TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLARDA BAĞIMSIZ RASTGELE DEĞİŞKENLERİN TOPLAMLARI

ERDENER KAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

MERSİN
NİSAN – 2013

TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLARDA BAĞIMSIZ RASTGELE DEĞİŞKENLERİN TOPLAMLARI

ERDENER KAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

MERSİN
NİSAN – 2013

Erdener KAYA tarafından Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV danışmanlığında ve Prof. Dr. Karl-Heinz INDLEKOFER eş danışmanlığında hazırlanan " Toplamsal Aritmetik Yarı Gruplarda Bağımsız Rastgele Değişkenlerin Toplamları" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV	....
Prof. Dr. Karl-Heinz INDLEKOFER	....
Prof. Dr. Hayrullah AYIK	....
Doç. Dr. Hamza MENKEN	....
Yrd. Doç. Dr. Orkun COŞKUNTUNCEL	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26.04./2013 tarih ve 2013.08./245 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLARDA BAĞIMSIZ RASTGELE DEĞİŞKENLERİN TOPLAMLARI

Erdener KAYA

ÖZ

G, asal elemanların sayılabilir kümesi P tarafından üretilen; birim elemanı 1_G olan değişmeli yarı grup ve $\partial : G \to \mathbb{N}_0$ şeklinde tanımlanan derece fonksiyonu olmak üzere (G,∂) toplamsal aritmetik yarı grup olsun. Kabul edelim ki G'nin üretici fonksiyonu Z, $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfının bir elamanı olsun (Indlekofer sınıfı [14]). p asal eleman, $k \in \mathbb{N}_0$ ve G'nin p^k ile tam bölünebilen elemanlarının kümesi $A_{p^k} := \{a \in G: \ p^k \| a\}$ olmak üzere $\mathcal{A}$ ile $\{A_{p^k}\}$ kümeleri tarafından üretilen cebir gösterilsin. $A \in \mathcal{A}$ için

$$\delta(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{G(n)} \#\{a \in A : \partial(a) = n\}$$

asimptotik yoğunluğu vardır ve δ, $\mathcal{A}$ cebirinde tanımlı sonlu toplamsal ölçüdür.

Bu tezde, βG, G'nin Stone - Čech kompaktlaştırılması, $\sigma(\bar{\mathcal{A}})$, $\bar{\mathcal{A}} := \{\bar{A}: \ A \in \mathcal{A}\}$ cebiri tarafından üretilen sigma cebir ve $\bar{\delta}$, her $\bar{A} \in \bar{\mathcal{A}}$ için $\bar{\delta}(\bar{A}) = \delta(A)$ şeklinde tanımlanan $\sigma(\bar{\mathcal{A}})$'de ölçü olmak üzere G, $(\beta G, \sigma(\bar{\mathcal{A}}), \bar{\delta})$ olasılık uzayına gömülmektedir.

Ayrıca, G'de tanımlanan $g(a) = \sum_{p^k \| a} g(p^k)$, $(a \in G)$ biçimindeki reel değerli her toplamsal fonksiyonunun $(\beta G, \sigma(\bar{\mathcal{A}}), \bar{\delta})$ olasılık uzayında bağımsız rastgele değişkenlerin toplamı $\bar{g} = \sum_p X_p$'e tek türlü genişlediği gösterildi.

Reel değerli toplamsal fonksiyon g'nin limit dağılımının varlığının $\bar{g}$ serisinin hemen hemen her yerde yakınsamasına denk olduğu ispatlandı. Başka denk ifadeler üç-seri teoreminde formulize edildi.

Son olarak, esas dağılımlı toplamsal fonksiyonların karakterizasyonu iki-seri teoreminde verildi. Bu sonuç, G'nin üretici fonksiyonu olan Z'nin $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfının bir alt sınıfından olması durumunda ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Toplamsal aritmetik yarı gruplar, $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfı, toplamsal fonksiyonlar, limit dağılım, bağımsız rastgele değişkenlerin toplamları

Danışman: Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

Eş Danışman: Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Karl-Heinz INDLEKOFER, Paderborn Üniversitesi, Bilgisayar Bilimi Elektrik Elektronik ve Matematik Fakültesi

SUMS OF INDEPENDENT RANDOM VARIABLES ON ADDITIVE ARITHMETICAL SEMIGROUPS

Erdener KAYA

ABSTRACT

Let (G,∂) be an additive arithmetical semigroup if G, generated by a countable set P of prime elements, is a commutative semigroup with identity element 1_G, and ∂ is an integer valued degree mapping $\partial : G \to \mathbb{N}_0$. Assume that the generating function Z of G is an element of the $\exp-\log$ class $\mathcal{F}$ (the class of Indlekofer [14]). For prime elements $p \in P$ and $k \in \mathbb{N}_0$ let $A_{p^k} := \{ a \in G : \; p^k \parallel a \}$ be the set of all elements of G divisible exactly by p^k. Further, let $\mathcal{A}$ be the algebra generated by the sets $\{A_{p^k}\}$. For $A \in \mathcal{A}$ the asymptotic density

$$\delta(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{G(n)} \#\{ a \in A : \partial(a) = n \}$$

exists and defines a content on $\mathcal{A}$.

In this thesis, G is embedded in the probability space $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}\right), \bar{\delta}\right)$, where βG is the Stone-Čech compactification of G, $\sigma\left(\bar{\mathcal{A}}\right)$ is generated by the algebra $\bar{\mathcal{A}} = \{ \bar{A} : \; A \in \mathcal{A} \}$ and $\bar{\delta}$ is the measure in $\sigma\left(\bar{\mathcal{A}}\right)$ defined by $\bar{\delta}\left(\bar{A}\right) = \delta(A)$ for all $\bar{A} \in \bar{\mathcal{A}}$.

Further, it is shown that every real-valued additive function g on G , $g(a) = \sum_{p^k \parallel a} g\left(p^k\right)$ $(a \in G)$, is uniqely extended to a sum $\bar{g} = \sum_p X_p$ of independent random variables on $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}\right), \bar{\delta}\right)$. Then, it is proven that the existence of the limit distribution of the real-valued additive function g is equivalent to the almost every convergence of $\bar{g}$. Further equivalent assertions are formulated in the Three-series theorem.

And finally, a characterization of essentially distributed additive functions is given in the Two-series theorem. This result is proven in case that the generating function Z of G belongs to a subclass of the $\exp-\log$ class $\mathcal{F}$.

Key Words: Additive arithmetical semigroups, $\exp-\log$ class $\mathcal{F}$, additive functions, limit distribution, sums of independent random variables

Advisor: Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV, Department of Mathematics, University of Mersin

Co-advisor: Prof. Dr. Dr. h.c. mult. Karl-Heinz INDLEKOFER, Faculty of Computer Science Electrical Engineering and Mathematics, University of Paderborn

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasında desteklerini esirgemeyen, özverileriyle bilgi ve görüşlerini paylaşan tez danışman hocalarım Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV'e ve Prof. Dr. Karl-Heinz INDLEKOFER'e sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Paderborn Üniversitesinde tez çalışmalarımı gerçekleştirmeme imkan sağlayan, yardımlarını hiçbir zaman esirgemeyen ve toplamsal aritmetik yarı gruplar konusu ile ilgili hiçbir sorumu karşılıksız bırakmayan Prof. Dr. Karl-Heinz INDLEKOFER'e, tezde elde edilen sonuçların tartışılması ve değerlendirilmesinde yardımlarını esirgemeyen Prof. Dr. Imre KATÁI'e, Prof. Dr. Oleg I. KLESOV'a, Dr. Anna BARÁT'a ve Dr. Robert WAGNER'e müteşekkirim.

Ayrıca tez izleme komitesinde yer alan hocalarım, Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN'a, Doç. Dr. Hamza MENKEN'e, Yrd. Doç. Dr. Orkun COŞKUNTUNCEL'e katkılarından dolayı teşekkür ederim.

Çalışmalarım boyunca desteklerini esirgemeyen tüm Matematik Bölümü hocalarına ve araştırma görevlilerine teşekkür ederim.

Bu tezin oluşmasında finansal destek sağlayan, Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projesi Birimi'ne sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZ i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ v

1. GİRİŞ 1

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI 5

3. MATERYAL ve YÖNTEM 9

3.1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER 9

3.2. TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLAR VE ÖZELLİKLERİ 17

3.3. TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUP ÜZERİNE KONULAN KOŞULLAR VE SONUÇLARI 27

3.4. STONE-ČECH KOMPAKTLAŞTIRILMA VE INDLEKOFER'İN OLASILIK MODELİ 41

4. BULGULAR ve TARTIŞMA 45

4.1. YARDIMCI LEMMALAR 45

4.2. TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLARIN STONE-ČECH KOMPAKTLAŞTIRILMASI 47

4.3. TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLARDA BAĞIMSIZ RASTGELE DEĞİŞKENLER VE 3-SERİ TEOREMİ 54

4.4. TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLARDA SONLU DAĞILIMLI TOPLAMSAL FONKSİYONLAR VE 2- SERİ TEOREMİ 60

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 69

KAYNAKLAR 72

ÖZGEÇMİŞ 75

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}\cup\{0\}$
$\beta\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesinin Stone-Čech kompaktlaştırılması
$:=$	Tanım olarak eşit
$a \asymp b$	$\exists c_1, c_2$ pozitif sabitleri öyle ki $c_1 a \le b \le c_2 a$
D	Birim daire
$H(A)$	A bölgesinde analitik fonksiyonların kümesi
∂	Derece fonksiyonu
P	Asal elemanların kümesi
G	Toplamsal aritmetik yarı grup
βG	Toplamsal aritmetik yarı grubunun Stone-Čech kompaktlaştırılması
$\bar{A} := cl_{\beta\mathbb{N}} A$	$A \subset \mathbb{N}$ kümesinin $\beta\mathbb{N}$ kompakt uzayındaki kapanışı
$\bar{A} := cl_{\beta G} A$	$A \subset G$ kümesinin βG kompakt uzayındaki kapanışı
Z	G toplamsal aritmetik yarı grubunun üretici (Zeta) fonksiyonu
μ	Möbius fonksiyonu
H^p	Hardy uzayı
$G(n)$	G toplamsal aritmetik yarı grubunda derecesi n'e eşit olan elemanların sayısı
$\pi(n)$	G toplamsal aritmetik yarı grubunda derecesi n'e eşit olan asal elemanların sayısı
Λ	Von Mangoldt fonksiyonu
$\lambda(n)$	Von Mangoldt fonksiyonunun taylor katsayısı
F	f aritmetik fonksiyonun üretici fonksiyon
$\omega(a)$	Asal bölen fonksiyonu
#	Kümenin kardinalitesi

$M(f)$	f fonksiyonunun ortalama değeri
X	Rastgele değişken
$[X \in A]$	$\{w \in \Omega : X(w) \in A\}$, $A \subset \mathbb{R}$
$\mathcal{P}$	Olasılık fonksiyonu
$\mathbb{E}[X]$	X rastgele değişkeninin beklenen değeri
$Var[X]$	X rastgele değişkeninin varyansı

1. GİRİŞ

Sayılar teorisi ve olasılıklı sayılar teorisinde ele alınan birçok temel problem, toplamsal aritmetik yarı gruplara taşınmıştır. Klasik anlamda ele alınan bu problemlerin toplamsal aritmetik yarı gruplara taşınması sırasında kullanılan yöntem ve geliştirilen metotlar diğer alanlara uygulanabilmiştir. Örneğin, K.-H. Indlekofer [15] çalışmasında işaretlenmiş yapıların (labelled structur) ve çoklu kümelerin (multisets) toplamsal aritmetik yarı grup olduğunu göstermiştir.

Toplamsal aritmetik yarı gruplara taşınan problemlere asal sayı teoremi (Prime Number Theorem), aritmetik fonksiyonların ortalama değer teoremleri (Mean-Value Theorems), toplamsal veya çarpımsal fonksiyonların limit dağılımları, verilebilir.

Toplamsal aritmetik yarı gruplar 1979 yılında J. Knopfmcaher tarafından aşağıdaki şekilde tanımlanmıştır:

$\varnothing \neq P \subset G$ sayılabilir küme ve $(G,\cdot)$ birim elemanı 1_G olan bir değişmeli yarı grup olsun öyle ki $1_G \neq a \in G$ için

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \quad \left(p_i \in P \;, i = 1, \ldots, r\right) \text{ ve } \alpha_i \in \mathbb{N}$$

biçiminde yazılsın. G üzerinde

$$\partial : G \to \mathbb{N}_0$$

şeklinde tanımlanan ve

(i) $\partial(1_G) = 0$ ve her $p \in P$ için $\partial(p) > 0$,

(ii) Her $a,b \in G$ için $\partial(ab) = \partial(a) + \partial(b)$,

(iii) Her $n \geq 0$ için

$$G(n) := \#\left\{a \in G : \partial(a) = n\right\} \tag{1.1}$$

sonlu,

koşullarını sağlayan ∂ fonksiyonu ile (G,∂) ikilisine *toplamsal aritmetik yarı grup* denir [23].

q bir doğal sayı olmak üzere, $\mathbb{F}_q[X]$ ile, katsayıları q elemanlı $\mathbb{F}_q$ Galois cisminden olan polinom halkası gösterilsin. $\mathbb{F}_q[X]$ polinom halkasının monik polinomlarından oluşan G_q alt kümesi, üzerinde tanımlı her bir monik polinomu derecesine götüren ∂ fonksiyonu ile birlikte bir toplamsal aritmetik yarı gruptur [23].

K.-H. Indlekofer [9,12] çalışmalarında doğal sayılar kümesinde aşağıdaki olasılık modelini geliştirdi:

p asal sayı olmak üzere

$$A_p := \{ n \in \mathbb{N} : \ p | n \}$$

ile p asalı tarafından bölünebilen doğal sayıların kümesi gösterilsin. $\mathcal{A}$ ise $\{A_p\}$ kümeleri tarafından üretilen cebir ve δ, $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde tanımlı sonlu toplamsal ölçü olsun. Bu durumda, $\beta\mathbb{N}$, $\mathbb{N}$ doğal sayı kümesinin Stone-Čech kompaktlaştırılması, $\overline{A}$, A kümesinin $\beta\mathbb{N}$ kompakt uzayındaki kapanışı, $\sigma(\overline{\mathcal{A}})$ ise $\overline{\mathcal{A}} = \{ \overline{A} : \ A \in \mathcal{A} \}$ tarafından üretilen σ -cebir ve $\overline{\delta}$, her $\overline{A} \in \mathcal{A}$ için $\overline{\delta}(\overline{A}) = \delta(A)$ şeklinde tanımlanan ölçü olmak üzere $\left(\beta\mathbb{N}, \sigma(\overline{\mathcal{A}}), \overline{\delta}\right)$ bir ölçü (olasılık) uzayıdır.

Bu tezde, ilk olarak K.-H. Indlekofer'in vermiş olduğu olasılık modeli aşağıdaki yöntem kullanılarak toplamsal aritmetik yarı gruplara taşınacaktır:

p asal elaman olmak üzere,

$$A_{p^k} := \{ a \in G : \ p^k \| a \}$$

kümesi G toplamsal aritmetik yarı grubunun $p \mid a$, $p^2 \mid a, \ldots, p^k \mid a$, $p^{k+1} \nmid a$ koşulunu sağlayan elemanlarının kümesini göstersin. $\mathcal{A}$, $\{A_{p^k}\}$ kümeleri tarafından üretilen cebir olmak üzere $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde

$$\delta(A) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{G(n)} \#\{a \in A : \partial(a) = n\}$$

şeklinde tanımlanan δ fonksiyonu sonlu toplamsal ölçü olsun. Bu durumda, βG, G toplamsal aritmetik yarı grubunun Stone-Čech kompaktlaştırılması, $\bar{A}$, A kümesinin βG kompakt uzayındaki kapanışı, $\sigma(\bar{\mathcal{A}})$, $\bar{\mathcal{A}} = \{\bar{A} : A \in \mathcal{A}\}$ tarafından üretilen σ - cebir ve $\bar{\delta}$, her $\bar{A} \in \mathcal{A}$ için $\bar{\delta}(\bar{A}) = \delta(A)$ şeklinde tanımlanan ölçü olmak üzere $(\beta G, \sigma(\bar{\mathcal{A}}), \bar{\delta})$ bir olasılık uzayıdır.

Daha sonra; G bir toplamsal aritmetik yarı grup olmak üzere, $g : G \to \mathbb{R}$ tanımlı toplamsal fonksiyon olsun. $x \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{F}_n(x) := \frac{1}{G(n)} \#\{a \in G : \partial(a) = n,\ g(a) \le x\}$$

şeklinde tanımlanan dağılım fonksiyonunun hangi koşullar altında $\mathcal{F}(x)$ dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsadığı araştırılacaktır. Böylece toplamsal aritmetik yarı gruplarda tanımlı reel değerli toplamsal fonksiyonların limit dağılım fonksiyonunun varlığı için gerek ve yeter koşullar elde edilmiş olacaktır (3-seri teoremi). Ayrıca, aynı teoremde, $g : G \to \mathbb{R}$ olmak üzere her $a \in G$ için

$$g(a) = \sum_{p^k \| a} g(p^k)$$

şeklinde tanımlanan toplamsal fonksiyonun, $(\beta G, \sigma(\bar{\mathcal{A}}), \bar{\delta})$ olasılık uzayındaki genişlemesi olan $\bar{g}$ fonksiyonunun bağımsız rastgele değişkenlerin toplamı şeklinde yazılabileceği gösterilecektir.

Son olarak, toplamsal aritmetik yarı gruplarda tanımlı reel değerli toplamsal fonksiyonların esas dağılımlı olmasını karakterize eden 2-seri teoremi verilecektir.

Bu tezin, Materyal ve Yöntem kısmında, Bulgular ve Tartışma bölümünde verilen esas teoremler ve sonuçların ispatı için gerekli tanım ve teoremler verilecektir.

Bu tezde G ile toplamsal aritmetik yarı gruplar gösterilecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Toplamsal aritmetik yarı gruplar 1979 yılında J. Knopfmacher [23] tarafından, E. Fogels'ın polinom cebirleri ve cebirsel fonksiyonlar cismi üzerine olan [7] çalışmasından esinlenerek tanımlanmıştır. p asal eleman olmak üzere

$$\pi(n) := \#\{p \in P : \partial(p) = n\}$$

ile, P'nin derecesi n'e eşit olan asal elemanların sayısı gösterilsin.

Bu durumda, her $n \geq 0$ için (1.1)'in sonlu olmasından $\pi(n)$'inde sonlu olduğu elde edilir.

J. Knopfmacher [23]'de, $A > 0,\ q > 1$ ve $0 \leq \nu < 1$ (A, q ve ν, G'e bağlı sabitler) olmak üzere G toplamsal aritmetik yarı grubu üzerine

$$G(n) = Aq^n + O\left(q^{\nu n}\right), \quad n \to \infty \tag{2.1}$$

koşulunu koyarak her $\alpha > 1$ için

$$\pi(n) = \frac{q^n}{n} + O\left(\frac{q^n}{n^\alpha}\right), \quad n \to \infty \tag{2.2}$$

asimptotik değerlendirmesini elde etmiştir.

J. Knopfmacher (2.2)'de $\pi(n)$ için elde edilen bu asimptotik değerlendirmeyi soyut asal sayı teoremi (*Abstract Prime Number Theorem*) olarak ve G üzerine koyulan (2.1) koşulunu ise Aksiyom $A^{\#}$ olarak adlandırmıştır.

J. Knopfmacher, Aksiyom $A^{\#}$'ı sağlayan G toplamsal aritmetik yarı gruplar için (2.2) değerlendirmesinin ispatında, G'nin üretici fonksiyonu

$$Z(y) := \sum_{n=0}^{\infty} G(n) y^n$$

nin yakınsaklık bölgesi sınırı $|y| = q^{-1}$'de sıfırdan faklı olduğunu kullanmıştır.

1991 yılında K.-H. Indlekofer, E. Manstavičius ve R. Warlimont [20] çalışmalarında Aksiyom $A^{\#}$'ı sağlayan G'nin üretici fonksiyonu Z'nin $|y| = q^{-1}$ çemberinde $y = -q^{-1}$ noktasında sıfır yerine sahip olabileceğini göstermişlerdir. Böylece, J. Knopfmacher'in vermiş olduğu (2.2) soyut asal sayı teoreminin yanlış olduğunu göstermişlerdir.

Aynı çalışmada, G'nin üretici fonksiyonu Z, $|y| = q^{-1}$ çemberinde sıfır yerine sahipse bunun sadece $y = -q^{-1}$ noktasında mümkün olduğu ispatlanmıştır. Ayrıca, Aksiyom $A^{\#}$'ı sağlayan toplamsal aritmetik yarı gruplarda $0 \le \upsilon < 1$ ve $\max\left\{\frac{1}{2}, \upsilon\right\} < \theta < 1$ olmak üzere

$$\pi(n) = \begin{cases} \dfrac{q^n}{n} + O\left(q^{\theta n}\right), & Z\left(-q^{-1}\right) \neq 0, \\ \dfrac{q^n}{n}\left(1 - (-1)^n\right) + O\left(q^{\theta n}\right), & Z\left(-q^{-1}\right) = 0, \ n \to \infty \end{cases}$$

değerlendirmesi elde edilmiştir [20].

Toplamsal aritmetik yarı gruplarda ele alınan problemlerin çözümü bu alanda çalışan matematikçiler tarafından temel olarak 2 farklı şekilde ele alınmaktadır. J. Knopfmacher ve W.-B. Zhang [24], G'nin üretici fonksiyonu Z'nin kuvvet serisi katsayısı $G(n)$ üzerine koşul koyarak problemi ele almaktadırlar (Aksiyom $A^{\#}$, Aksiyom $\mathcal{A}$ vb.).

K.-H. Indlekofer [10,12,13], G toplamsal aritmetik yarı grubunun üretici fonksiyonu Z'nin yakınsaklık bölgesinin sınır özellikleri üzerine koşul koyarak problemi incelemektedir (Aksiyom $\overline{A}^{\#}$, Aksiyom A_1, Aksiyom A_2,vb.).

1996 yılında W.-B. Zhang [33] çalışmasında tezde ele alacağımız toplamsal aritmetik yarı gruplar için olasılık uzayı inşa edilmesi problemini J. Kubilius'un [4,25] olasılık modelini kullanarak incelemiştir.

W.-B. Zhang aynı çalışmada, tezde ele alacağımız diğer problemlerden biri olan, G 'de tanımlı reel değerli toplamsal fonksiyonların limit dağılımının varlığı için gerek ve yeter koşul veren aşağıdaki sonucu elde etmiştir:

G toplamsal aritmetik yarı grup ve $\pi(n)=O\left(\frac{q^n}{n}\right)$ olsun. $A>0,\ q>1$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|G(n)q^{-n}-A\right|<\infty$$

sağlansın.

Bu durumda, $g:G\to\mathbb{R}$ tanımlı toplamsal fonksiyonunun limit dağılım fonksiyonun var olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{\substack{p\\|g(p)|>1}} q^{-\partial(p)} \qquad \sum_{\substack{p\\|g(p)|\le 1}} q^{-\partial(p)}g(p) \qquad \sum_{\substack{p\\|g(p)|\le 1}} q^{-\partial(p)}g^2(p)$$

serilerinin yakınsak olmasıdır [33].

2011 yılında K.-H. Indlekofer tarafından [14] çalışmasında $\exp-\log\mathcal{F}$ fonksiyonlar sınıfı tanımlanmıştır.

Bu tezde ele alınan problemlerde, G toplamsal aritmetik yarı grubunun üretici fonksiyonu Z 'nin $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfına ait olması istenecektir. K.-H. Indlekofer [14] çalışmasında, üretici fonksiyonu $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfından olan toplamsal aritmetik yarı gruplarda tanımlı çarpımsal fonksiyonlar için ortalama değer teoremini ispatlamıştır. Bu sonuç tezde verilecek olan 3-seri ve 2 seri teoremlerinin ispatında kullanılacaktır.

Toplamsal aritmetik yarı gruplarda incelenen soyut asal sayı teoremi, aritmetik fonksiyonların ortalama değer teoremleri, toplamsal veya çarpımsal fonksiyonların limit dağılım fonksiyonlarının varlık problemleri, vb. problemler A. Barát [1,2,3], K.-H. Indlekofer [10,13,14,18], J. Knopfmacher [21,21,23,24], E. Manstavičius [19,20], R.Warlimont [20,30], S. Wehmeier [32], W.-B. Zhang [24,33,34] tarafından bir çok çalışmada incelenmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, bulgular ve tartışma kısmında kullanılacak temel tanımlar ve elde edilen yeni sonuçların ispatında kullanılacak temel teoremler verilecektir.

3.1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 3.1.1. $\Omega \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve $\mathcal{A}$, Ω'nın alt kümelerinden oluşan bir sistem olsun. $\mathcal{A}$ sistemi

(i) $\Omega \in \mathcal{A}$

(ii) $A \in \mathcal{A} \Rightarrow A^c \in \mathcal{A}$

(iii) $A, B \in \mathcal{A} \Rightarrow A \cup B \in \mathcal{A}$

koşullarını sağlıyorsa $\mathcal{A}$ sistemine Ω'da *cebir* denir.

Eğer $\mathcal{A}$ cebiri

$$A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A} \Rightarrow \bigcup_{n \in \mathbb{N}} A_n \in \mathcal{A}$$

koşulunu sağlıyorsa $\mathcal{A}$'ya Ω'da σ*-cebir* denir [6].

Tanım 3.1.2. $\Omega \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve $\mathcal{A}$, Ω'nın alt kümelerinden oluşan bir cebir olsun. $\mu : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ şeklinde tanımlanan fonksiyon

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) $A_1, A_2, \ldots, A_n \in \mathcal{A}$ ikişerli ayrık kümeler olmak üzere

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} \mu(A_k)$$

koşullarını sağlıyorsa μ fonksiyonuna *sonlu toplamsal ölçü* denir [6].

$\mathcal{A}$, σ-cebir olmak üzere $\mu : \mathcal{A} \to [0,\infty)$ şeklinde tanımlanan ve

(i) $\mu(\varnothing) = 0$

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ ikişerli ayrık kümeler olmak üzere

$$\mu\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mu(A_k)$$

koşullarını sağlayan μ fonksiyonuna *sayılabilir toplamsal ölçü* ya da kısaca *ölçü* denir. $(\Omega, \mathcal{A}, \mu)$ ise, *ölçü uzayı* olarak adlandırılır [6].

Tanım 3.1.3. $\Omega \neq \varnothing$ herhangi bir küme ve $\mathcal{A}$, Ω'nın alt kümelerinden oluşan bir σ-cebir olsun. $\mathcal{P} : \mathcal{A} \to [0,1]$ şeklinde tanımlanan ve

(i) $\mathcal{P}(\Omega) = 1$

(ii) $\mathcal{P}(\varnothing) = 0$

(ii) $A_1, A_2, \ldots \in \mathcal{A}$ ikişerli ayrık kümeler olmak üzere

$$\mathcal{P}\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \mathcal{P}(A_k)$$

koşullarını sağlayan $\mathcal{P}$ fonksiyonuna *olasılık ölçüsü* denir. Bu durumda elde edilen $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ üçlüsüne ise *olasılık uzayı* denir [26].

Tanım 3.1.4. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ olasılık uzayı olmak üzere $X : \Omega \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyona *rastgele değişken* denir.

X rastgele değişkenin, üzerinde tanımlı olduğu Ω kümesi sonlu veya sayılabilir sonsuz ise X rastgele değişkenine *kesikli rastgele değişken denir*. X rastgele değişkeni herhangi bir aralıktaki her değeri alıyorsa X 'e *sürekli rastgele değişken* denir [26].

Tanım 3.1.5. X rastgele değişken ve $A \subset \mathbb{R}$ olmak üzere,

$$\mathcal{P}[X \in A] := \mathcal{P}\left(\{w \in \Omega : X(w) \in A\}\right)$$

olasılık ölçüsüne X rastgele değişkeninin *dağılımı* denir [26].

Tanım 3.1.6. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ olasılık uzayında, $A, B \in \mathcal{A}$ olayları için

$$\mathcal{P}(A \cap B) = \mathcal{P}(A).\mathcal{P}(B)$$

sağlanıyorsa, A ile B olaylarına *bağımsız olaylar* denir [26].

Tanım 3.1.7. $(\Omega, \mathcal{A}, \mathcal{P})$ olasılık uzayı ve $x_1 \in X_1(\Omega), \cdots, x_n \in X_n(\Omega)$ olsun.

(i) $X_1, X_2, ..., X_n : \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkenleri

$$\mathcal{P}\left([X_1 = x_1], ..., [X_n = x_n]\right) = \mathcal{P}\left([X_1 = x_1]\right) \cdot ... \cdot \mathcal{P}\left([X_n = x_n]\right)$$

eşitliğini sağlıyorlarsa $X_1, X_2, ..., X_n$ rastgele değişkenlerine *bağımsız rastgele değişken* denir [26].

(ii) $X_1, X_2, ... : \Omega \to \mathbb{R}$ rastgele değişkenlerin keyfi (sonsuz) dizisi olsun. $X_1, X_2, ...$ rastgele değişkenlerinin her sonlu $X_{i_1}, ..., X_{i_k}$ rastgele değişkenleri bağımsız ise $X_1, X_2, ...$ rastgele değişkenlerine *bağımsız rastgele değişken* denir [26].

Tanım 3.1.8. (a) $f:\mathbb{R}\to[0,\infty)$ tanımlanan fonksiyon

$$\int_{\mathbb{R}} f(x)\,dx=1$$

koşulunu sağlıyorsa f fonksiyonuna *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir [26].

(b) $F:\mathbb{R}\to[0,1]$ şeklinde tanımlansın. F fonksiyonu monoton artan, sağdan sürekli ve $\lim_{x\to\infty} F(x)=1$, $\lim_{x\to-\infty} F(x)=0$ koşullarını sağlıyorsa F fonksiyonuna *dağılım fonksiyonu* denir [26].

Açıklama 3.1.9. f olasılık yoğunluk fonksiyonu olsun. $F(t)=\int_{-\infty}^{t} f(x)\,dx$ şeklinde tanımlanan fonksiyon Tanım 3.1.8. (b)'de yer alan koşulları sağladığından dağılım fonksiyonudur. Bu durumda f fonksiyonuna, F'in *olasılık yoğunluk fonksiyonu* denir [26].

Tanım 3.1.10. $X:\Omega\to\mathbb{R}$ tanımlı rastgele değişken olmak üzere,

$$\begin{aligned} F:\mathbb{R}&\to[0,1]\\ x&\to F(x)=P[X\le x] \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonuna X rastgele değişkeninin *dağılım fonksiyonu* denir [29].

Tanım 3.1.11. X reel değerli bir rastgele değişken ve F, X'in dağılım fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\mathbb{E}[X]:=\int_{-\infty}^{\infty} x\,dF(x)$$

ifadesine X rastgele değişkeninin *beklenen değeri* ve

$$Var[X] := \int_{-\infty}^{\infty} (x - \mathbb{E}X)^2 \, dF(x)$$

ifadesine ise X rastgele değişkeninin *varyansı* denir [29].

Teorem 3.1.12. (Kolmogorov 3-Seri Teoremi) $\{X_n\}$ bağımsız rastgele değişkenlerin bir dizisi ve $s > 0$ tespit edilmiş bir sayı olmak üzere

$$Y_n := \begin{cases} X_n, & |X_n| \le s \\ 0, & diğer \;\; durumlarda \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\sum_n X_n$ serisinin, $\mathcal{P}$-hemen hemen yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

(i) $\sum_n \mathcal{P}(|X_n| > s)$

(ii) $\sum_n \mathbb{E}(Y_n)$

(iii) $\sum_n Var(Y_n)$

serilerinin yakınsak olmasıdır [26].

Tanım 3.1.13. $\{X_n\}$ bağımsız rastgele değişkenlerin bir dizisi ve $\{a_n\}$ reel sayı dizisi olmak üzere, $\sum_n (X_n - a_n)$ serisi hemen hemen yakınsak ise $\sum_n X_n$ serisine esas yakınsaktır denir [26].

Teorem 3.1.14. (2-Seri Kriteri) $\{X_n\}$ bağımsız rastgele değişkenlerin bir dizisi ve $s > 0$ tespit edilmiş bir sayı olsun. $\sum_n X_n$ serisi esas yakınsaktır ancak ve ancak

$$\sum_n \mathcal{P}\left(|X_n| > s\right) \qquad\qquad \sum_n Var\left(X_n\right)$$

serileri yakınsaktır [26].

Tanım 3.1.15. $F_n(x)$ ve $F(x)$ dağılım fonksiyonlar olsun. $F(x)$ ’in sürekli olduğu her x değeri için

$$\lim_{n\to\infty} F_n(x) = F(x)$$

sağlanıyorsa F_n dağılım fonksiyonu F dağılım fonksiyonuna *zayıf yakınsar* denir ve F fonksiyonuna *limit dağılım fonksiyonu* denir [5].

Tanım 3.1.16. F dağılım fonksiyonu olmak üzere,

$$\phi(t) := \int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} dF(x)$$

şeklinde tanımlanan ϕ fonksiyonuna F ’in *karakteristik fonksiyonu* denir [5].

Açıklama 3.1.17. ϕ karakteristik fonksiyonu her $-\infty < t < \infty$ için tanımlı ve düzgün süreklidir. Ayrıca $\phi(0) = 1$ ve $|\phi(t)| \le 1$ ’dir [5].

Karakteristik fonksiyon yardımı ile dağılım fonksiyonu hakkında sonuçlar elde edilebilir. Aşağıda Levy süreklilik teoremi olarak adlandırılan teorem bunlardan biridir.

Teorem 3.1.18. (Levy Süreklilik Teoremi) $n = 1, 2, \ldots$ olmak üzere $F_n(x)$ dağılım fonksiyonlarının karakteristik fonksiyonu $\phi_n(t)$ olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) $F_n(x)$ dağılım fonksiyonları $F(x)$ dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsarlar.

(ii) Her $t \in \mathbb{R}$ için tanımlı, $t = 0$ noktasında sürekli olan ve $-\infty < t < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)=\phi(t)$$

eşitliğini sağlayan $\phi(t)$ fonksiyonu vardır.

(iii) Her $t\in\mathbb{R}$ için tanımlı öyle $\phi(t)$ fonksiyonu vardır öyle ki

$$\lim_{n\to\infty}\phi_n(t)=\phi(t)$$

limiti t 'nin her sonlu aralığında düzgündür [5].

Teorem 3.1.19. $n=1,2,...$ olmak üzere $\{X_n\}$ bağımsız rastgele değişkenlerin karakteristik fonksiyonları $\{\phi_n\}$ olsun. $\sum_n X_n$ serisinin esas yakınsak olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n\to\infty}\prod_{k=1}^{n}|\phi_k|$$

limitinin pozitif Lebesgue ölçüsüne sahip kümede sıfırdan farklı olmasıdır [26].

Açıklama 3.1.20. $0\le r<1,\ \theta\in[0,2\pi]$ olmak üzere,

$$f_r\left(e^{i\theta}\right):=f\left(re^{i\theta}\right) \qquad \text{ve} \qquad \log^+|f|:=\begin{cases}\log|f|, & |f|>1 \ ise\\ 0, & |f|\le 1 \ ise\end{cases}$$

olsun.

$$\|f_r\|_p:=\begin{cases}\left\{\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|^p d\theta\right\}^{\frac{1}{p}}, & 0<p<\infty \ ise\\ \sup\limits_{\theta\in[0,2\pi]}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|, & p=\infty \ ise\\ \exp\left(\dfrac{1}{2\pi}\displaystyle\int_0^{2\pi}\log^+\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta\right), & p=0 \ ise\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyon $p > 1$ için

(i) $\| f_r \|_p \geq 0$ ve $\| f_r \|_p = 0 \Leftrightarrow f_r = 0$

(ii) $\alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\| \alpha f_r \|_p = |\alpha| \| f_r \|_p$

(iii) $\| f_r + g_r \|_p \leq \| f_r \|_p + \| g_r \|_p$

koşullarını sağladığından bir normdur [28].

Tanım 3.1.21. $f \in H(D)$ ve $0 \leq p \leq \infty$ için

$$\| f \|_p := \sup \left\{ \| f_r \|_p : 0 \leq r < 1 \right\}$$

olmak üzere

$$H^p := \left\{ f : f \in H(D) \text{ ve } \| f \|_p < \infty \right\},\ 0 < p \leq \infty$$

şeklinde tanımlanan uzaya Hardy uzayı denir ve H^p ile gösterilir [28].

$p = 0$ için H^p sınıfı özel olarak Nevanlinna sınıfı olarak adlandırılır ve

$$N = \left\{ f : f \in H(D) \text{ve } \| f \|_0 < \infty \right\}$$

şeklinde gösterilir [28].

Sonuç 3.1.22. $0 < s < p < \infty$ için

$$H^\infty \subset H^p \subset H^s \subset N$$

içermesi doğrudur [28].

Teorem 3.1.23. $f \in H(D)$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler doğrudur:

a) $p \leq \infty$ için $\|f_r\|_p$ r 'nin azalmayan bir fonksiyonudur.

b) $1 \leq p < \infty$ için $\|f\|_p$ üçgen eşitsizliğini sağladığından H^p uzayı bir normlu lineer uzaydır.

c) $p < 1$ için üçgen eşitsizliği sağlanmadığından H^p uzayı normlu lineer uzay değildir.

d) $1 \leq p \leq \infty$ için H^p uzayı bir Banach uzayıdır [28].

3.2. TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLAR VE ÖZELLİKLERİ

Tanım 3.2.1. $G \neq \varnothing$ olmak üzere G üzerinde

$$G \times G \to G$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona bir *ikili işlem* denir.

(a,b) elemanının ikili işlem altındaki görüntüsü işlem kolaylığı bakımından

ab (Çarpımsal notasyon)

$a+b$ (Toplamsal notasyon)

şeklinde gösterilir [8].

Tanım 3.2.2. $\varnothing \neq G$ üzerinde tanımlanan ikili işlem, her $a,b,c \in G$ için

$$a(bc) = (ab)c$$

koşulunu sağlıyorsa $(G,\cdot)$ ikilisine G 'de bir *yarı grup* denir [8].

Her $a \in G$ için

$$ae = ea = a$$

koşulunu sağlayan e elemanına G yarı grubunun birim(etkisiz) elemanı denir.

Her $a \in G$ için

$$a^{-1}a = aa^{-1} = e$$

koşulunu sağlayan $a^{-1} \in G$ varsa $(G,\cdot)$ ikilisine *grup* denir.

Her $a,b \in G$ için

$$ab = ba$$

ise $(G,\cdot)$ ikilisine *değişmeli grup* denir [8].

Tanım 3.2.3. $\varnothing \neq P \subset G$ sayılabilir küme ve $(G,\cdot)$ birim elemanı 1_G olan bir değişmeli yarı grup olsun öyle ki $1_G \neq a \in G$ için

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \quad \left(p_i \in P\ ,\ i = 1,\ldots,r\right) \text{ ve } \alpha_i \in \mathbb{N}$$

biçiminde yazılsın. G üzerinde

$$|.| : G \to \mathbb{R}^+$$

şeklinde tanımlanan ve

(i) $|1_G| = 1$ ve her $p \in P$ için $|p| > 1$,

(ii) Her $a,b \in G$ için $|ab| = |a| \cdot |b|$,

(iii) Her $x \geq 0$ için $N_G(x) := \#\{a \in G :\ |a| \leq x\}$ sonlu, koşullarını sağlayan $|.|$ fonksiyonuna *norm fonksiyonu* ve $(G,|.|)$ yapısına ise *aritmetik yarı grup* denir [22].

Örnek 3.2.4. $G := \mathbb{N}$ ve $P = \{2,3,5,7,...\}$ olsun. $(\mathbb{N},\cdot)$ değişmeli yarı grup ve $1 \neq n \in \mathbb{N}$ için $n = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}$ şeklinde yazılabilir.

$$|.| : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$$
$$n \to |n| = n$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

(i) $|1| = 1$ ve her $p \in P$ için $|p| > 1$,

(ii) Her $n,m \in \mathbb{Z}^+$ için $|nm| = |n| \cdot |m|$,

(iii) Her $x \geq 0$ için $N_{\mathbb{N}}(x) := \#\{n \in \mathbb{N} : |n| \leq x\} = \quad x$ sonlu,

koşulları sağlandığından $\mathbb{N}$ üzerinde tanımlanan $|.|$ fonksiyonu bir norm fonksiyonudur ve $(\mathbb{N},|.|)$ ikilisi bir aritmetik yarı gruptur [22].

Açıklama 3.2.5. $c > 1$ tespit edilmiş reel sayı olmak üzere

$$\partial : G \to \mathbb{R}^+$$
$$a \to \partial(a) = \log_c |a|$$

şeklinde tanımlanan ∂ fonksiyonu Tanım 3.2.3. (i) - (iii)'den

(i) $\partial(1_G) = 0$ ve her $p \in P$ için $\partial(p) > 0$,

(ii) Her $a,b \in G$ için $\partial(ab) = \partial(a) + \partial(b)$,

(iii) Her $x \geq 0$ için $N_G(x) = \#\{a \in G : \partial(a) \leq x\}$ sonlu,

özelliklerini sağlar. Bu şekilde tanımlanan ∂ fonksiyonuna *derece fonksiyonu* denir [24].

Örnek 3.2.6. $G := \mathbb{N}$ ve $P = \{2,3,5,7,...\}$ olsun. $(\mathbb{N},\cdot)$ değişmeli yarı grup ve $1 \neq n \in \mathbb{N}$ için $n = p_1^{\alpha_1} \cdot ... \cdot p_r^{\alpha_r}$ şeklinde yazılabilir.

$$\begin{aligned} \partial : \mathbb{N} &\to \mathbb{R}^+ \\ n &\to \partial(n) = \ln n \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan ∂ fonksiyonu

(i) $\partial(1) = \ln 1 = 0$ ve her $p \in P$ için $\partial(p) = \ln p > 0$,

(ii) Her $a,b \in G$ için $\partial(ab) = \ln(a \cdot b) = \ln a + \ln b = \partial(a) + \partial(b)$,

(iii) Her $x \geq 0$ için $N_{\mathbb{N}}(x) = \#\{n \in \mathbb{N} : \partial(n) = \ln n \leq x\}$ sonlu,

koşullarını sağlandığından $\mathbb{N}$ üzerinde derece fonksiyonudur [22].

Açıklama 3.2.7. ∂ derece fonksiyonu

$$\partial : G \to \mathbb{N}_0$$

olacak biçimde tanımlanır ve Açıklama 3.2.5'de yer alan (iii) koşulu;

her $n \geq 0$ için

$$G(n) := \#\{a \in G : \partial(a) = n\} < \infty$$

olarak alındığında toplamsal aritmetik yarı grupların tanımı aşağıdaki biçimde ifade edilir [24].

Tanım 3.2.8. $\emptyset \neq P \subset G$ sayılabilir küme ve $(G,\cdot)$ birim elemanı 1_G olan bir değişmeli yarı grup olsun öyle ki $1_G \neq a \in G$ için

$$a = p_1^{\alpha_1} \cdot p_2^{\alpha_2} \cdot \ldots \cdot p_r^{\alpha_r} \quad \left(p_i \in P \ , i = 1,\ldots,r\right) \text{ ve } \alpha_i \in \mathbb{N}$$

biçiminde yazılsın. G üzerinde

$$\partial : G \to \mathbb{N}_0$$

şeklinde tanımlanan ve

(i) $\partial(1_G) = 0$ ve her $p \in P$ için $\partial(p) > 0$,

(ii) Her $a,b \in G$ için $\partial(ab) = \partial(a) + \partial(b)$,

(iii) Her $n \geq 0$ için $G(n) = \#\{a \in G : \partial(a) = n\}$ sonlu,

koşullarını sağlayan (G,∂) ikilisine *toplamsal aritmetik yarı grup* denir [24].

P ’nin derecesi n ´e eşit olan asal elemanlarının sayısı $\pi(n)$ Tanım 3.2.8. (iii)’den her $n \geq 0$ için sonludur [24].

Örnek 3.2.9. (Galois Polinom Halkaları) q bir doğal sayı olmak üzere, $\mathbb{F}_q$ ile q elemanlı bir Galois cismi gösterilsin.

$$\mathbb{F}_q(t) := \left\{ f : f(t) = \sum_{k=0}^{n} a_k t^k \ : a_k \in \mathbb{F}_q \right\}$$

ile t-değişkenli, katsayıları $\mathbb{F}_q$ cisminden alınan polinomların kümesi gösterilsin. $\left(\mathbb{F}_q(t),\cdot\right)$ yapısı polinomlarda bilinen çarpma işlemine göre bir polinom halkasıdır. Bu polinom halkasının monik polinomlarindan oluşan alt kümesi

$$G_q := \{ f : \ f(t) \ monik \ \ polinom \} \subset (\mathbb{F}_q(t), \cdot)$$

ile gösterilsin. Polinomlarda tanımlanan çarpma işlemine göre $(G_q, \cdot)$

- iki monik polinomun çarpımı yine bir monik polinomdur. (kapalılık özelliği)
- polinomlarda tanımlanan çarpma işleminden birleşmeli
- cismin birimi olduğundan birim elemanlı

özelliklerine sahip olduğundan yarı gruptur. Bu yarı grup üzerinde derece fonksiyonu

$$\begin{aligned} \partial : G_q &\to \mathbb{N}_0 \\ f &\to \partial(f) = \deg[f] \end{aligned}$$

seklinde tanımlanırsa.

i) $\partial(1_G) = \deg[1_G] = 0$,

(ii) Her $f_1, f_2 \in G_q$ için

$$\begin{aligned} \partial(f_1 \cdot f_2) = \deg[f_1 \cdot f_2] &= \deg[f_1] + \deg[f_2] \\ &= \partial(f_1) + \partial(f_2) \end{aligned}$$

(iii) Cismin eleman sayısı sonlu olduğundan her $n \geq 0$ için

$$G_q(n) = \#\{ f \in G_q : \partial(f) = n \} = q^n$$

sonlu,

koşulları sağlanır. Böylece, (G_q, ∂) ikilisinin toplamsal aritmetik yarı grup olduğu elde edilir [24].

Tanım 3.2.10.

$$Z_G(y) := Z(y) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) y^n \tag{3.1}$$

şeklinde tanımlanan Z fonksiyonuna G toplamsal aritmetik yarı grubunun *üretici fonksiyonu* (*Zeta fonksiyonu)* denir [24].

Örnek 3.2.9'da verilen Galois polinom halkaları G_q 'nun üretici fonksiyonu

$$Z_{G_q}(y) = \sum_{n=0}^{\infty} G_q(n) y^n = \sum_{n=0}^{\infty} q^n y^n = \frac{1}{1-qy}$$

$|y| < q^{-1}$ dairesinde analitiktir [24].

Teorem 3.2.11. Zeta fonksiyonu yakınsaklık bölgesinde

$$Z(y) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{1-y^n} \right)^{\pi(n)} \tag{3.2}$$

biçiminde gösterilir [32]. (3.2) gösterimine *Zeta fonksiyonunun Euler çarpımı* denir.

Teorem 3.2.12. Zeta fonksiyonu analitiklik bölgesinde sıfırdan faklıdır.

İspat: (3.2) ifadesinden Zeta fonksiyonu

$$Z(y) = \prod_{n\in\mathbb{N}} \left(\frac{1}{1-y^n} \right)^{\pi(n)}$$

dir. Bu son eşitlikten her $y \in \{ y \in \mathbb{C} : |y| < q^{-1} \}$ için $Z(y) \neq 0$ olduğu elde edilir [32].

Tanım 3.2.13. $\tilde{f}: G \to \mathbb{C}$ biçimindeki fonksiyonlara *aritmetik fonksiyon* denir. $\tilde{f}$ aritmetik fonksiyon olmak üzere,

$$F(y) := \sum_{a \in G} \tilde{f}(a) y^{\partial(a)} = \sum_{n=0}^{\infty} \left(\sum_{\substack{a \in G \\ \partial(a)=n}} \tilde{f}(a) \right) y^n$$

şeklinde tanımlanan F fonksiyonuna $\tilde{f}$ fonksiyonunun *üretici fonksiyonu* denir[14].

Tanım 3.2.14. G toplamsal aritmetik yarı grubunda

$$\Lambda(\mathrm{a}) := \begin{cases} \partial(\mathrm{p}), & \text{eğer } \mathrm{a} = \mathrm{p}^{\mathrm{r}} \ \mathrm{r} \geq 1, \mathrm{p} \text{ asal eleman}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *von Mangoldt fonksiyonu* denir [32].

Tanım 3.2.15. $p \in P$ olmak üzere

$$\omega(a) := \sum_{p|a} 1, \quad a \in G,$$

biçiminde tanımlanan fonksiyona *asal bölen fonksiyonu* denir. Burada toplam a 'yı bölen p 'ler üzerinden alınmaktadır.

Asal bölen fonksiyonu yardımıyla

$$\mu(\mathrm{a}) := \begin{cases} 0, & \text{eğer } \mathrm{p}^2 | \mathrm{a} \text{ ise}, \\ (-1)^{\omega(\mathrm{a})}, & \text{diğer durumlarda}, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan fonksiyona *Möbius fonksiyonu* denir [32].

Tanım 3.2.16. $\tilde{f}$ aritmetik fonksiyon olmak üzere,

$$f(n) = \sum_{\substack{a \in G \\ \partial(a)=n}} \tilde{f}(a)$$

şeklinde tanımlanan $f : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ fonksiyonuna $\tilde{f}$ fonksiyonunun *toplam fonksiyonu* denir [10].

Teorem 3.2.17. f fonksiyonu, $h : \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ tanımlı fonksiyonunun toplam fonksiyonu olmak üzere,

$$f(n) = \sum_{d|n} \mu\left(\frac{n}{d}\right) h(d)$$

dir [32]. Bu eşitliğe *ters Möbius formülü* denir.

Tanım 3.2.18. $\tilde{f}$ aritmetik fonksiyon olsun. Aralarında asal olan her $a,b \in G$ için $\tilde{f}(a.b) = \tilde{f}(a).\tilde{f}(b)$ koşulunu sağlayan $\tilde{f}$ fonksiyonuna *çarpımsal fonksiyon* , her $a,b \in G$ için $\tilde{f}(a.b) = \tilde{f}(a).\tilde{f}(b)$ koşulunu sağlayan $\tilde{f}$ fonksiyonuna ise *tam çarpımsal fonksiyon* denir [32].

$\tilde{g}$ aritmetik fonksiyonu aralarında asal olan her $a,b \in G$ için $\tilde{g}(a.b) = \tilde{g}(a) + \tilde{g}(b)$ koşulunu sağlıyorsa $\tilde{g}$ fonksiyonuna *toplamsal fonksiyon,* her $a,b \in G$ için $\tilde{g}(a.b) = \tilde{g}(a) + \tilde{g}(b)$ koşulunu sağlayan $\tilde{g}$ fonksiyonuna ise *tam toplamsal fonksiyon* denir [32].

$k \geq 2$ olmak üzere $\tilde{g}\left(p^k\right) = \tilde{g}(p)$ koşulunu sağlayan $\tilde{g}$ aritmetik fonksiyonuna ise *kuvvetli toplamsal fonksiyon* denir [32].

Tanım 3.2.19. $\tilde{f}$ aritmetik fonksiyon olmak üzere,

$$M\left(n, \tilde{f}\right) := \begin{cases} \dfrac{1}{G(n)} \displaystyle\sum_{\substack{a \in G \\ \partial(a)=n}} \tilde{f}(a), & G(n) \neq 0 \\ 0, & G(n) = 0 \end{cases}$$

ifadesine $\tilde{f}$ fonksiyonunun *ortalaması* denir. Eğer

$$M\left(\tilde{f}\right) := \lim_{n\to\infty} M\left(n, \tilde{f}\right)$$

limiti var ve sonlu ise $M\left(\tilde{f}\right)$'e $\tilde{f}$ fonksiyonunun *ortalama değeri* denir [32].

$A \subset G$ kümesinin karakteristik fonksiyonu 1_A olmak üzere

$$\delta(A) := \lim_{n\to\infty} M\left(n, 1_A\right)$$

şeklinde tanımlanan δ fonksiyonuna A kümesinin *asimptotik yoğunluğu* denir [32].

$n \in \mathbb{N}$ olmak üzere G toplamsal aritmetik yarı grubunda derecesi n'e eşit olan elemanların kümesi $G_n := \{a \in G : \partial(a) = n\}$ ile gösterilsin.

Tanım 3.2.20. $\tilde{h} : G \to \mathbb{R}$ tanımlı fonksiyon olsun. $c > 0$ ve $C > 0$ olmak üzere her $n_l \in \mathbb{N}$ ve her $a_1, a_2 \in H \cap G_{n_l}$ için

$$\#\left(H \cap G_{n_l}\right) \geq cG\left(n_l\right) \text{ ve } \left|\tilde{h}\left(a_1\right) - \tilde{h}\left(a_2\right)\right| < C$$

koşullarını sağlayacak biçimde $\left(n_1, n_2, ...\right)$ tam sayı dizisi ve $H \subseteq G$ alt kümesi varsa $\tilde{h}$ fonksiyonuna *sonlu dağılımlı fonksiyon* denir [32].

3.3. TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUP ÜZERİNE KONULAN KOŞULLAR VE SONUÇLARI

Aksiyom $A^{\#}$ **:** G toplamsal aritmetik yarı grup olmak üzere $A>0,\ q>1$ ve $0\le\nu<1$ sabitleri vardır ($A,\ q$ ve ν sabitleri G 'ye bağlıdır) öyle ki

$$G(n)=Aq^n+O\left(q^{\nu n}\right),\quad n\to\infty$$

dir [22].

Bu bölümde ilk olarak *Aksiyom* $A^{\#}$ 'ı sağlayan (G,∂) toplamsal aritmetik yarı grubunun temel özellikleri verilecektir.

Teorem 3.3.1. (G,∂) *Aksiyom* $A^{\#}$ 'ı sağlasın. Bu durumda (G,∂) toplamsal aritmetik yarı grubunun üretici fonksiyonunun yakınsaklık yarıçapı q^{-1} dir [24].

İspat: (G,∂) *Aksiyom* $A^{\#}$ 'ı sağladığından

$$G(n)=Aq^n+O\left(q^{\nu n}\right),\quad n\to\infty$$

eşitliği doğrudur. Bu son eşitlik G 'nin üretici fonksiyonunda yerine yazılırsa

$$Z(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\left(Aq^n+O\left(q^{\nu n}\right)\right)y^n$$

$$=\sum_{n=0}^{\infty}Aq^ny^n+\sum_{n=0}^{\infty}O\left(q^{\nu n}\right)y^n$$

elde edilir. $r_n:=G(n)-Aq^n=O\left(q^{\nu n}\right)$ işaretlemesi ile bu son eşitlik

$$Z(y)=A\sum_{n=0}^{\infty}(qy)^n+\sum_{n=0}^{\infty}r_ny^n=I+II \tag{3.3}$$

şeklinde yazılır. (3.3) ifadesini iki kısma ayırarak yakınsaklığını inceleyelim:

(3.3)'de I serisi geometrik seri olduğundan $|y| < \frac{1}{q}$ dairesinde yakınsaktır ve toplamı $\frac{A}{1-qy}$ dir.

Şimdi (3.3)'de yer alan II serinin yakınsaklık yarıçapını hesaplayalım:

$$R^{-1} = \limsup_{n\to\infty} \frac{r_{n+1}}{r_n} = \limsup_{n\to\infty} \frac{O\left(q^{\nu(n+1)}\right)}{O\left(q^{\nu n}\right)}$$

$$= \limsup_{n\to\infty} \frac{q^{\nu(n+1)} O(1)}{q^{\nu n} O(1)} = q^{\nu}$$

$$R = q^{-\nu}$$

dir.

$q > 1$ ve $0 \le \nu < 1$ olduğundan

$$\frac{1}{q} < \frac{1}{q^{\nu}}$$

eşitsizliği doğrudur.

Buradan, üretici fonksiyonun yakınsaklık yarıçapının $\frac{1}{q}$ olduğu elde edilir.

Açıklama 3.3.2. Eğer G toplamsal aritmetik yarı grubu *Aksiyom* $A^{\#}$'ı sağlıyorsa G'nin üretici fonksiyonu Teorem 3.3.1.'den,

$$r_n := G(n) - Aq^n = O\left(q^{\nu n}\right) \text{ ve } \qquad H_1(y) := \sum_{n=0}^{\infty} r_n y^n \tag{3.4}$$

olmak üzere

$$Z(y) = \frac{A}{1-qy} + H_1(y) \tag{3.5}$$

biçimindedir. (3.5)'de yer alan H_1 fonksiyonu $|y| < q^{-\nu}$ dairesinde analitiktir.

$$H(y) := A + (1-qy)H_1(y) \tag{3.6}$$

olacak şekilde alınırsa G 'nin üretici fonksiyonu

$$Z(y) = \frac{H(y)}{1-qy} \tag{3.7}$$

şeklinde yazılabilir. (3.4) ve (3.6)'dan $H(0) = 1$ ve $H(q^{-1}) = A$ olduğu elde edilir [11]. Ayrıca (3.6)'da tanımlanan H fonksiyonu $|y| < q^{-1}$ dairesinde analitiktir.

Aksiyom $A^{\#}$ bir taraftan G 'nin derecesi n 'e eşit olan elemanlarının sayısı hakkında bilgi vermekte iken diğer tarafta (3.4)'de tanımlanan H_1 fonksiyonunun kuvvet serisi katsayısı r_n içinde

$$r_n = O(q^{\nu n})$$

koşulunu vermektedir [11].

Aksiyom $\overline{A}^{\#}$**:** G toplamsal aritmetik yarı grup olmak üzere $q > 1$ ve $0 \le \nu < 1$ sabitleri vardır (q ve ν sabitleri G 'ye bağlıdır) öyle ki

(i) (3.6)'da tanımlanan H fonksiyonu $|y| < q^{-\nu}$ dairesinde analitik ve $H(q^{-1}) > 0$,

(ii) $\overline{H}(y) := H(q^{-\nu y})$ şeklinde tanımlanan $\overline{H}$ fonksiyonu Nevalinna sınıfındandır [10].

Açıklama 3.3.3. Kabul edelim ki Aksiyom $A^{\#}$ veya Aksiyom $\overline{A}^{\#}$ sağlansın. Bu durumda $Z(y)$ fonksiyonu $|y| < q^{-\nu}$ dairesinde meromorf, $y = q^{-1}$ noktasında basit kutup yerine sahip ve rezidüsü A'dır. J. Knopfmacher [23] çalışmasında Aksiyom $A^{\#}$'ı sağlayan toplamsal aritmetik yarı gruplarda soyut asal sayı teoreminin ispatında $|y| = q^{-1}$ dairesinde $Z(y) \neq 0$ alarak ispatlamıştır. K.-H. Indlekofer, E. Manstavicius ve R. Warlimont'un [20] çalışmalarında Aksiyom $A^{\#}$'ı sağlayan G toplamsal aritmetik yarı gruplarında, $\nu = \dfrac{1}{2}$ olmak üzere $Z\left(-q^{-1}\right) = 0$ olduğunu göstermişlerdir. Bu ise J. Knopfmacher'in [23] çalışmasında vermiş olduğu

$$\pi(n) = \frac{q^n}{n} + O\left(\frac{q^n}{n^{\alpha}}\right), \quad n \to \infty$$

soyut asal sayı teoreminin yanlış olduğunu göstermektedir.

Ayrıca aynı çalışmada, Aksiyom $A^{\#}$'ı sağlayan G toplamsal aritmetik yarı grubunda, G'nin üretici fonksiyonu Z'nin $|y| = q^{-1}$ çemberinde sıfır yerine sahip olması durumunda; bunun sadece $y = -q^{-1}$ noktasında mümkün olduğu gösterilmiştir.

K.-H. Indlekofer, E. Manstavicius ve R. Warlimont'un [20] çalışmalarında yukarıda verilen teoremin sonucu olarak $\pi(n)$ için aşağıdaki sonucu elde etmişlerdir:

$0 < \varepsilon < 1 - \nu$ ve $Z\left(-q^{-1}\right) \neq 0$ olsun. Bu durumda $l = l(\varepsilon) \in \mathbb{N}_0$, $0 < \varepsilon' < \varepsilon$ sabitleri ve $Z(y)$'nin $|y| \leq q^{-\nu-\varepsilon}$ dairesindeki sıfır yerleri olan $\beta_i \left(i = 1, \ldots, l\right)$ kompleks sayıları vardır öyle ki

$q^{-1} < \min\limits_{i=1,\ldots,l} |\beta_i| \leq \max\limits_{i=1,\ldots,l} |\beta_i| \leq q^{-\nu-\varepsilon}$ ve $R(y)$ fonksiyonu $|y| \leq q^{-\nu-\varepsilon'}$ dairesinde analitik olmak üzere

$$\Lambda(y)=\frac{y}{q^{-1}-y}-y\sum_{i=1}^{l}\frac{1}{\beta_i-y}+yR(y)$$

ve

$$\pi(n)=\frac{q^n}{n}-\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{l}\beta_i^{-n}+O_\varepsilon\left(\frac{q^{n(\nu+\varepsilon')}}{n}\right),\quad n\to\infty$$

dir. Eğer $Z\left(-q^{-1}\right)=0$ ise, her $0<\varepsilon<1-\nu$ için

$$\pi(n)=\left(1+(-1)^{n+1}\right)\frac{q^n}{n}+O\left(\frac{q^{n(\nu+\varepsilon)}}{n}\right),\quad n\to\infty \tag{3.8}$$

dir.

Aksiyom $\bar{A}^{\#}$'ı sağlayan toplamsal aritmetik yarı gruplarda elde edilen soyut asal sayı teoremindeki kalan terim, Aksiyom $A^{\#}$'ı sağlayan toplamsal aritmetik yarı gruplarda elde edilen soyut asal sayı teoremindeki kalan terimden daha iyidir.([20], Teorem2, Teorem5 ve Sonuç3.) Örneğin; eğer $Z\left(-q^{-1}\right)=0$ ise Aksiyom $A^{\#}$'dan (3.8) elde edilirken Aksiyom $\bar{A}^{\#}$'dan, m reel değerli, Nevanlinna fonksiyonu $\bar{H}$ için

$$a_n=\int_{-\pi}^{\pi}e^{-\mathrm{int}}dm(t)$$

olmak üzere

$$\pi(n)=\left(1-(-1)^n\right)\frac{q^n}{n}+2a_nq^{n\nu} \tag{3.9}$$

elde edilir. Ayrıca, (3.9)'da $\pi(n)$ için verilen asimptotik ifadeden Aksiyom $\bar{A}^{\#}$ elde edilir ([20], Sonuç 3).

Yukarıdaki sonuçlardan, üretici fonksiyonu Z'nin doğal sınırının $|y|=q^{-1}$ olduğu elde edilir. W.-B. Zhang [34,35] çalışmalarında zeta fonksiyonunun seri gösteriminde yer alan $G(n)$ katsayısı üzerine koşul koyarak soyut asal sayı teoremi için aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

Aksiyom A**:** G toplamsal aritmetik yarı grup olmak üzere, $A>0$, $1<q<\infty$ sabitleri ve reel değerli r fonksiyonu vardır öyle ki

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sup_{m \geq n} \left| r(m) \right| < \infty$$

olmak üzere

$$G(n) = \left(A + r(n)\right) q^n$$

dir.

W.-B. Zhang ve J. Knopfmacher [24]'de aşağıdaki soyut asal teoremini verdiler:

$A>0,\ q>1$ ve $\gamma>2$ olmak üzere

$$G(n) = Aq^n + O\left(q^n n^{-\gamma}\right), \quad n \to \infty \tag{3.10}$$

ise

$$\pi(n) = \frac{q^n}{n} + O\left(q^n n^{-\gamma}\right), \quad n \to \infty \tag{3.11}$$

veya

$$\pi(n) = \left(1 - (-1)^n\right) \frac{q^n}{n} + O\left(q^n n^{-\gamma+1}\right), \quad n \to \infty \tag{3.12}$$

dir.

K.-H. Indlekofer [10] çalışmasında (3.7) gösteriminde yer alan H fonksiyonunun sınır özelliklerine koşul koyarak soyut asal sayı teoremi için aşağıdaki sonuçları elde etmiştir:

Aksiyom A_1: G toplamsal aritmetik yarı grup olmak üzere, $q>1$ (G'e bağlı) sabiti vardır öyle ki

(i) H fonksiyonu $|y|<q^{-1}$ dairesinde analitik ve $A:=H(q^{-1})>0$ olmak üzere $|y|\le q^{-1}$'de sürekli,

(ii) H fonksiyonunun türevi H' fonksiyonu $|y|<q^{-1}$'de sınırlıdır.

Kabul edelim ki G toplamsal aritmetik yarı grubu Aksiyom A_1'i sağlasın. Bu durumda, eğer $Z(-q^{-1})\neq 0$ ise

$$\pi(n)=\frac{q^n}{n}+o\left(\frac{q^n}{n}\right),\quad n\to\infty$$

dir ve $Z(-q^{-1})=0$ ise

$$\frac{n\pi(n)}{q^n}+\frac{(n-1)\pi(n-1)}{q^{n-1}}=2+o(1),\quad n\to\infty$$

dir. Ayrıca

$$\sum_{m\le n} m\pi(m)q^{-m}=n+o\left(n^{\frac{1}{2}}\right),\quad n\to\infty$$

dir [11].

Aksiyom A_1'de yer alan koşullarda değişiklik yapmakla yukarıda verilen soyut asal sayı teoremi için (3.13) ve (3.14) sonuçları elde edilir.

Aksiyom A_2 : Aksiyom A_1'in koşullarına ek olarak H fonksiyonun türevi H' fonksiyonunun kuvvet serisi $|y| \le q^{-1}$ dairesinde mutlak yakınsaktır.

G toplamsal aritmetik yarı grubu Aksiyom A_2'i sağlasın Bu durumda, eğer $Z\left(-q^{-1}\right) \ne 0$ ise

$$\pi(n) = \frac{q^n}{n} + O\left(q^n \max_{\frac{n}{4} \le m \le n} |h(m)| q^{-m} \right), \quad n \to \infty \tag{3.13}$$

dir ve $Z\left(-q^{-1}\right) = 0$ ise

$$\pi(n) = \left(1 - (-1)^n\right)\frac{q^n}{n} + O\left(q^n \max_{\frac{n}{8} \le m} |h(m)| q^{-m} \right), \quad n \to \infty \tag{3.14}$$

dir [11].

Açıklama 3.3.4. $\gamma > 2$ olmak üzere (3.10) koşulu sağlansın. Bu durumda, (3.13) ve (3.14)'den (3.11) ve (3.12) elde edilir.

Yukarıda verilen aksiyomlardaki koşullar zayıflatılarak, toplamsal aritmetik yarı gruplarda soyut asal sayı teoreminin elde edilmesi güncel problemlerdendir. Mevcut koşullardan daha zayıf koşullar altında yeni sonuçlar elde etmek için farklı metotlar kullanılmaktadır. Örneğin A. Barát ve K.-H. Indlekofer [2] çalışmalarında Aksiyom A_1 (ii)'deki koşul yerine

$$\sum_{n \le N} \left(\sum_{d|n} d\pi(d) q^n \right)^2 = O(N), \quad N \to \infty$$

koşulunu kullanarak aritmetik fonksiyonların ortalama değeri için sonuçlar elde etmişlerdir.

Benzer şekilde K.-H. Indlekofer [14] çalışmasında $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfını tanımlayarak aritmetik fonksiyonların ortalama değeri için aşağıdaki sonuçları elde etmiştir.

(3.1)'de tanımlanan G 'nin Z üretici fonksiyonu, $|y|<q^{-1}$ dairesinde

$$Z(y)=\sum_{n=0}^{\infty}G(n)y^n=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(m)}{m}y^m\right)$$

şeklinde gösterilebilsin ve

$$0\le\lambda(m)=O(1)\quad(m\in\mathbb{N}), \tag{3.15}$$

her $\varepsilon>0$ için

$$|Z(y)|\ll Z(|y|)\left|\frac{1-q|y|}{1-qy}\right|^{\varepsilon}\qquad(|y|<q^{-1}) \tag{3.16}$$

koşullarını sağlasın. Ayrıca

$$B(n)=\exp\left(\sum_{m\le n}\frac{\lambda(m)}{m}q^{-m}\right)$$

olmak üzere kabul edelim ki

$$nG(n)\asymp q^nB(n) \tag{3.17}$$

ve

$$B(m)=o(B(n)),\qquad m=o(n),\quad n\to\infty \tag{3.18}$$

sağlansın.

Tanım 3.3.5. Yukarıda verilen (3.15), (3.16), (3.17) ve (3.18) özelliklerini sağlayan Z fonksiyonuna $\exp-\log\mathcal{F}$ *sınıfındandır* denir [14].

Örnek 3.3.6. (3.1)'de tanımlanan G'nin Z üretici fonksiyonu, $|y|<q^{-1}$ dairesinde $\tau>0$ olmak üzere

$$Z(y)=\sum_{n=0}^{\infty}G(n)y^{n}=\frac{H(y)}{(1-qy)^{\tau}}, \tag{3.19}$$

şeklinde gösterilebilsin öyle ki, $|y|<q^{-1}$ dairesinde $H(y)=O(1)$ ve

$$0<r<q^{-1} \text{ olmak üzere } H(r)\asymp 1 \tag{3.20}$$

dir. Ayrıca, kabul edelim ki

$$G(n)\asymp q^{n}n^{\tau-1}$$

ve $m\in\mathbb{N}$ olmak üzere (3.15) sağlansın. Bu durumda, (3.19) ile tanımlanan fonksiyon (3.20)'den $r=q^{-1}-n^{-1}$ olmak üzere

$$B(n)=\exp\left(\sum_{m\le n}\frac{\lambda(m)}{m}q^{-m}\right)\asymp\exp\left(\sum_{m\le n}\frac{\lambda(m)}{m}q^{-m}r^{m}\right)$$

$$\asymp Z(r)\asymp(1-qr)^{-\tau}=n^{\tau}$$

sağladığından (3.17) elde edilir. Diğer taraftan (3.15)'den $m=o(n)$ olmak üzere

$$B(n)\ll\left(\frac{m}{n}\right)^{\tau}=o(1),\quad n\to\infty$$

olduğundan (3.18) elde edilir. Böylece (3.17) ile verilen üretici fonksiyonu (3.15)-(3.18) koşullarını sağladığından $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfındandır [18].

K.-H Indlekofer'in [14] çalışmasında $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfından olan fonksiyona diğer bir örnek aşağıdaki gibi verilmiştir.

Örnek 3.3.7. Kabul edelim ki her $m \in \mathbb{N}$ için

$$0 < c_1 q^m \le \lambda(m) \le c_2 q^m < \infty$$

olsun. Bu durumda

$$|Z(y)| = Z(|y|)\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)}{m}|y|^m \left(\cos(mt)-1\right)\right) \le Z(|y|)\exp\left(c_1 \sum_{m=1}^{\infty} \frac{q^m |y|^m}{m}\left(\cos(mt)-1\right)\right)$$

$$= Z(|y|)\left|\frac{1-q|y|}{1-qy}\right|^{c_1}$$

ve $m = o(n)$ olmak üzere

$$\frac{B(m)}{B(n)} = \exp\left(-\sum_{m<l\le n} \frac{\lambda(l)}{l}\right) q^{-l} \ll \exp\left(c_1 \log\frac{m}{n}\right) = o(1), \quad n \to \infty$$

dir.

$$q^n G(n) \asymp \frac{B(n)}{n}$$

koşulu elementar değerlendirme sonucu elde edilir [27].

K.-H. Indlekofer [14] çalışmasında aşağıdaki gösterimleri kullanarak Teorem 3.3.8 ve Teorem 3.3.9'u vermiştir.

$f : \mathbb{N}_0 \to \mathbb{C}$ tanımlı bir fonksiyon ve $f(0) = 1$ olsun. Kabul edelim ki f 'in üretici fonksiyonu $F(y)$, $|y| < q^{-1}$ dairesinde

$$F(y) := \sum_{n=0}^{\infty} f(n) y^n = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda_f(m)}{m} y^m\right) \tag{3.21}$$

biçiminde gösterilsin ve her $m \in \mathbb{N}$ için $|\lambda_f(m)| = O(1)$ olsun.

Teorem 3.3.8. G toplamsal aritmetik yarı grubunun Z üretici fonksiyonu $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfından olsun. (3.21)'de yer alan $\lambda_f(m)$ katsayısı her $m\in\mathbb{N}$ için

$$\left|\lambda_{f,1}(m)\right|\le\lambda(m) \qquad \text{ve} \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left|\lambda_{f,2}(m)\right|}{m}q^{-m}<\infty$$

olmak üzere

$$\lambda_f(m)=\lambda_{f,1}(m)+\lambda_{f,2}(m)$$

biçiminde ve $|y|<q^{-1}$ dairesinde

$$F_I(y):=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_{f,1}(m)}{m}y^m\right)<\infty \qquad F_{II}(y):=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda_{f,2}(m)}{m}y^m\right)<\infty$$

olmak üzere

$$F(y):=F_I(y)\cdot F_{II}(y)$$

biçiminde yazılabilsinler. Bu durumda aşağıdaki özellikler doğrudur:

(i) $a\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(m)-\operatorname{Re}\lambda_{f,1}(m)e^{ima}}{m}q^{-m} \tag{3.22}$$

serisi yakınsak ve

$$A_n:=\exp\left(-ina+\sum_{m\le n}\frac{\lambda_{f,1}(m)e^{ima}-\lambda(m)}{m}\cdot q^{-m}\right)F_{II}\left(q^{-1}\right)$$

olsun. Bu durumda

$$f(n)=A_nG(n)+o\left(G(n)\right),\quad n\to\infty$$

dir.

(ii) Her $a\in\mathbb{R}$ için (3.22) serisi ıraksak olsun. Bu durumda

$$f(n)=o\left(G(n)\right),\quad n\to\infty$$

dir [14].

Teorem 3.3.8'in uygulaması olarak G 'de tanımlı tam çarpımsal fonksiyonlar için aşağıdaki Teorem doğrudur.

Teorem 3.3.9. (G,∂) toplamsal aritmetik yarı grup olsun. $q>1$ olmak üzere $|y|<q^{-1}$ dairesinde $H(y)=O(1)$, $0<r<q^{-1}$ dairesinde $H(r)\asymp 1$, G 'nin üretici fonksiyonu

$$Z(y)=\sum_{n=0}^{\infty}G(n)y^n=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(m)}{m}y^m\right)=\frac{H(y)}{(1-qy)^{\tau}}\ ,\tau>0$$

biçiminde olsun ve $\lambda(m)=O(q^m)$, $G(n)\asymp q^n n^{\tau-1}$ koşulları sağlansın.

$\tilde{f}$, G 'de tanımlı her $a\in G$ için $\left|\tilde{f}(a)\right|\le 1$ koşulunu sağlayan tam çarpımsal fonksiyon olsun. Bu durumda,

$$\sum_{p\in P}q^{-\partial(p)}\left(1-\mathrm{Re}\left(\tilde{f}(p)q^{-i\upsilon\partial(p)}\right)\right) \tag{3.23}$$

serisi $\upsilon\in\mathbb{R}$ için yakınsak ise

$$\sum_{\substack{a\in G\\ \partial(a)=n}}\tilde{f}(a)=q^{in\nu}\prod_{\partial(p)\le n}\left(1-q^{-\partial(p)}\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{f}(p^k)q^{-k\partial(p)(1+i\nu)}\right)G(n)+o\left(G(n)\right)$$

dir. (3.23) serisi her $\upsilon\in\mathbb{R}$ için ıraksak ise

$$\sum_{\substack{a\in G\\ \partial(a)=n}}\tilde{f}(a)=o\left(G(n)\right)$$

dir [14].

Açıklama 3.3.10. $\tilde{f}: G \to \mathbb{C}$ tanımlı tam çarpımsal fonksiyon olsun. $\tilde{f}$ fonksiyonunun $M\left(\tilde{f}\right)$ ortalama değerinin var ve sıfırdan farklı olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{p\in P} q^{-\partial(p)}\left(1-\operatorname{Re}\left(\tilde{f}(p)\,q^{-i\upsilon\partial(p)}\right)\right)$$

serisinin yakınsak olmasıdır [14].

Teorem 3.3.11. (G,∂) toplamsal aritmetik yarı grup olsun. Kabul edelim ki $q>1$ olmak üzere $|y|<q^{-1}$ dairesinde $H(y)=O(1)$, $\lim\limits_{y\to q^{-1}} H(y) := A > 0$ ve G 'nin üretici fonksiyonu

$$Z(y)=\sum_{n=0}^{\infty} G(n)\,y^n = \frac{H(y)}{(1-qy)^{\tau}} \ , \tau > 0$$

biçiminde olsun ve $\lambda(m)=O\left(q^m\right)$ koşulu sağlansın. Bu durumda $\lim\limits_{y\to q^{-1}} H(y) =: A = H\left(q^{-1}\right)$ ve

$$G(n) \sim \frac{H\left(q^{-1}\right)}{\Gamma(\tau)} q^n n^{\tau-1}$$

dir [17].

Teorem 3.3.12. (G,∂) toplamsal aritmetik yarı grup olsun. Kabul edelim ki $q>1$ olmak üzere $|y|<q^{-1}$ dairesinde $H(y)=O(1)$, $\lim\limits_{y\to q^{-1}} H(y) := A > 0$ ve G 'nin üretici fonksiyonu $\tau > 0$ olmak üzere

$$Z(y)=\sum_{n=0}^{\infty} G(n)\,y^n = \frac{H(y)}{(1-qy)^{\tau}} = \exp\left(\sum_{n=1}^{\infty} \frac{\lambda(n)}{n}\right)$$

biçiminde olsun ve $\lambda(m)=O\left(q^m\right)$ koşulu sağlansın. Ayrıca,

$$G(n) \asymp q^n n^{\tau-1} \text{ ve } \frac{G(n-1)}{G(n)} = q^{-1} + o(1), \quad n\to\infty$$

koşulları sağlansın.

$\tilde{g}$, G ’de tanımlı reel değerli toplamsal fonksiyon olmak üzere aşağıdakiler doğrudur:

(i) Kabul edelim ki, öyle $\alpha(n)$ dizileri vardır ki

$$\frac{1}{G(n)}\#\{a\in G,\partial(a)=n:\tilde{g}(a)-\alpha(n)\le x\},\quad n\to\infty$$

zayıf yakınsak olsun. Bu durumda $\tilde{g}$ sonlu dağılımlıdır.

(ii) $\tilde{g}$ sonlu dağılımlı fonksiyon olsun. Bu durumda c sabit ve $\tilde{h}$ toplamsal fonksiyon olmak üzere $\tilde{g}(a)=c\partial(a)+\tilde{h}(a)$ biçiminde gösterilebilir öyle ki

$$\sum_{\substack{p\\ |\tilde{h}(p)|>1}} q^{-\partial(p)},\qquad \sum_{\substack{p\\ |\tilde{h}(p)|\le 1}} \tilde{h}^2(p)q^{-\partial(p)}, \tag{3.24}$$

serileri yakınsaktır.

(iii) $\tilde{g}$ fonksiyonu, (3.24)’de verilen seriler yakınsak olacak şekilde $\tilde{g}=c\partial+\tilde{h}$ şeklinde gösterilebilsin. $n\ge 1$ olmak üzere

$$\alpha(n)=cn+\sum_{\substack{\partial(p)\le n\\ |\tilde{h}(p)|\le 1}}\tilde{h}(p)q^{-\partial(p)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda,

$$\frac{1}{G(n)}\#\{a\in G,\partial(a)=n:\tilde{g}(a)-\alpha(n)\le x\},\quad n\to\infty$$

zayıf yakınsar [1].

3.4. STONE-ČECH KOMPAKTLAŞTIRILMA VE INDLEKOFER’İN OLASILIK MODELİ

K.-H. Indlekofer [9,12] çalışmalarında olasılık teoriyi kullanarak aritmetik fonksiyonlarla ilgili problemleri araştırmıştır. Indlekofer olasılık modeline aşağıdaki temel soruyla başlamıştır:

“$\mathcal{A}$, $\mathbb{N}$ ’in alt kümelerinden oluşan cebir ve $\delta:\mathcal{A}\to\mathbb{R}$ sonlu toplamsal ölçü olsun. Acaba δ sonlu toplamsal ölçüsü bir $\overline{\delta}$ ölçüye genişletilebilir mi?”

Yukarıdaki soruya verilebilecek ilk yanıt δ asimptotik yoğunluğa sahip $\mathbb{N}$ ’in alt kümelerinden oluşan her cebir’de $\overline{\delta}$ ölçü’ye genişleyemiyor. Bunun için aşağıdaki örneği ele alalım:

$n\in\mathbb{N}$ olmak üzere $E=\{1,2,...,n\}$ kümeleri tarafından üretilen cebir $\mathcal{A}$ ile gösterilsin. Bu durumda her $A\in\mathcal{A}$ için $\delta(A)=0$ ya da $\delta(A)=1$ olduğundan $\mathcal{A}$ cebirinin her elemanı δ asimptotik yoğunluğa sahiptir. $A(n)=\{n\}$ olmak üzere

$$\delta\left(\bigcup_{n=1}^{\infty}A(n)\right)=\delta(\mathbb{N})=1$$

olmasına rağmen

$$\sum_{n=1}^{\infty}\delta(A(n))=0$$

olduğundan δ , $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde sonlu toplamsal ölçüdür fakat ölçü değildir [4].

Indlekofer, olasılık modelinde yukarıda verilenden daha genel olarak aşağıdaki problemi ele almıştır:

“$\mathcal{A}$, $\mathbb{N}$ ’in alt kümelerinden oluşan cebir ve δ, $\mathcal{A}$ -cebiri üzerinde sonlu toplamsal ölçü olsun. Acaba $\mathbb{N}$ ’de integrasyon teori inşa edilebilir mi?”

Bu modelde, $\mathbb{N}$ ayrık topolojiyle $\beta\mathbb{N}$ Stone-Čech kompakt uzaya yerleşmekte [31]. Diğer taraftan $\mathcal{A}$ -cebiri $\beta\mathbb{N}$ ’in alt kümelerinden oluşan $\overline{\mathcal{A}}$ cebirine ve δ sonlu toplamsal ölçüsü $\overline{\mathcal{A}}$ cebiri üzerinde tanımlanan $\overline{\delta}$ yarı ölçüye genişlemektedir. Bunun için genel olarak aşağıdaki yol izlenmektedir.

$\mathcal{A}$, $\mathbb{N}$ 'in alt kümelerinden oluşan cebir olsun. $\mathbb{N}$ ayrık topolojiyle $\beta\mathbb{N}$ Stone-Čech kompakt uzaya yerleştirilsin. Buradan $A \in \mathcal{A}$ kümesinin $\beta\mathbb{N}$ kompakt uzayındaki kapanışı

$$\overline{A} := cl_{\beta\mathbb{N}} A$$

olmak üzere

$$\overline{\mathcal{A}} := \left\{ \overline{A} : A \in \mathcal{A} \right\}$$

kümeler sistemi $\beta\mathbb{N}$ kompakt uzayında bir cebirdir [9].

$\delta : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ sonlu toplamsal ölçü olsun ve her $\overline{A} \in \overline{\mathcal{A}}$

$$\begin{aligned} \overline{\delta} : \overline{\mathcal{A}} &\to \mathbb{R}^+ \\ \overline{A} &\to \overline{\delta}\left(\overline{A}\right) = \delta(A) \end{aligned}$$

tanımlansın. Bu durumda $\overline{\delta}$, $\overline{\mathcal{A}}$ cebirinde yarı ölçü ve $\sigma\left(\overline{\mathcal{A}}\right)$ sigma cebirinde ölçüdür. Böylece $\left(\beta\mathbb{N}, \sigma\left(\overline{\mathcal{A}}\right), \overline{\delta}\right)$ ölçü uzayı inşa edilmiş olur [4].

Indlekofer [9,12] çalışmalarında aşağıdaki teorem ile Stone-Čech kompaktlaştırılmayı karakterize etmiştir.

Teorem 3.4.1. Doğal sayılar kümesi $\mathbb{N}$ 'in $\beta\mathbb{N}$ kompaktlaştırılması vardır öyle ki aşağıdaki özellikler birbirine denktir:

(i) Y kompakt Hausdorff uzayı olmak üzere $f : \mathbb{N} \to Y$ tanımlanan her fonksiyonun $\overline{f} : \beta\mathbb{N} \to Y$ sürekli genişlemesi vardır.

(ii) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinde tanımlı reel değerli sınırlı her fonksiyonun, $\beta\mathbb{N}$ 'de tanımlı sürekli fonksiyonlar uzayı $C(\beta\mathbb{N})$ uzayında genişlemesi vardır.

(iii) Her $A, B \subset \mathbb{N}$ için $\overline{A} = cl_{\beta\mathbb{N}} A$ ve $\overline{B} = cl_{\beta\mathbb{N}} B$ olmak üzere

$$\overline{A \cap B} = \overline{A} \cap \overline{B}$$

(iv) $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesinin ayrık alt kümelerinin $\beta\mathbb{N}$ 'deki kapanışları ayrıktır.

(v) $\mathbb{N}$ 'in alt kümelerinden oluşan her $\mathcal{A}$ cebiri için

$$\overline{\mathcal{A}} = \left\{ \overline{A} : A \in \mathcal{A} \right\}$$

ailesi $\beta\mathbb{N}$ 'de cebirdir [9].

Teorem 3.4.2. $\mathcal{A}$, $\mathbb{N}$ 'in alt kümelerinden oluşan bir cebir ve $\delta : \mathcal{A} \to [0, \infty)$ sonlu toplamsal ölçü olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} \overline{\delta} : \overline{\mathcal{A}} &\to \mathbb{R}^{+} \\ \overline{A} &\to \overline{\delta}\left(\overline{A}\right) = \delta(A) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan $\overline{\delta}$ fonksiyonu $\sigma\left(\overline{\mathcal{A}}\right)$ sigma cebirinde ölçüdür [12].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. YARDIMCI LEMMALAR

Bu kısımda, G toplamsal aritmetik yarı grubunun Stone-Čech kompaktlaştırılmasında kullanılacak yardımcı lemmalar verilecektir.

Lemma 4.1.1.

(G,∂) toplamsal aritmetik yarı grup olsun. $q>1$ olmak üzere $|y|<q^{-1}$ dairesinde $H(y)=O(1)$, $0<r<q^{-1}$ dairesinde $H(r)\asymp 1$, G 'nin üretici fonksiyonu

$$Z(y)=\sum_{n=0}^{\infty}G(n)y^n=\exp\left(\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\lambda(m)}{m}y^m\right)=\frac{H(y)}{(1-qy)^{\tau}}\ ,\tau>0$$

biçiminde olsun ve $\lambda(m)=O(q^m)$, $G(n)\asymp q^n n^{\tau-1}$ koşulları sağlansın.

$p_i\neq p_j$, $(i\neq j)$ olmak üzere $\{p_1^{k_1},...,p_r^{k_r}\}$ kümesi asal kuvvetlerin sonlu kümesi olsun. Kabul edelim ki her $p_i\in P,\ i=1,2,...,r$ için $\partial(p_i)\geq\left[\!\left[\frac{\log 2}{\log q}\right]\!\right]$ olsun. Bu durumda

$$\tilde{f}(p^j):=\begin{cases}0, & p^j\in\{p_1^{k_1},...,p_r^{k_r}\}\\ 1, & diğer\ durumlarda\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan çarpımsal fonksiyonunun ortalama değeri vardır ve

$$M(\tilde{f})=\prod_{i=1}^{r}\left(1-q^{-\partial(p_i^{k_i})}\left(1-q^{-\partial(p_i)}\right)\right)$$

değerine eşittir.

İspat: Teorem 3.3.8'in koşullarının sağlandığı gösterilirse istenilen elde edilecektir. $\tilde{f}$ fonksiyonunun tanımından $\tilde{f}$ fonksiyonunun üretici fonksiyonu

$$F(y)=\prod_{p}\left(1+\sum_{j=1}^{\infty}\tilde{f}\left(p^{j}\right)y^{j\partial(p)}\right)=\prod_{i=1}^{r}\left(1+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k_i}}^{\infty}y^{j\partial(p_i)}\right)\prod_{\substack{p\neq p_i\\ i=1,\dots,r}}\left(1-y^{\partial(p)}\right)^{-1}$$

$$=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\tilde{f}}(n)}{n}y^{n}\right)$$

biçimindedir.

$$1+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k_i}}y^{j\partial(p_i)}=\frac{1-y^{k_i\partial(p_i)}\left(1-y^{\partial(p_i)}\right)}{1-y^{\partial(p_i)}}$$

olduğundan

$$F(y)=\prod_{i=1}^{r}\left(1-y^{k_i\partial(p_i)}\left(1-y^{\partial(p_i)}\right)\right)\cdot Z(y)$$

dir. $\partial(p_i)\geq\left[\!\left[\frac{\log 2}{\log q}\right]\!\right]$ koşulunu sağlayan her $p_i\in P\ (i=1,2,\dots,r)$ için

$$\left|y^{\partial(p_i)k_i}\left(1-y^{\partial(p_i)}\right)\right|\leq q^{-\partial(p_i)k_i}\left|1+q^{-\partial(p_i)}\right|\leq\frac{3}{4}$$

olduğundan $|y|<q^{-1}$ dairesinde $F(y)$ sıfırdan farklıdır. Böylece

$$\lambda_{\tilde{f}}=\lambda_{\tilde{f},1}+\lambda_{\tilde{f},2}$$

olmak üzere

$$F(y)=Z(y)\prod_{i=1}^{r}\left(1+\sum_{\substack{j=1\\ j\neq k_i}}^{\infty}y^{j\partial(p_i)}\right)=\exp\left(\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\lambda_{\tilde{f}}(n)}{n}y^{n}\right)$$

elde edilir öyle ki

$$\lambda_{\tilde{f},1}=\lambda \qquad \text{ve} \qquad \sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left|\lambda_{\tilde{f},2}(m)\right|}{m}q^{-m}<\infty$$

dir. Teorem 3.3.8'in koşulları sağlandığından $M\left(\tilde{f}\right)$ vardır ve

$$M\left(\tilde{f}\right)=\prod_{i=1}^{r}\left(1-q^{-\partial\left(p_i^{k_i}\right)}\left(1-q^{-\partial(p_i)}\right)\right)$$

eşittir.

Tam çarpımsal fonksiyonlar için aşağıdaki lemma doğrudur.

Lemma 4.1.2.

(G,∂), Lemma 4.1.1.'in koşullarını sağlayan toplamsal aritmetik yarı grup ve $\{p_1,\dots,p_r\}$ farklı asalların sonlu kümesi olsun. Bu durumda

$$\tilde{f}(p):=\begin{cases}0, & p\in\{p_1,\dots,p_r\}\\ 1, & di\breve{g}er\ durumlarda\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan tam çarpımsal fonksiyonunun ortalama değeri vardır ve

$$M\left(\tilde{f}\right)=\prod_{i=1}^{r}\left(1-q^{-\partial(p_i)}\right)$$

eşittir.

İspat: Teorem 3.3.9 koşulları sağlandığından

$$M\left(\tilde{f}\right)=\frac{1}{G(n)}\sum_{\substack{a\in G\\ \partial(a)=n}}\tilde{f}(a)$$

$$=q^{inv}\prod_{\partial(p)\le n}\left(1-q^{-\partial(p)}\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}\tilde{f}\left(p^k\right)q^{-k\partial(p)(1+iv)}\right)+o(1),\quad n\to\infty$$

dir. $\tilde{f}$ tam toplamsal fonksiyonun tanımından istenilen elde edilir.

4.2. TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLARIN STONE-ČECH KOMPAKTLAŞTIRILMASI

Bu kısımda G toplamsal aritmetik yarı grupların βG Stone - Čech kompaktlaştırılması verilecektir. Bu sayede [9, 10]'da verilen model G toplamsal aritmetik yarı gruplara uygulanarak βG kompakt uzayında olasılık uzayı inşa edilecektir.

$\mathcal{A}$, G 'nin alt kümelerinden oluşan bir cebir olsun. G üzerinde ayrık topoloji alınarak βG ile G 'nin Stone - Čech kompaktlaştırılmasını işaretleyelim. Böylece Teorem 3.4.1.'den

$$\bar{\mathcal{A}} := \left\{ \bar{\mathrm{A}} \mid \mathrm{A} \in \mathcal{A}, \bar{\mathrm{A}} := \mathrm{A}\text{'nın } \beta \mathrm{G}\text{'de kapanışı} \right\}$$

kümeler sistemi βG üzerinde bir cebirdir.

δ fonksiyonu $\mathcal{A}$ cebiri üzerinde sonlu toplamsal ölçü olmak üzere, $\bar{\mathcal{A}}$ cebiri üzerinde

$$\bar{\delta}\left(\bar{\mathrm{A}}\right) = \delta\left(\mathrm{A}\right), \quad \bar{\mathrm{A}} \in \bar{\mathcal{A}}$$

şeklinde tanımlanan $\bar{\delta}$ fonksiyonu Teorem 3.4.2.'den $\sigma\left(\bar{\mathcal{A}}\right)$ sigma cebirinde bir ölçüdür. Böylece $\left(\beta \mathrm{G}, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}\right), \bar{\delta}\right)$ olasılık uzayı elde edilir.

Açıklama 4.2.1. Toplamsal aritmetik yarı gruplar için yukarıda verilen olasılık modeli $G(n)$ üzerine konulacak koşul veya G 'nin üretici fonksiyonu Z üzerine konulacak koşula göre 2 farklı şekilde verilebilir. İlk olarak, Teorem 4.2.2.'de, $G(n) \asymp q^n \dfrac{B(n)}{n}$ koşulunun sağlanması durumunda elementar metotlar kullanılarak $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_1\right), \bar{\delta}_1\right)$ olasılık uzayı inşa edilecektir. Diğer taraftan, Teorem 4.2.3.'de G 'nin üretici fonksiyonu Z 'nin $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfından olması durumunda analitik metotlar kullanılarak $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_2\right), \bar{\delta}_2\right)$ olasılık uzayı inşa edilecektir. Bu yöntemlerden ikincisi, Z üretici fonksiyonun $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfından olması durumunda elde edilen olasılık uzayı, 4.3 bölüm'de verilen 3-seri Teoremi'nde kullanılacaktır.

Teorem 4.2.2. $p \in P$ keyfi asal eleman, $k \in \mathbb{N}_0$ ve G 'nin p^k asalları ile bölünebilen tüm elemanlarının kümesi

$$A_{p^k} := \{a \in G:\ p^k \mid a\}$$

olmak üzere, $\{A_{p^k}\}$ kümeleri tarafından üretilen cebir $\mathcal{A}_1$ olsun. Kabul edelim ki

$$G(n) \asymp q^n \frac{B(n)}{n} \tag{4.1}$$

sağlansın. Bu durumda,

(i) Her $A \in \mathcal{A}_1$ için

$$\begin{aligned} \delta_1 : \mathcal{A} &\to [0,1] \\ A &\to \delta_1(A) := \lim_{k\to\infty} M(n_k, 1_A) \end{aligned}$$

şeklinde tanımlanan δ_1 fonksiyonu sonlu toplamsal ölçüdür.

(ii) $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_1\right), \bar{\delta}_1\right)$ bir olasılık uzayıdır.

İspat: (i) $A \in \mathcal{A}_1$ kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$1_A(a) := \begin{cases} 1, & a \in A \\ 0, & a \notin A \end{cases}$$

olmak üzere

$$M(n, 1_A) = \frac{\sum\limits_{\substack{a \in A \\ \partial(a)=n}} 1}{\sum\limits_{\substack{a \in G \\ \partial(a)=n}} 1}$$

ortalama değerini ele alalım. Her $A \in \mathcal{A}_1$ kümesinin karakteristik fonksiyonu

$$\begin{aligned} 1_{A\cap B} &= 1_A \cdot 1_B \\ 1_{A\setminus B} &= 1_A - 1_B \cdot 1_B \\ 1_{A\cup B} &= 1_A + 1_A \cdot 1_B \end{aligned}$$

özelliklerinden dolayı $1_{A_{p_1}^{k_1}} \cdot \ldots \cdot 1_{A_{p_r}^{k_r}}$ çarpımının sonlu lineer kombinasyonu olarak yazılabilir.

$(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, G'nin $\partial(a_1) \le \partial(a_2) \le ... \le \partial(a_n) \le ...$ koşulunu sağlayan dizisi olsun.

$$A_{a_j} := \{a \in G: \ a_j \mid a\}$$

olmak üzere $M\left(n, 1_{A_j}\right)$ ortalama değerini hesaplayalım. (4.1)'den, $n \ge 2\partial\left(a_j\right)$ için

$$M\left(n,\ 1_{A_j}\right) \asymp \frac{q^{n-\partial(a_j)}}{n-\partial\left(a_j\right)} \cdot \left(\frac{n}{n-\partial\left(a_j\right)}\right) \cdot \frac{B\left(n-\partial\left(a_j\right)\right)}{B(n)}$$
$$\asymp q^{-\partial(a_j)}$$

elde edilir. Böylece (n) dizisinin öyle bir (n_k) alt dizisi vardır öyle ki

$$\lim_{k\to\infty} M\left(n_k, 1_{A_{a_j}}\right) =: \delta_1\left(A_{a_j}\right) \tag{4.2}$$

limiti her A_{a_j} için vardır. Dolayısıyla her $A \in \mathcal{A}$ için

$$\delta_1(A) = \lim_{k\to\infty} M\left(n_k, 1_A\right)$$

şeklinde tanımlanan δ_1 fonksiyonu $\mathcal{A}_1$ cebiri üzerinde iyi tanımlı sonlu toplamsal ölçüdür.

(ii) Yukarıdaki olasılık modelinden, $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_1\right), \bar{\delta}_1\right)$'nin olasılık uzayı olduğu elde edilir.

Teorem 4.2.3. Kabul edelim ki G toplamsal aritmetik yarı grubunun üretici fonksiyonu Z, $\exp-\log\mathcal{F}$ sınıfından olsun. $p \in P$ keyfi asal eleman ve $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$A'_{p^k} := \{a \in G: \ p^k \,\|\, a\}$$

olsun. Bu durumda, $\{A'_{p^k}\}$ kümeleri tarafından üretilen cebir $\mathcal{A}_2$ olmak üzere;

(i) Her $A' \in \mathcal{A}_2$ için

$$\delta_2(A') := \lim_{k\to\infty} M(n_k, 1_{A'})$$

şeklinde tanımlanan δ_2 fonksiyonu sonlu toplamsal ölçüdür ve $\delta_2\left(A'_{p^k}\right) = q^{-k\partial(p)}\left(1-q^{-k\partial(p)}\right)$'dir.

(ii) $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_2\right), \bar{\delta}_2\right)$ bir olasılık uzayıdır.

İspat: (i) Her $p' \in P$ ve $j \in \mathbb{N}$ için G üzerinde

$$\tilde{f}_{p^k}\left(p'^j\right) := \begin{cases} 0, & p = p'\ ,\ j = k \\ 1, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

çarpımsal fonksiyonunu tanımlayalım. $\tilde{f}$ fonksiyonunun tanımından $1_{A'_{p^k}} = 1 - \tilde{f}_{p^k}$ dir. $\partial(p) \geq \left[\!\left[\dfrac{\log 2}{\log q}\right]\!\right]$ koşulunu sağlayan her $p \in P$ için Lemma 4.1.1'den

$$M\left(\tilde{f}_{p^k}\right) = 1 + q^{-\partial(p)(k+1)} - q^{-\partial(p)k}$$

dir. Bu p asal elemanı için

$$\delta_2\left(A'_{p^k}\right) = 1 - M\left(\tilde{f}_{p^k}\right) = q^{-k\partial(p)} - q^{-(k+1)\partial(p)}$$

dir.

$(a_n) = (a_1, a_2, ..., a_n, ...)$, G'nin $\partial(a_1) \leq \partial(a_2) \leq ... \leq \partial(a_n) \leq ...$ koşulunu sağlayan bir dizisi olsun.

$$A_{a_j} := \{a \in G:\ a_j \,\|\, a\}$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned} M\left(n, 1_{A'_{a_j}}\right) &= \frac{1}{G(n)} \sum_{\substack{a\in A'_{a_j} \\ \partial(a)=n}} 1 = \\ &= \frac{1}{G(n)} \sum_{\substack{ba_j\in G \\ (b,a_j)=1,\,\partial(ba_j)=n}} 1 = \\ &= \frac{G\left(n-\partial(a_j)\right)}{G(n)} \cdot \frac{1}{G\left(n-\partial(a_j)\right)} \sum_{\substack{b\in G \\ \partial(b)=n-\partial(a_j),(b,a_j)=1}} 1 \end{aligned}$$

dir. Benzer şekilde, G ’de her $p \in P$ için

$$\tilde{f}(p) := \begin{cases} 1, & p \nmid a_j \\ 0, & p \mid a_j \end{cases}$$

tam çarpımsal fonksiyonunu tanımlayalım. Bu durumda

$$M\left(n, 1_{A'_{a_j}}\right) = \underbrace{\frac{G\left(n-\partial\left(a_j\right)\right)}{G(n)}}_{I} \cdot \underbrace{\frac{1}{G\left(n-\partial\left(a_j\right)\right)} \sum_{\substack{b\in G \\ \partial(b)=n-\partial\left(a_j\right)}} \tilde{f}(b)}_{II}$$

dir. Lemma 4.1.2.’den

$$II \to \prod_{p \mid a_j} \left(1-q^{-\partial(p)}\right), \quad n \to \infty.$$

dir. I ifadesi $M\left(n, 1_{A_{a_j}}\right)$ ortalama değerine eşit olduğundan (4.2)’den (n) dizisinin, her $j \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{k\to\infty} M\left(n_k, 1_{A'_{a_j}}\right) = \delta_1\left(A_{a_j}\right) \prod_{p \mid a_j} \left(1-q^{-\partial(p)}\right) =: \delta_2\left(A'_j\right)$$

eşitliğini sağlayan (n_k) alt dizisi vardır. Böylece her $A' \in \mathcal{A}_2$ için

$$\delta_2(A') = \lim_{k\to\infty} M\left(n_k, 1_{A'}\right)$$

şekilde tanımlanan δ_2 fonksiyonu $\mathcal{A}_2$ cebirinde sonlu toplamsal ölçüdür.

(ii) Böylece verilen olasılık modelinden $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_2\right), \bar{\delta}_2\right)$’nin olasılık uzayı olduğu elde edilir.

Teorem 4.2.4. (G,∂) toplamsal aritmetik yarı grup olsun. Kabul edelim ki $q>1$ olmak üzere $|y| < q^{-1}$ dairesinde $H(y) = O(1)$, $\lim_{y\to q^{-1}} H(y) := A > 0$ ve G ’nin üretici fonksiyonu

$$Z(y) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) y^n = \frac{H(y)}{(1-qy)^{\tau}} \ , \tau > 0$$

biçiminde ve $\lambda(m) = O\left(q^m\right)$ koşulu sağlansın. Bu durumda,

(i) G ’nin p asal elamanı ile bölünebilen tüm elemanlarının kümesi

$$A_p := \{a \in G:\ p \mid a\}$$

olmak üzere, $\{A_p\}$ kümeleri tarafından üretilen $\mathcal{A}_3$ cebirinde

$$\delta_3(A) := \lim_{n\to\infty} M(n, 1_A), \quad A \in \mathcal{A}$$

şeklinde tanımlanan δ_3 fonksiyonu $\mathcal{A}$ cebirinde sonlu toplamsal ölçüdür.

(ii) $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_3\right), \bar{\delta}_3\right)$ bir olasılık uzayıdır.

İspat: (i) Teorem 3.3.11'den $\lim_{y\to q^{-1}} H(y) = H\left(q^{-1}\right)$ ve

$$G(n) \sim \frac{H\left(q^{-1}\right)}{\Gamma(\tau)} q^n n^{\tau-1} \tag{4.3}$$

dir. $p_1, \cdots, p_r \in P$ asal elemanlar ve $a' = p_1 \cdots p_r$ olmak üzere,

$$A_{a'} := \{a \in G:\ a' \mid a\}$$

ile G 'nin a' ile tam bölünebilen elemanlarının kümesini gösterelim. Bu durumda $1_{A_{a'}} = 1_{A_{p_1}} \cdot \ldots \cdot 1_{A_{p_r}}$ eşitliği doğrudur. (4.3)'ten

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty} M\left(n, 1_{A_{a'}}\right) &= \lim_{n\to\infty} \frac{G\left(n - \partial(a')\right)}{G(n)} \\ &= q^{-\partial(a')}\end{aligned}$$

elde edilir. Her $A \in \mathcal{A}_3$ için

$$\delta_3(A) = \lim_{n\to\infty} M(n, 1_A)$$

olacak şekilde tanımlandığında $\mathcal{A}_3$ cebiri üzerinde δ_3 sonlu toplamsal ölçüsü elde edilir.

(ii) Bölüm 4.1'de verilen Indlekofer'in olasılık modelinden,

$$\bar{\delta}_3\left(\bar{A}\right) := \delta_3(A) \quad \left(\bar{A} \in \bar{\mathcal{A}}_3\right)$$

ile tanımlanan $\bar{\delta}_3$ genişlemesi $\sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_1\right)$ sigma cebirinde bir ölçü olduğundan $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_3\right), \bar{\delta}_3\right)$'nin bir olasılık uzayı olduğu elde edilir.

4.3. TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLARDA BAĞIMSIZ RASTGELE DEĞİŞKENLER VE 3-SERİ TEOREMİ

$p \in P$ keyfi asal eleman ve $k \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere, G'nin p^k asalı ile bölünebilen tüm elemanlarının kümesi A'_{p^k} olsun. $\tilde{g} : G \to \mathbb{R}$ toplamsal fonksiyon olsun.

$$X_p := \begin{cases} \tilde{g}\left(p^k\right), & a \in A'_{p^k}, \\ 0, & a \notin A'_{p^k} \end{cases}$$

olmak üzere $\tilde{g}$ fonksiyonu

$$\tilde{g} = \sum_{p \in P} \tilde{g}\left(p\right) X_p$$

şeklinde yazılabilir.

Her $p \in P$ için $1_{A'_{p^k}}$ karakteristik fonksiyonlarının $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_2\right), \bar{\delta}_2\right)$ olasılık uzayında genişlemeleri olduğundan ve $X_p = \tilde{g}\left(p^k\right) \cdot 1_{A'_{p^k}}$ eşitliğinden, her $p \in P$ için X_p fonksiyonlarının $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_2\right), \bar{\delta}_2\right)$ olasılık uzayında $\bar{X}_p$ genişlemeleri vardır. $1_{A'_{p^k}}$ karakteristik fonksiyonlarının bağımsız rastgele değişken olmasından dolayı $\left\{\bar{X}_p\right\}$ fonksiyonları bu olasılık uzayında bağımsız rastgele değişkenlerdir ve

$$\bar{\tilde{g}} := \sum_{p} X_p$$

serisi bağımsız rastgele değişkenlerin toplamıdır. Böylece, G toplamsal aritmetik yarı grubunda tanımlı toplamsal fonksiyonların βG kompakt uzayındaki genişlemesi $\bar{\tilde{g}}$ fonksiyonunun, bağımsız rastgele değişkenlerin toplamı olarak yazılabildiği elde edilir.

Aşağıda 3-seri teoremi olarak adlandırılan Teorem 4.3.4.'de, toplamsal aritmetik yarı gruplarda tanımlı tam toplamsal fonksiyonların limit dağılım fonksiyonunun varlığının, bağımsız rastgele değişkenlerin toplamından oluşan serinin $\bar{\delta}$ – hemen hemen yakınsak olmasına denk olduğu verilmektedir.

Teorem 4.3.1. (3-Seri Teoremi)

G, üretici fonksiyonu $\exp - \log \mathcal{F}$ sınıfından olan toplamsal aritmetik yarı grup olsun. Kabul edelim ki $\tilde{g} : G \to \mathbb{R}$ tam toplamsal fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) $\tilde{g} = \sum_{p} X_p$ limit dağılım fonksiyonuna sahiptir.

(ii) $\bar{\tilde{g}} = \sum_{p} \bar{X}_p$ serisi $\bar{\delta}$ – hemen hemen yakınsaktır.

(iii) $\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|>1}} \bar{\delta}\left(\bar{A}_P\right)$, $\quad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} \mathbb{E}\left[\bar{X}_P\right]$, $\quad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} Var\left[\bar{X}_P\right]$

serileri yakınsaktır.

(iv) $\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|>1}} q^{-\partial(p)}$, $\quad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} \tilde{g}(p) q^{-\partial(p)}$, $\quad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} \tilde{g}^2(p) q^{-\partial(p)}$

serileri yakınsaktır.

İspat:

$(i) \Rightarrow (iv)$ Kabul edelim ki

$$\tilde{g} = \sum_{p} X_p$$

fonksiyonu $\mathcal{F}(x)$ limit dağılım fonksiyonuna sahip olsun. Levy süreklilik teoreminden (Teorem 3.1.18) $\mathcal{F}(x)$'in karakteristik fonksiyonu ve $t=0$ noktasında sürekli olan bir $\varphi(t)$ fonksiyonu vardır öyle ki $-\infty < t < \infty$ olmak üzere

$$\int_{-\infty}^{\infty} e^{itx} d\left(\mathcal{F}_n(x)\right) = \frac{1}{G(n)} \sum_{\partial(a)=n} e^{it\tilde{g}(a)} \to \varphi(t), \quad n \to \infty \tag{4.4}$$

dir. φ fonksiyonu karakteristik fonksiyon olduğundan $\varphi(0)=1$'dir. $\varphi(t)$ fonksiyonunun $t=0$ noktasında sürekli olmasından ve $\varphi(0)=1$ eşitliğinden öyle $T>0$ ve $C \in (0,1)$ sabitleri vardır öyle ki $|t| \le T$ için $|\varphi(t)| > C$ eşitsizliği elde edilir. Böylece (4.4)'te yer alan limit vardır ve

$$\tilde{f}_t(a) := e^{it\tilde{g}(a)}$$

işaretlemesiyle bu limit $M\left(\tilde{f}_t\right)$ eşittir ve $|t| \le T$ için sıfırdan farklıdır. Böylece Açıklama 3.3.10.'dan

$$\sum_p q^{-\partial(p)}\left(1-\tilde{f}_t(p)\right) \tag{4.5}$$

serisi $|t| \le T$ için yakınsaktır. Şimdi (iv)'te yer alan üç serinin yakınsaklığını gösterelim. (4.5)'de yer alan seri

$$\sum_p q^{-\partial(p)}\left(1-\tilde{f}_t(p)\right)=\sum_p q^{-\partial(p)}\left(1-\cos\left(t\tilde{g}(p)\right)\right)-i\sum_p q^{-\partial(p)}\sin\left(t\tilde{g}(p)\right) \tag{4.6}$$

biçiminde yazılabilir. (4.6) serisinin yakınsak olmasından $|t| \le T$ için

$$\sum_p q^{-\partial(p)}\left(1-\cos\left(t\tilde{g}(p)\right)\right)=2\sum_p q^{-\partial(p)}\sin^2\left(\frac{t\tilde{g}(p)}{2}\right)\le K$$

elde edilir. $t\in\left[0,\frac{\pi}{2}\right]$ olmak üzere

$$\frac{2}{\pi}t\le \sin t$$

değerlendirmesi ve (4.5)'den

$$2\sum_{T|\tilde{g}(p)|\le\frac{\pi}{2}} q^{-\partial(p)}\left(\frac{2}{\pi}\right)^2\frac{T^2\tilde{g}^2(p)}{4}\le K,$$

ve

$$\sum_{|\tilde{g}(p)|\le 1} q^{-\partial(p)}\tilde{g}^2(p)\ll\frac{1}{T^2}$$

değerlendirmeleri elde edilir. Bu nedenle (iv)'te yer alan 3.serinin yakınsaklığı ispatlanmış olur.

(4.5) değerlendirmesi 0'dan T'ye kadar integrallendiğinde

$$\sum_p q^{-\partial(p)}\int_0^T\left(1-\cos\left(t\tilde{g}(p)\right)\right)dt\le KT$$

elde edilir ve buradan

$$\sum_p q^{-\partial(p)}\left(T-\frac{\sin\left(T\tilde{g}(p)\right)}{\tilde{g}(p)}\right)\le KT$$

dir. $t\in\left[\frac{\pi}{2},\infty\right)$ olmak üzere

$$\sin t\le\frac{2}{\pi}t$$

değerlendirmesinden

$$\sum_{|\tilde{g}(p)|>1} q^{-\partial(p)} T\left(1-\frac{2}{\pi}\right) \leq KT$$

ve

$$\sum_{|\tilde{g}(p)|>1} q^{-\partial(p)} \ll 1$$

dir. Bu ise (iv)'te yer alan ilk serinin yakınsaklığını verir. (4.6)'da yer alan

$$\sum_{p} q^{-\partial(p)} \sin\left(t\tilde{g}(p)\right)$$

yakınsak serisi,

$$\sum_{p} q^{-\partial(p)} \sin\left(t\tilde{g}(p)\right) = \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\leq 1}} q^{-\partial(p)} \sin\left(t\tilde{g}(p)\right) + \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|>1}} q^{-\partial(p)} \sin\left(t\tilde{g}(p)\right) \quad (4.7)$$

biçiminde yazılabilir. $\left|\sin\left(t\tilde{g}(p)\right)\right| \leq 1$ değerlendirmesinden ve (iv)'te yer alan birinci serinin yakınsaklığından (4.7)'de yer alan son seri $|t| \leq T$ için yakınsaklığı elde edilir. Böylece $|t| \leq T$ için

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\leq 1}} q^{-\partial(p)} \sin\left(t\tilde{g}(p)\right) \quad (4.8)$$

serisi yakınsak olmak zorundadır. Not edelim ki $\left|t\tilde{g}(p)\right| \leq 2$ için

$$\left|\sin\left(t\tilde{g}(p)\right) - t\tilde{g}(p)\right| \leq \frac{\left|t\tilde{g}(p)\right|^3}{3!} \leq \frac{t^2\tilde{g}^2(p)}{3} \quad (4.9)$$

değerlendirmesi doğrudur. (4.8)'deki seri

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\leq 1}} q^{-\partial(p)} \sin\left(t\tilde{g}(p)\right) = \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\leq 1}} q^{-\partial(p)} \left(\sin\left(t\tilde{g}(p)\right) - t\tilde{g}(p)\right) - \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\leq 1}} q^{-\partial(p)} t\tilde{g}(p) \quad (4.10)$$

biçiminde yazılabilir. (4.10) eşitliğindeki ikinci seri (4.9)'dan

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\leq 1}} q^{-\partial(p)} t\tilde{g}(p) \ll t^2 \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\leq 1}} q^{-\partial(p)} \tilde{g}^2(p)$$

olarak değerlendirilir. Böylece (4.10)'daki son seri yakınsak olmak zorundadır. Bu ise (iv)'te yer alan ikinci serinin yakınsaklığını verir. Böylece $(i)\Rightarrow(iv)$ elde edilir.

$(iv)\Rightarrow(i)$

Kabul edelim ki, (iv)'te yer alan seriler yakınsak olsun. Her $t\in\mathbb{R}$ için (4.4)'de yer alan serinin yakınsaklığı gösterildiğinde Teorem 3.3.9 ve Açıklama 3.3.10.'dan

$$M\left(\tilde{f}_t\right)=\prod_p\left(1-q^{-\partial(p)}\right)\left(1+\sum_{k=1}^{\infty}q^{-k\partial(p)}\tilde{f}_t\left(p^k\right)\right)$$

eşitliği elde edilir. $M\left(\tilde{f}_t\right)\neq 0$ ve $t=0$ noktasında sürekli olduğundan Levy süreklilik teoreminden limit dağılım fonksiyonunun varlığı elde edilir. (4.5)'deki seri

$$\sum_p q^{-\partial(p)}\left(1-\tilde{f}_t(p)\right)=\sum_{\substack{p\\|\tilde{g}(p)|\le 1}}q^{-\partial(p)}\left(1-\tilde{f}_t(p)\right)+\sum_{\substack{p\\|\tilde{g}(p)|>1}}q^{-\partial(p)}\left(1-\tilde{f}_t(p)\right)$$

$$=\underbrace{\sum_{\substack{p\\|\tilde{g}(p)|\le 1}}q^{-\partial(p)}\left(1-\tilde{f}_t(p)+it\tilde{g}(p)\right)}_{I}-\underbrace{\sum_{\substack{p\\|\tilde{g}(p)|\le 1}}q^{-\partial(p)}\left(it\tilde{g}(p)\right)}_{II}+\underbrace{\sum_{\substack{p\\|\tilde{g}(p)|>1}}q^{-\partial(p)}\left(1-\tilde{f}_t(p)\right)}_{III}\qquad(4.11)$$

biçiminde yazılabilir.

Her $t\in\mathbb{R}$ için

$$\left|e^{it\tilde{g}(p)}-1-it\tilde{g}(p)\right|\le\frac{t^2\tilde{g}^2(p)}{2}$$

değerlendirmesinden (4.11) eşitliğinde yer alan I ifadesinin mutlak değeri

$$|I|\le\frac{T^2}{2}\sum_{\substack{p\\|\tilde{g}(p)|\le 1}}q^{-\partial(p)}\tilde{g}^2(p)$$

dir. $|I|$, kabulümüzden yakınsak olan seri ile üstten değerlendirildiğinden yakınsaktır. Kabulümüzden II serisi yakınsaktır. Son olarak

$$|III|\le 2\sum_{\substack{p\\|\tilde{g}(p)|>1}}q^{-\partial(p)}$$

dir. Bu üç değerlendirmeden (4.5) serisinin yakınsaklığı elde edilir.

$(iv) \Leftrightarrow (iii)$ $p \in P$ olmak üzere, her $A_p \in \mathcal{A}$ için $\bar{\delta}\left(\bar{A}_p\right) = \delta\left(A_p\right) = q^{-\partial(p)}$ olduğundan (iii)'de yer alan birinci seri yakınsaktır. Beklenen değer ve varyansın tanımından

$$\mathbb{E}\left[\bar{X}_P\right] = \tilde{g}(p)q^{-\partial(p)} \quad \text{ve} \quad Var\left[\bar{X}_P\right] = \tilde{g}^2(p)q^{-\partial(p)}$$

olduğundan (iii)'de yer alan diğer iki serininde yakınsaklığı elde edilir.

$(iii) \Leftrightarrow (ii)$ denkliği ise Kolmogorov 3-seri teoreminden (Teorem 3.1.12) elde edilir.

Açıklama 4.3.2. $f:\mathbb{N} \to \mathbb{R}$ tanımlı toplamsal fonksiyon olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$F_n(x) := \frac{1}{n}\#\{m \le n : f(m) \le x\}$$

dağılım fonksiyonu tanımlansın.

1947 yılında P. Erdös, f fonksiyonunun limit dağılım fonksiyonuna sahip olmasını veren yeter koşul için aşağıdaki konjektürü vermiştir:

Erdös Konjektürü: a ve b, $a < b$ koşulunu sağlayan iki reel sayı olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\left(F_n(b) - F_n(a)\right) \qquad (*)$$

limiti var ve pozitif ise f fonksiyonu limit dağılım fonksiyonuna sahiptir.

K.-H. Indlekofer [16] çalışmasında, Erdös'ün bu konjektürünü $(*)$ koşulundan daha zayıf olan

$$\liminf_{n\to\infty}\left(F_n(b) - F_n(a)\right)$$

var ve pozitif olması koşulu altında ispatlamıştır. Bu tezde yer alan Sonuç 4.4.4'de, G toplamsal aritmetik yarı grubunda tanımlı sadece pozitif veya negatif değer alabilen reel değerli toplamsal fonksiyonlar için yukarıda verilen konjektürün benzeri toplamsal aritmetik yarı gruplarda ispatlanmıştır.

4.4. TOPLAMSAL ARİTMETİK YARI GRUPLARDA SONLU DAĞILIMLI TOPLAMSAL FONKSİYONLAR VE 2- SERİ TEOREMİ

$p \in P$ keyfi asal eleman olmak üzere G 'nin p asal elamanı ile bölünebilen tüm elemanlarının kümesi

$$A_p := \{a \in G:\ p \mid a\}$$

ile gösterilsin. $\mathcal{A}_1$ ile $\{A_p\}$ kümeleri tarafından üretilen cebir gösterilsin. Teorem 4.2.4'te $\left(\beta G, \sigma\left(\bar{\mathcal{A}}_3\right), \bar{\delta}_3\right)$'in olasılık uzayı olduğu gösterildi.

$\tilde{g} : G \to \mathbb{R}$ fonksiyonu G 'de tanımlı kuvvetli toplamsal fonksiyon olsun. Bu durumda A_p kümesinin karakteristik fonksiyonu $\mathcal{E}_p$ olmak üzere $\tilde{g}$ fonksiyonu

$$\tilde{g} = \sum_{p \in P} \tilde{g}(p) \mathcal{E}_p$$

biçiminde yazılır. Her $p \in P$ için $\mathcal{E}_p$ fonksiyonlarının βG kompakt uzayında $\bar{\mathcal{E}}_p$ genişlemeleri vardır. Bu gösterim altında

$$\tilde{g} = \sum_{p \in P} \tilde{g}(p) \mathcal{E}_p \to X := \sum_{p} \tilde{g}(p) \bar{\mathcal{E}}_p = \sum_{p} X_p$$

şeklinde yazılabilir.

Ayrıca, her $\bar{A} \in \bar{\mathcal{A}}_3$ için $\mathcal{P}\left(\bar{A}\right) := \bar{\delta}_3\left(\bar{A}\right)$ olmak üzere

$$\mathcal{P}\left(X_p = \tilde{g}(p)\right) = q^{-\partial(p)} \quad \text{ve} \quad \mathcal{P}\left(X_p = 0\right) = 1 - q^{-\partial(p)}$$

dir. $\bar{\mathcal{E}}_p$ fonksiyonları bağımsız rastgele değişken olduklarından

$$X := \sum_{p} X_p \tag{4.12}$$

bağımsız rastgele değişkenlerin toplamıdır. Böylece, G toplamsal aritmetik yarı grubunda tanımlı kuvvetli toplamsal fonksiyonun βG kompakt uzayındaki genişlemesinin bağımsız rastgele değişkenlerin toplamı olarak yazılabildiği gösterilmiştir.

Bir önceki bölümde, $\tilde{g}$ toplamsal fonksiyonunun

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{G(n)} \#\{a \in G, \partial(a) = n : \tilde{g}(a) \le x\}$$

dağılım fonksiyonunun limit dağılım fonksiyonuna yakınsaması

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|>1}} q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} \tilde{g}(p) q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} \tilde{g}^2(p) q^{-\partial(p)}$$

serilerinin yakınsamasına denk olduğu gösterilmişti. Bu bölümde ise, G toplamsal aritmetik yarı grubunda esas dağılımlı toplamsal fonksiyonlar tanımlanacak ve bu tanım (4.12) serisinin esas yakınsak olması ile ilişkilendirilecektir. Bu durumda aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.4.1. (G,∂) toplamsal aritmetik yarı grup olsun. $q>1$ olmak üzere $|y|<q^{-1}$ dairesinde $H(y)=O(1)$, $\lim_{y\to q^{-1}} H(y)$ limiti var ve pozitif, G 'nin üretici fonksiyonu

$$Z(y) = \sum_{n=0}^{\infty} G(n) y^n = \exp\left(\sum_{m=1}^{\infty} \frac{\lambda(m)}{m} y^m\right) = \frac{H(y)}{(1-qy)^{\tau}} \ , \tau > 0$$

biçiminde olsun ve $\lambda(m) = O(q^m)$ koşulu sağlansın.

$\tilde{g}$, G 'de tanımlı reel değerli toplamsal fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

(i) Kabul edelim ki, öyle $\alpha(n)$ dizileri vardır öyle ki

$$\frac{1}{G(n)} \#\{a \in G, \partial(a) = n : \tilde{g}(a) - \alpha(n) \le x\}, \quad n \to \infty$$

zayıf yakınsak olsun. Bu durumda $\tilde{g}$ sonlu dağılımlıdır.

(ii) $\tilde{g}$ sonlu dağılımlı fonksiyon olsun. Bu durumda c sabit ve $\tilde{h}$ toplamsal fonksiyon olmak üzere $\tilde{g}(a) = c\partial(a) + \tilde{h}(a)$ biçiminde gösterilebilir öyle ki

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{h}(p)|>1}} q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{h}(p)|\le 1}} \tilde{h}^2(p) q^{-\partial(p)}, \tag{4.13}$$

serileri yakınsaktır.

(iii) $\tilde{g}$ fonksiyonu, (4.13)'te verilen seriler yakınsak olacak şekilde $\tilde{g} = c\partial + \tilde{h}$ şeklinde gösterilebilsin. $n \ge 1$ olmak üzere

$$\alpha(n) = cn + \sum_{\substack{\partial(p)\le n \\ |\tilde{h}(p)|\le 1}} \tilde{h}(p) q^{-\partial(p)}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda

$$\mathcal{G}_n(x) := \frac{1}{G(n)} \#\{a \in G, \partial(a) = n : \tilde{g}(a) - \alpha(n) \le x\}, \quad n \to \infty$$

zayıf yakınsar.

İspat: Kabul edelim ki Teorem 4.4.1.'in koşulları sağlansın. Bu durumda Teorem 3.3.11'den (4.4) elde edilir. (4.4)'ten

$$G(n) \asymp q^n n^{\tau-1} \qquad \text{ve} \qquad \frac{G(n-1)}{G(n)} = q^{-1} + o(1), \quad n \to \infty$$

dir. Böylece Teorem 3.3.12'den istenilen elde edilir.

Açıklama 4.4.2. G'de tanımlı tüm sonlu dağılımlı fonksiyonlar $\tilde{g} = c\partial + \tilde{h}$ şeklinde gösterilebilirler öyle ki (4.13)' te yer alan seriler yakınsaktır. Aşağıda, $\tilde{g} = c\partial + \tilde{h}$ gösteriminde yer alan c sabitinin sıfır olması durumu ele alınmaktadır.

Tanım 4.4.3. G'de tanımlı reel değerli $\tilde{g}$ toplamsal fonksiyonunun esas dağılımlı olması için gerek ve yeter koşul

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|>1}} q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} \tilde{g}^2(p) q^{-\partial(p)}$$

serilerinin yakınsak olmasıdır.

Şimdi Teorem 4.4.1.'den elde edilen bir sonucu verelim.

Sonuç 4.4.4. (G,∂), Teorem 4.4.1.'in koşullarını sağlayan toplamsal aritmetik yarı grup olsun. $\tilde{g}: G \to \mathbb{R}$ tanımlı sadece pozitif veya negatif değerleri alan toplamsal fonksiyon olsun. $x_1 < x_2$ reel sayıları için

$$\limsup_{n\to\infty}\left(\mathcal{F}_n(x_2)-\mathcal{F}_n(x_1)\right)>0 \tag{4.14}$$

olması için gerek ve yeter koşul $\{\mathcal{F}_n\}$ dağılım fonksiyonlar dizisinin limit dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsamasıdır.

İspat: Kabul edelim ki, (4.14) sağlansın.

$$\begin{aligned}\mathcal{F}_n(x_2)-\mathcal{F}_n(x_1)&=\frac{1}{G(n)}\left[\#\{a\in G:\partial(a)=n,\ \tilde{g}(a)\le x_2\}-\#\{a\in G:\partial(a)=n,\ \tilde{g}(a)\le x_1\}\right]\\ &=\frac{1}{G(n)}\#\{a\in G:\partial(a)=n,\ \tilde{g}(a)\in[x_1,x_2]\}\end{aligned} \tag{4.15}$$

olduğundan Tanım 3.2.20'den $\tilde{g}$ fonksiyonunun sonlu dağılımlı olduğu elde edilir. $\tilde{g}$ sonlu dağılımlı olduğundan Teorem 4.4.1. (ii)'den her $a\in G$ için $\tilde{g}(a)=c\partial(a)+\tilde{h}(a)$ biçiminde yazılabilir öyle ki (4.13)' te yer alan seriler yakınsaktır. Böylece Teorem 4.4.1. (iii)'den $\mathcal{G}_n$ bir dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsar. Ayrıca, (4.14) sağlandığından c_1 sabiti ve $\{n_k\}$ alt dizisi vardır öyle ki

$$\lim_{k\to\infty}\left(\mathcal{F}_{n_k}(x_2)-\mathcal{F}_{n_k}(x_1)\right)=c_1>0 \tag{4.16}$$

dir. $\mathcal{F}_n$ dağılım fonksiyonlar dizisinin tanımından

$$\mathcal{F}_{n_k}(x)=\mathcal{G}_{n_k}\left(x-\alpha(n_k)\right)$$

dir. Kabul edelim ki $|\alpha(n_k)|\to\infty,\quad k\to\infty$ olsun. $\mathcal{G}_n$ dizisi bir dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsadığından

$$\lim_{k\to\infty}\left(\mathcal{F}_{n_k}(x_2)-\mathcal{F}_{n_k}(x_1)\right)=\lim_{k\to\infty}\left(\mathcal{G}_{n_k}\left(x_2-\alpha(n_k)\right)-\mathcal{G}_{n_k}\left(x_1-\alpha(n_k)\right)\right)=0$$

olduğu elde edilir. Bu ise (4.16) ile çelişir. Buradan $\alpha(n)$ dizisinin sınırlı olduğu elde edilir.

Diğer taraftan

$$\alpha(n) = cn + \sum_{\substack{\partial(p) \le n \\ |\tilde{h}(p)| \le 1}} \tilde{h}(p) q^{-\partial(p)}$$

$$= cn + O\left(\sum_{m \le n} q^{-m} \pi(m) \right)$$

$$= cn + O\left(\sum_{m \le n} \frac{1}{m} \right)$$

$$= cn + O(\log n)$$

dir. $\alpha(n)$, $n \to \infty$, sınırlı olduğundan $c = 0$ olmak zorundadır. Her $a \in G$ için $\tilde{g}(a)$ pozitif veya negatif değerler aldığından

$$\sum_{\substack{p \in P \\ |\tilde{h}(p)| \le 1}} \tilde{h}(p) q^{-\partial(p)} \tag{4.17}$$

serisi yakınsaktır. Her $a \in G$ için $\tilde{g}(a) = \tilde{h}(a)$ olduğundan (4.13) ve (4.17)'den

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)| > 1}} q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)| \le 1}} \tilde{h}^2(p) q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \in P \\ |\tilde{g}(p)| \le 1}} \tilde{h}(p) q^{-\partial(p)}$$

yakınsak serileri elde edilir. Bölüm 4.2.'de yer alan 3-seri teoreminden $\{\mathcal{F}_n\}$ dağılım fonksiyonlarının dizisi limit dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsar.

Teoremin diğer yönünün ispatı için, $\{\mathcal{F}_n\}$ dağılım fonksiyonlar dizisinin limit dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda

$$\mathcal{F}_n(x) = \frac{1}{G(n)} \#\{a \in G, \partial(a) = n : \tilde{g}(a) \le x\}$$

$$\Rightarrow \mathcal{F}(x) \tag{4.18}$$

dir. $x_1, x_2 \in \mathbb{R}$ ve $x_1 < x_2$ olsun. (4.15) ve (4.18)'den

$$\limsup_{n \to \infty} \left(\mathcal{F}_n(x_2) - \mathcal{F}_n(x_1) \right) > 0$$

olduğu elde edilir.

Açıklama 4.4.5. $s>0$ olmak üzere

$$X_p^s := \begin{cases} X_p, & |X_p(a)| \le s, \\ 0, & diğer\ durumlarda \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın ve ayrıca

$$\alpha(n) = \sum_{\substack{\partial(p)\le n \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} \tilde{g}(p) q^{-\partial(p)}$$

olsun. Bu durumda 2-seri teoremi olarak adlandırılan aşağıdaki sonuç doğrudur.

Teorem 4.4.6. (2-Seri Teoremi) (G,∂), Teorem 4.4.1.'in koşullarını sağlayan toplamsal aritmetik yarı grup ve $\tilde{g}: G \to \mathbb{R}$ toplamsal fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

(i) $\tilde{g}$ esas dağılımlıdır.

(ii)

$$\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{G(n)} \#\{a \in G, \partial(a) = n : \tilde{g}(a) - \alpha(n) \le x\}$$

dizisi bir dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsar.

(iii) $$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|>1}} q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} q^{-\partial(p)} \tilde{g}^2(p)$$

serileri yakınsaktır.

(iv) $a_p := \mathbb{E}(X_p^s)$ olmak üzere

$$Y := \sum_p (X_p - a_p)$$

serisi $\mathcal{P}-$hemen hemen yakınsaktır, yani $\sum_p X_p$ serisi esas yakınsaktır.

(v) $s>0$ olmak üzere

$$\sum_p \mathcal{P}\left(\left|X_p\right| > s\right) \quad \text{ve} \quad \sum_p Var\left(X_p\right)$$

serileri yakınsaktır.

(vi) $$\lim_{n\to\infty} \prod_{\partial(p)\le n} \left|1 + q^{-\partial(p)}\left(e^{it\tilde{g}(p)} - 1\right)\right|$$

limiti pozitif Lebesgue ölçüsüne sahip kümede sıfırdan farklıdır.

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$ $\tilde{g}$ esas dağılımlı olsun. Esas dağılımlı fonksiyon tanımından

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|>1}} q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} q^{-\partial(p)} \tilde{g}^2(p)$$

serileri yakınsaktır. Diğer taraftan $\tilde{h}$ toplamsal fonksiyon ve $c = 0$ olmak üzere $\tilde{g} = c\partial + \tilde{h}$ biçiminde ele alınır ve

$$\alpha(n) = \sum_{\substack{\partial(p)\le n \\ |\tilde{h}(p)|\le 1}} q^{-\partial(p)} \tilde{g}(p)$$

şeklinde tanımlanırsa Teorem 4.4.1. (iii)'den

$$\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{G(n)} \#\left\{a \in G, \partial(a) = n : \tilde{g}(a) - \alpha(n) \le x\right\}$$

zayıf yakınsaklığı elde edilir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$ Kabul edelim ki $\alpha(n)$ dizisi için

$$\mathcal{G}_n(x) = \frac{1}{G(n)} \#\left\{a \in G, \partial(a) = n : \tilde{g}(a) - \alpha(n) \le x\right\}$$

dizisi bir dağılım fonksiyonuna zayıf yakınsak olsun. Teorem 4.4.1. (i)'den $\tilde{g}$ toplamsal fonksiyonu sonlu dağılımlıdır ve Teorem 4.4.1. (ii)'den her $a \in G$ için

$$\tilde{g}(a) = c\partial(a) + \tilde{h}(a) \tag{4.19}$$

biçimde yazılabilir öyle ki

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{h}(p)|>1}} q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{h}(p)|\leq 1}} q^{-\partial(p)} \tilde{h}^2(p) \tag{4.20}$$

serileri yakınsaktır. (4.19)'da özel olarak $c = 0$ alındığında her $a \in G$ için $\tilde{g}(a) = \tilde{h}(a)$ olacağından istenilen yakınsak seriler (4.20)'den elde edilir.

$(iii) \Rightarrow (i)$

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|>1}} q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\leq 1}} q^{-\partial(p)} \tilde{g}^2(p)$$

serilerinin yakınsaklığından $\tilde{g}$ fonksiyonunun esas dağılımlı olduğu elde edilir.

$(iii) \Leftrightarrow (v)$ Her $\bar{A} \in \bar{\mathcal{A}}_3$ için $\mathcal{P}(\bar{A}) = \bar{\delta}_3(\bar{A})$ ve $\mathcal{P}(X_p = \tilde{g}(p)) = q^{-\partial(p)}$ olduğundan

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|>1}} q^{-\partial(p)}$$

serisinin yakınsaklığından, $s > 0$ olmak üzere $\sum_p \mathcal{P}(|X_p| > s)$ serisinin yakınsaklığı elde edilir. Diğer taraftan $p \in P$ ve $|\tilde{g}(p)| \leq 1$ olmak üzere

$$Var(X_p) = Var(\tilde{g}(p)\bar{\varepsilon}_p) = \tilde{g}^2(p) Var(\bar{\varepsilon}_p) = \tilde{g}^2(p) q^{-\partial(p)}$$

olduğundan

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\leq 1}} q^{-\partial(p)} \tilde{g}^2(p)$$

serisinin yakınsaklığından

$$\sum_p Var\left(X_p\right)$$

serisinin yakınsaklığı elde edilir.

$(iv)\Leftrightarrow(v)$ $X_p=\tilde{g}(p)\overline{\varepsilon}_p$ rastgele değişkenleri bağımsız olduğundan $s>0$ tespit edilmiş sayı olmak üzere Teorem 3.1.14'den (2-Seri Kriteri) istenilen elde edilir.

$(iv)\Leftrightarrow(vi)$ $X_p=\tilde{g}(p)\overline{\varepsilon}_p$ bağımsız rastgele değişkenlerin karakteristik fonksiyonları $p\in P$ olmak üzere $\phi(t)=1+q^{-\partial(p)}\left(e^{it\tilde{g}(p)}-1\right)$ olduğundan Teorem 3.1.19'dan istenilen elde edilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde, toplamsal aritmetik yarı gruplarla ilgili tezde elde edilen sonuçlar özetlenecek ve sonrasında bu konu ile ilgili önerilerde bulunulacaktır.

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde, βG, G'nin Stone - Čech kompaktlaştırılması; $\overline{\delta}$, her $\overline{A} \in \overline{\mathcal{A}}$ için $\overline{\delta}\left(\overline{A}\right) = \delta\left(A\right)$ şeklinde tanımlanan ve $\sigma\left(\overline{\mathcal{A}}\right)$'de ölçü fonksiyonu olmak üzere G toplamsal aritmetik yarı grubu, $\left(\beta G, \sigma\left(\overline{\mathcal{A}}\right), \overline{\delta}\right)$ olasılık uzayına yerleştirilmiştir. Bu sonuç Bulgular ve Tartışma bölümünün 4.2. Toplamsal Aritmetik Yarı Grupların Stone - Čech Kompaktlaştırılması isimli başlık altında Teorem 4.2.2, Teorem 4.2.3 ve Teorem 4.2.4'de verilmiştir.

Bulgular ve Tartışma bölümünün 4.3.Toplamsal Aritmetik Yarı Gruplarda Bağımsız Rastgele Değişkenler ve 3-Seri Teoremi isimli başlık altında G'de tanımlanan $\tilde{g}\left(a\right) = \sum\limits_{p^k \| a} \tilde{g}\left(p^k\right),\ \left(a \in G\right)$ biçimindeki reel değerli her toplamsal fonksiyonunun $\left(\beta G, \sigma\left(\overline{\mathcal{A}}\right), \overline{\delta}\right)$ olasılık uzayında,

$$X_p = \begin{cases} \tilde{g}\left(p\right) & p^k \| a \\ 0 & \textit{diğer durumlarda} \end{cases}$$

bağımsız rastgele değişkenlerin toplamına tek türlü genişlediği gösterildi. Ayrıca, Teorem 4.3.1'de, G'de tanımlı reel değerli $\tilde{g}$ toplamsal fonksiyon fonksiyonunun limit dağılımının varlığının $\overline{\tilde{g}} = \sum\limits_{p} X_p$ serisinin $\overline{\delta}$- hemen hemen her yerde yakınsamasına denk olduğu ispatlandı. Aynı teoremde $\tilde{g}$ fonksiyonunun limit dağılımının varlığı

$$\sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|>1}} q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} \tilde{g}\left(p\right) q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p \\ |\tilde{g}(p)|\le 1}} \tilde{g}^2\left(p\right) q^{-\partial(p)}$$

serilerinin yakınsak olmasına denk olduğu da gösterildi. Bu son denk ifade, G ’de derecesi n ’e eşit olan elamanların sayısı $G(n)$ ’in, $A>0,\ q>1$ olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left|G(n)q^{-n}-A\right|<\infty$$

koşulunu sağlaması durumunda W.-B. Zhang tarafından [33] çalışmasında ispatlanmıştır. Bu koşul, $|y|<q^{-1}$ dairesinde $H(y)=O(1)$, $\lim_{y\to q^{-1}}H(y)$ limiti var ve pozitif olmak üzere, G ’nin üretici fonksiyonu Z ’nin

$$Z(y)=\frac{H(y)}{1-qy}$$

biçiminde gösterilebilmesine denktir. Bu durum Teorem 4.3.1’de yer alan koşulun $\tau=1$ özel halidir. Böylece Teorem 4.3.1’de G ’de tanımlı reel değerli $\tilde{g}$ toplamsal fonksiyonunun limit dağılımının varlığı daha zayıf koşul altında ispatlanmıştır.

Bulgular ve Tartışma bölümünde 4.4. Toplamsal Aritmetik Yarı Gruplarda Sonlu Dağılımlı Toplamsal Fonksiyonlar ve 2-Seri Teoremi isimli başlık altında Tanım 4.4.3’te, G ’de tanımlı reel değerli $\tilde{g}$ toplamsal fonksiyonunun esas dağılımlı olması tanımlandı. Teorem 4.4.1 (i)’de G ’de tanımlı reel değerli $\tilde{g}$ toplamsal fonksiyonunun sonlu dağılımlı olması için yeter koşul verildi, (ii)’de sonlu dağılımlı $\tilde{g}$ fonksiyonunun, c sabit ve $\tilde{h}$ toplamsal fonksiyon öyle ki

$$\sum_{\substack{p\\ |\tilde{h}(p)|>1}} q^{-\partial(p)}, \qquad \sum_{\substack{p\\ |\tilde{h}(p)|\le 1}} \tilde{h}^2(p)q^{-\partial(p)}, \tag{5.1}$$

serileri yakınsak olmak üzere $\tilde{g}(a)=c\partial(a)+\tilde{h}(a)$ biçiminde yazılabileceği ispatlandı ve son olarak (iii)’de $\tilde{g}$ fonksiyonu, (5.1)’te verilen seriler yakınsak olacak şekilde $\tilde{g}=c\partial+\tilde{h}$ şeklinde gösterilebilmesi durumunda

$$\alpha(n)=cn+\sum_{\substack{\partial(p)\le n\\ |\tilde{h}(p)|\le 1}}\tilde{h}(p)q^{-\partial(p)}, \qquad n\ge 1$$

olmak üzere

$$\frac{1}{G(n)}\#\{a\in G,\partial(a)=n : \tilde{g}(a)-\alpha(n)\le x\},\quad n\to\infty$$

zayıf yakınsadığı ispatlandı.

Sonuç 4.4.4'de, G toplamsal aritmetik yarı grubunda tanımlı sadece pozitif veya negatif değer alabilen reel değerli toplamsal fonksiyonlar için Açıklama 4.3.2'de verilen Erdös Konjektürünün benzeri ispatlandı.

Teorem 4.4.6 2-Seri Teoreminde G'de tanımlı esas dağılımlı toplamsal fonksiyonlar karakterize edildi.

5.2. ÖNERİLER

4.4. Toplamsal Aritmetik Yarı Gruplarda Sonlu Dağılımlı Toplamsal Fonksiyonlar ve 2-Seri Teoremi bölümünde verilen Sonuç 4.4.4'de, G'de tanımlı sadece pozitif veya negatif değer alabilen reel değerli toplamsal fonksiyonlar için Erdös-Konjektürünün benzeri ispatlandı. Bu sonucun, G'de tanımlı keyfi reel değerli toplamsal fonksiyonlara genişletilebileceği araştırılacaktır.

Ayrıca, K.-H. Indlekofer'in [9,12] çalışmalarında, doğal sayılar kümesi için inşa ettiği integrasyon teori, hemen hemen çift fonksiyonlar uzayı ve hemen hemen çarpımsal fonksiyonlar uzayının G toplamsal aritmetik yarı gruplara taşınması problemi araştırılacaktır.

KAYNAKLAR

[1] Barát, A., "Uniformly summable multiplicative functions on additive arithmetical semigroups", Paderborn Üniversitesi Matematik Enstitüsü, Doktora Tezi, 65s., (2011).

[2] Barát, A. and Indlekofer K.-H., "On mean-value theorems for multiplicative functions in additive arithmetical semigroups", Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Comp., 33, 49-72, (2010).

[3] Barát, A., Indlekofer, K.-H. and Kaya, E., "Two-Series Theorem in Additive Arithmetical Semigroups", Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Comp., 38, 325-334, (2012).

[4] Barát, A. and Kaya, E.,"On the models of Indlekofer and Kubilius in probabistic number theory", Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Comp., 39, 17-34, (2013).

[5] Elliott, P.D.T.A., "Probabilistic Number Theory I, Mean-Value Theorems, 2^{nd} ed.", Springer-Verlag, New York, 359s, (1979).

[6] Elstrodt, J., "Maβ und Integrationstheorie, 4^{nd} ed.", Springer-Verlag, Heidelberg, 434s., (2004)

[7] Fogels, E. "On the abstract theory of primes I-III", Acta Arith., 10, 137-182, (1964).

[8] Hungerford, T. W., "Algebra, 2^{nd} ed.", Springer, 550s., (1974).

[9] Indlekofer, K.-H., "A new method in probabilistic number theory", Probability Theory and Applications, Math. Appl., 80, 299-308, (1992).

[10] Indlekofer, K.-H., "The abstract prime number theorem for function fields", Acta Math. Hungar., 62, 137-148, (1993).

[11] Indlekofer, K.-H., "Some remarks on additive arithmetical semigroups", Lietuvos Matematikos Rinkenys, 42(2): 185-204, (2002).

[12] Indlekofer, K.-H., "New approach to probabilistic number theory – compactifications and integratio", Advenced Studies in Pure Mathematics, 49, 133-170, (2005).

[13] Indlekofer, K.-H., "Some remarks on additive arithmetical semigroups II", Šiauliai Math. Seminar, 4(12): 83-104, (2009).

[14] Indlekofer, K.-H., “Tauberian theorems with applications to arithmetical semigroups and probabilistic combinatorics”, Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., 34, 135-177, (2011).

[15] Indlekofer, K.-H., “On labeled and unlabeled combinatorial structures”, Communications in Statistics- Theory and Methods, 40:19-20, 3641-3653, (2011).

[16] Indlekofer, K.-H., “On a conjecture of Erdös about additve functions”, Basım aşamasında.

[17] Indlekofer, K.-H., “Remarks on Tauberian theorems for additive arithmetical semigroups, Basım aşamasında.

[18] Indlekofer, K.-H. and Kaya, E., “The three-series theorem in additive arithmetical semigroups”, Annales Univ. Sci. Budapest Sect. Comp., 38, 161-181, (2012).

[19] Indlekofer, K.-H. and Manstavičius E., “Additive and multiplicative functions on additive arithmetical semigroups”, Publicationes Math. Debrecen, 45, 1-17i, (1994)

[20] Indlekofer, K.-H., Manstavičius, E. and Warlimont, R., “On a certain class of infinite products with an application to arithmetical semigroups”, Arch. Math., 56, 446-453, (1991).

[21] Knopfmacher, A. and Knopfmacher, J., “Arithmetical semigroups related to trees and polyhedra”, Journal of Combinatorial Theory, Series A, 86, 85-102, (1999).

[22] Knopfmacher J., “Abstract Analytic Number Theory, 1nd ed.”, Nort-Holland Publ. Co., 322s., (1974).

[23] Knopfmacher J., “Analytic arithmetic of algebraic function fields, Lecture Notes in Pure and Applied Mathematics” Vol 50, Marcel Dekker, New York-Basel, 130s., (1979).

[24] Knopfmacher, J. and Zhang, W.-B., “Number theory arising from finite fields, Analytic and probabilistic theory”, Vol 241, Pure and Appl. Math., Marcel Decker, New York,404s., (2001).

[25] Kubilius, J., “Probabilistic methods in the Theory of Numbers, kaçıncı basım”,American Mathematical society, Providence, 182s., (1964).

[26] Loeve, M., “Probability Theory I, kaçıncı basım”, Graduate Texts in Mathematicsi Springer, 425s., (1977).

[27] Manstavičius, E., "An analytic method in probabilistic combinatorics", Osaka J. Math., 46, 273-290, (2009).

[28] Rudin, W., "Reele und Komplexe Analysis, kaçıncı basım,", Wissenschaftsverlag, Oldenbourg, 416s., (1998).

[29] Tenenbaum. G., "Introduction to analytic and probabilistic number theory, kaçıncı basım", Cambridge Univ. Press, sayfa sayısı, (1995).

[30] Warlimont, R., "Arithmetic Semigroups, II: Sieving by large and small prime elements Set of multiples", Manuscr. Math., 71, 197-221, (1991).

[31] Walker, R., "The Stone-Čech compactification, 2nd ed.", Springer Heidelberg-New York, 332s., (1974).

[32] Wehmeier, S., "Arithmetical semigroups", Paderborn Üniversitesi Matematik Enstitüsü, Doktora Tezi, sayfa sayısı., (2005).

[33] Zhang, W.-B., "Probabilistic number theory in additive arithmetic semigroups", Analytic Number Theory (B.C. Berndt et al. eds.), Prog Math., Birkhäuser, 839-884, (1996).

[34] Zhang, W.-B., "The prime element theorem in additive arithmetic semigroups, II", Illınois J. Math., 42, 198-229, (1998).

[35] Zhang, W.-B., "A Chebyshev type upper estimate for prime elements in additive arithmetic semigroups", Monatsh. Math., 129, 227-260, (2000).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Erdener KAYA

Doğum Tarihi: 06/12/1979

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	Şemsettin Mursaloğlu Lisesi	1994-1997
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	1998-2002
Bilişim Eğitimi	Matematik-İnformatik	Paderborn Üniversitesi	2002-2005
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2005-2007

(Varsa) Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Öğretim Görevlisi	Mersin Üniversitesi Tarsus Meslek Yüksekokulu	2007 -

ESERLER

1. Kaya E., Küçükaslan M., *"The asymptotic expressions in additive arithmetical semigroups",* The 2nd Congress of the Turkish World Mathematical Society (TWMS), Juni 4-7, (2007), Sakarya, Turkey

2. Indlekofer K.-H., Kaya E., *"Erdös-Wintner Theorem in Additive Arithmetical Semigroups",* Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications(MADEA), September 15-20, (2010),Sunny Beach, Bulgaria.

3. Indlekofer K.-H., Kaya E., *"The Three-Series Theorem in Additive Arithmetical Semigroups",* Functional Methods in Probability Theory and Probabilistic Number Theory, September 28-30, (2011), Kiev, Ukraine.

4. Abdullayev F., Kaya E., *"On the Additive Arithmetical Semigroups",* International Conference on Wavelets and Applications, July 08-15, (2012), St. Petersburg, Russia.(Poster bildiri).

5. Indlekofer K.-H., Kaya E., "The Three-Series Theorem in Additive Arithmetical Semigroups", Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp., 38, 161-181 (2012).

6. Bárat A., Kaya E. "On the models of Indlekofer and Kubilius in Probabilistic Number Theory", Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp., 39, 17-34, (2013).

7. Bárat A., Indlekofer K.-H., Kaya E., "Two Series Theorem in Additive Arithmetical Semigroups" , Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp., 38, 325-334, (2012).

8. Kaya E., Küçükaslan M., Wagner R. "On statistical convergence and statistical monotonicity", Annales Univ. Sci. Budapest, Sect. Comp.,39, 257-270, (2013).