DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

MÜJDE YILMAZTÜRK

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2013

DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

MÜJDE YILMAZTÜRK

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

MERSİN
HAZİRAN – 2013

Müjde YILMAZTÜRK tarafından Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN danışmanlığında " Deferred İstatistiksel Yakınsaklık" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Mikail ET

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

Doç. Dr. İlhan DAĞADUR

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..11../.07./2013.tarih ve ..2013....13.../..384..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

T.C. MERSİN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Müjde YILMAZTÜRK

ÖZ

Bu tezde, istatistiksel yakınsaklık kavramı, Agnew R.P. tarafından [1] çalışmasında tanımlanan deferred Cesáro metodu kullanılarak genelleştirildi.

$p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların

$$p(n)<q(n) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} q(n)=\infty$$

koşulu sağlayan dizileri olmak üzere $x=(x_n)$ reel terimli bir dizi ve $l\in\mathbb{R}$ olsun.

Eğer, $\forall\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n)<k\le q(n):|x_k-l|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

sağlanıyor ise $x=(x_n)$ reel terimli dizisine $l\in\mathbb{R}$ sayısına deferred istatistiksel yakınsaktır denir.

Bulgular bölümünde genel olarak deferred istatistiksel yakınsama ile deferred Cesáro ortalaması, istatistiksel yakınsama gibi metotların kıyaslanması yapıldı. Deferred istatistiksel yakınsamanın $\alpha-$kuvvetli deferred Cesáro yakınsaklık ile ilişkisi incelendi. Ayrıca bir dizinin deferred istatistiksel değme noktası tanımlandı ve ilgili sonuçlar verildi.

Anahtar Kelimeler: Yakınsaklık, kuvvetli yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, deferred istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel kapanış noktası, deferred istatistiksel kapanış noktası.

Danışmanı: Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Matematik Ana Bilim Dalı, Mersin Üniversitesi.

DEFERRED STATISTICAL CONVERGENCE

Müjde. YILMAZTÜRK

ABSTRACT

In this thesis, the concept of statistical convergence is generalized by using deferred Cesáro mean which was defined by Agnew R.P. in the study [1].

Let $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ and $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequences of positive integers satisfying

$$p(n)<q(n) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} q(n)=\infty$$

If $\forall\varepsilon>0$,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|x_k-l\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

hold, than real valued sequence $x=\left(x_n\right)$ is called deferred statistical convergence to $l\in\mathbb{R}$.

In chapter 4, generally deferred statistical convergence is compared some different convergence method such as deferred Cesáro mean, statistical convergence, and etc. The relation between $\alpha-$strongly deferred Cesáro mean and deferred statistical convergence and statistical convergence is investigated.

Also, deferred statistical cluster points of real valued sequence are defined and some related results are given.

Keywords: convergence, strongly convergence, statistical convergence, deferred statistical convergence, statistical cluster point, deferred statistical cluster point.

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Department of mathematics, Mersin University.

TEŞEKKÜR

Agnew'in [1] çalışmasını bize vererek bu çalışmaya başlamamıza önayak olan Sayın Doç.Dr. İlhan DAĞADUR'ya ve çalışmanın her safhasında yakın ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Sayın Doç.Dr. Mehmet KÜÇÜKARSLAN'a teşekkür ve şükranlarımı sunmayı bir borç bilirim.

Bu çalışma maddi ve manevi desteklerini benden esirgemeyen aileme armağanımdır.

İÇİNDEKİLER

SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ

w	$:=\left\{x=(x_k):(x_k)\ reel\ terimli\ dizi\right\}$
c_0	$:=\left\{x=(x_k):\lim\limits_{k\to\infty}x_k=0\right\}$
c	$:=\left\{x=(x_k):\ \exists l\in\mathbb{R},\ \lim\limits_{k\to\infty}x_k=l<\infty\right\}$
ℓ_p	$:=\left\{x=(x_k):\ \sum\limits_{k=1}^{\infty}\lvert x_k\rvert^p<\infty\right\},\ 0<p<\infty$
ℓ_∞	$:=\left\{x=(x_k):\sup\limits_{k\in\mathbb{N}}\lvert x_k\rvert<\infty\right\}$
$E-F$	$:=\left\{x:x\in E\ ve\ x\notin F\right\}$
$E\Delta F$	$:=(E-F)\cup(F-E)$
χ_K	$:=K$ nın karakteristiksel fonksiyonu
$\delta(K)$	$:=K$ kümesinin doğal yoğunluğu
$\delta_{D[p,q]}(K)$	$:=K$ kümesinin deferred istatistiksel yoğunluğu
D	$:=$ Deferred Cesáro yakınsak dizilerin uzayı
S	$:=$ İstatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
DS	$:=$ Deferred istatistiksel yakınsak dizilerin uzayı
$\Gamma(x)$	$:=$ $x=(x_k)$ dizisinin istatistiksel değme noktalarının kümesi
$\Gamma_{D[p,q]}(x)$	$:=x=(x_k)$ dizisinin deferred istatistiksel değme noktalarının kümesi
D_λ	$:=\left\{x=(x_k):\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}\sum\limits_{k=\lambda(n-1)}^{\lambda(n)}x_k<\infty\right\}$

C_λ $$:=\left\{x=(x_k):\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(n)}\sum_{k=1}^{\lambda(n)}x_k<\infty\right\}$$

S_λ $$:=\left\{x=(x_k):\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(n)}\left|\left\{k\le\lambda(n):\left|x_k-l\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0\right\}$$

DS_λ $$:=\left\{x=(x_k):\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}\left|\left\{\lambda(n-1)<k\le\lambda(n):\left|x_k-l\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0\right\}$$

$\left(C_\lambda^\alpha x\right)_n$ $$:=\left\{x=(x_k):l\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(n)}\sum_{k=1}^{\lambda(n)}\left|x_k-l\right|^\alpha<\infty\right\}$$

$\left(D_\lambda^\alpha x\right)_n$ $$:=\left\{x=(x_k):l\in\mathbb{R},\ \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}\sum_{k=\lambda(n-1)}^{\lambda(n)}\left|x_k-l\right|^\alpha<\infty\right\}$$

1.GİRİŞ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı 1951 yılında Fast H. [2] ve Steinhaus H. [3] tarafından tanımlanmış ve o tarihten bu yana bir çok matematikçinin ilgilendiği bir konu haline gelmiştir. İstatistiksel yakınsaklık kavramının Cesáro matrisiyle olan ilişkisi bu kavramın regüler matrisler yardımıyla genelleştirilmesine olanak sağlamıştır.

1932 yılında Agnew[1]'in Cesáro alt metodunun bir genellemesi olan deferred Cesáro metodu aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların

$$p(n)<q(n) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} q(n)=\infty$$

koşulu sağlayan dizileri olmak üzere $x=(x_n)$ reel terimli dizisinin deferred Cesáro ortalaması

$$\left(D_{p,q}x\right)_n := \frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} x_k \,,\; n=1,2,3,... \tag{1.1}$$

Biçimindedir. $\left(D_{p,q}x\right)_n$ dönüşüm dizisine $x=(x_n)$ dizisinin deferred Cesáro ortalaması denir. (1.1)'de verilen $D_{p,q}$ metodu regüler olmasının yanı sıra başka önemli özellikleri de sağladığı Agnew tarafından ifade edilmiştir.

Bu çalışmada, deferred Cesáro metodu kullanılarak istatistiksel yakınsaklık kavramı

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n)<k\le q(n):\left|x_k-l\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

biçiminde genelleştirildi ve deferred istatistiksel yakınsaklık olarak adlandırıldı.

Bu tanım yardımıyla yeni sonuçların yanı sıra literatürde bulunan bir çok sonucun genellemeleri elde edildi [1].

Yedi alt bölümden oluşan Bulgular kısmında sırasıyla 4.1.'de D ve DS metotları, 4.2.'de S ve DS metotları, 4.3.'de $DS[p',q']$ ve $DS[p,q]$ metotları, 4.4.'de S_λ ve DS_λ metotları kıyaslanmıştır.

4.5.'de ise $\alpha-$kuvvetli D yakınsaklık tanımlanmış ve ilgili sonuçlar, 4.6. alt başlığında deferred istatistiksel değme noktaları ve ilgili sonuçlar, 4.7.'de $\Gamma_{D_{p,q}}(x)$ ile $\Gamma(x)$ arasındaki ilişkiler incelenmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Toplanabilme teorisi genel itibariyle dizilerin yakınsaklığıyla ilgilenir. Bu alandaki çalışmalar Leonhard Euler (1707-1789)'e kadar dizilerin Cauchy anlamında

"Cauchy anlamında yakınsaklık;

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ *için* $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ *bulunabilir öyle ki* $\forall n \geq n_0$ *için* $|x_n - l| < \varepsilon$ *sağlanıyor ise* $x = (x_n)$ *dizisine* l *sayısına 'Cauchy anlamında' yakınsaktır denir"*[4]

yakınsaklığını araştırmakla sınırlı kalmıştır. Şimdi aşağıdaki diziyi göz önüne alalım.

$x = (x_n) = \left((-1)^n\right)$ dizisi 1 ve -1 gibi farklı iki yığılma noktasına sahip olduğundan Cauchy anlamında yakınsak değildir.

Eğer, $x = (x_n) = (-1)^n$ dizisinin terimleri yardımıyla

$$s_n := \frac{x_1 + x_2 + ... + x_n}{n} \tag{2.1}$$

dizisi tanımlanırsa

$$s_n := \begin{cases} 0, & n \text{ çift}, \\ \frac{1}{n}, & n \text{ tek}, \end{cases}$$

olduğunda $s = (s_n)$ dizisinin 0 noktasına Cauchy anlamında yakınsak olduğu görülür.

Burada ana fikir Cauchy anlamında yakınsak olmayan dizilerin bir işleme tabi tutulup sonra Cauchy anlamında yakınsaklığının incelenmesidir. İşlemin anlamlı olabilmesi yakınsak her diziyi yakınsak diziye, en az bir ıraksak diziyi ise yakınsak diziye çevirmesidir.

(2.1)'deki dönüşüm matrisle ifade edilebilir. Bu bakış açısıyla toplanabilme teorisinde reguler matrisler tanımlanmıştır. Reguler matrisler, yakınsak dizileri yakınsak dizilere çeviren ve limiti koruyan matrislerdir [4].

İstatistiksel yakınsaklık Cauchy anlamında yakınsaklığın bir genellemesi olup pozitif tamsayılarda doğal yoğunluk kavramına dayanmaktadır.

İstatistiksel yakınsaklık ilk olarak 1951'de yılında birbirlerinden bağımsız olarak Fast ve Steinhaus tarafından tanımlanmıştır.([2]-[3])

" $x = (x_k)$ *reel (veya kompleks) terimli bir dizi ve* $l \in \mathbb{R}$ *olsun. Eğer,* $\forall \varepsilon > 0$ *için*

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n : \left|x_k - L\right|\ge\varepsilon\right\}\right| = 0,$$

sağlanır ise $x=(x_k)$ *dizisine* $l\in\mathbb{R}$ *sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir."*

Aslında bu tanım Zygmund A. tarafından [5]'de ele alınmış "hemen hemen yakınsaklık" olarak ifade edilmiştir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı zaman içerisinde yoğun çalışılan bir konu haline gelmiş ve matematiğin değişik alanlarına uygulanmıştır. Örneğin,

Schoenberg I.J. [6] ve Fridy J.A. [7] tarafından Toplanabilme Teorisine, Zygmund A. [5] tarafından Fourier Serilerine, Connor J. [8],[9],[10], Demirci K.-Orhan C. [11] ve Kline J. [12], tarafından Fonksiyonel Analize, Erdös P.-Tenenbaum G. [13] tarafından, Sayılar Teorisine (Miller H. I. [14] ve Miller H.I.-Orhan C. [15] tarafından, Ölçü Teorisi Fridy J.A.ve Khan M.K. [16] tarafından istatistik teorisi, Pehlivan S. ve Mamedov M.A. [17] tarafından Teorisi Optimizasyon ve Gadjiev A. D. ve Orhan C. [18] tarafından Yaklaşım Teorisi gibi matematiğin temel alanlarıyla olan ilişkisi nedeniyle yaklaşık yarım asırdır birçok matematikçinin ilgilendiği önemli bir konu haline gelmiştir.

$$C_1=(c_{nk}):=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & k\le n.\\ 0, & k>n.\end{cases}$$

Cesáro matrisi yardımıyla sınırlı diziler için istatistiksel yakınsamaya denk bir tanım aşağıdaki biçiminde elde edilir:

$$\lim_{k\to\infty} x_k = l(S) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n : \left|x_k - l\right|\ge\varepsilon\right\}\right| = 0$$

$$\Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{\infty}\chi_{K(\varepsilon)}(k) = 0$$

$$\Leftrightarrow \forall\varepsilon>0,\ \lim_{n\to\infty}\left(C_1\chi_{K(\varepsilon)}\right)_n = 0$$

şeklinde istatistiksel yakınsaklık Cesáro matrisiyle ifade edilebilir(Miller A.I. [14]).

Cesáro matrisi regüler olduğundan istatistiksel yakınsaklık dizi uzayında regüler bir toplanabilme metodu verir.

Buch R.C. [20] bu ifadeden yola çıkarak Cesáro matrisi yerine negatif olmayan regüler bir A matrisi ele alarak istatistiksel yakınsaklığın bir genellemesini yapmıştır. Daha sonra Freedman A.R. ve Sember J.J.[21] A yoğunluk kavramını tanımlanmıştır.

Connor J.S [22], Kolk E.[23], Miller H.I. [14] ise A istatistiksel yakınsaklığı tanımlanmıştır.

Fridy J.A. [24]'de istatistiksel Cauhy dizisi tanımını vermiştir. Aynı çalışmada Fridy bir dizinin alt dizisinin terimlerinin yoğunluğunu göz önüne alarak istatistiksel limit noktası ve istatistiksel değme noktası tanımlarını vermiştir. Connor J. ve Kline J [25]'de A yoğunluk kavramı yardımıyla A istatistiksel değme noktası ve A istatistiksel limit noktasını tanımlamışlardır. Literatürde A matrisi özel bir matris seçilerek yapılmış bir çok çalışma mevcuttur (Pehlivan S.ve Mamadov M.A. [17]) vd.

Son yıllarda yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar istatistiksel yakınsaklığın ne kadar önemli olduğunu ortaya açık bir biçimde koymaktadır.

3. MATERYAL VE METOT

3.1. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

$K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $K_n := \{k : k \in K, k \leq n\}$ kümesinin eleman sayısı $|K_n|$ ile gösterilsin.

Tanım 3.1.1. $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(K) := \lim_n \frac{1}{n}|K_n| \tag{3.1.1}$$

limiti mevcut ve sonlu ise bu limite K kümesinin "yoğunluğu" (veya "doğal yoğunluğu") denir ve $\delta(K)$ ile gösterilir (Niven I. ve Zuckerman H.S. [26]).

Örneğin; $\delta(\mathbb{N}) = 1$, $\delta(\{n^2 : n \in \mathbb{N}\}) = 0$, $\delta(\{2n : n \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2n+1 : n \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2}$, $\delta(\{k : k \text{ asal sayı}\}) = 0$, olduğu yoğunluk tanımından kolayca elde edilir.

Doğal sayıların sonlu her alt kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bunun tersi doğru değildir.

Ayrıca, B kümesi doğal yoğunluğa sahip ise, $\delta(\mathbb{N} - B) = 1 - \delta(B)$ ve $0 \leq \delta(B) \leq 1$ olacaktır [21].

$K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere eğer $\delta(K) = 0$ ise K kümesine sıfır yoğunlukludur denir. Diğer durumlarda K'nın yoğunluğu sıfırdan farklıdır denir ve $\delta(K) \neq 0$ yazılır.

$P(n)$ önermesi verilsin. Eğer, $\delta(\{n \in \mathbb{N} : P(n) \text{ geçerli değil}\}) = 0$ ise $P(n)$ önermesine "hemen hemen her k için geçerlidir" denir ve h.h.k. biçiminde yazılır.

Tanım 3.1.2. $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere K kümesinin alt ve üst yoğunluğu sırasıyla

$$\delta_*(K) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|K_n\right| \text{ , } \delta^*(K) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|K_n\right| \tag{3.1.2}$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer alt ve üst yoğunluk eşit ise doğal yoğunluk vardır ve $\delta_*(K) = \delta^*(K) = \delta(K)$ dır [26].

Her küme doğal yoğunluğa sahip olmak zorunda değildir. Bunun için aşağıdaki örneği göz önüne alalım:

Örnek 3.1.1. $E = \{1, 4, 5, 6, 13, 14, ..., 24, 49, 50, ..., 96, 193, 194, ...\}$ şeklinde verilsin. E indeks kümesi için $\frac{|E_n|}{n}$ ifadesini oluşturalım.

1) $\frac{|E_n|}{n}$ ifadesinin üst limitini oluşturan alt dizi,

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}, \frac{64}{96}, ... \to \frac{2}{3}$$

2) $\frac{|E_n|}{n}$ ifadesinin üst limitini oluşturan üst dizi,

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{12}, \frac{16}{48}, \frac{64}{192}, ... \to \frac{1}{3}$$

şelindedir. Dolayısıyla

$$\delta_*(K) = \liminf_{n\to\infty} \frac{|E_n|}{n} = \frac{1}{3}, \ \delta^*(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{|E_n|}{n} = \frac{2}{3}$$

olduğundan $\delta_*(K) \neq \delta^*(K)$ dir. Bu nedenle E kümesinin doğal yoğunluğu yoktur. Bu örnekten de anlaşıldığı gibi doğal yoğunluğu olmayan kümelerde vardır. Ama her bir küme için alt ve üst yoğunluk mevcuttur.

Şimdi, (3.1.2)'de tanımlanan δ^* yoğunluk fonksiyonun bazı özelliklerini verelim: $K, M \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

I. $\delta(K)$ mevcut ise $\delta(K) = \delta^*(K)$'dir.

II. $\delta(K) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\delta^*(K) > 0$'dir.

III. $K \subseteq M$ ise $\delta^*(K) \leq \delta^*(M)$'dır.

Tanım 3.1.3. $x=(x_k)$ reel (veya kompleks) terimli bir dizi ve $l\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer, $\forall\varepsilon>0$ için

$$\delta\left(\left\{k:\left|x_k-L\right|\geq\varepsilon\right\}\right)=0, \tag{3.1.3}$$

ise $x=(x_k)$ dizisine l sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve $\lim_{x\to\infty}x=L(S)$ sembolü ile gösterilir [3],[4].

Uyarı 3.1.1. Cauchy anlamda yakınsak bir dizi için $\left\{k:k\leq n,\left|x_k-l\right|\geq\varepsilon\right\}$ kümesi $\mathbb{N}$ 'nin sonlu bir alt kümesidir. Sonlu kümelerin asimtotik yoğunluğu sıfır olduğundan $x=(x_k)$ dizisi l 'ye istatistiksel yakınsaktır. Bunun tersi doğru değildir. Bunu görmek için aşağıdaki örneği dikkate alalım:

Örnek 3.1.2. Genel terimi

$$x_k:=\begin{cases}1, & k=m^2,\\ 0, & k\neq m^2,\end{cases}$$

olan $x=(x_k)$ dizisini göz önüne alalım. $x=(x_k)$ dizisi 0 'a istatistiksel yakınsak olmasına rağmen $x=(x_k)$ dizisi klasik anlamda yakınsak değildir.

Fridy J.A. [7]'de bir dizinin istatistiksel yakınsaması için aşağıdaki karakterizasyonu vermiştir:

Teorem 3.1.1. $x=(x_k)$ dizisinin bir l sayısına istatistiksel olarak yakınsaması için gerek ve yeter şart $\delta\left(\left\{n_k:k\in\mathbb{N}\right\}\right)=1$ ve $\lim_n x_{n_k}=l$ olacak şekilde bir monoton artan (n_k) indis dizisinin mevcut olmasıdır.

Sonuç olarak Cauchy anlamda yakınsaklık yerine İstatistiksel yakınsaklık kavramının kullanılması yakınsak dizilerin kümesini genişletmektedir.

Tanım 3.1.4. $\forall \varepsilon > 0$ için $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir öyle ki $\left\{k \in \mathbb{N} : \left|x_k - x_N\right| \geq \varepsilon\right\}$ kümesi sıfır yoğunluğa sahip ise $x = \left(x_k\right)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisidir denir [7].

Klasik yakınsaklıkta olduğu gibi istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizileri arasında aşağıdaki teoremde verilen ilişki vardır.

Teorem 3.1.1. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $x = \left(x_k\right)$ istatistiksel yakınsaktır.

ii) $x = \left(x_k\right)$ istatistiksel Cauchy dizisidir.

ii) $x = \left(x_k\right)$ dizisi için $\delta\left\{k : x_k \neq y_k\right\} = 0$ olacak şekilde bir yakınsak $y = \left(y_k\right)$ dizisi vardır [7].

Sonuç 3.1.1. $x = \left(x_k\right)$ dizisi l sayısına istatistiksel yakınsak ise $x = \left(x_k\right)$ dizisinin l sayısına klasik anlamda yakınsayan bir alt dizisi vardır.

Bundan böyle, S ile istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi gösterilecektir.

3.2. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

İstatistiksel yakınsaklık ile klasik toplanabilme arasındaki ilişki Fridy J.A. tarafından [7]'de incelenmiştir. Bu ilişkiyi vermeden önce bu bölümde önce toplanamabilme hakkında bilgi vereceğiz.

$A = \left(a_{n,k}\right)$ sonsuz matrisi verilsin.

Eğer, $\forall k > n$ için $a_{n,k} = 0$ ise A matrisine üçgensel matris denir. Eğer, $A = (a_{n,k})$ üçgensel bir matris ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{n,n} \neq 0$ ise A matrisine üçgen matris denir.

X ve Y kümeleri w dizi uzayının iki altkümesi ve $A = (a_{n,k})$ reel yada kompleks terimli sonsuz bir matris olsun.

$x = (x_k) \subset X$ olmak üzere her $n \geq 1$ için

$$y_n := (Ax)_n := \sum_{k=0}^{\infty} a_{n,k} x_k \tag{3.2.1}$$

Biçiminde tanımlı dizi yakınsak ise $y = (y_n) := (A_n x)$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir.

Eğer, her $x \in X$ için (3.2.1)'de verilen $y_n = (A_n x)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $y_n \in Y$ ise $A = (a_{n,k})$ matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir.

Eğer, $x = (x_k)$ dizisi için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve bir l değerine yakınsak ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına $A-$toplanabilir denir ve $A - \lim_{x \to \infty} x = l$ biçiminde gösterilir.

X den Y içine tüm matrislerin sınıfı (X, Y) sembolü ile gösterilir.

Eğer, A matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X, Y)$ seklinde yazılır.

Tanım 3.2.1. $A = (a_{nk})$ ve $B = (b_{nk})$ iki toplanabilme metodu olsun. Eğer,

I) $x = (x_k)$ dizisi $A-$toplanabilir ve $B-$toplanabilir ise A ve B metotlarına kıyaslanabilir metotlar denir.

II) $A-$toplanabilir her dizi $B-$toplanabilir ise B metodu A metodunu içerir denir ve $A \subseteq B$ yazılır.

III) $A \subseteq B$ ve $A \supseteq B$ ise A ve B metotlarına denk metotlar denir ve $A = B$ yazılır.

Tanım 3.2.2. $A = (a_{n,k})$ sonsuz matrisi ve $x = (x_k)$ dizisi verisin. Eğer, $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ olduğunda $\lim_{n\to\infty} (Ax)_n = l$ ise $A = (a_{n,k})$ matrisine "regüler matris" denir [27].

Keyfi bir $A = (a_{n,k})$ matrisinin regüler olması, Silverman –Toeplitz koşuları olarak bilinen aşağıdaki teorem ile karakterize edilmektedir:

Teorem 3.2.1. (Silverman –Toeplitz) $A = (a_{n,k})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

I) $\exists M > 0$ için, $\|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{n,k}| \le M < \infty,$ (3.2.2)

II) $\lim_{n\to\infty} a_{n,k} = 0,\ \ k = 0,1,2,...,$ (3.2.3)

III) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = 1\,.$ (3.2.4)

koşullarının sağlanmasıdır [4],[27].

Toplamı ya da limiti koruyan matrislerin sınıfını $(X, Y; p)$ ile gösterilir. Örneğin, $A \in (c, c; p)$ olması $x_n \to l$ olduğunda $(Ax_n) \to l$ olması demektir.

İstatistiksel yakınsaklık ile toplanabilirlik arasındaki ilişki Fridy J.A. tarafından aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 3.2.2. Hiçbir matris toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodu içermez.

Yani her $x=(x_k)\in S$ için $A-\lim_{k\to\infty} x_k = S-\lim_{k\to\infty} x_k$ olacak biçimde bir A matrisi yoktur [7].

Toplanabilme ve istatistiksel yakınsaklık arasında kesin bir sonuç elde etmek için Fridy J.A. ve Miller H.I. tarafından [28]'de .aşağıdaki sınıf tanımlandı:

I) Her $n\in\mathbb{N}$ için $\sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1$

II) $K\subseteq\mathbb{N}$ olmak üzere $\delta(K)$ olduğundan $\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in K} a_{nk} = 0$

koşullarını sağlayan negatif olmayan alt üçgensel $A=(a_{n,k})$ matrisler sınıfı τ ile ifade edilir.

τ sınıfına ait her bir A matrisi regülerdir. Şimdi bu sınıfla ilgili bir teorem verelim:

Teorem 3.2.3. Sınırlı $x=(x_k)$ dizisinin l sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart her $A\in\tau$ için $x=(x_k)$ dizisi l sayısına A yakınsaktır [28].

$\{(-1)^k\}$ gibi periyodik bir dizi istatistiksel anlamda yakınsak değildir. Bu nedenle istatistiksel yakınsaklık metodu, klasik toplanabilme metotlarının bir çoğunu içermez.

Tanım 3.2.3.

$$C_1[n,k] := \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & 0<k\le n, \\ 0, & diğer\, durum, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan matrise birinci mertebeden Cesáro matrisi denir.

$C_1[n,k]$ matrisinin Teorem 3.2.1.'de verilen (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.4) koşullarını sağladığı açıktır.

Tanım 3.2.4. $\lambda = \{\lambda(n)\}_{n=1}^{\infty}$ pozitif tamsayıların kesin artan bir dizisi olmak üzere

$$(C_\lambda x)_n := \begin{cases} \dfrac{1}{\lambda(n)}, & 0 < k \le \lambda(n), \\ 0, & diğer\, durum, \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan matrise $C_1[n,k]$ matrisinin alt matrisi denir Armitage D.H.-Maddox J.J. [29].

C_λ-dönüşümünün regüler olduğu Teorem 3.2.1. (Silverman Toeplitz Teoremin) den açıktır.

Tanım 3.2.5: $x = (x_k)$ dizisi verilsin. Eğer,

$$\lim_{x\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} (x_k - l) = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisine l sayısına C_1-yakınsaktır denir. C_1-yakınsak olan dizilerin kümesi C_1 sembolü ile gösterilir.

Tanım 3.2.6. $p = \{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q = \{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların

$$p(n) < q(n) \text{ ve } \lim_{x\to\infty} q(n) = \infty \tag{3.2.5}$$

koşulu sağlayan dizileri olmak üzere.

$$(D_{p,q}x)_n := \frac{1}{q(n) - p(n)} \sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} x_k, \; n = 1,2,3,... \tag{3.2.6}$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme $x = (x_k)$ dizisinin deferred Cesáro ortalaması denir.

$D_{p,q}$-dönüşümünün regüler olduğu Silverman Toeplitz teoreminden açıktır.

Eğer, Tanım 3.2.6.'da $q(n)=\lambda(n)$, $p(n)=\lambda(n-1)$ biçiminde seçilirse elde edilen dönüşüm D_λ ile gösterilir.

Tanım 3.2.7. $x=(x_k)$ dizisi ve l sayısı verilsin. Eğer,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}\left(x_k-l\right)=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisine l sayısına $D_{p,q}$-yakınsaktır denir. $D_{p,q}$ yakınsak dizilerin kümesi $D[p,q]$ sembolü ile gösterilir [1].

Tanım 3.2.8. $x=(x_k)$ bir dizi ve $0<\alpha<\infty$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}\left|x_k-l\right|^{\alpha}=0,$$

ise $x=(x_k)$ dizisine l sayısına $\alpha-$kuvvetli deferred Cesáro yakınsaktır denir ve $\lim\limits_{n\to\infty}x_n=l\ \ (\alpha-D[p,q])$ sembolü ile gösterilir.

3.3. $A-$İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

$x=(x_k)$ reel terimli bir dizi ve $l\in\mathbb{R}$ olsun. $\varepsilon>0$ keyfi sayısı için $K(\varepsilon):=\left\{k:\left|x_k-l\right|\geq\varepsilon\right\}$ olmak üzere

$$\chi_{K(\varepsilon)}(k):=\begin{cases}1, & k\in K(\varepsilon),\\ 0, & k\notin K(\varepsilon).\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan fonksiyon $K(\varepsilon)$ kümesinin karakteristik fonksiyonu denir. $x=(x_k)$ dizisi l istatistiksel yakınsaması $\chi_{K(\varepsilon)}$ fonksiyonun C_1-ortalamasının sıfıra yakınsamasıdır.

Tanım 3.3.1. $A=(a_{n,k})$ negatif olamayan regüler bir matris ve $K\subseteq\mathbb{N}$ olsun. Eğer,

$$\delta_A(K):=\lim_{n\to\infty}(A\chi_K)_n=\lim_{n\to\infty}\sum_{k\in K}a_{nk}$$

limiti mevcut ise $\delta_A(K)$ sayısına K kümesinin $A-$yoğunluğu denir [21].

Tanım 3.3.2. $x=(x_k)$ reel terimli bir dizi ve $l\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer, $\forall\varepsilon>0$ için

$$\delta_A(K(\varepsilon))=0$$

ise $x=(x_k)$ dizisi l sayısına "$A-$istatistiksel yakınsaktır" denir ve $\lim_{k\to\infty}x_k=l(st-A)$ biçiminde gösterilir [21],[10],[14].

Bir dizinin A-istatistiksel yakınsaklığı şöyle de karakterize edilebilir: $x=(x_k)$ dizisinin l sayısına A-istatistiksel yakınsaması için gerek ve yeter koşul $\delta_A(\{n_k:k\in\mathbb{N}\})=1$ ve $\lim_{n\to\infty}x_{n_k}=l$ olacak şekilde bir monoton artan (n_k) indis dizisinin mevcut olmasıdır [21], [14].

Tanım 3.3.5: (Deferred İstatistiksel yoğunluk): $x=(x_k)$ reel ya da karmaşık terimli bir dizi, $\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ise (3.2.5)'deki koşulları sağlayan diziler olsun. $K\subseteq\mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta_{D_{p,q}}(K):=\lim_{x\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\{p(n)<k\le q(n):k\in K\}\right|$$

limiti var ve sonlu ise bu sayıya K 'nın deferred istatistiksel yoğunluk denir.

Ayrıca, $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta^*_{D_{p,q}} := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} \left|\left\{ p(n) < k \le q(n) : k \in K \right\}\right|$$

biçiminde tanımlanan ifadeye K kümesinin deferred istatistiksel üst yoğunluğu denir.

$\delta^*_{D_{p,q}}$ fonksiyonu; $\forall K, L \subseteq \mathbb{N}$ için

I) $\delta_{D_{p,q}}(K)$ mevcut ise $\delta_{D_{p,q}}(K) = \delta^*_{D_{p,q}}(K)$

II) $\delta_{D_{p,q}}(K) \neq 0$ olması için gerek ve yeter şart $\delta^*_{D_{p,q}}(K) > 0$

III) $\delta^*_{D_{p,q}}$ fonksiyonu monoton artandır.

özeliklerini sağlar.

Tanım3.3.4: (Deferred istatistiksel yakınsaklık): $x = (x_k)$ reel ya da karmaşık terimli bir dizi $\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (3.2.5) koşulunu sağlayan pozitif tam sayıların dizileri olmak üzere, $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} \left|\{ p(n) < k \le q(n) : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| = 0,$$

sağlanır ise $x = (x_k)$ dizisi l sayısına Deferred istatistiksel yakınsaktır denir ve $\lim_{k\to\infty} x_k = l(DS[p,q])$ biçiminde gösterilir.

3.4. İSTATİSTİKSEL LİMİT VE DEĞME NOKTALARI

$x=(x_k)$ dizisinin değer kümesi $\{x_k : k\in\mathbb{N}\}$ ile gösterilir. $\left\{x_{k(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi $x=(x_k)$ dizisinin bir alt dizisi ve $K:=\{k(j): j\in\mathbb{N}\}$ ise $\left\{x_{k(j)}\right\}$ yerine kısaca $\{x\}_K$ yazılır. $\delta(K)=0$ olsun, bu durumda $\{x\}_K$ dizisine $x=(x_k)$ dizisinin ince bir alt dizi denir.

$x=(x_k)$ dizisinin l sayısına yakınsayan bir alt dizisi varsa l sayısı x dizisinin "alışılmış limit noktası" denir ve alışılmış limit noktalarının kümesi L_x ile gösterilir. Yani;

$$L_x=\left\{l:\exists\left(x_{k_n}\right)\subset(x_k)\text{için } x_{k_n}\to l\right\}$$

Dizinin alt dizilerinin yoğunluğunu göz önüne alınarak istatistiksel limit noktası ve istatistiksel değme noktası tanımları [30]'da aşağıdaki biçimde verilmiştir:

Tanım 3.4.1. Bir $x=(x_k)$ dizisinin bir α sayısına klasik anlamda yakınsayan ince olmayan bir alt dizisi varsa, α sayısına $x=(x_k)$ dizisinin bir "istatistiksel limit noktası" denir.

$x=(x_k)$ dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi Λ_x ile gösterilir. Yani;

$$\Lambda_x:=\left\{\alpha:\left(x_{k_n}\right)\subset(x_k)\text{ ince olmayan bir alt dizisi vardır öyle ki } x_{k_n}\to\alpha\text{ dir.}\right\}$$

Tanım 3.4.2. Eğer, $\forall\varepsilon>0$ için $\left\{k\in\mathbb{N}:|x_k-\gamma|<\varepsilon\right\}$ kümesi sıfır yoğunluğuna sahip değilse γ sayısına $x=(x_k)$ dizisinin bir "istatistiksel değme noktası" denir.

$x=(x_k)$ dizisinin istatistiksel değme noktalarının kümesi Γ_x ile gösterilir. Yani;

$$\Gamma_x=\left\{\gamma:\forall\varepsilon>0\text{ için }\delta\left\{k\in\mathbb{N}:|x_k-\gamma|<\varepsilon\right\}\neq0\right\}$$

Örnek 3.2.1'deki $x=(x_k)$ dizisi için $L_x=\{0,1\}$ *ve* $\Lambda_x=\Gamma_x=\{0\}$ dır. Tanımlardan keyfi $x=(x_k)$ dizisi için $\Lambda_x\subset L_x$ ve $\Gamma_x\subset L_x$ içermesinin doğruluğu açıktır.

Λ_x ve Γ_x kümeleri farklı olabilir, bunun için aşağıdaki örneği göz önüne alalım:

Örnek 3.4.1. $\{r_k\}_{k=1}^{\infty}$ değer kümesi bütün rasyonel sayılar olan bir dizi ve $x=(x_k)$ dizisi

$$x_k:=\begin{cases} r_n, & k=n^2,(n=1,2,3,...) \\ k, & k\neq n^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın [30].

$K:=\{k=n^2:n\in\mathbb{N}\}$ olmak üzere $\delta(K)=0$ olduğundan $\Lambda_x=\varnothing$ dir. Fakat $\{r_k:k\in\mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{R}$ 'de yoğun olduğundan $\Gamma_x=\mathbb{R}$ bulunur.

3.5. $A-$İSTATİSTİKSEL LİMİT VE DEĞME NOKTALARI

$x=(x_k)$ dizisinin değer cümlesi $\{x_k:k\in\mathbb{N}\}$ ile gösterilir. $\left\{x_{k(j)}\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi $x=(x_k)$ dizisinin bir alt dizisi ve $K:=\{k(j):j\in\mathbb{N}\}$ ise $\left\{x_{k(j)}\right\}$ yerine $\{x\}_K$ yazılır. $\delta_A(K)\neq 0$ ise $\{x\}_K$ dizisine $x=(x_k)$ dizisinin $A-$ince olmayan bir alt dizi denir.

Tanım 3.4.1. $x=(x_k)$ dizisinin bir α sayısına klasik anlamda yakınsayan $A-$ince olmayan bir alt dizisi varsa, α sayısına $x=(x_k)$ dizisinin bir "$A-$istatistiksel limit noktası**"** denir [25].

$x=(x_k)$ dizisinin istatistiksel limit noktalarının kümesi $\Lambda_A(x)$ ile gösterilir. Yani;

$$\Lambda_A(x)=\left\{\alpha:\exists\left(x_{k_n}\right)\subset(x_k)\ A-\text{ince olmayan bir alt dizi ve}\left(x_{k_n}\right)\to\alpha(n\to\infty)\right\}$$

Tanım 3.5.2. Eğer, $\forall\varepsilon>0$ için $\delta_A\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\left|x_k-\gamma\right|<\varepsilon\right\}\right)\neq 0$ ise γ sayısına $x=\left(x_k\right)$ dizisinin bir “$A-$istatistiksel değme noktası” denir [25].

$x=\left(x_k\right)$ dizisinin $A-$istatistiksel değme noktalarının kümesi $\Gamma_A\left(x\right)$ ile gösterilir. Yani;

$$\Gamma_A\left(x\right)=\left\{\gamma:\forall\varepsilon>0 \text{ için } \delta_A\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\left|x_k-\gamma\right|<\varepsilon\right\}\right)\neq 0\right\}$$

Tanım 3.5.3 Eğer, $\forall\varepsilon>0$ için $\delta_{D_{p,q}}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\left|x_k-\gamma\right|<\varepsilon\right\}\right)\neq 0$ ise γ sayısına $x=\left(x_k\right)$ dizisinin bir “$D_{p,q}-$istatistiksel değme noktası” denir.

$x=\left(x_k\right)$ dizisinin $D_{p,q}-$istatistiksel değme noktalarının kümesi $\Gamma_{D_{p,q}}\left(x\right)$ ile gösterilir. Yani;

$$\Gamma_{D_{p,q}}\left(x\right)=\left\{\gamma:\forall\varepsilon>0 \text{ için } \delta_{D_{p,q}}\left(\left\{k\in\mathbb{N}:\left|x_k-\gamma\right|<\varepsilon\right\}\right)\neq 0\right\}$$

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. D ve DS METOTLARININ KIYASLANMASI

Bu bölümde, $p=\{p_n\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q=\{q_n\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların (3.2.5)'de verilen koşulları sağlayan dizileri olmak üzere, $D[p,q]$ yakınsak her dizinin $DS[p,q]$ yakınsadığı ve tersinin ancak sınırlı diziler için doğru olduğu gösterilecektir.

Teorem 4.1.1. $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların (3.2.5) koşulları sağlayan dizileri olsun. Bu durumda $x_n\to l\ (D[p,q])$ ise $x_n\to l\ (DS[p,q])$'dur.

İspat: $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (3.2.5) koşullarını sağlayan pozitif tam sayıların dizileri olmak üzere $x_n\to l\ (D[p,q])$ olsun. Bu durumda keyfi $\varepsilon>0$ sayısı için

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}|x_k-l|=$$

$$=\frac{1}{q(n)-p(n)}\left(\sum_{\substack{k=p(n)+1\\|x_k-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)}+\sum_{\substack{k=p(n)+1\\|x_k-l|<\varepsilon}}^{q(n)}\right)|x_k-l|\geq\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{\substack{k=p(n)+1\\|x_k-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)}|x_k-l|$$

$$\geq\varepsilon.\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|k:\{p(n)<k\leq q(n),|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer, yukarıdaki eşitsizliğin her iki tarafında $n\to\infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\{p(n)<k\leq q(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

elde edilir. Bu ise $x=(x_n)$ dizisinin l sayısına deferred istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir.

Sonuç 4.1.2. Teorem 4.1.1.'in koşulları altında eğer, $x_n \to l\ (n\to\infty)$ ise $x_n \to l\ (DS[p,q])$'dur.

Uyarı 4.1.3. Teorem 4.1.1.'in tersi her zaman doğru değildir.

Şimdi bunu bir örnek ile gösterelim:

Örnek 4.1.4. $q(n)$ pozitif tam sayıların monoton artan bir dizisi ve $m_0 \neq 0$ tespit edilmiş doğal sayı olsun. $x=(x_k)$ dizisi $n=1,2,...$ için

$$x_k := \begin{cases} k^2, & \left[\left|\sqrt{q(n)}\right|\right] - m_0 < k \leq \left[\left|\sqrt{q(n)}\right|\right], \\ 0, & diğer\, durum, \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın.

Eğer, $0 < p(n) \leq \left[\left|\sqrt{q(n)}\right|\right] - m_0$ koşulunu sağlayan $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $D[p,q]$ metodu göz önüne alınırsa keyfi $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} \left|\{p(n) < k \leq q(n) : |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{m_0}{q(n)-p(n)} = 0,$$

sağlanır.

Bu ise, $x=(x_k)$ dizisi verilmiş $q(n)$ ve özel seçilmiş $p(n)$ için $x_n \to l\ (DS[p,q])$ olduğunu gösterir. Diğer taraftan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}\left|x_k-l\right|\geq\lim_{n\to\infty}\frac{m_0\left(\left[\left|\sqrt{q(n)}\right|\right]-m_0\right)^2}{q(n)-p(n)}=m_0,$$

sağlanır.

Bu ise, $m_0\neq 0$ olduğundan $x=(x_k)$ dizisinin l 'ye $D[p,q]$ yakınsamadığını gösterir. Ayrıca, Örnek 4.1.4.'de verilen $x=(x_k)$ dizisi sınırlı bir dizi değildir.

Aşağıdaki teoremde Teorem 4.1.1.'in tersinin ne zaman doğru olacağını ifade eder:

Teorem 4.1.5. $x=(x_k)\in l_\infty$ ve $x_n\to l$ $(DS[p,q])$ ise $x_n\to l$ $(D[p,q])$ dur.

İspat: $x=(x_k)\in l_\infty$ ve $x_n\to l$ $(DS[p,q])$ olsun. O halde $\exists M>0$ reel sayısı bulunabilir öyle ki $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$\left|x_k-l\right|\leq M$$

dır. Keyfi $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}\left|x_k-l\right|=\frac{1}{q(n)-p(n)}\left(\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ |x_k-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)}+\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ |x_k-l|<\varepsilon}}^{q(n)}\right)\left|x_k-l\right|$$

$$\leq\frac{1}{q(n)-p(n)}\left(M\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ |x_k-l|\geq\varepsilon}}^{q(n)}1+\varepsilon\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ |x_k-l|<\varepsilon}}^{q(n)}1\right)$$

$$\leq M\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|k:\{p(n)<k\leq q(n),\left|x_k-l\right|\geq\varepsilon\}\right|+$$

$$+\varepsilon\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|k:\{p(n)<k\leq q(n),\left|x_k-l\right|<\varepsilon\}\right|$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|k:\{p(n)<k\le q(n),\left|x_k-l\right|<\varepsilon\}\right|=1$$

olduğu dikkate alınarak $n\to\infty$ ’ken limite geçilirse

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}\left|x_k-l\right|=0,$$

elde edilir. Bu ise istenilen şeyi ispat eder.

4.2. S ve DS METOTLARININ KIYASLANMASI

Bu bölümde istatistiksel yakınsaklık ile deferred istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki (3.2.5) koşulunu sağlayan $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri üzerine konan koşullar altında incelenecektir.

Teorem 4.2.1. $x=(x_k)$ reel terimli bir dizi ve $l\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda, $x_n\to l(S)$ ise $x_n\to l\ (DS[p,q])$’dır.

İspat: $x=(x_k)$ reel terimli dizisi $l\in\mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsak olduğundan her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\le n:\left|x_k-l\right|\ge\varepsilon\}\right|=0,$$

sağlanır.

Teoremin ispatını vermeden aşağıdaki sonucu ispatsız olarak verelim:

“$(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların dizileri olmak üzere $\lim_{n\to\infty} a_n = a,\ a\in\mathbb{R}$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty$ ise $\lim_{n\to\infty} a_{b_n} = a$ ’dır”

Eğer, $(a_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $a_n = \frac{1}{n}\left|\{k\le n : |x_k - l|\ge\varepsilon\}\right|$ ve $(b_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi $b_n = q(n)$ biçiminde seçilirse yukarıdaki ifadeden

$$\left\{\frac{\left|\{k\le q(n) : |x_k - l|\ge\varepsilon\}\right|}{q(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$$

dizisinin sıfıra yakınsaklığı elde edilir. Yani;

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)}\{k\le q(n) : |x_k - l|\ge\varepsilon\} = 0$$

sağlanır. Bu durumda, (3.2.5) koşullarını sağlayan $p = \{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için

$$\{p(n) < k\le q(n) : |x_k - l|\ge\varepsilon\}\subseteq\{k\le q(n) : |x_k - l|\ge\varepsilon\}$$

içermesi ve

$$\left|\{p(n) < k\le q(n) : |x_k - l|\ge\varepsilon\}\right|\le\left|\{k\le q(n) : |x_k - l|\ge\varepsilon\}\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Her iki taraftan $n\to\infty$ iken limit alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\{p(n) < k\le q(n) : |x_k - l|\ge\varepsilon\}\right|\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{q(n)}{q(n)-p(n)}.\frac{1}{q(n)}\left|\{k\le q(n) : |x_k - l|\ge\varepsilon\}\right|$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{q(n)}{q(n)\left(1-\dfrac{p(n)}{q(n)}\right)}.\frac{1}{q(n)}\left|\{k\le q(n) : |x_k - l|\ge\varepsilon\}\right|$$

$$\leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{p(n)}{q(n)}\right)} \cdot \frac{1}{q(n)} \left|\{k \leq q(n) : |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Burada, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{\left(1-\frac{p(n)}{q(n)}\right)} < \infty$ ve $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)} \left|\{k \leq q(n) : |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right| = 0$ olduğundan

$$x_n \to l \ (DS[p,q]), \quad n \to \infty,$$

bulunur.

Uyarı 4.2.2. Teorem 4.2.1.'nın tersi doğru değildir.

Bunu görmek için aşağıdaki örneği göz önüne alalım.

Örnek 4.2.3. $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n := \begin{cases} \frac{n+1}{2}, & n \ tek, \\ -\frac{n}{2}, & n \ çift, \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Eğer, $p(n) = 2n$, $q(n) = 4n$ biçimin seçilirse Teorem 4.2.1'in koşullarının sağlandığı açıktır. Ayrıca, $x_n \to 0 \ (D[2n,4n])$ olduğundan Teorem 4.1.1'den dolayı $x_n \to 0 \ (DS[2n,4n])$ dır. Fakat $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \leq n : |x_k - 0| \geq \varepsilon\}\right| \neq 0,$$

dır. Buda $x_n \not\to 0(S)$'dir.

Sonuç 4.2.4. Teorem 4.2.1 koşulları altında $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların bir dizisi öyle ki her $n\in\mathbb{N}$ için $q(n)<n$ sağlasın. Bu durumda, $x_n \to l\ (S)$ ise $x_n \to l\ (DS[p,q])$'dır.

İspat: Her $n\in\mathbb{N}$ için $q(n)<n$ olduğundan

$$\{p(n)<k\le q(n): |x_k-l|\ge\varepsilon\}\subseteq\{k\le n: |x_k-l|\ge\varepsilon\}$$

içermesi ve buna bağlı olarak

$$\left|\{p(n)<k\le q(n): |x_k-l|\ge\varepsilon\}\right|\le\left|\{k\le n: |x_k-l|\ge\varepsilon\}\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Yukarıdaki eşitsizlikte her iki tarafın $n\to\infty$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\{p(n)<k\le q(n): |x_k-l|\ge\varepsilon\}\right|\le$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{n}{q(n)-p(n)}.\frac{1}{n}\left|\{k\le n: |x_k-l|\ge\varepsilon\}\right|$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{n}{q(n)\left(1-\frac{p(n)}{q(n)}\right)}.\frac{1}{n}\left|\{k\le n: |x_k-l|\ge\varepsilon\}\right|$$

$$\le\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{p(n)}{q(n)}\right)}.\frac{1}{n}\left|\{k\le n: |x_k-l|\ge\varepsilon\}\right|$$

elde edilir. Ayrıca, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(1-\frac{p(n)}{q(n)}\right)}<\infty$ ve $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\le n: |x_k-l|\ge\varepsilon\}\right|=0$ olduğundan

$$x_n\to l\ (DS[p,q]),\ n\to\infty,$$

elde edilir.

Teorem 4.2.5. Her $n \in \mathbb{N}$ için $q(n) = n$ olmak üzere keyfi $p = \{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. $x_n \to l$ $(DS[p,q])$ olması için gerek ve yeter koşul $x_n \to l$ (S) 'dir.

İspat: $"\Rightarrow"$ Her $n \in \mathbb{N}$ için $q(n) = n$ ve pozitif tam sayıların keyfi $\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. $x_n \to l$ $(DS[p,q])$ olsun. Bu durumda, $x = (x_k)$ dizisinin l **'**ye istatistiksel yakınsadığı göstermek için [1]'de verilen teknik kullanılmaktadır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$p(n) = n_1 > p\left(n^{(1)}\right) = n_2 > p\left(n^{(2)}\right) = n_3 > ...,$$

olmak üzere $\{k \le n : |x_k - l| \ge \varepsilon\}$ kümesi

$$\{k \le n : |x_k - l| \ge \varepsilon\} = \{k \le n^{(1)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\} \cup \{n^{(1)} < k \le n : |x_k - l| \ge \varepsilon\},$$

biçiminde yazılır. $\{1 < k \le n^{(1)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\}$ kümesi ise

$$\{k \le n^{(1)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\} = \{k \le n^{(2)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\} \cup \{n^{(2)} < k \le n^{(1)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\},$$

biçiminde yazılır. $\{1 < k \le n^{(2)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\}$ kümesi

$$\{k \le n^{(2)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\} = \{k \le n^{(3)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\} \cup \{n^{(3)} < k \le n^{(2)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\},$$

şeklinde yazılır.

Genel olarak, $\{1 < k \le n^{(h-1)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\}$ kümesi

$$\{k \le n^{(h-1)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\} = \{k \le n^{(h)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\} \cup \{n^{(h)} < k \le n^{(h-1)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\}$$

biçimindedir.

Belirlenmiş bir $h > 0$ pozitif tam sayısı için $n^{(h)} \ge 1$ ve $n^{(h+1)} = 0$ sağlanır.

Sondan başlayarak her bir eşitsizlik bir üst satırda yerine yazılır ve eleman sayıları göz önüne alınırsa

$$\frac{1}{n}\left|\{k \le n : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| =$$

$$\sum_{m=0}^{h+1} \frac{n^{(m)} - n^{(m+1)}}{n} \cdot \frac{1}{n^{(m)} - n^{(m+1)}} \left|\{n^{(m)} < k \le n^{(m+1)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| \tag{4.2.1}$$

elde edilir.

Ayrıca, $x_n \to l \ (DS[p,q])$ olduğundan her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\left\{ \frac{1}{n^{(m)} - n^{(m+1)}} \left|\{n^{(m)} < k \le n^{(m+1)} : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| \right\} \tag{4.2.2}$$

dizisi yakınsaktır.

Eğer, $(b_{n,k})$ matrisi

$$b_{n,k} := \begin{cases} \dfrac{n^{(m)} - n^{(m+1)}}{n}, & n^{(m+1)} < k \le n^{(m)}, m = 0,1,2,... \\ 0, & diğer\ durum. \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa $x = (x_k)$ dizisinin istatistiksel yakınsaklığı (4.2.2)'deki dizilerin $(b_{n,k})$ matrisi altında dönüşümünün yakınsaklığına denktir. $(b_{n,k})$ matrisi Teorem 3.2.1 (Silverman Toeplitz teoremi)'in (3.2.2), (3.2.3) ve (3.2.4) koşullarını sağladığından

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \le n : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| = 0,$$

dır. Bu ise istenen ispatı verir.

"$\Leftarrow$" Teorem 4.2.1'de $q(n) = n$ alındığında ispat kolayca görülür.

Sonuç 4.2.6. $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi hemen hemen tüm pozitif tam sayılara eşit olsun. Bu durumda, keyfi $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $x_n \to l\ (DS[p,q])$ ise $x_n \to l\ (S)$'dir.

İspat: $x_n \to l\ (DS[p,q])$ olsun. Keyfi $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ve yeterince büyük $m\in\mathbb{N}$ sayısı için (k_n) indeks dizisi,

$$k_1 = k_2 = ... = k_m = 1\ ,$$

ve her $n>m$ içinde $q_{k_n}=n$ olacak biçimde seçilsin.

Bu biçimde seçilen (k_n) dizisinin monoton artan olduğu açıktır. O halde, $x_n \to l\ (DS\left[p_{k_n}, q_{k_n}\right])$ ve Teorem 4.2.5.'den $x_n \to l\ (S)$'dır.

Sonuç 4.2.7. $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi hemen hemen tüm pozitif tam sayılara eşit olsun. Eğer keyfi $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için $x_n \to l\ (DS[p,q])$ ve $\Delta x_n = o(\frac{1}{n})$ ise $x_n \to l\ (n\to\infty)$ dir.

Teorem 4.2.8 $q=\{q(n)\}$ pozitif tam sayıların bir dizi olsun. Bu durumda, $DS\left[n-1, q(n)\right]\subseteq S$ olması için gerek ve yeter koşul $\{q(n)-n\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi sınırlıdır.

İspat: $"\Rightarrow"$ $DS[n-1,q]\subseteq S$ olsun. $\{q(n)-n\}_{n\in N}$ dizisinin sınırlı olmadığını kabul edelim. Genelliğini kaybetmeksizin

$n_1 = 1$ olmak üzere,

$q(n)-n > q_{n_1}-n_1$ eşitsizliğini sağlayan en küçük n doğal sayısı n_2,

$q(n)-n > q_{n_2}-n_2$ eşitsizliğini sağlayan en küçük n doğal sayısı n_3,

.

.

.

$q(n)-n > q_{n_\alpha}-n_\alpha$ eşitsizliğini sağlayan en küçük n doğal sayısı $n_{\alpha+1}$ olarak işaretlenir ve bu işleme bu biçimde devam edilirse,

$$1=n_1<n_2<n_3<...<n_\alpha<...$$

monoton artan dizisi elde edilir.

$x(q_{n_i})=q_{n_i}$ $i=1,2,3,...$ ve diğer durumlarda $x(n)=x_n$ olacak şekilde $x=(x_n)$ dizisini ele alalım $x_n \to l\,(DS[n-1,q])$ olsun.

Bu durumda, $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\le n: |x_k-l|\ge\varepsilon\}\right|\ne 0$ yani $x_n \notin S$. Bu ise, $DS[n-1,q]\subseteq S$ olmasıyla çelişir. O halde $\{q(n)-n\}_{n\in N}$ dizisi sınırlıdır.

"$\Leftarrow$" $\{q(n)-n\}_{n\in N}$ sınırlı olduğundan $\exists L\in\mathbb{R}$ vardır öyle ki her $n\in\mathbb{N}$ $q_n-n=L$ dır. Bu ise $q(n)$ dizisinin hemen hemen tüm pozitif tamsayılara eşit olmasını verir. Sonuç 4.2.6'dan ispat açıktır.

Teorem 4.2.9. $\{h_n\}$ pozitif tam sayıların kesin artan bir dizisi ve $h_n>n$ olmak üzere, $q=\{q(n)\}_{n\in N}$ dizisi

$$q(n):=\begin{cases} h_{i+1}-1, & n=h_i,\ i=1,2,3,...,\\ n, & diğer\ durumda,\end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda, $x_n\to l(DS[n-1,q(n)])$ olduğundan $x_n\to l(S)$ olması için gerek ve yeter koşul $\left\{\frac{q(n)}{n}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sınırlı olmasıdır.

İspat: $x_k \to l\ \left(DS\left[n-1, q(\lambda)\right]\right)$ olan $x=(x_k)$ dizisini göz önüne alalım. Bu durumda,

$$(Sx)_n := \frac{1}{n}\left|\{k \le n : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| =$$

$$= \frac{1}{n}\left|\{k \le h_1 - 1 : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| + \frac{1}{n}\left|\{h_1 \le k \le h_2 - 1 : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| + \ldots +$$

$$+ \frac{1}{n}\left|\{h_i \le k \le h_{i+1} - 1 : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| - \frac{1}{n}\left|\{n+1 \le k \le h_{i+1} - 1 : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right|$$

$$= \frac{1}{n}\left|\{k \le 1 : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| + \frac{1}{n}\left|\{1 \le k \le 2 : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| + \ldots + \frac{1}{n}\left|\{h_1 - 1 < k \le h_2 - 1 : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| +$$

$$+ \frac{1}{n}\left|\{h_2 - 1 < k \le h_3 - 1 : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| + \ldots + \frac{1}{n}\left|\{h_i - 1 < k \le h_{i+1} - 1 : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right| -$$

$$- \frac{1}{n}\left|\{n+1 \le k \le h_{i+1} - 1 : |x_k - l| \ge \varepsilon\}\right|$$

eşitliği sağlanır. O halde,

$$(Sx)_n := \frac{1}{n}\left(D_1 S + D_2 S + \ldots + D_{h_1 - 1} S\right) + \frac{h_2 - h_1}{n} D_{h_1} S + \frac{h_3 - h_2}{n} D_{h_2} S + \ldots + \frac{h_{i+1} - h_i}{n} D_{h_i} S -$$

$$- \frac{1}{n}\left(D_{n+1} S + D_{n+2} S + \ldots + D_{h_{i+1} - 1} S\right)$$

biçimindedir. Yani, $(Sx)_n$ dizisi deferred istatistiksel yakınsak dizlerinin bir matris altındaki dönüşümüdür. Teorem 3.2.1'in koşullarını dönüşüm matrisinin sağlaması için gerek ve yeter koşul

$$\frac{2h_{i+1} - n - 2}{n}$$

dizisinin sınırlı olmasıdır. Bu ise $\frac{h_{i+1}}{h_i}$ dizisinin sınırlı olmasını, yani $\frac{q(n)}{n}$ dizisinin sınırlı olmasını gerektirir.

4.3. $DS[p',q']$ ve $DS[p,q]$ METOTLARININ KIYASLANMASI

Bu bölümde $DS[p',q']$ ve $DS[p,q]$ metotları (3.2.5) koşulu dışında her $n\in\mathbb{N}$ için

$$p(n)\leq p'(n)<q'(n)\leq q(n), \tag{4.3.1}$$

koşulu koşulunu sağlayan $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $p'=\{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q'=\{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri için kıyaslanacaktır.

Teorem 4.3.1. $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $p'=\{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q'=\{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların (4.3.1)'ü sağlayan dizileri öyle ki,

$$\{k:p(n)<k\leq p'(n)\} \text{ ve } \{k:q'(n)<k\leq q(n)\} \tag{4.3.2}$$

kümeleri sonlu olsun. Bu durumda, $x_n\to l$ $(DS[p',q'])$ ise $x_n\to l$ $(DS[p,q])$'dır.

İspat: $x=(x_k)$ dizisi $x_n\to l$ $(DS[p',q'])$ olsun. (4.3.1)'den dolayı keyfi $\varepsilon>0$ için

$$\{p(n)<k\leq q(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}=\{p(n)<k\leq p'(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\cup$$

$$\cup\{p'(n)<k\leq q'(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\cup\{q'(n)<k\leq q(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitlik ve (4.3.2) dikkate alınırsa

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\{p(n)<k\leq q(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|=$$

$$\leq\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\left|\{p(n)<k\leq p'(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|+$$

$$+\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\left|\{p'(n)<k\leq q'(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|+$$

$$+\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\left|\{q'(n)<k\leq q(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|,$$

eşitsizliği sağlanır.

Eğer, $n\to\infty$ iken limit alınırsa

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\{p(n)<k\leq q(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|=0,$$

Elde edilir. Bu ise $x_n\to l\ \left(D[p,q]\right)$'dır.

Aşağıdaki teoremde Teorem 4.3.1.'in tersinin hangi koşul altında mümkün olduğunu göstermektedir.

Teorem 4.3.2. $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $p'=\{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q'=\{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri (3.2.5) ve (4.3.2) koşullarını sağlayan pozitif tam sayıların dizileri öyle ki,

$$\lim_{x\to\infty}\frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)}=d>0,$$

sağlasın. Bu durumda, $x_n\to l\ (DS[p,q])$ ise $x_n\to l\ (DS[p',q'])$ dır.

İspat: $x=(x_k)$ dizisi $x_n\to l\ (DS[p,q])$, $n\to\infty$ olsun. (4.3.2)'den dolayı

$$\{p'(n)<k\leq q'(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\subseteq\{p(n)<k\leq q(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}$$

içermesi ve

$$\left|\{p'(n)<k\leq q'(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|\leq\left|\{p(n)<k\leq q(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece,

$$\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\left|\{p'(n)<k\leq q'(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|\geq$$

$$\leq \frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)} \cdot \frac{1}{q(n)-p(n)} \left|\{p(n)<k\leq q(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|.$$

eşitsizliği doğrudur. Her iki tarafın $n\to\infty$ iken limiti alınırsa

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\left|\{p'(n)<k\leq q'(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

bulunur.

4.4. S_λ ve DS_λ METOTLARININ KIYASLANMASI

$\lambda=\{\lambda(n)\}_{n\in N}$, $\lambda(0)=0$ koşulunu sağlayan pozitif tam sayıların kesin artan bir dizisi için $DS[p,q]$ metodu $q(n):=\lambda(n)$, $p(n):=\lambda(n-1)$ olmak üzere $DS[\lambda(n-1),\lambda(n)]$ metodu kısaca DS_λ ile gösterilecektir. Bu bölümde DS_λ ile S_λ metotları kıyaslanacaktır.

Teorem 4.4.1. $\lambda=\{\lambda(n)\}_{n\in N}$, $\lambda(0)=0$ koşulunu sağlayan pozitif tam sayıların kesin artan bir dizisi olsun. Bu durumda, $x_n\to l(DS_\lambda)$ olduğundan $x_n\to l(S_\lambda)$'dır.

İspat: $x_n\to l(DS_\lambda)$ olsun. Keyfi $\varepsilon>0$ için

$$(S_\lambda x)_n := \frac{1}{\lambda(n)}\left|\{k\leq\lambda(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right| =$$

$$=\frac{\lambda(1)-\lambda(0)}{\lambda(n)} \cdot \frac{\left|\{\lambda(0)<k\leq\lambda(1):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|}{\lambda(1)-\lambda(0)}+\ldots+$$

$$+\ldots+\frac{\lambda(k)-\lambda(k-1)}{\lambda(n)} \cdot \frac{\left|\{\lambda(k-1)<k\leq\lambda(k):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|}{\lambda(k)-\lambda(k-1)}+\ldots+$$

$$+\frac{\lambda(n)-\lambda(n-1)}{\lambda(n)}\cdot\frac{\left|\{\lambda(n-1)<k\leq\lambda(n):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}=$$

elde edilir. Eğer,

$$(DS_\lambda x)_k:=\frac{1}{\lambda(k)-\lambda(k-1)}\left|\{\lambda(k-1)<j\leq\lambda(k):|x_k-l|\geq\varepsilon\}\right|$$

olarak işaretlenirse

$$(S_\lambda x)_n:=\frac{\lambda(1)-\lambda(0)}{\lambda(n)}(DS_\lambda x)_1+\frac{\lambda(2)-\lambda(1)}{\lambda(n)}(DS_\lambda x)_2+...+\frac{\lambda(n)-\lambda(n-1)}{\lambda(n)}(DS_\lambda x)_n$$

olur. Bu ise $(S_\lambda x)_n$ dizisinin aslında

$$b_{nk}:=\begin{cases}\dfrac{\lambda(k)-\lambda(k-1)}{\lambda(n)}, & k=0,1,2,...,n,\\ 0, & \textit{diğer durum},\end{cases} \tag{4.4.1}$$

biçiminde tanımlı $(b_{n,k})$ matrisi altında $(DS_\lambda)_k$ dizinin resmidir. (4.4.1)'de verilen $(b_{n,k})$ matrisi Teorem 3.2.1.'in I, II, III koşullarını sağlar. Böylece $(DS_\lambda)_n\to l(n\to\infty)$ olduğundan $x_n\to l(S_\lambda)$'dır.

Aşağıda verilen teorem Teorem 4.4.1.'in tersinin hangi koşul altında sağlandığını göstermektedir:

Teorem 4.4.2. $\lambda=\{\lambda(n)\}$, $\lambda(0)=0$ koşulunu sağlayan pozitif tam sayıların kesin artan bir dizisi olsun. Eğer, $\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda(n)}{\lambda(n-1)}>1$ ise $x_n\to l(S_\lambda)$ olduğundan $x_n\to l(DS_\lambda)$'dır.

İspat: Teoremin koşulları altında $x_n\to l(S_\lambda)$ olsun. Keyfi $\varepsilon>0$ için

$$\left(DS_\lambda x\right)_n := \frac{1}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}\left|\{\lambda(n-1)<k\le\lambda(n): |x_k-l|\ge\varepsilon\}\right| =$$

$$= \frac{\lambda(n)}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}.\left(\frac{1}{\lambda(n)}\left|\{k\le\lambda(n):|x_k-l|\ge\varepsilon\}\right|\right)-$$

$$-\frac{\lambda(n-1)}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}\left|\{k\le\lambda(n-1):|x_k-l|\ge\varepsilon\}\right|$$

$$= \frac{\lambda(n)}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}\left(S_\lambda x\right)_n - \frac{\lambda(n-1)}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}\left(S_\lambda x\right)_{n-1}$$

biçiminde yazılabilir. Bu ise $\left(DS_\lambda x\right)_n$ dizisinin $\left(S_\lambda x\right)_n$ dizisine,

$$b_{n,k} := \begin{cases} \dfrac{\lambda(n)}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}, & k=n, \\ \dfrac{\lambda(n-1)}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}, & k=n-1, \\ 0, & diğer\ durum, \end{cases}$$

biçiminde tanımlı $\left(b_{n,k}\right)$ matrisi altında resmi olduğunu gösterir.

$\left(b_{n,k}\right)$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul

$$\liminf_{n\to\infty}\frac{\lambda(n)}{\lambda(n-1)}>1$$

olmasıdır.

Bu koşula altında $x_n \to l\ (DS_\lambda)$'dır. Böylece, $S_\lambda \subset DS_\lambda$'dır.

Sonuç 4.4.3. $\lambda=\{\lambda(n)\}_{n\in N}$, $\lambda(0)=0$ koşulunu sağlayan pozitif tam sayıların kesin artan bir dizisi olsun.

Eğer, $\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda(n)}{\lambda(n-1)}>1$ ise $S_\lambda = DS_\lambda$'dır.

4.5. $\alpha-$KUVVETLİ D YAKINSAKLIK

Bu bölümde $0<\alpha<\infty$ olmak üzere $\alpha-$kuvvetli deferred Cesáro (D yakınsak) ile (3.2.5) koşulunu sağlayan $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri üzerine konulacak uygun koşullar ile S ve DS metotları kıyaslanacaktır.

Teorem 4.5.1. $0<\alpha<\infty$ olsun. $x=(x_k)$ dizisi l sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p,q]$ yakınsak ise $x=(x_k)$ dizisi l sayına DS yakınsaktır.

İspat: $0<\alpha\leq\infty$ olmak üzere $x=(x_k)$ dizisinin l sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p,q]$ yakınsak olduğunu kabul edelim. $K(\varepsilon)$ ile $\{k: p(n)<k\leq q(n), |x_k-L|\geq\varepsilon\}$ kümesi gösterilsin. Bu durumda,

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}|x_k-l|^{\alpha}\geq\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ k\in K(\varepsilon)}}^{q(n)}|x_k-l|^{\alpha}\geq\varepsilon^{\alpha}\frac{1}{q(n)-p(n)}|K(\varepsilon)|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının $n\to\infty$ iken limiti alınırsa $x=(x_k)$ dizisinin l sayısına istatistiksel yakınsadığı gösterilmiş olur.

Sonuç 4.5.1. $0<\alpha<\infty$ olsun. Bu durumda $q(n)=n$ olmak üzere $x=(x_k)$ dizisi l sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p,n]$ yakınsak ise $x=(x_k)$ dizisi l sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Teorem 4.5.2. $0<\alpha<\infty$ olsun. Eğer $x=(x_k)\in l_\infty$ ve $x_n\to l\ (DS[p,q])$ ise $x_n\to l\ (\alpha-D[p,q])$ 'dur.

İspat: Sınırlı $x=(x_k)$ dizisinin l sayısına deferred istatistiksel yakınsak olduğunu kabul edelim. $x=(x_k)\in l_\infty$ olduğundan $\exists M>0$ bulunabilir öyle ki her $n\in\mathbb{N}$ için $|x_k-l|\le M$ sağlanır. Böylece,

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}|x_k-l|^\alpha=\frac{1}{q(n)-p(n)}\left[\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ k\in K(\varepsilon)}}^{q(n)}|x_k-l|^\alpha+\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ k\notin K(\varepsilon)}}^{q(n)}|x_k-l|^\alpha\right]$$

$$\le\frac{1}{q(n)-p(n)}\left[\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ |x_k-l|\ge\varepsilon}}^{q(n)}M^\alpha+\sum_{\substack{k=p(n)+1\\ |x_k-l|<\varepsilon}}^{q(n)}\varepsilon^\alpha\right]$$

$$\le\frac{1}{q(n)-p(n)}\left[M^\alpha|K(\varepsilon)|+\varepsilon^\alpha|K^c(\varepsilon)|\right]$$

eşitsizliği sağlanır. Eşitsizliğin her iki tarafında $n\to\infty$ iken limiti seçilirse

$\lim\limits_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}|K^c(\varepsilon)|=1$ olduğundan $x_n\to l\ (\alpha-D[p,q])$ elde edilir.

Sonuç 4.5.2. $x=(x_k)\in l_\infty$ dizsi sınırlı ve l sayısına istatistiksel yakınsak ise l sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p,q]$ yakınsaktır.

Teorem 4.5.3. $\alpha-$kuvvetli $D[p,q]$ yakınsak $x=(x_k)$ dizisinin $\alpha-$kuvvetli Cesáro yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\left\{\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi sınırlı olmasıdır.

İspat: $x=(x_k)$ dizisinin l sayısına $\alpha-$kuvvetli Cesáro yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda,

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}|x_k-l|^\alpha=\frac{1}{q(n)-p(n)}\left[\sum_{k=1}^{q(n)}-\sum_{k=1}^{p(n)}\right]|x_k-l|^\alpha$$

$$=\left(\frac{q(n)}{q(n)-p(n)}\right).\frac{1}{q(n)}\sum_{k=1}^{q(n)}|x_k-l|^\alpha-\left(\frac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right).\frac{1}{p(n)}\sum_{k=1}^{p(n)}|x_k-l|^\alpha$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizlikte $x=(x_k)$ dizisin l sayısına $\alpha-$kuvvetli deferred yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\left\{\dfrac{q(n)}{q(n)-p(n)}+\dfrac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin yani

$$\frac{q(n)+p(n)}{q(n)-p(n)}=\frac{q(n)-p(n)+2p(n)}{q(n)-p(n)}=1+\frac{2p(n)}{q(n)-p(n)}$$

dizisinin sınırlı olmasıdır. Bu ise $\left\{\dfrac{p(n)}{q(n)-p(n)}\right\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin sınırlı olması gerektirir. Böylece istenen ispat edilmiş olur.

Aşağıda $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $p'=\{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q'=\{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ (3.2.5) ve (4.3.1) koşullarını sağlayan pozitif tam sayıların dizileri olmak üzere; $\alpha-$kuvvetli $D[p,q]$ yakınsaklık ve $\alpha-$kuvvetli $D[p',q']$ yakınsaklık arasındaki ilişkiyi veren teoremler verilecektir:

Teorem 4.5.4. $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $p'=\{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q'=\{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri (3.2.5) ve (4.3.1) koşulları sağlasın. Eğer, $x=(x_k)\in l_\infty$ dizisi l'sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p',q']$ yakınsak ise l sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p,q]$ yakınsaktır.

İspat: $x=(x_k)$ dizisi sınırlı olduğundan $\exists M>0$ vardır öyle ki, her $n\in\mathbb{N}$ için $|x_n-l|\le M$ 'dır. Böylece,

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}|x_k-l|^\alpha=\frac{1}{q(n)-p(n)}\left(\sum_{k=p(n)+1}^{p'(n)}+\sum_{k=p'(n)+1}^{q'(n)}+\sum_{k=q'(n)+1}^{q(n)}+\right)|x_k-l|^\alpha$$

$$\le\frac{2}{q'(n)-p'(n)}M^\alpha O(1)+\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\sum_{k=p'(n)+1}^{q'(n)}|x_k-l|^\alpha .$$

eşitsizliği elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafından, $x=(x_k)$ dizisinin l sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p',q']$ yakınsadığında dikkate alınarak, $n\to\infty$ iken limite geçilirse $x=(x_k)$ dizisi l sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p,q]$ yakınsaklığı elde edilir.

Teorem 4.5.5. $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $p'=\{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q'=\{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri (3.2.5) ve (4.3.1)'e ek olarak $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)}=d>0$ koşulunu sağlasın. Eğer, $x=(x_k)$ dizisi l sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p,q]$ yakınsak ise l sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p',q']$ yakınsaktır.

İspat: Keyfi $x=(x_k)$ dizisinin l sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p,q]$ yakınsak olduğunu kabul edelim. Teoremin koşuları altında

$$\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}\left|x_k-L\right|^{\alpha}\geq\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p'(n)+1}^{q'(n)}\left|x_k-L\right|^{\alpha}$$

$$\geq\frac{q'(n)-p'(n)}{q(n)-p(n)}\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\sum_{k=p'(n)+1}^{q'(n)}\left|x_k-L\right|^{\alpha}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer eşitsizliğin her iki tarafından $n\to\infty$ iken limit alınırsa $x=(x_k)$ dizisinin l sayısına $\alpha-$kuvvetli $D[p',q']$ yakınsak olduğu elde edilir.

Şimdi, $\{\lambda(n)\}_{n\in\mathbb{N}},\lambda(0)=0$ pozitif tam sayıların kesin artan bir dizisi olmak üzere C_λ metodu ile $p(n)=\lambda(n-1)$, $q(n)=\lambda(n)$ alınarak elde edilen D_λ metotları kıyaslanacaktır.

Teorem 4.5.6. $\lambda=\{\lambda(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların artan bir dizisi ve $\lambda(0)=0$ olsun. Eğer, $x=(x_k)$ dizisi $\alpha-$kuvvetli D_λ yakınsak ise $\alpha-$kuvvetli C_λ yakınsaktır.

İspat. $x=(x_k)$ dizisinin l sayısına $\alpha-$kuvvetli D_λ yakınsak olduğunu kabul edelim. $x=(x_k)$ dizisinin C_λ dönüşümü

$$\left(C_\lambda^\alpha x\right)_n := \frac{1}{\lambda(n)}\sum_{k=1}^{\lambda(n)}\left|x_k-l\right|^\alpha = \sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{1}{\lambda(n)}\sum_{k=\lambda(i)+1}^{\lambda(i+1)}\left|x_k-l\right|^\alpha\right)$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1}\left(\frac{\lambda(i+1)-\lambda(i)}{\lambda(n)}\left(\frac{1}{\lambda(i+1)-\lambda(i)}\sum_{k=\lambda(i)+1}^{\lambda(i+1)}\left|x_k-l\right|^\alpha\right)\right)=$$

$$=\sum_{i=0}^{n-1} b_{n,i}\left(D_\lambda^\alpha x\right)_i$$

biçiminde yazılabilir. Eğer,

$$(D_\lambda^\alpha x)_i := \frac{1}{\lambda(i+1)-\lambda(i)}\sum_{k=\lambda(i)+1}^{\lambda(i+1)}\left|x_k-l\right|^\alpha \text{ ve } b_{n,i} := \begin{cases}\dfrac{\lambda(i+1)-\lambda(i)}{\lambda(n)}, & i=1,2,3,\ldots,n-1,\\ 0, & \textit{diğer}.\end{cases}$$

olarak işaretlenirse $(C_\lambda^\alpha x)_n = \sum_{i=1}^{n-1} b_{n,i}(D_\lambda^\alpha x)_i = 0$ olduğu görülür.

$\left(b_{n,i}\right)$ matrisi regüler olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}(C_\lambda^\alpha x)_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{\lambda(n)}\sum_{k=1}^{\lambda(n)}\left|x_k-L\right|^\alpha = 0$$

elde edilir.

Teorem 4.5.7. $\lambda=\{\lambda(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların artan bir dizisi ve $\lambda(0)=0$ olsun. $\alpha-$kuvvetli D_λ yakınsak bir dizinin $\alpha-$kuvvetli C_λ yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\liminf\limits_{n\to\infty}\dfrac{\lambda(n)}{\lambda(n-1)}>1$ olmasıdır.

Eğer, Teorem 4.5.3.'de $p(n)=\lambda(n-1)$, $q(n)=\lambda(n)$ olarak seçelir ve $\dfrac{\lambda(n-1)}{\lambda(n)-\lambda(n-1)}=\dfrac{1}{\dfrac{\lambda(n)}{\lambda(n-1)}-1}$ olduğu dikkate alınırsa Teorem 4.5.6. ispatlanmış olur.

4.6. DEFERRED İSTATİSTİKSEL DEĞME NOKTALARI

Teorem 4.6.1. $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların keyfi dizileri öyle ki $\delta_{D_{p,q}}(x)\neq 0$ ise $\delta_{D_{p,q}}(x)$ kapalı kümedir.

İspat: $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların keyfi dizileri öyle ki $\delta_{D_{p,q}}(x)\neq 0$ ise $\delta_{D_{p,q}}(x)$ kümesinin kapalı olduğunu göstermek için $\mathbb{R}\setminus\delta_{D_{p,q}}(x)$ kümesinin açık olduğunu göstermek yeterlidir. Keyfi $y\in\mathbb{R}\setminus\delta_{D_{p,q}}(x)$ olsun. O halde $y\notin\delta_{D_{p,q}}(x)$'dır. Keyfi $\varepsilon>0$

$$\delta_{p,q}\left(\left\{p(n)<k\leq q(n):\left|x_k-y\right|<\varepsilon\right\}\right)=0$$

sağlanır. $(y-\varepsilon, y+\varepsilon)$ açık aralık kümesi A kümesi tarafından kapsansın. O halde

$$\delta_{p,q}\left(\left\{p(n)<k\leq q(n):x_k\in A\right\}\right)=0$$

sağlanır. $\varepsilon_y:=\frac{1}{2}\inf\left\{\left|x_k-y\right|:x_k\in A\right\}$ şeklinde seçersek aşikardır ki

$$\varepsilon_y<\varepsilon \text{ ve } \left(y-\varepsilon_y, y+\varepsilon_y\right)\subset\mathbb{R}\setminus\delta_{D_{p,q}}(x)$$

sağlanır. Keyfi y elemanı $\mathbb{R}\setminus\delta_{D_{p,q}}(x)$ kümesinin iç noktası olduğu için $\mathbb{R}\setminus\delta_{D_{p,q}}(x)$ kümesi açık bir kümedir.

Teorem 4.6.2. $x=(x_n)$ reel terimli bir dizi ve $\gamma\in\mathbb{R}$ fix edilmiş bir nokta olsun. Eğer $d(\gamma,x)\neq 0$ ise $\gamma\notin\delta_{D_{p,q}}(x)$'dır.

İspat: Teoremin hipotezinden

$$d\left(\gamma, x\right) := \inf\left\{\left|x_k - \gamma\right| : k \in \mathbb{N}\right\} = l > 0 .$$

Yani, $\forall k \in \mathbb{N}$ için $\left|x_k - \gamma\right| \geq l$ sağlanır. Bu demektir ki $(\gamma - l, \gamma + l)$ aralığına $x = \left(x_n\right)$ dizisinin hiçbir elemanı düşmez. Bu yüzden

$$\delta_{p,q}\left(\left\{p(n) < k \leq q(n) : x_k \in (\gamma - l, \gamma + l)\right\}\right) = 0$$

dır. Keyfi bir $\varepsilon < l$ sayısı için

$$\left\{p(n) < k \leq q(n) : \left|x_k - \gamma\right| < \varepsilon\right\} \subset \left\{p(n) < k \leq q(n) : x_k \in (\gamma - l, \gamma + l)\right\}$$

sağlanır. Buradan da açıktır ki

$$\delta_{p,q}\left(\left\{p(n) < k \leq q(n) : \left|x_k - y\right| < \varepsilon\right\}\right) = 0$$

dir.

Uyarı 4.6.3. Teorem 4.6.2. tersi doğru değildir.

Örnek olarak $x = (\frac{1}{n})$ dizisini göz önüne alırsak $\gamma = \frac{1}{2}$ seçildiğinde $d\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{n}\right) = 0$ dir. Fakat $\frac{1}{2} \notin \delta_{D_{p,q}}(x) = \left\{0\right\}$ dır.

Teorem 4.6.4. $x = \left(x_n\right)$ reel terimli bir dizi ve $A \subset \mathbb{R}$ belirlenmiş bir küme olsun. Eğer $d\left(A, x\right) \neq 0$ ise $A \cap \delta_{D_{p,q}}(x) = \varnothing$ 'dır.

İspat: $A \subset \mathbb{R}$ kümesi tek nokta kümesi olsaydı Teorem 4.6.2. ispatı açıktır. Keyfi bir $a^* \in A$ seçelim. $d\left(A, x\right) > 0$ olduğundan bir $l > 0$ sayısı için $\left|a^* - x_k\right| > l$ dir. $\left(a^* - l, a^* + l\right)$ aralığına $x = \left(x_n\right)$ dizisinin hiçbir terimini içermez. Keyfi bir $\varepsilon < l$ sayısı için

$$\delta_{p,q}\left(\left\{p(n) < k \leq q(n) : \left|a^* - x_k\right| < \varepsilon\right\}\right) = 0$$

den $a^* \notin \delta_{D_{p,q}}(x)$ dir.

Uyarı 4.6.5. Teorem 4.6.4. tersi doğru değildir.

Örnek olarak $x = (\frac{1}{n})$ dizisini göz önüne alırsak $A = (0,\infty)$ seçildiğinde $A \cap \delta_{D_{p,q}}(x) = \varnothing$ dir. Fakat $d\left(A, \frac{1}{n}\right) = 0$ dır.

Teorem 4.6.6. $E = \{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $F = \{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $F' = \{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların (3.2.5) ve (4.3.1) koşullarını sağlayan diziler olmak üzere, $F' - F$ sonlu ve $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{q(n) - p(n)}{q'(n) - p(n)} = d > 0$ olsun. Bu durumda, her $K \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta_{D_{p,q'}}(K) \neq 0$ ise $\delta_{D_{p,q}}(K) \neq 0$ 'dır.

İspat: $F' - F$ sonlu bir küme olduğundan $\exists N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\{q'(n) : n \geq N\} \subseteq \{q(n)\}$ 'dır. Yani, $n \geq N$ olmak üzere $j(n)$ monoton artan dizisi vardır öyle ki $q'(n) = q(j(n))$ 'dir. $\delta_{D_{p,q'}}(K) \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$\delta^*_{D_{p,q'}}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{q'(n) - p(n)} \left|\{p(n) < k \leq q'(n) : |x_k - l| \geq \varepsilon\}\right| > 0$$

dir. Ayrıca,

$$0 < \frac{\left|\{p(n) < k \leq q(j(n)) : k \in K\}\right|}{q(j(n)) - p(n)} \leq \frac{q(n) - p(n)}{q(j(n)) - p(n)} \cdot \frac{\left|\{p(n) < k \leq q(n) : k \in K\}\right|}{q(n) - p(n)}$$

eşitsizliğinden

$$\delta^*_{D_{p,q}}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \left|\{p(n) < k \leq q(n) : k \in K\}\right| > 0$$

elde edilir. Böylece, $\delta_{D_{p,q}}(K) \neq 0$ 'dır.

Sonuç 4.6.7. Teorem 4.6.6.'in koşulları altında $x=\left(x_n\right)$ reel terimli bir dizi olmak üzere

I. $F'-F$ sonlu ise $\Gamma_{D_{p,q}}\left(x\right)\supseteq\Gamma_{D_{p,q'}}\left(x\right)$'dir.

II. $F'\Delta F$ sonlu ise $\Gamma_{D_{p,q}}\left(x\right)=\Gamma_{D_{p,q'}}\left(x\right)$'dir.

III. $F'-F$ sonlu ise $\Gamma\left(D_{p,q'}x\right)\supseteq\Gamma\left(D_{p,q}x\right)$'dir.

IV. $F'\Delta F$ sonlu ise $\Gamma\left(D_{p,q'}x\right)=\Gamma\left(D_{p,q}x\right)$'dir.

Teorem 4.6.8. $E=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ $,E'=\{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ $,F=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tamsayıların (3.2.5) ve (4.3.1) koşullarını sağlayan dizileri $E'-E$ sonlu bir alt kümesi ve $\lim_{n\to\infty}\frac{q\left(n\right)-p'\left(n\right)}{q\left(n\right)-p\left(n\right)}=d>0$, olsun. Bu durumda, her $K\subseteq\mathbb{N}$ için $\delta_{D_{p,q}}(K)\neq 0$ ise $\delta_{D_{p',q}}(K)\neq 0$ dır.

İspat: $E'-E$ sonlu bir küme olduğundan $\exists N\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\left\{p'\left(n\right):n\geq N\right\}\subseteq\left\{p\left(n\right)\right\}_{n\in\mathbb{N}}$'dır. O halde, $n\geq N$ olmak üzere $j\left(n\right)$ monoton artan dizisi vardır öyle ki $p'(n)=p(j(n))$'dir. $\delta_{D_{p,q}}(K)\neq 0$ olsun. Yani,

$$\delta^*_{D_{p,q}}(K)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\{p\left(n\right)<k\leq q\left(n\right):\left|x_k-l\right|\geq\varepsilon\}\right|>0$$

dir. Böylece,

$$0<\frac{\left|\left\{p\left(n\right)<k\leq q\left(n\right):k\in K\right\}\right|}{q\left(n\right)-p\left(n\right)}\leq\frac{q\left(n\right)-p(j(n))}{q\left(n\right)-p\left(n\right)}.\frac{\left|\left\{p(j(n))<k\leq q\left(n\right):k\in K\right\}\right|}{q\left(n\right)-p(j(n))}$$

eşitsizliğinden

$$\delta^{*}_{D_{p',q}}(K)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p'(n)}\left|\{p'(n)<k\le q(n):k\in K\}\right|>0$$

elde edilir. Buradan $\delta_{D_{p',q}}(K)\neq 0$ dır.

Teorem 4.6.9. $x=(x_n)$ reel terimli bir dizi olmak üzere Teorem 4.6.8'ün koşulları altında**,**

I. $E'-E$ sonlu bir küme ise $\Gamma_{D_{p',q}}(x)\supseteq\Gamma_{D_{p,q}}(x)$'dir.

II. $E'\Delta E$ sonlu bir küme ise $\Gamma_{D_{p',q}}(x)=\Gamma_{D_{p,q}}(x)$'dir.

III. $E'-E$ sonlu bir küme ise $\Gamma(D_{p,q}x)\supseteq\Gamma(D_{p',q}x)$'dir.

IV. $E'\Delta E$ sonlu bir küme ise $\Gamma(D_{p,q}x)=\Gamma(D_{p',q}x)$'dir.

Teorem 4.6.10. $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q=\{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $p'=\{p'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$, $q'=\{q'(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri (3.2.5) ve (4.3.1)'in yanı sıra $\lim_{n\to\infty}\frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)}=d>0$ koşulunu sağlasın. Bu durumda,

$\forall K\subseteq\mathbb{N}$ için $\delta_{D_{p',q'}}(K)\neq 0$ ise $\delta_{D_{p'q}}(K)\neq 0$'dır.

İspat: $K\subseteq\mathbb{N}$ için $\delta_{D_{p',q'}}(K)\neq 0$ olsun. Yani,

$$\delta^{*}_{D_{p',q'}}(K)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{q'(n)-p'(n)}\left|\{p'(n)<k\le q'(n):|x_k-l|\ge\varepsilon\}\right|>0$$

dir. Böylece

$$0<\frac{\left|\{p'(n)<k\le q'(n):k\in K\}\right|}{q'(n)-p'(n)}\le\frac{q(n)-p(n)}{q'(n)-p'(n)}.\frac{\left|\{p(n)<k\le q(n):k\in K\}\right|}{q(n)-p(n)}$$

eşitsizliğinden

$$\delta^*_{D_{p,q}}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} \left|\{p(n) < k \le q(n) : k \in K\}\right| > 0$$

elde edilir. Böylece, $\delta_{D_{p,q}}(K) \neq 0$ dır.

Teorem 4.6.11. $x = (x_n)$ reel terimli bir dizi olmak üzere Teorem 4.6.10. koşulları altında $\Gamma_{D_{p,q}}(x) \supseteq \Gamma_{D_{p',q'}}(x)$ ve $\Gamma(D_{p',q'}x) \supseteq \Gamma(D_{p,q}x)$ sağlanır.

4.7. $\Gamma_{D_{p,q}}(x)$ İLE $\Gamma(x)$ KÜMELERİNİN KIYASLANMASI

Teorem 4.7.1. $p = \{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q = \{q(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların (3.2.5) koşullarını sağlayan keyfi dizileri öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $q(n) < n$ olsun. Bu durumda, $\forall K \subseteq \mathbb{N}$ için $\delta_{D_{p,q}}(K) \neq 0$ ise $\delta(K) \neq 0$ dır.

İspat: Teoremin koşulları altında $\delta_{D_{p,q}}(K) \neq 0$ olsun. Yani;

$$\delta^*_{D_{p,q}}(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{q(n)-p(n)} \left|\{p(n) < k \le q(n) : k \in K\}\right| > 0$$

dır. $q(n) < n$ olduğundan $\{p(n) < k \le q(n) : k \in K\} \subset \{1 < k \le n : k \in K\}$ içermesi ve buna bağlı olarak

$$0 < \frac{\left|\{p(n) < k \le q(n) : k \in K\}\right|}{q(n)-p(n)} \le \frac{n}{q(n)-p(n)} \cdot \frac{\left|\{k \le n : k \in K\}\right|}{n}$$

eşitsizliği sağlanır. Her iki tarafın $n \to \infty$ iken üst limiti alınırsa

$$\delta^*(K) = \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left|\{k \le n : k \in K\}\right| > 0,$$

olduğu elde edilir. Bu ise $\delta(K)\neq 0$ anlamına gelir.

Sonuç 4.7.2. $x=(x_n)$ reel terimli bir dizi olmak üzere Teorem 4.7.1. koşulları altında $\Gamma(x)\supseteq\Gamma_{D_{p,q}}(x)$ ve $\Gamma(D_{p,q}x)\supseteq\Gamma(x)$'dır.

Teorem 4.7.3. $p=\{p(n)\}_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların bir dizisi ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $q(n)=n$ olsun. Bu durumda, $\forall K\subseteq\mathbb{N}$ için $\delta_{D_{p,n}}(K)\neq 0$ ise $\delta(K)\neq 0$ dır.

İspat: $\delta_{D_{p,n}}(K)\neq 0$ olsun. Yani,

$$\delta^{*}_{D_{p,n}}(K)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n-p(n)}\left|\{p(n)<k\leq n:k\in K\}\right|>0$$

dir. Böylece,

$$0<\frac{\left|\{p(n)<k\leq n:k\in K\}\right|}{n-p(n)}\leq\frac{n}{n-p(n)}.\frac{\left|\{k\leq n:k\in K\}\right|}{n}$$

eşitsizliği sağlanır. Her iki tarafın $n\to\infty$ iken üst limit alınırsa

$$\delta^{*}(K)=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:k\in K\}\right|>0$$

elde edilir. Bu ise $\delta(K)\neq 0$ anlama gelir.

Sonuç 4.7.4. $x=(x_n)$ reel terimli bir dizi olmak üzere Teorem 4.7.3.'ün koşulları altında $\Gamma(x)\supseteq\Gamma_{D_{p,q}}(x)$ ve $\Gamma(D_{p,q}x)\supseteq\Gamma(x)$ sağlanır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu çalışmada öncelikle deferred Cesáro istatistiksel yakınsaklığın deferred Cesáro yakınsaklık ile arasındaki ilişkiler incelenmiştir (Teorem 4.1.1 – Teorem 4.1.5). Ayrıca, defferred Cesáro istatistiksel yakınsaklık ile olan ilişkisi verildi (Teorem 4.2.1 – Teorem 4.2.9).

Teorem 4.3.1 – Teorem 4.3.2 ‘de deferred istatistiksel yakınsama kendi arasında Teorem 4.4.1 – Teorem 4.4.3’de ise özel seçilmiş matrisler için elde edilen metodlar kıyaslanmıştır.

α kuvvetli deferred Cesáro yakınsama ve deferred istatistiksel yakınsama kıyaslanarak bazı içerme teoremleri verildi (Teorem 4.5.1 – Teorem 4.5.7).

Bulguların son bölümünde (4.6 deferred istatistiksel deme noktaları) bazı içerme teoremleri (Teorem 4.6.1 – Teorem 4.6.6 ve Teorem 4.7.1 – Sonuç 4.7.4) verilmiştir.

5.2.ÖNERİLER

Özellikle, deferred istatistiksel değme noktaları yardımı ile bir dizinin deferred istatistiksel core tanımı verilerek ilgili sonuçlar elde edilebilir.

Teorem 4.3.1'de (4.3.2) koşulu yerine $p(n) \leq p'(n)$ ve $q'(n) \leq q(n)$ eşitsizlikleri hemen hemen her $n \in \mathbb{N}$ için sağlandığında teoremin doğru olup olmadığı incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Agnew R. P., On Deferred Cesáro means, Ann. Of Math., 33 (1932), 413-421.

[2] Fast, H. , Sur la convergence statistique , Colloquium Math. , vol.2, (1951), 241-244.

[3] Steinhaus, H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique, Colloquium Math., vol.2,(1951),73-74.

[4] Maddox, I. J., Elements of Functional Analysis, Cambridge Univ. Press.(1970).

[5] Zygmund, A., Trigonometrik Series, Cambridge University Pres, Cambirdge, UK (1979).

[6] Schoenberg, I.,J., The integrability of certain functions and related summability methods, The American Math. Monthly, vol.66, (1959), 361-375.

[7] Fridy, J. A. On Statistical convergence, Analysis, 5, (1985), 301-313.

[8] Connor, J., Some Applications of Functional Analysis to Summability Theory, Ph. D. Thesis, Kent State Univ., USA, (1985).

[9] Connor, J., The statistical and stong p-Cesáro convergence of sequenses, Analysis, 8, (1988), 47-63.

[10] Connor, J., On stong matrix summability with respect to a modulus and statistical convergence, Canad. Math. Bull.,32, (1989), 194-198.

[11] Demirci, K. and Orhan, C., Bounded Multipliers of Bounded A-statistically Convergent Sequences, J. Math. Anal. Appl., 235, (1999), 122-129.

[12] Kline, J., The T-statistically Convergent Sequences are not an FK-space, Internat. J. Math. Sci., 184, (1995), 825-827.

[13] Erdös, P. and Tenenbaum, G., Sur les Densities de Certaines Suites d'entries, Proc. London Math. Soc., 59, (1989), 417-438.

[14] Miller,H. I., A measure theoretical subsequence characterization of statistical convergence, Transaction of American Math. Society, vol. 347, number5, (1995), 1811-1819.

[15] Miller, H. I. and Orhan, C., On Almost Convergent and Statistically Convergent Subsequences, Acta Math. Hungar., 93, (2001), 135-151.

[16] Fridy, J. A. and Khan, M. K., Tauberian Theorems Via Statistical Convergence, J. Math. Anal. Appl., 228, (1998), 73-95.

[17] Pehlivan, S. and Mamedov, M. A., Statistical Cluster Points and Turnpike, Optimization, 48, (2001), 93-106.

[18] Gadjiev, A. D. and Orhan, C., Some Approximation Theorems Via Statistical Convergence, Rocky Mountain J. Math., 32, (2002), 129-138.

[19] Buck, R. C., Generalized Asymptotic Density, Amer. J. Math. 75, (1953), 335-346.

[20] Freedman, A. R., Sember, J. J., Densities and Summability, Pacific Joumal of Math., vol.59, no.2, (1981), 283-305.

[21] Connor, J. S., Two Valued Measures and Summability, Analysis, 10, (1990), 373-385.

[22] Kolk, E., Matrix Summability of Statistically Convergent Sequences, Analysis. 13, (1993), 77-83.

[23] Fridy, J.,A., Statistical Limit Point , AMS, 118, number 4, (1993), 1187-1192.

[24] Connor, J. and Kline, J., On statistical limit points and the consistency of statistical convergence, J. Math. Anal. Appl., 197, (1996), 392-399.

[25] Niven I. and Zuckerman H.S., An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, Inc, New York, (1960).

[26] Hardy, G. H., Divergent Series. Oxford Univ. Press, London, (1949).

[27] Fridy, J. A. and Miller, H. I. A matrix characterization of statistical convergence, Analysis 11, (1991) 59-66.

[28] Armitage D. H. and Maddox I. J., A new type of Cesáro mean, Analysis, 9, (1989),195-204.

[29] Fridy, J. A., Orhan, C. Lacunary Statistical Convergence, Pacific J. Math., 10, (1993), 43-27.

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Müjde YILMAZTÜRK

Doğum Tarihi: 15/11/1988

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Lise/Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	Manisa Lisesi	2002-2005
Lisans	Matematik	Çanakkale Onsekiz Mart Üniversitesi	2005-2010
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2010-
Formasyon	Eğitim Bilimleri	Çukurova Üniversitesi	2011-2012

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. M.KUCUKASLAN, M. YILMAZTURK, Deferred statistical convergence, Kyunpook Mathematical Journal, Submitted, (2013)

2. M. YILMAZTURK, M.KUCUKASLAN, On Strongly Cesaro Summability and Deferred Statistical Convergence of Sequences, BEÜ Journal of Science and Technology, (2013)

3. M.KUCUKASLAN, M. YILMAZTURK, Deferred statistical convergence of Sequences, International Conference MADEA, MERSİN, (2012)

4. M. YILMAZTURK, Ö. MIZRAK, M.KUCUKASLAN, Deferred Statistical Cluster Points of Real Valued Sequences, Mathematical Communications, (2013).

5. M. YILMAZTURK, Ö. MIZRAK, M.KUCUKASLAN, Reel terimli dizilerin deferred istatistiksel değme noktaları, AMG-8, sayfa 105,(2013).