GÜÇLÜ REGÜLER OLMAYAN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN KÖK FONKSİYONLARININ TABANLIK ÖZELLİKLERİ

UFUK KAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Nazım KERİMOV

MERSİN
NİSAN - 2013

Ufuk KAYA tarafından Prof. Dr. Nazım KERİMOV danışmanlığında hazırlanan "Güçlü Regüler Olmayan Bir Sınır Değer Probleminin Kök Fonksiyonlarının Tabanlık Özellikleri" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Nazım KERİMOV	....
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	....
Prof. Dr. Gabil ADİLOV	....
Doç. Dr. Hamza MENKEN	....
Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26.../04..2013...tarih ve 2013..08.../.260..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

GÜÇLÜ REGÜLER OLMAYAN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN KÖK FONKSİYONLARININ TABANLIK ÖZELLİKLERİ

UFUK KAYA

ÖZ

Bu tez çalışmasında

$$
\begin{aligned}
& y^{(iv)} + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = \lambda y, \qquad (0 < x < 1) \\
& y'''(1) - (-1)^{\sigma} y'''(0) + \alpha_{3,2} y''(0) + \alpha_{3,1} y'(0) + \alpha_{3,0} y(0) = 0, \\
& y''(1) - (-1)^{\sigma} y''(0) + \alpha_{2,1} y'(0) + \alpha_{2,0} y(0) = 0, \\
& y'(1) - (-1)^{\sigma} y'(0) + \alpha_{1,0} y(0) = 0, \\
& y(1) - (-1)^{\sigma} y(0) = 0,
\end{aligned}
$$

şeklindeki sınır değer problemi incelenmiştir. Burada, λ spektral parametre, $p_j(x) \in L_1(0,1)$ $(j = 0,1,2)$ kompleks değerli fonksiyonlar, $\alpha_{s,l}$ $\left(s = \overline{0,3};\ l = \overline{0, s-1}\right)$ herhangi kompleks sabitler ve $\sigma = 0,1$'dir. Belirtelim ki, söz konusu sınır değer probleminin sınır koşulları regülerdir, fakat güçlü regüler değildir. Bu tez çalışmasında bazı koşullar altında verilen sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışları incelenmiş ve kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında taban oluşturduğu ispatlanmıştır. Ayrıca $p = 2$ durumunda bu tabanın koşulsuz olduğu gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dördüncü dereceden özdeğer problemi; güçlü regüler olmayan sınır koşulları; özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotik davranışları; kök fonksiyonları sisteminin tabanlık özellikleri.

Danışman: Prof. Dr. Nazım Kerimov, Matematik Ana Bilim Dalı, Mersin Üniversitesi

Kaya, U. 2013. Basis Properties of Root Functions of a Not Strongly Boundary Value Problem. Ph.D. Thesis, Mersin University.

BASIS PROPERTIES OF ROOT FUNCTIONS OF A NOT STRONGLY BOUNDARY VALUE PROBLEM

UFUK KAYA

ABSTRACT

In this thesis work, it is investigated the boundary problem

$$y^{(iv)} + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = \lambda y, \qquad (0 < x < 1)$$
$$y'''(1) - (-1)^{\sigma} y'''(0) + a_{3,2}y''(0) + a_{3,1}y'(0) + a_{3,0}y(0) = 0,$$
$$y''(1) - (-1)^{\sigma} y''(0) + a_{2,1}y'(0) + a_{2,0}y(0) = 0,$$
$$y'(1) - (-1)^{\sigma} y'(0) + a_{1,0}y(0) = 0,$$
$$y(1) - (-1)^{\sigma} y(0) = 0,$$

where λ is a spectral parameter, $p_j(x) \in L_1(0,1)$ $(j = 0,1,2)$ are complex-valued functions, $\alpha_{s,l}$ $\left(s = \overline{0,3};\ l = \overline{0,s-1}\right)$ are arbitrary complex constants and $\sigma = 0,1$. Note that boundary conditions of this problem are regular, but not strongly regular. In this work, it is established asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions of the considered boundary value problem and proved that the system of root functions forms a basis in the space $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ under some conditions. Besides, it is shown that this basis is unconditional for $p = 2$.

Keywords: Fourth order eigenvalue problem, not strongly regular boundary conditions, asymptotic behavior of eigenvalues and eigenfunctions, basis properties of the system of root functions.

Advisor: Prof. Dr. Nazım Kerimov, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve tezin hazırlanmasında desteğini esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Nazım KERİMOV'a teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi $\{1,2,3,\dots,n,\dots\}$
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\bar{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
(f,g)	f ve g vektörlerinin bulundukları uzaydaki iç çarpımları
$[a,b]$	$\{x \in \mathbb{R} \mid a \le x \le b\}$
(a,b)	$\{x \in \mathbb{R} \mid a < x < b\}$
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli ve kompleks değerli tüm fonksiyonların uzayı
$C^{(n)}[a,b]$	$[a,b]$ aralığında $n.$ mertebeden türevi var ve sürekli olan kompleks değerli tüm fonksiyonların uzayı
$L_p(a,b)$	$1 \le p < \infty$ durumunda $\int_a^b \lvert f(x)\rvert^p dx$ Lebesque integrali sonlu olan ölçülebilir fonksiyonların uzayı
$W_p^n(a,b)$	$1 \le p < \infty$ ve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ durumunda $n.$ türevi var ve $L_p(a,b)$ uzayından olan fonksiyonların uzayı
$O(a_n)$	Landau sembolü
$\delta_{n,m}$	Kronecker deltası. $n = m$ ise 1, $n \ne m$ ise 0 değerini alan fonksiyon

1. GİRİŞ

Bir sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sisteminin farklı fonksiyonel uzaylarda tabanlık özelliklerinin incelenmesi lineer diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin önemli problemlerinden biridir. Sınır koşulları güçlü regüler olan bir sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sisteminin L_2 uzayında koşulsuz taban oluşturduğu ispatlanmıştır. Sınır koşulları regüler fakat güçlü regüler olmayan sınır değer problemlerinin kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında taban oluşturduğuna ve oluşturmadığına dair örnekler mevcuttur.

Biz bu tez çalışmasında

$$y^{(iv)}+p_2(x)y''+p_1(x)y'+p_0(x)y=\lambda y \quad (0<x<1)$$

$$U_s(y)\equiv y^{(s)}(1)-(-1)^{\sigma}y^{(s)}(0)+\sum_{l=0}^{s-1}\alpha_{s,l}\,y^{(l)}(0)=0, \quad \left(s=\overline{1,3}\right)$$

$$U_0(y)\equiv y(1)-(-1)^{\sigma}y(0)=0,$$

biçimindeki sınır değer problemini inceleyeceğiz, burada λ spektral parametre, $p_j(x)\in L_1(0,1)$ $(j=0,1,2)$ kompleks değerli fonksiyonlar, $\alpha_{s,l}$ $\left(s=1,2,3,\ l=\overline{0,s-1}\right)$ keyfi kompleks sabitler ve $\sigma=0,1$'dir. Problemin sınır koşulları regülerdir, fakat güçlü regüler değildir.

Tezde $p_j(x)$ $(j=0,1,2)$ fonksiyonları ve $\alpha_{s,l}$ $\left(s=1,2,3,\ l=\overline{0,s-1}\right)$ katsayıları üzerine uygun koşullar koyarak problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edeceğiz ve kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzaylarında tabanlığını inceleyeceğiz.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Güçlü regüler sınır koşullarına sahip bir sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sisteminin L_2 uzayında taban oluşturduğu bilinmektedir [9,16,28]. Fakat kök fonksiyonlar sisteminin parantezli tabanlığını inceleyen çalışmaları bir kenara bırakırsak (bkz: [30]) güçlü regüler olmayan sınır koşullarına sahip adi diferansiyel operatörlerin kök fonksiyonlar sisteminin tabanlığı henüz yeterince incelenmemiştir. [16]'da kök fonksiyonlar sistemi L_2 uzayında taban oluşturmayan ve güçlü regüler olmayan sınır koşullarına sahip bir diferansiyel operatöre örnek verilmiştir.

1976'da N.I. Ionkin [13] bir homojen madde için klasik olmayan bir ısı iletim problemini araştırmıştır. Değişkenlere ayırma yöntemi kullanılarak problem aşağıdaki gibi bir sınır değer problemine indirgenmiştir:

$$-y'' = \lambda y, \qquad y(0) = 0, \qquad y'(0) = y'(1).$$

Buradaki sınır koşuları regülerdir fakat güçlü regüler değildir. Problemin ikinci özdeğerinden sonraki bütün özdeğerleri iki katlıdır ve ek fonksiyonların genel sayısı sonsuzdur. Buna rağmen, bu problemin özel bir yolla seçilen kök fonksiyonlar sisteminin $L_2(0,1)$ uzayında koşulsuz taban oluşturduğu ispatlanmıştır.

[15]'te $q(x) \in C^{(4)}[0,1]$ ve $q(1) - q(0) \neq 0$ koşulları altında $l(y) = y'' + q(x)y$, $x \in (0,1)$ diferansiyel ifadesi ve periyodik (antiperiyodik) sınır koşulları ile üretilen diferansiyel operatörün sonlu sayıdaki hariç tüm özdeğerlerinin basit olduğu ve bu operatörün kök fonksiyonlar sisteminin L_2 uzayında koşulsuz taban olduğu ispatlanmıştır. Belirtelim ki periyodik (antiperiyodik) sınır koşulları regülerdir fakat güçlü regüler değildir.

A. S. Makin [18-23], P. B. Djakov ve B. S. Mityagin [5-8] güçlü regüler olmayan sınır koşullarına sahip Sturm-Liouville operatörünün bazı spektral özelliklerini detaylı bir şekilde incelemişlerdir. [18]'de sınır koşulları regüler olan fakat güçlü regüler olmayan ve kök fonksiyonlar sistemi L_2 uzayında taban oluşturmayan ikinci dereceden diferansiyel operatörlerin geniş bir sınıfının varlığı ispatlanmıştır. [5]'te kök fonksiyonlar sisteminin taban oluşturmaması üzerine bazı kesin sonuçlar elde edilmiştir. Dahası, [5]'te istenen mertebeden türeve sahip potansiyel fonksiyonu içeren ve kök fonksiyonlar sistemi L_2 uzayında taban oluşturmayan diferansiyel operatörlere örnekler verilmiştir.

[10]'da F. Gesztesy ve V. Tkachenko periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarına sahip Schrödinger operatörünün kök fonksiyonlar sisteminin L_2'de Riesz tabanı oluşturması için gerek ve yeter koşullar elde etmişler; ayrıca, kök fonksiyonlar sistemin L_p $(1<p<\infty)$ uzayında tabanlığını araştırmışlardır.

Kh. R. Mamedov ve H. Menken [24-27] periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarına sahip diferansiyel operatörlerin spektral özelliklerini (spektral asimptotlar, tabanlık) incelemişlerdir. [24-26]'da periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarına sahip Sturm-Liouville operatörünün potansiyel fonksiyonu üzerine koşullar koyularak kök fonsiyonlar sisteminin L_2'deki Riesz tabanlığı ve L_p $(1<p<\infty)$'deki Schauder tabanlığı araştırılmıştır. H. Menken, [27]'de periyodik sınır koşullarına sahip dördüncü mertebeden bir diferansiyel operatörün temel çözüm sistemi, özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde etmiştir.

[19]'da

$$\begin{cases} l(y) = y'' + q(x)y, \\ y'(1) - (-1)^{\sigma} y'(0) + \gamma y(0) = 0, \\ y(1) - (-1)^{\sigma} y(0) = 0 \end{cases}$$

diferansiyel operatörünün spektral özellikleri incelenmiştir, burada $q(x) \in L_1(0,1)$ kompleks değerli bir fonksiyon, γ sıfırdan farklı bir kompleks sabit ve $\sigma = 0,1$'dir. İspat edilmiştir ki, söz konusu durumda kök fonksiyonlar sistemi $L_2(0,1)$'de taban oluşturur. [6] ve [20]'de, $\gamma = 0$ koşulu altında (periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları) yukardaki operatörün kök fonksiyonlar sisteminin tabanlığı için $q(x)$ potansiyelinin Fourier katsayılarının üzerine gerek ve yeter koşullar koyulmuştur (bkz: [17, 27, 31]). Belirtelim ki [6]'da ele alınan potansiyel fonksiyonlar sınıfı yeteri kadar geniştir (ispat [7]'de verilmiştir). [6] ve [7]'de trigonometrik polinom biçiminde potansiyel fonksiyonlarına sahip böyle operatörlerin kök fonksiyonlar sisteminin Riesz tabanlığı hakkında başka önemli sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca, son zamanlarda P. B. Djakov ve B. S. Mityagin [8] tabanlık için potansiyel fonksiyonunun (potansiyele herhangi bir sınıfta olma kısıtlaması koymadan, hatta dağılım potansiyelleri için bile) Fourier katsayıları üzerine genel bir kriter ispatlamışlardır. [4, 33-36] makalelerinde de sınır koşulları regüler olan fakat güçlü regüler olmayan adi diferansiyel operatörlerin sınır değer problemlerinin spektral özellikleri incelenmiştir.

Diferansiyel operatörlerin spektral özelliklerini araştırmanın bir etkili yolu da V. A. Ilin ve onun öğrencilerinin (V. D. Budaev, I. S. Lomov, V.M. Kurbanov, A. S. Makin ve diğerleri) çalıştığı yöntemdir. Bu tez çalışması bu araştırmalar ile direk ilgilidir (bkz: [12]).

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bulgular kısmında kullanılacak bazı tanımlar ve temel teoremler verilecektir.

3.1. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN TANIMI VE TEMEL ÖZELLİKLERİ

3.1.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1.1 [29]. $X \neq \varnothing$ bir küme, $+: X \times X \to X$ ve $\cdot: \mathbb{C} \times X \to X$ iki dönüşüm olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa X 'e bir lineer uzay veya vektör uzayı denir:

1. $\forall x, y \in X$, $x + y = y + x$,
2. $\forall x, y, z \in X$, $x + (y+z) = (x+y) + z$,
3. $\exists \theta \in X$: $\forall x \in X$, $x + \theta = x$,
4. $\forall x \in X$, $\exists y \in X$: $x + y = \theta$,
5. $\forall a \in \mathbb{C}$, $\forall x, y \in X$, $a(x+y) = ax + ay$,
6. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall x \in X$, $(a+b)x = ax + bx$,
7. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall x \in X$, $a(bx) = (ab)x$,
8. $\forall x \in X$, $1x = x$.

Tanım 3.1.1.2 [29]. X bir lineer uzay, $\varnothing \neq D \subset X$ olsun. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall x, y \in D$: $ax + by \in D$ koşulu sağlanıyorsa D 'ye X 'in bir alt uzayı denir.

Tanım 3.1.1.3 [29]. X bir lineer uzay, $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ olsun. $c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n$ elemanına $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemanlarının bir lineer kombinasyonu denir.

$W \subset X$ olsun. W 'nun boştan farklı tüm sonlu alt kümelerinin elemanlarının bütün lineer kombinasyonlarının kümesi X 'in bir alt uzayıdır ve bu uzay $SpanW$ ile gösterilir. $SpanW$ alt uzayına W 'nun ürettiği veya gerdiği uzay denir.

Tanım 3.1.1.4 [29]. X bir lineer uzay ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ olsun. "$c_1x_1 + c_2x_2 + \cdots + c_nx_n = \theta \;\Rightarrow\; c_1 = c_2 = \cdots = c_n = 0$" koşulu sağlanıyorsa $x_1, x_2, \ldots, x_n$ elemanlarına lineer bağımsız, aksi takdirde lineer bağımlı denir. $W \subset X$ sonsuz elemanlı olsun. W 'nun her sonlu sayıda elemanı lineer bağımsız ise W 'ya lineer bağımsızdır denir. Aksi halde lineer bağımlıdır denir.

Tanım 3.1.1.5 [29]. X ve Y lineer uzaylar $A: X \to Y$ bir dönüşüm olsun. $\forall a, b \in \mathbb{C}$, $\forall x, y \in X$, $A(ax + by) = aA(x) + bA(y)$ sağlanıyorsa A 'ya bir lineer dönüşüm veya lineer operatör denir.

Tanım 3.1.1.6 [32]. X reel veya kompleks bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\|: X \to \mathbb{R}$ dönüşümü aşağıdaki özellikleri sağlarsa $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine bir normlu uzay denir:

1. $\forall x \in X$: $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,
2. $\forall x, y \in X$: $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$,
3. $\forall x \in X$: $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\mathbb{C})$: $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

$\rho(x, y) = \|x - y\|$ olsun. Bu durumda (X, ρ) bir metrik uzay olur. Bu metrik uzaya $\|\cdot\|$ normu ile üretilen metrik uzay denir.

Tanım 3.1.1.7 [32]. $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzay olsun. (X, ρ) tam metrik uzaysa $(X, \|\cdot\|)$ 'e Banach uzayı denir.

Tanım 3.1.1.7 [3]. $(X,\|\cdot\|)$ bir Banach uzayı $\{e_k\}_{k=1}^{k=\infty}$, X 'de bir dizi olsun. Her $f \in X$ için

$$f = \sum_{k=1}^{\infty} c_k e_k$$

olacak biçimde $\{c_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ sayısal dizisi var ve tek ise $\{e_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ dizisine X uzayının bir tabanı denir.

$\{e_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ sistemi X uzayının bir tabanı olsun. $\mathbb{N}$ 'nin her bir θ permutasyonu için $\{e_{\theta(k)}\}_{k=1}^{k=\infty}$ sistemi de X 'in bir tabanı ise $\{e_k\}_{k=1}^{k=\infty}$ sistemine bir koşulsuz taban; aksi durumda koşullu taban denir.

3.1.2. Lineer Diferansiyel İfade

Tanım 3.1.2.1 [29].

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y, \quad x \in [a,b]$$

şeklindeki bir ifadeye lineer diferansiyel ifade denir. $p_0, p_1, \ldots, p_n$ fonksiyonlarına lineer diferansiyel ifadenin katsayı fonksiyonları, n sayısına da lineer diferansiyel ifadenin mertebesi adı verilir.

Genelde $\dfrac{1}{p_0(x)}, p_1(x), \ldots, p_n(x)$ fonksiyonlarının $[a,b]$ aralığında sürekli olduğu kabul edilir. Gerektiğinde katsayı fonksiyonları üzerine daha az veya daha çok koşul yükleyeceğiz. Her bir $y \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonu için $l(y)$ $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyonu temsil eder.

3.1.3. Sınır Koşulları

$y_a = y(a)$, $y'_a = y'(a)$, $y''_a = y''(a)$, . . . , $y_a^{(n-1)} = y^{(n-1)}(a)$ ve $y_b = y(b)$, $y'_b = y'(b)$, $y''_b = y''(b)$, . . . , $y_b^{(n-1)} = y^{(n-1)}(b)$ olarak gösterelim. $U(y)$ bu değişkenlere göre lineer bir ifade olsun:

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y_a' + \cdots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y_b' + \cdots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)} .$$

Burada $\alpha_0, \alpha_1, \ldots, \alpha_{n-1}, \beta_0, \beta_1, \ldots, \beta_{n-1} \in \mathbb{C}$'dir. Eğer birkaç tane $U_\nu(y) = 0,\ \nu = \overline{1,m}$ ifadesi açıkça belirtilmiş ve $y \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonları üzerine

$$U_\nu(y) = 0 \quad \left(\nu = \overline{1,m}\right) \tag{3.1}$$

koşulları konmuşsa bu koşullara $y \in C^{(n)}[a,b]$ üzerine konulan sınır koşulları denir.

(3.1) ile belirtilmiş sınır koşullarını sağlayan tüm $y \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonlarının kümesini D ile gösterelim. Açıktır ki D, $C^{(n)}[a,b]$'nin alt uzayıdır. (3.1) koşullarının tüm koşullarının tüm katsayıları sıfırsa veya bu koşullar konmamışsa $D = C^{(n)}[a,b]$'dir.

Tanım 3.1.3.1 [29]. $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.1) ile tanımlı özel bir D alt uzay verilsin. Her bir $y \in D$ fonksiyonuna bir $u = l(y)$ fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu, tanım bölgesi D olan lineer bir operatör tanımlar. Bu operatörü L ile göstereceğiz:

$$u = Ly .$$

L operatörüne $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.1) sınır koşullarıyla üretilen diferansiyel operatör denir.

(3.1) sınır koşullarından bazılarının diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabildiği durumlar var olabilir. Bu durumda m tane sınır koşulundan lineer bağımlı olanlar atılır. Biz bundan sonra (3.1) sınır koşullarının lineer bağımsız olduğunu, yani katsayılarından oluşan matrisin rankının m olduğunu varsayacağız.

3.1.4. Lagrange Formülü ve Eşlenik Diferansiyel İfade

$$l(y) = p_0(x) y^{(n)} + p_1(x) y^{(n-1)} + p_n(x) y, \quad x \in [a,b]$$

diferansiyel ifadesindeki katsayı fonksiyonları üzerine $p_k(x) \in C^{(n-k)}[a,b]$ koşulunu koyalım. $y, z \in C^{(n)}[a,b]$ olsun. k kez kısmi integrasyon ile

$$\int_a^b p_{n-k}\bar{z}y^{(k)}dx=\left[p_{n-k}\bar{z}y^{(k-1)}-\left(p_{n-k}\bar{z}\right)'y^{(k-2)}+\cdots+(-1)^{k-1}\left(p_{n-k}\bar{z}\right)^{(k-1)}y\right]_a^b \\ +(-1)^k\int_a^b y\left(p_{n-k}\bar{z}\right)^{(k)}dx \tag{3.2}$$

elde ederiz. (3.2)'de $k=\overline{0,n}$ alıp elde edilen denklemleri taraf tarafa toplarsak

$$\int_a^b l(y)\bar{z}dx=P(\eta,\zeta)+\int_a^b y\overline{l^*(z)}dx \tag{3.3}$$

elde ederiz. Burada

$$l^*(z)=(-1)^n\left(\overline{p_0}z\right)^{(n)}+(-1)^{n-1}\left(\overline{p_1}z\right)^{(n-1)}+\cdots+\overline{p_n}z \tag{3.4}$$

ve $P(\eta,\zeta)$

$$\eta=\left(y_a,y'_a,\ldots,y_a^{(n-1)},y_b,y'_b,\ldots,y_b^{(n-1)}\right),$$
$$\zeta=\left(z_a,z'_a,\ldots,z_a^{(n-1)},z_b,z'_b,\ldots,z_b^{(n-1)}\right)$$

değişkenlerine bağlı bilineer bir ifadedir. (3.4) ile tanımlı $l^*(z)$ diferansiyel ifadesine $l(y)$ diferansiyel ifadesinin eşleniği ve (3.3) formülüne Lagrange formülü denir.

3.1.5. Eşlenik Sınır Koşulları ve Eşlenik Operatör

$U_1,U_2,\ldots,U_m$ $y_a,y'_a,\ldots,y_a^{(n-1)},y_b,y'_b,\ldots,y_b^{(n-1)}$ değişkenlerine bağlı lineer bağımsız ifadeler olsunlar. $m<2n$ durumunda, $U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$ ifadelerinden oluşan $2n$ sayıda lineer bağımsız ifade elde etmek için $U_{m+1},\ldots,U_{2n}$ ifadelerini ekleyelim. Bu ifadeler lineer bağımsız olduğundan $y_a,y'_a,\ldots,y_a^{(n-1)},y_b,y'_b,\ldots,y_b^{(n-1)}$ değişkenleri $U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$ ifadelerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir.

Lagrange formülünde bu ifadeleri yerine yazarsak $P(\eta,\zeta)$ $U_1,U_2,\ldots,U_{2n}$ değişkenlerine bağlı olur. Ayrıca $P(\eta,\zeta)$'nın $V_1,V_2,\ldots,V_{2n}$ ile göstereceğimiz katsayıları $\overline{z_a},\overline{z'_a},\ldots,\overline{z_a^{(n-1)}},\overline{z_b},\overline{z'_b},\ldots,\overline{z_b^{(n-1)}}$ değişkenlerine bağlı lineer bağımsız homojen ifadelerdir. O halde Lagrange formülü

$$\int_a^b l(y)\bar{z}dx = U_1V_{2n} + U_2V_{2n-1} + \cdots + U_{2n}V_1 + \int_a^b y\overline{l^*(z)}dx \tag{3.5}$$

halini alır.

$$V_1 = 0,\ V_2 = 0, \ldots, V_{2n-m} = 0 \tag{3.6}$$

sınır koşullarına (ve buna denk tüm sınır koşullarına)

$$U_1 = 0,\ U_2 = 0, \ldots, U_m = 0 \tag{3.7}$$

sınır koşullarının eşlenik sınır koşulları denir.

L, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.7) sınır koşullarıyla belirlenmiş bir operatör olsun. $l^*(y)$ ve (3.6) ile belirlenmiş operatöre L operatörünün eşlenik operatörü denir ve L^* ile gösterilir.

(3.5) - (3.7)'den

$$\int_a^b L(y)\bar{z}dx = \int_a^b y\overline{L^*(z)}dx$$

veya

$$(Ly, z) = (y, L^*z)$$

yazılabilir.

3.2. BİR DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARI

3.2.1. Özdeğer ve Özfonksiyonların Tanımı

L, $n.$ mertebeden bir diferansiyel operatör, $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer

$$Ly = \lambda y$$

denklemi sıfırdan farklı bir y fonksiyonu için sağlanıyorsa λ sayısına L operatörünün bir özdeğeri, y fonksiyonuna da λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir. Varsayalım ki L operatörü $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve

$$U_1(y) = 0, \ldots, U_n(y) = 0 \tag{3.8}$$

sınır koşullarından oluşmuştur. O halde y özfonksiyonu L operatörünün tanım kümesine ait olmak zorundadır. Yani (3.8) sınır koşullarını sağlamalıdır. Böylece, bir L operatörünün özdeğerleri λ'nın öyle değerleridir ki bu değerlerde

$$l(y) = \lambda y, \quad U_\nu(y) = 0 \quad \left(\nu = \overline{1,n}\right) \tag{3.9}$$

homojen sınır değer probleminin sıfıra özdeş olmayan çözümü vardır. Sıfıra özdeş olmayan çözüm λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur.

Aynı λ özdeğerine ait özfonksiyonların bir lineer kombinasyonu yine λ'ya ait bir özfonksiyondur. Yani $Ly_1 = \lambda y_1$ ve $Ly_2 = \lambda y_2$ ise her $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ için $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \lambda(c_1 y_1 + c_2 y_2)$'dir.

$l(y) = \lambda y$ homojen denklemi verilen bir λ parametresi için n'den çok lineer bağımsız çözüme sahip değildir. Belirtelim ki aynı özdeğere ait olan tüm özfonksiyonların kümesi boyutu n'den büyük olmayan bir uzay belirler. Bu uzayın boyutu verilen λ özdeğeri için (3.9) probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır. Bu sayıya λ özdeğerinin geometrik katlılığı denir.

$$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda), \ldots, y_n(x,\lambda) \tag{3.10}$$

fonksiyonları

$$y_j^{(\nu-1)}(a,\lambda) = \delta_{j,\nu} \quad \left(j,\nu = \overline{1,n}\right)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerin temel sistemi olsun. Belirtelim ki, $[a,b]$ aralığında sabitlenmiş her x için (3.10) fonksiyonları λ parametresinin tam fonksiyonlarıdır.

Bir λ sayısının L operatörünün özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul en az biri sıfır olmayan öyle $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ sayılarının var olmasıdır ki $y(x,\lambda) = \sum_{j=1}^{n} c_j y_j(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.8) sınır koşullarını sağlar. Başka bir ifadeyle λ sayısının L operatörünün bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$\begin{cases} c_1 U_1(y_1) + c_2 U_1(y_2) + \cdots + c_n U_1(y_n) = 0, \\ c_1 U_2(y_1) + c_2 U_2(y_2) + \cdots + c_n U_2(y_n) = 0, \\ \vdots \\ c_1 U_n(y_1) + c_2 U_n(y_2) + \cdots + c_n U_n(y_n) = 0 \end{cases}$$

homojen lineer denklemler sisteminin en az biri sıfır olmayan $c_1, c_2, \ldots, c_n \in \mathbb{C}$ çözümünün var olmasıdır. O halde L operatörünün özdeğerleri

$$\Delta(\lambda) = \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & U_n(y_2) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix}$$

biçiminde tanımlanan tam fonksiyonun sıfırlarıdır.

1. $\Delta(\lambda) \equiv 0$ ise her $\lambda \in \mathbb{C}$ sayısı L operatörünün özdeğeridir.

2. $\Delta(\lambda) \not\equiv 0$ ise L operatörünün özdeğerinin kümesi en fazla sayılabilir sayıda elemana sahiptir ve sonlu limit noktasına sahip değildir.

Biz bu çalışmada “2” durumu ile ilgileneceğiz. λ_0 sayısı L operatörünün bir özdeğeri olsun. O halde bu sayı $\Delta(\lambda)$ tam fonksiyonunun bir sıfır yeridir. Bu sebeple, $\Delta(\lambda) = (\lambda - \lambda_0)^k F(\lambda)$ olarak yazılabilir. Burada F bir tam fonksiyon, $F(\lambda_0) \neq 0$ ve $k \in \mathbb{N}$ ’dir. Bu biçimde tanımlanan k sayısına λ_0 özdeğerinin cebirsel katlılığı denir. $k = 1$ durumunda λ_0 ’a basit özdeğer denir. λ_0 özdeğerinin geometrik katlılığına m diyelim. Gösterilebilir ki $m \leq k$ ’dır. Daha açık bir ifade ile, λ_0 özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonların sayısı bu özdeğerin cebirsel katlılığını geçemez.

3.2.2. Ek Fonksiyonlar

λ_0 sayısı (3.9) probleminin bir özdeğeri, $\varphi(x)$ bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\psi_1(x), \psi_2(x), \ldots, \psi_k(x)$ fonksiyonlarına $\varphi(x)$ özfonksiyonlarının ek fonksiyonları denir:

$$l(\psi_i) = \lambda_0 \psi_i + \psi_{i-1} \quad \left(i = \overline{1,k}\right),$$

$$U_\nu(\psi_i) = 0 \quad \left(i = \overline{1,k},\ \nu = \overline{1,n}\right),$$

burada $\psi_0(x) = \varphi(x)$’tir.

L lineer diferansiyel operatörü verilsin. Varsayalım ki bu operatörün özdeğerleri sayılabilir sayıdadır. O halde bu özdeğerleri $\{\lambda_j\}_{j=1}^{j=\infty}$ olarak gösterebiliriz. λ_j özdeğerinin cebirsel katlılığını m_j ile, λ_j'ya karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonları da $\varphi_{j,1}(x), \varphi_{j,2}(x), \ldots, \varphi_{j,p_j}(x)$ ile gösterelim. Açıktır ki $p_j \le m_j$'dır. Gösterilebilir ki $E = \{\varphi_{j,p}(x) \mid j \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le p_j\}$ lineer bağımsızdır. E'ye L diferansiyel operatörünün özfonksiyonlar sistemi denir.

$\varphi_{j,p,1}(x), \varphi_{j,p,2}(x), \ldots, \varphi_{j,p,m_{j,p}-1}(x)$ fonksiyonları $\varphi_{j,p}$ $\left(j \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le p_j\right)$ özfonksiyonunun ek fonksiyonları olsunlar. Bu takdirde

$$m_{j,1} + m_{j,2} + \cdots + m_{j,p_j} = m_j$$

dir. Yani λ_j özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlar ve onlara karşılık gelen ek fonksiyonların toplam sayısı λ_j'nin cebirsel katlılığına eşittir. Gösterilebilir ki $R = \{\varphi_{j,p,i}(x) \mid j \in \mathbb{N},\ 1 \le p \le p_j,\ 0 \le i \le m_{j,p} - 1\}$ lineer bağımsızdır. Burada $\varphi_{j,p,0}(x) = \varphi_{j,p}(x)$'tir. R'ye L diferansiyel operatörünün kök fonksiyonlar sistemi denir.

3.3. ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARIN ASİMPTOTİK DAVRANIŞLARI

3.3.1. Problemin İfadesi

Keyfi bir $L(y)$ diferansiyel operatörünün özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik gösterimlerini elde etmek için ilk olarak $|\lambda|$'nın büyük değerlerinde $l(y) = \lambda y$ denkleminin çözümlerinin asimptotik davranışlarını inceleyelim. Daha sonra bu yaklaşımları $\Delta = 0$ denkleminde yerine yazarak özdeğerler için asimptotik ifadeler elde edelim. Önce $\lambda = -\rho^n$ kabul edelim. O halde $l(y) = \lambda y$ denklemi

$$l(y) + \rho^n y = 0$$

halini, daha detaylı olarak

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1} y}{dx^{n-1}} + \cdots + p_n(x)y + \rho^n y = 0 \tag{3.11}$$

halini alır (basitlik için $p_0(x) \equiv 1$ alınır. $p_0(x) \not\equiv 1$ durumu $p_0(x) \equiv 1$ durumuna indirgenebilir). Genelliği kaybetmeden $p_1(x) \equiv 0$ kabul edebiliriz. Eğer $p_1(x) \not\equiv 0$ ise

$$y = y.e^{-\frac{1}{n}\int_a^x p_1(t)dt}$$

dönüşümü yapılarak (3.11) denklemi

$$\frac{d^n y}{dx^n} + p_2(x)\frac{d^{n-2} y}{dx^{n-2}} + \cdots + p_n(x)y + \rho^n y = 0$$

biçimine dönüştürülür. Burada $p_2(x), p_3(x), \ldots, p_n(x)$, $[a,b]$'de x'in sürekli fonksiyonlarıdır; ρ ise değişmemiştir.

Yine genelliği kaybetmeden $[a,b]$ aralığı yerine $[0,1]$ alabiliriz. Çünkü

$$x = a + (b-a)t,\ t \in [0,1]$$

dönüşümü ile $[0,1]$ aralığından $[a,b]$ aralığına geçiş yapılabilir.

3.3.2. S ve T Bölgeleri

Kompleks ρ - bölgesini $2n$ tane S_k $\left(k = \overline{0, 2n-1}\right)$ bölgesine ayıralım:

$$S_k = \left\{ \rho \in \mathbb{C} \mid \frac{k\pi}{n} \le \arg\rho \le \frac{(k+1)\pi}{n} \right\}. \tag{3.12}$$

$\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ ile $\omega^n + 1 = 0$ denkleminin tüm farklı köklerini gösterelim (-1'in kökleri).

Teorem 3.3.2.1 [29]. Herhangi bir S_k $(0 \le k \le 2n-1)$ bölgesi alalım ve k sayısını sabitleyelim. Bu durumda $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sayıları $\forall \rho \in S_k$ için

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_1) \le \mathrm{Re}(\rho\omega_2) \le \cdots \le \mathrm{Re}(\rho\omega_n) \tag{3.13}$$

olacak biçimde sıralanabilir.

Şimdi $\rho \to \rho - c$ ötelemesi yaparak S_k bölgelerini daha genel bölgelere dönüştürelim. Burada c herhangi bir kompleks sayıdır. Bu yeni bölgeler köşeleri $\rho = -c$ noktasına yerleşen bölgelerdir. Bu bölgeleri T_k $\left(k = \overline{0, 2n-1}\right)$ ile gösterelim. Bu bölgeler S_k bölgelerinin ötelemeleri olduğundan $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sayılarının öyle bir dizilişi vardır ki $\forall \rho \in T_k$ için

$$\operatorname{Re}\left((\rho + c)\omega_1\right) \le \operatorname{Re}\left((\rho + c)\omega_2\right) \le \cdots \le \operatorname{Re}\left((\rho + c)\omega_n\right) \tag{3.14}$$

sağlanır.

Bundan sonra ρ değişkenini sabit bir T_k bölgesinin elemanı olarak kabul edeceğiz. Ayrıca S_k ve T_k yerine S ve T kullanacağız. $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sayılarının sırasını (3.14) eşitsizliğini sağlayacak şekilde kabul edeceğiz.

3.3.3. $l(y) + \rho^n y = 0$ Denkleminin İntegro-Diferansiyel Denkleme İndirgenmesi

$$l(y) + \rho^n y = 0 \tag{3.15}$$

denklemini ele alalım ve

$$m(y) = p_2(x) y^{(n-2)} + \cdots + p_n(x) y \tag{3.16}$$

yazalım. O halde (3.15) denklemi

$$y^{(n)} + \rho^n y = -m(y) \tag{3.17}$$

halini alır.

$y^{(n)} + \rho^n y = 0$ homojen diferansiyel denkleminin $\rho \ne 0$ için temel çözüm sistemi $e^{\rho\omega_1 x}, e^{\rho\omega_2 x}, \ldots, e^{\rho\omega_n x}$'tir. (3.17) denklemini homojen olmayan kısmı $-m(y)$ olan homojen olmayan denklem gibi düşünürsek sabitlerin değişimi yöntemi ile y genel çözümünü

$$y = c_1 e^{\rho\omega_1 x} + \cdots + c_n e^{\rho\omega_n x} + \int_0^x \frac{\omega_1 e^{\rho\omega_1(x-\xi)} + \cdots + \omega_n e^{\rho\omega_n(x-\xi)}}{n\rho^{n-1}} m_\xi(y)\, d\xi \tag{3.18}$$

formunda buluruz. Burada $m_\xi(y)$, $x = \xi$ noktasında $m(y)$'nin değeridir. (3.17) ve (3.18) denklemleri denktir. Yani, keyfi $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sayıları için (3.18)'in bir çözümü (3.17)'nin de bir çözümüdür. Tersine (3.17)'nin herhangi bir çözümü için öyle

$c_1, c_2, \ldots, c_n$ sayıları vardır ki (3.18) sağlanır. Burada $c_1, c_2, \ldots, c_n$ sabitleri ρ 'ya bağlı olabilir. $1 \le k \le n$ olmak üzere bir k sayısını sabitleyelim.

$$c_j' = \begin{cases} c_j, & j = 1, \ldots, k \\ c_j + \int_0^1 \dfrac{\omega_j e^{-\rho\omega_j \xi}}{n\rho^{n-1}} m_\xi(y)\, d\xi, & j = (k+1), \ldots, n \end{cases} \tag{3.19}$$

yazarsak

$$\begin{aligned} y = c_1' e^{\rho\omega_1 x} + \cdots + c_n' e^{\rho\omega_n x} + \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_0^x K_1(x, \xi, \rho) m_\xi(y)\, d\xi \\ - \frac{1}{n\rho^{n-1}} \int_x^1 K_2(x, \xi, \rho) m_\xi(y)\, d\xi \end{aligned} \tag{3.20}$$

elde ederiz. Burada

$$K_1(x, \xi, \rho) = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha (x-\xi)}, \quad K_2(x, \xi, \rho) = \sum_{\alpha=k+1}^{n} \omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha (x-\xi)} \tag{3.21}$$

dir.

3.3.4. $l(y) + \rho^n y = 0$ Denkleminin Çözümleri için Asimptotik Formüller

Lemma 3.3.4.1 [29].

$$y_i(x) = f_i(x) + \sum_{j=1}^{r} \int_a^b A_{ij}(x, \xi, \lambda) y_j(\xi)\, d\xi \quad \left(i = \overline{1, r}\right)$$

integral denklemi aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. $f_i(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında süreklidir.
2. Herhangi $\xi \in [a,b]$ için $A_{ij}(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonları $[a, \xi)$ ve $(\xi, b]$ aralıklarında süreklidir.
3. Herhangi $x, \xi \in [a,b]$ için $A_{ij}(x, \xi, \lambda)$ fonksiyonları $\mathbb{C}$ 'nin sınırsız bir alt bölgesinde λ 'nın analitik fonksiyonlarıdır.
4. $\exists R, C > 0$: $|\lambda| > R$ koşulunu sağlayan her λ ve her $x, \xi \in [a,b]$ için

$$|A_{ij}(x, \xi, \lambda)| \le \frac{C}{|\lambda|}$$

sağlanır. Bu takdirde $\exists R_0 > 0 : |\lambda| \geq R_0$ bölgesinde integral denklemler sisteminin bir ve yalnız bir

$$y_i(x) = y_i(x,\lambda) \quad \left(i = \overline{1,r}\right)$$

çözümü vardır ve bu çözümler $|\lambda| \geq R_0$ bölgesinde analitiktir. Ayrıca $i = \overline{1,r}$ için

$$y_i(x,\lambda) = f_i(x) + O\left(\frac{1}{\lambda}\right) \quad (\lambda \to \infty)$$

sağlanır.

Lemma 3.3.4.2 [29]. Öyle $C > 0$ sayısı vardır ki her $\rho \in T$ ve $\nu = 0,1,2,\ldots$ için aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur:

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_1(x,\xi,\rho)\right| \leq C|\rho|^\nu k \left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right| \qquad (0 \leq \xi \leq x \leq 1),$$

$$\left|\frac{\partial^\nu}{\partial x^\nu} K_2(x,\xi,\rho)\right| \leq C|\rho|^\nu (n-k)\left|e^{\rho\omega_k(x-\xi)}\right| \qquad (0 \leq x \leq \xi \leq 1).$$

Teorem 3.3.4.1 [29]. $p_2,\ldots,p_n$ fonksiyonları $[0,1]$ aralığında sürekli ise

$$y^{(n)} + p_2 y^{(n-2)} + \cdots + p_{n-1}y' + p_n y + \rho^n y = 0$$

denkleminin her bir T bölgesinde n lineer bağımsız $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ çözümü vardır. Bu çözümler $|\rho|$'nun yeterince büyük değerlerinde T bölgesinde analitiktir. Ayrıca $y_1(x),\ldots,y_n(x)$ çözümleri ve onların türevleri aşağıdaki asimptotik gösterimlere sahiptir:

$$\begin{aligned} y_k &= e^{\rho\omega_k x}\left\{1 + O\left(\rho^{-1}\right)\right\}, \\ \frac{dy_k}{dx} &= \rho e^{\rho\omega_k x}\left\{\omega_k + O\left(\rho^{-1}\right)\right\}, \\ &\vdots \\ \frac{d^{n-1}y_k}{dx^{n-1}} &= \rho^{n-1}e^{\rho\omega_k x}\left\{\omega_k^{n-1} + O\left(\rho^{-1}\right)\right\}. \end{aligned} \tag{3.22}$$

İspat: (3.20) denkleminde $c'_\nu = 0 \ (\nu \neq k)$, $c'_k = 1$ alalım ve bu denklemin y_k çözümünü araştıralım:

$$\begin{aligned} y_k &= e^{\rho\omega_k x} + \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_0^x K_1(x,\xi,\rho)\, m_\xi(y_k)\, d\xi \\ &- \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_x^1 K_2(x,\xi,\rho)\, m_\xi(y_k)\, d\xi. \end{aligned} \tag{3.23}$$

(3.23) denkleminin x'e göre $(n-1)$. mertebeye kadar türevini alıp $\omega_1^\nu + \omega_2^\nu + \cdots + \omega_n^\nu = 0 \quad (\nu = 1, 2, \ldots, n-1)$ eşitliğini kullanırsak orijinal denklemle birlikte aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz:

$$\begin{aligned} \frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} &= \rho^\nu \omega_k^\nu e^{\rho\omega_k x} + \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_0^x \frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} m_\xi(y_k)\, d\xi \\ &- \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_x^1 \frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} m_\xi(y_k)\, d\xi \quad (\nu = 0, 1, 2, \ldots, n-1). \end{aligned} \tag{3.24}$$

(3.24) denkleminde

$$\frac{d^\nu y_k}{dx^\nu} = \rho^\nu e^{\rho\omega_k x} z_{k,\nu} \tag{3.25}$$

yazarsak $z_{k,\nu} = z_{k,\nu}(x,\rho)$ fonksiyonları için

$$\begin{aligned} z_{k,\nu}(x,\rho) &= \omega_k^\nu + \frac{1}{n\rho}\int_0^x e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{-\nu} \frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} \times \\ &\left\{ p_2(\xi) z_{k,n-2}(\xi,\rho) + \frac{1}{\rho} p_3(\xi) z_{k,n-3}(\xi,\rho) + \cdots + \frac{1}{\rho^{n-2}} p_n(\xi) z_{k,0}(\xi,\rho) \right\} d\xi \\ &- \frac{1}{n\rho}\int_x^1 e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{-\nu} \frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} \times \\ &\left\{ p_2(\xi) z_{k,n-2}(\xi,\rho) + \frac{1}{\rho} p_3(\xi) z_{k,n-3}(\xi,\rho) + \cdots + \frac{1}{\rho^{n-2}} p_n(\xi) z_{k,0}(\xi,\rho) \right\} d\xi \end{aligned} \tag{3.26}$$

denklemler sistemini elde ederiz.

$$K_{k,\nu,\alpha}(x,\xi,\rho) = \begin{cases} \dfrac{1}{n} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{-\nu-\alpha+2} \dfrac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} p_\alpha(\xi), & \xi < x \\ -\dfrac{1}{n} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{-\nu-\alpha+2} \dfrac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} p_\alpha(\xi), & \xi > x \end{cases}$$

$$\nu = 0, 1, 2, \ldots, (n-1); \qquad \alpha = 2, 3, \ldots, n$$

ifadesini (3.26)'da yerine yazarsak aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz:

$$z_{k,\nu}(x,\rho) = \omega_k^\nu + \frac{1}{\rho}\sum_{\alpha=2}^{n}\int_0^1 K_{k,\nu,\alpha}(x,\xi,\rho)\, z_{k,n-\alpha}(\xi,\rho)\, d\xi. \tag{3.27}$$

Sabit bir k için, (3.27)'de $\nu = 0,1,2,\ldots,(n-1)$ değerleri yazılarak n denklemden oluşan integral denklemler sistemi elde edilir. Lemma 3.3.4.2'den $K_{k,\nu,\alpha}(x,\xi,\rho)$ fonksiyonlarının $0 \le x,\xi \le 1$ ve T bölgesindeki mutlak değerce yeterince büyük ρ'lar için sınırlı olduğu görülür. O halde Lemma 3.3.4.1'in bütün koşulları sağlanır. Bu lemma ile, (3.27) integral denklemler sisteminin bir ve yalnız bir $z_{k,\nu} = z_{k,\nu}(x,\rho)$ çözümüne sahip olduğu sonucuna varılır. Burada mutlak değerce yeterince büyük ρ'lar için $z_{k,\nu}(x,\rho)$ fonksiyonları analitiktir ve aşağıdaki asimptotik gösterime sahiptir:

$$z_{k,\nu}(x,\rho) = \omega_k^{\nu} + O\left(\rho^{-1}\right). \tag{3.28}$$

Buradan ve (3.25)'ten (3.22) elde edilir. Ayrıca (3.22) formülleri kullanılarak mutlak değerce yeterince büyük ρ'lar için $y_k(x,\rho)$ $(k = 1,2,\ldots,n)$ fonksiyonlarının lineer bağımsız olduğu kolayca görülür.

(3.15) denkleminin (3.23)'ü sağlayan $\{y_k(x,\rho)\}_{k=1}^{k=n}$ çözümlerinin varlığını gösterirsek Teorem 3.3.4.1'in ispatı bitmiş olur. Bunun için keyfi seçilmiş (ρ'dan bağımsız) c'_j sayıları için (3.15) denkleminin çözümünün varlığını göstermeliyiz.

(3.19) denklemi $(c_1,c_2,\ldots,c_n) \to (c'_1,c'_2,\ldots,c'_n)$ biçiminde bir lineer dönüşüm oluşturur (Hatırlatalım ki (3.19)'un sağ tarafında y ve buna bağlı olarak $m_\xi(y)$ lineer olarak $c_1,c_2,\ldots,c_n$'lere bağlıdır). Bu yüzden $|\rho|$'nun büyük değerlerinde (3.19) ile belirlenen matris dönüşümünün determinantının sıfırdan farklı olduğunu göstermek yeterlidir $(\rho \in T)$. Bu sayede (3.19) denklemini keyfi belirlenmiş c'_j sayıları için çözüp c_j sayılarını elde edebiliriz. (3.15)'in y çözümü (yani bulunan c_j sayılarına karşılık gelen (3.18)'in çözümü) aranan çözüm olacaktır.

Varsayalım ki $\rho \in T$ için (3.19) dönüşümünün determinantı sıfırdır. O halde $c'_1 = c'_2 = \cdots = c'_n = 0$ için en az biri sıfır olmayan $c_1,c_2,\ldots,c_n$ çözümü vardır. Bu çözüme karşılık gelen y fonksiyonu aynı zamanda

$$y = \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_0^x K_1(x,\xi,\rho)\,m_\xi(y)\,d\xi - \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_x^1 K_2(x,\xi,\rho)\,m_\xi(y)\,d\xi \tag{3.29}$$

denkleminin de sıfırdan farklı çözümüdür. (3.29) denklemi (3.20) denkleminde $c_1' = c_2' = \cdots = c_n' = 0$ yazılarak elde edilmiştir. Yeterince büyük $|\rho|$'lar için bunun imkansız olduğunu göstereceğiz. (3.29) denkleminin $(n-1)$. mertebeye kadar türevini alıp

$$z_\nu = \frac{d^\nu y}{dx^\nu}\left(\rho^\nu e^{\rho\omega_k x}\right)^{-1} \quad (\nu = 0,1,2,\ldots,n-1)$$

yazarsak z_ν fonksiyonları için

$$\begin{aligned} z_\nu(x,\rho) &= \frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_0^x \rho^{-\nu} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \frac{\partial^\nu K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} \times \\ &\left\{\rho^{n-2} p_2(\xi) z_{k,n-2}(\xi,\rho) + \cdots + p_n(\xi) z_{k,0}(\xi,\rho)\right\} d\xi \\ &-\frac{1}{n\rho^{n-1}}\int_x^1 \rho^{-\nu} e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \frac{\partial^\nu K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^\nu} \times \\ &\left\{\rho^{n-2} p_2(\xi) z_{k,n-2}(\xi,\rho) + \cdots + p_n(\xi) z_{k,0}(\xi,\rho)\right\} d\xi \end{aligned} \tag{3.30}$$

eşitliklerini elde ederiz.

$$m(\rho) = \max_{\substack{0\le\nu\le n-1 \\ 0\le x\le 1}} |z_\nu(x,\rho)|$$

olsun. (3.30)'un sağ tarafında Lemma 3.3.4.2'yi kullanırsak

$$\begin{aligned} |z_\nu(x,\rho)| &\le \frac{m(\rho)}{n|\rho|}.C.k\int_0^x \left\{|p_2| + \cdots + \frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right\} d\xi \\ &+\frac{m(\rho)}{n|\rho|}.C.(n-k)\int_x^1 \left\{|p_2| + \cdots + \frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right\} d\xi \le +\frac{m(\rho)}{|\rho|} C\int_0^1 \left\{|p_2| + \cdots + \frac{|p_n|}{|\rho|^{n-2}}\right\} d\xi \end{aligned}$$

elde ederiz. Eşitliğin sağ tarafı x'e ve ν'ye bağlı olmadığından sol taraftan maksimum alınarak

$$m(\rho) \le m(\rho)\frac{C_1}{|\rho|}$$

bulunur. Burada C_1 bir sabittir.

$|\rho| > C_1$ için $m(\rho) = 0$ olmak zorundadır. Buradan $z_\nu(x,\rho) \equiv 0$ yani $y \equiv 0$ elde edilir.

Teorem 3.3.4.1'in ispatı bitti.

3.3.5. Sınır Koşullarının Normalleştirilmesi

Verilen bir lineer diferansiyel operatörün sınır koşullarının lineer kombinasyonlarını kullanarak farklı $U_\nu(y)$ $\left(\nu=\overline{1,n}\right)$ sınır koşulları elde etmek istiyoruz. Bir $U(y)$ sınır koşulunda $y_0^{(k)}$ veya $y_1^{(k)}$ açıkça bulunuyor fakat $\forall \nu > k$ için $y_0^{(\nu)}$ ve $y_1^{(\nu)}$ bulunmuyor ise $U(y)$ sınır koşuluna k mertebeli denir. Varsayalım ki $U_\nu(y)$ sınır koşulu $n-1$ mertebelidir (eğer varsa). Yerlerini değiştirerek ve sabitle çarparak bir diğer sınır koşuluna eklersek, yani sınır koşullarının oluşturduğu $n\times 2n$ tipindeki matriste elementer satır işlemleri yaparsak, mertebesi $n-1$ olan en fazla iki sınır koşulu kalır. Geriye kalanların mertebesi $n-2$ veya daha küçüktür. Bu yöntemi devam ettirirsek önceki ikisi dışında mertebesi $n-2$ olan en fazla 2 tane sınır koşulu kalır. Bu 4 sınır koşulu dışındaki sınır koşullarının mertebesi $n-3$ veya daha küçüktür. Bu yöntem mümkün olduğunca böyle devam ettirilir. Yani elementer satır işlemleri mümkün olduğunca ilerletilir. Sonuçta elde edilen sınır koşullarına normalleştirilmiş sınır koşulları, bu yönteme ise sınır koşullarının normalleştirilmesi denir. Verilen sınır koşullarının normalleştirilmesiyle elde edilen sınır koşulları en baştaki sınır koşullarına denktir. Yani her iki sınır koşulları sistemini sağlayan y fonksiyonları aynıdır. Bu yönteme göre bir normalleştirilmiş sınır koşulları sistemi

$$U_\nu(y)\equiv U_{\nu 0}(y)+U_{\nu 1}(y)=0 \tag{3.31}$$

biçiminde olmalıdır. Burada

$$\begin{aligned} U_{\nu 0}(y)&=\alpha_\nu y_0^{(k_\nu)}+\sum_{j=0}^{k_\nu-1}\alpha_{\nu j}y_0^{(j)},\\ U_{\nu 1}(y)&=\beta_\nu y_1^{(k_\nu)}+\sum_{j=0}^{k_\nu-1}\beta_{\nu j}y_1^{(j)}, \end{aligned} \tag{3.32}$$

$n-1\ge k_1\ge k_2\ge\cdots\ge k_n\ge 0$, $k_{\nu+2}<k_\nu$ ve $\forall\nu=\overline{1,n}$ için $\alpha_\nu\ne 0$ veya $\beta_\nu\ne 0$'dır.

3.3.6. Regüler Sınır Koşulları

Sabitlenmiş bir S_k bölgesini ele alalım. $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sayılarını $\forall \rho \in S_k$ için

$$\mathrm{Re}(\rho\omega_1) \le \mathrm{Re}(\rho\omega_2) \le \cdots \le \mathrm{Re}(\rho\omega_n)$$

koşulunu sağlayacak biçimde sıralayalım.

(3.32) ile tanımlı sınır koşullarını göz önüne alalım. Regüler sınır koşulları n'in tek ve çift olma durumuna göre ayrı ayrı tanımlanır:

a) n tek olsun. $n = 2\mu - 1$.

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \beta_2\omega_n^{k_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

eşitliğiyle verilen θ_0 ve θ_1 sayıları sıfırdan farklı ise (3.31)'de verilen normalleştirilmiş sınır koşullarına regülerdir denir.

b) n çift olsun. $n = 2\mu$.

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1\omega_1^{k_1} & \cdots & \alpha_1\omega_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1)\omega_\mu^{k_1} & \left(\alpha_1 + \frac{1}{s}\beta_1\right)\omega_{\mu+1}^{k_1} & \beta_1\omega_{\mu+2}^{k_1} & \cdots & \beta_1\omega_n^{k_1} \\ \alpha_2\omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2\omega_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2)\omega_\mu^{k_2} & \left(\alpha_2 + \frac{1}{s}\beta_2\right)\omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2\omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \beta_2\omega_n^{k_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n\omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n\omega_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n)\omega_\mu^{k_n} & \left(\alpha_n + \frac{1}{s}\beta_n\right)\omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n\omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \beta_n\omega_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

eşitliğiyle verilen θ_{-1} ve θ_1 sayıları sıfırdan farklı ise (3.31)'de verilen normalleştirilmiş sınır koşullarına regülerdir denir. Sınır koşullarının regüler olduğu durumda $\theta_0^2 \neq 4\theta_{-1}\theta_1$ ise (3.31) sınır koşullarına güçlü regülerdir denir.

Belirtelim ki sınır koşullarının regülerliği genel bir kavram iken güçlü regülerliği sadece çift mertebeli operatörler için geçerli olan bir kavramdır. Gösterilebilir ki sınır koşullarının regülerliği ve güçlü regülerliği S_k bölgesinin seçiminden bağımsızdır.

3.3.7. Periyodik ve Antiperiyodik Sınır Koşulları

$$U_\nu(y) \equiv y^{(\nu)}(1) - (-1)^\sigma y^{(\nu)}(0) = y_1^{(\nu)} - (-1)^\sigma y_0^{(\nu)} = 0 \qquad \left(\nu = \overline{0, n-1}\right) \qquad \text{olsun.}$$

$U_\nu(y)$ $\left(\nu = \overline{0, n-1}\right)$ sınır koşullarına $\sigma = 0$ ve $\sigma = 1$ durumlarında sırasıyla periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları denir. Şimdi periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarının regülerliğini ve güçlü regülerliğini inceleyelim. Belirtelim ki periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları normalleştirilmiştir. S_k belirlenmiş bir bölge olsun ve $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ (3.13) eşitsizliğini sağlayacak sırada dizilsin.

a) n tek olsun. $n = 2\mu - 1$.

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \left(1-(-1)^\sigma s\right) & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \cdots & \omega_{\mu-1} & \left(1-(-1)^\sigma s\right)\omega_\mu & \omega_{\mu+1} & \cdots & \omega_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{\mu-1}^{n-1} & \left(1-(-1)^\sigma s\right)\omega_\mu^{n-1} & \omega_{\mu+1}^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$= C(-1)^{(\sigma+1)(\mu-1)}\left(1-(-1)^\sigma s\right).$$

Burada C, $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sayılarının Vandermonde determinantıdır. $\omega_1, \omega_2, \ldots, \omega_n$ sayıları birbirinden farklı olduğundan $C \neq 0$'dır. Görüldüğü gibi, n tek sayı olduğunda periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları regülerdir.

b) n çift olsun. $n = 2\mu$.

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =$$

$$\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \left(1-(-1)^\sigma s\right) & \left(1-\frac{(-1)^\sigma}{s}\right) & 1 & \cdots & 1 \\ \omega_1 & \cdots & \omega_{\mu-1} & \left(1-(-1)^\sigma s\right)\omega_\mu & \left(1-\frac{(-1)^\sigma}{s}\right)\omega_{\mu+1} & \omega_{\mu+2} & \cdots & \omega_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \omega_1^{n-1} & \cdots & \omega_{\mu-1}^{n-1} & \left(1-(-1)^\sigma s\right)\omega_\mu^{n-1} & \left(1-\frac{(-1)^\sigma}{s}\right)\omega_{\mu+1}^{n-1} & \omega_{\mu+2}^{n-1} & \cdots & \omega_n^{n-1} \end{vmatrix}$$

$$=C\left(-1\right)^{(\sigma+1)(\mu-1)}\left(1-\left(-1\right)^{\sigma}s\right)\left(1-\frac{\left(-1\right)^{\sigma}}{s}\right).$$

n çift sayı olduğunda periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları regülerdir fakat $\theta_0^2=4\theta_{-1}\theta_1$ olduğundan güçlü regüler değildir.

3.3.8. Özdeğerlerin Asimptotik Davranışları

Teorem 3.3.8.1 [29]. (3.11) diferansiyel ifadesi ve (3.31) - (3.32) regüler sınır koşulları ile tanımlı n mertebeli bir lineer diferansiyel operatörün sayılabilir sayıda özdeğeri vardır ve bu özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahiptir:

(*a*) n bir tek sayı ve $n=4\nu-1$ olsun. Bu durumda özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahip iki dizi oluşturur:

$$\lambda_k'=\left(2k\pi i\right)^n\left\{1+\frac{n\ln_0\xi^{(0)}}{2k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$\lambda_k''=\left(-2k\pi i\right)^n\left\{1-\frac{n\ln_0\xi^{(1)}}{2k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$\left(k=N,N+1,\ldots\right).$$

(*b*) n bir tek sayı ve $n=4\nu+1$ olsun. Bu durumda özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahip iki dizi oluşturur:

$$\lambda_k'=\left(-2k\pi in\right)^n\left\{1-\frac{n\ln_0\xi^{(0)}}{2k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$\lambda_k''=\left(2k\pi in\right)^n\left\{1+\frac{n\ln_0\xi^{(1)}}{2k\pi i}+O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$\left(k=N,N+1,\ldots\right).$$

Burada $\xi^{(i)}\left(i=0,1\right)$ sayısı S_i bölgesi için elde edilen $\theta_1\xi+\theta_0=0$ denkleminin kökü ve N yeterince büyük bir doğal sayıdır. Ayrıca $\ln_0\xi$ fonksiyonu doğal logaritma fonksiyonunun belirlenmiş herhangi bir dalıdır.

(*c*) n bir çift sayı $\left(n=2\mu\right)$ olsun. Varsayalım ki sınır koşulları güçlü regülerdir. Bu durumda özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahip iki dizi oluşturur:

$$\lambda_k' = (-1)^{\mu}(2k\pi)^{2\mu}\left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$
$$\lambda_k'' = (-1)^{\mu}(2k\pi)^{2\mu}\left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$
$$(k = N, N+1, \ldots).$$

Burada ξ' ve ξ'' sayıları S_0 bölgesi için elde edilen

$$\theta_1 \xi^2 + \theta_0 \xi + \theta_{-1} = 0 \tag{3.33}$$

denkleminin kökleridir.

Sınır koşulları güçlü regüler olduğundan bu kökler birbirinden farklıdır. Dolayısıyla bu durumda $\{\lambda_k'\}$ ve $\{\lambda_k''\}$ dizileri için verilen asimptotik formüller birbirinden farklıdır. Formüllerdeki $\mp$ işareti $n = 4\nu + 2$ veya $n = 4\nu$ olmasına göre değişir.

(*d*) n bir çift sayı $(n = 2\mu)$ olsun. Varsayalım ki sınır koşulları güçlü regüler değildir. Bu durumda özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahip iki dizi oluşturur:

$$\lambda_k' = (-1)^{\mu}(2k\pi)^{2\mu}\left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right\},$$
$$\lambda_k'' = (-1)^{\mu}(2k\pi)^{2\mu}\left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right\},$$
$$(k = N, N+1, \ldots).$$

Sınır koşulları güçlü regüler olmadığından açıktır ki (3.33) denkleminin bir tek ξ kökü vardır ve bu kök çift katlıdır. Formüldeki ξ sayısı sözü edilen çift katlı köktür.

İlk üç durumda mutlak değerce yeterince büyük özdeğerler basittir. Fakat dördüncü durumda mutlak değerce yeterince büyük özdeğerler ya basittir ya da çift katlıdır.

3.3.9. Özfonksiyonların Asimptotik Davranışları

$y_1, y_2, \ldots, y_n$ fonksiyonları belirli bir T bölgesinde $l(y) + \rho^n y = 0$ denkleminin (3.22) bağıntılarını sağlayan lineer bağımsız çözümleri olsunlar. $\lambda = -\rho^n$ $(\rho \in T)$ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon

$$y = c_1 y_1 + c_2 y_2 + \cdots + c_n y_n$$

biçiminde yazılabilir. Burada c_j ’ler

$$c_1 U_\nu\left(y_1\right) + c_2 U_\nu\left(y_2\right) + \cdots + c_n U_\nu\left(y_n\right) = 0 \quad \left(\nu = \overline{1,n}\right)$$

homojen sisteminin en az biri sıfır olmayan çözümleridir.

Basitlik için sadece basit özdeğerleri inceleyelim. λ basit bir özdeğer ise

$$\begin{pmatrix} U_1\left(y_1\right) & U_1\left(y_2\right) & \cdots & U_1\left(y_n\right) \\ U_2\left(y_1\right) & U_2\left(y_2\right) & \cdots & U_2\left(y_n\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n\left(y_1\right) & U_n\left(y_2\right) & \cdots & U_n\left(y_n\right) \end{pmatrix}$$

matrisinin rankı $n-1$’dir. O halde bu matristeki $\left(n-1\right)\times\left(n-1\right)$ tipindeki determinantlardan en az biri sıfırdan farklıdır. Varsayalım ki birinci satırın minörlerinden en az biri sıfırdan farklıdır (Herhangi bir $k.$ satırın minörlerinden en az biri sıfırdan farklı olduğu durumda birinci sınır koşulu ile $k.$ sınır koşulu yer değiştirilebilir). Dolayısıyla,

$$y = \begin{vmatrix} y_1 & y_2 & \cdots & y_n \\ U_2\left(y_1\right) & U_2\left(y_2\right) & \cdots & U_2\left(y_n\right) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n\left(y_1\right) & U_n\left(y_2\right) & \cdots & U_n\left(y_n\right) \end{vmatrix}$$

λ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyondur.

n bir tek doğal sayı, $n = 2\mu - 1$, $\left\{\lambda_k'\right\}$ ve $\left\{\lambda_k''\right\}$ Teorem 3.3.8.1.a ve Teorem 3.3.8.1.b’de verilen özdeğerler, $y_{k,1}\left(x\right)$ ve $y_{k,2}\left(x\right)$ sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar, k yeterince büyük bir doğal sayı olsun. Bu takdirde $y_{k,1}\left(x\right)$ ve $y_{k,2}\left(x\right)$ fonksiyonları aşağıdaki asimptotik formüllere sahiptir:

$$y_{k,i}\left(x\right) = \left(-1\right)^{\mu-1} e^{\omega_\mu \rho_{k,i} x} \left\{ \begin{vmatrix} \alpha_2 \omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & \beta_2 \omega_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \beta_2 \omega_n^{k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n \omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n \omega_{\mu-1}^{k_n} & \beta_n \omega_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \beta_n \omega_n^{k_n} \end{vmatrix} + O\left(k^{-1}\right) \right\}.$$

Burada $\rho_{k,1}$ ve $\rho_{k,2}$ sırasıyla $\lambda_k' = -\rho^n$ ve $\lambda_k'' = -\rho^n$ eşitlikleriyle elde edilen T bölgesinin elemanları, α_j, β_j, k_j $\left(j = \overline{2,n}\right)$ ise (3.31) eşitliğiyle verilen sayılardır.

n bir çift doğal sayı, $n = 2\mu$, $\{\lambda'_k\}$ ve $\{\lambda''_k\}$ Teorem 3.3.8.1.c ve Teorem 3.3.8.1.d'de verilen özdeğerler, $y_{k,1}(x)$ ve $y_{k,2}(x)$ sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar, k yeterince büyük bir doğal sayı olsun. Bu takdirde $y_{k,1}(x)$ ve $y_{k,2}(x)$ fonksiyonları

$$y_{k,1}(x) = (-1)^{\mu-1} e^{\omega_\mu \rho_{k,1} x} \times$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} \alpha_2 \omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & \left(\alpha_2 + \frac{1}{\xi'} \beta_2 \right) \omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2 \omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \beta_2 \omega_n^{k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n \omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n \omega_{\mu-1}^{k_n} & \left(\alpha_n + \frac{1}{\xi'} \beta_n \right) \omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n \omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \beta_n \omega_n^{k_n} \end{vmatrix} + O\left(k^{-1}\right) \right\}$$

$$+(-1)^{\mu} e^{-\omega_\mu \rho_{k,1} x} \times$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} \alpha_2 \omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & \left(\alpha_2 + \xi' \beta_2 \right) \omega_{\mu}^{k_2} & \beta_2 \omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \beta_2 \omega_n^{k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n \omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n \omega_{\mu-1}^{k_n} & \left(\alpha_n + \xi' \beta_n \right) \omega_{\mu}^{k_n} & \beta_n \omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \beta_n \omega_n^{k_n} \end{vmatrix} + O\left(k^{-1}\right) \right\}$$

ve

$$y_{k,2}(x) = (-1)^{\mu-1} e^{\omega_\mu \rho_{k,2} x} \times$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} \alpha_2 \omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & \left(\alpha_2 + \frac{1}{\xi''} \beta_2 \right) \omega_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2 \omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \beta_2 \omega_n^{k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n \omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n \omega_{\mu-1}^{k_n} & \left(\alpha_n + \frac{1}{\xi''} \beta_n \right) \omega_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n \omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \beta_n \omega_n^{k_n} \end{vmatrix} + O\left(k^{-1}\right) \right\}$$

$$+(-1)^{\mu} e^{-\omega_\mu \rho_{k,2} x} \times$$

$$\left\{ \begin{vmatrix} \alpha_2 \omega_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2 \omega_{\mu-1}^{k_2} & \left(\alpha_2 + \xi'' \beta_2 \right) \omega_{\mu}^{k_2} & \beta_2 \omega_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \beta_2 \omega_n^{k_2} \\ \vdots & \ddots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \alpha_n \omega_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n \omega_{\mu-1}^{k_n} & \left(\alpha_n + \xi'' \beta_n \right) \omega_{\mu}^{k_n} & \beta_n \omega_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \beta_n \omega_n^{k_n} \end{vmatrix} + O\left(k^{-1}\right) \right\},$$

biçimindeki asimptotik formüllere sahiptir, burada ξ' ve ξ'' sayıları (3.33) denkleminin köküdür. Bu durumda $n = 2$ olduğunda asimptotik formüller aşağıdaki halini alır:

$$y_{k,1}(x) = (-i)^{k_2} e^{i\rho_{k,1}x}\left(\alpha_2 + \frac{1}{\xi'}\beta_2 + O\left(k^{-1}\right)\right) - i^{k_2} e^{-i\rho_{k,1}x}\left(\alpha_2 + \xi'\beta_2 + O\left(k^{-1}\right)\right),$$

$$y_{k,2}(x) = (-i)^{k_2} e^{i\rho_{k,2}x}\left(\alpha_2 + \frac{1}{\xi''}\beta_2 + O\left(k^{-1}\right)\right) - i^{k_2} e^{-i\rho_{k,2}x}\left(\alpha_2 + \xi''\beta_2 + O\left(k^{-1}\right)\right).$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

4.1. PROBLEMİN İFADESİ

Bundan sonra, L ile

$$l(y)=y^{(iv)}+p_2(x)y''+p_1(x)y'+p_0(x)y \quad (0<x<1), \tag{4.1}$$

diferansiyel ifadesi ve

$$\begin{gathered} U_s(y)\equiv y^{(s)}(1)-(-1)^{\sigma}y^{(s)}(0)+\sum_{l=0}^{s-1}\alpha_{s,l}\,y^{(l)}(0)=0, \quad \left(s=\overline{1,3}\right) \\ U_0(y)\equiv y(1)-(-1)^{\sigma}y(0)=0, \end{gathered} \tag{4.2}$$

sınır koşullarının tanımladığı diferansiyel operatörü gösterelim; burada, $p_j(x)\in L_1(0,1)$ $(j=0,1,2)$ kompleks değerli fonksiyonlar, $\alpha_{s,l}$ $\left(s=1,2,3,\ l=\overline{0,s-1}\right)$ keyfi kompleks sabitler ve $\sigma=0,1$'dir.

$p_j(x)$ $(j=0,1,2)$ fonksiyonları ve $\alpha_{s,l}$ $\left(s=1,2,3,\ l=\overline{0,s-1}\right)$ katsayıları üzerine uygun koşullar koyarak $Ly=\lambda y$ spektral probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edeceğiz ve kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzaylarında tabanlığını inceleyeceğiz.

4.2. $\alpha_{2,1}\neq\alpha_{3,2}+\alpha_{1,0}$ DURUMUNDA PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bu kısımda $\alpha_{2,1}\neq\alpha_{3,2}+\alpha_{1,0}$ durumunda problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edilecek, $p_j(x)\in W_1^j(0,1)$ koşulu altında kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında taban oluşturduğu ispatlanacak ve bu tabanın $p=2$ durumunda koşulsuz olduğu gösterilecektir.

$$c_0=\int_0^1 p_2(\xi)\,d\xi \tag{4.3}$$

$$d_n=\int_0^1 p_2(\xi)e^{2(2n-\sigma)\pi i\xi}d\xi, \quad d_{-n}=\int_0^1 p_2(\xi)e^{-2(2n-\sigma)\pi i\xi}d\xi, \tag{4.4}$$

$$\varepsilon_n = |d_n| + |d_{-n}| + n^{-1} \tag{4.5}$$

olsun.

$\alpha_{2,1} \neq \alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}$ durumunda problem ile ilgili iddialar aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.2.1. $p_j(x) \in L_1(0,1)$ $(j = 0,1,2)$ her hangi kompleks değerli fonksiyonlar ve $\alpha_{2,1} \neq \alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}$ olsun. O halde (4.1) - (4.2) diferansiyel operatörünün sonlu sayıdaki hariç tüm özdeğerleri basittir ve $\{\lambda_{n,1}\}_{n=1}^{n=\infty}$, $\{\lambda_{n,2}\}_{n=1}^{n=\infty}$ gibi iki sonsuz dizi oluşturur. Ayrıca, yeterince büyük n sayıları için

$$\begin{aligned} \lambda_{n+n_1,1} &= \left((2n-\sigma)\pi\right)^4 \left\{1 + \frac{2(-1)^{\sigma}\alpha_{2,1} - c_0}{\left((2n-\sigma)\pi\right)^2} + O\left(n^{-2}\varepsilon_n\right)\right\}, \\ \lambda_{n+n_2,2} &= \left((2n-\sigma)\pi\right)^4 \left\{1 + \frac{2(-1)^{\sigma}\left(\alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}\right) - c_0}{\left((2n-\sigma)\pi\right)^2} + O\left(n^{-2}\varepsilon_n\right)\right\}. \end{aligned} \tag{4.6}$$

asimptotik formülleri doğrudur; burada, n_1 ve n_2 belirli doğal sayılardır. Bunun yanı sıra, yeterince büyük n doğal sayıları için $\lambda_{n,1}$ ve $\lambda_{n,2}$ özdeğerlerine karşılık gelen $u_{n,1}(x)$ ve $u_{n,2}(x)$ özfonksiyonları aşağıdaki asimptotik gösterimlere sahiptir:

$$\begin{aligned} u_{n+n_1,1}(x) &= \sqrt{2}\sin(2n-\sigma)\pi x + O(\varepsilon_n), \\ u_{n+n_2,2}(x) &= \sqrt{2}\cos(2n-\sigma)\pi x + O(\varepsilon_n). \end{aligned} \tag{4.7}$$

Teorem 4.2.2. $p_j(x) \in W_1^j(0,1)$ keyfi kompleks değerli fonksiyonlar ve $\alpha_{2,1} \neq \alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}$ olsun. O halde (4.1) - (4.2) diferansiyel operatörünün kök fonksiyonlar sistemi $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayının tabanını oluşturur ve bu taban $p = 2$ için koşulsuzdur.

Sonuç 4.2.1. Teorem 4.2.2'nin tüm koşulları sağlansın ve n_1, n_2 Teorem 4.2.1'de verilen tamsayılar olsun. Bu takdirde $n_1 + n_2 = 1 - \sigma$'dır ve $n_1 = 1 - \sigma$, $n_2 = 0$ seçebiliriz.

4.2.1. Bazı Yardımcı Sonuçlar

$$S_0 = \left\{ \rho = re^{i\theta} \mid r > 0,\, 0 \le \theta \le \frac{\pi}{4} \right\} \tag{4.8}$$

olsun (bkz: (3.12)). $\omega_k \ \left(k=\overline{1,4}\right)$ ile $\omega^4 + 1 = 0$ denkleminin farklı 4 kökünü gösterelim. (3.13)'den görülür ki, $\omega_k \ \left(k=\overline{1,4}\right)$ sayıları

$$\operatorname{Re}\left(\rho\omega_1\right) \le \operatorname{Re}\left(\rho\omega_2\right) \le \operatorname{Re}\left(\rho\omega_3\right) \le \operatorname{Re}\left(\rho\omega_4\right) \quad \left(\forall \rho \in S_0\right) \tag{4.9}$$

eşitsizliğini sağlayacak biçimde sıralanabilir.

Bundan sonra $\omega_k \ \left(k=\overline{1,4}\right)$ sayılarının (4.9) eşitsizliğini sağlayacak biçimde sıralandığını kabul edeceğiz. O halde

$$\omega_1 = e^{3\pi i/4}, \quad \omega_2 = e^{-3\pi i/4}, \quad \omega_3 = e^{\pi i/4}, \quad \omega_4 = e^{-\pi i/4} \tag{4.10}$$

tür ve buradan da

$$\omega_1 = -\omega_4, \quad \omega_2 = -\omega_3 \tag{4.11}$$

elde edilir (bkz: [29]).

Lemma 4.2.1.1. Her bir $\rho \in S_0$,

$$\operatorname{Re}\left(\rho\omega_1\right) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}|\rho|, \quad \operatorname{Re}\left(\rho\omega_4\right) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}|\rho| \tag{4.12}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

İspat: (4.12)'deki ilk eşitsizliği ispatlamak yeterlidir. (4.11)'den ikinci eşitsizliğin de doğru olduğu görülür. $\rho \in S_0$ olduğundan $\rho = |\rho| e^{\theta\pi i/4} \ \left(0 \le \theta \le 1\right)$ olarak yazılabilir. O halde (4.10)'dan

$$\operatorname{Re}\left(\rho w_1\right) = |\rho| \operatorname{Re}\left(e^{\frac{3+\theta}{4}\pi i}\right) = -|\rho| \cos\frac{1-\theta}{4}\pi \le -\frac{\sqrt{2}}{2}|\rho|$$

elde edilir.

Lemma 4.2.1.1'in ispatı bitti.

S_0 bölgesini $-c$ kadar ötelersek

$$T_0 = \{\rho - c \mid \rho \in S_0\} \tag{4.13}$$

bölgesini elde ederiz. T_0 bölgesi için (4.9) ve (4.12) eşitsizlikleri aşağıdaki biçimini alır:

$$\operatorname{Re}\big((\rho+c)\omega_1\big) \le \operatorname{Re}\big((\rho+c)\omega_2\big) \le \operatorname{Re}\big((\rho+c)\omega_3\big) \le \operatorname{Re}\big((\rho+c)\omega_4\big), \tag{4.14}$$

$$\operatorname{Re}\big((\rho+c)\omega_1\big) \le -\frac{\sqrt{2}}{2}|\rho+c|, \quad \operatorname{Re}\big((\rho+c)\omega_4\big) \ge \frac{\sqrt{2}}{2}|\rho+c|. \tag{4.15}$$

Teorem 3.3.4.1'den biliniyor ki

$$l(y) + \rho^4 y = 0 \tag{4.16}$$

denklemi T_0 bölgesinde analitik $y_k(x,\rho)$ $\left(k = \overline{1,4}\right)$ lineer bağımsız çözümlerine sahiptir. Ayrıca $|\rho|$ 'nun yeterince büyük değerlerinde bu çözümler ve türevleri

$$\begin{aligned} \frac{d^s y_k}{dx^s} &= \rho^s w_k^s e^{\rho\omega_k x} + \frac{1}{4\rho^3}\int_0^x \frac{\partial^s K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^s} M_\xi(y_k)\, d\xi \\ &\quad - \frac{1}{4\rho^3}\int_x^1 \frac{\partial^s K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^s} M_\xi(y_k)\, d\xi, \quad \left(\nu = \overline{0,3}\right) \end{aligned} \tag{4.17}$$

denklemini sağlar; burada

$$K_1(x,\xi,\rho) = \sum_{\alpha=1}^{k} \omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)}, \qquad K_2(x,\xi,\rho) = \sum_{\alpha=k+1}^{4} \omega_\alpha e^{\rho\omega_\alpha(x-\xi)} \tag{4.18}$$

ve

$$M_x(y) = p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y \tag{4.19}$$

dir. (bkz: (3.15), (3.16), (3.21), (3.24)). (3.25)'ten

$$\frac{d^s y_k}{dx^s} = \rho^s e^{\rho\omega_k x} z_{k,s}(x,\rho) \quad \left(s = \overline{0,3}, k = \overline{1,4}\right) \tag{4.20}$$

yazılabilir. (3.28) ile

$$z_{k,s}(x,\rho) = \omega_k^s + O\left(\rho^{-1}\right) \quad \left(s = \overline{0,3}, k = \overline{1,4}\right) \tag{4.21}$$

elde edilir. (4.17), (4.19) ve (4.20)'den

$$\begin{aligned} z_{k,s}(x,\rho) &= \omega_k^s + \frac{1}{4\rho}\int_0^x e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{-s} \frac{\partial^s K_1(x,\xi,\rho)}{\partial x^s} \sum_{j=0}^{2} \frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\, d\xi \\ &\quad - \frac{1}{4\rho}\int_x^1 e^{-\rho\omega_k(x-\xi)} \rho^{-s} \frac{\partial^s K_2(x,\xi,\rho)}{\partial x^s} \sum_{j=0}^{2} \frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\, d\xi \end{aligned}$$

sağlanır. (4.18)'deki $K_1(x,\xi,\rho)$ ve $K_2(x,\xi,\rho)$ değerlerini yerine yazarsak

$$\begin{aligned} z_{k,s}(x,\rho) &= \omega_k^s + \frac{\omega_k^{s+1}}{4\rho}\int_0^x \sum_{j=0}^{2} \frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi \\ &+ \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=1}^{k-1}\omega_\alpha^{s+1}\int_0^x e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)} \sum_{j=0}^{2}\frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi \\ &- \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=k+1}^{4}\omega_\alpha^{s+1}\int_x^1 e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)} \sum_{j=0}^{2}\frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi \end{aligned} \tag{4.22}$$

elde ederiz. Belirtelim ki (4.14) ile

$$\operatorname{Re}\left(\rho\left(\omega_\alpha-\omega_\beta\right)\right) = \operatorname{Re}\left((\rho+c)\left(\omega_\alpha-\omega_\beta\right)\right) - \operatorname{Re}\left(c\left(\omega_\alpha-\omega_\beta\right)\right) \le 2|c|$$

sağlanır; burada $1 \le \alpha \le \beta \le 4$'tür. Buradan ve (4.21)'den

$$\begin{aligned} &\int_0^x p_j(\xi) z_{k,j}(\xi,\rho) e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)} d\xi = O(1) \quad (\alpha \le k), \\ &\int_x^1 p_j(\xi) z_{k,j}(\xi,\rho) e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)} d\xi = O(1) \quad (\alpha \ge k) \end{aligned} \tag{4.23}$$

elde edilir; burada $k=\overline{1,4}$ ve $j=0,1,2$'dir. Buradan ve (4.22)'den kolayca

$$\begin{aligned} z_{k,s}(x,\rho) &= \omega_k^s + \frac{\omega_k^{s+1}}{4\rho}\int_0^x \sum_{j=1}^{2} \frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi \\ &+ \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=1}^{k-1}\omega_\alpha^{s+1}\int_0^x e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)} \sum_{j=1}^{2}\frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi \\ &- \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=k+1}^{4}\omega_\alpha^{s+1}\int_x^1 e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)} \sum_{j=1}^{2}\frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi + O\left(\rho^{-3}\right) \end{aligned}$$

olduğu görülür. Buradan,

$$\begin{aligned} z_{k,s}(0,\rho) &= \omega_k^s - \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=k+1}^{4}\omega_\alpha^{s+1} B_{\alpha,k}(\rho) + O\left(\rho^{-3}\right), \\ z_{k,s}(1,\rho) &= \omega_k^s + \frac{\omega_k^{s+1}}{4\rho}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho^{2-j}}\int_0^1 p_j(\xi) z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi \\ &+ \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=1}^{k-1}\omega_\alpha^{s+1} B_{\alpha,k}(\rho) + O\left(\rho^{-3}\right) \end{aligned} \tag{4.24}$$

elde edilir; burada

$$B_{\alpha,k}(\rho)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho^{2-j}}\int_0^1 p_j(\xi)z_{k,j}(\xi,\rho)e^{-\rho(\omega_\alpha-\omega_k)\xi}d\xi, & 1\le k<\alpha\le 4\\ \sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho^{2-j}}\int_0^1 p_j(\xi)z_{k,j}(\xi,\rho)e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(1-\xi)}d\xi, & 1\le \alpha<k\le 4\end{cases} \tag{4.25}$$

tür.

Lemma 4.2.1.2. $\operatorname{Re}\tau\le C_1=const$ bölgesinde her $f\in L_1(0,1)$ için

$$\int_0^1 f(\xi)e^{\tau\xi}d\xi=o(1)\quad \left(|\tau|\to+\infty\right), \tag{4.26}$$

$$\int_0^1 f(\xi)e^{\tau(1-\xi)}d\xi=o(1)\quad \left(|\tau|\to+\infty\right) \tag{4.27}$$

sağlanır.

İspat: (4.26)'yı ispatlayalım. (4.27) benzer biçimde ispatlanabilir.

$C^{(1)}[0,1]$ kümesinin $L_1(0,1)$'de yoğun olduğunu biliyoruz. O halde her $\varepsilon>0$ için

$$\|f-p_\varepsilon\|_1=\int_0^1\left|f(\xi)-p_\varepsilon(\xi)\right|d\xi<\varepsilon \tag{4.28}$$

olacak şekilde $p_\varepsilon(x)\in C^{(1)}[0,1]$ fonksiyonu vardır. Kısmi integrasyon yöntemi ile

$$\int_0^1 p_\varepsilon(\xi)e^{\tau\xi}d\xi=\frac{p_\varepsilon(1)e^{\tau}-p_\varepsilon(0)}{\tau}-\frac{1}{\tau}\int_0^1 p'(\xi)e^{\tau\xi}d\xi \tag{4.29}$$

olarak bulunur. $|\tau|\to\infty$ ve $\operatorname{Re}(\tau)\le C_1$ olduğunda $e^{\tau}=O(1)$ ve $\int_0^1 p'(\xi)e^{\tau\xi}d\xi=O(1)$ olduğundan (4.29)'dan

$$\lim_{|\tau|\to\infty}\int_0^1 p_\varepsilon(\xi)e^{\tau\xi}d\xi=0 \tag{4.30}$$

bulunur. Öte yandan (4.28)'den

$$\left|\int_0^1 f(\xi)e^{\tau\xi}d\xi\right| = \left|\int_0^1 \left(f(\xi)-p_\varepsilon(\xi)\right)e^{\tau\xi}d\xi + \int_0^1 p_\varepsilon(\xi)e^{\tau\xi}d\xi\right| \le$$

$$\le \int_0^1 \left|f(\xi)-p_\varepsilon(\xi)\right|e^{\tau\xi}d\xi + \left|\int_0^1 p_\varepsilon(\xi)e^{\tau\xi}d\xi\right| < \varepsilon + \left|\int_0^1 p_\varepsilon(\xi)e^{\tau\xi}d\xi\right|$$

elde edilir. Sonuncuya ve (4.30)'a göre

$$\overline{\lim_{|\tau|\to\infty}}\left|\int_0^1 f(\xi)e^{\tau\xi}d\xi\right| \le \varepsilon$$

olur. Buradan kolayca

$$\lim_{|\tau|\to\infty}\int_0^1 f(\xi)e^{\tau\xi}d\xi = 0$$

olduğu görülür.

Lemma 4.2.1.2'in ispatı bitti.

Bu lemmadan ve (4.21), (4.25) formüllerinden aşağıdaki elde edilir:

$$B_{\alpha,k}(\rho) = o(1) \qquad (\alpha \ne k). \tag{4.31}$$

(4.21), (4.24) ve (4.25) formülleri kullanılarak elde edilen direk hesaplamalar gösterir ki $s=\overline{0,3}$ için

$$\begin{aligned}
z_{2,s}(0,\rho) &= \omega_2^s - \frac{\omega_4^{s+1}}{4\rho}B_{4,2}(\rho) - \frac{(-1)^s\omega_2^s}{4\rho\omega_2}\int_0^1 p_2(\xi)e^{2\rho\omega_2\xi}d\xi + O\left(\rho^{-2}\right),\\
z_{3,s}(0,\rho) &= \omega_3^s - \frac{\omega_4^{s+1}}{4\rho}B_{4,3}(\rho) + O\left(\rho^{-2}\right),\\
z_{2,s}(1,\rho) &= \omega_2^s - \frac{\omega_2^s}{4\rho\omega_2}\int_0^1 p_2(\xi)d\xi + \frac{\omega_1^{s+1}}{4\rho}B_{1,2}(\rho) + O\left(\rho^{-2}\right),\\
z_{3,s}(1,\rho) &= \omega_3^s - \frac{\omega_3^s}{4\rho\omega_3}\int_0^1 p_2(\xi)d\xi + \frac{\omega_1^{s+1}}{4\rho}B_{1,3}(\rho)\\
&\quad + \frac{(-1)^s\omega_3^s}{4\rho\omega_3}\int_0^1 p_2(\xi)e^{-2\rho\omega_3(1-\xi)}d\xi + O\left(\rho^{-2}\right)
\end{aligned} \tag{4.32}$$

değerlendirmeleri doğrudur.

4.2.2. Teorem 4.2.1'in İspatı

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix} U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_0(y_1) & U_0(y_2) & U_0(y_3) & U_0(y_4) \end{vmatrix} \tag{4.33}$$

olsun; burada $y_k(x,\rho)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$ fonksiyonları (4.16) denkleminin lineer bağımsız çözümleridir. [29, II, 4.9]'dan biliniyor ki, T_0 bölgesinin $\rho=-c$ köşe noktası uygun biçimde seçilirse, (4.1) - (4.2) diferansiyel operatörünün mutlak değerce yeterince büyük özdeğerleri ρ

$$\Delta(\rho)=0 \tag{4.34}$$

denkleminin bir çözümü olmak üzere, $\lambda=-\rho^4$ formatındadır. Tersine böyle noktaların kümesi, sonlu tanesi hariç, (4.34) denkleminin T_0'daki tüm köklerini içerir.

(4.20) ile $s=\overline{0,3}$ ve $k=\overline{1,4}$ için

$$U_s(y_k)=\rho^s\left\{e^{\rho\omega_k}z_{k,s}(1,\rho)-(-1)^\sigma z_{k,s}(0,\rho)+\sum_{l=0}^{s-1}\frac{\alpha_{s,l}}{\rho^{s-l}}z_{k,l}(0,\rho)\right\} \tag{4.35}$$

elde edilir; burada $\alpha_{0,-1}=\alpha_{0,0}=0$'dır. (4.15)'e göre $e^{\rho\omega_1}$ eksponansiyel olarak 0'a, $e^{\rho\omega_4}$ ise eksponansiyel olarak sonsuza gider. O halde (4.21) ve (4.35)'ten

$$\begin{gathered} U_s(y_1)=-\rho^s\left\{(-1)^\sigma z_{1,s}(0,\rho)-\sum_{l=0}^{s-1}\frac{\alpha_{s,l}}{\rho^{s-l}}z_{1,l}(0,\rho)+O\left(\rho^{-3}\right)\right\}, \\ U_s(y_4)=\rho^s e^{\rho\omega_4}\left\{z_{4,s}(1,\rho)+O\left(\rho^{-3}\right)\right\} \end{gathered} \tag{4.36}$$

eşitlikleri doğrudur.

$$A_{s,k}(\rho)=\begin{cases} (-1)^\sigma z_{1,s}(0,\rho)-\sum\limits_{l=0}^{s-1}\dfrac{\alpha_{s,l}}{\rho^{s-l}}z_{1,l}(0,\rho), & k=1 \\ e^{\rho\omega_k}z_{k,s}(1,\rho)-(-1)^\sigma z_{k,s}(0,\rho)+\sum\limits_{l=0}^{s-1}\dfrac{\alpha_{s,l}}{\rho^{s-l}}z_{k,l}(0,\rho), & k=2,3 \\ z_{4,s}(1,\rho), & k=4 \end{cases} \tag{4.37}$$

olarak tanımlayalım. (4.35) - (4.37) formüllerinden

$$\begin{aligned} U_s(y_1) &= -\rho^s\left\{A_{s,1}(\rho)+O\left(\rho^{-3}\right)\right\}, \\ U_s(y_k) &= \rho^s A_{s,k}(\rho) \quad (k=2,3), \\ U_s(y_4) &= \rho^s e^{\rho\omega_4}\left\{A_{s,4}(\rho)+O\left(\rho^{-3}\right)\right\} \end{aligned} \tag{4.38}$$

elde ederiz. Bu eşitlikleri (4.34)'te yerine yazıp birinci, ikinci, üçüncü satırlardaki ρ^3, ρ^2, ρ ve son sütundaki $e^{\rho\omega_4}$ çarpanlarını sadeleştirirsek (4.34) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta_1(\rho)+O\left(\rho^{-3}\right)=0. \tag{4.39}$$

Burada

$$\Delta_1(\rho)\equiv\begin{vmatrix} A_{3,1}(\rho) & A_{3,2}(\rho) & A_{3,3}(\rho) & A_{3,4}(\rho) \\ A_{2,1}(\rho) & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & A_{2,4}(\rho) \\ A_{1,1}(\rho) & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & A_{1,4}(\rho) \\ A_{0,1}(\rho) & A_{0,2}(\rho) & A_{0,3}(\rho) & A_{0,4}(\rho) \end{vmatrix} \tag{4.40}$$

dur.

Teorem 3.3.8.1'deki (d) formüllerini kullanarak elde ederiz ki, ρ (4.34) veya (4.39) denkleminin bir kökü ise aşağıdaki formüller doğrudur:

$$e^{\rho\omega_2}-(-1)^\sigma=O\left(|\rho|^{-1/2}\right), \qquad e^{\rho\omega_3}-(-1)^\sigma=O\left(|\rho|^{-1/2}\right). \tag{4.41}$$

(4.21), (4.37) ve (4.41) bağıntılarından ve $s=\overline{0,3}$ ve $k=2,3$ için aşağıdaki formüller elde edilir:

$$A_{s,1}(\rho)=(-1)^\sigma\omega_1^s+O\left(\rho^{-1}\right), \quad A_{s,4}(\rho)=\omega_4^s+O\left(\rho^{-1}\right), \tag{4.42}$$

$$A_{s,k}(\rho)=\left(e^{\rho\omega_k}-(-1)^\sigma\right)\omega_k^s+O\left(\rho^{-1}\right), \quad A_{s,k}(\rho)=O\left(|\rho|^{-1/2}\right). \tag{4.43}$$

(4.42) - (4.43)'tan (4.39) denklemi aşağıdakine denktir:

$$\left(e^{\rho\omega_2}-(-1)^\sigma\right)\left(e^{\rho\omega_3}-(-1)^\sigma\right)W_0+O\left(|\rho|^{-3/2}\right)=0. \tag{4.44}$$

Burada,

$$W_0=(-1)^\sigma\begin{vmatrix} \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3 & \omega_4^3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \omega_4^2 \\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4 \\ 1 & 1 & 1 & 1 \end{vmatrix}=-16(-1)^\sigma \tag{4.45}$$

dır. $\omega_3 = -\omega_2$ ve $e^{\rho\omega_2} = O(1)$ olduğundan (4.44) denklemi aşağıdaki biçimde yazılabilir:

$$\left(e^{\rho\omega_2} - (-1)^{\sigma}\right)^2 + O\left(|\rho|^{-3/2}\right) = 0 .$$

Buradan kolayca

$$e^{\rho\omega_2} - (-1)^{\sigma} = O\left(|\rho|^{-3/4}\right), \qquad e^{\rho\omega_3} - (-1)^{\sigma} = O\left(|\rho|^{-3/4}\right) \tag{4.46}$$

elde edilir. (4.43) ve (4.46) ile $s = \overline{0,3}$ ve $k = 2,3$ için

$$A_{s,k}(\rho) = O\left(|\rho|^{-3/4}\right) \tag{4.47}$$

olduğu görülür. (4.40), (4.42) ve (4.47) kullanılarak (4.39) denkleminin

$$\Delta_2(\rho) + o\left(\rho^{-2}\right) = 0 \tag{4.48}$$

denklemine denk olduğu elde edilir; burada,

$$\Delta_2(\rho) = \begin{vmatrix} (-1)^{\sigma}\omega_1^3 & A_{3,2}(\rho) & A_{3,3}(\rho) & \omega_4^3 \\ (-1)^{\sigma}\omega_1^2 & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & \omega_4^2 \\ (-1)^{\sigma}\omega_1 & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & \omega_4 \\ (-1)^{\sigma} & A_{0,2}(\rho) & A_{0,3}(\rho) & 1 \end{vmatrix} \tag{4.49}$$

dir. (4.37)'ye göre $s = \overline{0,3}$ ve $k = 2,3$ için

$$A_{s,k}(\rho) = e^{\rho\omega_k} z_{k,s}(1,\rho) - (-1)^{\sigma} z_{k,s}(0,\rho) + \frac{\alpha_{s,s-1}}{\rho} z_{k,s-1}(0,\rho) + O\left(\rho^{-2}\right)$$

dir. Buradan ve (4.31) - (4.32) formüllerinden aşağıdaki değerlendirmeler yapılabilir:

$$A_{s,k}(\rho) = A_{s,k}^{(k)}(\rho) + B_{s,k}^{(k)}(\rho) + O\left(\rho^{-2}\right) \quad (k = 2,3); \tag{4.50}$$

burada

$$\begin{aligned} A_{s,2}^{(2)}(\rho) &= \omega_2^s \left\{ e^{\rho\omega_2}\left(1 - \frac{c_0}{4\rho\omega_2}\right) - (-1)^{\sigma}\left(1 - \frac{(-1)^s}{4\rho\omega_2}\gamma_2(\rho)\right) + \frac{\alpha_{s,s-1}}{\rho\omega_2} \right\}, \\ A_{s,3}^{(3)}(\rho) &= \omega_3^s \left\{ e^{\rho\omega_3}\left(1 - \frac{c_0}{4\rho\omega_3} + \frac{(-1)^s}{4\rho\omega_3}\gamma_3(\rho)\right) - (-1)^{\sigma} + \frac{\alpha_{s,s-1}}{\rho\omega_3} \right\}, \end{aligned} \tag{4.51}$$

$$\begin{aligned} B_{s,2}^{(2)}(\rho) &= \frac{\omega_1^{s+1} e^{\rho\omega_2}}{4\rho} B_{1,2}(\rho) + \frac{(-1)^{\sigma}\omega_4^{s+1}}{4\rho} B_{4,2}(\rho), \\ B_{s,3}^{(3)}(\rho) &= \frac{\omega_1^{s+1} e^{\rho\omega_3}}{4\rho} B_{1,3}(\rho) + \frac{(-1)^{\sigma}\omega_4^{s+1}}{4\rho} B_{4,3}(\rho), \end{aligned} \qquad (4.52)$$

$$\gamma_2(\rho) = \int_0^1 p_2(\xi) e^{2\rho\omega_2\xi} d\xi, \quad \gamma_3(\rho) = \int_0^1 p_2(\xi) e^{-2\rho\omega_3(1-\xi)} d\xi \qquad (4.53)$$

ve c_0, (4.1) eşitliğiyle tanımlanan sayıdır.

(4.52) eşitliğini ele alalım. Kolayca görülür ki $k = 2,3$ için

$$\left(B_{3,k}^{(k)}(\rho), B_{2,k}^{(k)}(\rho), B_{1,k}^{(k)}(\rho), B_{0,k}^{(k)}(\rho)\right)^T$$

sütunu $\Delta_2(\rho)$ determinantındaki ilk ve son sütunların lineer kombinasyonudur. Buradan ve

$$A_{s,k}^{(k)}(\rho) = O\left(|\rho|^{-3/4}\right) \qquad (4.54)$$

asimptotik değerlendirmesinden (4.48) denklemi (bkz: (4.49))

$$\Delta_3(\rho) + o\left(\rho^{-2}\right) = 0 \qquad (4.55)$$

denklemine denktir; burada

$$\Delta_3(\rho) = \begin{vmatrix} (-1)^{\sigma}\omega_1^3 & A_{3,2}^{(2)}(\rho) & A_{3,2}^{(3)}(\rho) & \omega_4^3 \\ (-1)^{\sigma}\omega_1^2 & A_{2,2}^{(2)}(\rho) & A_{2,2}^{(3)}(\rho) & \omega_4^2 \\ (-1)^{\sigma}\omega_1 & A_{1,2}^{(2)}(\rho) & A_{1,2}^{(3)}(\rho) & \omega_4 \\ (-1)^{\sigma} & A_{0,2}^{(2)}(\rho) & A_{0,2}^{(3)}(\rho) & 1 \end{vmatrix} \qquad (4.56)$$

dir.

$$A_k(\rho) = e^{\rho\omega_k}\left(1 - \frac{c_0}{4\rho\omega_k}\right) - (-1)^{\sigma} \quad (k = 2,3), \qquad (4.57)$$

$$E_{s,2}(\rho) = 4\alpha_{s,s-1} + (-1)^{\sigma+s}\gamma_2(\rho), \quad E_{s,3}(\rho) = 4\alpha_{s,s-1} + (-1)^{s} e^{\rho\omega_3}\gamma_3(\rho) \qquad (4.58)$$

olsun. (4.51) formüllerinden $s = \overline{0,3}$ ve $k = 2,3$ için

$$A_{s,k}^{(k)}(\rho) = \omega_k^s A_k(\rho) + \omega_k^s \frac{E_{s,k}(\rho)}{4\rho\omega_k} \qquad (4.59)$$

elde edilir.

$$\Delta^{(1)}(\rho)=\begin{vmatrix} (-1)^{\sigma} & \omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3 E_{3,3}(\rho) & \omega_4^3 \\ (-1)^{\sigma} & \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 E_{2,3}(\rho) & \omega_4^2 \\ (-1)^{\sigma} & \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 E_{1,3}(\rho) & \omega_4 \\ (-1)^{\sigma} & & 1 & E_{0,3}(\rho) & 1 \end{vmatrix}$$

$$\Delta^{(2)}(\rho)=\begin{vmatrix} (-1)^{\sigma} & \omega_1^3 & \omega_2^3 E_{3,2}(\rho) & \omega_3^3 & \omega_4^3 \\ (-1)^{\sigma} & \omega_1^2 & \omega_2^2 E_{2,2}(\rho) & \omega_3^2 & \omega_4^2 \\ (-1)^{\sigma} & \omega_1 & \omega_2 E_{1,2}(\rho) & \omega_3 & \omega_4 \\ (-1)^{\sigma} & & E_{0,2}(\rho) & 1 & 1 \end{vmatrix} \tag{4.60}$$

$$\Delta^{(3)}(\rho)=\begin{vmatrix} (-1)^{\sigma} & \omega_1^3 & \omega_2^3 E_{3,2}(\rho) & \omega_3^3 E_{3,3}(\rho) & \omega_4^3 \\ (-1)^{\sigma} & \omega_1^2 & \omega_2^2 E_{2,2}(\rho) & \omega_3^2 E_{2,3}(\rho) & \omega_4^2 \\ (-1)^{\sigma} & \omega_1 & \omega_2 E_{1,2}(\rho) & \omega_3 E_{1,3}(\rho) & \omega_4 \\ (-1)^{\sigma} & & E_{0,2}(\rho) & E_{0,3}(\rho) & 1 \end{vmatrix} \tag{4.61}$$

olarak tanımlayalım. (4.56) ve (4.59) - (4.61) formüllerinden

$$\Delta_3(\rho)=A_2(\rho)A_3(\rho)W_0+\frac{A_2(\rho)}{4\rho\omega_3}\Delta^{(1)}(\rho)+\frac{A_3(\rho)}{4\rho\omega_2}\Delta^{(2)}(\rho)-\frac{\Delta^{(3)}(\rho)}{(4\rho\omega_2)^2} \tag{4.62}$$

elde edilir; burada W_0 (4.45) ile tanımlanan determinanttır. Belirtelim ki (4.62)'deki son terim $O(\rho^{-2})$'dir. (4.10) kullanılarak

$$\Delta^{(1)}(\rho)=\Delta^{(2)}(\rho)=-16(-1)^{\sigma}\left(\alpha_{3,2}+\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0}\right) \tag{4.63}$$

bulunur. Buradan ve (4.62)'den aşağıdaki elde edilir:

$$\Delta_3(\rho)=-16(-1)^{\sigma}\left[A_2(\rho)A_3(\rho)+\frac{\alpha_{3,2}+\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0}}{4\rho\omega_2}\left(A_3(\rho)-A_2(\rho)\right)\right]+O\left(\rho^{-2}\right).$$

Dolayısıyla (4.55) denklemi

$$A_1(\rho)A_2(\rho)+\frac{\alpha_{3,2}+\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0}}{4\rho\omega_2}\left(A_3(\rho)-A_2(\rho)\right)+O\left(\rho^{-2}\right)=0$$

denklemine denktir. (4.57) eşitliğini dikkate alırsak,

$$\left[e^{\rho\omega_2}\left(1-\frac{c_0}{4\rho\omega_2}\right)-(-1)^{\sigma}\right]\left[e^{-\rho\omega_2}\left(1+\frac{c_0}{4\rho\omega_2}\right)-(-1)^{\sigma}\right]$$
$$+\frac{\alpha_{3,2}+\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0}}{4\rho\omega_2}\left[e^{-\rho\omega_2}-e^{\rho\omega_2}\right]+O\left(\rho^{-2}\right)=0$$

ya da daha kesin olarak

$$\left[1+\frac{\gamma}{4\rho\omega_2}\right]e^{2\rho\omega_2}-2(-1)^{\sigma}e^{\rho\omega_2}+\left[1-\frac{\gamma}{4\rho\omega_2}+O\left(\rho^{-2}\right)\right]=0$$

elde edilir; burada $\gamma=(-1)^{\sigma}\left(\alpha_{3,2}+\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0}\right)-c_0$ 'dır. Bazı sadeleştirmelerden sonra son denklem

$$e^{2\rho\omega_2}-2(-1)^{\sigma}\left(1-\frac{\gamma}{4\rho\omega_2}\right)e^{\rho\omega_2}+1-\frac{\gamma}{2\rho\omega_2}+O\left(\rho^{-2}\right)=0$$

halini alır. Buradan

$$\left[e^{\rho\omega_2}-(-1)^{\sigma}\left(1-\frac{\gamma}{4\rho\omega_2}\right)\right]^2+O\left(\rho^{-2}\right)=0 \qquad (4.64)$$

elde edilir. Kolayca gösterilir ki $\rho\in T_0$ (4.64) denkleminin bir kökü ise

$$e^{\rho\omega_2}-(-1)^{\sigma}=O\left(\rho^{-1}\right)$$

sağlanır. Açıktır ki

$$e^{\rho\omega_3}-(-1)^{\sigma}=O\left(\rho^{-1}\right)$$

eşitliği de sağlanır. Son değerlendirmelerden ve (4.43)'ten $s=\overline{0,3}$ ve $k=2,3$ için

$$A_{s,k}(\rho)=O\left(\rho^{-1}\right) \qquad (4.65)$$

elde edilir. Sonuç olarak (4.39) denklemi

$$\Delta_2(\rho)+O\left(\rho^{-3}\right)=0 \qquad (4.66)$$

denklemine denktir. Burada, $\Delta_2(\rho)$ (4.49) ile tanımlanan determinanttır.

Yukarıda (4.54)'ü kullanarak (4.48) denkleminin (4.55)'e denk olduğunu ispatlamıştık. (4.54) yerine (4.65)'i alıp aynı yöntemi uygularsak (4.66) denkleminin

$$\Delta_3(\rho)+O\left(\rho^{-3}\right)=0 \qquad (4.67)$$

denklemine denk olduğunu elde ederiz. Burada, $\Delta_3(\rho)$ (4.56) ile tanımlanan determinanttır. $e^{\rho\omega_3}=(-1)^{\sigma}+O\left(\rho^{-1}\right)$ eşitliğini (4.58) bağıntılarında yerine yazarsak $s=\overline{0,3}$ ve $k=2,3$ için

$$E_{s,k}(\rho)=4\alpha_{s,s-1}+(-1)^{\sigma+s}\gamma_k(\rho)$$

elde ederiz. Bu ifade (4.61)'de yerine yazılır ve basit dönüşümlerin yardımı ile

$$\Delta^{(3)}(\rho)=-64(-1)^{\sigma}\alpha_{2,1}(\alpha_{3,2}+\alpha_{1,0})-16(\gamma_2(\rho)+\gamma_3(\rho))(\alpha_{3,2}-\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0})$$
$$+16(-1)^{\sigma}\gamma_2(\rho)\gamma_3(\rho)+O(\rho^{-1})$$

sonucuna varılır. Buradan ve (4.62) - (4.63) formüllerinden

$$\Delta_3(\rho)=-16(-1)^{\sigma}\left\{A_2(\rho)A_3(\rho)+\frac{\delta_0}{4\rho\omega_2}(A_3(\rho)-A_2(\rho))-\frac{4\delta_1}{(4\rho\omega_2)^2}+O(\rho^{-2}\varepsilon(\rho))\right\}$$

elde edilir; burada

$$\delta_0=\alpha_{3,2}+\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0},\quad \delta_1=\alpha_{2,1}(\alpha_{3,2}+\alpha_{1,0}),$$
$$\varepsilon(\rho)=|\gamma_2(\rho)+\gamma_3(\rho)|+|\gamma_2(\rho)\gamma_3(\rho)|+|\rho^{-1}| \tag{4.68}$$

dir. Sonuç olarak (4.67) denklemi

$$A_2(\rho)A_3(\rho)+\frac{\delta_0}{4\rho\omega_2}(A_3(\rho)-A_2(\rho))-\frac{4\delta_1}{(4\rho\omega_2)^2}+O(\rho^{-2}\varepsilon(\rho))=0$$

denklemine denktir. (4.57)'ye göre (4.67) denklemi

$$\left\{e^{\rho\omega}\left(1-\frac{c_0}{4\rho\omega}\right)-(-1)^{\sigma}\right\}\left\{e^{-\rho\omega}\left(1+\frac{c_0}{4\rho\omega}\right)-(-1)^{\sigma}\right\}$$
$$+\frac{\delta_0}{4\rho\omega}\left\{e^{-\rho\omega}\left(1+\frac{c_0}{4\rho\omega}\right)-e^{\rho\omega}\left(1-\frac{c_0}{4\rho\omega}\right)\right\}-\frac{4\delta_1}{(4\rho\omega)^2}+O(\rho^{-2}\varepsilon(\rho))=0$$

denklemine denktir; burada $\omega=\omega_2$'dir. Bazı sadeleştirmelerden sonra verilen denklem

$$\left(1-\frac{c_0}{4\rho\omega}\right)\left(1+\frac{(-1)^{\sigma}\delta_0}{4\rho\omega}\right)e^{2\rho\omega}-2(-1)^{\sigma}\left(1-\frac{c_0^2+4\delta_1}{2(4\rho\omega)^2}\right)e^{\rho\omega}$$
$$+\left(1+\frac{c_0}{4\rho\omega}\right)\left(1-\frac{(-1)^{\sigma}\delta_0}{4\rho\omega}\right)+O(\rho^{-2}\varepsilon(\rho))=0$$

denklemine indirgenir. Bu denklem aşağıdaki iki denkleme ayrılır:

$$e^{\rho\omega}=(-1)^{\sigma}+\frac{(-1)^{\sigma}c_0-2\alpha_{2,1}}{4\rho\omega}+O(\rho^{-1}\varepsilon(\rho)), \tag{4.69}$$

$$e^{\rho\omega}=(-1)^{\sigma}+\frac{(-1)^{\sigma}c_0-2(\alpha_{3,2}+\alpha_{1,0})}{4\rho\omega}+O(\rho^{-1}\varepsilon(\rho)). \tag{4.70}$$

(4.69) denklemini araştıralım. Rouche teoremi kullanılarak (bkz: [1, IV, 5.2] [29, II, 4.9]) (4.69) denkleminin mutlak değerce yeterince büyük $\rho\in T_0$ köklerinin

$G_n \subset T_0 \ \left(n = n_0, n_0+1,\dots\right)$ bölgelerinde yerleştiği ispatlanabilir; burada G_n, merkezi $-\left(2n-\sigma\right)\pi i/\omega$, yarıçapı $O\left(n^{-1}\right)$ olan dairedir. Dahası, (4.69) denkleminin herbir G_n bölgesinde bir tek kökü vardır. (4.69) denkleminin mutlak değerce yeterince büyük $\rho \in T_0$ kökleri

$$e^{\rho\omega} = \left(-1\right)^{\sigma} + O\left(\rho^{-1}\right) \tag{4.71}$$

denklemini sağlar.

ρ, (4.69) denkleminin G_n'deki kökü olsun. (4.71)'den açıktır ki

$$\rho = -\frac{\left(2n-\sigma\right)\pi i}{\omega} + r\,, \tag{4.72}$$

$$r = O\left(n^{-1}\right) \tag{4.73}$$

sağlanır. d_n ve d_{-n} (4.4)'de tanımlanan sayılar olmak üzere (4.53), (4.72) ve (4.73) 'ten

$$\gamma_2\left(\rho\right) = d_{-n} + O\left(n^{-1}\right), \quad \gamma_3\left(\rho\right) = d_n + O\left(n^{-1}\right)$$

elde ederiz. Buradan ve (4.68)'den aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\varepsilon\left(\rho\right) = O\left(\varepsilon_n\right) \tag{4.74}$$

burada ε_n, (4.5) eşitliğiyle verilen sayıdır.

r'yi daha kesin bir biçimde yazalım. (4.72)'den aşağıdaki iki bağıntı elde edilir:

$$\left(\rho\omega\right)^{-1} = -\frac{1}{\left(2n-\sigma\right)\pi i} + O\left(n^{-3}\right), \quad e^{\rho\omega} = \left(-1\right)^{\sigma}\left\{1 + r\omega + O\left(n^{-2}\right)\right\}. \tag{4.75}$$

(4.69)'da $\rho = \rho$ yazarak ve (4.74) - (4.75) bağıntılarını kullanarak

$$r = \frac{2\left(-1\right)^{\sigma}\alpha_{2,1} - c_0}{4\omega\left(2n-\sigma\right)\pi i} + O\left(n^{-1}\varepsilon_n\right) \tag{4.76}$$

elde ederiz. O halde (4.72) - (4.76)'dan $z_n = -\left(2n-\sigma\right)\pi i/\omega \ \left(n = n_0, n_0+1,\dots\right)$ noktasının $O\left(n^{-1}\right)$ komşuluğunda (4.69) denkleminin tek bir

$$\rho_{n,1} = -\frac{1}{\omega}\left\{\left(2n-\sigma\right)\pi i - \frac{2\left(-1\right)^{\sigma}\alpha_{2,1} - c_0}{4\left(2n-\sigma\right)\pi i}\right\} + O\left(n^{-1}\varepsilon_n\right) \tag{4.77}$$

köküne sahip olduğu elde edilir.

Benzer şekilde $z_n = -(2n-\sigma)\pi i/\omega \quad (n = n_0, n_0+1, \ldots)$ noktasının $O\left(n^{-1}\right)$ komşuluğunda (4.70) denklemi tek bir

$$\rho_{n,2} = -\frac{1}{\omega}\left\{(2n-\sigma)\pi i - \frac{2(-1)^{\sigma}\left(\alpha_{3,2}+\alpha_{1,0}\right)-c_0}{4(2n-\sigma)\pi i}\right\} + O\left(n^{-1}\varepsilon_n\right) \tag{4.78}$$

köküne sahiptir.

Şimdi, yeterince büyük bir n sayısı için $\lambda = -\left(\rho_{n,1}\right)^4$ özdeğerine karşılık gelen $u_{n,1}(x)$ özfonksiyonunu aşağıdaki formda araştıralım:

$$u_{n,1}(x) = \frac{-(-1)^{\sigma}\rho^{-5}e^{-\rho\omega_4}\sqrt{2}}{4\omega_2\left(\alpha_{3,2}-\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0}\right)}\left.\begin{vmatrix} y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & y_4(x,\rho) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \end{vmatrix}\right|_{\rho=\rho_{n,1}}.$$

Bu özfonksiyonu aşağıdaki biçimde yazalım:

$$u_{n,1}(x) = \frac{(-1)^{\sigma}\rho\sqrt{2}}{4\omega_2\left(\alpha_{3,2}-\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0}\right)} \times$$

$$\times\left.\begin{vmatrix} -y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & e^{-\rho\omega_4}y_4(x,\rho) \\ -\rho^{-3}U_3(y_1) & \rho^{-3}U_3(y_2) & \rho^{-3}U_3(y_3) & \rho^{-3}e^{-\rho\omega_4}U_3(y_4) \\ -\rho^{-2}U_2(y_1) & \rho^{-2}U_2(y_2) & \rho^{-2}U_2(y_3) & \rho^{-2}e^{-\rho\omega_4}U_2(y_4) \\ -\rho^{-1}U_1(y_1) & \rho^{-1}U_1(y_2) & \rho^{-1}U_1(y_3) & \rho^{-1}e^{-\rho\omega_4}U_1(y_4) \end{vmatrix}\right|_{\rho=\rho_{n,1}}. \tag{4.79}$$

Bundan sonra basitlik için $\rho = \rho_{n,1}$ ve $\varepsilon = \varepsilon_n$ kabul edeceğiz.

$$y_k(x,\rho) = O(1) \quad (k = 1,2,3), \qquad e^{-\rho\omega_4}y_4(x,\rho) = O(1) \tag{4.80}$$

olduğundan (4.38) ve (4.79) formüllerinden

$$u_{n,1}(x) = \frac{(-1)^{\sigma}\rho\sqrt{2}}{4\omega_2\left(\alpha_{3,2}-\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0}\right)} \times$$

$$\times\left.\begin{vmatrix} -y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & e^{-\rho\omega_4}y_4(x,\rho) \\ A_{3,1}(\rho) & A_{3,2}(\rho) & A_{3,3}(\rho) & A_{3,4}(\rho) \\ A_{2,1}(\rho) & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & A_{2,4}(\rho) \\ A_{1,1}(\rho) & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & A_{1,4}(\rho) \end{vmatrix}\right|_{\rho=\rho_{n,1}} + O\left(\rho^{-2}\right). \tag{4.81}$$

elde edilir. (4.42), (4.65), (4.80) ve (4.81) formüllerini göz önünde bulundurursak

$$u_{n,1}(x)=\frac{\rho\sqrt{2}}{4\omega_2\left(\alpha_{3,2}-\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0}\right)}\times$$
$$\times\left[y_3(x,\rho)E_2(\rho)-y_2(x,\rho)E_3(\rho)\right]+O\left(\rho^{-1}\right) \tag{4.82}$$

elde ederiz; burada

$$E_k(\rho)=\begin{vmatrix}\omega_1^3 & A_{3,k}(\rho) & \omega_4^3\\ \omega_1^2 & A_{2,k}(\rho) & \omega_4^2\\ \omega_1 & A_{1,k}(\rho) & \omega_4\end{vmatrix}\quad (k=2,3)$$

tür. Buradan ve (4.50)'den

$$E_k(\rho)=\begin{vmatrix}\omega_1^3 & A_{3,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4^3\\ \omega_1^2 & A_{2,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4^2\\ \omega_1 & A_{1,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4\end{vmatrix}+\begin{vmatrix}\omega_1^3 & B_{3,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4^3\\ \omega_1^2 & B_{2,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4^2\\ \omega_1 & B_{1,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4\end{vmatrix}+O\left(\rho^{-2}\right)$$

bulunur. (4.52)'ye göre ikinci determinant sıfıra eşittir. Yani

$$E_k(\rho)=\begin{vmatrix}\omega_1^3 & A_{3,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4^3\\ \omega_1^2 & A_{2,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4^2\\ \omega_1 & A_{1,k}^{(k)}(\rho) & \omega_4\end{vmatrix}+O\left(\rho^{-2}\right). \tag{4.83}$$

(4.51)'e göre $s=\overline{0,3}$ ve $k=2,3$ için

$$A_{s,k}^{(k)}(\rho)=\omega_k^s\left\{e^{\rho\omega_k}\left(1-\frac{c_0}{4\rho\omega_k}\right)-(-1)^\sigma+\frac{\alpha_{s,s-1}}{\rho\omega_k}\right\}+O\left(\rho^{-1}\varepsilon\right)$$

elde edilir. Bunu ve (4.77)'yi kullanıp gerekli sadeleştirmeleri yaparsak

$$A_{s,k}^{(k)}(\rho)=\omega_k^s\,\frac{2\alpha_{s,s-1}-\alpha_{2,1}}{2\rho\omega_k}+O\left(\rho^{-1}\varepsilon\right) \tag{4.84}$$

elde ederiz. O halde (4.83) ve (4.84)'e göre

$$E_k(\rho)=\frac{2\omega_1}{\rho}\left(\alpha_{3,2}-\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0}\right)+O\left(\rho^{-1}\varepsilon\right)\quad (k=2,3)$$

olur. Sonuç olarak (4.82)'ye göre

$$u_{n,1}(x)=\frac{\sqrt{2}}{2i}\left(y_3(x,\rho)-y_2(x,\rho)\right)+O(\varepsilon)$$

ya da daha açık olarak

$$u_{n,1}(x)=\frac{\sqrt{2}}{2i}\left(y_3\left(x,\rho_{n,1}\right)-y_2\left(x,\rho_{n,1}\right)\right)+O(\varepsilon_n) \tag{4.85}$$

elde edilir. Öte yandan (4.20), (4.21) ve (4.77)'ye göre

$$y_2\left(x,\rho_{n,1}\right)=e^{-(2n-\sigma)\pi ix}+O\left(n^{-1}\right),\quad y_3\left(x,\rho_{n,1}\right)=e^{(2n-\sigma)\pi ix}+O\left(n^{-1}\right)$$

sağlanır. Buradan ve (4.85)'ten

$$u_{n,1}(x)=\sqrt{2}\sin(2n-\sigma)\pi x+O(\varepsilon_n) \tag{4.86}$$

sonucuna varılır.

Şimdi, yeterince büyük bir n sayısı için $\lambda=-\left(\rho_{n,2}\right)^4$ özdeğerine karşılık gelen $u_{n,2}(x)$ özfonksiyonunu aşağıdaki formda araştıralım:

$$u_{n,2}(x)=\frac{-(-1)^{\sigma}\rho^{-2}e^{-\rho\omega_4}\sqrt{2}}{4\left(\alpha_{3,2}-\alpha_{2,1}+\alpha_{1,0}\right)}\left.\begin{vmatrix} y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & y_4(x,\rho) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_0(y_1) & U_0(y_2) & U_0(y_3) & U_0(y_4) \end{vmatrix}\right|_{\rho=\rho_{n,2}}.$$

Aynı yöntemi uygularsak

$$u_{n,2}(x)=\sqrt{2}\cos(2n-\sigma)\pi x+O(\varepsilon_n) \tag{4.87}$$

elde ederiz.

(4.77) ve (4.78) formüllerini göz önüne alalım. Görüldüğü gibi, basit özdeğerlerin aşağıdaki gibi iki dizisini elde ettik:

$$\lambda'_{n_0},\lambda'_{n_0+1},\lambda'_{n_0+2},\ldots, \tag{4.88}$$

$$\lambda''_{n_0},\lambda''_{n_0+1},\lambda''_{n_0+2},\ldots. \tag{4.89}$$

Bu özdeğerler aşağıdaki asimptotik formüllere sahiptir:

$$\lambda'_n=-\left(\rho_{n,1}\right)^4=\left((2n-\sigma)\pi\right)^4\left\{1+\frac{2(-1)^{\sigma}\alpha_{2,1}-c_0}{\left((2n-\sigma)\pi\right)^2}+O\left(n^{-2}\varepsilon_n\right)\right\}, \tag{4.90}$$

$$\lambda''_n=-\left(\rho_{n,2}\right)^4=\left((2n-\sigma)\pi\right)^4\left\{1+\frac{2(-1)^{\sigma}\left(\alpha_{3,2}+\alpha_{1,0}\right)-c_0}{\left((2n-\sigma)\pi\right)^2}+O\left(n^{-2}\varepsilon_n\right)\right\}. \tag{4.91}$$

$$\left(n=n_0,n_0+1,n_0+2,\ldots\right)$$

Katlılığı da dikkate alırsak (4.88) ve (4.89) özdeğerlerinin dışında sonlu sayıda özdeğer mevcuttur. Varsayalım ki L operatörünün katlılığı da dikkate alarak (4.88) ve (4.89) özdeğerleri dışında m tane özdeğeri vardır. $m = m_1 + m_2$ olsun. Burada, m_1 ve m_2 negatif olmayan keyfi tamsayılardır. Kalan m tane özdeğerden m_1 tanesini (uygun olarak m_2 tanesini) (4.88) özdeğerlerine (uygun olarak (4.89) özdeğerlerine) eklersek aşağıdaki gibi iki özdeğerler dizisi elde ederiz:

$$c_1, c_2, \ldots, c_{m_1}, \lambda'_{n_0}, \lambda'_{n_0+1}, \lambda'_{n_0+2}, \ldots,$$
$$e_1, e_2, \ldots, e_{m_2}, \lambda''_{n_0}, \lambda''_{n_0+1}, \lambda''_{n_0+2}, \ldots.$$

Bu dizileri sırasıyla $\lambda_{1,1}, \lambda_{2,1}, \ldots, \lambda_{n,1}, \ldots$ ve $\lambda_{1,2}, \lambda_{2,2}, \ldots, \lambda_{n,2}, \ldots$ ile gösterelim. Açıktır ki

$$\lambda_{n+n_1,1} = \lambda'_n, \qquad \lambda_{n+n_2,2} = \lambda''_n \qquad (n \ge n_0) \tag{4.92}$$

dır. Burada, $n_1 = m_1 - n_0 + 1$ ve $n_2 = m_2 - n_0 + 1$'dir. (4.6) formülü (4.90) - (4.92)'den direk elde edilir. Benzer yöntemle (4.86) ve (4.87) formüllerinden (4.7) formülü elde edilebilir.

Teorem 4.2.1'in ispatı bitti.

4.2.3. Teorem 4.2.2 ve Sonuç 4.2.1'in İspatı

$p_2(x) \in W_1^2(0,1)$ olduğundan (4.4) ve (4.5) formüllerine göre

$$\varepsilon_n = O\left(n^{-1}\right)$$

dir. Bu sebeple (4.7) formülleri

$$\begin{aligned} u_{n+n_1,1}(x) &= \sqrt{2}\sin(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right), \\ u_{n+n_2,2}(x) &= \sqrt{2}\cos(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right) \end{aligned} \tag{4.93}$$

olarak yazılabilir.

$$v_{1,1}(x), v_{1,2}(x), \ldots, v_{n,1}(x), v_{n,2}(x), \ldots \tag{4.94}$$

sistemi

$$u_{1,1}(x), u_{1,2}(x), \ldots, u_{n,1}(x), u_{n,2}(x), \ldots \tag{4.95}$$

sisteminin biortogonali olsun. Yani $\left(u_{n,j}, v_{m,s}\right) = \delta_{n,m}.\delta_{j,s} \quad \left(n, m = 1, 2, ..., \ j, s = 1, 2\right)$ sağlansın. [16, s:84] veya [29, s:99]'daki iyi bilinen özelliğe göre, (4.94) sistemi L

operatörünün eşlenik operatörü olan L^* operatörünün kök fonksiyonlar sistemidir. L^* lineer diferansiyel operatörü

$$l^*(z) = z^{(iv)} + \left(\overline{p_2(x)}z\right)'' - \left(\overline{p_1(x)}z\right)' + \overline{p_0(x)}z$$

diferansiyel ifadesi ve

$$U_0^*(z) \equiv z(1) - (-1)^\sigma z(0) = 0$$

$$U_1^*(z) \equiv z'(1) - (-1)^\sigma z'(0) + \overline{\alpha_{3,2}}z(0) = 0$$

$$U_2^*(z) \equiv z''(1) - (-1)^\sigma z''(0) + \overline{\alpha_{2,1}}z'(0) + \beta_{2,0}z(0) = 0$$

$$U_3^*(z) \equiv z'''(1) - (-1)^\sigma z'''(0) + \overline{\alpha_{1,0}}z''(0) + \beta_{3,1}z'(0) + \beta_{3,0}z(0) = 0$$

eşlenik sınır koşullarıyla elde edilir; burada $\beta_{2,0}$, $\beta_{3,1}$ ve $\beta_{3,0}$ sayıları sadece L operatörünün katsayılarına bağlı sabitlerdir. L^* operatörünün biçiminden ve Teorem 4.2.1'den yeterince büyük n'ler için

$$\begin{aligned} \overline{v_{n+n_1,1}(x)} &= r_{n+n_1,1}\left(\sin(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right)\right), \\ \overline{v_{n+n_2,2}(x)} &= r_{n+n_1,2}\left(\cos(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right)\right) \end{aligned} \tag{4.96}$$

asimptotik formülleri elde edilir. Burada $r_{n+n_j,j}$ $(j=1,2)$ sayıları $\left(u_{n+n_j,j}, v_{n+n_j,j}\right) = 1$ eşitliğinden elde edilen sayılardır. Buradan ve (4.93), (4.96) formüllerinden yeterince büyük n'ler için

$$r_{n+n_j,j} = \sqrt{2} + O\left(n^{-1}\right) \quad (j=1,2)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.96) formülleri yeterince büyük n'ler için

$$\begin{aligned} \overline{v_{n+n_1,1}(x)} &= \sqrt{2}\sin(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right), \\ \overline{v_{n+n_2,2}(x)} &= \sqrt{2}\cos(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right) \end{aligned} \tag{4.97}$$

halini alır.

$$g_0(x) = 1, \quad g_{2n-1}(x) = \sqrt{2}\sin 2n\pi x, \quad g_{2n}(x) = \sqrt{2}\cos 2n\pi x, \tag{4.98}$$

$$g_{2n-1} = \sqrt{2}\sin(2n-1)\pi x, \quad g_{2n} = \sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x \tag{4.99}$$

$$(n = 1, 2, \ldots)$$

olsun. (4.98) ve (4.99) sistemlerinin ikisi de $L_2(0,1)$ uzayının ortonormal tabanlarıdır. (4.93) ve (4.97) formüllerinden açıktır ki (4.94) ve (4.95) sistemleri Bessel eşitsizliğini sağlar. Yani her $f \in L_2(0,1)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\left|\left(f,u_{n,j}\right)\right|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\left|\left(f,v_{n,j}\right)\right|^2 < +\infty$$

dur. Dahası, (4.94) ve (4.95) sistemlerinin ikisi de $L_2(0,1)$'de tamdır (bkz: [30]). O halde [11, VI, 2.2, Theorem 2.1]'den bu iki sistem de $L_2(0,1)$ uzayının Riesz tabanlarıdır.

Şimdi Sonuç 4.2.1'i ispatlayalım. İspatı yalnızca $\sigma = 0$ için yapalım. $\sigma = 1$ durumu benzer biçimde yapılır. $n_1 \geq 0$ ve $n_2 \geq 0$ olsun. (4.93) asimptotik formüllerinden ve $\{g_k(x)\}_{k=0}^{k=\infty}$ sisteminin tanımından (bkz: (4.98))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\|u_{n+n_1,1} - g_{2n-1}\right\|^2 + \left\|u_{n+n_2,2} - g_{2n}\right\|^2\right) \leq const \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty \tag{4.100}$$

elde edilir. Açıktır ki (4.100)'de L operatörünün kök fonksiyonlarının $n_1 + n_2$ tanesi, (4.98) sisteminin fonksiyonlarından da 1 tanesi yoktur.

$n_1 + n_2 > 1$ olsun. Bu durumda (4.100) eşitsizliğinden (4.95) sisteminin $n_1 + n_2 - 1$ fonksiyonu dışındaki fonksiyonlardan oluşan S sistemi (4.98)'e karesel yakındır. (4.98) sistemi $L_2(0,1)$ uzayının ortonormal tabanı olduğundan S, $L_2(0,1)$'in Riesz tabanıdır [11, VI, 2, Theorem 2.3]. Bu durum (4.95) sisteminin $L_2(0,1)$'in tabanı olması ile çelişir.

$n_1 = n_2 = 0$ olsun. (4.95) sistemi $L_2(0,1)$'in Riesz tabanı olduğundan yine (4.100) ile $\{g_k(x)\}_{k=1}^{k=\infty}$ sistemi taban olur ve bu da $\{g_k(x)\}_{k=0}^{k=\infty}$ sisteminin taban olması ile çelişir.

Geriye kalan tüm durumlar benzer biçimde ispatlanır.

Böylece genel durumda $n_1 + n_2 = 1 - \sigma$ elde edilir. Genelliği kaybetmeden

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 1 - \sigma$$

varsayabiliriz. O halde

$$\begin{aligned} u_{n,1}(x) &= \sqrt{2}\sin(2n-\sigma)\pi x + O(n^{-1}), \\ u_{n+1-\sigma,2}(x) &= \sqrt{2}\cos(2n-\sigma)\pi x + O(n^{-1}), \end{aligned} \tag{4.101}$$

$$\begin{aligned} \overline{v_{n,1}(x)} &= \sqrt{2}\sin(2n-\sigma)\pi x + O(n^{-1}), \\ \overline{v_{n+1-\sigma,2}(x)} &= \sqrt{2}\cos(2n-\sigma)\pi x + O(n^{-1}) \end{aligned} \tag{4.102}$$

olur.

Şimdi, L operatörünün kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < +\infty, p \neq 2)$ uzayında taban oluşturduğunu ispatlayalım. Yukardaki gibi yalnızca $\sigma = 0$ durumu için ispatı yapalım. $\sigma = 1$ durumu benzerdir.

Belirtelim ki (4.98) sistemi her bir $p \in (1,+\infty)$ için $L_p(0,1)$'in tabanıdır [2, VIII, 20, Theorem 2]. Dolayısıyla [14, I, 4, Theorem 6]'dan $\exists M_p > 0$, $\forall f \in L_p(0,1)$ için

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} (f, g_n) g_n \right\|_p \leq M_p \|f\|_p \quad (N = 1, 2, ...) \tag{4.103}$$

sağlanır. Burada $\|\cdot\|_p$, $L_p(0,1)$ uzayındaki normdur.

$p \in (1,2)$ olsun. (4.95) sistemi $L_2(0,1)$'de tam olduğundan $L_p(0,1)$'de de tamdır. Dahası, $\forall f \in L_p(0,1)$ için

$$\left\| (f, v_{n,j}) u_{n,j} \right\|_p \leq const \|f\|_p$$

sağlanır; burada $n = 1, 2, \ldots,$ ve $j = 1, 2$'dir. O halde [14, I, 4, Theorem 6]'dan (4.95) sisteminin $L_p(0,1)$'de taban olduğunu göstermek için $\forall f \in L_p(0,1)$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} (f, v_{n,j}) u_{n,j} \right\|_p \leq M \|f\|_p \quad (m = 1, 2, ...)$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti bulmak yeterlidir. Belirtelim ki aynı koşullar altında

$$J_m(f) = \left\| \sum_{n=1}^{m} \left\{ (f, v_{n,1}) u_{n,1} + (f, v_{n+1,2}) u_{n+1,2} \right\} \right\|_p \leq M' \|f\|_p \tag{4.104}$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir; burada $m = 1, 2, \ldots$ ve M' bir sabittir.

(4.98) ve (4.101) - (4.102) formüllerinden

$$u_{n,1}(x) = g_{2n-1}(x) + O\left(n^{-1}\right), \quad u_{n+1,2}(x) = g_{2n}(x) + O\left(n^{-1}\right)$$

$$\overline{v_{n,1}(x)} = g_{2n-1}(x) + O\left(n^{-1}\right), \quad \overline{v_{n+1,2}(x)} = g_{2n}(x) + O\left(n^{-1}\right)$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$J_m(f) \le J_{m,1}(f) + J_{m,2}(f) + J_{m,3}(f) + J_{m,4}(f) \tag{4.105}$$

bulunur. Burada $m = 1, 2, \ldots$ ve

$$J_{m,1}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} (f, g_n) g_n \right\|_p, \quad J_{m,2}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} (f, g_n) O\left(n^{-1}\right) \right\|_p,$$

$$J_{m,3}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} \left(f, O\left(n^{-1}\right)\right) g_n \right\|_p, \quad J_{m,4}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} \left(f, O\left(n^{-1}\right)\right) O\left(n^{-1}\right) \right\|_p$$

dir. (4.103)'ten

$$J_{m,1}(f) \le const \| f \|_p . \tag{4.106}$$

elde edilir. Riesz teoreminden (bkz: [37, XII, 2, Theorem 2.8])

$$\begin{aligned} J_{m,2}(f) &\le const \sum_{n=1}^{2m} \left|(f, g_n)\right| n^{-1} \\ &\le const \left(\sum_{n=1}^{2m} \left|(f, g_n)\right|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{2m} n^{-p} \right)^{1/p} \le const \| f \|_p . \end{aligned} \tag{4.107}$$

bulunur; burada, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$'dir. Dahası,

$$\begin{aligned} J_{m,3}(f) &\le \left\| \sum_{n=1}^{2m} \left(f, O\left(n^{-1}\right)\right) g_n \right\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{2m} \left|\left(f, O\left(n^{-1}\right)\right)\right|^2 \right)^{1/2} \\ &\le const \| f \|_1 \left(\sum_{n=1}^{2m} n^{-2} \right)^{1/2} \le const \| f \|_p \end{aligned} \tag{4.108}$$

ve

$$J_{m,4} \le const \| f \|_1 \sum_{n=1}^{2m} n^{-2} \le const \| f \|_p . \tag{4.109}$$

(4.104) eşitsizliği (4.105) - (4.109) eşitsizliklerinin bir sonucudur. (4.95) sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < 2)$ uzayının bir tabanı olduğu ispatlandı.

$2 < p < +\infty$ ve $1/p + 1/q = 1$ olsun. Belirtelim ki $1 < q < 2$'dir ve (4.94), L^* operatörünün kök fonksiyonlar sistemidir. Yukarıda ispatlandığı gibi, bu operatörün kök fonksiyonlar sistemi $L_q(0,1)$'in tabanıdır. O halde ona biortogonal olan (4.95) sistemi de $L_p(0,1)$'in tabanıdır.

Teorem 4.2.2 ve Sonuç 4.2.1'in ispatı bitti.

4.3. $\alpha_{2,1}=\alpha_{3,2}+\alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,0}\alpha_{3,2}\left(\alpha_{1,0}^2+\alpha_{1,0}\alpha_{3,2}+\alpha_{3,2}^2\right)\neq 0$ DURUMUNDA PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bu kısımda

$$\alpha_{2,1}=\alpha_{3,2}+\alpha_{1,0},\ \ \alpha_1\alpha_3\left(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2\right)\neq 0 \qquad (4.110)$$

$$\alpha_{2,0}=\alpha_{3,1}=\alpha_{3,0}=0 \qquad (4.111)$$

$$p_2(x)\equiv p_1(x)\equiv 0 \qquad (4.112)$$

durumunda problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edilecek, kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında taban oluşturduğu ispatlanacak ve bu tabanın $p=2$ durumunda koşulsuz olduğu gösterilecektir.

Basitlik için

$$q(x)=p_0(x),\quad \alpha_3=\alpha_{3,2},\quad \alpha_2=\alpha_{2,1},\quad \alpha_1=\alpha_{1,0} \qquad (4.113)$$

olarak alalım ve (4.1) - (4.2) diferansiyel operatörünü verilen koşullar altında tekrar yazalım:

$$l(y)=y^{(iv)}+q(x)y\quad (0<x<1), \qquad (4.114)$$

$$\begin{gathered} U_s(y)\equiv y^{(s)}(1)-(-1)^{\sigma}y^{(s)}(0)+\alpha_s\,y^{(s)}(0)=0,\quad \left(s=\overline{1,3}\right) \\ U_0(y)\equiv y(1)-(-1)^{\sigma}y(0)=0. \end{gathered} \qquad (4.115)$$

γ_0 sayısını, $\alpha_1+\alpha_3\neq 0$ durumunda

$$\gamma_0^2=-\alpha_1\alpha_3\left(\alpha_1^2+\alpha_1\alpha_3+\alpha_3^2\right) \qquad (4.116)$$

eşitliğini sağlayan keyfi kaydedilmiş sayı olarak, $\alpha_1+\alpha_3=0$ durumunda ise

$$\gamma_0=\alpha_1^2 \qquad (4.117)$$

olarak tanımlayalım.

(4.110)-(4.112) koşulları altında problem ile ilgili iddialar aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.3.1. $q(x) \in L_1(0,1)$ keyfi kompleks değerli bir fonksiyon, $\alpha_2 = \alpha_1 + \alpha_3$ ve $\gamma_0 \neq 0$ olsun. O halde (4.114) - (4.115) diferansiyel operatörünün sonlu sayıdaki hariç tüm özdeğerleri basittir ve $\{\lambda_{n,1}\}_{n=1}^{n=\infty}$, $\{\lambda_{n,2}\}_{n=1}^{n=\infty}$ gibi iki sonsuz dizi oluşturur. Ayrıca, yeterince büyük n sayıları için aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur:

$$\lambda_{n+n_j,j} = \left((2n-\sigma)\pi\right)^4 \left\{1 + \frac{2(-1)^\sigma \alpha_2}{\left((2n-\sigma)\pi\right)^2} - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_3^2 - 2(-1)^j \gamma_0}{2\left((2n-\sigma)\pi\right)^3} + O\left(n^{-4}\right)\right\}, \quad (4.118)$$

burada $j = 1,2$ ve n_1, n_2 belirli tamsayılardır. Bunun yanı sıra, yeterince büyük n doğal sayıları için $\lambda_{n,1}$ ve $\lambda_{n,2}$ özdeğerlerine karşılık gelen $u_{n,1}(x)$ ve $u_{n,2}(x)$ özfonksiyonları aşağıdaki asimptotik formüllere sahiptir:

$\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$ ise

$$\begin{aligned} u_{n+n_j,j}(x) &= \left(\alpha_1\alpha_3 - (-1)^j \gamma_0\right)\sin(2n-\sigma)\pi x \\ &+ \alpha_3(\alpha_1+\alpha_3)\cos(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right), \end{aligned} \quad (4.119)$$

$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ ise

$$u_{n+n_j,j}(x) = \sqrt{2}\cos\left((2n-\sigma)\pi x - \frac{j-1}{2}\pi\right) + O\left(n^{-1}\right). \quad (4.120)$$

Teorem 4.3.2. Teorem 4.3.1'in bütün koşulları sağlansın. O halde (4.114) - (4.115) diferansiyel operatörünün kök fonksiyonlar sistemi $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayının tabanını oluşturur ve bu taban $p = 2$ için koşulsuzdur.

Sonuç 4.3.1. Teorem 4.3.1'in tüm koşulları sağlansın ve n_1, n_2 Teorem 4.3.1'de verilen tamsayılar olsun. Bu takdirde $n_1 + n_2 = 1 - \sigma$'dır ve $n_1 = 1 - \sigma$, $n_2 = 0$ seçebiliriz.

4.3.1. Bazı Yardımcı Sonuçlar

(4.112) ve (4.113)'e göre (4.22) formülü $k=\overline{1,4}$, $s=\overline{0,3}$ için

$$\begin{aligned} z_{k,s}(x,\rho) &= \omega_k^s + \frac{\omega_k^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^x q(\xi)\, z_{k,0}(\xi,\rho)\,d\xi \\ &+ \frac{1}{4\rho^3}\sum_{\alpha=1}^{k-1}\omega_\alpha^{s+1}\int_0^x q(\xi)\, z_{k,0}(\xi,\rho)\, e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}d\xi \\ &- \frac{1}{4\rho^3}\sum_{\alpha=k+1}^{4}\omega_\alpha^{s+1}\int_x^1 q(\xi)\, z_{k,0}(\xi,\rho)\, e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}d\xi \end{aligned} \tag{4.121}$$

halini alır. (4.23)'te $j=0$ yazarsak (4.113)'e göre $k=\overline{1,4}$ için

$$\int_0^x q(\xi)\, z_{k,0}(\xi,\rho)\, e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}d\xi = O(1) \quad (\alpha\le k),$$

$$\int_x^1 q(\xi)\, z_{k,0}(\xi,\rho)\, e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}d\xi = O(1) \quad (\alpha\ge k)$$

elde ederiz. Buradan ve (4.21), (4.121) formüllerinden

$$z_{k,s}(x,\rho) = \omega_k^s + O\left(\rho^{-3}\right) \quad \left(s=\overline{0,3},\, k=\overline{1,4}\right) \tag{4.122}$$

sağlanır. Bu ifadeyi (4.121)'de yerine yazarsak

$$\begin{aligned} z_{k,s}(x,\rho) &= \omega_k^s + \frac{\omega_k^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^x q(\xi)\,d\xi + \frac{1}{4\rho^3}\sum_{\alpha=1}^{k-1}\omega_\alpha^{s+1}\int_0^x q(\xi)\, e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}d\xi \\ &- \frac{1}{4\rho^3}\sum_{\alpha=k+1}^{4}\omega_\alpha^{s+1}\int_x^1 q(\xi)\, e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(x-\xi)}d\xi + O\left(\rho^{-6}\right) \end{aligned}$$

elde ederiz. Bu formülde $x=0$ ve $x=1$ yazarak

$$z_{k,s}(0,\rho) = \omega_k^s - \frac{1}{4\rho^3}\sum_{\alpha=k+1}^{4}\omega_\alpha^{s+1}\int_0^1 q(\xi)\, e^{-\rho(\omega_\alpha-\omega_k)\xi}d\xi + O\left(\rho^{-6}\right),$$

$$z_{k,s}(1,\rho) = \omega_k^s + \frac{\omega_k^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)\,d\xi + \frac{1}{4\rho^3}\sum_{\alpha=1}^{k-1}\omega_\alpha^{s+1}\int_0^1 q(\xi)\, e^{\rho(\omega_\alpha-\omega_k)(1-\xi)}d\xi + O\left(\rho^{-6}\right)$$

bağıntıları elde edilir. Burada $k=2,3$ yazılırsa $s=\overline{0,3}$ için

$$z_{2,s}(0,\rho)=\omega_2^s-\frac{\omega_3^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{2\rho\omega_2\xi}d\xi-\frac{\omega_4^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_2-\omega_4)\xi}d\xi+O(\rho^{-6}),$$

$$z_{3,s}(0,\rho)=\omega_3^s-\frac{\omega_4^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_3-\omega_4)\xi}d\xi+O(\rho^{-6}),$$

$$z_{2,s}(1,\rho)=\omega_2^s+\frac{\omega_2^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)d\xi+\frac{\omega_1^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_1-\omega_2)(1-\xi)}d\xi+O(\rho^{-6}), \qquad (4.123)$$

$$z_{3,s}(1,\rho)=\omega_3^s+\frac{\omega_3^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)d\xi+\frac{\omega_1^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_1-\omega_3)(1-\xi)}d\xi$$
$$+\frac{\omega_2^{s+1}}{4\rho^3}\int_0^1 q(\xi)e^{2\rho\omega_2(1-\xi)}d\xi+O(\rho^{-6})$$

formülleri bulunur.

Lemma 4.3.1.1. H bir Hilbert uzayı, $\{e_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ bu uzayın bir ortonormal tabanı ve a,b,c,d , $ad-bc\neq 0$ koşulunu sağlayan kompleks sayılar olsun. O halde

$$f_0=e_0, \qquad f_{2n-1}=ae_{2n-1}+be_{2n}, \qquad f_{2n}=ce_{2n-1}+de_{2n} \qquad (n=1,2,\ldots) \quad (4.124)$$

biçiminde tanımlanan $\{f_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ sistemi H 'ın bir Riesz tabanıdır.

İspat: Önce $\{f_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ sistemin H 'da tam olduğunu ispatlayalım. $x\in H$ olmak üzere $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için

$$(x,f_n)=0$$

olsun.

$$e_0=f_0, \quad e_{2n-1}=\frac{d\,f_{2n-1}-b\,f_{2n}}{ad-bc}, \quad e_{2n}=\frac{a\,f_{2n}-c\,f_{2n-1}}{ad-bc} \quad (n=1,2,\ldots)$$

olduğundan $\forall n\in\mathbb{N}\cup\{0\}$ için

$$(x,e_n)=0$$

dır. $\{e_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ sistemi taban olduğundan tamdır, yani $x=\theta$ olmak zorundadır. O halde $\{f_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ sistemi de tamdır.

$$f_0'=e_0, \qquad f_{2n-1}'=a'e_{2n-1}+b'e_{2n}, \qquad f_{2n}'=c'e_{2n-1}+d'e_{2n} \qquad (n=1,2,\ldots) \quad (4.125)$$

olsun. Burada,

$$\overline{a'} = \frac{d}{ad-bc}, \qquad \overline{b'} = -\frac{c}{ad-bc}, \qquad \overline{c'} = -\frac{b}{ad-bc}, \qquad \overline{d'} = \frac{a}{ad-bc}$$

dir. Belirtelim ki $a'd' - b'c' \neq 0$ olduğundan $\{f_n'\}_{n=0}^{n=\infty}$ sistemi de tamdır. Açıktır ki $\{f_n'\}_{n=0}^{n=\infty}$ sistemi $\{f_n\}_{n=0}^{n=\infty}$'e biortogonaldir. Yani $(f_n, f_m') = \delta_{n,m}$ sağlanır. $\{e_n\}_{n=0}^{n=\infty}$ ortonormal taban olduğundan Bessel eşitsizliğini sağlar. O halde (4.124) ve (4.125) sistemleri de Bessel eşitsizliğini sağlar. Yani, $\forall x \in H$ için

$$\sum_{n=0}^{\infty} \left|(x, f_n)\right|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=0}^{\infty} \left|(x, f_n')\right|^2 < +\infty$$

sağlanır. [11, VI, 2.2, Theorem 2.1]'e göre (4.124), H'ın bir Riesz tabanıdır.

Lemma 4.3.1.1'in ispatı bitti.

Aşağıdaki lemma yukarıdaki yöntem ile ispatlanabilir:

Lemma 4.3.1.2. H bir Hilbert uzayı, $\{e_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ bu uzayın bir ortonormal tabanı ve a,b,c,d, $ad-bc \neq 0$ koşulunu sağlayan kompleks sayılar olsun. O halde

$$f_{2n-1} = ae_{2n-1} + be_{2n}, \qquad f_{2n} = ce_{2n-1} + de_{2n} \qquad (n = 1,2,\ldots)$$

biçiminde tanımlanan $\{f_n\}_{n=1}^{n=\infty}$ sistemi H'ın bir Riesz tabanıdır.

4.3.2. Teorem 4.3.1'in İspatı

Teorem 4.2.1'in ispatındaki (4.33) - (4.34) formüllerinde olduğu gibi,

$$\Delta(\rho) \equiv \begin{vmatrix} U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_0(y_1) & U_0(y_2) & U_0(y_3) & U_0(y_4) \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.126)$$

biçimindeki denklemin köklerini araştıracağız. Burada $y_k(x,\rho)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$'lar $y^{(iv)} + q(x)y + \rho^4 y = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri, $U_s(y)$ $\left(s=\overline{0,3}\right)$'ler (4.115)'te verilen sınır koşulları ve $\rho \in T_0$'dır (bkz: (4.13)).

(4.20)'den $s=\overline{0,3}$ ve $k=\overline{1,4}$ için

$$U_s\left(y_k\right)=\rho^s\left\{e^{\rho\omega_k}z_{k,s}\left(1,\rho\right)-\left(-1\right)^{\sigma}z_{k,s}\left(0,\rho\right)+\frac{\alpha_s}{\rho}z_{k,s-1}\left(0,\rho\right)\right\} \tag{4.127}$$

dur; burada $\alpha_0=0$ 'dır. (4.15)'e göre $e^{\rho\omega_1}$ eksponansiyel olarak 0 'a, $e^{\rho\omega_4}$ ise eksponansiyel olarak sonsuza gider. O halde (4.122) ve (4.127)'den

$$\begin{gathered}U_s\left(y_1\right)=-\rho^s\left\{\left(-1\right)^{\sigma}z_{1,s}\left(0,\rho\right)-\frac{\alpha_s}{\rho}z_{1,s-1}\left(0,\rho\right)+O\left(\rho^{-5}\right)\right\},\\ U_s\left(y_4\right)=\rho^s e^{\rho\omega_4}\left\{z_{4,s}\left(1,\rho\right)+O\left(\rho^{-5}\right)\right\}\end{gathered} \tag{4.128}$$

elde edilir.

$$A_{s,k}\left(\rho\right)=\begin{cases}\left(-1\right)^{\sigma}z_{1,s}\left(0,\rho\right)-\dfrac{\alpha_s}{\rho}z_{1,s-1}\left(0,\rho\right), & k=1\\ e^{\rho\omega_k}z_{k,s}\left(1,\rho\right)-\left(-1\right)^{\sigma}z_{k,s}\left(0,\rho\right)+\dfrac{\alpha_s}{\rho}z_{k,s-1}\left(0,\rho\right), & k=2,3\\ z_{4,s}\left(1,\rho\right), & k=4\end{cases} \tag{4.129}$$

olsun. (4.127) - (4.129) formüllerinden

$$\begin{aligned}&U_s\left(y_1\right)=-\rho^s\left\{A_{s,1}\left(\rho\right)+O\left(\rho^{-5}\right)\right\},\\ &U_s\left(y_k\right)=\rho^s A_{s,k}\left(\rho\right)\quad\left(k=2,3\right),\\ &U_s\left(y_4\right)=\rho^s e^{\rho\omega_4}\left\{A_{s,4}\left(\rho\right)+O\left(\rho^{-5}\right)\right\}\end{aligned} \tag{4.130}$$

elde ederiz. Bu eşitlikleri (4.126)'da yerine yazıp birinci, ikinci, üçüncü satırlardaki ρ^3, ρ^2, ρ ve son sütundaki $e^{\rho\omega_4}$ çarpanlarını sadeleştirirsek (4.126) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta^{(1)}\left(\rho\right)+O\left(\rho^{-5}\right)=0; \tag{4.131}$$

burada

$$\Delta^{(1)}\left(\rho\right)=\begin{vmatrix}A_{3,1}\left(\rho\right) & A_{3,2}\left(\rho\right) & A_{3,3}\left(\rho\right) & A_{3,4}\left(\rho\right)\\ A_{2,1}\left(\rho\right) & A_{2,2}\left(\rho\right) & A_{2,3}\left(\rho\right) & A_{2,4}\left(\rho\right)\\ A_{1,1}\left(\rho\right) & A_{1,2}\left(\rho\right) & A_{1,3}\left(\rho\right) & A_{1,4}\left(\rho\right)\\ A_{0,1}\left(\rho\right) & A_{0,2}\left(\rho\right) & A_{0,3}\left(\rho\right) & A_{0,4}\left(\rho\right)\end{vmatrix} \tag{4.132}$$

dur.

(4.69) ve (4.70) bağıntıları kullanılarak,

$$e^{\rho\omega_k}-\left(-1\right)^{\sigma}=O\left(\rho^{-1}\right)\quad\left(k=2,3\right) \tag{4.133}$$

ve

$$e^{\rho\omega_k}-(-1)^{\sigma}=\frac{i\omega_k\alpha_2}{2\rho}+O\left(\rho^{-2}\right)\quad (k=2,3) \tag{4.134}$$

formülleri elde edilir.

Varsayalım ki $\int_0^1 q(\xi)\,d\xi=0$ 'dır ($\int_0^1 q(\xi)\,d\xi\neq 0$ durumu sonra incelenecektir). Buradan ve (4.122), (4.123), (4.129), (4.133) formüllerinden

$$A_{s,1}(\rho)=(-1)^{\sigma}\omega_1^s-\frac{\alpha_s}{\rho}\omega_1^{s-1}+O\left(\rho^{-3}\right),\quad A_{s,4}(\rho)=\omega_4^s+O\left(\rho^{-3}\right),$$

$$A_{s,k}(\rho)=\omega_k^s\left(e^{\rho\omega_k}-(-1)^{\sigma}\right)+\frac{\alpha_s}{\rho}\omega_k^{s-1}+\frac{(-1)^{\sigma}B_{s,k}(\rho)}{4\rho^3}+O\left(\rho^{-4}\right), \tag{4.135}$$

$$A_{s,k}(\rho)=O\left(\rho^{-1}\right)$$

sonucuna varılır; burada $s=\overline{0,3},\ k=2,3$ ve

$$\begin{aligned}B_{s,2}(\rho)&=\omega_3^{s+1}\int_0^1 q(\xi)e^{2\rho\omega_2\xi}d\xi\\&+\omega_1^{s+1}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_1-\omega_2)(1-\xi)}d\xi+\omega_4^{s+1}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_2-\omega_4)\xi}d\xi,\\B_{s,3}(\rho)&=\omega_2^{s+1}\int_0^1 q(\xi)e^{2\rho\omega_2(1-\xi)}d\xi\\&+\omega_1^{s+1}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_1-\omega_3)(1-\xi)}d\xi+\omega_4^{s+1}\int_0^1 q(\xi)e^{\rho(\omega_3-\omega_4)\xi}d\xi\end{aligned} \tag{4.136}$$

dir. $s=\overline{0,3},\ k=2,3$ için

$$A_{s,k}(\rho)=\omega_k^s\left(e^{\rho\omega_k}-(-1)^{\sigma}\right)+\frac{\alpha_s}{\rho}\omega_k^{s-1}+\frac{(-1)^{\sigma}B_{s,k}(\rho)}{4\rho^3} \tag{4.137}$$

olsun. (4.132), (4.135) ve (4.137)'den dolayı (4.131) denklemi

$$\Delta^{(2)}(\rho)+O\left(\rho^{-5}\right)=0 \tag{4.138}$$

denklemine denktir; burada

$$\Delta^{(2)}(\rho)=\begin{vmatrix} (-1)^{\sigma}\omega_1^3-\dfrac{\alpha_3}{\rho}\omega_1^2 & A_{3,2}(\rho) & A_{3,3}(\rho) & \omega_4^3 \\ (-1)^{\sigma}\omega_1^2-\dfrac{\alpha_2}{\rho}\omega_1 & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & \omega_4^2 \\ (-1)^{\sigma}\omega_1-\dfrac{\alpha_1}{\rho} & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & \omega_4 \\ (-1)^{\sigma} & A_{0,2}(\rho) & A_{0,3}(\rho) & 1 \end{vmatrix} \tag{4.139}$$

dir. (4.139) determinantını hesaplayalım. (4.10), (4.110), (4.136) ve (4.137)’ye göre (4.138) denklemi

$$\begin{aligned}&\left(e^{\rho\omega_2}-(-1)^{\sigma}\right)\left(e^{\rho\omega_3}-(-1)^{\sigma}\right)\left\{(-1)^{\sigma}\Delta_1-\frac{1}{\rho}\Delta_2\right\}\\ &+\left(e^{\rho\omega_2}-(-1)^{\sigma}\right)\left\{\frac{(-1)^{\sigma}}{\rho}\Delta_3-\frac{1}{\rho^2}\Delta_4+\frac{1}{4\rho^3}\Delta_5\right\}\\ &+\left(e^{\rho\omega_3}-(-1)^{\sigma}\right)\left\{\frac{(-1)^{\sigma}}{\rho}\Delta_6-\frac{1}{\rho^2}\Delta_7+\frac{1}{4\rho^3}\Delta_8\right\}\\ &+\frac{(-1)^{\sigma}}{\rho^2}\Delta_9-\frac{1}{\rho^3}\Delta_{10}+\frac{1}{4\rho^4}\Delta_{11}+\frac{1}{4\rho^4}\Delta_{12}+O\left(\rho^{-5}\right)=0\end{aligned} \tag{4.140}$$

denklemine denktir; burada

$$\Delta_1=\begin{vmatrix}\omega_1^3 & \omega_2^3 & \omega_3^3 & \omega_4^3\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \omega_4^2\\ \omega_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4\\ 1 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-16, \tag{4.141}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix}\alpha_3\omega_1^2 & \omega_2^3 & \omega_3^3 & \omega_4^3\\ \alpha_2\omega_1 & \omega_2^2 & \omega_3^2 & \omega_4^2\\ \alpha_1 & \omega_2 & \omega_3 & \omega_4\\ 0 & 1 & 1 & 1\end{vmatrix}=-8\omega_2\alpha_2, \tag{4.142}$$

$$\Delta_3=\begin{vmatrix}\omega_1^3 & \omega_2^3 & \alpha_3\omega_3^2 & \omega_4^3\\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & \alpha_2\omega_3 & \omega_4^2\\ \omega_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \omega_4\\ 1 & 1 & 0 & 1\end{vmatrix}=-8i\omega_2\alpha_2, \tag{4.143}$$

$$\Delta_4 = \begin{vmatrix} \alpha_3\omega_1^2 & \omega_2^3 & \alpha_3\omega_3^2 & \omega_4^3 \\ \alpha_2\omega_1 & \omega_2^2 & \alpha_2\omega_3 & \omega_4^2 \\ \alpha_1 & \omega_2 & \alpha_1 & \omega_4 \\ 0 & 1 & 0 & 1 \end{vmatrix} = 2\left(\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3\right), \qquad (4.144)$$

$$\Delta_5 = \begin{vmatrix} \omega_1^3 & \omega_2^3 & B_{3,3}(\rho) & \omega_4^3 \\ \omega_1^2 & \omega_2^2 & B_{2,3}(\rho) & \omega_4^2 \\ \omega_1 & \omega_2 & B_{1,3}(\rho) & \omega_4 \\ 1 & 1 & B_{0,3}(\rho) & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (4.145)$$

$$\Delta_6 = \begin{vmatrix} \omega_1^3 & \alpha_3\omega_2^2 & \omega_3^3 & \omega_4^3 \\ \omega_1^2 & \alpha_2\omega_2 & \omega_3^2 & \omega_4^2 \\ \omega_1 & \alpha_1 & \omega_3 & \omega_4 \\ 1 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = 8i\omega_2\alpha_2, \qquad (4.146)$$

$$\Delta_7 = \begin{vmatrix} \alpha_3\omega_1^2 & \alpha_3\omega_2^2 & \omega_3^3 & \omega_4^3 \\ \alpha_2\omega_1 & \alpha_2\omega_2 & \omega_3^2 & \omega_4^2 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \omega_3 & \omega_4 \\ 0 & 0 & 1 & 1 \end{vmatrix} = -2\left(\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3\right), \qquad (4.147)$$

$$\Delta_8 = \begin{vmatrix} \omega_1^3 & B_{3,2}(\rho) & \omega_3^3 & \omega_4^3 \\ \omega_1^2 & B_{2,2}(\rho) & \omega_3^2 & \omega_4^2 \\ \omega_1 & B_{1,2}(\rho) & \omega_3 & \omega_4 \\ 1 & B_{0,2}(\rho) & 1 & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (4.148)$$

$$\Delta_9 = \begin{vmatrix} \omega_1^3 & \alpha_3\omega_2^2 & \alpha_3\omega_3^2 & \omega_4^3 \\ \omega_1^2 & \alpha_2\omega_2 & \alpha_2\omega_3 & \omega_4^2 \\ \omega_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \omega_4 \\ 1 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4i\alpha_2^2, \qquad (4.149)$$

$$\Delta_{10} = \begin{vmatrix} \alpha_3\omega_1^2 & \alpha_3\omega_2^2 & \alpha_3\omega_3^2 & \omega_4^3 \\ \alpha_2\omega_1 & \alpha_2\omega_2 & \alpha_2\omega_3 & \omega_4^2 \\ \alpha_1 & \alpha_1 & \alpha_1 & \omega_4 \\ 0 & 0 & 0 & 1 \end{vmatrix} = -4i\omega_2\alpha_1\alpha_2\alpha_3, \qquad (4.150)$$

$$\Delta_{11} = \begin{vmatrix} \omega_1^3 & \alpha_3\omega_2^2 & B_{3,3}(\rho) & \omega_4^3 \\ \omega_1^2 & \alpha_2\omega_2 & B_{2,3}(\rho) & \omega_4^2 \\ \omega_1 & \alpha_1 & B_{1,3}(\rho) & \omega_4 \\ 1 & 0 & B_{0,3}(\rho) & 1 \end{vmatrix} = 0, \qquad (4.151)$$

$$\Delta_{12} = \begin{vmatrix} \omega_1^3 & B_{3,2}(\rho) & \alpha_3\omega_3^2 & \omega_4^3 \\ \omega_1^2 & B_{2,2}(\rho) & \alpha_2\omega_3 & \omega_4^2 \\ \omega_1 & B_{1,2}(\rho) & \alpha_1 & \omega_4 \\ 1 & B_{0,2}(\rho) & 0 & 1 \end{vmatrix} = 0 \qquad (4.152)$$

dır. (4.11), (4.133) ve (4.141) - (4.152)'ye göre (4.140) denklemi aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\left(8 - \frac{4(-1)^\sigma (1+i)\omega_2\alpha_2}{\rho} - \frac{\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3}{\rho^2}\right)e^{2\rho\omega_2}$$
$$-2\left(8(-1)^\sigma - \frac{4\omega_2\alpha_2}{\rho} + \frac{(-1)^\sigma i\alpha_2^2}{\rho^2} - \frac{i\omega_2\alpha_1\alpha_2\alpha_3}{\rho^3}\right)e^{\rho\omega_2}$$
$$+\left(8 - \frac{4(-1)^\sigma (1-i)\omega_2\alpha_2}{\rho} + \frac{\alpha_2^2 + 2\alpha_1\alpha_3}{\rho^2}\right) + O\left(\rho^{-5}\right) = 0.$$

Son denklem aşağıdaki iki denkleme ayrılır:

$$e^{\rho\omega_2} = (-1)^\sigma + \frac{i\omega_2\alpha_2}{2\rho} - \frac{(-1)^\sigma\left\{(1+i)\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_3 + 2\gamma_0\right\}}{8\rho^2} + O\left(\rho^{-3}\right), \qquad (4.153)$$

$$e^{\rho\omega_2} = (-1)^\sigma + \frac{i\omega_2\alpha_2}{2\rho} - \frac{(-1)^\sigma\left\{(1+i)\alpha_2^2 - 2\alpha_1\alpha_3 - 2\gamma_0\right\}}{8\rho^2} + O\left(\rho^{-3}\right); \qquad (4.154)$$

burada γ_0, (4.116) ve (4.117) eşitlikleriyle verilen sayıdır.

(4.153) denklemini araştıralım. Rouche teoremi kullanılarak (bkz: [1, IV, 5.2] [29, II, 4.9]) (4.153) denkleminin mutlak değerce yeterince büyük $\rho \in T_0$ köklerinin $G_n \subset T_0$ $\left(n = n_0, n_0+1, \ldots\right)$ bölgelerinde yerleştiği ispatlanabilir; burada G_n, merkezi $-(2n-\sigma)\pi i/\omega_2$, yarıçapı $O\left(n^{-1}\right)$ olan dairedir. Dahası, (4.153) denkleminin herbir G_n bölgesinde bir tek kökü vardır. ρ, (4.153) denkleminin G_n'deki kökü olsun. (4.72) ve (4.76) eşitliklerini kullanarak

$$\rho = -\frac{(2n-\sigma)\pi i}{\omega_2} + r, \quad r = -\frac{(-1)^\sigma \omega_2\alpha_2}{2(2n-\sigma)\pi} + O\left(n^{-2}\right) \qquad (4.155)$$

yazabiliriz.

r'yi daha kesin bir biçimde yazalım. (4.155)'ten dolayı

$$\frac{1}{\rho}=-\frac{\omega_2}{(2n-\sigma)\pi i}+O\left(n^{-3}\right)$$
$$e^{\rho\omega_2}=(-1)^{\sigma}\left\{1+r\omega_2-\frac{\alpha_2^2}{8\left((2n-\sigma)\pi\right)^2}+O\left(n^{-3}\right)\right\} \tag{4.156}$$

sağlanır. (4.153)'te $\rho=\rho$ yazarak ve (4.156) bağıntılarını kullanarak

$$r=\frac{1}{\omega_2}\left\{\frac{(-1)^{\sigma}\alpha_2}{2(2n-\sigma)\pi i}+\frac{i\left(\alpha_1^2+\alpha_3^2+2\gamma_0\right)}{8\left((2n-\sigma)\pi\right)^2}+O\left(n^{-3}\right)\right\} \tag{4.157}$$

elde ederiz. O halde (4.155) - (4.157)'den $z_n=-(2n-\sigma)\pi i/\omega_2$ $(n=n_0,n_0+1,\ldots)$ noktasının $O\left(n^{-1}\right)$ komşuluğunda (4.153) denkleminin tek bir

$$\rho_{n,1}=-\frac{1}{\omega_2}\left\{(2n-\sigma)\pi i-\frac{(-1)^{\sigma}\alpha_2}{2(2n-\sigma)\pi i}-\frac{i\left(\alpha_1^2+\alpha_3^2+2\gamma_0\right)}{8\left((2n-\sigma)\pi\right)^2}\right\}+O\left(n^{-3}\right) \tag{4.158}$$

köküne sahip olduğu elde edilir.

Benzer şekilde $z_n=-(2n-\sigma)\pi i/\omega_2$ $(n=n_0,n_0+1,\ldots)$ noktasının $O\left(n^{-1}\right)$ komşuluğunda (4.154) denklemi tek bir

$$\rho_{n,2}=-\frac{1}{\omega_2}\left\{(2n-\sigma)\pi i-\frac{(-1)^{\sigma}\alpha_2}{2(2n-\sigma)\pi i}-\frac{i\left(\alpha_1^2+\alpha_3^2-2\gamma_0\right)}{8\left((2n-\sigma)\pi\right)^2}\right\}+O\left(n^{-3}\right) \tag{4.159}$$

köküne sahiptir.

$\alpha_1+\alpha_3\neq 0$ olsun. Yeterince büyük bir n sayısı için $\lambda=-\left(\rho_{n,j}\right)^4$ $(j=1,2)$ özdeğerine karşılık gelen $u_{n,j}(x)$ özfonksiyonunu aşağıdaki formda araştıralım:

$$u_{n,j}(x)=-\frac{i\rho^{-4}e^{-\rho\omega_4}}{2}\left.\begin{vmatrix} y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & y_4(x,\rho)\\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4)\\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4)\\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4)\end{vmatrix}\right|_{\rho=\rho_{n,j}}.$$

Daha kesin olarak

$$u_{n,j}(x)=\frac{i\rho^2}{2}\left.\begin{vmatrix} -y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & e^{-\rho\omega_4}y_4(x,\rho)\\ -\rho^{-3}U_3(y_1) & \rho^{-3}U_3(y_2) & \rho^{-3}U_3(y_3) & \rho^{-3}e^{-\rho\omega_4}U_3(y_4)\\ -\rho^{-2}U_2(y_1) & \rho^{-2}U_2(y_2) & \rho^{-2}U_2(y_3) & \rho^{-2}e^{-\rho\omega_4}U_2(y_4)\\ -\rho^{-1}U_1(y_1) & \rho^{-1}U_1(y_2) & \rho^{-1}U_1(y_3) & \rho^{-1}e^{-\rho\omega_4}U_1(y_4)\end{vmatrix}\right|_{\rho=\rho_{n,j}} \tag{4.160}$$

yazabiliriz. (4.135)'ten

$$A_{s,k}(\rho)=O(1) \qquad \left(s=\overline{0,3}, k=\overline{1,4}\right), \tag{4.161}$$

ve (4.20) - (4.21)'den

$$y_k(x,\rho)=O(1) \quad (k=1,2,3), \qquad e^{-\rho\omega_4}y_4(x,\rho)=O(1) \tag{4.162}$$

elde edilir. (4.130) ve (4.160) - (4.162) formüllerinin yardımı ile

$$u_{n,j}(x)=\frac{i\rho^2}{2}\left.\begin{vmatrix} -y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & e^{-\rho\omega_4}y_4(x,\rho) \\ A_{3,1}(\rho) & A_{3,2}(\rho) & A_{3,3}(\rho) & A_{3,4}(\rho) \\ A_{2,1}(\rho) & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & A_{2,4}(\rho) \\ A_{1,1}(\rho) & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & A_{1,4}(\rho) \end{vmatrix}\right|_{\rho=\rho_{n,j}} +O\left(\rho^{-3}\right) \tag{4.163}$$

bulunur.

$$\begin{aligned} E_1(\rho)&=\left.\begin{vmatrix} A_{3,2}(\rho) & A_{3,3}(\rho) & A_{3,4}(\rho) \\ A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & A_{2,4}(\rho) \\ A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & A_{1,4}(\rho) \end{vmatrix}\right|_{\rho=\rho_{n,j}}, \\ E_4(\rho)&=\left.\begin{vmatrix} A_{3,1}(\rho) & A_{3,2}(\rho) & A_{3,3}(\rho) \\ A_{2,1}(\rho) & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) \\ A_{1,1}(\rho) & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) \end{vmatrix}\right|_{\rho=\rho_{n,j}} \end{aligned} \tag{4.164}$$

olsun. (4.134) ve (4.135) dikkate alındığında

$$A_{s,k}(\rho)=\frac{i\omega_k^{s+1}\alpha_2}{2\rho}+\frac{\omega_k^{s-1}\alpha_s}{\rho}+O\left(\rho^{-2}\right) \quad \left(s=\overline{0,3}, k=2,3\right) \tag{4.165}$$

olarak hesaplanır. (4.110), (4.161), (4.164) ve (4.165) bağıntıları kullanılarak

$$E_1(\rho)=O\left(\rho^{-3}\right), \quad E_4(\rho)=O\left(\rho^{-3}\right) \tag{4.166}$$

olduğu kolayca görülür. (4.163) ve (4.166)'ya göre

$$u_{n,j}(x)=\frac{i\rho^2}{2}\left\{y_3(x,\rho)E_2(\rho)-y_2(x,\rho)E_3(\rho)\right\}+O\left(\rho^{-1}\right) \tag{4.167}$$

dir; burada $\rho=\rho_{n,j}$ ve

$$E_k(\rho)=\left.\begin{vmatrix} A_{3,1}(\rho) & A_{3,k}(\rho) & A_{3,4}(\rho) \\ A_{2,1}(\rho) & A_{2,k}(\rho) & A_{2,4}(\rho) \\ A_{1,1}(\rho) & A_{1,k}(\rho) & A_{1,4}(\rho) \end{vmatrix}\right|_{\rho=\rho_{n,j}} \qquad (k=2,3)$$

tür. (4.134), (4.135), (4.153) ve (4.154)'ten

$$E_k(\rho) = -\frac{\alpha_1\alpha_3 + (-1)^k i\alpha_3(\alpha_1+\alpha_3) - (-1)^j \gamma_0}{\rho^2} + O\left(\rho^{-3}\right) \tag{4.168}$$

elde ederiz; burada, $\rho = \rho_{n,j}$ ve $k = 2,3$'tür. Bunun yanı sıra, (4.20), (4.21), (4.158) ve (4.159)'dan

$$\begin{gathered} y_2\left(x,\rho_{n,j}\right) = e^{-(2n-\sigma)\pi i x} + O\left(n^{-1}\right), \quad y_3\left(x,\rho_{n,j}\right) = e^{(2n-\sigma)\pi i x} + O\left(n^{-1}\right), \\ \left(\rho_{n,j}\right)^{-1} = O\left(n^{-1}\right) \end{gathered} \tag{4.169}$$

sağlanır. (4.162), (4.167), (4.168) ve (4.169) formülleri dikkate alınırsa $j = 1,2$ için

$$\begin{gathered} u_{n,j}(x) = \left(\alpha_1\alpha_3 - (-1)^j \gamma_0\right)\sin(2n-\sigma)\pi x \\ +\alpha_3(\alpha_1+\alpha_3)\cos(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right) \end{gathered} \tag{4.170}$$

elde edilir.

(4.170) formülünden kolayca görülür ki, $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$ durumunda $u_{n,1}(x)$ ve $u_{n,2}(x)$ fonksiyonlarının esas kısımları lineer bağımsızdır.

$\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ olsun. Yeterince büyük bir n sayısı için $\lambda = -\left(\rho_{n,1}\right)^4$ özdeğerine karşılık gelen $u_{n,1}(x)$ özfonksiyonunu

$$u_{n,1}(x) = -\frac{\sqrt{2}\rho^{-1}e^{-\rho\omega_4}}{4\omega_2\alpha_1^2}\begin{vmatrix} y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & y_4(x,\rho) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_0(y_1) & U_0(y_2) & U_0(y_3) & U_0(y_4) \end{vmatrix}_{\rho=\rho_{n,1}}$$

formunda, yani

$$u_{n,1}(x) = \frac{\sqrt{2}\rho^2}{4\omega_2\alpha_1^2}\begin{vmatrix} -y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & e^{-\rho\omega_4}y_4(x,\rho) \\ -\rho^{-2}U_2(y_1) & \rho^{-2}U_2(y_2) & \rho^{-2}U_2(y_3) & \rho^{-2}e^{-\rho\omega_4}U_2(y_4) \\ -\rho^{-1}U_1(y_1) & \rho^{-1}U_1(y_2) & \rho^{-1}U_1(y_3) & \rho^{-1}e^{-\rho\omega_4}U_1(y_4) \\ -U_0(y_1) & U_0(y_2) & U_0(y_3) & e^{-\rho\omega_4}U_0(y_4) \end{vmatrix}_{\rho=\rho_{n,1}}$$

formunda araştıralım. (4.130), (4.161), (4.162) formüllerinin yardımı ile

$$u_{n,1}(x) = \frac{\sqrt{2}\rho^2}{4\omega_2\alpha_1^2}\begin{vmatrix} -y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & e^{-\rho\omega_4}y_4(x,\rho) \\ A_{2,1}(\rho) & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & A_{2,4}(\rho) \\ A_{1,1}(\rho) & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & A_{1,4}(\rho) \\ A_{0,1}(\rho) & A_{0,2}(\rho) & A_{0,3}(\rho) & A_{0,4}(\rho) \end{vmatrix}_{\rho=\rho_{n,1}} + O\left(\rho^{-3}\right) \tag{4.171}$$

elde edilir.

$$F_1(\rho)=\begin{vmatrix} A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & A_{2,4}(\rho) \\ A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & A_{1,4}(\rho) \\ A_{0,2}(\rho) & A_{0,3}(\rho) & A_{0,4}(\rho) \end{vmatrix}_{\rho=\rho_{n,1}}, \qquad F_4(\rho)=\begin{vmatrix} A_{2,1}(\rho) & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) \\ A_{1,1}(\rho) & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) \\ A_{0,1}(\rho) & A_{0,2}(\rho) & A_{0,3}(\rho) \end{vmatrix}_{\rho=\rho_{n,1}} \tag{4.172}$$

olsun. $\alpha_2=\alpha_1+\alpha_3=0$ eşitliği (4.134) ve (4.135) formüllerinde dikkate alınarak (4.172) determinantları hesaplanırsa

$$F_1(\rho)=O\left(\rho^{-3}\right), \quad F_4(\rho)=O\left(\rho^{-3}\right)$$

bulunur. Buradan ve (4.171)'den

$$u_{n,1}(x)=\frac{\sqrt{2}\rho^2}{4\omega_2\alpha_1^2}\left\{y_3(x,\rho)F_2(\rho)-y_2(x,\rho)F_3(\rho)\right\}+O\left(\rho^{-1}\right) \tag{4.173}$$

dir; burada $\rho=\rho_{n,1}$ ve

$$F_k(\rho)=\begin{vmatrix} A_{2,1}(\rho) & A_{2,k}(\rho) & A_{2,4}(\rho) \\ A_{1,1}(\rho) & A_{1,k}(\rho) & A_{1,4}(\rho) \\ A_{0,1}(\rho) & A_{0,k}(\rho) & A_{0,4}(\rho) \end{vmatrix}_{\rho=\rho_{n,1}} \qquad (k=2,3)$$

tür. (4.117), (4.134), (4.135) ve (4.153)'ten

$$F_k(\rho)=\frac{2(-1)^k\omega_2\alpha_1^2}{\rho^2}+O\left(\rho^{-3}\right) \tag{4.174}$$

elde ederiz; burada $\rho=\rho_{n,1}$ ve $k=2,3$'tür. (4.162), (4.169), (4.173) ve (4.174) formülleri dikkate alınırsa

$$u_{n,1}(x)=\sqrt{2}\cos(2n-\sigma)\pi x+O\left(n^{-1}\right)$$

elde edilir.

$\alpha_1+\alpha_3=0$ durumunda yeterince büyük bir n sayısı için $\lambda=-\left(\rho_{n,2}\right)^4$ özdeğerine karşılık gelen $u_{n,2}(x)$ özfonksiyonunu

$$u_{n,2}(x) = -\frac{\sqrt{2}\rho^{-4}e^{-\rho\omega_4}}{4\alpha_1^2}\begin{vmatrix} y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & y_4(x,\rho) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \end{vmatrix}_{\rho=\rho_{n,2}}.$$

formunda araştırırsak, yukardaki hesaplamalara benzer hesaplamalarla

$$u_{n,2}(x) = \sqrt{2}\sin(2n-\sigma)\pi x + O(n^{-1})$$

elde ederiz.

$\alpha_{2,1} = \alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}$, $\alpha_{1,0}\alpha_{3,2}(\alpha_{1,0}^2 + \alpha_{1,0}\alpha_{3,2} + \alpha_{3,2}^2) \neq 0$ durumunda n_1 ve n_2 sayılarının hesaplanması $\alpha_{2,1} \neq \alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}$ durumu ile tamamen aynıdır. O halde $a_0 = \int_0^1 q(\xi)d\xi = 0$ durumunda Teorem 4.3.1'in ispatı tamamlandı.

$a_0 \neq 0$ olsun. Kolayca görülür ki, bu durumda (4.118) formülü

$$\lambda_{n+n_j,j} - a_0 = ((2n-\sigma)\pi)^4\left\{1 + \frac{2(-1)^\sigma \alpha_2}{((2n-\sigma)\pi)^2} - \frac{\alpha_1^2 + \alpha_3^2 - 2(-1)^j \gamma_0}{2((2n-\sigma)\pi)^3} + O(n^{-4})\right\}$$

halini alır. Açıktır ki bu formül (4.118) ile aynı formdadır. Bunun bir sonucu olarak $a_0 \neq 0$ olması (4.119) ve (4.120) formüllerini değiştirmez.

Teorem 4.3.1'in ispatı bitti.

4.3.3. Teorem 4.3.2 ve Sonuç 4.3.1'in İspatı

Biz sadece $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$ durumunda L operatörünün kök fonksiyonlar sisteminin tabanlık özelliklerini inceleyeceğiz. $\alpha_1 + \alpha_3 = 0$ durumunda ispat Teorem 4.2.2'nin ispatı ile tamamen aynıdır.

$$v_{1,1}(x), v_{1,2}(x), \ldots, v_{n,1}(x), v_{n,2}(x), \ldots \qquad (4.175)$$

sistemi

$$u_{1,1}(x), u_{1,2}(x), \ldots, u_{n,1}(x), u_{n,2}(x), \ldots \qquad (4.176)$$

sisteminin biortogonali olsun. Yani $(u_{n,j}, v_{m,s}) = \delta_{n,m}.\delta_{j,s}$ $(n,m = 1,2,..., j,s = 1,2)$ sağlansın. [16, s:84] veya [29, s:99]'daki iyi bilinen özelliğe göre, (4.175) sistemi L

operatörünün eşlenik operatörü olan L^* operatörünün kök fonksiyonlar sistemidir. L^* lineer diferansiyel operatörü

$$l^*(z) = z^{iv} + \overline{q(x)}z$$

diferansiyel ifadesi ve

$$\begin{aligned} U_0^*(z) &\equiv z(1) - (-1)^\sigma z(0) = 0, \\ U_1^*(z) &\equiv z'(1) - (-1)^\sigma z'(0) + (-1)^\sigma \overline{\alpha_3} z(1) = 0, \\ U_2^*(z) &\equiv z''(1) - (-1)^\sigma z''(0) + (-1)^\sigma \overline{\alpha_2} z'(1) = 0, \\ U_3^*(z) &\equiv z'''(1) - (-1)^\sigma z'''(0) + (-1)^\sigma \overline{\alpha_1} z''(1) = 0 \end{aligned}$$

eşlenik sınır koşullarıyla elde edilir.

$w(x) = \overline{z(1-x)}$ olarak tanımlayalım. Bu tanım ile aşağıdaki gibi bir L_0 operatörü elde ederiz:

$$\begin{aligned} l_0(w) &= w^{iv} + q(1-x)w, \\ U_3^{(0)}(w) &\equiv w'''(1) - (-1)^\sigma w'''(0) + \alpha_1 w''(0) = 0, \\ U_2^{(0)}(w) &\equiv w''(1) - (-1)^\sigma w''(0) + \alpha_2 w'(0) = 0, \\ U_1^{(0)}(w) &\equiv w'(1) - (-1)^\sigma w'(0) + \alpha_3 w(0) = 0, \\ U_0^{(0)}(w) &\equiv w(1) - (-1)^\sigma w(0) = 0. \end{aligned} \tag{4.177}$$

L_0 operatörü için, $\alpha_2 = \alpha_3 + \alpha_1 \neq 0$, $\gamma_0 \neq 0$ ve $q(1-x) \in L_1(0,1)$ koşulları yine sağlandığından Teorem 4.3.1'e göre yeterince büyük n sayıları ve $j=1,2$ için L_0 operatörünün kök fonksiyonları aşağıdaki gösterime sahiptir:

$$\begin{aligned} w_{n+n_j,j}(x) &= r_{n+n_j,j} \\ \times\Big[\big(\alpha_1\alpha_3 - (-1)^j \gamma_0\big)\sin(2n-\sigma)\pi x &+ \alpha_1(\alpha_1+\alpha_3)\cos(2n-\sigma)\pi x + O\big(n^{-1}\big)\Big], \end{aligned} \tag{4.178}$$

burada $r_{n+n_j,j}$ $(j=1,2)$ sıfırdan farklı kompleks sayılardır. $w(x) = \overline{z(1-x)}$ eşitliği ve (4.178)'den yeterince büyük n sayıları ve $j=1,2$ için

$$\begin{aligned} \overline{v_{n+n_j,j}(x)} &= -(-1)^\sigma r_{n+n_j,j} \\ \times\Big[\big(\alpha_1\alpha_3 - (-1)^j \gamma_0\big)\sin(2n-\sigma)\pi x &- \alpha_1(\alpha_1+\alpha_3)\cos(2n-\sigma)\pi x + O\big(n^{-1}\big)\Big] \end{aligned} \tag{4.179}$$

bağıntısı doğrudur. $\left(u_{n+n_j,j}, v_{n+n_j,j}\right) = 1$ $(j=1,2)$ eşitliği ve (4.119), (4.179) formüllerine göre yeterince büyük n sayıları ve $j=1,2$ için

$$r_{n+n_j,j} = -\frac{(-1)^{\sigma}}{\gamma_0^2 - (-1)^j \alpha_1\alpha_3\gamma_0} + O\left(n^{-1}\right)$$

sağlanır. Belirtelim ki $\alpha_1 + \alpha_3 \neq 0$ olduğundan $j = 1,2$ için $\gamma_0^2 - (-1)^j \alpha_1\alpha_3\gamma_0 \neq 0$ ’dır. O halde (4.179) formülü

$$\overline{v_{n+n_j,j}(x)} = \frac{1}{\gamma_0^2 - (-1)^j \alpha_1\alpha_3\gamma_0} \times$$
$$\times\left\{\left(\alpha_1\alpha_3 - (-1)^j \gamma_0\right)\sin(2n-\sigma)\pi x - \alpha_1(\alpha_1+\alpha_3)\cos(2n-\sigma)\pi x\right\} + O\left(n^{-1}\right) \quad (4.180)$$

halini alır.

$$g_0(x) = 1, \quad g_{2n-1}(x) = \sqrt{2}\sin 2n\pi x, \quad g_{2n}(x) = \sqrt{2}\cos 2n\pi x, \quad (4.181)$$

$$g_{2n-1} = \sqrt{2}\sin(2n-1)\pi x, \quad g_{2n} = \sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x, \quad (4.182)$$

$$h_0(x) = 1, \quad h_{2(n-1)+j}(x) = \left(\alpha_1\alpha_3 - (-1)^j \gamma_0\right)\sin 2n\pi x + \alpha_3(\alpha_1+\alpha_3)\cos 2n\pi x, \quad (4.183)$$

$$h_{2(n-1)+j}(x) = \left(\alpha_1\alpha_3 - (-1)^j \gamma_0\right)\sin(2n-1)\pi x + \alpha_3(\alpha_1+\alpha_3)\cos(2n-1)\pi x \quad (4.184)$$

olsun, burada $n = 1,2,\dots$ ve $j = 1,2$ ’dir. (4.181) ve (4.182) sistemlerinin ikisi de $L_2(0,1)$ uzayının ortonormal tabanlarıdır.

(4.119) ve (4.180) formüllerinden açıktır ki (4.175) ve (4.176) sistemleri Bessel eşitsizliğini sağlar. Yani her $f \in L_2(0,1)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\left|\left(f, u_{n,j}\right)\right|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\left|\left(f, v_{n,j}\right)\right|^2 < +\infty$$

dur. Dahası, (4.175) ve (4.176) sistemlerinin ikisi de $L_2(0,1)$ ’de tamdır (bkz: [30]). O halde [11, VI, 2.2, Theorem 2.1]’den bu iki sistem de $L_2(0,1)$ uzayının Riesz tabanlarıdır.

Şimdi Sonuç 4.3.1’i ispatlayalım. Lemma 4.3.1.1 ve Lemma 4.3.1.2’ye göre (4.183) ve (4.184) sistemlerinin ikisi de $L_2(0,1)$ ’in Riesz tabanıdır (bkz: (4.181) - (4.182)). $\sigma = 0$ için ispatı yapalım. $\sigma = 1$ durumu (4.184) kullanılarak benzer biçimde yapılır. $n_1 \geq 0$ ve $n_2 \geq 0$ olsun. (4.119) asimptotik formülü ve $\left\{h_k(x)\right\}_{k=0}^{k=\infty}$ sisteminin tanımından (bkz: (4.183))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\|u_{n+n_1,1}-h_{2n-1}\right\|^2+\left\|u_{n+n_2,2}-h_{2n}\right\|^2\right)\le const\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2}<+\infty \tag{4.185}$$

elde edilir. Açıktır ki (4.185)'te L operatörünün kök fonksiyonlarının n_1+n_2 tanesi, (4.183) sisteminin fonksiyonlarından da 1 tanesi yoktur.

$n_1+n_2>1$ olsun. Bu durumda (4.185)'ten (4.176) sisteminin n_1+n_2-1 fonksiyonu dışındaki fonksiyonlardan oluşan S sistemi (4.183)'e karesel yakındır. (4.183) sistemi $L_2(0,1)$ uzayının bir Riesz tabanı olduğundan S de $L_2(0,1)$'in Riesz tabanıdır [11, VI, 2, Theorem 2.3]. Bu durum (4.176) sisteminin $L_2(0,1)$'in tabanı olması ile çelişir.

$n_1=n_2=0$ olsun. (4.176) sistemi $L_2(0,1)$'in Riesz tabanı olduğundan yine (4.185) ile $\left\{g_k(x)\right\}_{k=1}^{k=\infty}$ sistemi taban olur ve bu da $\left\{g_k(x)\right\}_{k=0}^{k=\infty}$ sisteminin taban olması ile çelişir. Geriye kalan tüm durumlar benzer biçimde ispatlanır.

Böylece genel durumda $n_1+n_2=1-\sigma$ elde edilir. Genelliği kaybetmeden $n_1=0$ ve $n_2=1-\sigma$ varsayabiliriz. O halde

$$\begin{gathered}
u_{n,1}(x)= \\
=(\alpha_1\alpha_3+\gamma_0)\sin(2n-\sigma)\pi x+\alpha_3(\alpha_1+\alpha_3)\cos(2n-\sigma)\pi x+O\left(n^{-1}\right), \\
u_{n+1-\sigma,2}(x)= \\
=(\alpha_1\alpha_3-\gamma_0)\sin(2n-\sigma)\pi x+\alpha_3(\alpha_1+\alpha_3)\cos(2n-\sigma)\pi x+O\left(n^{-1}\right), \\
\overline{v_{n,1}(x)}=\frac{1}{\gamma_0^2+\alpha_1\alpha_3\gamma_0}\times \\
\times\left\{(\alpha_1\alpha_3+\gamma_0)\sin(2n-\sigma)\pi x-\alpha_1(\alpha_1+\alpha_3)\cos(2n-\sigma)\pi x\right\}+O\left(n^{-1}\right), \\
\overline{v_{n+1-\sigma,2}(x)}=\frac{1}{\gamma_0^2-\alpha_1\alpha_3\gamma_0}\times \\
\times\left\{(\alpha_1\alpha_3-\gamma_0)\sin(2n-\sigma)\pi x-\alpha_1(\alpha_1+\alpha_3)\cos(2n-\sigma)\pi x\right\}+O\left(n^{-1}\right)
\end{gathered} \tag{4.186}$$

yazabiliriz.

Şimdi, L operatörünün kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<+\infty, p\neq 2)$ uzayında taban oluşturduğunu ispatlayalım. Yukardaki gibi yalnızca $\sigma=0$ durumu için ispatı yapalım. $\sigma=1$ durumu benzerdir.

Belirtelim ki (4.181) sistemi her bir $p \in (1, +\infty)$ için $L_p(0,1)$'in tabanıdır [2, VIII, 20, Theorem 2]. Dolayısıyla [14, I, 4, Theorem 6]'dan $\exists M_p > 0$, $\forall f \in L_p(0,1)$ için

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} (f, g_n) g_n \right\|_p \le M_p \|f\|_p \quad (N = 1, 2, ...) \tag{4.187}$$

sağlanır; burada $\|\cdot\|_p$, $L_p(0,1)$ uzayındaki normdur.

$p \in (1,2)$ olsun. (4.176) sistemi $L_2(0,1)$'de tam olduğundan $L_p(0,1)$'de de tamdır. Dahası, $\forall f \in L_p(0,1)$ için

$$\left\| (f, v_{n,j}) u_{n,j} \right\|_p \le const \|f\|_p$$

sağlanır; burada $n = 1, 2, \ldots,$ ve $j = 1, 2$'dir. O halde [14, I, 4, Theorem 6]'dan (4.176) sisteminin $L_p(0,1)$'de taban olduğunu göstermek için $\forall f \in L_p(0,1)$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} (f, v_{n,j}) u_{n,j} \right\|_p \le M \|f\|_p \quad (m = 1, 2, ...)$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti bulmak yeterlidir. Belirtelim ki aynı koşullar altında

$$J_m(f) = \left\| \sum_{n=1}^{m} \left\{ (f, v_{n,1}) u_{n,1} + (f, v_{n+1,2}) u_{n+1,2} \right\} \right\|_p \le M' \|f\|_p \tag{4.188}$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir; burada $m = 1, 2, \ldots$ ve M' bir sabittir. (4.181) ve (4.186)'dan

$$J_m(f) \le J_{m,1}(f) + J_{m,2}(f) + J_{m,3}(f) + J_{m,4}(f) \tag{4.189}$$

bulunur; burada $m = 1, 2, \ldots$ ve

$$J_{m,1}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} (f, g_n) g_n \right\|_p, \quad J_{m,2}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} (f, g_n) O(n^{-1}) \right\|_p,$$

$$J_{m,3}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} (f, O(n^{-1})) g_n \right\|_p, \quad J_{m,4}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} (f, O(n^{-1})) O(n^{-1}) \right\|_p$$

dir.

(4.187)'ye göre

$$J_{m,1}(f) \le const\|f\|_p \tag{4.190}$$

sağlanır.

Riesz teoreminden (bkz: [37, XII, 2, Theorem 2.8])

$$\begin{aligned} J_{m,2}(f) &\le const\sum_{n=1}^{2m}\left|(f,g_n)\right|n^{-1} \\ &\le const\left(\sum_{n=1}^{2m}\left|(f,g_n)\right|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{n=1}^{2m}n^{-p}\right)^{1/p} \le const\|f\|_p . \end{aligned} \tag{4.191}$$

Burada, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$'dir. Dahası,

$$\begin{aligned} J_{m,3}(f) &\le \left\|\sum_{n=1}^{2m}\left(f,O\left(n^{-1}\right)\right)g_n\right\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{2m}\left|\left(f,O\left(n^{-1}\right)\right)\right|^2\right)^{1/2} \\ &\le const\|f\|_1\left(\sum_{n=1}^{2m}n^{-2}\right)^{1/2} \le const\|f\|_p \end{aligned} \tag{4.192}$$

ve

$$J_{m,4} \le const\|f\|_1\sum_{n=1}^{2m}n^{-2} \le const\|f\|_p \tag{4.193}$$

dir.

(4.188) eşitsizliği (4.189) - (4.193) eşitsizliklerinin bir sonucudur. (4.176) sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<2)$ uzayının bir tabanı olduğu ispatlandı.

$2<p<+\infty$ ve $1/p+1/q=1$ olsun. Belirtelim ki $1<q<2$'dir ve (4.175) sistemi, L^* operatörünün kök fonksiyonlar sistemidir. $\{w_{n,j}\}$ $(n=1,2,\dots,j=1,2)$ sisteminin (4.177) operatörünün kök fonksiyonlar sistemi olduğunu kabul edelim. Yukarıda ispatlandığı gibi, böyle bir operatörün kök fonksiyonlar sistemi $L_q(0,1)$'in tabanıdır. Öte yandan $w_{n,j}(x)=\overline{v_{n,j}(1-x)}$ $(n=1,2,\dots,j=1,2)$ eşitliği doğrudur. O halde $\{v_{n,j}(1-x)\}$ $(n=1,2,\dots,j=1,2)$ sistemi ve dolayısıyla (4.176) sistemi $L_p(0,1)$'in tabanıdır.

Teorem 4.3.2 ve Sonuç 4.3.1'in ispatı bitti.

4.4. $\alpha_{3,2} = \alpha_{2,1} = \alpha_{1,0} = 0$, $\alpha_{3,1}\alpha_{2,0} \neq 0$ DURUMUNDA PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

Bu kısımda

$$\alpha_{3,2} = \alpha_{2,1} = \alpha_{1,0} = 0, \ \alpha_{3,1}\alpha_{2,0} \neq 0 \tag{4.194}$$

$$p_2(x) \equiv p_1(x) \equiv 0 \tag{4.195}$$

durumunda problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edilecek, kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında taban oluşturduğu ispatlanacak ve bu tabanın $p = 2$ durumunda koşulsuz olduğu gösterilecektir.

Basitlik için

$$q(x) = p_0(x)$$

olarak alalım ve (4.1) - (4.2) diferansiyel operatörünü verilen koşullar altında tekrar yazalım:

$$l(y) = y^{(iv)} + q(x)y \quad (0 < x < 1), \tag{4.196}$$

$$\begin{aligned} &U_3(y) \equiv y'''(1) - (-1)^{\sigma} y'''(0) + \alpha_{3,1} y'(0) + \alpha_{3,0} y(0) = 0, \\ &U_2(y) \equiv y''(1) - (-1)^{\sigma} y''(0) + \alpha_{2,0} y(0) = 0, \\ &U_1(y) \equiv y'(1) - (-1)^{\sigma} y'(0) = 0, \\ &U_0(y) \equiv y(1) - (-1)^{\sigma} y(0) = 0. \end{aligned} \quad . \tag{4.197}$$

t sıfırdan farklı herhangi bir kompleks sayı olsun. Bundan sonra, $\sqrt{t}$ ile, $x^2 - t = 0$ denkleminin $0 \leq \arg\sqrt{t} < \pi$ koşulunu sağlayan tek kökünü göstereceğiz.

(4.194) – (4.195) koşulları altında problem ile ilgili iddialar aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.4.1. $q(x) \in L_1(0,1)$ keyfi kompleks değerli bir fonksiyon, $\alpha_{3,1}\alpha_{2,0} \neq 0$ olsun. O halde (4.196) - (4.197) diferansiyel operatörünün sonlu sayıdaki hariç tüm özdeğerleri basittir ve $\{\lambda_{n,1}\}_{n=1}^{n=\infty}$, $\{\lambda_{n,2}\}_{n=1}^{n=\infty}$ gibi iki sonsuz dizi oluşturur. Ayrıca, yeterince büyük n sayıları için aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur:

$$\lambda_{n+n_j,j} = \left((2n-\sigma)\pi\right)^4 \left\{1 - \frac{2(-1)^j \sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}}{\left((2n-\sigma)\pi\right)^3 i} + O\left(n^{-4}\right)\right\}, \tag{4.198}$$

burada $j=1,2$ ve n_1, n_2 belirli tamsayılardır. Bunun yanı sıra, yeterince büyük n doğal sayıları için $\lambda_{n,1}$ ve $\lambda_{n,2}$ özdeğerlerine karşılık gelen $u_{n,1}(x)$ ve $u_{n,2}(x)$ özfonksiyonları aşağıdaki asimptotik formüllere sahiptir:

$$u_{n+n_j,j}(x)=i\alpha_{3,1}\sin(2n-\sigma)\pi x-(-1)^j\sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}\cos(2n-\sigma)\pi x+O\left(n^{-1}\right), \quad (4.199)$$

Teorem 4.4.2. Teorem 4.4.1'in bütün koşulları sağlansın. O halde (4.196) - (4.197) diferansiyel operatörünün kök fonksiyonlar sistemi $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayının tabanını oluşturur ve bu taban $p=2$ için koşulsuzdur.

Sonuç 4.4.1. Teorem 4.4.1'in tüm koşulları sağlansın ve n_1, n_2 Teorem 4.4.1'de verilen tamsayılar olsun. Bu takdirde $n_1+n_2=1-\sigma$'dır ve $n_1=1-\sigma$, $n_2=0$ seçebiliriz.

4.4.1. Teorem 4.4.1'in İspatı

Teorem 4.2.1'in ispatındaki (4.33) - (4.34) formüllerinde olduğu gibi,

$$\Delta(\rho)\equiv\begin{vmatrix} U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_0(y_1) & U_0(y_2) & U_0(y_3) & U_0(y_4) \end{vmatrix}=0 \quad (4.200)$$

biçimindeki denklemin köklerini araştıracağız. Burada $y_k(x,\rho)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$'lar $y^{(iv)}+q(x)y+\rho^4 y=0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri, $U_s(y)$ $\left(s=\overline{0,3}\right)$'ler (4.197)'da verilen sınır koşulları ve $\rho\in T_0$'dır (bkz: (4.13)).

Basitlik için (4.197) sınır koşullarını

$$U_s(y)\equiv y^{(s)}(1)-(-1)^{\sigma}y^{(s)}(0)+\sum_{l=0}^{s-2}\alpha_{s,l}\,y^{(l)}(0)=0, \quad \left(s=\overline{1,3}\right)$$

ile gösterelim, burada $s=0,1$ ise $\alpha_{s,l}=0$'dır.

Buradan ve (4.20)'den $s=\overline{0,3}$ ve $k=\overline{1,4}$ için

$$U_s(y_k)=\rho^s\left\{e^{\rho\omega_k}z_{k,s}(1,\rho)-(-1)^\sigma z_{k,s}(0,\rho)+\sum_{l=0}^{s-2}\frac{\alpha_{s,l}}{\rho^{s-l}}z_{k,l}(0,\rho)\right\} \quad (4.201)$$

dur. (4.15)'e göre $e^{\rho\omega_1}$ eksponansiyel olarak 0'a, $e^{\rho\omega_4}$ ise eksponansiyel olarak sonsuza gider. O halde (4.122) ve (4.201)'den

$$\begin{gathered}U_s(y_1)=-(-1)^\sigma\rho^s\left\{z_{1,s}(0,\rho)-(-1)^\sigma\sum_{l=0}^{s-2}\frac{\alpha_{s,l}}{\rho^{s-l}}z_{k,l}(0,\rho)+O\left(\rho^{-5}\right)\right\},\\ U_s(y_4)=\rho^s e^{\rho\omega_4}\left\{z_{4,s}(1,\rho)+O\left(\rho^{-5}\right)\right\}\end{gathered} \quad (4.202)$$

elde edilir.

$$A_{s,k}(\rho)=\begin{cases}z_{1,s}(0,\rho)-(-1)^\sigma\sum\limits_{l=0}^{s-2}\dfrac{\alpha_{s,l}}{\rho^{s-l}}z_{1,l}(0,\rho), & k=1\\ e^{\rho\omega_k}z_{k,s}(1,\rho)-(-1)^\sigma z_{k,s}(0,\rho)+\sum\limits_{l=0}^{s-2}\dfrac{\alpha_{s,l}}{\rho^{s-l}}z_{k,l}(0,\rho), & k=2,3\\ z_{4,s}(1,\rho), & k=4\end{cases} \quad (4.203)$$

olsun. (4.201) - (4.203) formüllerinden

$$\begin{aligned}&U_s(y_1)=-(-1)^\sigma\rho^s\left\{A_{s,1}(\rho)+O\left(\rho^{-5}\right)\right\},\\ &U_s(y_k)=\rho^s A_{s,k}(\rho)\quad (k=2,3),\\ &U_s(y_4)=\rho^s e^{\rho\omega_4}\left\{A_{s,4}(\rho)+O\left(\rho^{-5}\right)\right\}\end{aligned} \quad (4.204)$$

elde ederiz. Bu eşitlikleri (4.200)'de yerine yazıp birinci, ikinci, üçüncü satırlardaki ρ^3, ρ^2, ρ, ilk sütundaki $-(-1)^\sigma$ ve son sütundaki $e^{\rho\omega_4}$ çarpanlarını sadeleştirirsek (4.200) aşağıdaki gibi yazılır:

$$\Delta^{(1)}(\rho)+O\left(\rho^{-5}\right)=0; \quad (4.205)$$

burada

$$\Delta^{(1)}(\rho)=\begin{vmatrix}A_{3,1}(\rho) & A_{3,2}(\rho) & A_{3,3}(\rho) & A_{3,4}(\rho)\\ A_{2,1}(\rho) & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & A_{2,4}(\rho)\\ A_{1,1}(\rho) & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & A_{1,4}(\rho)\\ A_{0,1}(\rho) & A_{0,2}(\rho) & A_{0,3}(\rho) & A_{0,4}(\rho)\end{vmatrix} \quad (4.206)$$

dur.

(4.69) ve (4.70) bağıntıları kullanılarak,

$$e^{\rho\omega_k}-(-1)^\sigma=O\left(\rho^{-2}\right)\quad (k=2,3) \quad (4.207)$$

formülü elde edilir. Buradan ve (4.122), (4.203) formüllerinden

$$\begin{gathered} A_{s,1}(\rho)=\omega_1^s+O\left(\rho^{-2}\right), \quad A_{s,4}(\rho)=\omega_4^s+O\left(\rho^{-3}\right), \\ A_{s,k}(\rho)=\omega_k^s\left(e^{\rho\omega_k}-(-1)^\sigma\right)+\frac{\alpha_{s,s-2}}{\rho^2}\omega_k^{s-2}+O\left(\rho^{-3}\right), \\ A_{s,k}(\rho)=O\left(\rho^{-2}\right), \quad s=\overline{0,3}, \quad k=2,3 \end{gathered} \tag{4.208}$$

sonucuna varılır. Buradan ve (4.206)'dan (4.205) denklemi

$$\Delta^{(2)}(\rho)+O\left(\rho^{-5}\right)=0 \tag{4.209}$$

denklemine denktir; burada

$$\Delta^{(2)}(\rho)=\begin{vmatrix} \omega_1^3 & \left(e^{\rho\omega_2}-(-1)^\sigma\right)\omega_2^3+\frac{\omega_2\alpha_{3,1}}{\rho^2} & \left(e^{\rho\omega_3}-(-1)^\sigma\right)\omega_3^3+\frac{\omega_3\alpha_{3,1}}{\rho^2} & \omega_4^3 \\ \omega_1^2 & \left(e^{\rho\omega_2}-(-1)^\sigma\right)\omega_2^2+\frac{\alpha_{2,0}}{\rho^2} & \left(e^{\rho\omega_3}-(-1)^\sigma\right)\omega_3^3+\frac{\alpha_{2,0}}{\rho^2} & \omega_4^2 \\ \omega_1 & \left(e^{\rho\omega_2}-(-1)^\sigma\right)\omega_2 & \left(e^{\rho\omega_3}-(-1)^\sigma\right)\omega_3 & \omega_4 \\ 1 & \left(e^{\rho\omega_2}-(-1)^\sigma\right) & \left(e^{\rho\omega_3}-(-1)^\sigma\right) & 1 \end{vmatrix} \tag{4.210}$$

dir. (4.210) determinantını hesaplayalım. (4.10)'a göre (4.209) denklemi

$$\begin{gathered} 16\left(e^{\rho\omega_2}-(-1)^\sigma\right)\left(e^{\rho\omega_3}-(-1)^\sigma\right)-\frac{4i\left(\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}\right)}{\rho^2}\left(e^{\rho\omega_2}-(-1)^\sigma\right) \\ -\frac{4i\left(\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}\right)}{\rho^2}\left(e^{\rho\omega_3}-(-1)^\sigma\right)-\frac{4\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}{\rho^4}+O\left(\rho^{-5}\right)=0 \end{gathered} \tag{4.211}$$

denklemine denktir. (4.11) ve (4.207) formüllerinden (4.211) denklemi aşağıdaki şekilde de yazılabilir:

$$\begin{gathered} \left(8(-1)^\sigma+\frac{2i\left(\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}\right)}{\rho^2}\right)e^{2\rho\omega_2}-2\left(8+\frac{2(-1)^\sigma i\left(\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}\right)}{\rho^2}-\frac{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}{\rho^4}\right)e^{\rho\omega_2} \\ +\left(8(-1)^\sigma+\frac{2i\left(\alpha_{3,1}+\alpha_{2,0}\right)}{\rho^2}\right)+O\left(\rho^{-5}\right)=0. \end{gathered}$$

Son denklem aşağıdaki iki denkleme ayrılır:

$$e^{\rho\omega_2}=(-1)^\sigma-\frac{i\sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}}{2\rho^2}+O\left(\rho^{-3}\right), \tag{4.212}$$

$$e^{\rho\omega_2}=(-1)^\sigma+\frac{i\sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}}{2\rho^2}+O\left(\rho^{-3}\right). \tag{4.213}$$

(4.212) denklemini araştıralım. Rouche teoremi kullanılarak (bkz: [1, IV, 5.2] [29, II, 4.9]) (4.212) denkleminin mutlak değerce yeterince büyük $\rho \in T_0$ köklerinin $G_n \subset T_0$ $\left(n = n_0, n_0+1, \ldots\right)$ bölgelerinde yerleştiği ispatlanabilir; burada G_n, merkezi $-\left(2n-\sigma\right)\pi i/\omega_2$, yarıçapı $O\left(n^{-1}\right)$ olan dairedir. Dahası, (4.212) denkleminin herbir G_n bölgesinde bir tek kökü vardır. ρ, (4.212) denkleminin G_n'deki kökü olsun. (4.72) ve (4.76) eşitliklerini kullanarak

$$\rho = -\frac{\left(2n-\sigma\right)\pi i}{\omega_2} + r, \quad r = O\left(n^{-2}\right) \tag{4.214}$$

yazabiliriz.

r'yi daha kesin bir biçimde yazalım. (4.214)'ten dolayı

$$\begin{aligned} \frac{1}{\rho} &= -\frac{\omega_2}{\left(2n-\sigma\right)\pi i} + O\left(n^{-3}\right) \\ e^{\rho\omega_2} &= \left(-1\right)^{\sigma}\left\{1 + r\omega_2 + O\left(n^{-4}\right)\right\} \end{aligned} \tag{4.215}$$

sağlanır. (4.212)'de $\rho = \rho$ yazarak ve (4.215) bağıntılarını kullanarak

$$r = \frac{-\left(-1\right)^{\sigma}\sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}}{2\omega_2\left(\left(2n-\sigma\right)\pi\right)^2} + O\left(n^{-3}\right) \tag{4.216}$$

elde ederiz. O halde (4.214) - (4.216)'dan $z_n = -\left(2n-\sigma\right)\pi i/\omega_2$ $\left(n = n_0, n_0+1, \ldots\right)$ noktasının $O\left(n^{-1}\right)$ komşuluğunda (4.212) denkleminin tek bir

$$\rho_{n,1} = -\frac{1}{\omega_2}\left\{\left(2n-\sigma\right)\pi i + \frac{\sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}}{2\left(\left(2n-\sigma\right)\pi\right)^2}\right\} + O\left(n^{-3}\right) \tag{4.217}$$

köküne sahip olduğu elde edilir.

Benzer şekilde $z_n = -\left(2n-\sigma\right)\pi i/\omega_2$ $\left(n = n_0, n_0+1, \ldots\right)$ noktasının $O\left(n^{-1}\right)$ komşuluğunda (4.213) denklemi tek bir

$$\rho_{n,2} = -\frac{1}{\omega_2}\left\{\left(2n-\sigma\right)\pi i - \frac{\sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}}{2\left(\left(2n-\sigma\right)\pi\right)^2}\right\} + O\left(n^{-3}\right) \tag{4.218}$$

köküne sahiptir.

Yeterince büyük bir n sayısı için $\lambda = -\left(\rho_{n,j}\right)^4$ $\left(j = 1,2\right)$ özdeğerine karşılık gelen $u_{n,j}\left(x\right)$ özfonksiyonunu aşağıdaki formda araştıralım:

$$u_{n,j}\left(x\right) =$$

$$= \frac{\rho^2}{4i}\begin{vmatrix} -\left(-1\right)^{\sigma} y_1\left(x,\rho\right) & y_2\left(x,\rho\right) & y_3\left(x,\rho\right) & e^{-\rho\omega_4} y_4\left(x,\rho\right) \\ -\left(-1\right)^{\sigma}\rho^{-3}U_3\left(y_1\right) & \rho^{-3}U_3\left(y_2\right) & \rho^{-3}U_3\left(y_3\right) & \rho^{-3}e^{-\rho\omega_4}U_3\left(y_4\right) \\ -\left(-1\right)^{\sigma}\rho^{-2}U_2\left(y_1\right) & \rho^{-2}U_2\left(y_2\right) & \rho^{-2}U_2\left(y_3\right) & \rho^{-2}e^{-\rho\omega_4}U_2\left(y_4\right) \\ -\left(-1\right)^{\sigma}\rho^{-1}U_1\left(y_1\right) & \rho^{-1}U_1\left(y_2\right) & \rho^{-1}U_1\left(y_3\right) & \rho^{-1}e^{-\rho\omega_4}U_1\left(y_4\right) \end{vmatrix}_{\rho=\rho_{n,j}} . \quad (4.219)$$

Önceki durumlara benzer hesaplamalarla, yeterince büyük n sayıları için $\lambda = -\left(\rho_{n,j}\right)^4$ $\left(j = 1,2\right)$ özdeğerine karşılık gelen $u_{n,j}\left(x\right)$ özfonksiyonunun

$$u_{n,j}\left(x\right) = i\alpha_{3,1}\sin\left(2n-\sigma\right)\pi x - \left(-1\right)^j\sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}\cos\left(2n-\sigma\right)\pi x + O\left(n^{-1}\right), \quad (4.220)$$

formülüne sahip olduğu görülür.

$\alpha_{3,2} = \alpha_{2,1} = \alpha_{1,0} = 0$, $\alpha_{3,1}\alpha_{2,0} \neq 0$ durumunda n_1 ve n_2 sayılarının hesaplanması $\alpha_{2,1} \neq \alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}$ durumu ile tamamen aynıdır.

Teorem 4.4.1'in ispatı bitti.

4.4.2. Teorem 4.4.2 ve Sonuç 4.4.1'in İspatı

$$v_{1,1}\left(x\right), v_{1,2}\left(x\right), \ldots, v_{n,1}\left(x\right), v_{n,2}\left(x\right), \ldots \quad (4.221)$$

sistemi

$$u_{1,1}\left(x\right), u_{1,2}\left(x\right), \ldots, u_{n,1}\left(x\right), u_{n,2}\left(x\right), \ldots \quad (4.222)$$

sisteminin biortogonali olsun. Yani $\left(u_{n,j}, v_{m,s}\right) = \delta_{n,m}.\delta_{j,s}$ $\left(n,m = 1,2,..., j,s = 1,2\right)$ sağlansın. [16, s:84] veya [29, s:99]'daki iyi bilinen özelliğe göre, (4.221) sistemi L operatörünün eşlenik operatörü olan L^* operatörünün kök fonksiyonlar sistemidir. L^* lineer diferansiyel operatörü

$$l^*\left(z\right) = z^{iv} + \overline{q\left(x\right)}z$$

diferansiyel ifadesi ve

$$U_0^*(z) \equiv z(1) - (-1)^\sigma z(0) = 0,$$
$$U_1^*(z) \equiv z'(1) - (-1)^\sigma z'(0) = 0,$$
$$U_2^*(z) \equiv z''(1) - (-1)^\sigma z''(0) - \overline{\alpha_{3,1}} z(0) = 0,$$
$$U_3^*(z) \equiv z'''(1) - (-1)^\sigma z'''(0) - \overline{\alpha_{2,0}} z'(0) + \overline{\alpha_{3,0}} z(0) = 0$$

eşlenik sınır koşullarıyla elde edilir.

L^* operatörü için $\overline{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}} \neq 0$ ve $\overline{q(x)} \in L_1(0,1)$ koşulları yine sağlandığından Teorem 4.4.1'e göre yeterince büyük n sayıları ve $j=1,2$ için L^* operatörünün kök fonksiyonları aşağıdaki gösterime sahiptir:

$$\overline{v_{n+n_j,j}(x)} = r_{n+n_j,j}$$
$$\times\left[-i\alpha_{2,0}\sin(2n-\sigma)\pi x - (-1)^j \sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}\cos(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right)\right], \tag{4.223}$$

burada $r_{n+n_j,j}$ $(j=1,2)$ sıfırdan farklı kompleks sayılardır. $\left(u_{n+n_j,j}, v_{n+n_j,j}\right) = 1$ $(j=1,2)$ eşitliği ve (4.199), (4.223) formüllerine göre yeterince büyük n sayıları ve $j=1,2$ için

$$r_{n+n_j,j} = \frac{1}{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}} + O\left(n^{-1}\right)$$

sağlanır. O halde (4.223) formülü

$$\overline{v_{n+n_j,j}(x)} = -\frac{i}{\alpha_{3,1}}\sin(2n-\sigma)\pi x - \frac{(-1)^j}{\sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}}\cos(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.224}$$

halini alır.

$$g_0(x) = 1, \quad g_{2n-1}(x) = \sqrt{2}\sin 2n\pi x, \quad g_{2n}(x) = \sqrt{2}\cos 2n\pi x, \tag{4.225}$$

$$g_{2n-1} = \sqrt{2}\sin(2n-1)\pi x, \quad g_{2n} = \sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x, \tag{4.226}$$

olsun, burada $n = 1,2,\ldots$'dir. (4.225) ve (4.226) sistemlerinin ikisi de $L_2(0,1)$ uzayının ortonormal tabanlarıdır.

(4.199) ve (4.224) formüllerinden açıktır ki (4.221) ve (4.222) sistemleri Bessel eşitsizliğini sağlar. Yani her $f \in L_2(0,1)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\left|\left(f, u_{n,j}\right)\right|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\left|\left(f, v_{n,j}\right)\right|^2 < +\infty$$

dur. Dahası, (4.221) ve (4.222) sistemlerinin ikisi de $L_2(0,1)$'de tamdır (bkz: [30]). O halde [11, VI, 2.2, Theorem 2.1]'den bu iki sistem de $L_2(0,1)$ uzayının Riesz tabanlarıdır.

Sonuç 4.4.1'in ispatı Sonuç 4.3.1'in ispatı ile tamamen aynıdır. O halde $n_1 = 0$ ve $n_2 = 1-\sigma$ yazabiliriz. Buna göre

$$\begin{aligned}
u_{n,1}(x) &= i\alpha_{3,1}\sin(2n-\sigma)\pi x + \sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}\cos(2n-\sigma)\pi x + O(n^{-1}),\\
u_{n+1-\sigma,2}(x) &= i\alpha_{3,1}\sin(2n-\sigma)\pi x - \sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}\cos(2n-\sigma)\pi x + O(n^{-1}),\\
\overline{v_{n,1}(x)} &= -\frac{i}{\alpha_{3,1}}\sin(2n-\sigma)\pi x + \frac{1}{\sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}}\cos(2n-\sigma)\pi x + O(n^{-1}),\\
\overline{v_{n+1-\sigma,2}(x)} &= -\frac{i}{\alpha_{3,1}}\sin(2n-\sigma)\pi x - \frac{1}{\sqrt{\alpha_{3,1}\alpha_{2,0}}}\cos(2n-\sigma)\pi x + O(n^{-1})
\end{aligned} \tag{4.227}$$

gösterimlerini elde ederiz.

Şimdi, L operatörünün kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < +\infty, p \neq 2)$ uzayında taban oluşturduğunu ispatlayalım. Yukardaki gibi yalnızca $\sigma = 0$ durumu için ispatı yapalım. $\sigma = 1$ durumu benzerdir.

Belirtelim ki (4.225) sistemi her bir $p \in (1,+\infty)$ için $L_p(0,1)$'in tabanıdır [2, VIII, 20, Theorem 2]. Dolayısıyla [14, I, 4, Theorem 6]'dan $\exists M_p > 0$, $\forall f \in L_p(0,1)$ için

$$\left\| \sum_{n=0}^{N} (f, g_n) g_n \right\|_p \leq M_p \|f\|_p \quad (N = 1,2,...) \tag{4.228}$$

sağlanır; burada $\|\cdot\|_p$, $L_p(0,1)$ uzayındaki normdur.

$p \in (1,2)$ olsun. (4.222) sistemi $L_2(0,1)$'de tam olduğundan $L_p(0,1)$'de de tamdır. Dahası, $\forall f \in L_p(0,1)$ için

$$\left\| (f, v_{n,j}) u_{n,j} \right\|_p \leq const \|f\|_p$$

sağlanır; burada $n = 1,2,\ldots,$ ve $j = 1,2$'dir. O halde [14, I, 4, Theorem 6]'dan (4.222) sisteminin $L_p(0,1)$'de taban olduğunu göstermek için $\forall f \in L_p(0,1)$,

$$\left\| \sum_{n=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \left(f, v_{n,j} \right) u_{n,j} \right\|_p \leq M \| f \|_p \quad (m = 1, 2, ...)$$

olacak biçimde bir $M > 0$ sabiti bulmak yeterlidir. Belirtelim ki aynı koşullar altında

$$J_m(f) = \left\| \sum_{n=1}^{m} \left\{ \left(f, v_{n,1} \right) u_{n,1} + \left(f, v_{n+1,2} \right) u_{n+1,2} \right\} \right\|_p \leq M' \| f \|_p \qquad (4.229)$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir; burada $m = 1, 2, \dots$ ve M' bir sabittir. (4.225) ve (4.227)'den

$$J_m(f) \leq J_{m,1}(f) + J_{m,2}(f) + J_{m,3}(f) + J_{m,4}(f) \qquad (4.230)$$

bulunur; burada $m = 1, 2, \dots$ ve

$$J_{m,1}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} (f, g_n) g_n \right\|_p, \quad J_{m,2}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} (f, g_n) O\left(n^{-1}\right) \right\|_p,$$

$$J_{m,3}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} \left(f, O\left(n^{-1}\right) \right) g_n \right\|_p, \quad J_{m,4}(f) = \left\| \sum_{n=1}^{2m} \left(f, O\left(n^{-1}\right) \right) O\left(n^{-1}\right) \right\|_p$$

dir.

(4.228)'e göre

$$J_{m,1}(f) \leq const \| f \|_p \qquad (4.231)$$

sağlanır.

Riesz teoreminden (bkz: [37, XII, 2, Theorem 2.8])

$$\begin{aligned} J_{m,2}(f) &\leq const \sum_{n=1}^{2m} \left| (f, g_n) \right| n^{-1} \\ &\leq const \left(\sum_{n=1}^{2m} \left| (f, g_n) \right|^q \right)^{1/q} \left(\sum_{n=1}^{2m} n^{-p} \right)^{1/p} \leq const \| f \|_p . \end{aligned} \qquad (4.232)$$

Burada, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$'dir. Dahası,

$$\begin{aligned} J_{m,3}(f) &\leq \left\| \sum_{n=1}^{2m} \left(f, O\left(n^{-1}\right) \right) g_n \right\|_2 = \left(\sum_{n=1}^{2m} \left| \left(f, O\left(n^{-1}\right) \right) \right|^2 \right)^{1/2} \\ &\leq const \| f \|_1 \left(\sum_{n=1}^{2m} n^{-2} \right)^{1/2} \leq const \| f \|_p \end{aligned} \qquad (4.233)$$

ve

$$J_{m,4} \le const\|f\|_1 \sum_{n=1}^{2m} n^{-2} \le const\|f\|_p \tag{4.234}$$

dir.

(4.229) eşitsizliği (4.230) - (4.234) eşitsizliklerinin bir sonucudur. (4.222) sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<2)$ uzayının bir tabanı olduğu ispatlandı.

$2<p<+\infty$ ve $1/p+1/q=1$ olsun. Belirtelim ki $1<q<2$'dir ve (4.221), L^* operatörünün kök fonksiyonlar sistemidir. Yukarıda ispatlandığı gibi, bu operatörün kök fonksiyonlar sistemi $L_q(0,1)$'in tabanıdır. O halde ona biortogonal olan (4.222) sistemi de $L_p(0,1)$'in tabanıdır.

Teorem 4.4.2'nin ispatı bitti.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde öncelikle bu tez çalışmasında ele alınan sonuçlar özetlenecek daha sonra bu konu ile ilgili başka nelerin yapılabileceği hakkında öneriler verilecektir.

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde, üç ana başlık altında (4.1) - (4.2) operatörünün özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışları incelenmiş, kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında taban oluşturduğu ve bu tabanın $p=2$ durumunda koşulsuz olduğu ispatlanmıştır:

(a) $\alpha_{2,1} \neq \alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}$,

(b) $\alpha_{2,1} = \alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}$, $\alpha_{3,2}\alpha_{1,0}\left(\alpha_{3,2}^2 + \alpha_{3,2}\alpha_{1,0} + \alpha_{1,0}^2\right) \neq 0$, $p_2(x) \equiv p_1(x) \equiv 0$,

(c) $\alpha_{3,2} = \alpha_{2,1} = \alpha_{1,0}$, $\alpha_{3,1}\alpha_{2,0} \neq 0$, $p_2(x) \equiv p_1(x) \equiv 0$.

Bu sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde verilmiştir. Problemin çözümü için gerekli lemmalar, teoremler ve yardımcı sonuçlar Materyal ve Yöntem başlığı altında verilmiştir.

5.2.ÖNERİLER

Tezde, (4.1) - (4.2) operatörünün spektral özellikleri ve kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayındaki tabanlığı aşağıdaki üç durumda incelenmiştir:

(a) $\alpha_{2,1} \neq \alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}$,

(b) $\alpha_{2,1} = \alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}$, $\alpha_{3,2}\alpha_{1,0}\left(\alpha_{3,2}^2 + \alpha_{3,2}\alpha_{1,0} + \alpha_{1,0}^2\right) \neq 0$, $p_2(x) \equiv p_1(x) \equiv 0$,

(c) $\alpha_{3,2} = \alpha_{2,1} = \alpha_{1,0}$, $\alpha_{3,1}\alpha_{2,0} \neq 0$ $p_2(x) \equiv p_1(x) \equiv 0$.

Görüldüğü gibi,

(d) $\alpha_{2,1} = \alpha_{3,2} + \alpha_{1,0}$, $\alpha_{3,2}\alpha_{1,0}\left(\alpha_{3,2}^2 + \alpha_{3,2}\alpha_{1,0} + \alpha_{1,0}^2\right) = 0$,

(e) $\alpha_{3,2} = \alpha_{2,1} = \alpha_{1,0}$, $\alpha_{3,1}\alpha_{2,0} = 0$

durumlarında, özellikle periyodik ve antiperiyodik durumlarda, (4.1) - (4.2) operatörünün tabanlık ve diğer spektral özellikleri incelenmemiştir.

KAYNAKLAR

[1] Ahlfors, V.L., "Complex Analysis", McGraw-Hill Inc., New York, 331 s., (1979).

[2] Bari, N.K., "A Treatise on Trigonometric Series, Vol. II", Macmillan, New York, 548 s., (1964).

[3] Christensen, O., "An Introduction to Frames and Riesz Bases", Birkhauser, Boston, 440 s., (1966).

[4] Dernek, N. and Veliev, O.A., "On the Riesz basisness of the root functions of the nonself-adjoint Sturm–Liouville operator", Israel J. Math., 145, 113–123, (2005).

[5] Djakov, P. and Mityagin, B., "Instability zones of one-dimensional periodic Shrödinger and Dirac operators", Russian Math. Surveys, 61(4), 663–766, (2006).

[6] Djakov, P. and Mityagin, B., "Convergence of spectral decompositions of Hill operators with trigonometric polynomials as potentials", Doklady Math., 83(1), 5–7, (2011).

[7] Djakov, P. and Mityagin, B., "Convergence of spectral decompositions of Hill operators with trigonometric polynomial potentials", Math. Ann., 351(3), 509–540, (2011).

[8] Djakov, P. and Mityagin, B., "Criteria for existance of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators", Journal of Functional Analysis, 263(8), 2300-2332, (2012).

[9] Dunford, N. and Schwartz, J.T., "Linear Operators. Part III", Wiley Classics Lib., John Wiley & Sons, New York, 667 s., (1988).

[10] Gesztesy, F. and Tkachenko, V., "A Schauder and Riesz basis criterion for non-self-adjoint Schrödinger operators with periodic and antiperiodic boundary conditions", Journal of Differential Equations, 253(2), 400–437, (2012).

[11] Gohberg, I.C. and Krein, M.G., "Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Transl. Math. Monogr., 18", American Mathematical Society, Providence, 378 s., (1969).

[12] Il'in, V.A. and Kritskov, L.V., "Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators", J. Math. Sci. (N.Y.), 116(5), 3489–3550, (2003).

[13] Ionkin, N.I., "The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition", Differ. Uravn., 13(2), 294–304 (in Russian), (1977).

[14] Kashin, B.S. and Saakyan, A.A., "Orthogonal Series, Transl. Math. Monogr., 75", American Mathematical Society, Providence, 378 s., (1989).

[15] Kerimov, N.B. and Mamedov, Kh.R., On the Riesz basis property of the root functions in certain regular boundary value problems, Math. Notes, 64(4), 483–487, (1998).

[16] Keselman, G.M., "On the unconditional convergence of eigenfunction expansions of certain differential operators", Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 39(2), 82–93 (in Russian), (1964).

[17] Kiraç, A.A., "Riesz basis property of the root functions of non-selfadjoint operators with regular boundary conditions", Int. J. Math. Anal. (Ruse), 3(21-24), 1101–1109, (2009).

[18] Makin, A.S., "On a class of boundary value problems for the Sturm–Liouville operator", Differ. Uravn., 35(8), 1058–1066 (in Russian), (1999).

[19] Makin, A.S., "On spectral decompositions corresponding to non-self-adjoint Sturm–Liouville operators", Dokl. Math., 73(1), 15–18, (2006).

[20] Makin, A.S., "Convergence of expansions in the root functions of periodic boundary value problems", Dokl. Math., 73(1), 71–76, (2006).

[21] Makin, A.S., "On the basis property of systems of root functions of regular boundary value problems for the Sturm–Liouville operator", Differ. Equ., 42(12) 1717–1728, (2006).

[22] Makin, A.S., "Characterization of the spectrum of regular boundary value problems for the Sturm–Liouville operator", Differ. Equ., 44(3), 341–348, (2008).

[23] Makin, A.S., "Asymptotics of the spectrum of the Sturm–Liouville operator with regular boundary conditions", Differ. Equ., 44(5), 645–658, (2008).

[24] Mamedov, Kh.R., "On the basis property in $L_p(0,1)$ of the root functions of a class non self adjoint Sturm–Liouville operators", Eur. J. Pure Appl. Math., 3(5), 831–838, (2010).

[25] Mamedov, Kh.R. and Menken, H., "On the basisness in $L_2(0,1)$ of the root functions in not strongly regular boundary value problems", Eur. J. Pure Appl. Math., 1(2), 51–60, (2008).

[26] Menken, H., "Accurate asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of a boundary-value problem of fourth order", Boundary Value Problems, DOI:10.1155/2010/720235, 21 s., (2010).

[27] Menken, H. and Mamedov, Kh.R., "Basis property in $L_p(0,1)$ of the root functions corresponding to a boundary-value problem", J. Appl. Funct. Anal., 5(4), 351–356, (2010).

[28] Mikhailov, V.P., "On Riesz bases in $L_2(0,1)$", Dokl. Akad. Nauk SSSR, 144(5), 981–984 (in Russian) , (1962).

[29] Naimark, M.A., Linear Differential Operators, 2nd ed., Nauka, Moskow, 129 s., (in Russian), (1969).

[30] Shkalikov, A.A., "Basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions", Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., 6, 12–21, (1982).

[31] Shkalikov, A.A. and Veliev, O.A., "On the Riesz basis property of eigen- and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm–Liouville problems", Math. Notes, 85(5-6), 647–660, (2009).

[32] Sobolev, V.J. and Liusternik, L.A., "Elements of Functional Anaysis", Rederick Ungar Publishing Company, New York, 227 s., (1965).

[33] Veliev, O.A., "On the nonself-adjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditions", Israel J. Math., 176, 195–207, (2010).

[34] Veliev, O.A., "Asymptotic analysis of non-self-adjoint Hill operators", arXiv.org, http://arxiv.org/pdf/1107.2552v4.pdf (23.07.2012).

[35] Veliev, O.A. and Duman, M.T., "The spectral expansion for a nonself-adjoint Hill operator with a locally integrable potential", J. Math. Anal. Appl., 265(1), 76–90, (2002).

[36] Veliev, O.A. and Nur, C. "On the basis property of the root functions of some class of non-self-adjoint Sturm–Liouville operators", arXiv.org, http://arxiv.org/pdf/1301.7043v1.pdf (29.01.2013).

[37] Zygmund, A., "Trigonometric Series. II, 2nd ed.", Cambridge University Press, New York, 331 s., (1959).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Ufuk KAYA

Doğum Tarihi: 08/04/1984

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Lise/Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	Mersin Atatürk Lisesi	1998-2001
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2002-2006
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2006-2008

Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Arş. Gör.	Mersin Üniversitesi	2006-

ESERLER

1. Kerimov, N.B. and Kaya, U. “A boundary value problem for the Dirac system containing a spectral parameter in one of the boundary conditions” Proceeding Book of International Conference on Applied Analysis and Algebra, Istanbul, p: 246, (2011).

2. Kerimov, N.B. and Kaya, U. “Spectral properties of some regular boundary value problems” Proceeding Book of International Conference on Mathematical Analysis Differential Equations and Their Applications, Mersin, p: 67, (2012).

3. Kerimov, N.B. and Kaya, U. "Spectral properties of some regular boundary value problems for fourth order differential operators", Central European Journal of Mathematics, 11(1), 94-111, (2013).

4. Kerimov, N.B. and Kaya, U. " Spectral asymptotics and basis properties of fourth order differential operators with regular boundary conditions", Mathematical Methods in the Applied Science, DOI: 10.1002/mma.2827, (2013).

5. Kerimov, N.B. and Kaya, U. "Some problems of spectral theory of fourth order differential operators with regular boundary conditions", (to appear in Arabian Journal of Mathematics, 06.03.2013).