her yerde $\dfrac{\partial f}{\partial x}$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial y}$ kısmi türevleri ve

$$\frac{\partial f}{\partial z} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} - i\frac{\partial f}{\partial y}\right), \qquad \frac{\partial f}{\partial \bar{z}} := \frac{1}{2}\left(\frac{\partial f}{\partial x} + i\frac{\partial f}{\partial y}\right)$$

kısmi türevleri vardır [13].

3.2. KOMPLEKS DÜZLEMDE EĞRİ VE KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

Tanım 3.2.1. $a, b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $\gamma := z = z(t): [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna kompleks düzlemde bir *eğri* denir.

i) $z(a)$ noktasına γ eğrisinin başlangıç noktası, $z(b)$ noktasına da bitiş noktası,

ii) $z(a) = z(b)$ ise γ eğrisine *kapalı eğri,*

iii) $\forall t_1, t_2 \in [a,b]$ için $t_1 \neq t_2$ olduğunda $z(t_1) \neq z(t_2)$ ise γ eğrisine *Jordan yayı,* eğer $z(a) = z(b)$ ise γ eğrisine *Jordan eğrisi*,

iv) $\forall t \in [a,b]$ için $z'(t)$ var ve sürekli ise γ eğrisine diferansiyellenebilir eğri, $z'(t) \neq 0$ ise γ eğrisine *düzgün eğri*,

v) $P := \{t_0, t_1, ..., t_n\}$, $[a,b]$ aralığının herhangi bir parçalanışı olmak üzere $z = z(t)$ fonksiyonu $(t_{k-1}, t_k), k = 1, 2, ..., n$ aralığında sürekli türevlenebilir ve $\lim\limits_{t \to t_{k-1}^+} z(t)$, $\lim\limits_{t \to t_k^-} z(t)$ limitleri mevcut fakat eşit değil ise γ eğrisine *parçalı düzgün* eğri, denir.

Teorem 3.2.1. (**Jordan Eğri Teoremi**) $\gamma \subset \overline{\mathbb{C}}$ bir Jordan eğrisi olsun. Bu taktirde γ, düzlemi sınırları ortak γ eğrisi olan biri sonlu, diğeri sonsuz iki ayrık bölgeye ayırır [12].

Bu bölgelerden sonlu olana γ *eğrisinin içi*, sonsuz olana ise γ *'nın dışı* denir ve sırasıyla $\operatorname{int}(\gamma)$ ve $ext(\gamma)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.2. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere G bölgesinden alınan her bir γ eğrisi için $\operatorname{int}(\gamma) \subset G$ oluyor ise G bölgesine *basit bağlantılı bölge* denir.

$[a,b]$ aralığının $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ biçimindeki tüm parçalanışlarının ailesi $\mathbb{P}$ ile gösterilsin ve

$$\ell_n(P) := \sum_{k=1}^{n} \left| z(t_k) - z(t_{k-1}) \right|$$

olsun.

Tanım 3.2.3. Eğer,

$$\lim_{n \to \infty} \sup \{ \ell_n(P) : P \in \mathbb{P} \} < \infty$$

ise γ eğrisine *ölçülebilir eğri* denir.

Teorem 3.2.2. Eğer, γ parçalı düzgün eğri ise γ eğrisi ölçülebilir ve

$$mes(\gamma) := \int_a^b \left| z'(t) \right| dt$$

dır [16].

L eğrisinin doğal denklemi $z = z(s),\ s \in [0, mesL]$ olmak üzere L eğrisine her bir $z = z(s)$ noktasında çizilen teğetin OX ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı $\theta(s) := \theta(z(s))$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.4. Eğer,

i) $\theta(s) \in C([0, mesL])$ ise L eğrisine düzgün eğri denir ve böyle eğriler sınıfı C_θ ile gösterilir.

ii) G karmaşık düzlemde bir bölge; $L := \partial G$ eğrisi C_θ sınıfından olan sonlu sayıda yaylarının $z_1, z_2, ..., z_m$ noktalarındaki birleşiminden oluşsun öyle ki, L eğrisi z_1 noktasında yerel düzgün ve

a) Her bir $2 \le j \le k \le m$ için z_j birleşme noktalarında G bölgesi $\lambda_j \pi$ $\left(0 < \lambda_j < 2\right)$ köşeli dış açıya sahip ve $\lambda := \min\limits_{1 \le j \le k} \left\{\lambda_j\right\}$ dir.

b) Her bir $k+1 \le j \le m$ için z_j birleşme noktalarında $x^p, (p \ge 1)$ tipli iç sıfır açı oluşur. (Yani, $z = (x, y) \in L_j$ (veya $z = (x, y) \in L_{j+1}$) ise $-\infty < c_1 < c_2 < \infty$ sabitleri için $c_1 x^p \le y \le c_2 x^p$ $\left(\text{veya } -c_2 x^p \le y \le -c_1 x^p\right)$ sağlanır.)

koşullarını sağlarsa G bölgesine $C_\theta\left(\lambda, p\right)$ $(0 < \lambda < 2,\ p \ge 1)$ sınıfındandır denir.

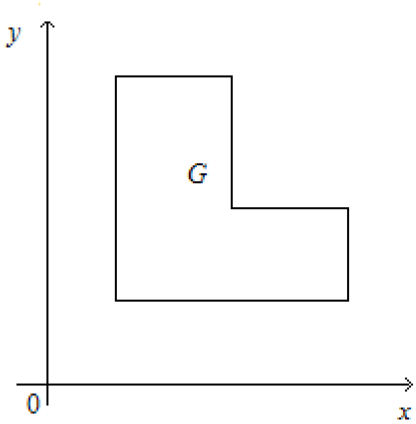
Tanım 3.2.4'den $G \in C_\theta\left(\lambda, p\right)$ bölgesinin her bir z_j $\left(1 \le j \le k\right)$ birleşme noktasında $\lambda\pi$ $\left(0 < \lambda < 2\right)$ dış açıya ve her bir z_j $\left(k+1 \le j \le m\right)$ birleşme noktasında ise $x^p -$tipli iç sıfır açıya sahip olduğu görülür.

Eğer, $p = 1$ ise G bölgesi iç sıfır açıya sahip değildir ve bu sınıf $G \in C_\theta\left(\lambda, 1\right)$ ile gösterilir.

Eğer, $\lambda = 1$ ise G bölgesi sadece iç sıfır açı içeren, parçalı düzgün eğri ile sınırlı bir bölge olur ve bu sınıf $G \in C_\theta\left(1, p\right)$ ile gösterilir.

Tanım 3.2.5. $a \le b, c \le d, b \le e, c \le f$ reel sayılar olmak üzere kompleks düzlemde $G := \left\{z = x + iy\ :\ a \le x \le b,\ c \le y \le d\right\} \cup \left\{z = x + iy : b \le x \le e,\ c \le y \le f\right\}$ şeklinde tanımlanan bölgeye $L-$şekilli bölge denir.

Genel olarak $L-$şekilli bölgenin resmi aşağıdaki gibidir.



Tanım 3.2.6. γ, denklemi $z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ olan düzgün eğri, f ise γ eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\int_{\gamma} f(z)dz := \int_{a}^{b} f(z(t))\, z'(t)\, dt \,,$$

integraline f nin γ eğrisi üzerindeki *eğrisel integrali* denir.

Teorem 3.2.3. **(Cauchy Teoremi)** $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in A(G)$ olsun. γ eğrisi $int(\gamma) \subset G$ sağlayan ölçülebilir Jordan eğrisi ise

$$\int_{\gamma} f(z)dz = 0$$

dır [11].

Teorem 3.2.4. **(Cauchy İntegral Formülü)** $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f \in A(G)$ olsun. γ eğrisi $int(\gamma) \subset G$ sağlayan ölçülebilir Jordan eğrisi olsun. Bu durumda $\forall z \in int(\gamma)$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

dır [11].

Teorem 3.2.5. (Cauchy Türev Formülü) $D \subset \mathbb{C}$ sonlu sayıda parçalı düzgün eğri ile sınırlı bölge; f fonksiyonu D'de analitik ve $G \subset D$ olsun. Bu durumda, $\forall z \in G$ ve her $n = 0,1,2,...$ için

$$f^{(n)}(z) = \frac{n!}{2\pi i} \int_{\partial G} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^{n+1}} d\xi$$

dır [11].

Teorem 3.2.6. (Maksimum-Modulus Prensibi) $G \subset \mathbb{C}$ bölgesi $L := \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge olsun. Eğer f G'de analitik ve $\overline{G}$'da sürekli ise $|f|$ maksimum değerini $L := \partial G$'de alır [11].

Tanım 3.2.7. G, $\mathbb{C}$'de bir bölge; $U(x,y): G \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip ve

$$\Delta U = \frac{\partial^2 U}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 U}{\partial y^2}$$

olmak üzere $\Delta U = 0$ ise $U(x,y)$ fonksiyonuna G bölgesinde harmonik fonksiyon denir.

Teorem 3.2.7. (Ortalama Değer Teoremi) G, $\mathbb{C}$'de bir bölge; $U(x,y): G \to \mathbb{R}$ fonksiyonu G'de harmonik ise $\forall B(z_0, r) \subset G$ için

$$U(z_0) = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U\left(z_0 + re^{it}\right) dt$$

dır [12].

Teorem 3.2.8. G kümesi $\mathbb{C}$'de bir bölge, $U(x,y): G \to \mathbb{R}$ fonksiyonu G'de harmonik ve $B(z_0, r) \subset G$ olsun. Bu durumda,

$$U(z_0) = \frac{1}{\pi r^2} \iint_{B(z_0, r)} U(z) d\sigma_z$$

dır [12].

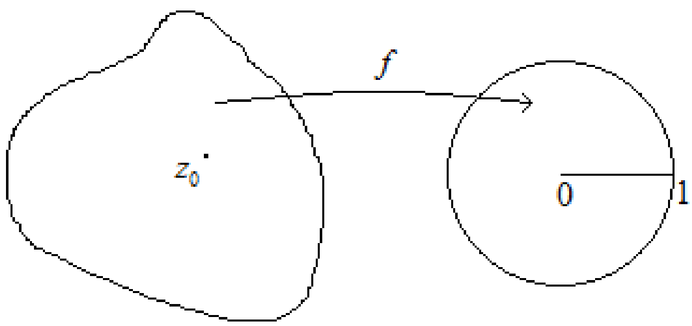
Tanım 3.2.8. $G,H \subset \mathbb{C}$ sınırlarında en az iki nokta içeren basit bağlantılı bölgeler ve $f: G \to H$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonu 1-1 ve analitik ise f 'e *konform dönüşüm* denir.

Teorem 3.2.9. (Riemann Dönüşüm Teoremi)

$G \subset \mathbb{C}$ basit bağlantılı bir bölge ve $z_0 \in G$ olsun. G bölgesini $B(0,1) := \{w : |w| < 1\}$ dairesine resmeden ve

$$\varphi(z_0) = 0 \, , \; \varphi'(z_0) > 0$$

koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır [12].



Teorem 3.2.10. $\Omega := \mathbb{C} \setminus \overline{G}$ ve $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ olmak üzere

$$\Phi(\infty) = \infty \text{ ve } \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

olacak şekilde bir tek $\Phi : \Omega \to \Delta$ konform dönüşümü vardır.

İspat: $\zeta(z) := \dfrac{1}{z}$ dönüşümü basit bağlantılı Ω bölgesini $\mathbb{C}$'de basit bağlantılı bir $G := \zeta(\Omega)$ bölgesine resmeden ve $\zeta(\infty) = 0, \; \zeta^{-1}(0) = \infty$ koşullarını sağlayan bir konform dönüşümdür. Teorem 3.2.3'ten $\varphi(0) = 0$ ve $\varphi'(0) > 0$ koşulunu sağlayan bir tek $\varphi : G \to D$ konform dönüşümü vardır. $\mu(w) := \dfrac{1}{w}$ dönüşümü ise D birim dairesinden Δ bölgesine

$$\mu(0) := \infty , \;\; \mu^{-1}(\infty) = 0$$

koşullarını sağlayan konform dönüşümdür.

$$\Phi := \mu \circ \varphi \circ \zeta : \Omega \to \Delta \,,\ \Phi(z) = \frac{1}{\varphi\left(\frac{1}{z}\right)}$$

dönüşümü konformdur ve

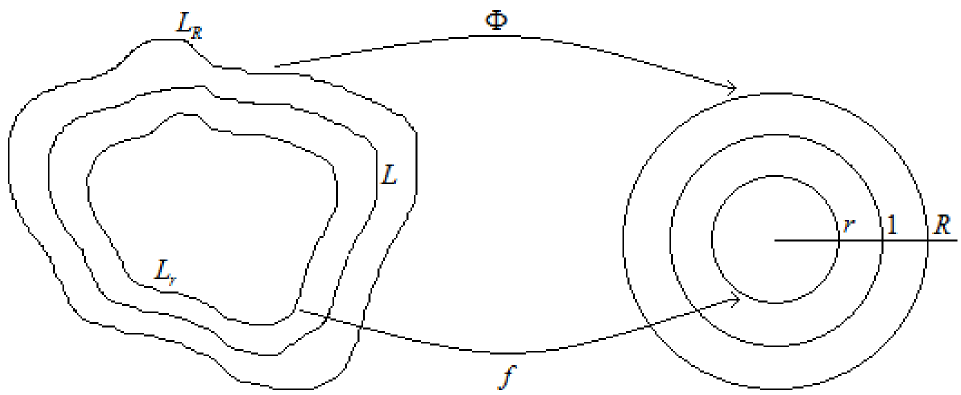
$$\Phi(\infty) = \infty \ \text{ ve } \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

sağlanır.

Tanım 3.2.9. $0 < r < 1$ ve $R > 1$ olsun. Bu durumda;

$$L_r := \{ z \in G : |\varphi(z)| = r \},\ L_R := \{ z \in \Omega : |\Phi(z)| = R \} \ \text{ ve } L_1 \equiv L$$

eğrilerine sırasıyla *iç* ve *dış seviye eğrileri* denir.



3.3. $L_2(G)-$UZAYI VE ORTONORMAL SİSTEMLER

Tanım 3.3.1. $G \subset \mathbb{C}$ karmaşık düzlemde bir bölge olmak üzere.

$$\iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z < \infty \tag{3.3.1}$$

koşulunu sağlayan G bölgesinde tanımlı ölçülebilir fonksiyonların sınıfı $L_2(G)$ ile gösterilir.

Yani,

$$L_2(G) := \left\{ f : f \ G\text{'de ölçülebilir ve } \iint_G |f(z)|^2 \, d\sigma_z < \infty \right\}.$$

Ayrıca, $L_2\left(G\right)$ uzayında norm

$$\|f\|_{L_2(G)} := \left(\iint_G \left|f\left(z\right)\right|^2 d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}}$$

biçiminde tanımlanır.

Lemma 3.3.1. $f \in L_2(G)$, $z_0 \in G$ ve $d := \operatorname{dist}(z_0, \partial G)$ olsun. Bu durumda,

$$\left|f(z_0)\right|^2 \le \frac{c}{\pi d^2} \iint_G \left|f(z)\right|^2 d\sigma_z \tag{3.3.2}$$

sağlanır [14].

Eğer, G bölgesi olarak birim daire $f = 1$ ve $z = 0$ alınırsa $\left(1.1\right)$ eşitsizliği eşitliğe dönüşür. Ayrıca, $G = \mathbb{C}$ alınırsa $L_2(G)$ sadece $f = 0$ fonksiyonunu içerir. Bu durum dikkate alınmayacaktır.

Her $f, g \in L^2(G)$ ve $a, b \in \mathbb{C}$ için

$$\left|af + bg\right|^2 \le 2\left(\left|a\right|^2 \left|f\right|^2 + \left|b\right|^2 \left|g\right|^2\right) \tag{3.3.3}$$

eşitsizliğinden $\left(af + bg\right) \in L_2(G)$'dir.

Ayrıca,

$$f.\overline{g} = \frac{1}{2}\left|f + g\right|^2 + \frac{i}{2}\left|f + ig\right|^2 - \frac{1+i}{2}\left|f\right|^2 - \frac{1+i}{2}\left|g\right|^2 \tag{3.3.4}$$

sağlanır.

O halde $f, g \in L^2(G)$ olmak üzere (3.3.4) eşitliğinden aşağıdaki fonksiyonu tanımlamak mümkündür:

$$\left\langle f, g \right\rangle := \iint_G f(z)\overline{g(z)} d\sigma_z \tag{3.3.5}$$

Teorem 3.3.1. (3.3.5)'te verilen iç çarpım ile $L_2(G)$ bir Hilbert uzayıdır [15].

Gerçekten,

i) (3.3.3) eşitsizliği $L_2(G)$ uzayının toplama ve skalerle çarpma işlemlerine kapalı olduğunu gösterir. Böylece $L_2(G)$ uzayı bir lineer uzay olur.

ii) (3.3.4)'de tanımlanan fonksiyon bir iç çarpımdır. Yani,

a) $\langle f+g,\, h\rangle = \langle f,h\rangle + \langle g,h\rangle$

b) $\langle f,g\rangle = \overline{\langle g,f\rangle}$

c) $\langle \alpha f,g\rangle = \alpha\langle f,g\rangle, \quad \forall \alpha \in \mathbb{C}$

d) $\langle f,f\rangle \geq 0$ ve $\langle f,f\rangle = 0 \Leftrightarrow f = 0$

sağlanır.

iii) $L_2(G)$ lineer uzayı (3.3.5)'te verilen iç çarpımın ürettiği

$$\|f\|_2 := \langle f,f\rangle^{\frac{1}{2}} = \left(\iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}} \tag{3.3.6}$$

normu ile tam uzaydır [15].

Teorem 3.3.2. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $f \in L_2(G)$ ve $g \in L_2(G)$ olmak üzere

i) $\left| \iint_G f(z)g(z)d\sigma_z \right| \leq \left(\iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_G |g(z)|^2 d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}}$

ii) $\left(\iint_G |f(z)+g(z)|^2 d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}} \leq \left(\iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}} + \left(\iint_G |g(z)|^2 d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}}$

Bu eşitsizliklere sırasıyla *Hölder Eşitsizliği* ve *Minkowski Eşitsizliği* adı verilir [16].

Tanım 3.3.2. $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge olmak üzere. G bölgesinde analitik ve (3.3.1) koşulunu sağlayan fonksiyonların sınıfı $A_2(G)$ ile gösterilir. Yani;

$$A_2(G) := \left\{ f : f \in A(G) \text{ ve } \iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z < \infty \right\}$$

dir.

Ayrıca, $A_2(G)$ uzayında norm

$$\|f\|_{A_2(G)} := \|f\|_{L_2(G)}$$

biçiminde tanımlanır.

Tanım 3.3.3. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$, $f \in L_2(G)$ olmak üzere

$$(Tf)(z) := \left(-\frac{1}{\pi} \iint_{\mathbb{C}} \frac{f(\xi)}{(\xi - z)^2} d\sigma_\xi \right) \quad p.v. \tag{3.3.7}$$

dönüşümüne *Hilbert Dönüşümü* denir [13].

Teorem 3.3.3. (Calderon-Zygmund Eşitsizliği) $T : L_2 \to L_2$, sınırlı bir dönüşüm olmak üzere

$$\|Tf\|_{L_2} \leq \|f\|_{L_2} \tag{3.3.8}$$

eşitsizliği sağlanır [13].

Tanım 3.3.4. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun.

i) $f \in ACL(G)$,

ii) $\forall B \subset G$ kompakt kümesi için $f_x, f_y \in L_2(B)$,

koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna G bölgesinde $L_2(G)-$*türevlenebilirdir* denir.

Teorem 3.3.4. (Green Formülü) $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $L_1(G)$ türevlenebilir bir fonksiyon ise $D \subset G$ ölçülebilir sınırlı Jordan bölgesi için

$$\int_{\partial D} f(\xi)\, d\xi = 2i \iint_D f_{\bar{\xi}}(\xi) d\sigma_\xi \tag{3.3.9}$$

dır [16].

Teorem 3.3.5. (Cauchy-Pompeiu Formülü) $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$ fonksiyonu $L_1(G)$ türevlenebilir bir fonksiyon, $D \subset G$ sınırlı Jordan bölgesi ve $z \in D$ ise

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\frac{1}{\pi}\iint_{D}\frac{f_{\bar{\xi}}(\xi)}{\xi-z}d\sigma_{\xi} \tag{3.3.10}$$

dır.

İspat: z merkezli ε yarıçaplı daire $B(z,\varepsilon)$ olmak üzere $\dfrac{f(\xi)}{\xi-z}$ fonksiyonuna $D\backslash B(z,\varepsilon)$ bölgesinde **Teorem 3.3.4.** uygulanırsa,

$$2i\iint_{D\backslash B(z,\varepsilon)}\frac{f_{\bar{\xi}}(\xi)}{\xi-z}d\sigma_{\xi}=\int_{\partial(D\backslash B(z,\varepsilon))}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\int_{\partial D}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi-\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi$$

elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafındaki son integral

$$\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}d\xi+\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{f(z)}{\xi-z}d\xi\,,$$

şeklinde yazılabilir ve

$$\left|\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}d\xi\right|\leq\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{|f(\xi)-f(z)|}{|\xi-z|}|d\xi|$$

$$\leq\ \varepsilon\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{1}{|\xi-z|}|d\xi|\leq\varepsilon\frac{2\pi\varepsilon}{\varepsilon}\ =2\pi\varepsilon$$

olduğu göz önünde tutulursa

$$\lim_{\varepsilon\to0}\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{f(\xi)}{\xi-z}d\xi=\lim_{\varepsilon\to0}\left[\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{f(\xi)-f(z)}{\xi-z}d\xi+\int_{\partial B(z,\varepsilon)}\frac{f(z)}{\xi-z}d\xi\right]=2\pi i\ f(z)$$

bulunarak ispat tamamlanır.

$f\in A(G)$ olduğunda Teorem 3.1.3. göz önüne alınırsa Cauchy-Pompeiu formülü Teorem 3.2.4.'de verilen Cauchy integral formülüne dönüşür.

Tanım. 3.3.4. $G\subset\mathbb{C}$ bir bölge $\forall n=0,1,2,...$için $\phi_n:G\to C,\ \phi_n\in L_2(G)$ olmak üzere

$$\langle\phi_n,\phi_m\rangle=\iint_G\phi_n(z)\overline{\phi_m(z)}\ d\sigma_z=\begin{cases}1 & n=m,\\ 0 & n\neq m,\end{cases} \tag{3.3.11}$$

koşulunu sağlayan $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ sistemine ortonormal sistem denir.

$L_2(G)$ uzayında her hangi bir lineer bağımsız $\{\psi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyonlar sistemi verilsin. Bu sistem yardımıyla $L_2(G)$ uzayında ortonormal olan bir $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ fonksiyonlar sistemi inşa edilebilir. Bu metod Gramm-Schmidt Ortonormaleştirme metodu diye bilinir. Şimdi bu metodu adım adım verelim:

Adım 1:

$$\phi_0(z) := \frac{e^{iw_0}}{\sqrt{\langle \psi_0, \psi_0 \rangle}} \psi_0(z), \ w_0 \in \mathbb{R}$$

olarak seçilir.

Adım 2:

$h_1(z) = \psi_1(z) + \mu_0 \phi_0(z)$ olsun. μ_0 sayısı öyle seçilsin ki $\langle h_1, \phi_0 \rangle = 0$ sağlansın. Buradan $\mu_0 = -\langle \psi_0, \phi_0 \rangle$ bulunur. Böylece $h_1(z) = \psi_1(z) - \langle \psi_1, \phi_0 \rangle \phi_0(z)$ elde edilir.

$h_1(z) \neq 0$ ve $h_1(z)$, w_0 'ın seçiminden bağımsızdır.

Buna göre

$$\phi_1(z) := \frac{e^{iw_1}}{\sqrt{\langle h_1, h_1 \rangle}} h_1(z), \ w_1 \in \mathbb{R}$$

elde edilir.

Adım 3: $h_2(z) = \psi_2(z) + \mu_0 \phi_0(z) + \mu_1 \phi_1(z)$ olsun. μ_0 ve μ_1 sayıları öyle seçilsin ki $\langle h_2, \phi_0 \rangle = 0$ ve $\langle h_2, \phi_0 \rangle = 0$ sağlansın.

O halde $\mu_0 = -\langle \psi_2, \phi_0 \rangle$ ve $\mu_1 = -\langle \psi_2, \phi_1 \rangle$ elde edilir. Böylece,

$$h_2(z) = \psi_2(z) - \sum_{k=0}^{1} \langle \psi_2, \phi_k \rangle \phi_k(z)$$

elde edilir. Buna göre

$$\phi_2(z) := \frac{e^{iw_2}}{\sqrt{\langle h_2, h_2 \rangle}} h_2(z), \ w_2 \in \mathbb{R}$$

bulunur. Bu şekilde devam edilirse n'inci adımdan sonra

$$h_n(z) = \psi_n(z) - \sum_{k=0}^{n-1} \langle \psi_n, \phi_k \rangle \phi_k(z)$$

ve

$$\phi_n(z) := \frac{e^{iw_n}}{\sqrt{\langle h_n, h_n \rangle}} h_n(z), \; w_n \in \mathbb{R}$$

elde edilir. $h_n(z) \neq 0$ ve $h_n(z)$ fonksiyonu $w_0, w_1, w_2, ..., w_{n-1}$'in seçiminden bağımsızdır. $\{\phi_n(z)\}_{n\in\mathbb{N}}$ sisteminin inşasından görülür ki her bir $\phi_k(z)$ fonksiyonu $\psi_k(z)$ fonksiyonunun bir lineer toplamı olarak gösterilebilir. Bunun tersi de doğrudur.

Ayrıca, $\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \delta_{n,m}$ dir. Gerçekten,

$\langle \phi_k, \phi_j \rangle = 0, \; k \neq j, \; k, j = 0,...,n-1$, olursa $m < n$ için

$$\langle \phi_n, \phi_m \rangle = \frac{e^{iw_n}}{\sqrt{\langle h_n, h_n \rangle}} \left[\left\langle \psi_n - \sum_{k=0}^{n-1} \langle \psi_n, \phi_k \rangle \phi_k, \phi_m \right\rangle \right]$$

$$= \frac{e^{iw_n}}{\sqrt{\langle h_n, h_n \rangle}} \left[\langle \psi_n, \phi_m \rangle - \sum_{k=0}^{n-1} \langle \psi_n, \phi_k \rangle \langle \phi_k, \phi_m \rangle \right]$$

$$= \frac{e^{iw_n}}{\sqrt{\langle h_n, h_n \rangle}} \left[\langle \psi_n, \phi_m \rangle - \langle \psi_n, \phi_m \rangle \right] = 0$$

Bununla birlikte, $\phi_n(z)$ fonksiyonu her bir $\psi_k(z)$, $k = 0,1,2,...,n-1$ fonksiyonuna ortogonaldir, çünkü $\psi_k(z)$ fonksiyonu $\psi_k(z) = \sum_{j=0}^{k} \mu_j \phi_j(z)$ şeklinde gösterilebilir.

e^{iw_n} katsayılarının verilmesi ile buna uygun olan ortonormal sistem elde edilir.

e^{iw_n} sayılarına faz sayıları denir ve özel olarak $w_n =: \sqrt[n]{1}$ gibi alınır.

Şimdi $\{\phi_n(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ortonormal sisteminin

$$\phi_n(z) = \sum_{k=0}^{n} a_k^{(n)} \psi_k(z), \quad a_n^{(n)} > 0$$

koşulu ile tek türlü tanımlandığını gösterelim. Böyle tanımlı iki $\{\phi_n^{(1)}(z)\}$ ve $\{\phi_n^{(2)}(z)\}$, $n = 0,1,2,...$, ortonormal polinomlar sisteminin mevcut olduğu kabul edilsin. Bu durumda $\phi_n^{(1)}(z) \equiv \phi_n^{(2)}(z), \quad n = 0,1,2,...,$ olduğu gösterilmelidir.

Gramm-Schmidt ortonormalleştirme yöntemine göre

$$\phi_0^{(1)}(z) = c_1\psi_0(z) = c_1c_2\phi_0^{(2)}(z)$$

ve

$$<\phi_0^{(1)}, \phi_0^{(1)}>= A_0^{\ 2} <\phi_0^{(2)}, \phi_0^{(2)}>= 1$$

olduğundan $A_0^{\ 2} = 1$ elde edilir ve $a_n^{(n)} > 0$ olduğu dikkate alınırsa, $A_0 = 1$ dir, yani $\phi_0^{(1)}(z) \equiv \phi_0^{(z)}(z)$ dir. $n > 0$ için

$$\phi_n^{(1)}(z) = \sum_{k=0}^{n} A_k\phi_k^{(2)}(z),$$

şeklinde yazılır ve her iki taraf $\phi_k^{(2)}(z)$ ile çarpılırsa

$$<\phi_n^{(1)}, \phi_k^{(2)}>= \sum_{j=0}^{n} A_k <\phi_j^{(2)}, \phi_k^{(2)}>= A_k$$

elde edilir.

$$A_k = \iint_G \varphi_n^{(1)}\overline{\varphi_k^{(2)}}d\sigma_z, \quad k = 0,....,n$$

Öte yandan

$$A_k =<\phi_n^{(1)}, \phi_k^{(2)}>=<\phi_n^{(1)}, \sum_{j=0}^{k} c_j\psi_j>= 0, \quad k = 0, ..., n-1.$$

Bu durumda, $\phi_n^{(1)} = A_n\phi_n^{(2)}$ dir. Koşula göre $A_n > 0$ ve $A_n^{\ 2} = 1$ olduğundan $A_n = 1$ dolayısıyla $\phi_n^{(1)}(z) \equiv \phi_n^{(2)}(z)$, $\forall\ n = 0,1,2, ...,$ elde edilir.

3.4. $A_2(h,G)$ UZAYI VE ÖZELLİKLERİ

$G \subset \mathbb{C}$, $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge, $h(z) \geq 0$ G 'de tanımlı integrallenebilir ve

$$\iint_G h(z)d\sigma_z > 0$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyon olsun.

Tanım 3.4.1. G bir bölge olmak üzere, G bölgesinde analitik ve $\iint_G h(z)|f(z)|^2 d\sigma_z < \infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının ailesi $A_2(h,G)$ ile gösterilir. Yani,

$$A_2(h,G) := \left\{ f : f \in A(\overline{G}) \wedge \iint_G h(z)|f(z)|^2 d\sigma_z < \infty \right\}$$

Tanım 3.4.2. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $h(z)$ ise G de tanımlı bir fonksiyon olsun. $\forall B \subset G$ kompakt kümesi için $\exists \rho_B > 0$ öyle ki $\forall f \in A_2(h,G)$ için

$$\iint_G h(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq \rho_B |f(z_0)|^2, \ \ z_0 \in B$$

sağlıyorsa, $h(z)$ fonksiyonuna G de bir ağırlık fonksiyonu denir.

Teorem 3.4.1. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $h(z)$ ise G de tanımlı bir fonksiyon olsun. Eğer $\forall B \subset G$ kompakt kümesi verildiğinde parçalı düzgün $\ell \subset G$ eğrisi ve $\delta > 0$ sayısı

a) $\min\{d(\ell,B); d(\ell,\partial G)\} \geq \delta$,

b) her $z \in \overline{F} := \left\{ z : d(z,\ell) \leq \dfrac{\delta}{2} \right\}$ için $h(z) \geq \varepsilon_0 > 0$,

koşulları sağlanacak şekilde bulunabiliyorsa $h(z)$ bir ağırlık fonksiyonudur.

İspat: $\forall \varsigma \in \ell$ ve $f \in A_2(h,G)$ için $m_\ell = \inf\limits_{z \in \overline{F}} h(z) > 0$ olmak üzere

$$\iint_G h(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq \iint_{|z-\varsigma| \leq \frac{\delta}{2}} h(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq m_\ell \iint_{|z-\varsigma| \leq \frac{\delta}{2}} |f(z)|^2 d\sigma_z$$

olur ve Lemma 3.3.1'den

$$\iint_G h(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq \pi \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 m_\ell |f(\varsigma)|^2$$

bulunur. Ayrıca $M := \max\limits_{\varsigma \in \ell} |f(\varsigma)|$ olmak üzere

$$\iint_G h(z)|f(z)|^2 d\sigma_z \geq \pi \left(\frac{\delta}{2} \right)^2 m_\ell M^2$$

elde edilir. Teorem 3.2.4'ten $\forall z_0 \in B$ için

$$f(z_0)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\ell}\frac{f(\varsigma)}{\varsigma-z_0}d\varsigma$$

dir. Buradan

$$\left|f(z_0)\right|\leq\frac{M\,mes\ell}{\pi\delta}$$

elde edilir. Eşitsizliği kullanılırsa

$$\iint_G h(z)\left|f(z)\right|^2 d\sigma_z \geq \frac{1}{4}\frac{\pi^3\delta^4}{\left(mes\ell\right)^2}m_\ell\left|f(z_0)\right|^2, z_0\in B$$

olduğu bulunur.

$B\subset G$ ve $f\in A_2(h,G)$ keyfi olduğundan $h(z)$ bir ağırlık fonksiyonudur. Bu da teoremi ispatlar.

Özel halde, $D\in A(G)\ ve\ \forall z\in\overline{G}\ için\ D(z)\neq 0$ olmak üzere

$$h(z)=\left|D(z)\right|^2 \tag{3.4.1}$$

gibi tanımlanırsa Teorem 3.4.1'e göre bir ağırlık fonksiyonu olacaktır. Gram Schmidt ortonormalleştirme metodundaki $\{\psi_k(z)\}_{k=0}^{n}$ lineer bağımsız fonksiyonlar sistemi

$$\psi_k(z)=D(z)z^k,\ k=0,1,...,n,$$

şeklinde seçilirse G bölgesinde ortonormal olan

$$\varphi_k(z)=D(z)\phi_k(z),\ k=0,1,...,n,$$

sistemi elde edilir. Burada $\phi_k(z)$, derecesi k'ya eşit olan bir polinomdur ve e^{iw_k}, $\phi_k(z)$'nin baş teriminin katsayısı pozitif olacak şekilde seçilmiştir. Bu durumda,

$$\iint_G D(z)\phi_k(z)\overline{D(z)\phi_m(z)}d\sigma_z=\delta_{k,m}$$

elde edilir. Yukarıda $h(z)=\left|D(z)\right|^2$ yazılırsa

$$\iint_G h(z)\phi_k(z)\overline{\phi_m(z)}d\sigma_z=\delta_{k,m}$$

sonucuna ulaşılır.

Böylece $h(z)=\left|D(z)\right|^2$ ağırlık fonksiyonuna göre $\{\phi_k(z)\}_{n=0}^{\infty}$ ortonormal polinomlar sistemi elde edilir.

3.5. YARI KONFORM DÖNÜŞÜM VE EĞRİLER

Tanım 3.5.1. $G, H \subset \mathbb{C}$ herhangi iki bölge; $f : G \to H$ fonksiyonu $\forall z \in G$ için $J_f(z) := |f_z|^2 - |f_{\bar{z}}|^2 > 0$ koşulunu sağlayan ve C^1 sınıfından olan bir homeomorfizm olsun. Eğer,

$$\sup_{z \in G} \frac{|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2}{|f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2} \leq K < \infty \tag{3.5.1}$$

ise f fonksiyonuna G bölgesi üzerinde tanımlı bir $K-$*yarı konform dönüşüm*, $K \geq 1$ sayısına da f dönüşümünün *yarı konformluk katsayısı* denir.

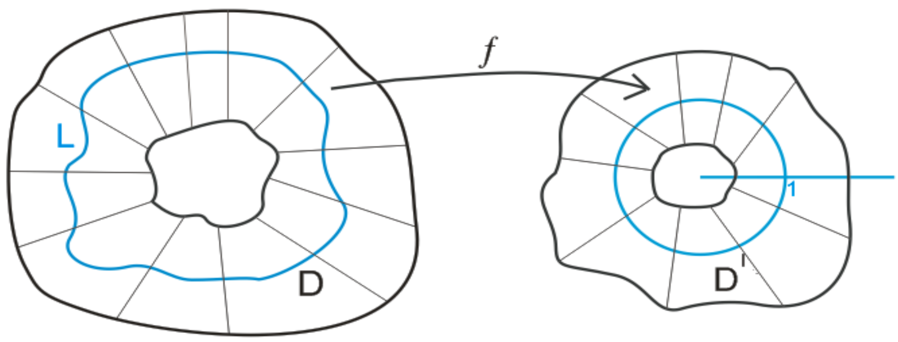
Tanımdan görülür ki f fonksiyonu G bölgesi üzerinde $K-$yarı konform dönüşüm ve $k := \frac{K-1}{K+1}$ ise $\forall z \in G$ için $\left|\frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}\right| \leq k < 1$ dir. Yarı konform dönüşümün bazı özellikleri aşağıdaki verilmiştir [17].

i) 1-yarı konform dönüşüm konform dönüşümdür.

ii) f_1, K_1-yarı konform ve f_2, K_2-yarı konform dönüşümleri verilsin. $f_1 \circ f_2$ bileşke dönüşümü $K_1 \cdot K_2-$yarı konform dönüşümdür.

iii) f dönüşümü $K-$yarı konform ise f^{-1}de $K-$yarı konform dönüşümdür.

Tanım 3.5.2. $f : D \supset L \to D'$, $K-$yarı konform dönüşümü altında $f(L)$ çember (doğru parçası) ise L eğrisine $K-$*yarı konform eğri* ($K-$*yarı konform yay*) denir.



$F(L)$, L'yi çember veya aralığa resmeden $f : D \supset L \to D'$ tüm homeomorfizmaların kümesi ve

$$K_L := \inf_{f \in F(L)} \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

olsun [16], [18].

Eğer,

$$K_L < \infty \tag{3.5.2}$$

oluyorsa L eğrisine *yarı konform eğri* denir ve L, $K-$yarı konform eğri ise $K_L \le K$ dır.

L eğrisi herhangi bir $K \ge 1$ sayısı için K-yarı konform eğri oluyorsa L ye yarı konform eğri denir.

Tanım 3.5.2.'de $D = \mathbb{C}$ veya $D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

i) $D = \mathbb{C}$ durumunda Tanım 3.5.2'ye $K-$yarı konform eğrinin *global tanımı* denir ve yarı konformluk katsayısı (3.5.1) yardımıyla hesaplanır.

ii) $D \subset \mathbb{C}$ durumunda Tanım 3.5.2'ye $K-$yarı konform eğrinin *lokal tanımı* denir ve yarı konformluk katsayısı (3.5.2) yardımıyla hesaplanır.

Teorem 3.5.1. $D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere L analitik yay veya eğri ise eğrinin yarı konformluk katsayısı $K = 1$ olur [18].

Teorem 3.5.2. $D \subset \mathbb{C}$ olmak üzere $L \in C_\theta$ eğrisi ise yeteri kadar küçük $\varepsilon > 0$ sayısı için eğrinin yarı konformluk katsayısı $K = (1+\varepsilon)$ olur [18].

Teorem 3.5.3. L bir Jordan eğrisi, $z_1, z_2 \in L, (z_1 \ne z_2)$ keyfi noktalar ve $\ell(z_1, z_2) \subset L$, z_1 ile z_2 noktasına birleştiren küçük çaplı alt yay olsun. L eğrisinin yarı konform eğri olması için gerek ve yeter koşul

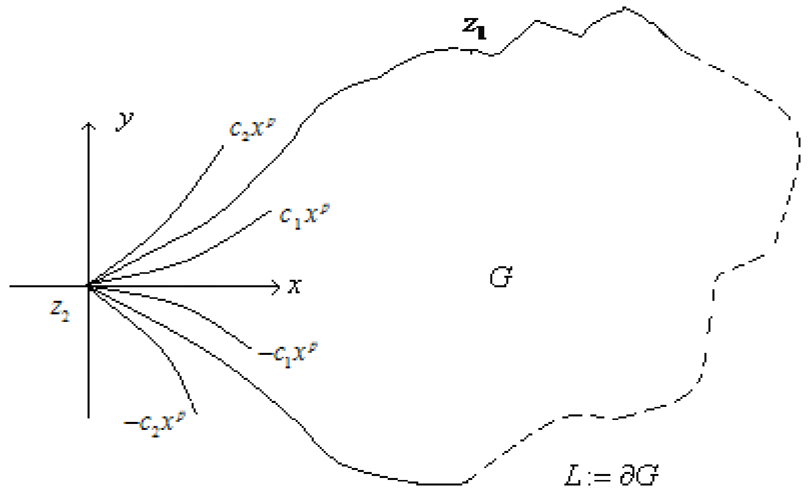
$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in L, \\ z_3 \in \ell(z_1, z_2)}} \frac{|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2|} < \infty \tag{3.5.3}$$

olmasıdır [13].

Uyarı 3.5.1. Yarı konform eğriler sıfır açı içermez.

Tanım 3.5.3. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge $L := \partial G$ sonlu sayıda $K_j -$yarı konform yayların $z_1, z_2, ..., z_m$ noktalarındaki bir birleşimi ve $K := \max_{2 \le j \le m} \{K_j\}$ olsun. Eğer, L eğrisi z_1 noktasında yerel $K-$yarı konform ve $z_2, ..., z_m$ noktalarında $x^p, (p \ge 1)$ tipli iç sıfır açı oluşuyorsa G bölgesine $PQ(K, p)$, $(K \ge 1,\ p \ge 1)$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.5.3.'de verilen G bölgesinin resmi $m = 2$ için aşağıdaki gibidir:



Tanım 3.5.4. $L = \partial G$ yarı konform eğrisi verilsin. Eğer, her bir $z \in L$ noktasına bir tek $r > 0$ ve $0 < \nu < 1$ için z merkezli r yarıçaplı

$$S(z; r, \nu) := \left\{ \xi : \xi = z + re^{i\theta}, 0 \le \theta_0 < \theta < \theta_0 + \nu \right\}$$

kapalı çembersel sektörü tamamen $\overline{\Omega}$'da yerleşiyor ise G bölgesine $Q(\nu)$ sınıfındandır denir [19].

Her yarı konform eğrinin yukarıdaki tanımı sağladığı açıktır. Bununla beraber L üzerine konan bu koşul eğriye yeni bir geometrik karekterizasyon verir.

Örneğin, G^* bölgesi

$$G^* := \left\{ z : z = re^{i\theta},\ 0 < r < 1,\ \frac{\pi}{2} < \theta < 2\pi \right\}$$

biçiminde tanımlansın. Bu bölgenin yarı konformluk katsayısını belirlemek kolay değildir. Fakat bu yeni tanıma göre $G^* \in Q\left(\frac{1}{2}\right)$ dir.

Tanım 3.5.5. $L \subset \mathbb{C}$, bir Jordan eğrisi olmak üzere $y:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü $y\left(int\left(L\right)\right) = ext\left(L\right)$, $y\left(ext\left(L\right)\right) = int\left(L\right)$ ve $\forall z \in L$ için $y(z) = z$ koşullarını sağlasın.

Eğer, $\overline{y}:\mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yarı konform dönüşüm ise y fonksiyonuna L eğrisine göre *yarı konform yansıma* denir.

Teorem 3.5.4. L, $\mathbb{C}$ de bir Jordan eğrisi olsun. L eğrisine göre yarı konform yansımanın olması için gerek ve yeter şart L eğrisinin yarı konform eğri olmasıdır [17].

Uyarı 3.5.2. "$a \preccurlyeq b$" ve "$a \asymp b$" ile c, c_1, c_2 pozitif sabitler olmak üzere $a \leq c.b$ ve $c_1.a \leq b \leq c_2.a$ gösterilir.

Burada c, c_1, c_2 sabitleri a ve b sayılarından bağımsızdır.

Teorem 3.5.5. L eğrisi K-yarı konform eğri olsun. Bu durumda, L eğrisinin belli bir sonlu komşuluğunda sınırlı kısmi türevlere sahip ve C^1 sınıfından olan bir yarı konform yansıma vardır.

Özel olarak, L eğrisinin belli bir sonlu komşuluğundaki her bir z için

$$\left|y(z) - z'\right| \asymp \left|z - z'\right| \ , \ z' \in L \tag{3.5.4}$$

sağlanır [17].

Sonuç 3.5.1. L eğrisi K-yarı konform eğri, $\infty \notin L$, $G = int\,L$, $\Omega = ext\,L$ olsun. Bu durumda L'ye göre $c_1(K)-$yarı konform $y(z)$ yansıması vardır ve bu yansıma;

i) $a \in G$ sabit bir nokta öyle ki, $a = y\left(\infty\right)$ olmak üzere; $y\left(z\right)$ yansıması $\mathbb{C} \setminus \left(L \cup \left\{a\right\}\right)$ bölgesinde sürekli türevlenebilirdir,

ii) Yeterince küçük $\delta > 0$ sayısı için $B(a,\delta) := \{ z : |z-a| < \delta \}$ ve $\widetilde{B}(a,\delta) := y(B(a,\delta))$ olmak üzere $\mathbb{C}_{\delta} := \mathbb{C} \backslash \left(B(a,\delta) \cup \widetilde{B}(a,\delta) \right)$ bölgesinde (3.5.4) sağlanır,

iii) $\forall z \in \mathbb{C} \backslash L$ için $|y_z| \le c(K,\delta),\ c(K,\delta)^{-1} \le |y_{\bar{z}}| \le c(K,\delta)$ ve $z \notin \mathbb{C} \backslash L$ için

$$|y_z| \preccurlyeq \begin{cases} |y(z)|^2 & , z \in B(a,\delta) \\ |z-a|^{-2} & , z \in \widetilde{B}(a,\delta) \end{cases} \quad \text{ve} \quad |y_{\bar{z}}| \asymp \begin{cases} |y(z)|^2 & , z \in B(a,\delta) \\ |z-a|^{-2} & , z \in \widetilde{B}(a,\delta) \end{cases}$$

özelliklerine sahiptir [17].

$L = \partial G$ eğrisi, lokal anlamda $K-$yarı konform eğri olsun. F, Φ, f dönüşümleri yardımıyla bir $1 < R_0 \le 2$ ve $r_0 = R_0^{-1}$ sayısı için Tanım 3.5.2' deki D bölgesi olarak [18]'de olduğu gibi $D := G_{R_0} \setminus G_{r_0}$ olarak seçilebilir. Burada $G_R := int(L_R)$ dir.

Bu durumda,

$$\alpha(\cdot) = f^{-1}\left\{ \left(\overline{f(\cdot)} \right)^{-1} \right\}$$

dönüşümünün L eğrisine göre K^2-yarı konform yansıma olduğu gösterilebilir [13].

Yani, $\alpha(\cdot)$ dönüşümü, L eğrisinin üzerindeki noktaları değiştirmeyen ve herhangi $1 < \widetilde{R} < R_0,\ r_0 < \tilde{r} < 1$ sayıları için

$$\alpha(G_{\widetilde{R}} \backslash \overline{G}) \subset G \backslash \overline{G}_{r_0}, \quad \alpha(G \backslash G_{\tilde{r}}) \subset G_{R_0} \backslash \overline{G}$$

sağlayan bir K^2-yarı konform dönüşümdür. Bu durumda Sonuç 3.5.1'e benzer şekilde L'ye göre

$$|\alpha^*(z) - z_1| \asymp |z - z_1|, \quad z_1 \in L,\ z \in D \tag{3.5.5}$$

koşulunu sağlayan $\alpha^*(\cdot)$, $c(K)-$yarı konform dönüşüm vardır. Böylece [17]'den genelliği kaybetmeksizin Tanım 3.5.2'deki D bölgesinde

$$\alpha(z) = \alpha^*(z),\ z \in D \tag{3.5.6}$$

olduğu kabul edilebilir.

Lemma 3.5.1. L eğrisi $K-$yarı konform eğri $z_1 \in L$ ve $z_2,\, z_3 \in G \cap \left\{z : |z-z_1| \leq\ cd(z_1, L_{R_0})\right\}$, $w_j = F(z_j)$ $\left(z_2, z_3 \in \Omega \cap \left\{z : |z-z_1| \leq cd(z_1, L_{r_0})\right\}\right.$ $w_j = \Phi(z_j)$ $\left. j = 1,2,3\right)$ olsun. Eğer $|z_1 - z_2| \preccurlyeq |z_1 - z_3|$ ise

i) $|w_1 - w_2| \preccurlyeq |w_1 - w_3|$,

ii) $\left|\dfrac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^{-2}} \preccurlyeq \left|\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right| \preccurlyeq \left|\dfrac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^2}$,

sağlanır [20].

Sonuç 3.5.2. Lemma 3.5.1.'de $z_3 \in L_{r_0}$ (ya da $z_3 \in L_{R_0}$) ise

$$|w_1 - w_2|^{K^2} \preccurlyeq |z_1 - z_2| \preccurlyeq |w_1 - w_2|^{K^{-2}}$$

dir.

Lemma 3.5.2. $L := \partial G$ eğrisi $K-$yarı konform eğri olsun. Bu durumda, her bir $z \in L$ noktası ile $z_0 \in G$ noktasını birleştiren $\beta(z_0, z) \subset G$ yayı vardır öyle ki aşağıdaki koşulları sağlar [21]:

i) $\forall \zeta \in \beta(z_0, z)$ için $d(\zeta, L) \asymp |\zeta - z|$ dır.

ii) $\forall \zeta_1, \zeta_2 \in \beta(z_0, z)$ için ζ_1 noktasını ζ_2 noktasına birleştiren $\tilde{\beta}(\zeta_1, \zeta_2) \subset \beta(z_0, z)$ alt yayı için $mes\tilde{\beta}(\zeta_1, \zeta_2) \preccurlyeq |\zeta_1 - \zeta_2|$ dir.

Lemma 3.5.3. $L := \partial G$ eğrisi $K-$yarı konform eğri olsun. Ölçülebilir her hangi bir $\gamma \subset G$ yayı ve onun $\alpha^*(\gamma)$ yansıması için

$$mes\gamma \asymp mes\alpha^*(\gamma)$$

sağlanır [21].

Lemma 3.5.4. (Goldstein Lemması) $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge ve $g : G \to \mathbb{C}$, $K-$yarı konform dönüşüm olsun. Bu durumda, her bir $E \subset G$ kompakt alt kümesi ve $\forall \delta \in \left(0, \dfrac{1}{K}\right)$ sayısı için

$$mes\, g(E) \preccurlyeq \left(mesE\right)^{\delta}$$

eşitsizliği sağlanır [23].

Lemma 3.5.5. L eğrisi K-yarı konform eğri ve $G_{\varepsilon} := \left\{z : z \in G,\, d\left(z, L\right) < \varepsilon\right\}$ olsun. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$mes\, F\left(G_{\varepsilon}\right) \preccurlyeq \varepsilon^{\delta}$$

dır. Burada, eğer L eğrisi yerel K-yarı konform ise $\delta = \min\left\{\frac{1}{2}, \frac{1}{K^2}\right\}$ diğer durumda ise $\delta = \frac{K^2+1}{2K^2}$ dir [24].

Eğer, G keyfi bir Continyum bölge ise $\delta = \frac{1}{2}$ seçilebilir [23 s.181].

3.6. BERGMAN ÇEKİRDEK FONKSİYONU VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, özellikle G bölgesini birim daireye resmeden ve uygulamada önemli bir yere sahip Riemann dönüşüm fonksiyonunun inşa edilmesinde kullanılan Bergman Çekirdek fonksiyonu ve temel özellikleri verilecektir.

Teorem 3.6.1. (Riesz Temsil Teoremi) H bir Hilbert uzayı $L : H \to \mathbb{C}$ sınırlı bir lineer fonksiyonel olsun. Tek türlü tanımlanan $u \in H$ vardır öyle ki

$$L(x) = \left\langle x, u\right\rangle \ , x \in H$$

sağlanır [14].

G keyfi basit bağlantılı bir bölge ve $H := L_2(G)$ olsun. $\forall f \in L_2(G)$ için $L(f) := f\left(z_0\right)$ biçiminde tanımlansın.

Bu fonksiyonelin lineer olduğu acıktır. Lemma 3.3.1'de (3.3.2) eşitsizliği dikkate alınırsa

$$\left|f(z_0)\right| \le \frac{c}{\sqrt{\pi}d}\left\|f\right\|_2$$

sağlanır. Bu eşitsizlik yukarıda tanımlanan fonksiyonelin sınırlı olduğunu gösterir.

O halde Reisz temsil teoreminden tek türlü tanımlı $u_{z_0} \in L_2(G)$ vardır öyle ki

$$f(z_0) = \left\langle f, u_{z_0} \right\rangle$$

sağlanır.

$u_{z_0}(.) := K(., z_0)$ biçiminde gösterilir ve Bergman çekirdek fonksiyonu olarak adlandırılır. Bergman çekirdek fonksiyonunun en önemli özelliklerinden biri yeniden üretme özelliğidir. Yani,

$$f(z_0) = \langle f, K(., z_0) \rangle = \iint_G f(z) \overline{K(z, z_0)} \, d\sigma_z$$

sağlanır. Eğer, $f(.) = K(., z_0)$ olarak seçilirse

$$K(z_0, z_0) = \|K(., z_0)\|_2^2$$

elde edilir.

Bergman çekirdek fonksiyonunun bir diğer özelliği de $z_1, z_2 \in G$ için

$$K(z_1, z_2) = \overline{K(z_2, z_1)}$$

dir.

Gerçekten, $f = K(., z_2)$ ve $z = z_1$ olarak seçilirse

$$K(z_1, z_2) = \iint_G K(z, z_2) \overline{K(z, z_1)} \, d\sigma_z = \overline{\iint_G K(z, z_1) \overline{K(z, z_2)} \, d\sigma_z} = \overline{K(z_2, z_1)}$$

elde edilir. Ayrıca, Bergman çekirdek fonksiyonu $L_2(G)$ uzayında bir ekstremal problemle de ilgilidir (bkz.[14]):

$$z_0 \in G \text{ ve } M := \left\{ f \in L_2(G) : f(z_0) = 1 \right\}$$

olsun.

Teorem 3.6.2. Tek bir $f_0 \in M$ vardır öyle ki

$$\min_{f \in M} \|f\|_2 = \|f_0\|_2$$

eşitliğini sağlar. Ayrıca, $f_0 \in M$ fonksiyonu ile Bergman çekirdek fonksiyonu arasında

$$f_0(z) = \frac{K(z, z_0)}{K(z_0, z_0)}, \; K(z, z_0) = \frac{f_0(z)}{\|f_0\|_2^2}$$

ilişkisi vardır [14].

İspat: $f \in L_2(G)$ olmak üzere $f(z_0) = \langle f, K(.,z_0)\rangle$ biçiminde yazılır. Cauchy-Schwarz eşitsizliğinden $f \in M$ için

$$1 = \langle f, K(.,z_0)\rangle \leq \|f\|_2 \, \|K(.,z_0)\|_2 = \|f\|_2 \sqrt{K(z_0,z_0)}$$

elde edilir. Eşitlik

$$f(z) = f_0(z) = cK(z,z_0)$$

olduğu durumda sağlanır. $1 = f_0(z_0) = cK(z_0,z_0)$ olduğundan $c = \dfrac{1}{K(z_0,z_0)}$ olur. Bu ise $f_0(z) = \dfrac{K(z,z_0)}{K(z_0,z_0)}$ olması anlamına gelir.

3.6.1. Bergman Çekirdek Fonksiyonunun Gösterimi:

$K(.,z_0)$ fonksiyonunun bir gösterimini elde etmek için $L_2(G)$ uzayının tam ortonormal polinomlar sistemi kullanılacaktır. Seri gösterimine geçmeden önce tam ortonormal polinomlar sisteminin tanımını verelim.

Tanım 3.6.1.1. H iç çarpımlı bir lineer uzay $S \subset H$ olsun. S tamdır denir eğer $\forall x \in S$ için $\langle x, y\rangle = 0$ koşulunu sağlayan tek $y \in H$ $y = 0$ ise [15].

Tanım 3.6.1.2. $S \subset H$ olsun. Eğer, S'deki elemanların lineer kombinasyonları H'de yoğun ise. S kümesine H uzayında kapalıdır denir.

Eğer H uzayının kendisi tam ise bu iki tanım denktir [15].

3.6.2 . $L_2(G)$-Uzayında Ortonormal Açılım

$\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ ile $L_2(G)$ uzayının tam ortonormal sistemi verilsin. $f \in L_2(G)$ için

$$\gamma_j := \langle f, \phi_j\rangle = \iint_G f(z)\overline{\phi_j(z)}\, d\sigma_z \qquad j = 1,2,3,...$$

biçiminde tanımlanan sayılara $f \in L_2(G)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları denir. Bu katsayılar yardımıyla oluşturulan seriyi $f \in L_2(G)$ fonksiyonuna karşı getirelim:

$$f \sim \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \phi_j$$

$\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ sistemi tam ortonormal sistem olduğundan

$$\left\| f - \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \phi_j \right\|_{L_2(G)} \to 0, \quad n \to \infty \tag{6.2.1}$$

sağlanır ve bu seriye $f \in L_2(G)$ fonksiyonunun Fourier Serisi denir.

Teorem 3.6.2.1. Eğer, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ tam ortonormal sistem ve $f \in L_2(G)$ fonksiyonunun Fourier serisi $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \phi_j$ ise (6.2.1) sağlanır.

Ayrıca, $f \in L_2(G)$ fonksiyonunun Fourier serisi G bölgesinin her bir B kompakt alt kümesinde f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır [14].

Şimdi $K(z, z_0)$ Bergman Çekirdek Fonksiyonunun seri gösterimini elde edelim:

Yukarıda olduğu gibi $K(z, z_0)$ fonksiyonunun Fourier katsayıları

$$\gamma_j := \langle K(., z_0), \phi_j \rangle = \overline{\phi_j}(z_0) \quad j = 1, 2, 3, ...$$

biçiminde tanımlanarak $K(z, z_0)$ fonksiyonuna $\sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \phi_j$ serisini karşı getirelim:

$$K(z, z_0) \sim \sum_{j=1}^{\infty} \gamma_j \phi_j .$$

Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir:

Teorem 3.6.2.2. $\{\phi_j\}$ tam ortonormal sistem olmak üzere Bergman Çekirdek Fonksiyonu her bir $z, z_0 \in G$ için

$$K(z,z_0) := \sum_{j=1}^{\infty} \phi_j(z)\overline{\phi_j}(z_0) \qquad (6.2.2)$$

gösterimine sahiptir. Bu seri $z_0 \in G$ noktasını içeren her bir $B \subset G$ kompaktında düzgün yakınsaktır [14].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu kısımda 3. Materyal ve Metot bölümünde tanımlanan Bergman Çekirdek Fonksiyonu'nun Fourier serisinin kısmi toplamının $A_2(h,G)$ normunda Bergman Çekirdek Fonksiyonuna yakınsaklığı ile ilgili sonuçlar verilecektir.

Özellikle, yakınsama hızının bölgenin ve ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlılığı ve z_0 noktasını içeren $B \subset G$ kümesinin yakınsama hızına olan etkisi incelenecektir.

4.1. ESAS SONUÇLAR

Kolaylık olması açısından $K \geq 1,\ 0 < \lambda < 2$ ve $1 \leq p < 2$ olmak üzere aşağıdaki notasyonları verelim: $\lambda_* := \max\{1, \lambda\}$,

$$\nu_1(\lambda;p) := \begin{cases} \dfrac{1}{2-\lambda}, & 0 < \lambda \leq \dfrac{4-2p}{2+p} \\ \dfrac{2-p}{2\lambda p}, & \dfrac{4-2p}{2+p} < \lambda \leq 1, \\ \dfrac{2-p}{2p}, & 1 < \lambda < 2 \end{cases}$$

$$\nu_2(K;p) := \begin{cases} \dfrac{2-p}{2K^4 p}, & p > \dfrac{2K^2}{1+K^2}, \\ \dfrac{1}{2K^6}, & p \leq \dfrac{2K^2}{1+K^2}. \end{cases}$$

olsun.

Teorem 4.1.1. $G \subset \mathbb{C}$ keyfi Jordan bölgesi ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\|K(.,z_0) - K_n(.,z_0)\|_{A_2(h,G)} = \left(\sum_{k=n+1}^{\infty} |\phi_k(z_0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.1.1}$$

olur.

Teorem 4.1.2. $G \in C_\theta(\lambda, p)$, $0 < \lambda < 2$, $1 \le p < 2$ ve $D \in Lip\alpha$, $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left\| K(.,z_0) - K_n(.,z_0) \right\|_{A_2(h,G)} \le c\delta^{-\frac{9-4\lambda_*}{2(2-\lambda_*)}}(B)n^{-\mu} \tag{4.1.2}$$

olur. Burada, $\alpha > \nu_1(\lambda; p)$ olduğunda $\mu < \min\left\{\frac{\lambda}{2-\lambda}; \frac{2-p}{2p}\right\}$ ve $\alpha \le \nu_1(\lambda; p)$ olduğunda $0 < \mu < \alpha \min\{1; \lambda\}$ dır.

Teorem 4.1.3. $G \in C_\theta(\lambda, 1)$, $0 < \lambda < 2$ ve $D \in Lip\alpha$, $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left\| K(.,z_0) - K_n(.,z_0) \right\|_{A_2(h,G)} \le c\delta^{-\frac{9-4\lambda_*}{2(2-\lambda_*)}}(B)n^{-\mu} \tag{4.1.3}$$

dir. Burada, $\alpha > \nu_1(\lambda, 1)$ olduğunda $0 < \mu < \min\left\{\frac{\lambda}{2-\lambda}; \frac{1}{2}\right\}$ ve $\alpha \le \nu_1(\lambda, 1)$ olduğunda $0 < \mu < \alpha \min\{1; \lambda\}$ dır.

Sonuç 4.1.1. $G \in C_\theta(1, p)$ ve $D \in Lip\alpha$, $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left\| K(.,z_0) - K_n(.,z_0) \right\|_{A_2(h,G)} \le c\delta^{-\frac{5}{2}}(B)n^{-\mu} \tag{4.1.3}$$

dir. Burada, $\alpha > \nu_1(1, p)$ olduğunda $0 < \mu < \min\left\{1; \frac{2-p}{2p}\right\}$ ve $\alpha \le \nu_1(1, p)$ olduğunda $0 < \mu < \alpha$ dır.

Sonuç 4.1.2. G kümesi L şekilli bölge ve $D \in Lip\alpha$, $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left\| K(.,z_0) - K_n(.,z_0) \right\|_{A_2(h,G)} \le c\delta^{-\frac{5}{2}}(B)n^{-\mu}$$

dir. Burada, $\alpha > \frac{2}{3}$ olduğunda $0 < \mu < \frac{1}{3}$ ve $\alpha \le \frac{2}{3}$ olduğunda $0 < \mu < \frac{\alpha}{2}$ dir.

Yukarıdaki teoremlerde bölgenin sınırını oluşturan L_j yayları, C_θ sınıfını kapsayan yarı konform eğriler sınıfından seçilirse aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.1.4. $G \in PQ(K,p)$ $K \geq 1,\ p \geq 1$ $D \in Lip\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left\| K(.,z_0) - K_n(.,z_0) \right\|_{A_2(h,G)} \leq c\delta^{-\frac{5}{2}}(B)n^{-\mu} \qquad (4.1.4)$$

sağlanır. Burada, $\alpha > \nu_2(K,p)$ olduğunda $0 < \mu < \dfrac{1}{2K^2}\min\left\{\dfrac{2-p}{p};\dfrac{1}{K^2}\right\}$ ve

$\alpha \leq \nu_2(K,p)$ olduğunda $0 < \mu < \alpha K^2$ dir.

Teorem 4.1.5. $G \in PQ(K,1)$ $K \geq 1,$ $D \in Lip\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left\| K(.,z_0) - K_n(.,z_0) \right\|_{A_2(h,G)} \leq c\delta^{-\frac{5}{2}}(B)n^{-\mu} \qquad (4.1.5)$$

sağlanır. Burada, $\alpha > \nu_2(K,1)$ olduğunda $0 < \mu < \dfrac{1}{2K^4}$ ve $\alpha \leq \nu_2(K,1)$ olduğunda $0 < \mu < \alpha K^2$ dir.

Teorem 4.1.4. ve Teorem 4.1.5.'de yakınsama hızının bulunması tamamen verilmiş bölgenin yarı konformluk katsayısı K'nın bilinmesine dayanmaktadır. Şimdi, yarı konformluk katsayısını bilmeden yakınsama hızının bölgenin başka bir parametresine bağlı olarak verilebileceğini gösterelim.

Teorem 4.1.6. $G \in Q(\upsilon)$, $0 < \upsilon < 1,$ $D \in Lip\alpha,\ 0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left\| K(.,z_0) - K_n(.,z_0) \right\|_{A_2(h,G)} \leq c\delta^{-\frac{5}{2}}(B)n^{-\mu} \qquad (4.1.6)$$

sağlanır. Burada, $\alpha > \dfrac{1}{4(2-\nu)}$ olduğunda $0 < \mu < \dfrac{\nu}{4(2-\nu)}$ ve $\alpha \leq \dfrac{1}{4(2-\nu)}$ olduğunda $0 < \mu < \alpha\nu$ dır.

Sonuç 4.1.3. $G \in Q(\frac{1}{2})$, $D \in Lip\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left\| K(.,z_0) - K_n(.,z_0) \right\|_{A_2(h,G)} \leq c\delta^{-\frac{5}{2}}(B)n^{-\mu}$$

sağlanır. Burada $\alpha > \frac{1}{6}$ olduğunda $0 < \mu < \frac{1}{12}$ ve $\alpha \leq \frac{1}{6}$ olduğunda $0 < \mu < \frac{\alpha}{2}$ dır.

4.2. YARDIMCI SONUÇLAR

$\varphi(z,z_0)$ fonksiyonunun integral gösterimi:

Başlıkta bahsedilen $\varphi(z,z_0)$ G bölgesini birim daireye resmeden ve $\varphi(z_0,z_0) = 0$, $\varphi'(z_0,z_0) > 0$ koşullarını sağlayan Riemann dönüşüm fonksiyonu olarak alınmıştır.

Bu kısımda, $K \geq 1,\ 1 \leq p < 2$ olmak üzere G bölgesi $PQ(K,p)$ sınıfından olmak üzere $\varphi(z,z_0)$ fonksiyonunun bir gösterimi elde edilecektir. Diğer bölgeler için de benzer yol izlenir.

$G \in PQ(K,p)$ $K \geq 1,\ 1 \leq p < 2$ verilsin. Genelliği kaybetmeksizin Tanım 3.5.3'te $m = 2$ alabiliriz. Ayrıca $z_1 = 1,\ z_2 = -1$ ve $(-1,1) \subset G$ olsun.

$L^1 := \{z \in L : \operatorname{Im} z \geq 0\},\ L^2 := \{z \in L : \operatorname{Im} z < 0\}$ olmak üzere $L = \partial G := L^1 \cup L^2$ ve bu eğriler $z_1 = 1$ ve $z_2 = -1$ noktalarında birleşsin. Bölgenin sınırı $z_1 = 1$ de yerel olarak $K-$yarı konform ve Tanım 3.5.3'deki gibi $z_2 = -1$ noktasında $x^p -$tipli iç sıfır açıya sahip olsun.

Her bir L_j yayı K_j yarı konform olduğundan L_j boyunca $\alpha_j^*(.)$ yarı konformal yansıması vardır. c_2 Tanım 3.5.3'de verilen sabit olmak üzere

$$\gamma^1 := \left\{ z = x + iy : y = c_2(x+1)^p \right\},$$

$$\gamma^2 := \left\{ z = x + iy : y = -c_2(x+1)^p \right\},$$

biçiminde işaretlenirse Lemma 3.5.2' den $\forall \xi_1, \xi_2 \in \gamma^j,\ j = 1,2,$ için

$$mes\gamma^j(\xi_1,\xi_2) \prec |\xi_1 - \xi_2| \qquad (4.2.1)$$

sağlanır.

Yeterince büyük $n > N(R_0)$ için keyfi bir $\varepsilon < 1$ alalım. $R = 1 + cn^{\varepsilon - 1}$, $1 < R < R_0$ seçelim. γ_j yayı ve L_R eğrisinin kesiştiği noktalar z_2^j, $j = 1,2$ olsun. Bu noktalar L_R eğrisini $L_R^1 := L_R^1(z_2^2, z_2^1)$ ve $L_R^2 := L_R^2(z_2^1, z_2^2)$ biçiminde iki parçaya ayırır. Yani, $L_R = \bigcup_{j=1}^{2} L_R^j$ dir.

Ayrıca, $\gamma_j(R) := \gamma_j \cap (\operatorname{int} L_R)$ olmak üzere

$$\Gamma_R := \gamma_1(R) \cup \gamma_2(R) \cup L_R^1 \text{ ve } U := \operatorname{int}(\Gamma_R \cup L)$$

olsun. $w = \varphi(z, z_0)$ Riemann fonksiyonu aşağıdaki biçimde U 'ya genişletilebilir:

$$\tilde{\varphi}(z, z_0) := \begin{cases} \varphi(z, z_0) & , z \in \overline{G}, \\ \dfrac{1}{\overline{\varphi(\alpha_j^*(z), z_0)}} & , z \in U. \end{cases}$$

Cauchy-Pompei formülünden (bkz Teorem 3.3.5) $\varphi(z, z_0)$ fonksiyonu $z \in \overline{G}$ için

$$\varphi(z, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\Gamma_R} \frac{\tilde{\varphi}(\xi, z_0)}{\xi - z} d\xi - \frac{1}{\pi} \iint_U \frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\xi}}(\xi, z_0)}{\xi - z} d\sigma_\xi \qquad (4.2.2)$$

biçiminde bir gösterime sahiptir.

Yukarıdaki işaretlemeler (4.2.2)'de kullanılırsa $\varphi(z, z_0)$ 'ın integral gösterimi

$$\varphi(z, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{f(\xi, z_0)}{\xi - z} d\xi + \sum_{j=1}^{2} M_j(z, z_0) + A(z, z_o), z \in \overline{G} \qquad (4.2.3)$$

biçimine dönüşür. Burada,

$$M_j(z, z_0) := \frac{1}{2\pi i} \int_{\gamma_j(R)} \frac{\tilde{\varphi}(\xi, z_0) - \tilde{\varphi}(-1, z_0)}{\xi - z} d\xi \,, \; A(z, z_0) := -\frac{1}{\pi} \iint_U \frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\xi}}(\xi, z_0)}{\xi - z} d\sigma_\xi$$

ve

$$f(\xi, z_0) := \begin{cases} \tilde{\varphi}(\xi, z_0) & \xi \in L_R^1 \\ \varphi(-1, z_0) & \xi \in L_R^2 \end{cases}$$

dir.

Lemma 4.2.1. $G \in PQ(K,p)$, $K \geq 1,\ p \geq 1,\ z_0 \in B \subset G$ ve $\gamma \subset \Omega$ ölçülebilir son noktası $z^* \in L$ olan bir Jordan yayı olsun.

$$\|M'(.,z_0)\|_{A_2}^2 \prec \delta^{-1}(B)(mes\gamma)^{2-p} \tag{4.2.4}$$

Burada,

$$M(z,z_0) := \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{\tilde{\varphi}(\xi,z_0) - \tilde{\varphi}(z^*,z_0)}{\xi - z} d\xi$$

dır.

İspat: γ üzerindeki varsayımdan dolayı [24]'den $\forall \xi \in \gamma$ için

$$\left|\tilde{\varphi}(\xi,z_0) - \varphi(z^*,z_0)\right| \prec \delta^{-\frac{1}{2}}(B)\left|\xi - z^*\right|^{\frac{1}{2}}$$

sağlanır. Böylece, [25]'de $h(t) = t$ ve $\upsilon(t) := \delta^{-\frac{1}{2}}(B)\sqrt{t}$ biçiminde seçilirse (4.2.4) elde edilir.

Lemma 4.2.2. $U \subset \Omega$ ve α^*, L eğrisine göre bir yarı konformal yansıması olsun. Bu durumda

$$\|A'(.,z_0)\|_{A_2}^2 \prec (mes\varphi(\alpha^*(U),z_0)) \tag{4.2.5}$$

sağlanır. Burada

$$A(z,z_0) := \iint_U \frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\xi}}(\xi,z_0)}{\xi - z} d\sigma_\xi$$

dir.

İspat: (4.2.5) eşitsizliği ve Teorem 3.3.4 Calderon-Zygmund eşitsizliğinin bir sonucudur. Gerçekten

$$\|A'\|_{A_2}^2 = \left\| \iint_U \frac{\tilde{\varphi}_{\bar{\xi}}(\xi,z_0)}{(\xi - z)^2} d\sigma_\xi \right\|_{A_2}^2 \prec \left(\iint_U \left|\tilde{\varphi}_{\bar{\xi}}(\xi,z_0)\right|^2 d\sigma_\xi \right)$$

$$\approx \left(\iint_U \left|\varphi'\left(\alpha^*(\xi),z_0\right)\right|^2 d\sigma_\xi \right) \prec \left(\iint_{\alpha^*(U)} \left|\varphi'(\xi,z_0)\right|^2 d\sigma_\xi \right)$$

$$= mes\varphi(\alpha^*(U),z_0) \tag{4.2.6}$$

dır.

Şimdi esas sonuçların ispatında temel rolü oynayan aşağıdaki Lemma'yı verelim:

Lemma 4.2.3. $G \in PQ(K,p)$, $K \geq 1$, $p \geq 1$, $z_0 \in B \subset G$ olsun. $P_n(z,z_0)$ polinomu vardır öyle ki

$$\left\| \varphi'(.,z_0) - P_n'(.,z_0) \right\|_{A_2} \prec \delta^{-\frac{1}{2}}(B) n^{-\gamma} \tag{4.2.7}$$

sağlanır. Burada $\gamma < \frac{1}{2K^2} \min\left\{ \frac{2-p}{p}, \frac{1}{K^2} \right\}$.

İspat: $\varphi(z,z_0)$ fonksiyonunun (4.2.3)'de verilen integral gösterimindeki ilk terim $\overline{G}$ da analitik bir fonksiyon olduğundan derecesi n'yi aşmayan $P_n(z,z_0)$ polinomu bulunabilir öyle ki $\forall z \in \overline{G}$ için

$$\left| \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} \frac{f(\xi,z_0)}{(\xi - z_0)^2} d\xi - P_n'(z,z_0) \right| \prec \frac{1}{n} \tag{4.2.8}$$

sağlanır. Böylece (4.2.3) ve (4.2.8)'den

$$\left\| \varphi'(.,z_0) - P_n'(.,z_0) \right\|_{A_2} \prec \frac{1}{n} + \sum_{j=1}^{2} \left\| M_j' \right\|_{A_2} + \left\| A' \right\|_{A_2} \tag{4.2.9}$$

elde edilir. Şimdi,

$$U_1 := \{ z \in U : \operatorname{Im} z \geq 0 \},\ U_2 := \{ z \in U : \operatorname{Im} z \leq 0 \}$$

olmak üzere $U := U_1 \cup U_2$ ve $\alpha^*(z)$ yansıması

$$\alpha^*(z) := \begin{cases} \alpha_1^*(z,z_0), & \operatorname{Im} z \geq 0 \\ \alpha_2^*(z,z_0), & \operatorname{Im} z \leq 0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. (4.2.4) ve (4.2.5) denklemleri (4.2.9)'da $j = 1,2$ için kullanılırsa

$$\left\| \varphi'(.,z_0) - P_n'(.,z_0) \right\|_{A_2} \prec \frac{1}{n} + \delta^{-\frac{1}{2}}(B) \sum_{j=1}^{2} (mes\gamma^j(R))^{\frac{2-p}{2}}$$

$$+ \sum_{j=1}^{2} (mes\varphi(\alpha_j^*(U_j),z_0))^{\frac{1}{2}} \tag{4.2.10}$$

elde edilir.

Diğer taraftan Lemma 3.5.1., Lemma 3.5.2 ve Lemma 3.5.3.'den $j = 1,2$ ve $\forall \varepsilon > 0$ için

$$mes\gamma^j(R) \prec \left| z_2^j + 1 \right| \prec d^{\frac{1}{p}}(z_2^j, L^j) \prec n^{\frac{\varepsilon - 1}{pK^2}} \qquad (4.2.11)$$

elde edilir. Yeterince küçük $\varepsilon_0 > 0$ için

$$D_{\varepsilon_0}(-1) := \left\{ \xi : \left| \xi + 1 \right| \le \varepsilon_0 \right\}, V_j := U_j \cap D_{\varepsilon_0}(-1)$$

$\widetilde{V_j} := U_j - V_j$ öyle ki $U_j = V_j \cup \widetilde{V_j}$ olsun. Lemma 3.5.5 ve [24,Lemma 3.8]'den

$$mes\varphi(\alpha_j^*(V_j), z_0) \prec \delta^{-1}(B)\left[d(z^j, L^j) \right]^{\frac{1}{K^2}} \prec \delta^{-1}(B) n^{\frac{\varepsilon - 1}{K^4}},$$

ve

$$mes\varphi(\alpha_j^*(\widetilde{V}_j), z_0) \prec \delta^{-1}(B) n^{\frac{\varepsilon - 1}{K^4}}, j = 1,2 \qquad (4.2.12)$$

bulunur. (4.2.8), (4.2.9) ve (4.2.7) eşitliksizlikleri birleştirilirse istenen sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1. Lemma 4.2.3'deki koşullar altında bir Q_n polinomu bulunabilir öyle ki

$$Q_n(z_0, z_0) = 0, \; Q_n'(z_0, z_0) = \varphi'(z_0, z_0)$$

ve

$$\left\| \varphi'(., z_0) - Q_n'(., z_0) \right\|_{A_2(G)} \prec \delta^{-\frac{3}{2}}(B) n^{-\gamma} \qquad (4.2.13)$$

dir. Burada, γ ise (4.2.7)'de tanımlandığı gibidir.

İspat: Eğer, $Q_n(z, z_0) := P_n(z, z_0) - P_n(z_0, z_0) + (z - z_0)(\varphi'(z_0, z_0) - P_n'(z_0, z_0))$ biçiminde tanımlanırsa $Q_n(z_0, z_0) = 0, \; Q_n'(z, z_0) = \varphi'(z_0, z_0)$ sağlanır.

O halde, Lemma 4.2.3'den

$$\left\| \varphi'(., z_0) - Q_n'(., z_0) \right\|_{A_2(G)} \prec (1 + \delta^{-1}(B)) \left\| \varphi'(., z_0) - P_n'(., z_0) \right\|_{A_2} \qquad (4.2.14)$$

dir. (4.2.7) ve (4.2.14)'ten (4.2.13)'ün ispatı elde edilir.

Sonuç 4.2.2. $G \in Q(\upsilon), \; 0 < \upsilon < 1, \; z_0 \in B \subset G$ olsun. Bu durumda, Q_n polinomu vardır öyle ki $Q_n(z_0, z_0) = 0, Q_n'(z_0, z_0) = \varphi'(z_0, z_0)$ ve

$$\left\|\varphi'(.,z_0)-Q_n'(.,z_0)\right\|_{A_2(G)} \prec \delta^{-\frac{3}{2}}(B)n^{-\gamma} \tag{4.2.15}$$

dir. Burada $\gamma < \dfrac{\upsilon}{4(2-\upsilon)}$ dır.

İspat: L yarı konform eğri olduğundan Lemma 4.2.3 ve Sonuç 4.2.1'in ispatını takip edebiliriz. Dolayısıyla $P_n(z,z_0)$ polinomu bulabilir öyle ki $derP_n = n$ ve

$$\left\|\varphi'(.,z_0)-P_n'(.,z_0)\right\|_{A_2}^2 \prec \frac{1}{n^2}+mes(\varphi(\alpha^*(U),z_0) \tag{4.2.16}$$

sağlanır. $G\in Q(\upsilon),\ 0<\upsilon<1$ olduğundan G "υ-wedge" koşulunu sağlar. [26] ve [27]'dan $\Psi \in Lip\,\upsilon$ ve $\varphi \in Lip\dfrac{1}{2-\upsilon}$ dir. Aynı zamanda [28]'den

$$\left[mes(\varphi(\alpha^*(U),z_0)\right] \prec \delta^{-1}(B)n^{-\frac{\upsilon}{2(2-\upsilon)}}$$

elde edilir. Buradan ve (4.2.16)'dan

$$\left\|\varphi'(.,z_0)-P_n'(.,z_0)\right\|_{A_2} \prec \delta^{-\frac{1}{2}}(B)n^{-\frac{\upsilon}{4(2-\upsilon)}}$$

elde edilir.

Son olarak $Q_n(z,z_0)$ Sonuç 4.2.1' deki gibi tanımlanırsa istenen sonuç elde edilir.

Lemma 4.2.4. $G\in C_\theta(\lambda,p)$, $0<\lambda<2$, $1\le p<2$ ve $D\in Lip\alpha,\ 0<\alpha\le 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. $T_n'(z_0,z_0)=\dfrac{\varphi'(z_0,z_0)}{D(z_0)}$ koşulunu sağlayan bir $T_n(z,z_0)$ için

$$\left\|\frac{\varphi'(.,z_0)}{D(.)}-T_n(.,z_0)\right\|_{A_2} \prec \delta^{-\frac{5-2\lambda_*}{2(2-\lambda_*)}}(B).n^{-\mu} \tag{4.2.17}$$

sağlanır. Burada, $\alpha > \nu_1(\lambda,p)$ olduğunda $\mu < \min\left\{\dfrac{\lambda}{2-\lambda};\dfrac{2-p}{2p}\right\}$ ve $\alpha \le \nu_1(\lambda,p)$ olduğunda $0<\mu<\alpha\min\{1;\lambda\}$ dır.

Lemma 4.2.5. $G \in C_{\theta}(\lambda,1)$, $0<\lambda<2$ ve $D \in Lip\alpha$, $0<\alpha \le 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. $T_n'(z_0,z_0)=\dfrac{\varphi'(z_0,z_0)}{D(z_0)}$ koşulunu sağlayan bir $T_n(z,z_0)$ için

$$\left\| \frac{\varphi'(.,z_0)}{D(.)} - T_n(.,z_0) \right\|_{A_2} \prec \delta^{-\frac{5-2\lambda_*}{2(2-\lambda_*)}}(B).n^{-\mu} \tag{4.2.18}$$

sağlanır. Burada, $\alpha > \nu_1(\lambda,1)$ olduğunda $0<\mu<\min\left\{\dfrac{\lambda}{2-\lambda};\dfrac{1}{2}\right\}$ ve $\alpha \le \nu_1(\lambda,1)$ olduğunda $0<\mu<\alpha\min\{1;\lambda\}$ dır.

Lemma 4.2.6. $G \in PQ(K,p)$, $K \ge 1$, $p \ge 1$, $D \in Lip\alpha$, $0<\alpha \le 1$ ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. $T_n'(z_0,z_0)=\dfrac{\varphi'(z_0,z_0)}{D(z_0)}$ koşulunu sağlayan bir $T_n(z,z_0)$ için

$$\left\| \frac{\varphi'(.,z_0)}{D(.)} - T_n(.,z_0) \right\|_{A_2} \prec \delta^{-\frac{3}{2}}(B)n^{-\mu} \tag{4.2.19}$$

sağlanır. Burada $\alpha > \nu_2(K,p)$ olduğunda $0<\mu<\dfrac{1}{2K^2}\min\left\{\dfrac{2-p}{p},\dfrac{1}{K^2}\right\}$ ve $\alpha \le \nu_2(K,p)$ olduğunda $0<\mu<\alpha K^2$ dir.

Lemma 4.2.7. $G \in Q(\upsilon)$, $0<\upsilon<1$, $D \in Lip\alpha$, $0<\alpha \le 1$ ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. $T_n'(z_0,z_0)=\dfrac{\varphi'(z_0,z_0)}{D(z_0)}$ koşulunu sağlayan bir $T_n(z,z_0)$ için

$$\left\| \frac{\varphi'(.,z_0)}{D(.)} - T_n(.,z_0) \right\|_{A_2} \prec \delta^{-\frac{3}{2}}(B)n^{-\mu} \tag{4.2.20}$$

sağlanır. Burada, $\alpha > \dfrac{1}{4(2-\nu)}$ olduğunda $0<\mu<\dfrac{\nu}{4(2-\nu)}$ ve $\alpha \le \dfrac{1}{4(2-\nu)}$ olduğunda $0<\mu<\alpha\nu$ dır.

Lemma 4.2.8. G bir Jordan bölgesi, $D \in Lip\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Eğer, $T_n(z, z_0)$ polinomu için

i) $T_n'(z_0, z_0) = \dfrac{\varphi'(z_0, z_0)}{D(z_0)}$

ii) $\sigma_n(B) \to 0$, $n \to \infty$ sağlayan $\{\sigma_n(B)\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi için

$$\left\| \frac{\varphi'(., z_0)}{D(.)} - T_n(., z_0) \right\|_{A_2}^2 \prec \sigma_n(B) \tag{4.2.21}$$

sağlanır ise

$$\left(\sum_{k=n}^{\infty} |\phi_k(z_0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c.\delta^{-1}(B)\left(\sigma_n(B)\right)^{\frac{1}{2}} \tag{4.2.22}$$

dir.

İspat: $A_2(h, G)$ uzayının $z_0 \in G$ noktasında $f(z_0) = \lambda_0 := \dfrac{\varphi'(z_0, z_0)}{D(z_0)}$ değerini alan fonksiyonlar sınıfında

$$J(.) := \iint_G h(z) |.|^2 d\sigma_z \tag{4.2.23}$$

integraline minimum veren fonksiyon

$$f_0(z) := \frac{\varphi'(z, z_0)}{D(z)}$$

dir [29].

Diğer taraftan derecesi $n-1$'i aşmayan ve $z_0 \in G$ noktasında $Q_{n-1}(z_0) = \lambda_0$ değerini alan polinomlar sınıfında (4.2.23)'e minimum veren polinom

$$\widetilde{Q}_{n-1}(z) := \lambda_0 \frac{K_{n-1}(z, z_0)}{K_{n-1}(z_0, z_0)}$$

olmak üzere

$$J(\widetilde{Q}_{n-1}) = \frac{|\lambda_0|^2}{K_{n-1}(z_0, z_0)} \tag{4.2.24}$$

dir.

Aynı zamanda T_{n-1} polinomu $T_{n-1}(z_0) = \lambda_0$ koşulunu sağlayan keyfi bir polinom ve $c = \max_{z \in \overline{G}} h(z)$ olmak üzere

$$\pi \leq \iint_G h(z) \left| \widetilde{Q}_{n-1}(z) \right|^2 d\sigma_z \leq \pi + \iint_G h(z) \left| f_0(z) - \widetilde{Q}_{n-1}(z) \right|^2 d\sigma_z$$

$$\leq \pi + \iint_G h(z) \left| f_0(z) - T_{n-1}(z) \right|^2 d\sigma_z \leq \pi + c \iint_G \left| f_0(z) - T_{n-1}(z) \right|^2 d\sigma_z \qquad (4.2.25)$$

elde edilir. (4.2.24), (4.2.25) ve (4.2.21)'den

$$\frac{|\lambda_0|^2}{K_{n-1}(z_0, z_0)} = \pi + O(\sigma_n(B))$$

bulunur. Sonuç olarak

$$K_{n-1}(z_0, z_0) = \frac{|\lambda_0|^2}{\pi} - O(|\lambda_0|^2 \sigma_n(B))$$

eşitliği bulunur.

Eğer, $m > n$ için yukarıdaki eşitlik yeniden düzenlenirse

$$K_m(z_0, z_0) - K_{n-1}(z_0, z_0) = O(|\lambda_0|^2 \sigma_m(B)) - O\left(|\lambda_0|^2 \sigma_n(B)\right) \qquad (4.2.26)$$

olur. (4.2.26)'da $m \to \infty$ için limit alınırsa

$$K(z_0, z_0) - K_{n-1}(z_0, z_0) = O\left(|\lambda_0|^2 \sigma_n(B)\right)$$

elde edilir.

[30, Lemma 3]'den

$$|\lambda_0| \approx \delta^{-1}(B)$$

olduğu dikkate alınırsa Lemma 4.2.8 ispatlanmış olur.

Sonuç 4.2.3. $G \in C_\theta(\lambda, p)$, $0 < \lambda < 2$, $1 \leq p < 2$ ve $D \in Lip\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left(\sum_{i=n}^{\infty} |\phi_i(z_0)|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\delta^{-\frac{9-4\lambda_*}{2(2-\lambda_*)}}(B) n^{-\mu} \qquad (4.2.27)$$

sağlanır. Burada, $\alpha > \nu_1(\lambda, p)$ olduğunda $\mu < \min\left\{ \frac{\lambda}{2-\lambda}; \frac{2-p}{2p} \right\}$ ve $\alpha \leq \nu_1(\lambda, p)$ olduğunda $0 < \mu < \alpha \min\{1; \lambda\}$ dır.

Sonuç 4.2.4. $G \in C_{\theta}(\lambda)$, $0 < \lambda < 2$ ve $D \in Lip\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ olmak üzere $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left(\sum_{i=n}^{\infty} \left| \phi_i(z_0) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\delta^{-\frac{9-4\lambda_*}{2(2-\lambda_*)}}(B)n^{-\mu} \tag{4.2.28}$$

sağlanır. Burada, $\alpha > \nu_1(\lambda,1)$ olduğunda $0 < \mu < \min\left\{ \frac{\lambda}{2-\lambda}; \frac{1}{2} \right\}$ ve $\alpha \leq \nu_1(\lambda,1)$ olduğunda $0 < \mu < \alpha \min\{1;\lambda\}$ dır.

Sonuç 4.2.5. $G \in PQ(K,p)$ $K \geq 1$, $p \geq 1$ ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left(\sum_{i=n}^{\infty} \left| \phi_i(z_0) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\delta^{-\frac{5}{2}}(B)n^{-\mu} \tag{4.2.29}$$

sağlanır. Burada, $\alpha > \nu_2(K,p)$ olduğunda $0 < \mu < \frac{1}{2K^2} \min\left\{ \frac{2-p}{p}, \frac{1}{K^2} \right\}$ ve $\alpha \leq \nu_2(K,p)$ olduğunda $0 < \mu < \alpha K^2$ dir.

Sonuç 4.2.6. $G \in PQ(K)$ $K \geq 1$ ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left(\sum_{i=n}^{\infty} \left| \phi_i(z_0) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\delta^{-\frac{5}{2}}(B)n^{-\mu} \tag{4.2.30}$$

sağlanır. Burada, $\alpha > \nu_2(K,1)$ olduğunda $0 < \mu < \frac{1}{2K^4}$ ve $\alpha \leq \nu_2(K,1)$ olduğunda $0 < \mu < \alpha K^2$ dir.

Sonuç 4.2.7. $G \in Q(\upsilon)$, $0 < \upsilon < 1$, $D \in Lip\alpha$, $0 < \alpha \leq 1$ ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlansın. Bu durumda,

$$\left(\sum_{i=n}^{\infty} \left| \phi_i(z_0) \right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \leq c\delta^{-\frac{5}{2}}(B)n^{-\mu} \tag{4.2.31}$$

sağlanır. Burada, $\alpha > \dfrac{1}{4(2-\nu)}$ olduğunda $0 < \mu < \dfrac{\nu}{4(2-\nu)}$ ve $\alpha \leq \dfrac{1}{4(2-\nu)}$ olduğunda $0 < \mu < \alpha\nu$ dır.

4.3. ESAS VE YARDIMCI SONUÇLARIN İSPATLARI

4.3.1. Sonuç 4.2.3. – 4.2.7.'nin İspatı:

Lemma 4.2.8'den Sonuç 4.2.3 – 4.2.7'nin ispatı için verilmiş bölgeye uygun olarak $\sigma_n(B)$ 'nin seçiminin yeterli olacağı açıktır.

Eğer, sırasıyla Lemma 4.2.4 ve Lemma 4.2.5'te

$$\sigma_n(B) = \delta^{-\frac{5-2\lambda_*}{2-\lambda_*}}(B).n^{-2\mu}$$

biçiminde seçilirse Sonuç 4.2.3 ve Sonuç 4.2.4 elde edilir.

Eğer, Lemma 4.2.6'da

$$\sigma_n(B) = \delta^{-3}(B)n^{-2\mu}$$

biçiminde seçilirse Sonuç 4.2.5 ve Sonuç 4.2.6 elde edilir.

Eğer, Lemma 4.2.7'de

$$\sigma_n(B) = \delta^{-3}(B)n^{-2\mu}$$

biçiminde seçilirse Sonuç 4.2.7 elde edilir.

4.3.2. Teorem 4.1.1 – Teorem 4.1.6'nın ispatı:

Teorem 4.1.1.'in ispatı:

$K(z,z_0) = \sum_{k=0}^{\infty} \phi_k(z)\overline{\phi_k(z_0)}$ ve $K_n(z,z_0) = \sum_{k=0}^{n} \phi_k(z)\overline{\phi_k(z_0)}$ olduğunu biliyoruz.

$$\left\| K(.,z_0) - K_n(.,z_0) \right\|_{A_2(h,G)} = \left\| \sum_{k=n+1}^{\infty} \phi_k(z)\overline{\phi_k(z_0)} \right\|_{A_2(h,G)} =$$

$$= \left(\iint_G h(z) \sum_{k=n+1}^{\infty} \phi_k(z)\overline{\phi_k(z_0)} \overline{\sum_{m=n+1}^{\infty} \phi_k(z)\overline{\phi_k(z_0)}}\, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$= \left(\iint_G h(z) \left| \sum_{k=n+1}^{\infty} \phi_k(z)\overline{\phi_k(z_0)} \right|^2 d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}} =$$

$$=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\sum_{m=n+1}^{\infty}\overline{\phi_k(z_0)}\,\phi_m(z_0)\iint_G h(z)\,\phi_k(z_0)\,\overline{\phi_m(z)}\,d\sigma_z\right)^{\frac{1}{2}}=$$

$$=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\overline{\phi_k(z_0)}\,\phi_k(z_0)\right)^{\frac{1}{2}}=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\phi_k(z_0)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

Böylece teoremin ispatı elde edilmiş olur.

Teorem 4.1.2. - Teorem 4.1.6.'nın ispatı:

Teorem 4.1.1.'de

$$\left\|K(.,z_0)-K_n(.,z_0)\right\|_{A_2(h,G)}=\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\phi_k(z_0)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

olduğu gösterilmiştir. Bu durumda

$$\left(\sum_{k=n+1}^{\infty}\left|\phi_k(z_0)\right|^2\right)^{\frac{1}{2}}$$

ifadesinin her bir bölge için değerlendirilmesi teoremlerin ispatının elde edilmesi için yeterlidir.

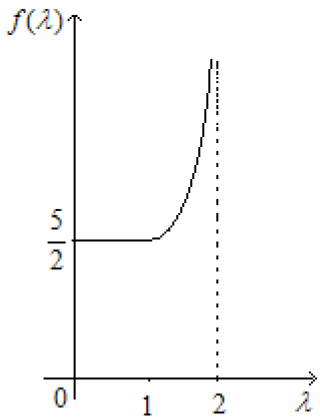
O halde, Sonuç 4.2.3.'ten Teorem 4.1.2.'nin, Sonuç 4.2.4.'den Teorem 4.1.3.'ün, Sonuç 4.2.5..'ten Teorem 4.1.4.'ün, Sonuç 4.2.6.'dan Teorem 4.1.5.'in ve Sonuç 4.2.7.'den Teorem 4.1.6.'nın ispatı elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

$G \subset \mathbb{C}$ kümesi $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge $z_0 \in G$ ve $B \subset G$ ise z_0 noktasını içeren ve kapanışı ile G 'ye ait bir küme olsun. Sırasıyla $C_\theta(\lambda, p)$, $PQ(K, p)$ ve $Q(\nu)$ sınıfına ait G bölgesinde ağırlık fonksiyonu (3.4.1)'deki biçimde tanımlanmış olmak üzere $K_n(z, z_0)$'ın $K(z, z_0)$ fonksiyonuna $A_2(h, G)$ normunda yaklaşımı incelenmiş ve yaklaşım hızı $h(z)$'nin ve verilen bölgenin özelliklerine bağlı olarak hesaplanmıştır.

$f(\lambda) := \begin{cases} \dfrac{5}{2} & ,0 < \lambda < 1 \\ \dfrac{9-4\lambda}{2(2-\lambda)} & ,1 \le \lambda < 2 \end{cases}$ fonksiyonunu göz önüne alınsın. Bu fonksiyonun grafiği aşağıda verilmiştir:



$f(\lambda)$ fonksiyonu $0 < \lambda < 1$ için sabit, $1 \le \lambda < 2$ için ise kesin artandır. O halde, Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3'de $B \subset G$ kümesinin sınıra olan uzaklığının yakınsamaya olan etkisi $0 < \lambda < 1$ olduğunda değişmezken $1 \le \lambda < 2$ olduğunda artmaktadır.

5.2. ÖNERİLER

Bu çalışmada, özellikle sınırında sıfır açıya izin vermeyen yarı konform eğrilere $x^p, p \geq 1$ tipli iç sıfır açı dahil edilerek (1.6)'da ifade edilen problem incelenmiştir.

L parçalı yarı konform eğrisi eğer birleşme noktalarında dış sıfır açı (yada aynı anda hem iç hem de dış sıfır açı) içerirse $K_n(z, z_0)$ kısmi toplamının $K(z, z_0)$ Bergman Çekirdek Fonksiyonuna yaklaşım hızı nasıl değişecektir.

Ayrıca, çalışmada $h(z) = |D(z)|^2$ biçiminde seçilmiştir. Eğer $h(z)$ ağırlık fonksiyonuda bölgede olduğu gibi belirli tipten singülariteye sahip olsaydı yaklaşım hızı bu singülariteden nasıl etkilenecektir.

KAYNAKLAR

[1] Papamicheal, N., Kokkinos, C.A., ‘Two Numerical Methods for the Conformal Mapping of Simply-Connected Domains’, Computer Methods in Applied Mechanics and Enginering 28,285-307, (1981).

[2] Papamicheal, N., Kokkinos, C.A., ‘The Use of Singular Functions for the Approximate Conformal Mapping of Doubly-Connected Domains’, Sıam J. Scı. Stat. Comput. Vol.5,No.3, September (1984).

[3] Papamicheal, N., Warby, M.K., Hough, D.M., ‘The Treatment of Corner and Pole Type Singularities in Numerical Conformal Mapping Tecniques’, Journal of Computational and Applied Mathematichs 14, 163-191,(1986).

[4] Papamicheal, N., Warby, M.K., ‘Stability and Convergenge Properties of Bergman Kernel Methods for Numerical Conformal Mapping’, Numer. Math. 48, 639-669, (1986).

[5] Mısra, G., ‘The Bergman Kernel Function’, Department of Science and Technology, Government of İndia,(2010).

[6] Ligocka, E., “Remarks on the Bergman Kernel Function of a Worm Domain” Studıa Mathematica 130 (2), (1998).

[7] Papamicheal, N., Saff, E.B., ‘Local Behaviour of the Error in the Bergman Kernel Method for Numerical Conformal Mapping ‘Journal of Computational and Applied Mathematics 46, 65-75, (1993).

[8] Papamicheal, N., ’The Treatment of Singularities in Orthonormalization Methods for Numerical Conformal Mapping’, Spzingen-Verlag, Lecture Notes in Maths 1121,(1985).

[9] Bock, S., Falcao, M.I., Gürlebeck, K., ‘Applications of Bergman Kernel Functions.

[10] Gleason, A.M., “Fundamentals of Abstract Analysis”, Addison Wesley Publishing, USA, 404 s., (1996).

[11] Ahlfors, L.V., “Complex Analysis”, McGraw-Hill, Inc., USA, 331 s., (1969).

[12] Depree, J.D., Oehring, C.C., “Elements of Complex Analysis”, Addison Wesley Publishing Company, USA, 390 s., (1969).

[13] Ahlfors, L.V., “Lectures on quasiconformal mappings”, Wadsworth Inc., California, 146 s., (1987).

[14] Dieter, G., “Lectures on Complex Approximation”, Birkhauser Boston, Inc., 196 s., (1987).

[15] Davis, P.J., “Interpolation and Approximation”, Blaisdell Publishing Company 393 s. (1963).

[16] Letho, O., Virtanen, K.I. “Quasiconformal mappings in the plane”, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, New York, 258 s., (1973).

[17] Andrievskii, V.V., Belyi, ve V.I., Dzyadyk, V.K., “Conform invariant in complex Variable”, World Federation Pub. Company., Atlanta (1995).

[18] Rikman, S. “Characterisation of quasiconformal arcs”, Ann. Acad. Sci. Feen. Ser. A. Mathematica, 395 s., (1966).

[19] Abdullayev, F.G., Baki, A. “On the convergence of Bieberbach polynomials in domains with intierior zero angels”, Complex Analysis Theory & Appl. 34 (2001).

[20] Abdullayev, F.G., Andrievskii, V.V., “On Orthogonal polynomials in the domains with $K-$quasiconformal boundary”, Izv. Akad. Nauk. Azerb. SSR, Ser F.T.M., 1: 3-7, (1983).

[21] Abdullayev, F.G., “Uniform convergence of the generalized Bieberbach polynomials in regions with non-zero angles.” Acta Math.Hung.Vol.77, No.3, pp. 223-246,(1997).

[22] Andrievskii, V.V., “Uniform Convergence of Bieberbach polynomials in domains with piecewise quasiconformal boundary”, Theory of Mappings and Approximation of Function, Kiev, Naukova Dumka, , 3-18, (In Russian), (1983).

[23] Goldstein, V.M., “The Degree of Summability of Generalized Derivatives of plane quasiconformal Homeomorphisms”, Soviet Math. Dokl. 21: 10-13, (1980).

[24] Abdullayev, F.G., “Uniform approximation of the Bieberbach polynomials inside and on the closure of domains in the complex plane”, East J. Approx. 7, 77-101,(2001),.

[25] Abdullayev, F.G., Küçükaslan, M., “On the Convergence of the Fourier Series of Orthonormal Polynomials in the Domain with Piecewise Smooth boundary”, Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan Vol.XIV (XXII), 3-13, (2001).

[26] Lesley, F.D., “Hölder contiunityof conformal mappings at the boundary via the strip method”, Indiana Univ. Math. J., 31, 341-354,(1982).

[27] Lesley, F.D., “Conformal mappings of domains satisfying wedge conditions”, Proc. Amer. Math. Soc., 93, , 483-488, (1985).

[28] Küçükaslan, M., Tunç, T., and Abdullayev, F. G., “Convergenge of Bieberbach polynomials inside domains of the complex plane “, Bull. Belg. Math.Soc., 93, 657-671,(1985).

[29] Suetin, P.K., “Polynomials Orthogonal over a region and Bieberbach polynomials”, Proc. Steklov Inst. Math. **100** (1971). Providence, Rhode Island: Amer. Math. Soc., (1974).

[30] Pommerenke, Ch., “Univalent Functions”, Vondenhoeck and Ruprecht, Göttingen, 376 s., (1975).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Yasemin Gökay DARDAĞAN

Doğum Tarihi: 14 / 08 /1986

Öğrenim Durumu:

Derece	Program	Okul Adı	Yıl
Lise	Matematik	İstiklal Makzume Anadolu Lisesi	2000–2004
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2004–2009

ESERLER(Bildiriler)

1. M. Küçükaslan, Y.G. Dardağan, “Bergman Çekirdek Fonksiyonunun Yerel Davranışı Üzerine” XXIV. Ulusal Matematik Sempozyumu” Uludağ Üniversitesi, Bursa, 07–10 Eylül 2011.

2. M. Küçükaslan, Y.G. Dardağan, “Local Error in the Approximation of Bergman Kernel Function” Theory of Approximation of Functions and its Applications, Kaminatse-Podolski Ukraine, May 28-June 3, 2012.