p-ADİK GAMMA FONKSİYONUNUN q-GENİŞLEMESİ

ADVİYE KÖRÜKÇÜ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. Hamza MENKEN

MERSİN
MAYIS - 2013

Adviye KÖRÜKÇÜ tarafından Doç.Dr. Hamza MENKEN danışmanlığında hazırlanan " p-adik Gamma Fonksiyonunun q-Genişlemesi " başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
Doç. Dr. Hamza MENKEN	....
Doç. Dr. Ali ÖZKURT	....
Doç.Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ...11/07/2013... tarih ve ...2013/13/387...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

T.C. MERSİN ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ 1993

***p*-ADİK GAMMA FONKSİYONUNUN *q*-GENİŞLEMESİ**

Adviye KÖRÜKÇÜ

ÖZ

Bu çalışmada *p*-adik gamma fonksiyonunun *q*-genişlemesi $\Gamma_{p,q}$ ele alınmış ve özellikleri incelenmiştir. $p=2$ özel durumunda $\Gamma_{p,q}$ fonksiyonu için yeni bir özdeşlik verilmiştir. Ayrıca, genel durumda $\Gamma_{p,q}$ fonksiyonu için yeni gösterimler elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: *p*-adik sayılar, *p*-adik gamma fonksiyonu, *p*-adik gamma fonksiyonunun *q*-genişlemesi

Danışman: Doç. Dr. Hamza MENKEN, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

ABSTRACT

In the present study, q-extension of the p-adic gamma function is studied and its properties are investigated. We give a new identity for the $\Gamma_{p,q}$ in the special case of $p = 2$. Furthermore, new representations of the q-extension of the p-adic gamma function are derived in general case.

Key Words: p-adic numbers, p-adic gamma function, q-extension of p-adic gamma function

Advisor: Assos. Prof. Hamza MENKEN, Department of Mathematics, Mersin Üniversity

TEŞEKKÜR

Bu çalışma,Mersin Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Matematik Ana Bilim Dalına Yüksek Lisans Tezi olarak hazırlanmış olup tez konusu, 'p-Adik Gamma Fonksiyonunun q-Genişlemesi' dir.

Yüksek Lisans öğrenimim boyunca ve çalışmanın hazırlanış sürecinde yardımlarını esirgemeyen, deneyimlerini paylaşan danışman hocam Doç. Dr. Hamza Menken'e, başta bölüm başkanımız Prof. Dr. Fahreddin Abdullayev olmak üzere Matematik Bölümü'nün tüm öğretim elemanlarına ve ayrıca beni destekleyen başta annem ve babam olmak üzere tüm aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$\mathbb{Z}$	Tamsayılar
$\mathbb{Q}$	Rasyonel Sayılar
$\lvert\ \rvert_P$	*p*- Adik norm
$\mathbb{Q}_p$	*p*- Adik Sayılar
$\mathbb{Z}_p$	*p*- Adik Tamsayılar Halkası
$\mathbb{C}_p$	$\mathbb{Q}_p$ nin Cebirsel Kapanışının Tamlaştırılması
Γ	Klasik Gamma Fonksiyonu
Γ_p	*p*-adik Gamma Fonksiyonu
Γ_q	Klasik Gamma Fonksiyonunun *q*-genişlemesi
$\Gamma_{p,q}$	*p*-adik Gamma Fonksiyonunun *q*-genişlemesi
γ	Klasik Euler Sabiti
γ_p	*p*-adik Euler Sabiti
γ_q	Klasik Euler Sabitinin *q*-genişlemesi
$\gamma_{p,q}$	*p*-adik Euler Sabitinin *q*-genişlemesi

1.GİRİŞ

Bilimsel çalışmalarda ve günlük yaşamda genellikle rasyonel sayılar kullanılır. $\mathbb{Q}$ Rasyonel sayılar cismi ise trivial olmayan hiçbir norma göre tam değildir. $\mathbb{Q}$ Rasyonel sayılar cisminin genel mutlak değer metriğine göre tamlaştırılması ile $\mathbb{R}$ Reel sayılar cismi elde edilir. Ostrowski Teoremi ile $\mathbb{Q}$ daki her norm ya genel mutlak değer metriğine ya da p bir asal sayı olmak üzere $|\cdot|_p$ p-adik normuna denktir [Gouvêa, 1997]. Şimdi p-adik normu kısaca tanıtalım. p keyfi fakat sabit bir asal sayı olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ için

$$x = p^{\alpha} \cdot \frac{a}{b}, \; p \nmid a \cdot b$$

olacak şekilde tek türlü belirli bir $\alpha \in \mathbb{Q}$ tamsayısı vardır ve bu durumda

$$|x|_p = p^{-\alpha}$$

ile tanımlanır. Eğer $x = 0$ ise $|0|_p = 0$ olarak alınır. $|\cdot|_p$ fonksiyonu bir norm tanımlar ve üçgen eşitsizliğinde daha güçlü olan ve ultra metrik üçgen eşitsizliği bilinen

$$|x+y|_p \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}$$

eşitsizliğini sağlar. Ultrametrik üçgen eşitsizliğini sağlayan normlara Arşimedyan olmayan norm ve bu normlu cisimlerde yapılan analize de Non-Arşimedyan Analiz denir. $\mathbb{Q}$ Rasyonel sayılar cismin $|\cdot|_p$ p-adik normuna göre tamlaştırılması ile elde edilen cisme $\mathbb{Q}_p$ p-adik sayılar cismi denir. Ostrowski teoremi ile $\mathbb{Q}$ Rasyonel sayılar cismin mümkün olan tamlaştırmaları Arşimedyan olan $\mathbb{R}$ Reel sayılar cismi ve p bir asal olmak üzere Arşimedyan olmayan $\mathbb{Q}_p$ p-adik sayı cisimleridir. $\mathbb{Q}_p$ p-adik sayılar cismi 1904 te Kurt Hensel tarafından inşa edilmiş ve uzun süre bu sayılar sadece sayılar teorisinin özel bir alanında kullanılmıştır. Fizikte niye sadece reel sayıların kullanıldığı sorgulanmış ve 1968 te iki teorik matematikçi A.F. Monna ve F. Van der Blij tarafından p-adik sayılar fizikte kullanılmıştır. 1984 te V.S. Vladimirov ve I. V. Volovich tarafından p-adik sayıların süper cisim teorisine başarılı bir şekilde uygulanması ile birlikte p-adik sayılar uygulamalı alanlarda da kullanılmaya başlanmıştır [Vladimirov, Volovich, Zelenov, 1998]. Bununla beraber fizikte p-adik evren modeli, p- adik kuantum teorisi, p-adik sicim kuramı gibi alanlar oluşmuştur. Matematikte p-adik sayıların kullanılması ile yapılan çalışmalar p-adik analiz denilen bir alanda toplanmıştır. Reel sayılarla verilen kavramlar p-adik sayıların kullanılması ile yeniden tanımlanmasına ve yorumlanmasına başlanmıştır.

Bu çalışmada klasik durumda çok önemli kullanıma sahip olan Gamma fonksiyonunun q-genişlemesinin p-adik sayılar cismindeki karşılığı olan p-adik Gamma fonksiyonun q-genişlemesi incelemektedir. Klasik Gamma fonksiyonu $n \to (n-1)!$ faktöriyel fonksiyonun bir genişletilmesidir. Faktöriyel fonksiyonun p-adik versiyonun bir genişletilmişi olarak $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ p-adik Gamma fonksiyonu

$$\Gamma_p(x) := \lim_{n\to x} (-1)^n \prod_{1\le j<n}{}' j$$

ile tanımlanır [Morita, 1975]. Bu fonksiyonun özellikleri ve diğer özel fonksiyonlarla ilişkileri birçok yazar tarafından araştırılmıştır [Koblitz, Barsky, Kim, vs.]. Γ_p p-adik Gamma fonksiyonun q-genişlemesi, $|q-1|_p < 1, q \neq 1$ olmak üzere

$$\Gamma_{p,q}(n) = (-1)^n \prod_{j<n}{}' \frac{1-q^j}{1-q}$$

fonksiyonunun $\mathbb{Z}_p^{\,*}$ ya sürekli bir fonksiyona genişletilmesidir ve

$$\lim_{q\to 1} \Gamma_{p,q} = \Gamma_p$$

Bu çalışmada $\Gamma_{p,q}$ fonksiyonun özellikleri incelenmiş ve bazı gösterimleri elde edilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Klasik Gamma Fonksiyonu ilk olarak Leonard Euler (1707-1783) tarafından

$$\Gamma(x)=\int_0^1(-\log t)^{x-1}dt \quad (x>0)$$

formülü ile tanımlanmıştır. Uygun değişken dönüşümü ile bu fonksiyon

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad (x>0)$$

olarak daha yaygın biçimde verilmiştir [Artin,1964]. Bu fonksiyon reel kısmı pozitif olan kompleks sayılara analitik bir fonksiyon olarak genişletilmiştir. Klasik Gamma fonksiyonu özel transandant fonksiyonlar kategorisine ait ve matematikte birçok sabit bununla ifade edilir. Bu fonksiyonun sağladığı temel bağıntı

$$\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$$

dir. $x=n\in\mathbb{N}$ alınırsa

$$\Gamma(n+1)=n!$$

elde edilir. Bu bağıntıdan dolayı Gamma fonksiyonu genelleştirilmiş faktöriyel fonksiyon olarak da bilinir. Başka bir deyişle, Gamma fonksiyonu $\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ ye $n+1\to n!$ fonksiyonun bir genişletilmişidir. Klasik Gamma fonksiyonun *p*-adik analogunu tanımlamak için faktöriyel fonksiyonun *p*-adik versiyonu tanımlanmıştır. Bu fonksiyon p bir asal sayı olmak üzere

$$(n!)_p=(-1)^n\prod_{\substack{1\le j<n\\(j,p)=1}} j$$

ile verilir. $n\to(n!)_p$ fonksiyonu süreklidir ve $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}_p$ de yoğun olduğundan bu fonksiyonun $\mathbb{Z}_p$ ye bir tek sürekli genişletilmişi vardır ve buna p-adik Gamma fonksiyonu denir [Morita,1975]. Daha açık olarak $\Gamma_p:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Q}_p$ (p-adik Gamma) fonksiyonu

$$\Gamma_p(x):=\lim_{n\to x}(-1)^n\prod_{\substack{1\le j<n\\(j,p)=1}} j$$

ile tanımlanır**.** Bu fonksiyon ilk olarak Morita (1975) tarafından tanımlanmış ve daha sonra J. Diamond (1977) , D. Barsky (1979) , B. Gross ve N. Koblitz (1975) ,

H. Cohen ve E. Friedman (2008) ve I. Shapiro (2012) gibi birçok matematikçi tarafından incelenmiştir.

Klasik duruma benzer şekilde N. Koblitz(1980) p-adik Gamma fonksiyonun q-genişlemesini $|q-1|_p < 1, q \neq 1$ olmak üzere $\mathbb{N} \to \mathbb{N}$ ye

$$\Gamma_{p,q}(n) = (-1)^n \prod_{j<n}{}' \frac{1-q^j}{1-q}$$

fonksiyonunun $\mathbb{Z}_p^{\ *}$ ya sürekli bir fonksiyona genişletilmesi olarak tanımlamıştır. Burada, $\lim_{q \to 1} \Gamma_{p,q} = \Gamma_p$ sağlanır.

$\Gamma_{p,q} : \mathbb{Z}_p^* \to \mathbb{Q}_p$ p-adik Gamma fonksiyonun q-genişlemesi üzerine N. Koblitz (1980, 1982) , H. Nakazato (1988) , T. K. Kim et al. (1997) , and Y.S. Kim (1998) gibi birçok yazar çalışmıştır. Bu tezde $\Gamma_{p,q}$ p- adik Gamma fonksiyonun yeni özellikleri ve gösterimleri elde edilmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. p-ADİK SAYILAR

Tanım 3.1.1: K bir cisim olmak üzere, $|\ | : K \to [0, \infty)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa buna K da bir norm denir:

1) Her x$\in K$ için, $|x| \geq 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) Her x,y$\in K$ için, $|xy| = |x||y|$

3) Her x,y$\in K$ için, $|x+y| \leq |x| + |y|$ (üçgen eşitsizliği)

3) koşulu yerine daha güçlü bir koşul olan

4) Her x,y$\in K$ için, $|x+y| \leq \max\{|x|, |y|\}$

koşulu sağlanırsa buna K da bir ***non-arşimedyan norm*** denir. (4) koşulunu sağlamayan $|\ |$ normuna ***arşimedyan*** denir.

(4) koşuluna "***ultrametrik üçgen eşitsizliği***" denir ve üçgen eşitsizliğinden daha güçlüdür. Çünkü $\forall$ x, y$\in K$ için

$$\max\{|x|, |y|\} \leq |x| + |y|$$

sağlanır.

Örnek 3.1.1: |x|= $\begin{cases} x, x \geq 0 \\ -x, x < 0 \end{cases}$ ile tanımlı fonksiyon (genel mutlak değer) bir arşimedyan normdur.

Bu norm genellikle $|\ |_\infty$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.2: p sabit fakat keyfi bir asal sayı olmak üzere $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde $|\ |_p$ p-adik normu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

$x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ olsun. Bu durumda

$$x = p^{\alpha} \cdot \frac{a}{b}, \; p \nmid a \cdot b$$

olacak şekilde tek türlü belirli bir $\alpha \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır ve bu durumda

$$|x|_p = p^{-\alpha}$$

ile tanımlanır [Gouvêa, 1997].

Eğer $x = 0$ ise $|0|_p = 0$ olarak alınır.

Örnek 3.1.2: $p = 5$ için $|35|_5 = 5^{-1}$, $p = 3$ için $|45|_3 = 3^{-2}$ dir.

Her p asal sayısı için $|\ |_p$ non-arşimedyandır.

Teorem 3.1.1: (Ostrowski) $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlı her non-trivial norm, $p = \infty$ veya p bir asal sayı olmak üzere bir $|\ |_p$ normuna denktir.

Ostrowski teoremi ile $\mathbb{Q}$ da mümkün olan bütün denk normlar belirlidir.

Şimdi tamlaştırma için gerekli olan topoloji kavramları hatırlatalım:

Tanım 3.1.3: K bir cisim ve $|\ |$ K da bir norm olsun.

1) (x_n) K da bir dizi olsun. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n, m \geq N$ iken $|x_n - x_m| < \varepsilon$ ise (x_n) ye bir Cauchy dizisi denir.

2) K nın her Cauchy dizisi (K da) bir limite sahipse K ya tamdır denir.

3) $S \subset K$ olsun. Her x∈K ve her $\varepsilon > 0$ için B(x,ε) ∩S≠0 ise

S ye K da yoğundur denir. Burada

$$B(x,\in)=\{y\in K \,|\, |x-y|<\in\}$$ dir.

Teorem 3.1.2: $\mathbb{Q}$ cismi herhangi bir trivial olmayan norma göre tam değildir.

Analizden biliyoruz ki

• $|\ |_\infty$ $\mathbb{R}$ ye genişletilebilir.

• $\mathbb{R}$, $|\ |_\infty$ normuyla üretilen metriğe göre tamdır.

• $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğundur.

Yani, $\mathbb{R}$ $\mathbb{Q}$ nun $|\ |_\infty$ normuna göre tamlaştırılmasıdır.

$\mathbb{Q}$ nun $|\ |_p$ *p*-adik normuna göre tamlaştırılması aşağıdaki şekilde yapılabilir:

Teorem 3.1.3: $\mathbb{Q}$ nun bir (x_n) dizisi non-arşimedyan $|\ |_p$ normuna göre bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul, $\lim\limits_{n\to\infty}|x_{n+1}-x_n|_p=0$ olmasıdır.

Tanım 3.1.4: $|\ |=|\ |_p$, $\mathbb{Q}$ da bir p-adik norm olsun. $\mathbb{Q}$ nun $|\ |_p$ ye göre bütün Cauchy dizilerinin kümesini C veya C($\mathbb{Q}$) ile gösterelim:

$$C=C(\mathbb{Q})=\{(x_n):(x_n),|\ |_p \text{ ye göre bir Cauchy dizisidir}\}$$

C kümesi

$$(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n)$$

$$(x_n).(y_n)=(x_n.y_n)$$

ile tanımlı işlemlere göre bir birimli halkadır.

Tanım 3.1.5: $N \subset C$ ideali, $| \ |_p$ ye göre 0 a yakınsayan dizilerin kümesi olarak

$$N = \{(x_n) \in C : x_n \to 0\} = \left\{(x_n) : \lim_{n\to\infty} |x_n|_p = 0\right\}$$

ile tanımlanan küme C nin bir maksimal idealidir. Buna göre N maksimal ideal olduğundan C / N bir cisim oluşturur.

Tanım 3.1.6: $\mathbb{Q}_p$ *p*-adik sayılar cismi, C halkasının N maksimal idealine bölüm cismi olarak tanımlanır:

$$\mathbb{Q}_p = C / N$$

$\mathbb{Q}_p$ ye ***p*-adik sayılar cismi** denir [Gouvêa, 1997].

Her $x \in \mathbb{Q}$ sayısı (x) sabit dizisinin denklik sınıfının temsilcisi olarak alırsa $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ olduğu görülür ve $| \ |_p$ $\mathbb{Q}_p$ ye genişletilebilir.

Tanım 3.1.7: $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ ve (x_n) λ ile gösterilen bir Cauchy dizisi ise

$$|\lambda|_p := \lim_{n\to\infty} |x_n|_p$$

ile tanımlıdır.

($\mathbb{Q}_p$ bir bölüm cismi olduğundan $\mathbb{Q}_p$ nin elemanları Cauchy dizilerinin denklik sınıflarıdır.)

Teorem 3.1.4: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ nin yoğun bir altkümesidir.

Sonuç 3.1.1: Her $p \in Z$ asal sayısı için , $|\ |_p$ non-arşimedyan norma sahip bir $\mathbb{Q}_p$ cismi vardır öyle ki;

1) $|\ |_p$ nin $\mathbb{Q}$ ya kısıtlanışı $|\ |_p$ p-adik normunu verir,

2) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ de yoğundur,

3) $\mathbb{Q}_p$, $|\ |_p$ ye göre tamdır.

(1), (2) ve (3) koşullarını sağlayan $\mathbb{Q}_p$ cismi normu koruyan izomorfizm hariç tek türlü belirlidir.

Tanım 3.1.8: 0-merkezli kapalı birim topuna

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1 \right\}$$

p -adik tamsayılar halkası denir. Bu küme hem kapalı hem açıktır. [Gouvêa, 1997]

Teorem 3.1.5: (Gösterim)

- $\forall x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ...$$

olacak şekildeki tek türlü

$$a_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$$

sayıları vardır.

- $\forall x \in \mathbb{Q}_p$ için

$$x = a_{-m} p^{-m} + ... + a_{-1} p^{-1} + a_0 + a_1 p + ...$$

olacak şekilde tek türlü belirli

$a_i \in \{0,1,...,p-1\}$

sayıları vardır. Burada, $a_{-m} \neq 0$ ise $|x|_p = p^m$ dir.

3.2. KLASİK GAMMA FONKSİYONU

Tanım 3.2.1: (Euler 1730) $x > 0$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^1 \left(-\log(t)\right)^{x-1} d_t \quad \ldots(3.2.1)$$

Uygun değişken dönüşümü ile Tanım 3.2.1. daha kullanışlı bir hale gelir:

Teorem 3.2.1: $x > 0$ için

$$\Gamma(x) = \int_0^\infty t^{x-1} e^{-t} dt \qquad (\text{ 3.2.1 de } u = -\log t \text{ alınarak })$$

ya da

$$\Gamma(x) = 2\int_0^\infty t^{2x-1} e^{-t^2} dt \qquad (\text{ 3.2.1 de } u^2 = -\log t \text{ alınarak })$$

Tanım 3.2.2:

$$\Gamma(x) = \int_0^{+\infty} e^{-t} t^{x-1} dt$$

olarak tanımlanan fonksiyona ***Gamma fonksiyonu*** denir. Bu formül Euler'in ikinci integrali olarak da bilinir [Artin, 1964].

Teorem 3.2.2: (Bohr - Mollerup, 1922) $\log\left(f\left(x\right)\right)$ konveks ve

$$f\left(1\right)=1$$
$$f\left(x+1\right)=x\,f\left(x\right)$$

koşullarını sağlayan tek bir $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon Gamma fonksiyonudur.

Hatırlatalım ki eğer $f:\left[a,b\right]\to\mathbb{R}$ sürekli, $\forall x,y\in I$ ve $0<\alpha<1$ için

$$f\left(\alpha x+\left(1-\alpha\right)y\right)\leq\alpha f\left(x\right)+\left(1-\alpha\right)f\left(y\right)$$

ise f ye konveks denir.

Tanım 3.2.3: (Euler.1729 ve Gauss,1811)

$$\Gamma_n\left(x\right)=\frac{n!n^x}{\left(x\right)\left(x+1\right)...\left(x+n\right)}=\frac{n^x}{x+\left(1+x/1\right)..\left(1+x/n\right)}$$

olarak tanımlanmıştır. O zaman

$$\Gamma\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\Gamma_n\left(x\right)$$

dir.

$\Gamma\left(x\right)$ in temel özellikleri:

•$\Gamma\left(n\right)=\left(n-1\right)!.\ (n=1,2,...)$

•Herhangi $x>0$ için $\Gamma\left(x+1\right)=x.\Gamma\left(x\right)$ dir.

•Her bir $x>0$ ve her pozitif n tamsayısı için

$$\Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)...(x+1)x\Gamma(x)$$

Tanım 3.2.2. sadece pozitif x ler için tanımlıdır. Bu tanıma negatif gerçel sayıları katılabilir:

x, $-n<x<-n+1$ aralığında tanımlı ise

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x(x+1)...(x+n-1)}\Gamma(x+n)$$

dir.

Özel olarak, herhangi $x>0$ için $(0,1]$ aralığındaki $\Gamma(x)$ için şunu bilmek yeterlidir:

$$\int_0^{+\infty} e^{-t}dt=1$$

olduğundan

$$\Gamma(1)=1$$

dir ve bundan dolayı da

$$\Gamma(n)=(n-1)!$$

dir.

• $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin \pi x}$ genellikle Euler'in fonksiyonel denklemi olarak adlandırılır.

• (Gamma fonksiyonunun Weierstrass formu)

$$\Gamma(x)=e^{-cx}\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{i}}}{1+\frac{x}{i}}=e^{-cx}\frac{1}{x}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{i}}}{1+\frac{x}{i}}$$

Burada $c=\lim_{n\to\infty}1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log n=-\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$ dir. Genellikle c Euler sabiti olarak adlandırılır. Biliyoruz ki

$$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi} \text{ dir.}$$

3.3. p-ADİK GAMMA FONKSİYONU

Tanım 3.3.1: *p*-adik gamma fonksiyonu,

$$n \to (-1)^n \prod_{\substack{1 \le j < n \\ (j,p)=1}} j \equiv (-1)^n \prod_{1 \le j < n}{}' j \ (n \ge 2)$$

fonksiyonun $\mathbb{Z}_p$ ye sürekli genişlemesi olarak tanımlanır. Burada $\prod'$ p ile bölünenlerin atılması anlamına gelmektedir.

$p = 2$ özel durumu için

$$\Gamma_2(n) := (-1)^n \prod_{\substack{1 \le j < n \\ (j,2)=1}} j = (-1)^n \prod_{1 \le j < n}{}' j$$

olarak tanımlanır.

$\mathbb{Z}_2$ ye sürekli bir fonksiyona genişletilebilir.

Özetle, $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ fonksiyonu

$$\Gamma_p(x) := \lim_{n \to x} (-1)^n \prod_{1 \le j < n}{}' j$$

ile tanımlanır[Schikhof, 1984].

Teorem 3.3.1: $p \ne 2$ olsun O zaman Γ_p aşağıdaki özelliklere sahiptir:

1) $\forall x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\Gamma_p(x+1) = h_p(x)\Gamma_p(x)$$

dir ve burada

$$h_p(x)=\begin{cases} -x, & |x|_p=1\ ise \\ -1, & |x|_p<1\ ise \end{cases}$$

2) $\forall x,y\in\mathbb{Z}_p$ için

$$\left|\Gamma_p(x)-\Gamma_p(y)\right|_p\leq |x-y|_p$$

3) $\Gamma_p(0)=1, \Gamma_p(1)=-1, \Gamma_p(2)=1$ ve $\forall x\in\mathbb{Z}_p$ için $\left|\Gamma_p(x)\right|_p=1$ dir.

Teorem 3.3.2 : $n\in\mathbb{N}$ için $\Gamma_p(-n)=(-1)^{n+1-\left[\frac{n}{p}\right]}\left(\Gamma_p(n+1)\right)^{-1}$ dir.

Teorem 3.3.3 : $p\neq 2$ ise o zaman

$$\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x)=(-1)^{l(x)}\quad \left(x\in\mathbb{Z}_p\right)$$

sağlanır. $p=2$ ise her $x\in\mathbb{Z}_2$ için

$$\Gamma_2(x)\Gamma_2(1-x)=(-1)^{\sigma_1(x)+1}\quad \left(x\in\mathbb{Z}_2\right)$$

dir. Burada $l, l:\mathbb{Z}_p\to\{1,2,...,p\}$ mod $p\mathbb{Z}_p$ ye göre kalandır ve σ_1 ,

$$\sigma_1\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j 2^j\right)=a_1$$

formülüyle tanımlanmıştır.

Not 3.3.1: $\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x)$ için formül

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z)=\frac{\pi}{\sin\pi z}..........(*)$$

klasik formülünün p-adik analoğunu oluşturur.

$(*)$ da $z=\dfrac{1}{2}$ alırsak $\Gamma\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=\pi$ elde edilir.

$p\neq 2$ için $\Gamma_p\left(\dfrac{1}{2}\right)^2=(-1)^{l\left(\frac{1}{2}\right)}$

$$l\left(\frac{1}{2}\right)=l\left(\frac{1}{2}(p+1)\right)=\frac{1}{2}(p+1)$$

$$\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^2=\begin{cases}1, & p\equiv 3(\bmod 4)\\ -1, & p\equiv 1(\bmod 4)\end{cases}\quad \text{dir.}$$

Böylece, klasik durumda $\pi=3{,}14.......$ tarafından oynanan rol p-adik durumda 1,-1 sayılarının birisi tarafından devralınır.

Teorem 3.3.4: (p-adik çarpım formülü)

$\forall x\in\mathbb{Z}_p$ için $l(x)\in\{1,2,...,p\},|x-l(x)|_p<1$ olsun. $l_1(x)=p^{-1}(x-l(x))\ (x\in \mathbb{Z}_p)$ olsun. O zaman m>1 için m, p tarafından bölünmesin. O halde

$$\prod_{j=0}^{m-1}\Gamma_p\left(x+\frac{j}{m}\right)=\left(\prod_{j=0}^{m-1}\Gamma_p\left(\frac{j}{m}\right)\right)m^{1-l(mx)}\left(m^{p-1}\right)^{-l_1(mx)}\Gamma_p(mx)$$

Teorem 3.3.5: (Γ_p hakkında temel formüller) [Schikhof, 1984]

$n\in\mathbb{N}$ ve s_n p tabanında $n=\sum_{j=0}^{s}a_jp^j\ (a_s\neq 0)$ sayılarının toplamı olsun.

O zaman

1) $\Gamma_p(n+1)=(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{\left[\frac{n}{p}\right]!\,p^{\left[\frac{n}{p}\right]}}$

2) $\Gamma_p\left(p^n\right)=\left(-1\right)^p \dfrac{p^n\,!}{p^{n-1}!\,p^{p^n-1}}$

3) $n!=\left(-1\right)^{n+1-s}\left(-p\right)^{\frac{\left(n-s_n\right)}{p-1}}\prod_{j=0}^{s}\Gamma_p\left(\left[\dfrac{n}{p^j}\right]+1\right)$

4) $p^n\,!=\left(-1\right)^p\left(-p\right)^{\frac{\left(p^n-1\right)}{(p-1)}}\prod_{j=0}^{n}\Gamma_p\left(p^j\right)$

Tanım 3.3.2: [Schikhof, 1984]

$$\gamma_p := -\frac{\Gamma'_p\left(1\right)}{\Gamma_p\left(1\right)}=\Gamma'_p\left(1\right)=-\Gamma'_p\left(0\right)$$

olarak tanımlanan γ_p ye p-adik Euler sabiti denir.

3.4. p-ADİK GAMMA FONKSİYONUNUN q-GENİŞLEMESİ

Tanım 3.4.1: $0 < q < 1$ parametresine bağlı klasik gamma fonksiyonunun q-genişlemesi $\Gamma_q(x)$,

$$\Gamma_q(x) = (1-q)^{1-x} \frac{(1-q)(1-q^2)(1-q^3)...}{(1-q^x)(1-q^{x+1})(1-q^{x+2})...}$$

ile F.H.Jackson (1910), R.Askey (1978), G. E. Andrews ve diğerleri tarafından tanımlanmıştır ve

$$\lim_{q\to 1^-} \Gamma_q(x) = \Gamma(x)$$

dir.

Tanım 3.4.2: [Koblitz, 1980]

$t \in \mathbb{C}_p$ (p-adik sayıların cismi $\mathbb{Q}_p$ nin cebirsel kapanışının p- adik tamlanması) , p asal sayı, $|t|_p < 1, t \neq 0$ olsun. $q = 1 + t$ ve herhangi n için p-adik gamma fonksiyonunun q-genişlemesi

$$\Gamma_{p,q}(n) = (-1)^n \prod_{j<n}{}' \frac{1-q^j}{1-q}$$

ile tanımlanır.

$\Gamma_{p,q}(n)$ p-adik tamsayılar halkası $\mathbb{Z}_p$ den p-adik birim $\mathbb{Z}_p^*$ a sürekli bir fonksiyona genişletilebilir ve

$$\lim_{q\to 1} \Gamma_{p,q} = \Gamma_p$$

dir.(Burada $\prod'$ p ile bölünenlerin ihmal edilmesi anlamına gelmektedir)

Teorem 3.4.1: p herhangi asal olsun. O zaman $\Gamma_{p,q}$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

(1) $\forall x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\Gamma_{p,q}\left(x+1\right) = \epsilon_{p,q}\left(x\right)\Gamma_{p,q}\left(x\right), \quad \epsilon_{p,q}\left(x\right) = \begin{cases} -[x], & |x|_p = 1\, ise \\ -1, & |x|_p < 1\, ise \end{cases}$$

Burada, $[x] = \dfrac{1-q^x}{1-q}$ dir.

(2)

(i) Eğer ya $p \neq 2$ ya da $p = 2$ ve $|x-y|_p \neq \dfrac{1}{4}$ ise o zaman $\forall x, y \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\left|\Gamma_{p,q}\left(x\right) - \Gamma_{p,q}\left(y\right)\right|_p \leq |x-y|_p$$

(ii) $p = 2$ ve $|x-y|_p = \dfrac{1}{4}$ ise o zaman $\forall x, y \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\left|\Gamma_{p,q}\left(x\right) - \Gamma_{p,q}\left(y\right)\right|_p \leq 2|x-y|_p$$

(3) $\Gamma_{p,q}\left(1\right) = -1$ ve $\Gamma_{p,q}\left(2\right) = -1$

(4) $\forall x \in \mathbb{Z}_p$ için $\left|\Gamma_{p,q}\left(x\right)\right|_p = 1$ dir[Kim, 1998]

Teorem 3.4.2: Herhangi p asalı için , $\Gamma_{p,q}(-n)\,(n\in\mathbb{N})$

$$\Gamma_{p,q}(-n)=(-1)^{n+1-\left[\frac{n}{p}\right]}\prod_{\substack{j<n+1\\(p,j)=1}}q^{j}\left(\Gamma_{p,q}(n+1)\right)^{-1}$$ dir [Kim, 1998].

Teorem 3.4.3: $p\neq 2$ ise o zaman $\forall x\in\mathbb{Z}_p$ için

$$\Gamma_{p,q}(x)\Gamma_{p,q}(1-x)=(-1)^{l(x)}\lim_{n\to x}\prod_{\substack{j<n\\(p,j)=1}}q^{j}$$

dir. Burada $l,\, l:\mathbb{Z}_p\to\{1,2,..,p\}$ mod $p\mathbb{Z}_p$ ye göre kalandır. [Kim, 1998]

Teorem 3.4.4:

(1) $$\frac{\Gamma_{p,q}(x+1)}{\Gamma_{p,q}(x)}=\begin{cases}-\dfrac{(1-q^{x})}{(1-q)}, & x\in\mathbb{Z}_p^{*}\\ -1, & x\in p\mathbb{Z}_p\end{cases}$$

(2) $$\Gamma_{p,q}(x)\Gamma_{p,q^m}\left(\frac{1}{m}\right)\Gamma_{p,q^m}\left(\frac{2}{m}\right)...\Gamma_{p,q^m}\left(\frac{m-1}{m}\right)=$$
$$\Gamma_{p,q^m}\left(\frac{x}{m}\right)\Gamma_{p,q^m}\left(\frac{x+1}{m}\right)...\Gamma_{p,q^m}\left(\frac{x+m-1}{m}\right)\left(\frac{1-q^{m}}{1-q}\right)^{\bar{x}-x}$$

Burada $x\in\mathbb{Z}_p$ ve p herhangi pozitif asal ,- , $n\to\bar{n}=\left[(n-1)/p\right]+1$ dönüşümünün $\mathbb{Z}_p$ için tek sürekli genişlemesidir

.

(3) $\Gamma_{p,q}(x)\Gamma_{p,\frac{1}{q}}(1-x)=-(-q)^{\bar{x}-x}$ [Koblitz, 1980].

Teorem 3.4.5: $n \in \mathbb{N}$ olsun. O zaman

$$\Gamma_{p,q}(n+1) = (-1)^{n+1} \frac{[n;q]!}{[p;q]^{\left[\frac{n}{p}\right]} \left[\left[\frac{n}{p}\right];q^p\right]!}$$

dir. Özellikle

$$\Gamma_{p,q}(p^n) = (-1)^p \frac{[p^n - 1;q]!}{[p;q]^{p^{n-1}-1} [p^{n-1} - 1;q^p]!}$$

dir[Kim, 1998]

Teorem 3.4.6: γ_p p-adik Euler sabitinin bir q-genişlemesi $\gamma_{p,q}$

$$\gamma_{p,q} = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \left\{ 1 - (-1)^p \frac{[p^n - 1;q]!}{[p;q]^{p^{n-1}-1} [p^{n-1} - 1;q^p]!} \right\}$$

dir[Kim, 1998].

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu kısımda tez çalışmasından elde edilen sonuçlar verilmiştir.

Bir önceki bölümde teorem 3.4.3 ile teoremden $p \neq 2$ ise o zaman $\forall x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\Gamma_{p,q}(x)\Gamma_{p,q}(1-x) = (-1)^{l(x)} \lim_{n \to x} \prod_{\substack{j<n \\ (p,j)=1}} q^j \quad n \in \mathbb{N}$$

olduğunu biliyoruz.(Burada $l, l : \mathbb{Z}_p \to \{1,2,..,p\}$ mod $p\mathbb{Z}_p$ ye göre kalandır)
Şimdi ise $p = 2$ durumu için hangi eşitliğin sağlandığını inceleyelim.

Teorem 4.1: $p = 2$ ve her $x \in \mathbb{Z}_2$ için

$$\Gamma_{2,q}(x)\Gamma_{2,q}(1-x) = (-1)^{1+\sigma_1(x)} \lim_{n \to x} \prod_{\substack{j<n \\ (2,j)=1}} q^j$$

dir. Burada σ_1,

$$\sigma_1\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j\right) = a_1$$

formülüyle tanımlıdır.

İspat:

$p = 2$ ve $n \in \mathbb{N}$ olsun. Teorem 3.3.2 den

$$\Gamma_{p,q}(-n) = (-1)^{n+1-\left[\frac{n}{p}\right]} \prod_{\substack{j<n+1 \\ (p,j)=1}} q^j \left(\Gamma_{p,q}(n+1)\right)^{-1}$$

olduğunu biliyoruz. O halde

$$\Gamma_{2,q}(n+1)\Gamma_{2,q}(-n) = (-1)^{n+1-\left[\frac{n}{2}\right]} \prod_{\substack{j<n+1 \\ (2,j)=1}} q^j$$

olur. Burada [.] büyük tamsayı fonksiyonudur.

Burada n yerine n-1 alırsak

$$\Gamma_{2,q}(n)\Gamma_{2,q}(1-n)=(-1)^{n-\left[\frac{n-1}{2}\right]}\prod_{\substack{j<n\\(2,j)=1}} q^{j}$$

elde edilir. 2 tabanına göre

$$n=a_0+2a_1+2^2a_2+...$$

olsun.

$a_0\neq 0$ ise $\bmod 2$ ye göre $a_0=1$ olmalıdır.

$$\begin{aligned}\left[\frac{n-1}{2}\right]&=\left[\left(a_0-1+2a_1+2^2a_2+...\right)/2\right]\\&=a_1+2a_2+...\\&\equiv a_1 \pmod 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{n-\left[\frac{n-1}{2}\right]}&=(-1)^{n}(-1)^{-\left[\frac{n-1}{2}\right]}=(-1)^{1}(-1)^{-a_1}\\&=(-1)^{1-a_1}=(-1)^{1+a_1}\\&=(-1)^{1+\sigma_1}\end{aligned}$$

$a_0=0$ ise

$$\begin{aligned}\left[\frac{n-1}{2}\right]&=\left[\left(-1+2a_1+2^2a_2+...\right)/2\right]\\&=\left[1+\left(a_1-1\right)2+a_2 2^2+.../2\right]\\&=a_1-1 \pmod 2\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}(-1)^{n-\left[\frac{n-1}{2}\right]}&=(-1)^{n}(-1)^{-\left[\frac{n-1}{2}\right]}\\&=(-1)^{2}(-1)^{-(a_1-1)}\\&=(-1)^{1+a_1}\\&=(-1)^{1+\sigma_1}\end{aligned}$$

O halde

$$\Gamma_{2,q}(n)\Gamma_{2,q}(1-n)=(-1)^{1+\sigma_1(n)}\prod_{\substack{j<n\\(2,j)=1}} q^{j}$$

elde edilir ve her $x \in \mathbb{Z}_2$ ye göre $p = 2$ için eşitlik

$$\Gamma_{2,q}(x)\Gamma_{2,q}(1-x) = (-1)^{1+\sigma_1(x)} \lim_{n \to x} \prod_{\substack{j<n \\ (2,j)=1}} q^j$$

olarak bulunur.

Bu kısımda, bir önceki bölümde Teorem 3.3.5. ile verilen

$$n! = (-1)^{n+1-s}(-p)^{\frac{(n-s_n)}{p-1}} \prod_{j=0}^{s} \Gamma_p\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)$$

eşitliğinin q-genişlemesi incelenmiş ve aşağıdaki teorem sağlanmıştır.

Teorem 4.2: $n \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{j=0}^{s} a_j p^j \quad (a_s \neq 0)$ ve $s_n = \sum_{j=0}^{s} a_j$ olsun. O zaman

a) $$\left[\left[\frac{n}{p^s}\right];q\right]! = (-1)^{n+1-s}(-[p;q])^{\frac{n-s_n}{p-1}} \prod_{j=0}^{s-1} \frac{\left[\left[\frac{n}{p^{j+1}}\right];q^p\right]!}{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!} \prod_{j=0}^{s} \Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)$$

b)

$$[n;q]! = (-1)^{n+1-s}(-[p;q])^{\frac{n-s_n}{p-1}} \left[\left[\frac{n}{p}\right];q^p\right]!$$

$$\prod_{j=1}^{s} \frac{\left[\left[\frac{n}{p^{j+1}}\right];q^p\right]!}{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!} \prod_{j=0}^{s} \Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)$$

İspat:

Teorem 3.3.5. in birinci kısmından $[n,q]!$ yi çekersek

$$[n;q]! = (-1)^{n+1}[p;q]^{\left[\frac{n}{p}\right]}\left[\left[\frac{n}{p}\right];q^p\right]!\Gamma_{p,q}(n+1)$$

eşitliğini elde ederiz.

Burada n yerine sırasıyla $\left[\frac{n}{p^0}\right],\left[\frac{n}{p^1}\right],...,\left[\frac{n}{p^s}\right]$ yazalım:

$$\left[\left[\frac{n}{p^0}\right];q\right]! = (-1)^{\left[\frac{n}{p^0}\right]+1}[p;q]^{\left[\frac{n}{p^1}\right]}\left[\left[\frac{n}{p^1}\right];q^p\right]!\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^0}\right]+1\right),$$

$$\left[\left[\frac{n}{p^1}\right];q\right]! = (-1)^{\left[\frac{n}{p^1}\right]+1}[p;q]^{\left[\frac{n}{p^2}\right]}\left[\left[\frac{n}{p^2}\right];q^p\right]!\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^1}\right]+1\right),$$

.

.

.

$$\left[\left[\frac{n}{p^s}\right];q\right]! = (-1)^{\left[\frac{n}{p^s}\right]+1}[p;q]^{\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right]}\left[\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right];q^p\right]!\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^s}\right]+1\right),$$

Taraf tarafa çarpılırsa aşağıdaki eşitlikler kolayca görülebilir.

Öncelikle $\left[\left[\frac{n}{p^s}\right],q\right]!$ li olan eşitliği yazalım:

$$\left[\left[\frac{n}{p^s}\right];q\right]! = (-1)^{\left[\frac{n}{p^0}\right]+...+\left[\frac{n}{p^s}\right]+s+1}[p;q]^{\left[\frac{n}{p^1}\right]+...+\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right]}\left[\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right];q^p\right]!$$

$$\prod_{j=0}^{s-1}\frac{\left[\left[\frac{n}{p^{j+1}}\right];q^p\right]!}{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!}\prod_{j=0}^{s}\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)$$

$$
=(-1)^{\frac{n-s_n}{p-1}}(-1)^{n+1-s}[p;q]^{\frac{n-s_n}{p-1}}\left[\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right];q^p\right]!
$$

$$
\prod_{j=0}^{s-1}\frac{\left[\left[\frac{n}{p^{j+1}}\right];q^p\right]!}{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!}\prod_{j=0}^{s}\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)
$$

O halde buradan şu eşitliğini elde ederiz:

$$
\left[\left[\frac{n}{p^s}\right];q\right]!=(-1)^{n+1-s}\left(-[p;q]\right)^{\frac{n-s_n}{p-1}}\prod_{j=0}^{s-1}\frac{\left[\left[\frac{n}{p^{j+1}}\right];q^p\right]!}{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!}\prod_{j=0}^{s}\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)
$$

Şimdi de $[n,q]!$ li eşitliği yazalım:

$$
[n;q]!=(-1)^{\left[\frac{n}{p^0}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^s}\right]+s+1}[p;q]^{\left[\frac{n}{p^1}\right]+\ldots+\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right]}\left[\left[\frac{n}{p}\right];q^p\right]!
$$

$$
\prod_{j=1}^{s}\frac{\left[\left[\frac{n}{p^{j+1}}\right];q^p\right]!}{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!}\prod_{j=0}^{s}\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)
$$

$$
=(-1)^{\frac{n-s_n}{p-1}}(-1)^{n+1-s}[p;q]^{\frac{n-s_n}{p-1}}\left[\left[\frac{n}{p}\right];q^p\right]!
$$

$$
\prod_{j=1}^{s}\frac{\left[\left[\frac{n}{p^{j+1}}\right];q^p\right]!}{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!}\prod_{j=0}^{s}\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)
$$

O halde buradan şu eşitliğini elde ederiz:

$$[n;q]!=(-1)^{n+1-s}\left(-[p;q]\right)^{\frac{n-s_n}{p-1}}\left[\left[\frac{n}{p}\right];q^p\right]!$$
$$\prod_{j=1}^{s}\frac{\left[\left[\frac{n}{p^{j+1}}\right];q^p\right]!}{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!}\prod_{j=0}^{s}\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)$$

Bu kısımda, Teorem 3.2.5. ile verilen

$$p^n!=(-1)^p(-p)^{\frac{(p^n-1)}{(p-1)}}\prod_{j=0}^{n}\Gamma_p\left(p^j\right)$$

eşitliğinin benzeri $\Gamma_{p,q}$ fonksiyonu cisminde yazılışı elde edilmiştir.

Teorem 4.3: $n\in\mathbb{N}$, $n=\sum_{j=0}^{s}a_jp^j$ $\quad(a_s\neq 0)$ olsun. O zaman

$$\left[p^n-1;q\right]!=(-1)^p\left(-[p;q]\right)^{\frac{p^n-1}{p-1}}[p;q]^{-n}\left[p^{n-1}-1;q^p\right]!$$
$$\prod_{j=0}^{n-2}\frac{\left[p^j-1;q^p\right]!}{\left[p^{j+1}-1;q\right]!}\prod_{j=0}^{n}\Gamma_{p,q}\left(p^j\right)$$

İspat:

.

Teorem 3.3.5 in ikinci kısmından $\left[p^{n-1};q\right]!$ yi çekersek

$$\left[p^j-1;q\right]!=(-1)^p[p;q]^{p^{j-1}-1}\left[p^{j-1}-1;q^p\right]!\Gamma_{p,q}\left(p^j\right)$$

eşitliğini elde ederiz.

Bu eşitliği $j=0,1,...,n$ için sırasıyla yazarsak

$$\left[p^{0}-1;q\right]!=1=\left(-1\right)\Gamma_{p,q}\left(p^{0}\right)$$

$$\left[p^{1}-1;q\right]!=\left(-1\right)^{p}\left[p;q\right]^{p^{0}-1}\left[p^{0}-1;q^{p}\right]!\Gamma_{p,q}\left(p^{1}\right)$$

$$\left[p^{2}-1;q\right]!=\left(-1\right)^{p}\left[p;q\right]^{p^{1}-1}\left[p^{1}-1;q^{p}\right]!\Gamma_{p,q}\left(p^{2}\right)$$

.

.

.

$$\left[p^{n}-1;q\right]!=\left(-1\right)^{p}\left[p;q\right]^{p^{n-1}-1}\left[p^{n-1}-1;q^{p}\right]!\Gamma_{p,q}\left(p^{n}\right)$$

Taraf tarafa çarpılırsa aşağıdaki eşitlik kolayca görülür:

$$\left[p^{n}-1;q\right]!=\left(-1\right)^{np+1}\left[p;q\right]^{p^{0}+p^{1}+\ldots+p^{n-1}-n}\left[p^{n-1}-1;q^{p}\right]!\prod_{j=0}^{n-2}\frac{\left[p^{j}-1;q^{p}\right]!}{\left[p^{j+1}-1;q\right]!}\prod_{j=0}^{n}\Gamma_{p,q}\left(p^{j}\right)$$

Bundan dolayı

$$\left[p^{n}-1;q\right]!=\left(-1\right)^{p}\left(-\left[p;q\right]\right)^{\frac{p^{n}-1}{p-1}}\left[p;q\right]^{-n}\left[p^{n-1}-1;q^{p}\right]!\prod_{j=0}^{n-2}\frac{\left[p^{j}-1;q^{p}\right]!}{\left[p^{j+1}-1;q\right]!}\prod_{j=0}^{n}\Gamma_{p,q}\left(p^{j}\right)$$

eşitliği elde edilir.

Lemma 4.1: $n \in \mathbb{Z}^{+}$, $n = \sum_{j=0}^{s} a_j p^j \quad (a_s \neq 0)$ ve p asal sayı olsun.

Bu takdirde her $j = 0, 1, ..., s$ için

$$\frac{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right]; q\right]!}{\left[p;q\right]^{\left[\frac{n}{p^j}\right]}\left[\left[\frac{n}{p^j}\right]; q^p\right]!} = \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{p^j}\right]} \frac{\left(1-q^k\right)}{\left(1-q^{kp}\right)} \qquad \left(0 \leq k \leq s\right)$$

İspat:

$j = 0$ için

$$\frac{\left[n;q\right]!}{\left[p;q\right]^n\left[n;q^p\right]!} = \frac{\left[1;q\right]\left[2;q\right]...\left[n;q\right]}{\left[p;q\right]^n\left[1;q^p\right]\left[2;q^p\right]...\left[n;q^p\right]}$$

$$= \frac{\frac{1-q}{1-q}\frac{1-q^2}{1-q}...\frac{1-q^n}{1-q}}{\left(\frac{1-q^p}{1-q}\right)^n\frac{1-q^p}{1-q^p}...\frac{1-q^{np}}{1-q^p}}$$

$$= \frac{\frac{1-q}{1-q}\frac{1-q^2}{1-q}...\frac{1-q^n}{1-q}}{\frac{1-q^p}{1-q}...\frac{1-q^{np}}{1-q}} = \frac{\left(1-q\right)\left(1-q^2\right)...\left(1-q^n\right)}{\left(1-q^p\right)\left(1-q^{2p}\right)...\left(1-q^{np}\right)}$$

$1 \le j \le s$ için

$$\frac{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!}{[p;q]^{\left[\frac{n}{p^j}\right]}\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q^p\right]!}=\frac{[1;q][2;q]\ldots\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]}{[p;q]^{\left[\frac{n}{p^j}\right]}\left[1;q^p\right]\left[2;q^p\right]\ldots\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q^p\right]}$$

$$=\frac{\frac{1-q}{1-q}\frac{1-q^2}{1-q}\ldots\frac{1-q^{\left[\frac{n}{p^j}\right]}}{1-q}}{\left(\frac{1-q^p}{1-q}\right)^{\left[\frac{n}{p^j}\right]}\frac{1-q^p}{1-q^p}\ldots\frac{1-q^{\left[\frac{n}{p^j}\right]p}}{1-q^p}}$$

$$=\frac{(1-q)\left(1-q^2\right)\ldots\left(1-q^{\left[\frac{n}{p^j}\right]}\right)}{\left(1-q^p\right)\left(1-q^{2p}\right)\ldots\left(1-q^{\left[\frac{n}{p^j}\right]p}\right)}$$

O halde

$$\frac{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!}{[p;q]^{\left[\frac{n}{p^j}\right]}\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q^p\right]!}=\prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{p^j}\right]}\frac{\left(1-q^k\right)}{\left(1-q^{kp}\right)} \quad (0 \le k \le s)$$

eşitliği elde edilir.

Bu kısımda $[n,q]!$ için farklı bir eşitlik elde edilecektir.

Teorem 4.4: $n \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{j=0}^{s} a_j p^j \quad (a_s \neq 0)$ ve $s_n = \sum_{j=0}^{s} a_j$ olsun.

O zaman

$$[n;q]! = (-1)^{\frac{n-s_n}{p-1}+n+1-s} = \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{p^1}\right]} \frac{\left(1-q^{kp}\right)}{\left(1-q^k\right)} \cdots \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right]} \frac{\left(1-q^{kp}\right)}{\left(1-q^k\right)} \prod_{j=0}^{s} \Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)$$

dir.

İspat:

Teorem 3.3.5. in birinci kısmından $[n,q]!$ yi çekersek

$$[n;q]! = (-1)^{n+1}[p;q]^{\left[\frac{n}{p}\right]}\left[\left[\frac{n}{p}\right];q^p\right]!\Gamma_{p,q}(n+1)$$

eşitliğini elde ederiz.

Eşitlikte n yerine sırasıyla $\left[\frac{n}{p^0}\right], \left[\frac{n}{p^1}\right], \ldots, \left[\frac{n}{p^s}\right]$ alalım.

$$\left[\left[\frac{n}{p^0}\right];q\right]! = (-1)^{\left[\frac{n}{p^0}\right]+1}[p;q]^{\left[\frac{n}{p^1}\right]}\left[\left[\frac{n}{p^1}\right];q^p\right]!\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^0}\right]+1\right)$$

$$\left[\left[\frac{n}{p^1}\right];q\right]! = (-1)^{\left[\frac{n}{p^1}\right]+1}[p;q]^{\left[\frac{n}{p^2}\right]}\left[\left[\frac{n}{p^2}\right];q^p\right]!\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^1}\right]+1\right)$$

.

.

.

$$\left[\left[\frac{n}{p^s}\right];q\right]! = (-1)^{\left[\frac{n}{p^s}\right]+1}[p;q]^{\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right]}\left[\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right];q^p\right]!\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^s}\right]+1\right)$$

Taraf tarafa çarpılırsa ve lemma kullanılırsa

$$[n;q]!=(-1)^{\frac{n-s_n}{p-1}+n+1-s}=\prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{p^1}\right]}\frac{\left(1-q^{kp}\right)}{\left(1-q^k\right)}\cdots\prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right]}\frac{\left(1-q^{kp}\right)}{\left(1-q^k\right)}\prod_{j=0}^{s}\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)$$

eşitliği elde edilir.

Bu kısımda Teorem 3.3.6 ile verilen

$$\gamma_{p,q}=\lim_{n\to\infty}p^{-n}\left\{1-(-1)^p\frac{\left[p^n-1;q\right]!}{[p;q]^{p^{n-1}-1}\left[p^{n-1}-1;q^p\right]!}\right\}$$

için farklı bir eşitlik verilecektir.

Teorem 4.5: p-adik Euler sabiti γ_p nin bir q-genişlemesi $\gamma_{p,q}$

$$\gamma_{p,q}=\lim_{n\to\infty}p^{-n}\left\{1-(-1)^{\frac{p^n-1}{p-1}}\left([p;q]\right)^{\frac{p^{n-1}-1}{p-1}-n+1}\prod_{j=0}^{n-2}\frac{\left[p^j-1;q^p\right]!}{\left[p^{j-1}-1;q\right]!}\prod_{j=0}^{n}\Gamma_{p,q}\left(p^j\right)\right\}$$

İspat:

Teorem 4.3 deki $\left[p^{n-1};q\right]!$, Teorem 3.3.6 daki $\gamma_{p,q}$ eşitliğindeki yerine yazılırsa

$$\gamma_{p,q}=\lim_{n\to\infty}p^{-n}\left\{1-\left(-1^{p}\right)\frac{\left(-[p;q]\right)^{\frac{p^{n}-1}{p-1}}[p,q]^{-n}\left[p^{n-1}-1;q^{p}\right]!\prod_{j=0}^{n-2}\frac{\left[p^{j}-1,q^{p}\right]!}{\left[p^{j-1}-1,q\right]!}\prod_{j=0}^{n}\Gamma_{p,q}\left(p^{j}\right)}{[p,q]^{p^{n-1}-1}\left[p^{n-1}-1;q^{p}\right]!}\right\}$$

elde edilir.

Buradan da

$$\gamma_{p,q}=\lim_{n\to\infty}p^{-n}\left\{1-\left(-1\right)^{\frac{p^{n}-1}{p-1}}\left([p;q]\right)^{\frac{p^{n-1}-1}{p-1}-n+1}\prod_{j=0}^{n-2}\frac{\left[p^{j}-1;q^{p}\right]!}{\left[p^{j-1}-1;q\right]!}\prod_{j=0}^{n}\Gamma_{p,q}\left(p^{j}\right)\right\}$$

elde edilir.

5.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu çalışmada aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1) $p=2$ ve her $x\in\mathbb{Z}_2$ için

$$\Gamma_{2,q}(x)\Gamma_{2,q}(1-x)=(-1)^{1+\sigma_1(x)}\lim_{n\to x}\prod_{\substack{j<n\\(2,j)=1}} q^j$$

dir. Burada σ_1,

$$\sigma_1\left(\sum_{j=0}^{\infty}a_j 2^j\right)=a_1$$

formülüyle tanımlıdır.

2) $n\in\mathbb{N}$, $n=\sum_{j=0}^{s}a_j p^j$ $\quad(a_s\neq 0)$ ve $s_n=\sum_{j=0}^{s}a_j$ olsun. O zaman

a) $$\left[\left[\frac{n}{p^s}\right];q\right]!=(-1)^{n+1-s}\left(-[p;q]\right)^{\frac{n-s_n}{p-1}}\prod_{j=0}^{s-1}\frac{\left[\left[\frac{n}{p^{j+1}}\right];q^p\right]!}{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!}\prod_{j=0}^{s}\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)$$

b) $$[n;q]!=(-1)^{n+1-s}\left(-[p;q]\right)^{\frac{n-s_n}{p-1}}\left[\left[\frac{n}{p}\right];q^p\right]!\prod_{j=1}^{s}\frac{\left[\left[\frac{n}{p^{j+1}}\right];q^p\right]!}{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right];q\right]!}\prod_{j=0}^{s}\Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)$$

3) $n \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{j=0}^{s} a_j p^j$ $\quad (a_s \neq 0)$ olsun. O zaman

$$\left[p^n - 1; q\right]! = (-1)^p \left(-[p;q]\right)^{\frac{p^n-1}{p-1}} [p;q]^{-n} \left[p^{n-1} - 1; q^p\right]! \prod_{j=0}^{n-2} \frac{\left[p^j - 1; q^p\right]!}{\left[p^{j+1} - 1; q\right]!} \prod_{j=0}^{n} \Gamma_{p,q}\left(p^j\right)$$

4) $n \in \mathbb{Z}^+$, $n = \sum_{j=0}^{s} a_j p^j$ $\quad (a_s \neq 0)$ ve p asal sayı olsun.

Bu takdirde her $j = 0, 1, ..., s$ için

$$\frac{\left[\left[\frac{n}{p^j}\right]; q\right]!}{[p;q]^{\left[\frac{n}{p^j}\right]} \left[\left[\frac{n}{p^j}\right]; q^p\right]!} = \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{p^j}\right]} \frac{\left(1-q^k\right)}{\left(1-q^{kp}\right)} \qquad \left(0 \leq k \leq s\right)$$

5) $n \in \mathbb{N}$, $n = \sum_{j=0}^{s} a_j p^j$ $\quad (a_s \neq 0)$ ve $s_n = \sum_{j=0}^{s} a_j$ olsun.

O zaman

$$[n;q]! = (-1)^{\frac{n-s_n}{p-1}+n+1-s} = \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{p^1}\right]} \frac{\left(1-q^{kp}\right)}{\left(1-q^k\right)} \cdots \prod_{k=1}^{\left[\frac{n}{p^{s+1}}\right]} \frac{\left(1-q^{kp}\right)}{\left(1-q^k\right)} \prod_{j=0}^{s} \Gamma_{p,q}\left(\left[\frac{n}{p^j}\right]+1\right)$$

6) p-adik Euler sabiti γ_p nin bir q-genişlemesi $\gamma_{p,q}$

$$\gamma_{p,q} = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \left\{1 - (-1)^{\frac{p^n-1}{p-1}} \left([p;q]\right)^{\frac{p^{n-1}-1}{p-1}-n+1} \prod_{j=0}^{n-2} \frac{\left[p^j - 1; q^p\right]!}{\left[p^{j-1} - 1; q\right]!} \prod_{j=0}^{n} \Gamma_{p,q}\left(p^j\right)\right\}$$

5.2. ÖNERİLER

Bu çalışmada klasik Gamma Fonksiyonunun q-genişlemesinin p-adik sayılar cismindeki karşılığı olan p-adik Gamma fonksiyonunun q-genişlemesi $\Gamma_{p,q}$ fonksiyonun özellikleri incelenmiş ve bazı gösterimler elde edilmiştir. Bu çalışmadan hareketle aşağıdaki öneriler verilebilir.

p-adik Gamma fonksiyonunun sağladıkları tüm özelliklerin p-adik Gamma fonksiyonunun q genişlemesine nasıl karşılık bulunabileceği araştırılabilir.

p-adik Gamma fonksiyonunun bazı özel fonksiyonlarla ilişki olduğu bilinmektedir. p-adik Gamma fonksiyonunun q genişlemesinin özel fonksiyonlarla ilişkileri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Andrews G.E., Askey R. and Roy R., Special function, Cambridge University Press, Cambridge, (1999)

[2] Artin E., “The Gamma Function”, New York, Holt, Rinehart and Winston(1964)

[3] Askey R., The q-gamma and q-beta functions, Applicable analysis,(1978), 125-141.

[4] Benedict H. Gross and Neal Koblitz, Gauss Sums and the p-adic Γ-function, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 109, No. 3 (1979), pp. 569-581

[5] Cohen, Henri; Friedman, Eduardo, Raabe's formula for p-adic gamma and zeta functions. Ann. Inst. Fourier (Grenoble) 58 (2008), no. 1, 363--376.

[6] Daniel Barsky, On Morita's p-adic Gamma Function, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society,V 89 No. 01 (1981), pp 23-27

[7] Diamond J. , The p-adic log gamma function and p-adic Euler constant, Transaction of the American Mathematical Society (1977)

[8] Gouvêa, F.Q. “p-adic Numbers An Introduction”,Springer-Verlog, Berlin(1997)

[9] Kım Y.S., “q-analogues of p-adic gamma functions and p-adic Euler Constants”,Korean Math.Soc.(1998)

[10] Kim T.K.et al., A note on analogue of gamma functions, Proc.Confer. on 5th Transcendental Number Theory 5 no. 1 (1997), Gakushin Univ. Tokyo Japan, 111-118

[11] Koblitz N. , “q-extension of the p-adic gamma function”,American Mathematical Society(1980)

[12] Koblitz N. , q-extension of the p-adic gamma function II, Transactions of the American Mathematical Society, Vol. 273, No. 1 (1982), pp.111-129.

[13] Morita Y., A p-adic analogue of the F-function, J. Fac. Science Univ. Tokyo, 22 (1975), 225- 266

[14] Nakazato, Hajime The q-analogue of the p-adic gamma function, Kodai Math. J. 11 (1988), no. 1, 141--153.

[15] Schikhof, WH. “Ultrametric Calculus: An Introduction to p-adic Analysis” Cambridge University Pres(1984)

[16] Shapiro, Ilya, Frobenius map and the p-adic gamma function. J. Number Theory 132 (2012), no. 8, 1770--1779.

[17] Vladimirov V.S., Volovich I. V. and Zelenov E. I. “p-adic Analysis and Mathematical Physics”, World Scientific, Singapore, (1998)

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Adviye KÖRÜKÇÜ

Doğum Tarihi: 29/08/1988

Öğrenim Durumu: Yüksek Lisans

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise		Yusuf Kalkavan Anadolu Lisesi	2002-2006
Lisans	Matematik	Çukurova Üniversitesi	2006-2010
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2010-2013

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. A.Körükçü**,** H.Menken, On Some Properties of q-Extension of p-Adic Gamma Functions, International Conference on Mathematical Analysis, Differantial Equations and Their Applications (MADEA-2012), Mersin, TURKEY

2. H.Menken, A.Körükçü, 'Some Properties of the q-Extension of the p-Adic Gamma Function' , Abstract and Applied Analysis 2013, Article ID 176470