ORAN UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE TOPLANABİLİRLİK ALANLARININ TOPOLOJİK YAPISI

CUMALİ ÇATAL

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2013

ORAN UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ VE TOPLANABİLİRLİK ALANLARININ TOPOLOJİK YAPISI

CUMALİ ÇATAL

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. İlhan DAĞADUR

MERSİN
HAZİRAN - 2013

Cumali ÇATAL tarafından Doç. Dr. İlhan DAĞADUR danışmanlığında "Oran Uzaylarında Matris Dönüşümleri ve Toplanabilirlik Alanlarının Topolojik Yapısı" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Mikail ET

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

Doç. Dr. İlhan DAĞADUR

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..11../..07../..2013..tarih ve ..2013:13....../..385..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

T.C. MERSİN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ORAN UZAYLARINDA MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ ve TOPLANABİLİRLİK ALANLARININ TOPOLOJİK YAPISI

Cumali ÇATAL

ÖZ

Bu tezde ilk olarak Jürimäe tarafından yapılan Oran uzayları arasındaki matris dönüşümlerine ilişkin çalışma detaylı bir şekilde ele alınıp incelenmiştir. Daha sonra G. Kangro tarafından tanımlanan λ-yakınsak ve λ-sınırlı FK uzay tanımları verilip bu uzaylar için çeşitli karakterizasyonlar incelenmiştir. Ayrıca Oran FK uzaylarının toplanabilirlik alanlarındaki uygulamaları, bu uzaylar üzerindeki Mazur tipi matrislere ilişkin sonuçlar, monoton normlar ve dualleri gösterilmiştir. Yine bu tür uzaylar için sınırlı tutarlılık teoremi ve replaceable olma tanımı verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: FK uzayı, Oran Uzayları, Matris Dönüşümleri, Mazur matrisi, Toplanabilirlik Alanı, Replaceable, Conull FK uzayı

Danışman: Doç. Dr. İlhan DAĞADUR, Mersin Üniversitesi Matematik Ana Bilim Dalı

MATRIX MAPPINGS IN RATE SPACES and TOPOLOGIC STRUCTURE OF SUMMABILITY FIELDS

Cumali ÇATAL

ABSTRACT

The study on matrix transformations among Rate spaces which was first studied by Jürimäe have been researched and discusses in detail. λ-convergent and λ-bounded FK space definitions, which were defined by G. Kangro later, were made and various characterizations for those spaces have been investigated. In addition, the practices of Rate FK spaces in the field of summability, their results the monotone norms and duals on Mazur-type matrixes in these spaces have been shown. Besides, the theorem of consistency and the replaceability of this kind of spaces have been defined.

Keywords: FK Space, Rate Spaces, Matrix Transformations, Mazur Matrix, Summability Fields, Replaceable, Conull FK Space

Advisor: Doç. Dr. İlhan DAĞADUR, Mersin University Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlamam için bana yardımcı olan, vaktini, emeğini ve sabrını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. İlhan DAĞADUR' a ve yüksek lisans öğrenimim boyunca bilgilerinden faydalandığım bütün bölüm hocalarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca bugüne kadar desteğini hiç esirgemeyen anneme, babama ve kardeşlerime çok teşekkür ederim.

Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$ Reel Sayılar Kümesi

$\mathbb{N}$ Doğal Sayılar Kümesi

$\mathbb{C}$ Kompleks Sayılar Kümesi

w Tüm Diziler Uzayı

ϕ Sonlu Diziler Uzayı

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k\to\infty} x_k \text{ mevcut} \right\}$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_{k\to\infty} x_k = 0 \right\}$$

$$m = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\}$$

$$cs = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} x_k \text{ yakınsak} \right\}$$

$$\ell = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}$$

$$X^{\beta} = \left\{ y \in w : \forall x \in X \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \text{ yakınsak} \right\}$$

$$X^{\alpha} = \left\{ y \in w : \forall x \in X \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| < \infty \right\}$$

$$X^{f} = \left\{ \left\{ f\left(\delta^{k}\right) \right\} : f \in X' \right\}$$

$$p_n(x) = |x_n|, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$P_n(x) = x_n, \quad n = 1, 2, \ldots$$

$$\|A\|_{\infty} = \sup_n \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right|$$

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

$$\lim_A x = \lim_n \left((Ax)_n \right)$$

$$E_A = \{ x = (x_n) \in w : Ax \in E \}$$

$$a_k = \lim_{n \to \infty} a_{nk}$$

$$\chi(A) = \lim_{n \to \infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k$$

$$\chi(f) = f(e) - \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\delta^k\right)$$

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \delta^k$$

$$X_\rho = \left\{ x = (x_n) : \left(\frac{x_n}{\rho_n} \right) \in X \right\}$$

$$\lim_{\pi A} x = \lim_{n \to \infty} \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

$$c_{\pi A} = \{ x : Ax \in c_\pi \}$$

$$c^\lambda = \left\{ x = (x_n) : \exists \lim_n \lambda_n \left(x_n - \lim x \right) \right\}$$

$$m^\lambda = \left\{ x \in c : \lambda_n \left(x_n - \lim x \right) = O(1) \right\}$$

$$\lambda_A^n(x) = \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k - \lim_A x \right)$$

$$\lambda_A(x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_A^n(x)$$

$$\psi(A) = \lambda_A(\lambda^{-1}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_A(\delta^k)}{\lambda_k}$$

$$L = \left\{ x \in c_{\pi A} : (tA)x = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} t_n\, a_{nk}\, x_k \ \text{ mevcut} \right\}$$

$$I = \left\{ x \in c_{\pi A} : \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pi} x_k \ \text{ yakınsak} \right\}$$

$$F = \left\{ x \in c_{\pi A} : \forall f \in c'_{\pi A} \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} x_k f\left(\delta^k\right) \ \text{ yakınsak} \right\}$$

$$\Lambda(x) = \lim_{\pi A} x - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pi} x_k, \ (\forall x \in I)$$

$$P = \left\{ x \in c_{\pi A} : t(Ax) = (tA)x, \ \pi t \in \ell \right\}$$

$$\Gamma = \left\{ x = (x_n) : \sup_n |x_n|^{\frac{1}{n}} < \infty \right\}$$

$$C_0 = \left\{ x = (x_k) : \|x_k\| \to 0 , \ k \to \infty \right\}$$

$$C = \left\{ x = (x_k) : \|x_k\| \to \lambda, \ k \to \infty, \ \lambda \in B \right\}$$

1. GİRİŞ

Bu tez çalışmasında öncelikle Oran FK uzayı kavramı açıklanmış ve bu uzaylar üzerindeki topolojik yapı incelenmiştir. Daha sonra $A \in (X, c_\pi)$, $A \in (X, c^\lambda)$, $A \in (X, m_\pi)$ ve $A \in (X, c^v)$ biçimindeki matris dönüşümleri ve toplanabilirlik alanlarındaki uygulamaları verilmiştir. Bununla birlikte Sikk $[9]$ tarafından verilen çok önemli bir çalışmanın sonuçları geniş bir şekilde ele alınıp Oran uzayları üzerindeki Mazur tipi matrislerin ve Banach-Steinhaus tipi teoremlerin (c_ρ, c_π)-conull'lığı, yine bu uzayların monoton normları ve dualleri incelenmiştir. Ayrıca Dağadur $[18]$ tarafından verilen bu tür uzaylar için sınırlı tutarlılık teoremi ve replaceable olma tanımı göz önüne alınıp konuya ilişkin çeşitli karakterizasyonlar verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMAlARI

Matematik analiz içinde önemli bir yer tutan toplanabilme metotları oldukça eski bir geçmişe sahiptir. İlk defa 1949'da Wilansky [1, 2] tarafından matrisler için conull ve coregüler sınıflandırılması yapılmış ve bu sınıflandırma 1965 yılında Snyder [3] tarafından FK-uzaylarına aktarılmıştır. 1974 yılında Bennett [4] tarafından FK-uzayları ve uygulamalarına ilişkin çeşitli karakterizasyonlar verilmiştir. 1969, 1971 yıllarında Kangro [5, 6, 7, 8] tarafından yapılmış olan çalışmalarda ise λ-yakınsallık ve λ-sınırlılık tanımlanmış ve bunlara ilişkin çeşitli uygulamalar ele alınıp incelenmiştir. 1989 yılında ise Sikk [9] tarafından Oran FK-uzayları tanımlanmış ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. Ayrıca Jürimäe 1991, 1994 yıllarında [10, 11, 12] yapmış olduğu çalışmalarda ise Oran FK uzayları arasındaki matris dönüşümleri ve bu uzayların toplanabilirlik alanlarına ilişkin çeşitli sonuçlar elde etmiştir. 1993 yılında Beekmann ve Chang [13] tarafından yapılan çalışmada ise λ-yakınsaklık ve λ-conull' lık kavramları incelenmiştir. Bu çalışmaların bir devamı sayılabilecek çalışmalar ise 2002, 2009, 2011 ve 2012 yıllarında Chandrasekhara Rao ve Singaravel [14, 15, 16, 17] tarafından Mazur tipi matrisler ve Dağadur [18] tarafından Oran uzayları üzerindeki matrislerin replaceable ve conulllığına ilişkindir. Böylece toplanabilme teorisi açısından incelenen özellikler fonksiyonel analiz açısından da incelenmeye başlanmıştır. Bu ise ilgili alanın önemini arttırmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3. 1. TEMEL KAVRAMLAR

3. 1. 1. Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleri İle İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Bu kısımda çeşitli dizi uzayları ve matris dönüşümleri tanımlanıp, dizi uzayları üzerindeki matris dönüşümleri ile ilgili teoremler ispatsız olarak verilecektir.

Bu çalışmada yakınsak diziler uzayı c, sıfıra yakınsak diziler uzayı c_0, sınırlı diziler uzayı m, mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı ℓ, yakınsak seri oluşturan diziler uzayını cs, reel ya da kompleks terimli tüm diziler uzayını w, ve sonlu diziler uzayını ϕ ile gösterilecektir. Buna göre;

$$c = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k \ \text{mevcut} \right\},$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_k) : \lim_k x_k = 0 \right\},$$

$$m = \left\{ x = (x_k) : \sup_k |x_k| < \infty \right\},$$

$$\ell = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}$$

ve

$$cs = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} x_k \ \text{yakınsak} \right\}$$

yazılabilir.

Ayrıca bu çalışma boyunca e=(1,1,…) birim dizi ve δ^k ile de k-ıncı terimi “1” ve diğer bütün terimleri “0” olan diziyi göstereceğiz, yani $\delta^k = \left(0,0,...0, \underset{k.\text{terim}}{1}, 0,0,... \right)$ olacaktır.

Tanım 3. 1. 1. 1. Tam ve normlu bir uzaya Banach uzayı denir. Bir X normlu uzayı üzerindeki sürekli lineer fonksiyonellerin sınıfına X uzayının sürekli duali denir ve X' ile gösterilir. Bir

$$f: X \longrightarrow \mathbb{C}$$

sürekli lineer fonksiyoneli için

$$\|f\| = \sup\{|f(x)| : \|x\| \leq 1\}; \quad f \in X' \Leftrightarrow \|f\| < \infty \text{ ve } |f(x)| \leq \|f\| \, \|x\|$$

gerçeklenir (Wilansky 1984, S. 1).

Tanım 3. 1. 1. 2. w nın bir X alt cümlesinin β -, α - ve f- dualleri sırası ile

$$X^{\beta} = \left\{ y \in w : \forall x \in X \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} x_k y_k \quad \text{yakınsak} \right\},$$

$$X^{\alpha} = \left\{ y \in w : \forall x \in X \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} | x_k y_k | < \infty \right\}$$

ve

$$X^{f} = \left\{ \left\{ f\left(\delta^{k}\right) \right\} : f \in X' \right\}$$

olarak tanımlanır (Bennet 1974, Wilansky 1984, S. 105).

$A = (a_{nk})$, (n=k=1, 2, …) reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x = (x_k) \in w$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \tag{1}$$

serisi her bir n∈ℕ için yakınsak ise

$$\left(Ax\right)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

ile tanımlı $Ax = \left((Ax)_n\right)$ dizisine, x dizisinin A matrisi ile yapılan dönüşüm dizisi denir.

$X, Y \subset w$ olmak üzere her x∈X için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve Ax∈Y ise bu durumda A matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir ve A∈(X,Y) ile gösterilir. Böylece (X,Y) ile X dizi uzayını Y dizi uzayına dönüştüren bütün matrislerin sınıfı gösterilecektir.

(1) serisi her n∈ℕ için yakınsak olduğundan matris dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır. (X,Y; p) ile toplam ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı gösterilir. (1) serisi mevcut yani her n ∈ℕ için seri yakınsak olsun. Eğer $\lim_n (Ax)_n = L$ ise bu durumda $x = (x_k)$ dizisi L değerine A-limitlenebilirdir veya A-toplanabilirdir denir ve $\lim_A x = \lim_n (Ax)_n$ biçiminde gösterilir.

c yakınsak diziler uzayını göstermek üzere $c_A = \{x : Ax \in c\}$ uzayına A nın toplanabilirlik alanı adı verilir. Daha genel olarak E, w nın herhangi bir alt cümlesi olmak üzere

$$E_A = \{x : Ax \in E\} \qquad (2)$$

biçiminde tanımlanır ki şüphesiz burada Ax dizisinin mevcut olduğunu kabul ediyoruz. Ayrıca $E_A \subset w_A$ olduğunu belirtelim (Wilansky 1984, S. 3).

Örneğin; (2) ifadesinde özel olarak $E = \ell$ veya m alınırsa sırası ile ,

$$\ell_A = \{x : Ax \in \ell\}$$

ve

$$m_A = \{x : Ax \in m\}$$

elde edilir.

Şimdi bir matrisin konservatif olması tanımını verelim.

Tanım 3. 1. 1. 3. Her $x \in c$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in c$ ise bu taktirde A matrisine konservatif matris denir. Buna göre

$$A \in (c, c) \Leftrightarrow c \subset c_A$$

dır.

Tanım 3. 1. 1. 4. $A \in (c, c)$ olmak üzere

$$\chi(A) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n a_{nk} \qquad (3)$$

sayısına A matrisinin karakteristiği denir. A konservatif olduğundan $\chi(A)$ daima mevcuttur.

Eğer $\chi(A) = 0$ ise A matrisine conull, aksi taktirde A matrisine coregüler matris denir (Wilansky 1984, S. 10).

Tanım 3. 1. 1. 5. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Eğer $\forall y \in c$ için $Ax = y$ olacak şekilde tek bir $x \in c_A$ varsa A matrisine reversible matris denir (Wilansky 1984, S. 82).

Tanım 3. 1. 1. 6. Bir Banach cebiri $\|xy\| \leq \|x\| \|y\|$ özelliğini gerçekleyen bir cebir ve de Banach uzayıdır. $\forall x, y \in X$ için xy=yx ise Banach cebiri değişmelidir denir (Wilansky 1984, S. 2).

Tanım 3. 1. 1. 7. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $\sum_{k=1}^{\infty} t_n a_{nk} = 0$ olması $\forall n \in \mathbb{N}$ için $t_n = 0$ olmasını gereketiriyorsa A ya M tipindedir denir (Wilansky 1984, S. 43).

Teorem 3. 1. 1. 1 (Banach-Steinhaus).

$\{f_n\}$ bir X Banach uzayı üzerinde sürekli, lineer fonksiyonellerin noktasal yakınsak bir dizisi olsun. Bu durumda $f(x) = \lim_n f_n(x)$ ise $f \in X'$ gerçeklenir (Wilansky 1984, S. 1).

Şimdi $A \in (c,c)$ olması için gerek ve yeter şartları veren teoremi ifade edelim:

Teorem 3. 1. 1. 2 (Kojima-Schur). A∈(c,c) olması için gerek ve yeter şart

$$\text{i) } \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$$

$$\text{ii) Her k için } \lim_n a_{nk} = a_k \text{ mevcut}$$

ve

$$\text{iii) } \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \text{ mevcut}$$

olmasıdır (Wilansky 1984, S. 6).

Tanım 3. 1. 1. 8. $A \in (c,c;p)$ ise bu durumda A ya regüler matris ya da kısaca T-matris denir. Aşağıdaki teorem ise A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şartları verir.

Teorem 3. 1. 1. 3 (Silverman-Toeplitz). $A \in (c,c;p)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{i) } \|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$$

$$\text{ii) Her k için } \lim_n a_{nk} = 0$$

$$\text{iii) } \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$$

olmasıdır (Wilansky 1984, S. 6).

Teorem 3. 1. 1. 4. A reel ya da kompleks terimli bir matris olmak üzere aşağıdakiler denktir:

$$\text{i) } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| = O(1),$$

ii) $A \in (m, m)$,

iii) $A \in (c, m)$,

iv) $A \in (c_0, m)$.

(Wilansky 1984, S. 5).

Teorem 3. 1. 1. 5 (Schur). A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in (m, c)$ olması için gerek ve yeter şart

i) Her k için $\lim_n a_{nk} = a_k$ mevcut,

ii) $\|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

ve

iii) $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_k| = 0$

olmasıdır.

Teorem 3. 1. 1. 7. A coregüler bir matris olsun. Bu durumda A matrisi, c üzerinde $\lim_B = \lim_A$ olacak şekilde her bir B matrisi ile $c_A \cap m$ üzerinde tutarlıdır (Wilansky 1984, S. 81).

Şimdi ise çok fazla ayrıntıya girmeden kısaca FK-uzaylarını tanıtalım:

3. 1. 2. FK Uzayları ve Bu Uzayların Conullığı

Tanım 3. 1. 2. 1. Tam, lineer metrik bir uzaya Fréchet uzayı denir. H bir topolojik vektör (Housdorff) uzayı olsun. X lokal konveks Fréchet uzayı ve X, H nin lineer alt uzayı olmak üzere X uzayının topolojisi, H topolojisinin X uzayına kısıtlamasından daha geniş olsun, yani

$$I : X \to H \,,\; I(x) = x$$

ile verilen içerme dönüşümü sürekli olsun. Bu durumda X uzayına FH uzayı denir.

Eğer $H = w$ ise böyle bir FH uzayına FK uzayı denir. Böylece bir FK uzayı $P_n(x) = x_n$, (n=1, 2, …) ile tanımlı sürekli koordinatlara sahip lokal konveks bir Fréchet dizi uzayıdır.

FK topolojisi bir tektir yani bir dizi uzayı en çok bir FK topolijisine sahiptir (Wilansky 1964, S. 202).

Sürekli koordinatlara sahip bir Banach uzayına BK uzayı denir. Verilen tanımlara göre FK uzayları BK uzaylarını içerir.

c , c_0 ve m dizi uzayları $\|x\| = \sup_k |x_k|$ normu altında birer FK uzayı olduğu gibi w da $p_n(x) = |x_n|$, $(n = 1, 2, \ldots)$ olmak üzere $\{p_n\}$ yarınorm ailesi ile bir FK uzayıdır (Wilansky 1984, S. 55).

Teorem 3. 1. 2. 1. (Y,q) bir FK uzayı ve $A = (a_{nk})$ herhangi bir matris olsun. Bu durumda $Y_A := \{x : Ax \in Y\}$ uzayı da bir FK uzayıdır ve yarınormları;

$$p_n(x) = |x_n|, \;\; n = 1, 2, \ldots \tag{4}$$

$$h_n(x) = \sup_m \left| \sum_{k=1}^{m} a_{nk} x_k \right|, \; n = 1, 2, \ldots \tag{5}$$

ve

$$(qoA)(x) = q(Ax) \tag{6}$$

biçiminde verilir (Wilansky 1984, S. 63).

Teorem 3. 1. 2. 2. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $f \in c'_A$ olması için gerek ve yeter şart $\forall x \in c_A$ için f fonksiyonunun

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax) + \alpha x \tag{7}$$

formunda yazılabilmesidir. Burada $\mu\in\mathbb{C}$, $t\in\ell$, $\alpha\in c_A^\beta$,

$$\alpha x=\sum_{k=1}^{\infty}a_k x_k$$

ve

$$t(Ax)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n(Ax)_n=\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{\infty}t_n a_{nk}x_k$$

dır. Hemen belirtelim ki (7) gösterimi tek değildir (Wilansky 1984, S. 66).

Teorem 3. 1. 2. 3. $\mu\neq0$ olmak üzere eğer f, (7) gösterimine sahip ise $c_B=c_A$ ve $\lim_B=f$ olacak şekilde bir B matrisi vardır (Wilansky 1984, S. 75).

Teorem 3. 1. 2. 4. X topolojik bir vektör uzayı olmak üzere f, X üzerinde bir lineer fonksiyonel ve $M=:f^{\perp}=\{x\in X:f(x)=0\}$ olsun. Bu taktirde M, X in maksimal alt uzayıdır, hatta ya kapalıdır ya da yoğundur. Çünkü X topolojik vektör uzayında M bir alt vektör uzay olduğundan $\overline{M}$ da bir alt vektör uzaydır. Böylece $M\subset\overline{M}\subset X$ olup M maksimal olduğundan ya $M=\overline{M}$ ya da $\overline{M}=X$ dır (Wilansky 1984, S. 75).

Teorem 3. 1. 2. 5. A∈(c,c) olsun. Teorem 3. 1. 2. 2 deki gibi bir $f\in c_A'$ verilsin. Bu durumda

$$\chi(f)=f(e)-\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\delta^k\right) \tag{8}$$

olmak üzere

$$\chi(f)=\mu\chi(A) \tag{9}$$

dır (Wilansky 1984, S. 67).

Teorem 3. 1. 2. 6. A∈(c,c) ve $f\in c_A'$ olsun. Bu taktirde her $x\in c_A\cap m$ için

$$f(x)=\mu\lim_A x+\gamma x \tag{10}$$

olacak şekilde bir γ dizisi vardır (Wilansky 1984, S. 68).

Teorem 3. 1. 2. 7. A reversible bir matris olsun. Bu durumda $\forall f \in c'_A$ için

$$f(x) = \mu \lim_A x + t(Ax),\ t \in \ell$$

gösterimi mevcuttur (Wilansky 1984, S. 82).

Şimid bir A matrisinin perfect ve replaceable olma tanımlarını ifade edelim.

Tanım 3. 1. 2. 2. A konservatif bir üçgen matris olsun. Eğer c, c_A içinde yoğun ise A matrisine perfect matris denir (Wilansky 1984, S. 41).

Tanım 3. 1. 2. 3. Bir A matrisi verildiğinde $c_B = c_A$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim_n b_{nk} = 0$ olacak şekilde bir B matrisi varsa A ya replaceable matris denir (Wilansky 1984, S. 76).

Herhangi bir x dizisinin n. kesiti $x^{(n)} = \left(x_1, x_2, ..., x_n, 0, 0, ...\right)$ ile verilir. O halde

$$x^{(n)} = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \delta^k \tag{11}$$

olup özel olarak x=e alınırsa

$$e^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \delta^k \tag{12}$$

olacaktır. Şimdi ise bir FK uzayının conull ve coregüler olmasını tanımlayıp bunlara ilişkin bazı temel teoremleri verelim.

Tanım 3. 1. 2. 4. X konservatif FK uzayı olsun. Eğer $e^{(n)} \xrightarrow{z} e$ ise, yani her $f \in X'$ için $f\left(e^{(n)}\right) \to f\left(e\right)$ veya buna eşdeğer olarak her $f \in X'$ için

$$\chi\left(f\right) = f(e) - \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\delta^k\right) = 0$$

ise X uzayına bir conull FK uzayı, aksi durumda X uzayına bir coregüler FK uzayı denir (Wilansky 1984, S. 7).

Tanım 3. 1. 2. 5. X bir FK uzayı ve $X \supset \phi$ olsun. Eğer $\{\delta^k\}$, X uzayı için Schauder bazı ise bu durumda; X uzayına bir AK uzayı denir. Örneğin w, ℓ, c_0 uzayları birer AK uzayıdır (Goes ve Goes 1970, Wilansky 1984, S. 59).

Teorem 3. 1. 2. 8. X ve Y birer FK uzayı ve $X \subset Y$ olsun. Bu durumda;

i) Eğer X conull ise Y de conull uzaydır.

ii) Eğer Y conull ve X, Y de kapalı ise X de conull uzaydır (Wilansky 1984, S. 71).

Sonuç 3. 1. 2. 1. Eğer c, Y de kapalı ise bu taktirde Y coregüler uzaydır (Wilansky 1984, S. 71).

Örneğin; Sonuç 3. 1. 2. 1 de $Y = m$ alınırsa, m uzayı coregüler olur.

Teorem 3. 1. 2. 9. $\{X_n\}$, conull FK uzaylarının bir dizisi olsun. Bu durumda $X := \cap X_n$ de bir conull FK uzayıdır (Snyder 1965).

Teorem 3. 1. 2. 10. X konservatif bir FK uzayı olsun. Eğer c, X de kapalı değil ise, bu taktirde X sınırlı ıraksak diziler içerir (Wilansky 1984, S. 90).

3.2. ORAN FK UZAYLARI ve BU UZAYLAR İÇİN MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Bu bölümde Jürimäe [11] tarafından 1994 yılında yapılan Oran uzayları arasındaki matris döüşümlerine ilişkin çalışma detaylı bir şekilde ele alınıp incelenmiştir.

3. 2. 1. Oran FK Uzayları

Bu kısımda Oran FK uzayları tanımlanıp bu uzaylara ilşkin çeşitli karakterizasyonlar verilmiştir.

Tanım 3. 2. 1. 1. $\rho=(\rho_n)$ pozitif sayıların bir dizisi ve X bir FK uzayı olsun. Bu durumda $x=(x_n)\in w$ olmak üzere

$$X_\rho=\left\{x=(x_n):\left(\frac{x_n}{\rho_n}\right)\in X\right\}$$

uzayına Oran FK uzayı denir $([9])$.

Özel olarak; $X=c$, c_0 ve m alınırsa sırası ile

$$c_\rho=\left\{x=(x_n):\left(\frac{x_n}{\rho_n}\right)\in c\right\},$$

$$c_{0\rho}=\left\{x=(x_n):\left(\frac{x_n}{\rho_n}\right)\in c_0\right\}$$

ve

$$m_\rho=\left\{x=(x_n):\left(\frac{x_n}{\rho_n}\right)\in m\right\}$$

olup bu uzaylar $\|x\|_\rho=\sup\limits_n\frac{|x_n|}{\rho_n}$ normu ile birer FK uzayıdır.

Şimdi ise G.Kangro $[6]$ tarafından tanımlanan λ-yakınsak ve λ-sınırlı FK uzay tanımlarını göz önüne alıp konuya ilişkin çeşitli sonuçları inceleyelim.

Tanım 3. 2. 1. 2. $\lambda=(\lambda_n)$, $0<\lambda_1\le\lambda_2\le...\le\lambda_{n-1}\le\lambda_n\to\infty$ ve $\lim x=\lim\limits_{n\to\infty}x_n$ olmak üzere sırası ile λ-yakınsak ve λ-sınırlı diziler uzayı

$$c^\lambda=\left\{x\in c:\exists\lim_{n\to\infty}\lambda_n(x_n-\lim x)\right\}$$

ve

$$m^\lambda=\left\{x\in c:\lambda_n\left(x_n-\lim x\right)=0(1)\right\}$$

olup bu uzaylar $\|x\|_{\lambda} = \sup_n \left\{ \left| \lambda^n(x) \right| ; \left| \lim x \right| \right\}$ normu ile birer FK uzayıdır. Burada hemen belirtelim ki

$$\lambda^n(x) = \lambda_n \left(x_n - \lim x \right)$$

ve

$$\lambda(x) := \lim_n \lambda^n(x)$$

biçimindedir.

Aşağıda ise c_ρ, $c_{0\rho}$ ve c_π uzaylarına ilişkin bazı elemanter özellikleri ifade edelim:

i) $c_\rho = c_{0\rho} \oplus \langle \rho \rangle$

ii) $c_\rho = c_\pi \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \frac{\rho_n}{\pi_n} \neq 0$

iii) $c_\rho \subsetneq c_\pi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\rho_n}{\pi_n} = 0$

iv) $c_\rho \supsetneq c_\pi \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \frac{\rho_n}{\pi_n} = \infty$

v) $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\delta^k \in c_{0\rho} \subset c_\rho$

vi) $\rho \in c_0 \Rightarrow c_\rho \subset c_0$

Önerme 3. 2. 1. 1. $c_{0\rho}$ uzayı AK özelliğine sahiptir.

İspat: $c_{0\rho}$, $\|.\|_\rho$ normu ile bir Oran FK uzayıdır. Dolayısı ile $\forall x \in c_{0\rho}$ için

$\left\| x - x^{(n)} \right\|_\rho = \sup_n \left(0, 0, \ldots, \left| \frac{x_{n+1}}{\rho_{n+1}} \right|, \left| \frac{x_{n+2}}{\rho_{n+2}} \right|, \ldots \right)$ ve $\left(\frac{x_k}{\rho_k} \right) \in c_0$ olduğundan $\left\| x - x^{(n)} \right\|_\rho \to 0$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Önerme: 3. 2. 1. 2. $\forall x \in c_\rho$ için

$$x = \rho \lim_\rho x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k - \rho_k \lim_\rho x \right) \delta^k$$

gösterimi mevcuttur.

İspat: $x \in c$ ve $\lim_k x_k = L$ olmak üzere $x = Le + \sum_{k=1}^{\infty} (x_k - L) \delta^k$ olup $x \in c_\rho$ olduğundan

$$x = \lim_k \frac{x_k}{\rho_k} \rho_k e + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k - \lim_k \frac{x_k}{\rho_k} \rho_k \right) \delta^k = \rho \lim_k \frac{x_k}{\rho_k} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k - \rho_k \lim_k \frac{x_k}{\rho_k} \right) \delta^k$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Şimdi ise c_ρ FK uzayı üzerindeki sürekli lineer f fonksiyonelinin genel gösterimini ifade edelim:

Teorem 3. 2. 1. 1. c_ρ FK uzayının sürekli dual uzayı c'_ρ olmak üzere $\forall f \in c'_\rho$ için f fonksiyoneli

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k x_k + \mu \lim_\rho x$$

gösterimine sahiptir. Burada $\tau \rho = (\tau_k \rho_k) \in \ell$ ve $\mu \in \mathbb{C}$ dır.

İspat: $f \in c'_\rho$ olmak üzere Önerme 3. 2. 1. 2 den

$$f(x) = f(\rho) \lim_\rho x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k - \rho_k \lim_\rho x \right) f\left(\delta^k\right)$$

$$= f(\rho) \lim_\rho x - \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k f\left(\delta^k\right) \lim_\rho x + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, f\left(\delta^k\right)$$

$$= \left(f(\rho) - \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k f\left(\delta^k\right) \right) \lim_\rho x + \sum_{k=1}^{\infty} x_k \, f\left(\delta^k\right)$$

olur. O halde $f(\rho)-\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k f\left(\delta^k\right)=\mu$ ve $f\left(\delta^k\right)=\tau_k$ alınırsa $f(x)=\mu\lim_\rho x+\sum_{k=1}^{\infty}x_k\tau_k$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. Burada $\left(\tau_k\,\rho_k\right)\in\ell$ ve $\mu\in\mathbb{C}$ dır.

Önerme 3. 2. 1. 3. Eğer $\rho\in c_0$ ise bu durumda

$$x\in c_\rho \Leftrightarrow x\in c^\lambda\cap c_0$$

dır. Burada $\lambda:=\rho^{-1}=\left(1/\rho_n\right)$ dır.

İspat: $x\in c_\rho$ olsun. $x\in c_\rho\Leftrightarrow\left(\dfrac{x_n}{\rho_n}\right)\in c$ olur ve $\rho\in c_0$ olduğundan $x\in c_0$ dır. Ayrıca $\lambda=\rho^{-1}$ olduğundan $\left(x_n\lambda_n\right)\in c$ olup $\lim_{n\to\infty}\lambda_n\left(x_n-\lim x\right)$ mevcuttur. Böylece $x\in c^\lambda$ dır.

Karşıt olarak $x\in c^\lambda\cap c_0$ olsun. Bu taktirde

$$\lim_{n\to\infty}\lambda_n\left(x_n-\lim x\right)=\lim_{n\to\infty}\lambda_n x_n\,,\ x\in c_0$$

limiti mevcut olup $x\in c_\rho$ elde edilir. Bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3. 2. 1. 2. $\rho=\lambda^{-1}\in c_0$ olmak üzere $c^\lambda=c_\rho\oplus\langle e\rangle=c_{0\rho}\oplus\langle\rho\rangle\oplus\langle e\rangle$ eşitlikleri gerçeklenir.

İspat: $c^\lambda=c_\rho\oplus<e>$ eşitliğini göstermek ispat için yeterli olacaktır.

İlk önce gösterelim ki $c^\lambda\subset c_\rho\oplus<e>$ dır.

$$x\in c^\lambda\Leftrightarrow\exists\lim_{n\to\infty}\lambda_n\left(x_n-\lim x\right)\Leftrightarrow\ z=\left(z_n\right)\in c,\ z_n=\lambda_n\left(x_n-\lim x\right)$$

$$\Leftrightarrow x_n=\frac{z_n}{\lambda_n}+\lim x=y_n+\xi,\ \ y_n=\frac{z_n}{\lambda_n}\ \text{ ve }\ \xi=\lim x$$

$$\Leftrightarrow x=y+\xi e\qquad y\in c_\rho=c_{\lambda^{-1}}$$ dır. Gerçekten

$\lim\limits_n \dfrac{y_n}{\rho_n} = \lim\limits_n \lambda_n y_n = \lim\limits_n z_n$ olduğundan $y = (y_n) \in c_\rho$ olur. Böylece $x \in c_\rho \oplus \langle e \rangle$ dır.

Şimdi de $c^\lambda \supset c_\rho \oplus < e >$ olduğunu gösterelim.

$$x \in c_\rho \oplus \langle e \rangle \Leftrightarrow x = z + \xi e\,,\; z \in c_\rho$$

$$\Leftrightarrow x_n = z_n + \xi\,,\; \exists \lim_n \left(z_n / \rho_n \right) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n z_n$$

$$\Leftrightarrow \left(\lambda_n z_n \right) = \left(\lambda_n \left(x_n - \xi \right) \right) \in c$$

olup $x \in c^\lambda$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Şimdi de c^λ uzayı üzerindeki sürekli lineer f fonksiyonelinin gösterimini ifade ve ispat edelim.

Teorem 3. 2. 1. 3. $\forall f \in \left(c^\lambda \right)'$ için

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \left(x_n - \lim x \right) + \mu \lambda\left(x \right) + \sigma \lim x$$

dır. Burada $\tau \lambda^{-1} \in \ell$ ve $\mu, \sigma \in \mathbb{C}$ dır.

İspat: Teorem 3. 2. 1. 2 nin ispatındaki aynı teknik ile $z \in c_\rho$, $\rho = \lambda^{-1}$ ve $\xi = \lim x$ olmak üzere $\forall x \in c^\lambda$ için $x = z + \xi e$ eşitliği mevcuttur. Bu ise $z_n = x_n - \lim x$ veya $x = z + e \lim x$ olmasını gerektirir. Teorem 3. 2. 1. 1 de c_ρ nun genel gösterimi

$$f(x) = f(z) + \xi\, f(e)$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \tau_k z_k + \mu \lim\nolimits_\rho z + \sigma \lim x$$

eşitliği gerçeklenir. Bu eşitlikte $z_k = x_k - \lim x$ ve $\lim_\rho z = \lambda(x)$ yazılırsa istenilen elde edilir. Burada $\left(\tau_k\, \lambda^{-1} \right) \in \ell$ ve $\sigma = f(e)$ dır.

c^{λ} FK uzayının elemanlarının genel bir gösterimi Teorem 3. 2. 1. 4 teki gibidir:

Teorem 3. 2. 1. 4. $\forall x \in c^{\lambda}$ için

$$x = (\lim x)\, e + \lambda(x)\, \lambda^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k - \lim x - \frac{\lambda(x)}{\lambda_k} \right) \delta^k$$

$$= (\lim x) e + \lambda(x) \lambda^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda^k(x) - \lambda(x)}{\lambda_k} \delta^k$$

dır.

İspat: $c^{\lambda} = c_{\lambda^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ eşitliği mevcut olup Teorem 3. 2. 1. 2 nin ispatındaki gibi $x = z + \xi e$ olacak şekilde $z = (x - \xi e) \in c_{\lambda^{-1}}$ ve $\xi = \lim x$ mevcuttur. Böylece Önerme 3. 2. 1. 2 den

$$x = \left(\lim_{\lambda^{-1}} z\right) \lambda^{-1} + \sum_{k=1}^{\infty} \left(z_k - \lim_{\lambda^{-1}} z\right) \delta^k + (\lim x) e$$

olur. O halde $\lim_{\lambda^{-1}} z = \lim_n \lambda_n (x_n - \xi) = \lambda(x)$ olduğundan ispat tamamlanır.

Teorem 3. 2. 1. 5. $\lambda^{-1} \in c_0$ olmak üzere $m^{\lambda} = m_{\lambda^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ eşitliği gerçeklenir.

İspat: İlk olarak $m^{\lambda} \subset m_{\lambda^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ olduğunu gösterelim.

$$x \in m^{\lambda} \Leftrightarrow \exists \lim x := \xi,\ \lambda_n (x_n - \xi) = O(1)$$

$$\Leftrightarrow z = (z_n) \in m,\ z_n = \lambda_n (x_n - \xi)$$

$$\Leftrightarrow x_n = \frac{z_n}{\lambda_n} + \xi = y_n + \xi,\ y_n = \frac{z_n}{\lambda_n}$$

$$\Leftrightarrow x = y + \xi e,\ y = (y_n)$$

$(\lambda_n y_n) = z_n \in m$ ise $y = (y_n) \in m_{\lambda^{-1}}$ olup $x \in m_{\lambda^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ dır.

Şimdi de $m^{\lambda} \supset m_{\lambda^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ olduğunu gösterelim.

$$x \in m_{\lambda^{-1}} \oplus \langle e \rangle \Leftrightarrow x = z + \xi e, \ z \in m_{\lambda^{-1}}$$

$$\Leftrightarrow x_n = z_n + \xi, \ \lambda_n z_n = O(1)$$

$$\Leftrightarrow x_n \lambda_n = z_n \lambda_n + \xi \lambda_n$$

$$\Leftrightarrow \lambda_n (x_n - \lim x) = O(1)$$

$\lim \lambda = \infty$ ve $\xi = \lim x$ olmasından $x \in m^{\lambda}$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

3. 2. 2. $A \in (X, c_{\pi})$ Matris Dönüşümü

Bu kısımda $X = c_{\rho}$, c^{v}, m_{ρ} veya m^{v} olmak üzere $A \in (X, c_{\pi})$ matris dönüşümü için bazı karakterizasyonları verelim.

Lemma 3. 2. 2. 1. $\rho = (\rho_n)$ ve $\pi = (\pi_n)$ pozitif sayıların birer dizisi ve $A = (a_{nk})$ sonsuz bir matris olsun. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

i) $A = (a_{nk}) \in (X_{\rho}, Y_{\pi})$,

ii) $\left(\dfrac{a_{nk}}{\pi_n} \right) \in (X_{\rho}, Y)$,

iii) $(a_{nk} \rho_k) \in (X, Y_{\pi})$,

iv) $\left(\dfrac{a_{nk} \rho_k}{\pi_n} \right) \in (X, Y)$.

İspat:

$$\frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} x_k = \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \rho_k \left(\frac{x_k}{\rho_k} \right) = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk} \rho_k}{\pi_n} \left(\frac{x_k}{\rho_k} \right)$$

eşitliği göz önüne alınırsa ispat elde edilir. Burada

$$c_{\pi A} = \{x \in w : Ax \in c_\pi\}$$

ve

$$\lim_{\pi A} x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k, \quad x \in c_{\pi A}$$

dır. Eğer π=e=(1, 1, …) seçilirse o zaman $\lim_{eA} = \lim_A$ elde edilir.

Lemma 3. 2. 2. 2. X, Y ve Z birer FK uzayları ve u∈w olmak üzere $Z = X \oplus \langle u\rangle$ gerçeklensin. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

i) $A \in (Z, Y)$,

ii) $A \in (X, Y)$ ve $Au \in Y$.

İspat: (i⟹ii): A∈(Z,Y) olsun. Bu durumda ∀z∈Z için Az∈Y dır. $Z = X \oplus \langle u\rangle$ ve u∈w olduğundan z=x+u olacak şekilde bir x∈X vardır. Dolayısı ile $Az = A(x+u) = Ax + Au \in Y$ olup Ax∈Y ve Au∈Y dır.

(ii⟹i): $Z = X \oplus \langle u\rangle$ olsun. ∀z∈Z için $z = x + u$ olacak şekilde bir $x \in X$ mevcuttur. $Az = Ax + Au$ olduğundan $Az \in Y$ olur. Dolayısı ile A∈(Z,Y) elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 3. 2. 2. 1. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in (c_\rho, c_\pi)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\exists \lim_{\pi A} \delta^k = \lim_{n\to\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} = a_k^\pi, \quad k \in \mathbb{N}$,

ii) $\exists \lim_{\pi A} \rho = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \rho_k = a^{\rho\pi}$

ve

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_k = O(\pi_n)$

olmasıdır.

İspat: Gereklilik: Lemma 3. 2. 2. 1 de X=Y=c seçilirse $A \in (c_\rho, c_\pi)$ olur. Böylece (i) eşitliği $\delta^k \in c_\rho$ olduğundan, (ii) ise $\rho \in c_\rho$ olduğundan açıktır. (iii) ise (ii) ifadesi göz önüne alındığında

$$\left| \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} \rho_k \right| = O(1)$$

olup

$$\frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_k = O(1)$$

dır. Bu da gerekliliği ispatlar.

Yeterlilik ise Teorem 3. 1. 2. 2 ve (iii) yardımı ile elde edilir.

Teorem 3. 2. 2. 2. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in (m_\rho, c_\pi)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{i) } \exists \lim_{\pi A} \delta^k = a_k^\pi, \ k \in \mathbb{N},$$

$$\text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_k = O(\pi_n)$$

ve

$$\text{iii) } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_{nk}}{\pi_n} - a_k^\pi \right| \rho_k = 0$$

olmasıdır.

İspat. Lemma 3. 2. 2. 1 de X=m ve Y=c alınırsa, $\delta^k \in c_\rho \subset m_\rho$ olduğundan (i) elde edilir. (ii) için ise $\left(\frac{a_{nk}\rho_k}{\pi_n} \right) \in (m, c)$ olup $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\rho_k$ limiti mevcut olduğundan

$\left|\frac{1}{\pi_n}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\rho_k\right|<\infty$. Böylece $\frac{1}{\pi_n}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\rho_k=O(1)\Leftrightarrow\sum_{k=1}^{\infty}|a_{nk}|\rho_k=O(\pi_n)$ gerçeklenir.

(iii) ise Lemma 3. 2. 2. 1 ve Teorem 3. 1. 1. 5 ten $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_{nk}}{\pi_n}-a_k^{\pi}\right|\rho_k=0$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3. 2. 2. 1. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Eğer $A\in\left(c_\rho,c_\pi\right)$ ise bu durumda

$$\text{i) }\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k^{\pi}\right|\rho_k<\infty,$$

$$\text{ii) }\sum_{k=1}^{\infty}\left|\frac{a_{nk}}{\pi_n}-a_k^{\pi}\right|\rho_k=O(1)$$

gerçeklenir.

İspat: Teorem 3. 2. 2. 1 (iii) den her m∈ℕ için $\sum_{k=1}^{m}\left|\frac{a_{nk}}{\pi_n}\right|\rho_k=O(1)$ elde edilir. Dolayısı ile her m ∈ ℕ için $\sum_{k=1}^{m}\left|\lim_{n\to\infty}\frac{a_{nk}}{\pi_n}\right|\rho_k=O(1)$ ve $\sum_{k=1}^{\infty}\left|a_k^{\pi}\right|<\infty$ olur ki bu da (i) nin ispatını tamamlar. (ii) ise Teorem 3. 2. 2. 1 ve Önerme 3. 2. 2. 1 (i) den kolayca gösterilir.

Önerme 3. 2. 2. 2. Eğer $A\in\left(c_\rho,c_\pi\right)$ ve $x\in c_\rho$ ise bu durumda

$$\lim_{\pi A}x=\left(a^{\rho\pi}-\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{\pi}\rho_k\right)\lim_{\rho}x+\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{\pi}x_k$$

dır.

İspat: $\lim_{\pi A}\in c'_\rho$ olup ispat Önerme 3. 2. 1. 2 ve Teorem 3. 2. 2. 1 göz önüne alındığında kolayca elde edilir.

Önerme 3. 2. 2. 3. Eğer $A \in (m_\rho, c_\pi)$ ve $x \in m_\rho$ ise bu taktirde

$$\lim_{\pi A} x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\pi x_k$$

dır.

İspat: Lemma 3. 2. 2. 1 de X=m ve Y=c seçilip Teorem 3. 1. 1. 5 ten ispat elde edilir.

Teorem 3. 2. 2. 1 de özel olarak π=e birim dizisi alındığında Sonuç 3. 2. 2. 1 elde edilir.

Sonuç 3. 2. 2. 1. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu taktirde $A \in (c_\rho, c)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\exists \lim_A \delta^k = a_k$, $k \in \mathbb{N}$,

ii) $\exists \lim_A \rho = a^{\rho e}$

ve

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_k = O(1)$

dır. Ayrıca $\forall x \in c_\rho$ için

$$\lim_A x = \left(a^{\rho e} - \sum_{k=1}^{\infty} a_k \rho_k \right) \lim_\rho x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

dır.

Teorem 3. 2. 2. 3. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in (c^v, c_\pi)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\exists \lim_{\pi A} \delta^k = a_k^\pi$, $k \in \mathbb{N}$,

ii) $\exists \lim_{\pi A} v^{-1} = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{v_k} = a^{v^{-1}\pi}$,

$$\text{iii)}\ \exists \lim_{\pi A} e = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = a^{e\pi}$$

ve

$$\text{iv)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{nk}|}{v_k} = O(\pi_n)$$

olmasıdır.

İspat: $c^v = c_{v^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ eşitliği mevcut olup Lemma 3. 2. 2. 2 den $Ae \in c^\lambda$ ve $A \in \left(c_{v^{-1}}, c_\pi\right)$ elde edilir. Özel olarak Teorem 3. 2. 2. 1 de $\rho = v^{-1}$ alınırsa ispat tamamlanır.

Önerme 3. 2. 2. 4. Eğer $A \in \left(c^v, c_\pi\right)$ ve $x \in c^v$ ise bu taktirde

$$\lim_{\pi A} x = a^{e\pi} \lim x + \left(a^{v^{-1}\pi} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^\pi}{v_k} \right) v(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^\pi}{v_k} v^k(x)$$

dır.

Önermenin ispatı, Teorem 3. 2. 1. 4 göz önüne alınırsa Önerme 3. 2. 2. 2 den elde edilir.

Sonuç 3. 2. 2. 2. $\pi \in c_0$ olsun. Bu durumda

$$\text{Her } A \in \left(c_\rho, c_\pi\right) \text{ için } \lim_A \rho = 0$$

ve

$$\text{Her } A \in \left(c^v, c_\pi\right) \text{ için } \lim_A v^{-1} = \lim_A e = 0$$

dır.

İspat: Teorem 3. 2. 2. 1 (ii) ilk kısmı, Teorem 3. 2. 2. 3 (ii) ve (iii) ikinci kısmı gerktirir.

Teorem 3. 2. 2. 4. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in (m^v, c_\pi)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{i) } \exists \lim_{\pi A} \delta^k = a_k^\pi, \ k \in \mathbb{N},$$

$$\text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{nk}|}{v_k} = O(\pi_n),$$

$$\text{iii) } \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_{nk}}{\pi_n} - a_k^\pi \right| \frac{1}{v_k} = 0$$

ve

$$\text{iv) } \exists \lim_{\pi A} e = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} = a^{e\pi}$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3. 2. 1. 5 ten $m^v = m_{v^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ olup Lemma 3. 2. 2. 2 den $Ae \in c_\pi$ ve $A \in \left(m_{v^{-1}}, c_\pi\right)$ olur. Ayrıca Teorem 3. 2. 2. 2 de $\rho = v^{-1}$ alınırsa ispat tamamlanır.

Önerme 3. 2. 2. 5. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun**.** Eğer $A \in (m^v, c_\pi)$ ve $x \in m^v$ ise bu taktirde

$$\lim_{\pi A} x = a^{e\pi} \lim x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^\pi}{v_k} v^k(x)$$

dır.

İspat: $x \in m^v \Leftrightarrow x = z + \xi e, \ z \in m_{v^{-1}}, \ \xi = \lim x$

$$\Leftrightarrow z = x - \xi e \Rightarrow \lim_{\pi A} z = \lim_{\pi A} x - \xi \lim_{\pi A} e$$

$$\Leftrightarrow \lim_{\pi A} x = \lim_{\pi A} z + \xi \lim_{\pi A} e$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\pi (x_k - \xi) + a^{e\pi} \lim x = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k^\pi}{v_k} v^k(x) + a^{e\pi} \lim x$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

3. 2. 3. $A \in \left(X, c^{\lambda}\right)$ Matris Dönüşümü

Bu kısımda $X = c_{\rho}$, m_{ρ}, c^{v} veya m^{v} olmak üzere $A \in \left(X, c^{\lambda}\right)$ olması için gerek ve yeter şartları verilecektir. Ayrıca bu tür matris dönüşümlerinin temel özelliklerini incelenecektir. Burada

$$\lambda_A^n(x) := \lambda_n\left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k - \lim_A x\right)$$

ve

$$\lambda_A(x) := \lim_{n\to\infty} \lambda_A^n(x)$$

dır.

Teorem 3. 2. 3. 1. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in \left(c_{\rho}, c^{\lambda}\right)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $A\delta^k \in c^{\lambda}$, $k \in \mathbb{N}$,

ii) $A\rho \in c^{\lambda}$,

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_k = O(1)$

ve

iv) $\lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_k| \rho_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_A^n(\delta^k)\right| \rho_k = O(1)$

olmasıdır.

İspat: $c_{\rho} = c_{0\rho} \oplus \langle\rho\rangle$ eşitliği ve Lemma 3. 2. 2. 2 den

$$A \in \left(c_{\rho}, c^{\lambda}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} A \in \left(c_{0\rho}, c^{\lambda}\right), \\ A\rho \in c^{\lambda}. \end{cases}$$

olup c^{λ} uzayının tanımından

$$A \in \left(c_{0\rho}, c^{\lambda}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_A x \quad \forall x \in c_{0\rho} & (1) \\ \exists \lambda_A x \qquad \forall x \in c_{0\rho} & (2) \end{cases}$$

elde edilir. Dolayısı ile Sonuç 3. 2. 2. 2 den

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_A \delta^k = a_k, \quad k \in \mathbb{N} \\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_k = O(1) \end{cases}$$

ve

$$(2) \Leftrightarrow \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \left(a_{nk} - a_k\right) x_k, \quad \forall x \in c_{0\rho}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \left(a_{nk} - a_k\right) = \lambda_A\left(\delta^k\right), \quad k \in \mathbb{N} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n |a_{nk} - a_k| \rho_k = O(1) \end{cases}$$

gerçeklenir ki bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3. 2. 3. 1. Eğer $A \in \left(c_\rho, c^{\lambda}\right)$ ve $x \in c_\rho$ ise bu durumda

$$\lambda_A(x) = \left(\lambda_A(\rho) - \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_A\left(\delta^k\right)\rho_k\right) \lim_\rho x + \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_A\left(\delta^k\right) x_k$$

dır.

İspat: $\forall x \in c_\rho$ için Önerme 3. 2. 1. 2 den

$$x = \rho \lim_\rho x + \sum_{k=1}^{\infty} \left(x_k - \rho_k \lim_\rho x\right) \delta^k$$

olup bu ifadeye

$$\lambda_A(x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k - \lim_A x \right)$$

operatörü uygulanırsa ispat Teorem 3. 2. 3. 1 den elde edilir.

$A \in (c_\rho, c^v) \subset (c_\rho, c)$ içermesi mevcut olduğundan aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 3. 2. 3. 1. Eğer $A \in (c_\rho, c^\lambda)$ ve $x \in c_\rho$ ise bu taktirde

$$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

dır.

Teorem 3. 2. 3. 2. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in (c^v, c^\lambda)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $A\delta^k \in c^\lambda$, $k \in \mathbb{N}$,

ii) $Av^{-1} \in c^\lambda$,

iii) $Ae \in c^\lambda$,

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{nk}|}{v_k} = O(1)$

ve

v) $\lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{nk} - a_k|}{v_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_A^n(\delta^k)|}{v_k} = O(1)$

olmasıdır.

İspat: $c^v = c_{v^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ eşitliği ve Lemma 3. 2. 2. 2 den $Ae \in c^\lambda$ ve $A \in (c_{v^{-1}}, c^\lambda)$ olur. Böylece Teorem 3. 2. 3. 1 de $\rho = v^{-1}$ alınması ile teoremin ispatı tamamlanır.

Önerme 3. 2. 3. 2. $a = \lim_A e$ olmak üzere eğer $A \in (c^v, c^\lambda)$ ve $x \in c^v$ ise bu durumda

i) $\lim_A x = a \lim x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x_k - \lim x)$

ii) $\lambda_A(x) = \lambda_A(e) \lim x + \left(\lambda_A(v^{-1}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_A(\delta^k)}{v_k} \right) v(x) + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_{A(\delta^k)}}{v_k} v_k(x)$

dır.

Önermenin ispatı Teorem 3. 2. 3. 2 (iv) ve (v) den elde edilir.

Sonuç 3. 2. 3. 2. Eğer $A \in (c^{v}, c^{\lambda})$ ve $x \in c_0 \cap c^{v}$ ise bu taktirde

$$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

ve

$$\lim_A v^{-1} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{v_k}$$

dır.

İspat: Önerme 3. 2. 3. 2 (i) ve $x \in c_0$ olduğundan ispat kolayca elde edilir.

Teorem 3. 2. 3. 3. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in (m_\rho, c^{\lambda})$ olması için gerek ve yeter şart

i) $A\delta^k \in c^{\lambda}$, $k \in \mathbb{N}$,

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_k = O(1)$,

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_A^n(\delta^k)\right| \rho_k = O(1)$

ve

iv) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_A^n(\delta^k) - \lambda_A(\delta^k)\right| \rho_k = 0$

olmasıdır.

İspat: c^{λ} uzayının tanımından

$$A \in (m_\rho, c^{\lambda}) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_A x & \forall x \in m_\rho \quad (1) \\ \exists \lambda_A(x) & \forall x \in m_\rho \quad (2) \end{cases}$$

olur ve $x \in m_\rho$ olduğundan $Ax \in c^\lambda$ elde edilir. (1) in denkliği aşağıdaki gibidir.

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_A \delta^k, \quad k \in \square & \text{(i)} \\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_k = O(1), & \text{(ii)} \\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |\, a_{nk} - a_k \,| \rho_k = 0. & \text{(a)} \end{cases}$$

$\left(m_\rho, c^\lambda\right) \subset \left(m_\rho, c\right)$ içermesi mevcut olduğundan $A \in \left(m_\rho, c\right)$ olup Lemma 3. 2. 2. 1 den $\left(a_{nk}\rho_k\right) \in \left(m, c\right)$ dır. Dolayısıyla Teorem 3. 1. 1. 5 ten $\forall x \in m_\rho$ için

$$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

olur. Böylece

$$\left(2\right) \Leftrightarrow \exists \lambda_A(x) = \lim_{n\to\infty} \lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(a_{nk} - a_k\right) x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_A^n \left(\delta^k\right) x_k$$

$$\Leftrightarrow \lambda_A^n \left(\delta^k\right) \in \left(m_\rho, c\right) \text{ olup}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_n \lambda_A^n \left(\delta^k\right) = \lambda\left(\delta^k\right) & \text{(i)} \\ \sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_A^n \left(\delta^k\right)\right| \rho_k = O(1) & \text{(iii)} \\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left| \lambda_A^n \left(\delta^k\right) - \lambda_A\left(\delta^k\right) \right| = 0 & \text{(iv)} \end{cases}$$

gerçeklenir. $\lim \lambda = \infty$ olduğundan (iii), (a) yı gerektirir. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3. 2. 3. 3. Eğer $A \in \left(m_\rho, c^\lambda\right)$ ve $x \in m_\rho$ ise bu taktirde

$$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

ve

$$\lambda_A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_A\left(\delta^k\right) x_k$$

dır.

İspat: Birinci kısmın ispatı Teorem 3. 2. 3. 3 ün ispatındaki gibi olduğundan burada sadece ikinci kısmın ispatını ele alacağız. Bunun için Teorem 3. 2. 3. 3 (iv) den

$$\lim_n \lambda_A^n(x) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_A^n\left(\delta^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_A(\delta^k)$$

olduğundan ispat açıktır.

Teorem 3. 2. 3. 4. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in \left(m^v, c^\lambda\right)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $A\delta^k \in c^\lambda$, $k \in \mathbb{N}$,

ii) $Ae \in c^\lambda$,

iii) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{nk}|}{v_k} = O(1)$,

iv) $\displaystyle\sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\lambda_A^n\left(\delta^k\right)\right|}{v_k} = O(1)$

ve

v) $\displaystyle\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\left|\lambda_A^n\left(\delta^k\right) - \lambda_A\left(\delta^k\right)\right|}{v_k} = 0$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3. 2. 1. 5 ten $m^v = m_{v^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ eşitliği mevcut olup Lemma 3. 2. 2. 2 den $Ae \in c^\lambda$ ve $A \in \left(m_{v^{-1}}, c^\lambda\right)$ dır. Böylece Teorem 3. 2. 3. 3 te özel olarak $\rho = v^{-1}$ alınırsa ispat tamamlanır.

Şimdi ise yukarıdaki teoremin bazı sonuçlarını verelim.

Önerme 3. 2. 3. 4. $A \in (m^v, c^\lambda)$ ve $x \in m^v$ ise bu durumda

$$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x_k - \lim x) + a \lim x$$

dır.

İspat: $x \in m^v$ olsun. O halde $z \in m_{v^{-1}}$ ve $\xi = \lim x$ olmak üzere $x = z + \xi e$ olup $z = x - \xi e$ dır. Böylece Önerme 3. 2. 3. 3 ten

$$\lim_A z = \lim_A x - \xi \lim_A e = \sum_{k=1}^{\infty} a_k z_k$$

veya

$$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k (x_k - \lim x) + a \lim x$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 3. 2. 3. 3. $A \in (m^v, c^\lambda)$ olsun. Bu taktirde

i) $x \in m^v \cap c_0$

veya

ii) $x \in m^v$ ve $\chi(A) = a - \sum_{k=1}^{\infty} a_k = 0$

ise $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ dır.

İspat: Önerme 3. 2. 3. 4 ve hipotezden (i) açıktır. $x \in m^v \subset c$ olduğundan $x = u + \xi e$ olacak şekilde $u \in c_0$ vardır. O halde Önerme 3. 2. 3. 4 ten (ii) elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3. 2. 3. 5. $x \in m^v$ olmak üzere eğer $A \in (m^v, c^\lambda)$ ve $\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$ ise bu durumda

$$\lambda_A(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_A\left(\delta^k\right) x_k$$

dır.

Önermenin ispatı Teorem 3. 2. 3. 4 (iv) yardımı ile elde edilir.

3. 2. 4. $A \in (X, m_\pi)$ Matris Dönüşümü

Burada ise $X = c_{0\rho}$, c_ρ, m_ρ, veya m^v olmak üzere $A \in (X, m_\pi)$ olması için gerek ve yeter şartları veren iki temel teoremi verelim.

Teorem 3. 2. 4. 1. A reel yada kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $A \in (m_\rho, m_\pi)$,

ii) $A \in (c_\rho, m_\pi)$,

iii) $A \in (c_{0\rho}, m_\pi)$,

iv) $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_k = O(\pi_n)$.

Lemma 3. 2. 2. 1 göz önüne alınırsa teoremin ispatı Teorem 3. 1. 1. 4 ten elde edilir.

Teorem 3. 2. 4. 2. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in (m^v, m_\pi)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $Ae \in m_\pi$,

$$\text{ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{nk}|}{v_k} = O(\pi_n)$$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3. 2. 1. 5 ten $m^v = m_{v^{-1}} \oplus \langle e\rangle$ olup Lemma 3. 2. 2. 2 den $Ae \in m^v$ ve $A \in (m_{v^{-1}}, m_\pi)$ elde edilir. Ayrıca Teorem 3. 2. 4. 1 de $\rho = v^{-1}$ alınırsa ispat tamamlanır.

3. 2. 5. $A \in (X, m^\lambda)$ Matris Dönüşümü

Şimdi de $X = c_\rho, m_\rho, c^v$ veya m^v olmak üzere $A \in (X, m^\lambda)$ matris dönüşümüne ilişkin çeşitli sonuçları ele alacağız.

Teorem 3. 2. 5. 1. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in (m_\rho, m^\lambda)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{i)}\ \exists \lim_A \delta^k = a_k,\ k \in \mathbb{N},$$

$$\text{ii)}\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_k = O(1)$$

ve

$$\text{iii)}\ \lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_k| \rho_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left|\lambda_A^n(\delta^k)\right| \rho_k = O(1)$$

olmasıdır.

İspat: m^λ uzayının tanımından

$$A \in (m_\rho, m^\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_A x & \forall x \in m_\rho \quad (1) \\ \lambda_A^n(x) = O(1) & \forall x \in m_\rho \quad (2) \end{cases}$$

dır. Sırası ile (1) ve (2) nin denklikleri

$$(1) \Leftrightarrow A \in (m_\rho, c) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_A \delta^k, \quad k \in \mathbb{N}, & \text{(i)} \\ \sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} | \rho_k = O(1), & \text{(ii)} \\ \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} - a_k | \rho_k = 0. & \text{(a)} \end{cases}$$

$$(2) \Leftrightarrow \lambda_A^n(x) = \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_k) x_k \right) =$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n (a_{nk} - a_k) x_k = 0(1), \quad \forall x \in m_\rho$$

$$\Leftrightarrow \lambda_n (a_{nk} - a_k) \in (m_\rho, m) \text{ olup Lemma 3. 2. 2. 1 den}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_n (a_{nk} - a_k) \rho_k \in (m, m) \text{ olur ki Teorem 3. 1. 1. 4 ten}$$

$$\Leftrightarrow \lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} | a_{nk} - a_k | \rho_k = O(1)$$

olur ki bu da gerekliliği ispatlar.

Yeterlilik için ise Teorem 3. 2. 2. 2 de π=e alınırsa $A \in (m_\rho, c)$ olup Önerme 3. 2. 2. 3 ten

$$\lambda_A^n(x) = \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k - \lim_A x \right) = \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k \right) = \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_k) x_k \right)$$

$$= \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_k) \rho_k \frac{x_k}{\rho_k} \right) \le \sup_n \left| \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} (a_{nk} - a_k) \rho_k \frac{x_k}{\rho_k} \right) \right|$$

$$\le \sup_k \left| \frac{x_k}{\rho_k} \right| \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n |a_{nk} - a_k| \rho_k$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3. 2. 5. 1. Eğer $A \in (m_\rho, m^\lambda)$ ve $x \in m_\rho$ ise bu taktirde

$$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

dır.

İspat: $(m_\rho, m^\lambda) \subset (m_\rho, c)$ içermesi mevcut olduğundan Önermenin ispatı için Önerme 3. 2. 2. 3 te π=e alınması yeterli olacaktır.

Teorem 3. 2. 5. 2. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in (m^v, m^\lambda)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $\exists \lim_A \delta^k = a_k$, $k \in \mathbb{N}$,

ii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{nk}|}{v_k} = O(1)$,

iii) $\lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{nk} - a_k|}{v_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_A^n|}{v_k} = O(1)$

ve

iv) $Ae \in m^\lambda$

olmasıdır.

İspat: Teorem 3. 2. 1. 5 ten $m^v = m_{v^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ ve Lemma 3. 2. 2. 2 den

$$A \in (m^v, m^\lambda) \Leftrightarrow \begin{cases} Ae \in m^\lambda & \text{(iv)} \\ A \in (m_{v^{-1}}, m^\lambda) \end{cases}$$

elde edilir. Böylece Teorem 3. 2. 5. 1 de özel olarak $\rho = v^{-1}$ seçilirse ispat tamamlanır.

Önerme 3. 2. 5. 2. Eğer $A \in (m^v, m^\lambda)$ ve $x \in m^v$ ise bu taktirde

$$\lim_A x = a \lim x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{v_k} v^k(x)$$

dır.

İspat: $\left(m^{v}, m^{\lambda}\right) \subset \left(m_{\rho}, c\right)$ içermesi mevcut olup ispat için Önerme 3. 2. 2. 5 te π=e alınması yeterli olacaktır.

Teorem 3. 2. 5. 3. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in \left(c_{\rho}, m^{\lambda}\right)$ olması için gerek ve yeter şart

$$\text{i) } \exists \lim_{A} \delta^{k} = a_{k}, \ k \in \mathbb{N},$$

$$\text{ii) } \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_{k} = O(1)$$

ve

$$\text{iii) } \lambda_{n} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk} - a_{k}| \rho_{k} = O(1)$$

olmasıdır.

İspat: m^{λ} uzayının tanımından

$$A \in \left(c_{\rho}, m^{\lambda}\right) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{A} x & \forall x \in c_{\rho} \quad (1) \\ \lambda_{A}^{n}(x) = O(1) & \forall x \in c_{\rho} \quad (2) \end{cases}$$

olup

$$(1) \Leftrightarrow \begin{cases} \exists \lim_{A} \delta^{k} = a_{k}, & \text{(i)} \\ \exists \lim_{A} \rho, & \\ \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \rho_{k} = O(1). & \text{(ii)} \end{cases}$$

dır. Böylece $\left(c_{\rho}, m^{\lambda}\right) \subset \left(c_{\rho}, c\right)$ içermesi mevcut olup Sonuç 3. 2. 2. 1 den $\forall x \in c_{0\rho}$ için

$$\lim_{A} x = \sum_{k=1}^{\infty} a_{k} x_{k}$$

elde edilir. O halde $\forall x \in c_{0\rho}$ için $\lambda_A^n(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \left(a_{nk} - a_k\right) x_k$ ve

$$(2) \Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_A^n(\rho) = O(1) \\ \sum_{k=1}^{\infty} \lambda_n \left(a_{nk} - a_k\right) = O(1) \qquad \forall x \in c_{0\rho}, \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_A^n(\rho) = O(1), \\ \left(\lambda_n (a_{nk} - a_k)\right) \in \left(c_{0\rho}, m^{\lambda}\right), \end{cases}$$

$$\Leftrightarrow \begin{cases} \lambda_A^n(\rho) = O(1), \\ \lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|a_{nk} - a_k\right| \rho_k = O(1) \qquad \text{(iii)} \end{cases}$$

dır. Ayrıca $\lim_{n\to\infty} \lambda_n = \infty$ olduğundan (iii) gerçeklenir. Bu da ispatı tamamlar.

Önerme 3. 2. 5. 3. Eğer $A \in \left(c_\rho, m^{\lambda}\right)$ ve $x \in c_\rho$ ise bu taktirde

$$\lim_A x = \sum_{k=1}^{\infty} a_k x_k$$

dır.

Önermenin ispatı, $\left(c_\rho, m^{\lambda}\right) \subset \left(c_\rho, c\right)$ içermesi mevcut olduğundan açıktır.

Teorem 3. 2. 5. 4. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda $A \in \left(c^v, m^{\lambda}\right)$ olması için gerek ve yeter şart

i) $Ae \in m^{\lambda}$,

ii) $\exists \lim_A \delta^k = a_k$, $k \in \mathbb{N}$,

iii) $\sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{nk}|}{v_k} = O(1)$

ve

iv) $\lambda_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|a_{nk} - a_k|}{v_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{|\lambda_A^n(\delta^k)|}{v_k} = O(1)$

olmasıdır.

İspat: $c^v = c_{v^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ eşitliği mevcut olup Lemma 3. 2. 2. 2 gereğince $A \in \left(c_{v^{-1}}, m^\lambda\right)$ ve $Ae \in m^\lambda$ olup Teorem 3. 2. 5. 3 te $\rho = v^{-1}$ alınırsa ispat tamamlanır.

Önerme 3. 2. 5. 4. Eğer $A \in \left(c^v, m^\lambda\right)$ ve $x \in c^v$ ise bu taktirde

$$\lim_A x = a \lim x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{v_k} v^k(x)$$

dır.

İspat: $\left(c^v, m^\lambda\right) \subset \left(c^v, c\right)$ içermesi mevcut olup Önerme 3. 2. 2. 4 te π=e alınırsa

$$\lim_A x = a \lim x + \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{v_k} v^k(x) + \left(\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{v_k} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{v_k} \right)$$

elde edilir. Teorem 3. 2. 5. 4 (iv) den $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{v_k} = \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_k}{v_k}$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde Jürimäe $[12]$ tarafından verilen Oran FK uzaylarının toplanabilirlik alanlarındaki uygulamaları, Chandrasekhara Rao $[14,15,16,17]$ tarafından yapılan çalışmalar ele alınıp Oran uzayları üzerindeki Mazur tipi matrislere ilişkin sonuçlar, yine bu uzayların monoton normları ve dualleri kapsamlı bir şekilde incelenmiştir. Bu çalışmaların bir devamı olan Dağadur $[18]$ tarafından verilen çalışmada bu tür uzaylar için replaceable olma tanımlanmış ve sınırlı tutarlılık teoremi ayrıca verilmiştir.

4. 1. ORAN FK UZAYLARININ TOPOLOJİK YAPILARI ve BAZI UYGULAMALARI

4. 1. 1. $c_{\pi A}$ ve c_A^λ Toplanabilirlik Alanları

Önceki bölümde y=Ax bir matris dönüşümü olmak üzere X ve Y Oran FK uzayları arasındaki matris dönüşümlerinin çeşitli özellikleri incelendi. Bu kısımda ise

$$c_{\pi A} = \{x \in w : Ax \in c_\pi\} \text{ ve } c_A^\lambda = \{x \in w : Ax \in c^\lambda\}$$

olmak üzere bu uzayların sürekli duallerinin topolojik yapıları göz önüne alınarak bazı uygulamaları verilecektir.

Önerme 4. 1. 1. 1. $c_{\pi A}$ uzayı aşağıdaki yarı normlar ile bir FK uzayıdır.

$$p_0(x) = \sup_n \frac{1}{\pi_n}\left|\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}x_k\right|,$$

$$p_{2n}(x) = |x_n|, \ n \in \mathbb{N},$$

$$p_{2n-1}(x) = \sup_m \left|\sum_{k=1}^{m} a_{nk}x_k\right|, \ n \in \mathbb{N}.$$

İspat: Teorem 3. 1. 2. 1 gereğince $c_{\pi A}$ uzayı p, h ve $q \circ A$ yarı normları ile bir FK uzayıdır.

Önerme 4. 1. 1. 2. $\forall f \in c'_{\pi A}$ için f fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + \mu \lim_{\pi A} x \qquad (13)$$

gösterimine sahiptir. Burada $(\tau_n \pi_n) \in \ell$, $(t_n) \in c_{\pi A}^{\beta}$ ve $\mu \in \mathbb{C}$ dır.

İspat: Teorem 3. 1. 2. 2 den

$$f(x) = \mu \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \frac{\pi_n}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$$

$$= \mu \lim_{\pi A} x + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \pi_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk} x_k}{\pi_n} + \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k$$

$$= \mu \lim_{\pi A} x + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n (Ax)_n + \alpha x$$

olup bu ise ispatı tamamlar.

Tanım 4. 1. 1. 1. $\forall y \in c_{\pi}$ için y=Ax olacak şekilde tek bir $x \in c_{\pi A}$ varsa A matrisine c_{π}-reversible denir. Burada hemen belirtelim ki;

$M = (m_{nk})$ ve $\mu \neq 0$, $(\tau_k) \in \ell$ olmak üzere

$$m_{nk} = \begin{cases} \tau_k, & k < n, \\ \mu, & k = n, \\ 0, & k > n. \end{cases}$$

olsun. Bu durumda M matrisine Mazur matrisi denir. Eğer M bir Mazur matrisi ise $c_M = c$ gerçeklenir.

Önerme 4. 1. 1. 3. Eğer A, c_{π}-reversible matris ise bu taktirde $c_{\pi A}$ uzayı $p_0(x)$ normu ile bir FK uzayı olup $\forall f \in c'_{\pi A}$ için f, (13) gösterimine sahiptir. Burada ∀k∈ℕ için $t_k = 0$ dır.

Önermenin ispatı Teorem 3. 1. 2. 6 dan kolayca elde edilir.

Teorem 4. 1. 1. 1. Eğer $M=(m_{nk})$ bir Mazur matrisi ve

$$\square = \left(\frac{\pi_n m_{nk}}{\rho_k} \right)$$

ise $c_{\pi\square} = c_{\rho}$ dır.

İspat: $\lim_{\pi\square} x = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\pi_n m_{nk}}{\rho_k} x_k = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{m_{nk} x_k}{\rho_k}$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4. 1. 1. 2. $\forall f \in c'_{\pi A}$ için $c_{\rho B} \supset c_{\pi A}$ ve $\lim_{\rho B} x = f(x)$ $(\forall x \in c_{\pi A})$ şartlarını gerçekleyen bir B matrisi mevcuttur. Eğer $\mu \neq 0$ olmak üzere f, (13) gösterimine sahip ise $\forall x \in c_{\pi A}$ için $c_{\rho B} = c_{\pi A}$ ve $\lim_{\rho B} x = f(x)$ olacak şekilde bir B matrisi vardır.

İspat: $M=(m_{nk})$ Mazur matrisini göz önüne alalım. O halde $D=(m_{nk}/\pi_n)$ olmak üzere $C = DA = (c_{nk})$ olsun. Böylece $t=(t_k)$, (13) gösterimindeki gibi olmak üzere $B=(b_{nk})$ matrisi

$$b_{nk} = \begin{cases} \rho_1 t_k, & n=1 \\ \rho_n (t_k + c_{n-1,k}), & n>1 \end{cases}$$

olarak seçilirse

n=1 için $\frac{1}{\rho_1} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_1 t_k x_k = \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k$ olup $t_k \in c_{\pi A}^{\beta}$ olduğundan seri yakınsaktır.

n>1 için $\frac{1}{\rho_n} \sum_{k=1}^{\infty} \rho_n \left(t_k + c_{n-1,k} \right) x_k = \sum_{k=1}^{\infty} \left(t_k + c_{n-1,k} \right) x_k$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} x_k t_k + \sum_{k=1}^{\infty} x_k c_{n-1,k}$$

olup $t_k \in c_{\pi A}^{\beta}$ ve Teorem 4. 1. 1. 1 den seri yakınsaktır. O halde

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\rho_n}\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}\,x_k=\sum_{k=1}^{\infty}x_k\,t_k+\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}x_k\,c_{n-1,k}=f(x)$$

olup bu ise birinci kısmın ispatını tamamlar.

$\mu\neq 0$ olmak üzere M mazur matrisi ve $c_M=c$ olmasından dolayı ikinci kısmın ispatı elde edilir.

Sonuç 4. 1. 1. 1. $\forall f\in c'_{\pi A}$ için

$$f(x)=\lim_{\pi B}x \quad \forall x\in c_{\pi A},$$

$$f(x)=\lim_{D}x \quad \forall x\in c_{\pi A},$$

olacak şekilde B ve D matrisleri vardır.

İspat: Teorem 4. 1. 1. 2 de özel olarak $\rho=\pi$ ve $\rho=e$ alınırsa ispat elde edilir.

Sonuç 4. 1. 1. 2. $\forall f\in c'_{\pi}$ için

$$f(x)=\lim_{\rho B}x,\ \forall x\in c_{\pi}$$

olacak biçimde bir B matrisi vardır. Eğer $\mu\neq 0$ ise $c_{\rho B}=c_{\pi}$ gerçeklenir.

İspat: Teorem 4. 1. 1. 2 de A=I (I birim matris) alınırsa ispat elde edilir.

Şimdi ise c_A^{λ} FK uzayı için çeşitli karakterizasyonları inceleyelim.

Önerme 4. 1. 1. 4. c_A^{λ} toplanabilirlik alanı $p_0(x)=\left\{\left|\lambda_A^n(x)\right|,\ \left|\lim_A x\right|,\ n\in\mathbb{N}\right\}$, $p_{2n}(x)$ ve $p_{2n-1}(x)$ yarı normları ile bir FK uzayıdır.

İspat: $Ax\in c^{\lambda}$ olmak üzere Teorem 3. 1. 2. 1 de $Y=c_A^{\lambda}$ alınırsa

$$q\circ A(x)=q(Ax)=\sup_n\left|\lambda_n\Big(\sum_{k=}^{\infty}a_{nk}x_k-\lim_A x\Big)\right|=\sup_n\left\{\left|\lambda_A^n(x)\right|,\left|\lim_A x\right|\ \ ,n\in\mathbb{N}\right\}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Önerme 4. 1. 1. 5. $\forall f \in \left(c_A^\lambda\right)'$ için

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \lambda_A(x) + \mu \lambda_A(x) + \sigma \lim_A x \qquad (14)$$

dır. Burada $\tau \in \ell$, $t \in \left(c_A^\lambda\right)^\beta$ ve $\sigma, \mu \in \Box$ dır.

İspat: $x \in c_A^\lambda$ olsun. Böylece $Ax \in c^\lambda$ olup

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n \left(\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k - \lim_A x \right)$$

limiti mevcuttur. Dolayısı ile Teorem 3. 1. 2. 2 de c_A yerine c_A^λ alınırsa $x \in c_A^\lambda$ için

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \alpha_k x_k + \sum_{n=1}^{\infty} t_n (Ax)_n + \mu \lim_A x$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Önerme 4. 1. 1. 6. $\forall n \in \Box$ için $\lambda_n \le \lambda_{n+1}$ sağlansın. Bu durumda $\forall f \in (c_A^\lambda)'$ için $c_B^\lambda \supset c_A^\lambda$ ve $\lambda_B(x) = f(x)$ şarlarını gerçekleyen bir B matrisi mevcuttur. Eğer $\mu \ne 0$ olmak üzere f, (14) gösterimine sahip olup $\forall x \in c_A^\lambda$ için $c_B^\lambda = c_A^\lambda$ ve $\lambda_B(x) = f(x)$ olacak şekilde bir B matrisi vardır.

Teoremin ispatı Teorem 4. 1. 1. 2 de ki benzer düşünce ile elde edilebilir.

K. Zeller her sınırsız λ dizisi için $c_D = c \oplus \langle \lambda \rangle$ ve $\lim_D \lambda = 0$ olmak üzere $D = (d_{nk})$ regüler matrisin varlığını göstermiştir. Ayrıca; W. Beekmann ve S.C.Chang $[13]$ de herhangi bir A matrisi için $c_E = c_A^\lambda$ olacak şekilde bir $E = (e_{nk})$ matrisinin mevcut olduğunu göstermişler. Burada hemen belirtelim ki A ve E matrisleri aşağıdaki eşitlikleri gerçekler.

$$E = D\,\mathrm{diag}(\lambda_k)\,A \text{ veya } A = \mathrm{diag}(1/\lambda_k)\,D^{-1}E$$

$\forall f \in (c_A^\lambda)'$ için

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \bar{t}_k x_k + \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\tau}_n \sum_{k=1}^{\infty} e_{nk} x_k + \bar{\mu} \lim_E x$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \lambda_A^n(x) + \mu \lambda_A(x) + \sigma \lim_A x$$

dır. Burada $\mu = \bar{\mu}$, $\sigma = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\tau}_n \sum_{k=1}^{\infty} d_{nk} x_k$ $\quad \tau_k = \sum_{n=1}^{\infty} \bar{\tau}_n d_{nk}$ ve $t_k = \bar{t}_k$ dır.

Önerme 4. 1. 1. 7. $\forall f \in \left(c_A^{\lambda}\right)'$ ve $\forall x \in c_A^{\lambda}$ için $c_{\pi B} \supset c_A^{\lambda}$ ve $\lim_{\pi B} x = f(x)$ şartlarını gerçekleyen bir B matrisi vardır. Eğer $\mu \neq 0$ olmak üzere f, (14) gösterimine sahip ise $\forall x \in c_A^{\lambda}$ için $c_{\pi B} = c_A^{\lambda}$ ve $\lim_{\pi B} x = f(x)$ olacak şekilde bir B matrisi vardır.

İspat: İlk kısmın ispatı için π=e alınması yeterli olacaktır. İkinci kısım için ise $\square = \left(\frac{m_{nk}\,\pi_n}{\rho_k}\right)$ olmak üzere B=ℚE matrisini göz önüne alalım. Bu durumda özel olarak ρ=e seçilirse ispat tamamlanır.

Önerme 4. 1. 1. 8. $\forall f \in c'_{\pi A}$ için $c_B^{\lambda} \supset c_{\pi B}$ ve $\lambda_B(x) = f(x)$ $(\forall x \in c_{\pi A})$ şartlarını sağlayan bir B matrisi vardır. Eğer, $\mu \neq 0$ olmak üzere f, (14) gösterimine sahip ise $\forall x \in c_{\pi A}$ için $c_{\pi B} = c_A^{\lambda}$ ve $\lim_{\pi B} x = f(x)$ olacak şekilde bir B matrisi vardır.

Önerme 4. 1. 1. 6 dan ispat kolayca görülebilir.

4. 1. 2. Matris Dönüşümlerinin Conullığı ve Banach-Steinhaus Tipi Teoremler

Bu kısımda Oran FK uzaylarının (X,Y)-conull'lığına ilişkin çeşitli karakterizasyonlar ele alınıp Banach Steinhaus tipi teoremler verilecektir.

Tanım 4. 1. 2. 1. $X = c_\rho$ veya $X = c_\rho \oplus \langle u \rangle$ olmak üzere $A \in (X, Y)$ olsun. Bu durumda; eğer Y_A içinde $\rho^{[n]} \xrightarrow{z} \rho$ ise A matrisine (X,Y)-conull, aksi durumda A matrisine (X,Y)-coregüler denir.

Tanım 4. 1. 2. 1 de X=Y=c alınırsa genel conull matris tanımı elde edilmiş olur. Ayrıca; $X = Y = c^{\lambda}$ seçilirse genel λ-conull tanımı elde edilir. Yani; A matrisi λ-conull olması için gerek ve yeter şart

$$\psi(A) := \lambda_A(\lambda^{-1}) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_A(\delta^k)}{\lambda_k} = 0$$

olmasıdır.

Lemma 4. 1. 2. 1. Eğer

i) $A \in (c_\rho, c_\pi)$ ve $x \in m_\rho \cap c_{\pi A}$ ise bu durumda $\forall f \in c'_{\pi A}$ için f fonksiyoneli

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k x_k + \mu \lim_{\pi A} x$$

gösterimine sahiptir. Burada $\mu \in \mathbb{C}$ ve $s = (s_k) \in \left(c_{\pi A} \cap m_\rho\right)^\beta$ dır.

ii) $A \in (c^\lambda, c_\pi)$ ve $x \in m_{\lambda^{-1}} \cap c_{\pi A}$ ise bu taktirde $\forall f \in c'_{\pi A}$ için f fonksiyoneli

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} s_k x_k + \mu \lim_{\pi A} x$$

gösterimine sahiptir. Burada $\mu \in \mathbb{C}$ ve $s = (s_k) \in \left(c_{\pi A} \cap m_{\lambda^{-1}}\right)^\beta$ dır.

İspat: i) Önerme 4. 1. 1. 2 den $\forall f \in c'_{\pi A}$ için f fonksiyoneli

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} t_k x_k + \sum_{n=1}^{\infty} \tau_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + \mu \lim_{\pi A} x$$

gösterimine sahiptir. Burada $x \in m_\rho \cap c_{\pi A}$ olduğundan ikinci kısım mutlak yakınsak olup serilerin sırası değişebilir. Böylece Teorem 3. 2. 2. 1 den ispat elde edilir. (ii) nin ispatı ise benzer teknik ile Lemma 4. 1. 2. 1 (i) ve Teorem 3. 2. 2. 3 ten kolayca elde edilebilir.

Teorem 4. 1. 2. 1. $A \in \left(c_\rho, c_\pi\right)$ olsun. Bu durumda A matrisinin $\left(c_\rho, c_\pi\right)$-conull olması için gerek ve yeter şart

$$\chi_{c_\rho}^{c_\pi}\left(A\right) = \lim_{\pi A} \rho - \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \lim_{\pi A} \delta^k = 0$$

olmasıdır.

İspat: $x \in c_\rho$ olsun. O halde $c_\rho \subset m_\rho$ olduğundan $x \in m_\rho \cap c_{\pi A}$ yazabiliriz. Özel olarak $x = \rho$ alınırsa Tanım 4. 1. 2. 1 den

$$\lim_{m\to\infty}\left(\sum_{k>m}^{\infty} s_k \rho_k + \mu\left(\lim_{\pi A} \rho - \sum_{k=1}^{m} \rho_k \lim_{\pi A} \delta^k\right)\right) = 0$$

elde edilir. $\mu \neq 0$ olmak üzere $s = (s_k) \in \left(c_{\pi A} \cap m_\rho\right)^\beta$ olup Lemma 4. 1. 2. 1 den ispat elde edilir.

Teorem 4. 1. 2. 2. $A \in (c^\lambda, c_\pi)$ olsun. Bu taktirde A matrisinin (c^λ, c_π) -conull olması için gerek ve yeter şart

$$\chi_{c^\lambda}^{c_\pi}(A) = \lim_{\pi A} \lambda^{-1} - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lim_{\pi A} \delta^k}{\lambda_k} = 0$$

olmasıdır.

Teoremin ispatı Teorem 4. 1. 2. 1 de ki benzer düşünce ile elde edilir.

Teorem 4. 1. 2. 3. Eğer $A \in (c_\rho, c^\lambda)$ ise A matrisinin (c_ρ, c^λ) -conull olması için gerek ve yeter şart

$$\chi_{c_\rho}^{c^\lambda}\left(A\right) = \lambda_A(\rho) - \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \lambda_A(\delta^k) = 0$$

olmasıdır.

İspat: Tanım 4. 1. 2. 1 den A matrisinin $\left(c_\rho, c^\lambda\right)$-conull olması için gerek ve yeter şart $\forall f \in \left(c_A^\lambda\right)'$ için

$$\lim_{m\to\infty} f\left(\rho - \sum_{k=1}^{m} \rho_k \delta^k\right) = 0$$

olmasıdır. Ayrıca, Önerme 4. 1. 1. 5 ten

$$f(\rho - \sum_{k=1}^{m} \rho_k \delta^k) = \sum_{k>m} t_k \rho_k + \sum_{k>m} \sum_{n} \tau_n \lambda_A^n\left(\delta^k\right)\rho_k +$$

$$+\mu\left(\lambda_A(\rho) - \sum_{k=1}^{m} \lambda_A\left(\delta^k\right)\rho_k\right) + \sigma \sum_{k>m} a_k \rho_k$$

dır. $\mu \neq 0$ olmak üzere Teorem 3. 2. 3. 1 ve Sonuç 3. 2. 3. 1 den ispat tamamlanır.

Teorem 4. 1. 2. 4. Eğer $A \in \left(c^v, c^\lambda\right)$ ise A matrisinin $\left(c^v, c^\lambda\right)$-conull olması için gerek ve yeter şart

$$\chi_{c^v}^{c^\lambda}(A) = \lambda_A\left(v^{-1}\right) - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{\lambda_A\left(\delta^k\right)}{v_k} = 0$$

olmasıdır.

İspat: $c^v = c_{v^{-1}} \oplus \langle e \rangle$ eşitliği ve Tanım 4. 1. 2. 1 den A matrisinin $\left(c^v, c^\lambda\right)$-conull olması için gerek ve yeter şart $\left((v^{-1})^{(m)}\right) \xrightarrow{z} v^{-1}$ olmasıdır. Böylece Teorem 4. 1. 2. 3 teki teknik kullanılarak ispat elde edilir.

Teorem 4. 1. 2. 5. $A \in (X, Y)$ ve $Z \varnothing X$ olsun. Bu durumda A matrisi (Z, Y)-conull dır.

İspat: $Z = c_\kappa$ $\left(\text{veya } Z = c_\kappa \oplus \langle e \rangle\right)$ ve $X = c_\rho$ $\left(\text{veya } X = c_\rho \oplus \langle e \rangle\right)$ olsun. $Z \varnothing X$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\left(\kappa_n / \rho_n\right) = 0$ yani $\kappa \in c_{0\rho}$ olmalıdır. $c_{0\rho}$ AK özelliğine sahip olduğundan κ, $c_{0\rho}$ içinde AK özelliğine sahiptir. Böylece Tanım 4. 1. 2. 1 den ispat tamamlanır.

Teorem 4. 1. 2. 6. A matrisi (X, Y)-conull ve $Y \subset Z$ olsun. Bu taktirde A matrisi (X, Z)-conull dır.

İspat: Özel olarak $X = c_\rho$ alalım. Hipotezden ve $c_\rho \subset Y_A \subset Z_A$ içermesi mevcut olduğundan ispat açıktır.

Şimdi ise Banach-Steinhaus tipi teoremi verelim.

Teorem 4. 1. 2. 7. A reel ya da kompleks terimli bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler gerçeklenir.

$$\text{i) } A \in (m_\rho, c_\pi) \Rightarrow \chi_{c_\rho}^{c_\pi}(A) = 0,$$

$$\text{ii) } A \in (m^v, c_\pi) \Rightarrow \chi_{c^v}^{c_\pi}(A) = 0,$$

$$\text{iii) } A \in (m_\rho, c^\lambda) \Rightarrow \chi_{c_\rho}^{c^\lambda}(A) = 0,$$

$$\text{iv) } A \in (m^v, c^\lambda) \Rightarrow \chi_{c^v}^{c^\lambda}(A) = 0.$$

İspat: i) $A \in (m_\rho, c_\pi)$ ise $A \in (c_\rho, c_\pi)$ olur. Böylece Teorem 3. 2. 2. 2 den

$$\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_{nk}}{\pi_n} - \lim_{\pi A} \delta^k \right| \rho_k = 0$$

olup

$$\lim_{\pi A} \rho = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} \rho_k = \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \lim_{\pi A} \delta^k$$

elde edilir. Dolayısıyla Teorem 4. 1. 2. 1 den (i) ispat elde edilir.

Benzer şekilde (ii), Teorem 3. 2. 2. 4 ve Teorem 4. 1. 2. 2 den, (iii) Teorem 3. 2. 3. 3 ve Teorem 4. 1. 2. 5 ten ve (iv) ise Teorem 3. 2. 3. 4 ve Teorem 4. 1. 2. 4 ten kolayca elde edilir.

4. 1. 3. Oran Uzayları Üzerinde Mazur Tipi Matrisler

Bu kısımda çok fazla ayrıntıya girmeden Mazur tipi matrislere ilişkin çeşitli sonuçları ele alacağız.

Tanım 4. 1. 3. 1. $A=(a_{nk})$ ve $B=(b_{nk})$, (n, k=1,2,3, …) reel ya da kompleks terimli matris olsunlar. C=A.B matrisini

$$C=(c_{nk})=a_{n1}b_{n,k-1}+a_{n2}b_{n,k-2}+...+a_{n,k-1}b_{n1}$$

biçiminde tanımlayalım.

Tanım 4. 1. 3. 2. $L=\left\{x\in c_{\pi A}:\left(tA\right)x=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}t_n a_{nk}x_k \text{ mevcuttur}\right\}$,

$$I=\left\{x\in c_{\pi A}:\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{\pi}x_k \text{ yakınsak}\right\},$$

$$F=\left\{x\in c_{\pi A}:\forall f\in c'_{\pi A} \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty}x_k f\left(\delta^k\right) \text{ yakınsak}\right\},$$

$$W(c_{\pi A})=\left\{x\in c_{\pi A}:\forall f\in c'_{\pi A} \quad \text{için} \quad f(x)=\sum_{k=1}^{\infty}x_k f\left(\delta^k\right)\right\}$$

$$\Lambda(x)=\lim\nolimits_{\pi A} x-\sum_{k=1}^{\infty}a_k^{\pi}x_k \qquad \forall x\in I,$$

$$P=\left\{x\in c_{\pi A}:t(Ax)=(tA)x,\ \pi.t\in\ell\right\}.$$

Burada hemen belirtelim ki $L\subset P$ dır.

Tanım 4. 1. 3. 3. $A=(a_{nk})\in\left(c_\rho,c_\pi\right)$ olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty}t_n a_{nk}=0$ olması ∀n∈ℕ için $t_n=0$ olmasını gerektiriyorsa A matrisine $M\left(c_\rho,c_\pi\right)$ tipindedir denir.

Teorem 4. 1. 3. 1. Eğer A, c_π-reversible matris ise bu taktirde $\chi\left(f\right)=\mu\chi\left(A\right)$ dır.

İspat: $\forall f\in c'_{\pi A}$ için Önerme 4. 1. 1. 3 ten f fonksiyonu

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k+\mu\lim_{\pi A}x$$

gösterimine sahiptir. Özel olarak $x=\delta^k$ alınırsa

$$\sum_{k=1}^{\infty}f(\delta^k)=\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}t_n a_{nk}+\mu\sum_{k=1}^{\infty}a_k^\pi$$

olur. Şimdi ise x=e alalım. Bu durumda

$$f(e)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}+\mu a^\pi$$

olup $\chi\left(f\right)=f(e)-\sum_{k=1}^{\infty}f\left(\delta^k\right)=\mu\left(a^\pi-\sum_{k=1}^{\infty}a_k^\pi\right)$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4. 1. 3. 2. $A\in\left(c_\rho,c\right)$ ve $B\in\left(c_\rho,c\right)$ olsun. Bu durumda C matrisi C=A.B olmak üzere $C\in\left(c_\rho,c\right)$ dır.

İspat: Kabul edelim ki n⟶∞ iken $a_{nk}\to a_k$ ve $b_{nk}\to b_k$ olsun. Bu nedenle $c_{nk}\to a_1b_{k-1}+a_2b_{k-2}+...+a_{k-1}b_1$ olur. Ayrıca n⟶∞ iken

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\rho_k\to a^{\rho 1}\ \text{ve}\ \sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}\rho_k\to b^{\rho 1}$$

olur. Fakat $\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}\rho_k=\left(\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\rho_k\right)\left(\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}\rho_k\right)$ olduğundan $\sum_{k=1}^{\infty}c_{nk}\rho_k\to a^{\rho 1}b^{\rho 1}$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4. 1. 3. 3. f lineer fonksiyoneli için $f \in c'_{\pi A}$ gerçeklensin. Bu durumda $\forall x \in c_{\pi A}$ için

$$f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(\delta^k) = \alpha \Lambda(x) + t(Ax) - (tA)x$$

dır.

İspat: $f \in c'_{\pi A}$ olduğundan Önerme 4. 1. 1. 2 den f, (13) gösterimine sahip olup burada özel olarak $x = \delta^k$ alınırsa

$$f(\delta^k) = t_k + \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk} + \alpha a_k^{\pi} \tag{15}$$

olur. Bu nedenle $t_k = f(\delta^k) - \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk} - \alpha a_k^{\pi}$ eşitliği Önerme 4. 1. 1. 2 de yerine yazılırsa

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} \left[f(\delta^k) - \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk} - \alpha a_k^{\pi} \right] x_k + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k + \alpha \lim_{\pi A} x$$

olup böylece

$$f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(\delta^k) = \alpha \Lambda(x) + t(Ax) - (tA)x$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4. 1. 3. 4. Eğer c_0, L içinde yoğun değilse bu durumda L=I dır. Ayrıca L=F ve $L \neq W$ dır.

İspat: Tanım 4. 1. 3. 2 den t(Ax)=(tA)x olup $f \in c'_{\pi A}$ için

$$f(x) - \sum_{k=1}^{\infty} x_k f(\delta^k) = \alpha \Lambda(x) \tag{16}$$

sağlanır. Eğer c_0 içinde f=0 ise $f(\delta^k) = 0$ dır. Böylece (16) dan $f(x) = \alpha \Lambda(x)$ elde edilir. Eğer L üzerinde $f \neq 0$ ise bu durumda x∈L dır. Bu ise $L \subset I$ olmasını gerektirir. Her zaman $I \subset L$ içermesi mevcut olduğundan L=I dır. Böylece F=L∩I ve I=L olduğundan F=L olur. Bu sebeple f=μΛ ve L üzerinde $\mu \neq 0$ olduğundan $L \neq W$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Aşağıdaki teoremi vermeden önce bir A matrisinin m çarpımsal olmasını tanımlayalım. A reel ya da kompleks terimli bir matris olmak üzere $\lim_A x = m \lim x$ olacak şekilde bir m tamsayısı varsa A matrisine m çarpımsaldır denir.

Teorem 4. 1. 3. 5. $A \in (c_\pi, c_\pi)$ olsun. A, c_π-reversible ve çarpımsal bir matris olmak üzere A matrisinin $M(c_\pi, c_\pi)$ tipinde olması için gerek ve yeter şart $\overline{c}_0$, $c_{\pi A}$ uzayının da maximal lineer bir alt uzay olmasıdır. Burada c_0 ın kapanışı $c_{\pi A}$ içindedir.

İspat: Gereklilik: Kabul edelim ki c_0 üzerinde f=0 olsun. A matrisi c_π-reversible olduğundan f lineer fonksiyoneli Önerme 4. 1. 1. 3 ten

$$f(x) = \alpha \lim_{\pi A} x + t(Ax)\,,\ (t_n \pi_n) \in \ell \tag{17}$$

gösterimine sahip olup f=0 ise $f\left(\delta^k\right) = 0$ dır. Özel olarak $x = \delta^k$ seçilirse

$$0 = f(\delta^k) = \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\delta^k + \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\delta^k$$

$$= \alpha \lim_{n\to\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} + \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk}$$

$$= \alpha a_k^\pi + \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk} \tag{18}$$

elde edilir. Ayrıca A matrisi çarpımsal olduğundan $x = \delta^k$ alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\, \delta^k = m \lim_{k\to\infty} \delta^k$$

$$\lim_{n\to\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} = 0$$

olup (18) de yerine yazılır ise $\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk} = 0$ bulunur. A matrisi, $M(c_\pi, c_\pi)$ tipinde olduğundan her n için $t_n = 0$ olup (18) den

$$f(x) = \alpha \lim_{\pi A} x$$

dır. Bu ise $\overline{c}_0 = c_{\pi A}$ veya $\overline{c}_0$, $c_{\pi A}$ uzayının bir maximal lineer alt uzaydır. Halbuki; $\overline{c}_0 \neq c_{\pi A}$ olduğundan $\overline{c}_0$, $c_{\pi A}$ uzayının bir maximal lineer alt uzaydır.

Yeterlilik: Kabul edelim ki A matrisi $M(c_\pi, c_\pi)$ tipinde olmasın. Bu taktirde her n için

$$\sum_{n=1}^{\infty} |t_n \pi_n| < \infty, \ t_n \neq 0$$

ve

$$\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk} = 0, k = 1, 2, 3, ...$$

dır. Özel olarak $f(x) = t(Ax)$ seçelim. A matrisi c_π-reversible olduğundan her zaman $\lim_{\pi A}$ ve $\sum_{k=1}^{\infty} t_k a_k^\pi$ lineer bağımsızdır. Böylece hem f hem de $\lim_{\pi A}$, $\overline{c}_0$ üzerinde sıfır dır. Dolayısı ile $\overline{c}_0$, $c_{\pi A}$ içinde maximal lineer alt uzay değildir. Bu ise bir çelişki olur ve ispat tamamlanır.

Teorem 4. 1. 3. 6. i) P, $c_{\pi A}$ da kapalı ve $\overline{c} \subset P$ dır.

ii) Eğer A coregüler ise $P = \overline{c}$ dır.

İspat: i) $(t\pi) \in \ell$ olsun. Bu durumda $\forall x \in c_{\pi A}$ için $t(Ax)$ mevcuttur. f_t yi $f_t(x) = (tA)x - t(Ax)$ olarak tanımlayalım. O halde $f_t^\perp = \{x : f_t(x) = 0\}$ dır. Böylece Banach Steinhaus teoreminden f_t süreklidir. Dolayısı ile $f_t^\perp$ kapalıdır. Ancak; $P = \bigcap_t f_t^\perp$ olduğundan P, $c_{\pi A}$ içinde kapalıdır. Her zaman $c \subset P$ olduğundan

$$\bar{c} \subset \bar{P} = P \tag{19}$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

ii) Kabul edelim ki A coregüler matris olsun. $f \in c'_{\pi A}$ olması c üzerinde f=0 olmasını gerektirir. Ancak o zaman

$$f^{\perp} = c = \bar{c} \tag{20}$$

dır. O halde Önerme 4. 1. 1. 2 den

$$f(e) = \alpha \lim_{\pi A} e + t(Ae) + \sum_{k=1}^{\infty} \left[f(\delta^k) - \alpha a_k^{\pi} - \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk} \right] e$$

olup böylece

$$0 = f(e) - \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\delta^k\right) = \alpha \left[\lim_{\pi A} e - \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pi} \right] + t(Ae) - (tA)e$$

$$0 = \chi(f) = \alpha\chi(A) + t(Ae) - (tA)e$$

elde edilir. t(Ae)=(tA)e olduğundan $\alpha\chi(A) = 0$ olup A matrisinin coregüler olmasından $\alpha = 0$ dır. Böylece P üzerinde $f(x) = t(Ax) - (tA)x = 0$ olup

$$P \subset f^{\perp} \tag{21}$$

gerçeklenir. (19) ve (20) göz önüne alındığında

$$P \subset \bar{c} \tag{22}$$

sağlanır. Dolayısı ile (22) ve (19) den $P = \bar{c}$ elde edilir.

4. 1. 4. Oran Uzayları Üzerindeki Matrislerin Conullığı ve Repleaceble Olma Durumu

Bu kısımda Oran FK uzaylarının π-conull'lığı ve repleacable olması tanımlanacaktır. Ayrıca Oran FK uzayları için sınırlı tutarlılık teoremi verilecektir.

Tanım 4. 1. 4. 1. $A \in (c, c_\pi)$ olmak üzere $\chi(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n}$ olsun. Eğer $\chi(A) = 0$ ise bu durumda A matrisine π-conull aksi durumda A matrisine π-coregüler denir.

Teorem 4. 1. 4. 1. $A \in (c, c_\pi)$ olsun. Bu taktirde A matrisinin π-conull olması için gerek ve yeter şart $c_{\pi A}$ uzayının conull olmasıdır.

İspat: Gereklilik: A matrisi π-conull olsun. Bu durumda Tanım 4. 1. 4. 1 den

$$\chi(A) = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} = 0$$

dır. Böylece Teorem 4. 1. 3. 1 den $\chi(f) = 0$ elde edilir. Bu da $c_{\pi A}$ uzayının conull olmasıdır.

Yeterlilik: Kabul edelim ki $c_{\pi A}$ uzayı conull olsun. Özel olarak $f = \lim_{\pi A}$ seçilirse Banach Steinhaus teoreminden $f = \lim_{\pi A} \in c'_{\pi A}$ olur. Böylece $\chi(f) = f(e) - \sum_{k=1}^{\infty} f(\delta^k)$ olup özel olarak f yerine $\lim_{\pi A}$ alınırsa

$$\begin{aligned} \chi(\lim_{\pi A}) &= \lim_{\pi A} e - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\pi A} \delta^k \\ &= \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} \\ &= \chi(A) \end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Bu ise teoremin ispatını tamalar.

Teorem 4. 1. 4. 2. $A \in (c, c_\pi)$, $B \in (c, c_\pi)$ ve $c_{\pi A} \subset c_{\pi B}$ gerçeklensin. Bu durumda eğer A matrisi π-conull ise B matrisi de π-conull dır.

İspat: A matrisi π-conull olsun. Bu taktirde Teorem 4. 1. 4. 1 den $c_{\pi A}$ conull dır. Hipotez ve Teorem 3. 1. 2. 8 den $c_{\pi B}$, π-conull olur. Bu nedenle B matrisi de π-conull elde edilir.

Sonuç 4. 1. 4. 1. $A \in (c, c_\pi)$ olsun. Eğer c, $c_{\pi A}$ uzayında kapalı ise A, π-coregüler bir matristir.

İspat: c, $c_{\pi A}$ da kapalı olsun. Bu durumda Sonuç 3. 1. 2. 1 den $c_{\pi A}$ coregüler uzaydır. O halde Teorem 4. 1. 4. 1 den A matrisi π-coregüler matris olur ki bu da ispatı tamamlar.

Sonuç 4. 1. 4. 2. $A \in (c, c_\pi)$ olsun. Eğer A matrisi π-conull değilse bu durumda $c_{\pi A}$ uzayı AK özelliğine sahip değildir.

İspat: Kabul edelim ki $c_{\pi A}$ uzayı AK özelliğine sahip olsun. O halde $\forall x \in c_{\pi A}$ için $x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \delta^k$ olup $e \in c_{\pi A}$ olduğundan $e = \sum_{k=1}^{\infty} \delta^k$ elde edilir. Eğer $f = \lim_{\pi A} \in c'_{\pi A}$ alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} = \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{n\to\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n}$$

gerçeklenir. Böylece $\chi(f) = 0$ olur. Bu ise çelişki olup ispat tamamlanır.

Teorem 4. 1. 4. 3. $A \in (c, c_\pi)$ verilsin. Bu taktirde $c_{\pi A} \cap m = c_{\pi B} \cap m$ ve $\chi(A) = \chi(B)$ şartlarını sağlayan bir $B \in (c, c_\pi)$ matrisi mevcuttur öyle ki

i) A matrisi π-coregüler ise $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{nk}}{\pi_n} = 1$

ii) A matrisi π-conull ise $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{nk}}{\pi_n} = 0$

gerçeklenir.

İspat: $\frac{b_{nk}}{\pi_n} = \frac{a_{nk}}{\pi_n} - a_k^{\pi}$ olsun. Bu taktirde Önerme 3. 2. 2. 1 den

$$\|B\|_{\infty} = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{b_{nk}}{\pi_n} \right| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_{nk}}{\pi_n} - a_k^{\pi} \right| \le \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{a_{nk}}{\pi_n} \right| + \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k^{\pi} \right|$$

$$\le \|A\|_{\pi} + \sum_{k=1}^{\infty} \left| a_k^{\pi} \right| < \infty$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece $b_k^{\pi} = a_k^{\pi} - a_k^{\pi} = 0$ olup B matrisi çarpımsaldır. Başka bir deyişle $\lim_n \frac{b_{nk}}{\pi_n} = 0$ olup $\chi(B) = \lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{nk}}{\pi_n} = \chi(A)$ dır. $\forall x \in m$ ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{nk}}{\pi_n} x_k - \sum_{k=1}^{\infty} \frac{a_{nk}}{\pi_n} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pi} x_k$$

olduğundan $c_{\pi A} \cap m = c_{\pi B} \cap m$ gerçeklenir. Şimdi ise

$$\frac{b_{nk}}{\pi_n} = \frac{1}{\chi(A)} \left(\frac{a_{nk}}{\pi_n} - a_k^{\pi} \right)$$

eşitliğini göz önüne alalım. Eğer A matrisi π-coregüler ise $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{nk}}{\pi_n} = 1$ ve A matrisi π-conull ise $\lim_n \sum_{k=1}^{\infty} \frac{b_{nk}}{\pi_n} = 0$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4. 1. 4. 1. $A \in (c, c_{\pi})$ olsun. Bu durumda A matrisinin π-coregüler olması için gerek ve yeter şart $e \notin W$ olmasıdır.

İspat: Gereklilik: Kabul edelim ki $e \in W$ olsun. W nın tanımında $f = \lim_{\pi A}$ alınırsa $\chi(A) = 0$ elde edilir. Bu ise çelişki olur ki $e \notin W$ dır.

Yeterlilik: A matrisi π-conull olsun. O halde Teorem 4. 1. 3. 1 den $\chi(f) = 0$ olup $e \in W$ elde edilir bu ise bir çelişki olur ve ispat tamamlanır.

Lemma 4. 1. 4. 2. $A \in (c_\rho, c_\pi)$ ve $x \in c_{\pi A} \cap m_\rho$ olsun. Bu taktirde x∈W olması için gerek ve yeter şart $\Lambda(x) = 0$ olmasıdır.

İspat: Gereklilik: x∈W olsun. Eğer W nın tanımında $f = \lim_{\pi A}$ alınırsa

$$\lim_{\pi A} x = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \lim_{\pi A} \delta^k = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\pi x_k$$

eşitliği elde edilir. Bu ise $\Lambda(x) = 0$ olmasını verir.

Yeterlilik: $\Lambda(x) = 0$ ve $f \in c'_{\pi A}$ olsun. Böylece hipotez ve Lemma 4. 1. 2. 1 den

$$f(x) = \mu \lim_{\pi A} x + sx = \mu \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\pi x_k + sx$$

olur. Ayrıca

$$f(x) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k f\left(\delta^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \left(\mu a_k^\pi + s_k\right)$$

olup x∈W elde edilir.

Teorem 4. 1. 4. 4. $A \in (c, c_\pi)$ ve $B \in (c, c_\pi)$ olsun. Ayrıca $c_{\pi A} \cap m \subset c_{\pi B}$ olmak üzere $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\pi_n} = 1$ gerçeklensin. Eğer A matrisi π-conull ise B matrisi de π-conull dır. Eğer B matrisi π-coregüler ise A matrisi de π-coregüler dir. Eğer $c_{\pi A} \cap m = c_{\pi B} \cap m$ gerçekleniyorsa her iki matris de π-conull ya da π-coregüler dir.

İspat: Burada Teoremin ilk kısmını ispatlamamız yeterli olacaktır. Bunun için D matrisini $D = B - \chi(B)I$ biçiminde tanımlayalım. O halde D matrisi π-conull olup Teorem 4. 1. 4. 1 den $c_{\pi D}$ conull uzay olur. Böylece Teorem 3. 1. 2. 9 dan $c_{\pi A} \cap c_{\pi D}$ de conull uzay olup Teorem 3. 1. 2. 10 dan $c_{\pi A} \cap c_{\pi D}$ sınırlı ıraksak bir x dizisini içerir. Hipotezden $x \in c_{\pi B}$ için $\chi(B)x = Bx - Dx$ olup $\chi(B) = 0$ olur ki bu da ispatı tamamlar.

Lemma 4. 1. 4. 3. $A \in (c_\rho, c_\pi)$ ve $z \in c_{\pi A} \cap m_\pi$ olsun. Bu taktirde z∊W olması için gerek ve yeter şart $A.z = (a_{nk} z_k)$ matrisinin π-conull olmasıdır.

İspat: Lemma 4. 1. 4. 2 den $z \in W \Leftrightarrow \Lambda(z) = 0$ dır. Böylece $\chi(A.z) = \Lambda(z) = 0$ olduğundan ispat tamamlanır.

Lemma 4. 1. 4. 4. $A \in (c, c_\pi)$, $B \in (c, c_\pi)$ ve $c_{\pi A} \cap m \subset c_{\pi B}$ olsun. Bu taktirde $W(c_{\pi A}) \cap m \subset W(c_{\pi B})$ dır.

İspat: Eğer $z \in W(c_{\pi A}) \cap m$ ise bu durumda Lemma 4. 1. 4. 3 ten A.z matrisi π-conull ve Teorem 4. 1. 4. 4 ten B.z matrisi de π-conull dır. Böylece Lemma 4. 1. 4. 3 ten $z \in W(c_{\pi B})$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Şimdi ise sınırlı tutarlılık teoremini verelim.

Teorem 4. 1. 4. 5. A ve B π-coregüler matrisler olmak üzere $A \in (c, c_\pi)$ ve $B \in (c, c_\pi)$ olsun. Ayrıca $c_{\pi A} \cap m \subset c_{\pi B}$ ve x∈c için $\lim_{\pi A} x = \lim_{\pi B} x$ şartları gerçeklensin. Bu taktirde A ve B matrisleri sınırlı diziler için tutarlıdır.

İspat: $b_k^\pi = \lim_{\pi B} \delta^k = \lim_{\pi A} \delta^k = a_k^\pi$ olduğu kolayca görülebilir. $z \in c_{\pi A} \cap m$ olsun. Bu taktirde;

Durum 1: Kabul edelim ki $\Lambda_{\pi A}(z) = 0$ olsun, bu durumda Lemma 4. 1. 4. 3 ve Lemma 4. 1. 4. 4 ten $\Lambda_{\pi B}(z) = 0$ elde edilir. Böylece

$$\lim_{\pi B} z = \sum_{k=1}^{\infty} b_k^\pi z_k \quad \text{ve} \quad \lim_{\pi A} z = \sum_{k=1}^{\infty} a_k^\pi z_k$$

dır.

Durum 2: Kabul edelim ki $\Lambda_{\pi A}(z) \neq 0$ olsun, bu doğrultuda $t = \dfrac{\Lambda_{\pi A}(z)}{\Lambda_{\pi A}(e)}$ olmak üzere y=z-te olsun. Böylece Durum 1 den $\Lambda_{\pi A}(y) = 0$ ve $\lim_{\pi B} y = \lim_{\pi A} y$ elde edilir. $\lim_{\pi B} e = \lim_{\pi A} e$ olduğundan $\lim_{\pi B} z = \lim_{\pi A} z$ olur ki bu da teoremi ispatlar.

Tanım 4. 1. 4. 2. A reel ya da kompleks terimli bir matris olmak üzere eğer $c_{\pi B} = c_{\pi A}$ ve $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\lim_n \frac{b_{nk}}{\pi_n} = 0$ olacak şekilde bir B matrisi varsa A ya c_π-replaceable matris denir.

Tanım 4. 1. 4. 2 de özel olarak π=e alınırsa genel c-replaceable tanımı elde edilir.

A matrisi π-conull olsun. Herhangi bir çarpımsal D matrisi için $c_{\pi A} = c_{\pi D}$ eşitliği mevcut ise bu durumda D matrisi 0-çarpımsal dır. Bunun için $f \in c'_{\pi A}$ olsun. Eğer $f = \lim_{\pi D}$ alınırsa Hahn-Banach teoreminden $\lim_{\pi D} \in c'_{\pi A}$ olup Teorem 4. 1. 3. 1 den

$$\chi(\lim_{\pi D}) = \chi(D) = \mu\chi(A)$$

elde edilir. Böylece hipotezden D matrisi π-conull dır. D matrisi için Önerme 3. 2. 2. 2 den

$$\lim_{\pi D} x = \chi(D)\lim x + \sum_{k=1}^{\infty} d_k^{\pi} x_k$$

olup D, çarpımsal olduğundan $\forall k \in \mathbb{N}$ için $d_k^{\pi} = 0$ dır. O halde

$$\lim_{\pi D} = 0.\lim x$$

gerçeklenir. Diğer yandan π-coregüler A matrisinin c_π-replaceable olması için gerek ve yeter şart $c_{\pi A} = c_{\pi D}$ olacak şekilde regüler bir D matrisinin mevcut olmasıdır.

Teorem 4. 1. 4. 6. A, π-coregüler bir matris olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler denktir:

i) A, c_π-replaceable bir matristir.

ii) $e \notin \overline{c_0}$ (kapanış $c_{\pi A}$ içinde alınıyor)

iii) $e \notin \overline{\phi}$ (kapanış $c_{\pi A}$ içinde alınıyor)

iv) lim, $c_{\pi A}$ nın alt uzayı olarak göz önüne alınan c üzerinde süreklidir.

v) x⟶βx dönüşümü, $c_{\pi A}$ nın alt uzayı olarak göz önüne alınan c üzerinde süreklidir.

İspat: Biliyoruz ki X ve Y FK uzayları olması halinde, X⊂Y ve E⊂X ise $\overline{E_Y} = \overline{(E_X)}$ ve özel olarak $\overline{E_X} \subset \overline{E_Y}$ dır (Wilansk 1984, S. 57).

(ii)⟺(iii): Yukarıda $Y = c_{\pi A}$, $X = c_0$ ve E=ϕ alınması yeterlidir.

(i)⟹(iv): Kabul edelim ki A, c_π-replaceable bir matris olsun. Bu durumda Tanım 4. 1. 4. 2 den regüler bir D matrisi vardır, öyle ki $c_{\pi A} = c_{\pi D}$ sağlanır. Ayrıca $\lim_{\pi D} \in c'_{\pi A}$ dır. O halde c üzerinde $\lim_{\pi D} = \lim$ gerçeklenir. Dolayısı ile topolojinin invariant olmasından süreklilik garanti edilir.

(iv)⟹(i): $f \in c'_{\pi A}$ olsun. Hahn-Banach teoreminden c üzerinde f=lim dır. Böylece Teorem 4. 1. 3. 1 den $1 = \chi(f) = \mu\chi(A)$ elde edilir. A, π-coregüler matris olduğundan $\mu \neq 0$ dır. Teorem 3. 1. 2. 3 ten ispat elde edilir.

(iv)⟹(ii): $c_0 \subset c_{\pi A}$ içermesi mevcut olup c_0 üzerinde lim=0 ve lime=1 dir. Hahn-Banach teoreminden $e \notin \overline{c}_0$ elde edilir.

(ii)⟹(iv): c içinde, $c_{\pi A}$ topolojisine göre c_0 yoğun olmayan maksimal alt uzaydır. Böylece Teorem 3. 1. 2. 4 ten kapalıdır. Ancak $f^{\perp} = \lim^{\perp} = c_0$ olup Teorem 3. 1. 2. 4 ten lim süreklidir.

(iv)⟺(v): Önerme 3. 2. 2. 2 den ∀x∈c için

$$\lim_{\pi A} x = \chi(A)\lim x + \sum_{k=1}^{\infty} a_k^{\pi} x_k$$

olup $\lim_{\pi A}$ sürekli ve ayrıca $\chi(A) \neq 0$ olduğundan denklik elde edilir.

Teorem 4. 1. 4. 7. Eğer c_0 uzayı P içinde yoğun değilse A c_π-replaceable bir matristir.

İspat: $f \in c'_{\pi A}$ olmak üzere c_0 üzerinde f=0 olsun. Bu taktirde $f\left(\delta^k\right)=0$ dır. Önerme 4. 1. 1. 2 den

$$f(x)=\mu \lim_{\pi A} x + t\left(Ax\right)+\sum_{k=1}^{\infty}\left[-\mu a_k^{\pi}-\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk}\right]x_k$$

elde edilir. Eğer μ=0 ise P üzerinde f=0 olup Hahn-Banach teoreminden $P \subset \overline{c}_0$ gerçeklenir. Böylece Teorem 4. 1. 3. 6 dan $P=\overline{c}_0$ elde edilir. O halde μ≠0 olup Teorem 4. 1. 1. 2 den $c_{\pi D}=c_{\pi A}$ ve $\lim_{\pi D} f=0$ şartlarını gerçekleyen bir D matrisi vardır. Eğer $x=\delta^k$ alınırsa

$$f(\delta^k)=\lim_{\pi D}\delta^k=\lim_{n}\frac{d_{nk}}{\pi_n}=0$$

elde edilir ki bu da teoremi ispatlar.

Teorem 4. 1. 4. 8. A, π-coregüler bir matris olsun. Bu durumda A matrisinin c_π-replaceable olması için gerek ve yeter şart c_0 ın P içinde yoğun olmamasıdır.

İspat: Hipotez ve Teorem 4. 1. 3. 6 dan $P=\overline{c}$ olup A matrisi c_π-replaceable olduğundan Teorem 4. 1. 4. 6 dan $e \notin \overline{c}_0$ elde edilir. Böylece $P=\overline{c}_0$ gerçeklenir. O halde Teorem 4. 1. 4. 7 den ispat elde edilir.

Her bir $f \in c'_{\pi A}$ nın bütün gösterimleri Önerme 4. 1. 1. 2 de olduğu gibi aynı bir μ ye bağlı ise A matrisine μ-tektir denir. Şimdi de μ-tek olmaya ilişkin aşağıdaki teoremi verelim.

Teorem 4. 1. 4. 9. μ-tek olmayan bir matris c_π-replaceable olmalıdır.

İspat: μ≠0 olmak üzere $c_{\pi A}$ üzerinde f=0 dır. Teorem 4. 1. 1. 2 den $c_{\pi D}=c_{\pi A}$ ve $\lim_{\pi D}=0$ şartlarını gerçekleyen bir D matrisi mevcut olup A, c_π-replaceable bir matristir.

4. 1. 5. Oran FK Uzayları Üzerindeki Bazı Uygulamalar

Bu kısımda $A, B \in (c_\rho, c_\pi)$ olmak üzere;

i) $\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)$,

ii) $\chi(f) = \mu\chi(A)$,

iii) A matrisinin $M(c_\rho, c_\pi)$ tipinde olması durumu

ve

iv) A matrisinin perfect olması şartları

ele alınacaktır. Burada hemen belirtelim ki; eğer $\overline{c}_\pi = c_{\pi A}$ ise bu durumda A matrisine perfecttir denir.

Tanım 4. 1. 5. 1. A matrisi c_π-reversible ve $A \in (c_\rho, c_\pi)$ olsun. Bu durumda $\forall f \in c'_{\pi A}$ için $\rho = \{\rho_1, \rho_2, ..., \rho_k, ...\}$ ve $\rho^k = \left\{0, 0, ..., 0, \underset{k.\text{terim}}{\rho_k}, 0, 0, ...\right\}$ olmak üzere

$$\chi(f) = f(\rho) - \sum_{k=1}^{\infty} f(\rho^k)$$

dır.

Şimdi Teorem 4. 1. 5. 1 in ispatında kullanacağımız Lemma'yı ispatsız olarak ifade edelim.

Lemma 4. 1. 5. 1. B matrisi conull olmak üzere $A, B \in (c_\rho, c_\pi)$ olsun. Bu durumda AB matrisi de conull dır.

Teorem 4. 1. 5. 1. $A, B \in (c_\rho, c_\pi)$ olsun. Bu taktirde $\forall f \in c'_{\pi A}$ için $\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)$ gerçeklenir.

İspat: $T=(t_{nk})$ matrisini

$$t_{nk}=\begin{cases}\dfrac{\pi_n}{\rho_n} & \text{eğer } k=n,\\ 0 & \text{d.d.}\end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Bu durumda

$$\chi(T)=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\frac{t_{nk}}{\pi_n}\rho_k-\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{n\to\infty}t_{nk}\frac{\rho_k}{\pi_n}$$

olup $\chi(T)=1-0\neq 0$ elde edilir.

Özel olarak $D=B-\chi(B)T$ alınırsa $\chi(D)=0$ olup Lemma 4. 1. 5. 1 den $\chi(AD)=0$ dır. Ayrıca

$$D=B-\chi(B)T$$

$$AD=AB-A\chi(B)T$$

$$\chi(AD)=\chi(AB)-\chi(A)\chi(B)=0$$

olup bu da $\chi(AB)=\chi(A)\chi(B)$ eşitliğini verir. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4. 1. 5. 2. $A\in(c_\rho,c_\pi)$ ve A matrisi c_π-reversible olsun. Bu taktirde $\forall f\in c'_{\pi A}$ için

$$\chi(f)=\mu\chi(A)$$

dır.

İspat: Hipotez ve Önerme 4. 1. 1. 3 ten $\forall x\in c_{\pi A}$ için f fonksiyonu

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}t_n\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}x_k+\mu\lim_{\pi A}x$$

gösterimine sahiptir. Sırası ile x=ρ ve $x=\rho^k$ alınırsa

$$f(\rho)=\sum_{n=1}^{\infty} t_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\rho_k + \mu a^{\rho\pi}$$

ve

$$f\left(\rho^k\right)=\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk}\rho_k + \mu\rho_k a_k^{\pi}$$

olup

$$\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|t_n\, a_{nk}\, \rho_k\right| = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty}\left|\frac{t_n}{\pi_n}\pi_n\, a_{nk}\, \rho_k\right| \le \|A\|\sum_{n=1}^{\infty}\left|\, t_n\pi_n\,\right|$$

eşitsizliğinden $\sum_{k=1}^{\infty}\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk}\rho_k$ serisi mutlak yakınsaktır. Dolayısı ile

$$\chi(f)=\mu\chi(A)$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4. 1. 5. 3. Eğer A matrisi $M(c,c_\pi)$ ve B matrisi $M(c_\rho,c)$ tipinde ise AB matrisi $M\left(c_\rho,c_\pi\right)$ tipindedir.

İspat: İlk önce not edelim ki eğer $A\in\left(c,c_\pi\right)$ve $B\in\left(c_\rho,c\right)$ ise bu durumda $\forall x\in c_\rho$ için $\|B\|=\sup_n\sum_{k=1}^{\infty}\left|b_{nk}\right|\rho_k<\infty$ olduğundan A(Bx)=AB(x) ve $AB\in\left(c_\rho,c_\pi\right)$ elde edilir. Burada $x\in m_\rho$ ve $\left\{a_{nk}\rho_k\right\}\in\ell$ dır. $c_{nk}=\sum_{i=1}^{\infty}a_{ni}b_{ik}$, $(n,k=1,2,...)$ olmak üzere C=AB olsun. O halde $\left\{t_n\pi_n\right\}\in\ell$ için

$$\sum_{k=1}^{\infty} t_n c_{nk}=0,\ (n,k=1,2,...)$$

olup dolayısı ile $s_i = \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{ni}$ olmak üzere

$$0 = \sum_{n=1}^{\infty} t_n c_{nk} = \sum_{i=1}^{\infty} s_i b_{ik}$$

elde ederiz. Ancak

$$\sum_{i=1}^{\infty} |s_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{ni} \right| \le \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \sum_{n=1}^{\infty} |a_{ni}|$$

ve $A \in (c, c_\pi)$ olduğundan $\exists M > 0$ vardır öyle ki ∀n∈ℕ için

$$\sum_{i=1}^{\infty} \frac{|a_{ni}|}{\pi_n} \le M$$

sağlanır. Dolayısı ile $\{t_n \pi_n\} \in \ell$ olduğundan

$$\sum_{i=1}^{\infty} |s_i| \le \sum_{n=1}^{\infty} |t_n| \pi_n M < \infty$$

$$\sum_{i=1}^{\infty} |s_i| < \infty$$

elde ederiz. B matrisi $M(c_\rho, c)$ tipinde olduğundan ∀i için $s_i = 0$ ve $t_n = 0$ dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4. 1. 5. 4. $A \in (c_\rho, c_\pi)$ olsun. Eğer A matrisi (c_ρ, c_π)-conull ise bu durumda $c_{0\pi}$, c_π içinde yoğundur.

İspat: $f \in c'_{\pi A}$ olmak üzere $c_{0\pi}$ içinde f=0 olsun. Bu durumda $\chi(A) = 0$ olup Teorem 4. 1. 5. 2 den $\chi(f) = 0$ dır. Böylece Hahn-Banach teoreminden

$$\chi(f) = 0 \Rightarrow f(\rho) = 0$$

$$\Rightarrow \rho \in \overline{c}_{0\pi}$$

$$\Rightarrow \overline{c}_{0\pi} = c_\pi$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4. 1. 5. 5. $A \in (c_\rho, c_\pi)$ olmak üzere A matrisi c_π-reversible ve coregüler olsun. Bu durumda A matrisinin $M(c_\rho, c_\pi)$ tipinde olması için gerek ve yeter şart A nın perfect olmasıdır.

İspat: Gereklilik: $f \in c'_\pi$ ve f, c_π üzerinde sıfır dizisi olsun. Bu durumda $\chi(f) = 0$ ve Teorem 4. 1. 5. 2 den $\mu\chi(A) = 0$ olup hipotezden $\mu = 0$ elde edilir.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sum_{n=1}^{\infty} a_{nk} x_k = 0$$

eşitliğinde özel olarak $x = \delta^k$ alınırsa $\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk} = 0$ elde edilir. A matrisi $M(c_\rho, c_\pi)$ tipinde olduğundan ∀n∈ℕ için $t_n = 0$ olup f, $c_{\pi A}$ üzerinde bir sıfır dizisidir. Böylece Hanh Banach teoreminden ispat elde edilir.

Yeterlilik: Kabul edelim ki f fonksiyonu c_π üzerinde sıfır dizisi olsun. Bu durumda

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} t_n \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k = \sum_{k=1}^{\infty} x_k \sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk}$$

olmak üzere ∀k için $\sum_{n=1}^{\infty} t_n a_{nk} = 0$ olsun. Dolayısı ile $c_{\pi A}$ üzerinde de sıfır dizisidir. Şimdi ise n'yi fix edip x'i $Ax = \pi^n$ olacak biçimde seçelim. Bu taktirde $\forall n \in$ için $t_n = f(x) = 0$ olduğundan A matrisi $M(c_\rho, c_\pi)$ tipindedir.

Teorem 4. 1. 5. 6. Eğer $c_{\pi A} \subset c_{\pi B}$ ve A matrisi (c_ρ, c_π)-conull ise bu taktirde B matrisi de (c_ρ, c_π)-conull dır.

İspat: $\mu \neq 0$ olsun. Bu durumda Teorem 4. 1. 5. 2 ve hipotezden $\chi(f) = 0$ dır. Özel olarak $f = \lim_{\pi B}$ alınırsa $\chi(\lim_{\pi B}) = 0$ olup

$$\lim_{\pi B}(\rho)-\sum_{k=1}^{\infty}\lim_{B}\left(\rho^{k}\right)=0$$

elde edilir. Ancak

$$\lim_{\pi B}(\rho)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi_n}\sum_{k=1}^{\infty}b_{nk}\rho_k=b^{\pi\rho}$$

ve

$$\lim_{\pi B}\left(\rho^{k}\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\pi_n}b_{nk\rho_k}=b_k^{\pi}\rho_k$$

olduğundan $\chi(B)=b^{\pi\rho}-\sum_{k=1}^{\infty}\rho_k b_k^{\pi}=0$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

4. 2. MONOTON NORM ve DUAL UZAYLAR

4. 2. 1. Monoton Normlar ve Oran Uzayları

Bu kısımda [16] da tanımlanan bazı Oran FK uzaylarını ele alıp bu uzayların monotonluk özelliklerini inceleyeceğiz. Bunun için $\mathcal{B}$, Tanım 3. 1. 1. 6 daki gibi değişmeli bir Banach cebiri olsun. O halde $\forall a\in\mathcal{B}$ için $\|e\|=1$ olmak üzere ae=ea=a gerçeklensin. Bu durumda $x=(x_k)$ vektör dizisi olmak üzere aşağıdaki vektör dizi uzaylarını göz önüne alalım

$$C_0=\left\{x=(x_k):\|x_k\|\to 0\ ,\ k\to\infty\right\},$$

$$C=\left\{x=(x_k):\|x_k\|\to\lambda,\ k\to\infty,\ \lambda\in B\right\},$$

$$\ell=\left\{x=(x_k):\sum_{k=1}^{\infty}\|x_k\|<\infty\right\},$$

$$m=\left\{x=(x_k):\|x_k\|\le M\ \ \forall k\in\mathbb{N}\ ,\ M>0\right\},$$

$$bv = \left\{ x = (x_k) : \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - x_{k+1}\| < \infty \right\},$$

$$h_1 = \left\{ x \in B : \sum_{n=1}^{\infty} n\|x_n - x_{n+1}\| \text{ yakınsak} \right\}.$$

Tanımlardan kolayca görülebilir ki $C_0 \subset C \subset m$ gerçeklenir. C_0, C, m vektör dizi uzayları üzerindeki norm $\|\|x\|\|_\infty = \sup_k \|x_k\|$, ℓ vektör dizi uzayı üzerindeki norm $\|\|x\|\|_1 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\|$ ve bv vektör dizi uzayı üzerindeki norm ise $\|\|x\|\|_2 = \sum_{k=1}^{\infty} \|x_k - x_{k+1}\|$ dır.

Tanım 4. 2. 1. 1. $\pi = (\pi_n)$ pozitif sayıların bir dizisi olmak üzere $0 < \pi_k < \pi_{k+1}$ ve $\sup_k \pi_k = \infty$ şartları gerçeklensin. O halde

$$m_\pi = \left\{ x = (x_k) : \|\|x\|\|_\pi = \sup_k \left\| \frac{x_k}{\pi_k} \right\| < \infty \right\},$$

$$\ell_\pi = \left\{ x = (x_k) : \|\|x\|\|_\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{x_k}{\pi_k} \right\| < \infty \right\},$$

$$(bv)_\pi = \left\{ x = (x_k) : \|\|x\|\|_\pi = \sum_{k=1}^{\infty} \left\| \frac{x_k}{\pi_k} - \frac{x_{k+1}}{\pi_k} \right\| < \infty \right\}.$$

dır.

Tanım 4. 2. 1. 2. X bir Banach Cebiri olsun. Bu durumda $\forall$ m>n için

$\left\|\left\|x^{(m)}\right\|\right\| \geq \left\|\left\|x^{(n)}\right\|\right\|$ ve $\|x\| = \sup \left\|\left\|x^{(m)}\right\|\right\|$ şartları gerçekleniyorsa X'e monoton norma sahiptir denir.

Teorem 4. 2. 1. 1. m_π vektör dizi uzayı monoton norma sahiptir.

İspat: $x=(x_k)\in m_\pi$ olsun. Tanım 4. 2. 1. 1 den $|||x|||=\sup_k\left\|\frac{x_k}{\pi_k}\right\|<\infty$ gerçeklenir.

n<m için

$$|||x^{(n)}|||=\sup\left\{\left\|\frac{x_1}{\pi_1}\right\|,\left\|\frac{x_2}{\pi_2}\right\|,....,\left\|\frac{x_n}{\pi_n}\right\|\right\}\le\sup\left\{\left\|\frac{x_1}{\pi_1}\right\|,...,\left\|\frac{x_n}{\pi_n}\right\|,\left\|\frac{x_{n+1}}{\pi_{n+1}}\right\|,...,\left\|\frac{x_m}{\pi_m}\right\|\right\}=|||x^{(m)}|||$$

olup

$$|||x^{(n)}|||\le|||x^{(m)}||| \tag{23}$$

elde edilir.

$|||x^{(n)}|||$ monoton artan ve üstten sınırlı olduğundan supremumuna yakınsar.

Dolayısı ile

$$\lim_{n\to\infty}|||x^{(n)}|||=\sup_n|||x^{(n)}|||=|||x||| \tag{24}$$

olup (23) ve (24) ten ispat tamamlanır.

Teorem 4. 2. 1. 2. ℓ_π vektör dizi uzayı monoton norma sahiptir.

İspat: $x\in\ell_\pi$ verilsin. Bu taktirdeTanım 4. 2. 1. 1. den n<m için

$$|||x^{(n)}|||=\sum_{k=1}^{n}\left\|\frac{x_k}{\pi_k}\right\|\le\sum_{k=1}^{m}\left\|\frac{x_k}{\pi_k}\right\|=|||x^{(m)}|||$$

olur ve

$$|||x^{(n)}|||\le|||x^{(m)}||| \tag{25}$$

elde edilir.

$\left\|x^{(n)}\right\|$ monoton artan ve sınırlıdır. Dolayısı ile supremumuna yakınsar.

Böylece

$$\lim_{n\to\infty} \left\|x^{(n)}\right\| = \sup\left\|x^{(n)}\right\| = \|x\| \tag{26}$$

olup (25) ve (26) dan ispat tamamlanır.

Teorem 4. 2. 1. 3. $(bv)_\pi$ vektör dizi uzayı monoton norma sahiptir.

İspat: $x \in (bv)_\pi$ olsun. Tanım 4. 2. 1. 1 den $\forall x \in (bv)_\pi$ için

$\|x\| = \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{\pi_n}\right\| \|x_k - x_{k+1}\| < \infty$ dır. Eğer n<m ise

$$\begin{aligned}\left\|x^{(n)}\right\| &= \sum_{k=1}^{n} \left\|\frac{1}{\pi_n}\right\| \|x_k - x_{k+1}\| \\ &\leq \sum_{k=1}^{m} \left\|\frac{1}{\pi_n}\right\| \|x_k - x_{k+1}\| \\ &= \left\|x^{(m)}\right\|\end{aligned}$$

olup

$$\left\|x^{(n)}\right\| \leq \left\|x^{(m)}\right\| \tag{27}$$

gerçeklenir.

$\left\|x^{(n)}\right\|$ monoton artan ve sınırlı olup supremumuna yakınsar. Yani;

$$\begin{aligned}\sup\left\|x^{(n)}\right\| &= \sup\left(\sum_{k=1}^{n} \left\|\frac{1}{\pi_k}\right\| \|x_k - x_{k+1}\|\right) \\ &= \sum_{k=1}^{\infty} \left\|\frac{1}{\pi_k}\right\| \|x_k - x_{k+1}\| = \|x\| \end{aligned} \tag{28}$$

dır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4. 2. 1. 4. h_1 vektör dizi uzayı monoton norma sahiptir.

İspat: $x \in h_1$ olsun. Böylece $\left\|\|x\|\right\| = \sum_{n=1}^{\infty} n\|x_n - x_{n+1}\| + \lim_{n\to\infty}\|x_n\|$ olmak üzere eğer n<m ise bu durumda

$$\left\|\|x_m\|\right\| = \sum_{i=1}^{n-1} i\,\|x_i - x_{i+1}\| + m\|x_m\| \tag{29}$$

elde edilir. Ancak

$$\begin{aligned}\|x_m\| &= \left\|\sum_{j=m}^{n-1}\left(x_j - x_{j+1}\right) + x_n\right\| \\ &= \sum_{j=m}^{n-1}\left\|\left(x_j - x_{j+1}\right)\right\| + \|x_n\|\end{aligned}$$

olduğundan

$$\sum_{j=m}^{n-1} j\|x_j - x_{j+1}\| + n\|x_n\| \leq \|x_m\| \tag{30}$$

olup (29) ve (30) dan

$$\begin{aligned}\left\|\|x^{(n)}\|\right\| &= \sum_{i=1}^{n} i\|x_i - x_{i+1}\| + n\,\|x_n\| \\ &= \|x\| \end{aligned} \tag{31}$$

dır. Bu ise $\lim_{n\to\infty}\left\|\|x^{(n)}\|\right\| = \|x\|$ olmasıdır. Böylece $\lim_{n} n\|x_n\| = 0$ olup $\left\|\|x^{(n)}\|\right\|$ monoton artan olduğundan

$$\sup_n \left\|\|x^n\|\right\| = \lim_n \left\|\|x^n\|\right\| = \|x\| \tag{32}$$

olup böylece (31) ve (32) den ispat tamamlanır.

4. 2. 2. Bazı Oran Uzaylarının Duali

Şimdi ise bazı Oran FK uzaylarının α ve β- duallerini ele alalım. Burada hemen belirtelim ki eğer $\sup_k |x_k|^{\frac{1}{k}} < \infty$ ise $x = \{x_k\}$ dizisine analitik dizi denir ve analitik diziler uzayı Λ ile gösterilir. Eğer $\lim_{k\to\infty} |x_k|^{\frac{1}{k}} = 0$ ise $x = \{x_k\}$ dizisine tam dizi denir ve tam diziler uzayı Γ ile gösterilir. Buna göre;

$$\Gamma_\pi = \left\{ x : \sup_n \left| \frac{x_n}{\pi_n} \right|^{\frac{1}{n}} < \infty \right\} \text{ ve } \Lambda_{\frac{1}{\pi}} = \left\{ x : \lim_n |x_n \pi_n|^{\frac{1}{n}} = 0 \right\}$$

dır.

Teorem 4. 2. 2. 1. $\left\{ (cs)_{\frac{1}{\pi}} \right\}^\alpha = \ell_\pi$ dır.

İspat: $x \in \left\{ (cs)_{\frac{1}{\pi}} \right\}^\alpha$, fakat $x \notin \ell_\pi$ olsun. Bu durumda her pozitif k tamsayısı için öyle bir $\{n_k\}$ dizisi bulunabilir ki

$$\sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} |\pi_i x_i| > 2^k, \quad k = 1, 2, \ldots$$

sağlanır. Eğer

$$y_i = \begin{cases} \left(\dfrac{-1}{\pi_i} \right)^i \dfrac{1}{\sqrt{2}}, & n_k < i < n_{k+1} \\ 0 & , \text{d.d.} \end{cases}$$

olarak tanımlanır ise

$$\sum_{i=1}^{\infty} y_i \pi_i = \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \pi_i \left(\frac{-1}{\pi_i} \right)^i \frac{1}{\sqrt{2}} \le \sum_{i=n_k+1}^{n_{k+1}} \frac{1}{\sqrt{2}} < \infty$$

olduğundan $\{y_i\} \in (cs)_{\frac{1}{\pi}}$ elde edilir. Halbuki $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| = \infty$ olup bu bir çelişkidir. Dolayısı ile

$$\left\{(cs)_{\frac{1}{\pi}}\right\}^{\alpha} \subset \ell_{\pi}$$

sağlanır.

Diğer taraftan $(cs)_{\frac{1}{\pi}} \subset (c_0)_{\frac{1}{\pi}}$ olduğundan $\left((c_0)_{\frac{1}{\pi}}\right)^{\alpha} \subset \left((cs)_{\frac{1}{\pi}}\right)^{\alpha}$ gerçeklenir. Böylece $\ell_{\pi} \subset \left((c_0)_{\frac{1}{\pi}}\right)^{\alpha} \subset \left((cs)_{\frac{1}{\pi}}\right)^{\alpha}$ olur ki bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4. 2. 2. 2. $\ell_{\frac{1}{\pi}}^{\alpha} = m_{\pi}$ dır.

İspat: $x \in \left(\ell_{\frac{1}{\pi}}\right)^{\alpha}$ olmak üzere kabul edelim ki $x \notin m_{\pi}$ olsun. Bu durumda pozitif sayıların artan bir $\{n_i\}$ dizisi vardır öyle ki $\left|\frac{x_{n_i}}{\pi_i}\right| > i^3$ sağlanır. y_n 'i

$$y_n = \begin{cases} \dfrac{1}{\pi_i i^2} & , n = n_i,\ i \geq 1 \\ 0 & , \text{d.d.} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece $|y_n \pi_i| = \left|\frac{1}{\pi_i i^2} \pi_i\right| < \infty$ olup $y_n \in \ell_{\frac{1}{\pi}}^{\alpha}$ dır. Ancak $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| = \infty$ olup bu bir çelişkidir. O halde $\left(\ell_{\frac{1}{\pi}}\right)^{\alpha} \subset m_{\pi}$ gerçeklenir.

Diğer taraftan $x \in m_{\pi}$ olsun. Bu durumda $\left|\frac{x_i}{\pi_i}\right| \leq M$ olacak şekilde M>0 vardır öyle ki

$$y \in \ell_{\frac{1}{\pi}} \Rightarrow \sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \frac{x_i}{\pi_i} y_i \pi_i \right| \le \sup_i \left| \frac{x_i}{\pi_i} \right| \sum_{i=1}^{\infty} |y_i \pi_i| < \infty$$

sağlanır. Bu ise ispatı tamamlar.

Teorem 4. 2. 2. 3. $\Gamma_\pi^\alpha = \Lambda_{\frac{1}{\pi}}$ dır.

İspat: $x \in \Lambda_{\frac{1}{\pi}}$ olsun. Bu doğrultuda $\forall i > 1$ için $|x_i \pi_i| \le M^i$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. $\varepsilon > 0$ olmak üzere $\varepsilon M < 1$ olsun.

Bu durumda eğer $y \in \Gamma_\pi$ ise $\forall i \ge i_0$ için öyle bir ε seçilir ki $\left| \frac{y_i}{\pi_i} \right| \le \varepsilon^i$ sağlanır. O halde $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| = \sum_{i=1}^{\infty} \left| \pi_i x_i \frac{y_i}{\pi_i} \right| \le \sum_{i=1}^{\infty} (M\varepsilon)^i < \infty$ olup $\Lambda_{\frac{1}{\pi}} \subset (\Gamma_\pi)^\alpha$ gerçeklenir.

Diğer yandan $x \in \Gamma_\pi{}^\alpha$ ve $x \notin \Lambda_{\frac{1}{\pi}}$ olsun. Bu taktirde pozitif sayıların artan bir $\{n_i\}$ dizisi vardır öyleki $|x_{n_i} \pi_{n_i}| > i^{2n}$ gerçeklenir. Kabul edelim ki

$$y_n = \begin{cases} \pi_n i^{-n_i}, & n = n_i \\ 0 & ,\text{d.d.} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\{y_n\} \in \Gamma_\pi$ olup $\sum_{i=1}^{\infty} |x_i y_i| = \infty$ dır. Bu ise bir çelişki olup $x \in \Lambda_{\frac{1}{\pi}}$ dır.

Teorem 4. 2. 2. 4. $(cs)_\pi^\alpha = \ell_{\frac{1}{\pi}}$ dır.

İspat: İlk olarak $(cs)_\pi^\alpha \subset \ell_{\frac{1}{\pi}}$ olduğunu gösterelim. Kabul edelim ki $y \notin (cs)_\pi^\alpha$ olsun. Pozitif sayıların artan bir $\{k_i\}$ dizisi vardır öyle ki $\sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} \left| \frac{y_k}{\pi_k} \right| > 4^i$ gerçeklenir. (x_k) dizisini

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{(-1)^k \pi_k}{2^i} & k_i < k < k_{i+1} \\ 0 & \text{d.d} \end{cases}$$

biçiminde seçelim. Bu durumda $x \in (cs)_\pi$ dır. Ancak

$$\sum_{k=1}^{\infty} |x_k y_k| = \sum_{k=k_i+1}^{k=k_{i+1}} \frac{1}{2^i} \left| \frac{y_k}{\pi_k} \right| \geq \sum_{k=k_i+1}^{k=k_{i+1}} 2^i = \infty$$

olup $y \notin (cs)_\pi^\alpha$ dır. Dolayısı ile $(cs)_\pi^\alpha \subset \ell_{\frac{1}{\pi}}$ sağlanır.

Diğer yandan $(cs)_\pi \subset m_\pi$ olduğundan $m_\pi^\alpha \subset (cs)_\pi^\alpha$ sağlanır. Ayrıca $m_\pi^\alpha = \ell_{\frac{1}{\pi}}$ olduğundan $\ell_{\frac{1}{\pi}} \subset (cs)_\pi^\alpha$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Teorem 4. 2. 2. 5. $c_{0\pi}^\beta \in \ell_{\frac{1}{\pi}}$ dır.

İspat: $t \in \ell_{\frac{1}{\pi}}$ ve $x \in c_{0\pi}$ olsun. Bu taktirde $t \in c_{0\pi}^\beta$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{n} |t_k x_k| = \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{t_k}{\pi_k} x_k \pi_k \right| \leq \sup_k |x_k \pi_k| \sum_{k=1}^{n} \left| \frac{t_k}{\pi_k} \right| \leq \|x\|_\infty \|t\|_1$$

olup $\ell_{\frac{1}{\pi}} \subset c_{0\pi}^\beta$ gerçeklenir.

$tx \notin cs$ ve $t \notin \ell_{\frac{1}{\pi}}$ olsun. Bu durumda pozitif sayıların artan bir $\{n_i\}$ dizisi vardır öyle ki $\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} \pi_k |t_k| > 1$ sağlanır.

$$x_k = \begin{cases} \dfrac{1}{i} \operatorname{sgn} t_k & , \ n_i + 1 \leq k \leq n_{i+1} \\ 0 & , \text{d.d.} \end{cases}$$

olmak üzere $\sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} t_k x_k = \frac{1}{i} \sum_{k=n_i+1}^{n_{i+1}} |t_k| > 1$ olup $c_{0\pi}^{\beta} \subset \ell_{\frac{1}{\pi}}$ içermesi sağlanır. Bu ise ispatı tamamlar.

4. 3. ρ-CONULL FK UZAYLARI

Bu kısımda ρ-conull FK uzayları tanımlanmış ve çeşitli sonuçlar elde edilmiştir.

Tanım 4. 3. 1. X bir Oran FK uzayı olmak üzere $\forall f \in X'$ için

$$\chi(f) = f(\rho) - \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\rho^k\right)$$

olsun. Bu taktirde eğer $\chi(f) = 0$ ise X'e ρ-conull aksi durumda X'e ρ-coregüler uzay denir. Burada

$$\rho = \{\rho_1, \rho_2, \ldots \rho_k, \rho_{k+1}, \ldots\}$$

ve

$$\rho^k = \left\{0, 0, \ldots, 0, \underset{k.\text{terim}}{\rho_k}, 0, 0, \ldots\right\}$$

dır.

Teorem 4. 3. 1. X ve Y Oran FK uzayları olmak üzere $X \subset Y$ olsun. Bu durumda

i) X ρ-conull ise Y de ρ-conull dır.

ii) X, Y de kapalı ve X ρ-coregüler ise Y de ρ-coregüler dir.

İspat:

i) $i : X \to Y$, i(x)=x içerme dönüşümü süreklidir. X ile Y zayıf topolojilere sahip olduğundan bu dönüşüm yine de sürekli olur $([2])$.

X ρ-conull uzay ise $\forall f \in X'$ için $\chi(f) = 0$ dır. $X \subset Y$ olduğundan X'in topolojisi Y'nin X üzerindeki topolojisinden daha geniş olacaktır $([2])$. Böylece $\forall f \in Y'$ için $\chi(f) = 0$ olup Tanım 4. 3. 1 den Y ρ-conull uzaydır.

ii) Eğer X, Y de kapalı ise $i : X \to Y$, i(x)=x dönüşümü içine homeomorfizm olacaktır. Dolayısı ile tersi de süreklidir. Bu durumda Y, ρ-conull ise X de ρ-conull dır.

Teorem 4. 3. 2. $\{X_n\}$ ρ-conull Oran FK uzaylarının bir dizisi olsun. Bu durumda $X = \cap X_n$ de ρ-conull uzaydır.

İspat: $X = \cap X_n$ ve $f \in X'$ olsun. FK uzaylarının ara kesiti de FK uzayı olacağından X bir Oran FK uzayıdır. Bu durumda $g_k \in X'_n$ olmak üzere $f = \sum_{k=1}^{m} g_k$ biçiminde yazılabilir $([2])$. O halde

$$\chi(f) = f(\rho) - \sum_{j=1}^{\infty} f(\rho^j)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} g_k(\rho) - \sum_{j=1}^{\infty}\sum_{k=1}^{m} g_k(\rho^j)$$

$$= \sum_{k=1}^{m}\left(g_k(\rho) - \sum_{j=1}^{\infty} g_k(\rho^j)\right)$$

$$= \sum_{k=1}^{m} \chi(g_k) = \sum_{k=1}^{m} 0 = 0$$

olur ki bu da ispatı tamamlar.

Tanım 4. 3. 2. $\forall x \in c_\rho$ için $(Ax)_n$ dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in c_\rho$ ise A matrisine (c_ρ, c_ρ) konservatif matris denir.

Teorem 4. 3. 3. $A \in (c_\rho, c_\rho)$ ve A c_ρ-reversible bir matris olsun. Bu taktirde A matrisinin ρ-conull olması için gerek ve yeter şart $c_{\rho A}$ da $\rho^{(n)} \xrightarrow{z} \rho$ olmasıdır. Burada $\rho^{(n)} = (\rho_1, \rho_2, ...\rho_n, 0, ...)$ dır.

İspat:

Gereklilik: $\rho^{(n)} = (\rho_1, \rho_2, ...\rho_n, 0, ...)$ olmak üzere $\rho^{(n)} = \sum_{k=1}^{n} \rho^k$ biçiminde ifade edilebilir. Bu taktirde $\forall f \in c'_{\rho A}$ için

$$\rho^{(n)} \xrightarrow{z} \rho \Leftrightarrow f\left(\rho^{(n)}\right) \to f(\rho)$$

$$\Leftrightarrow f\left(\rho^{(n)}\right) = \sum_{k=1}^{n} f\left(\rho^k\right) \to f(\rho)$$

$$\Leftrightarrow \lim_n \sum_{k=1}^{n} f\left(\rho^k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} f\left(\rho^k\right) = f(\rho)$$

$$\Leftrightarrow \chi(f) = 0$$

$\chi(f) = \mu\chi(A)$ olup A ρ-conull ise $\chi(f) = 0$ dır. Dolayısı ile $c_{\rho A}$ da $\rho^{(n)} \xrightarrow{z} \rho$ dır.

Yeterlilik: Özel olarak $f = \lim_{\rho A}$ alınırsa $f \in c'_{\rho A}$ olup

$$\chi(f) = \chi\left(\lim_{\rho A}\right) = \lim_{\rho A} \rho - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_{\rho A}\left(\rho^k\right)$$

$$= \lim_n \frac{1}{\rho_n} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk}\rho_k - \sum_{k=1}^{\infty} \lim_n a_{nk} \frac{\rho_k}{\rho_n}$$

$$= \chi_{c_\rho}^{c_\rho}(A)$$

olur. Eğer $\rho^{(n)} \xrightarrow{z} \rho$ ise bu taktirde $\chi(f) = 0$ olup $\chi_{c_\rho}^{c_\rho}(A) = 0$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

Bu durumda $A \in (c_\rho, c_\rho)$ matrisinin ρ-conull olması için gerek ve yeter şart $c_{\rho A}$ uzayının ρ-conull olmasıdır.

Sonuç 4. 3. 1. Eğer c_ρ, Y de kapalı ise Y ρ-coregüler uzaydır.

İspat: A=I birim matris olmak üzere

$$\chi(I) = \lim_n \frac{1}{\rho_n} \sum_{k=1}^{\infty} I_{nk}\,\rho_k - \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k \lim_n \frac{1}{\rho_n} \sum_{k=1}^{\infty} I_{nk}\,\rho^k$$

$$= \lim_n \frac{1}{\rho_n} I_{nn}\rho_n - \sum_{k=1}^{\infty} \rho_k 0$$

$$\neq 0$$

olduğundan $c_{\rho I}$ uzayı ρ-conull değil, O halde

$$c_{\rho I} = \{x : Ix \in c_\rho\} = c_\rho$$

olduğundan Teorem 4. 3. 3 den c_ρ ρ-conull değildir. Böylece Teorem 4. 3. 1 (ii) den ispat elde edilir.

Sonuç 4. 3. 2. A, ρ-coregüler bir matris olsun. Bu taktirde $m_\rho \cap c_A \subset \overline{c}_\rho$ dır.

İspat: $f \in c'_A$ olmak üzere f, c üzerinde sıfır dizisi olsun. Hipotezden ve Teorem 4. 1. 5. 2 den μ=0 olmalıdır. O halde Lemma 4. 1. 2. 1 de π=e alınırsa $f(x) = sx$ olup seri sonludur. Özel olarak $x = \rho^k$ seçilirse $f(\rho^k) = 0$ olur. Dolayısı ile $c_A \cap m_\rho$ da f=0 dır. Hahn-Banach teoreminden ispat tamamlanır.

Teorem 4. 3. 4. X bir ρ-conull FK uzayı olsun. A reel ya da kompleks terimli bir matris olmak üzere $c_{\rho A} \supset X \cap m$ ise A matrisi ρ-conulldır.

İspat: B matrisini $B := A - \chi_{c_\rho}^{c_\rho}(A)I$ biçiminde tanımlayalım. O halde $\chi_{c_\rho}^{c_\rho}(B) = 0$ olup Tanım 4. 3. 1 den B matrisi ρ-conull olur. Böylece Teorem 3. 1. 2. 9 dan $c_{\rho B} \cap X$ ρ-conull dır. Bu durumda Teorem 3. 1. 2. 10 dan $c_{\rho B} \cap X$ sınırlı ıraksak bir x dizisini içerir. Hipotezden $x \in c_{\rho A}$ olup $\chi_{c_\rho}^{c_\rho}(A)x = Ax - Bx \in c_\rho$ ve dolayısı ile $\chi_{c_\rho}^{c_\rho}(A) = 0$ elde edilir ki bu da ispatı tamamlar.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5. 1. SONUÇLAR

1. Oran FK uzayı kavramı açıklandı ve bu uzaylara ilişkin çeşitli sonuçlar verildi.

2. A reel ya da kompleks terimli bir matris olmak üzere $A \in (X, c_\pi)$, $A \in (X, c^\lambda)$, $A \in (X, m_\pi)$ ve $A \in (X, m^\lambda)$ biçimindeki matrsi dönüşümleri ve toplanabilirlik alanalarındaki uygulamalar için çeşitli örnekler verildi.

3. Klasikte bilinen Kojima-Schur, Silverman-Toeplitz ve Banach Steinhaus teoremlerin analogları Oran FK uzayları için verildi.

4. $A \in (c_\rho, c_\pi)$ olmak üzere

i) $\chi(AB) = \chi(A)\chi(B)$,

ii) $\chi(f) = \mu\chi(A)$,

iii) A matrisinin $M(c_\rho, c_\pi)$ tipinde olması durumu

ve

iv) A matrisinin perfect olması şartları

incelendi.

5. Bazı oran uzaylarının monoton normları ve dualleri verildi.

6. ρ-conull FK uzayları tanımlandı ve çeşitli sonuçlar elde edildi.

5. 2. ÖNERİLER

Snyder, A. K. $[3]$ ve Bennet $[4]$ deki teoriyi 4. 3 de verilen tanım ve teoremler için geliştirilebilir.

Jürimäe, E. $[11,12]$ deki çalışmalar fark dizileri için incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Wilansky, A. "An Aplication of Banach linear functionals to summability", Trans. Amer. Math. Soc., 67: 59-68, (1949).

[2] Wilansky, A. "Summability through Functional Analysis" North-Holland, Amsterdam, New York-Oxford, (1984).

[3] Snyder, A. K. "Conull and coregüler FK spaces", Math.Z., 90: 376-381, (1965).

[4] Bennett, G. "A new class of sequence spaces with aplications in summability theory", J. Reine Anew Math., 266: 49-75, (1974).

[5] Kangro, G. "On some investigations on the theory of summability" (in Russian), Eesti NSV Tead. Akad. Toimetised Füüs.-Mat., 16: 255-266, (1967).

[6] Kangro, G. "On the summability factors of the Bohr-Hardy type for a given rapidity.I" (Russian), Eesti NSV Tead. Akad. Toimetised Füüs.-Mat., 18: 137-146, (1969).

[7] Kangro, G. "On λ-perfecticity of summability methods and its applications.I" (Russian), Eesti NSV Tead. Akad. Toimetised Füüs. Mat., 20: 111-120, (1971).

[8] Kangro, G. "On λ-perfecticity of summability methods and its applications.II" (Russian), Eesti NSV Tead. Akad. Toim., Füüs. Matem. 20: 375-385, (1971).

[9] Sikk, J. "Matrix mappings for rate-spaces and K-multipliers in the theory of summability", Tartu Ülik. Toimetised, 846: 118-129, (1984).

[10] Jürimäe, E. "Replaceability for λ-summability", Israel Math.Conference Proc.,4: 157-162, (1991).

[11] Jürimäe, E. "Matrix mappings between rate-spaces and spaces with speed", Acta Comm. Univ. Tartu, 970: 29-52, (1994).

[12] Jürimäe, E. "Properties of domains of mappings on rate-spaces and spaces with speed", Acta Comm. Univ. Tartu, 970: 53-64, (1994).

[13] Beekmann, W. and Chang, S.-C. "λ-convergence and λ-conullity", Z.Anal Anwendungen, 12: 179-182, (1993).

[14] Chandrasekhara Rao, K. and M. Singaravel, T. "On Matrıces of Mazur Type on Rate Spaces", Demonstratio Mathematica, vol. XXXV. No.2: 339-346, (2002).

[15] Chandrasekhara Rao, K. "Some Rate Spaces", Demonstratio Mathematica, Vol. XLII. No.4, (2009).

[16] S. Tamilselvan, K.Vairamancickam and Chandrasekhara Rao K. "Monotone Norms and Rate Spaces", Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 5, No.14, 661-665, (2011).

[17] Chandrasekhara Rao, K. "On Duals of Some Rate Spaces", Int. Journal of Math. Analysis, Vol. 6, No. 16, 775-782, (2012).

[18] Dağadur, İ. "Conullity and Replaceability of Matrices on Rate Spaces", Indian J. Pure appl. Math. 35(5): 563-571, (2004).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Cumali ÇATAL

Doğum Tarihi: 10/10/1988

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Fen-Matematik	Tarsus Abdulkerim Bengi Anadolu Lisesi	2002-2006
Lisans	Matematik	Ankara Ünivrsitesi	2006-2010
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2010-2013