POZİTİF LİNEER OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM TEORİSİNDEKİ UYGULAMALARI

ERSİN ŞİMŞEK

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ

MERSİN
HAZİRAN – 2013

Ersin ŞİMŞEK tarafından Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ danışmanlığında hazırlanan "Pozitif Lineer Operatörlerin Yaklaşım Teorisindeki Uygulamaları" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV	………………
Doç. Dr. Ali ÖZKURT	………………
Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ	………………

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 30./.07./2013.tarih ve 2013.14.../..429.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

T.C. ... ÜNİVERSİTESİ ... ENSTİTÜSÜ

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

POZİTİF LİNEER OPERATÖRLERİN YAKLAŞIM TEORİSİNDEKİ UYGULAMALARI

Ersin ŞİMŞEK

ÖZ

Bu tezde, Szasz-Mirakyan ve Bernstein operatörleri yardımıyla biri sonlu aralıkta, diğeri sonsuz aralıkta tanımlı fonksiyonlar uzayı üzerinde olmak üzere iki tip pozitif lineer operatör oluşturulmuştur. Birincisinin yakınsaklığı için Bohman-Korovkin teoremi kullanılırken, ikincisi için Chlodovsky'nin yöntemi kullanılmıştır. Ayrıca, bu operatörlerin yakınsaklık hızını süreklilik modülü cinsinden veren teoremler ve Voronovskaya tipi teoremler elde edilmiştir.

Anahtar kelimeler: Pozitif Lineer Operatör, Bernstein Operatörü, Szasz-Mirakyan Operatörü, Chlodovsky Operatörü, Bohman-Korovkin Teoremi.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

APPLICATIONS OF POSITIVE LINEAR OPERATORS IN THE APPROXIMATION THEORY

Ersin SIMSEK

ABSTRACT

In this thesis, two types of positive linear operators have been constructed by means of Szasz-Mirakyan and Bernstein operators. One of them is defined on the space of functions on finite interval and the other one on the space of functions on infinite interval. For convergence of first one, it was used the Bohman-Korovkin's Theorem while it was used the method of Chlodovsky for the second one. It was also obtained the theorems on the rate of convergence of these operators via modulus of continuity and the theorems of Voronovskaya-type.

Key words: Positive Linear Operator, Bernstein Operator, Szasz-Mirakyan Operator, Chlodovsky Operator, Bohman-Korovkin's Theorem.

Advisor: Asist. Prof. Dr. Tuncay TUNC, Mersin University, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Çalışmam sırasında hem bilimsel hem de manevî olarak destek olan; insanî, değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum; ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ'a;

Manevî desteğini her zaman hissettiğim değerli lise Matematik Öğretmenim Mehmet Ali ATA'ya.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen, başta bölüm başkanımız Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV ve bölüm öğretim üyelerine,

Yüksek lisans tez projesine destek olan Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi'ne;

Son olarak, maddi ve manevi her zaman bana destek olan, bugünlere gelmemde büyük fedakârlıklar gösteren aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

<u>**Sayfa**</u>

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$:=$	Tanım olarak eşittir.
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi.
$\mathbb{N}_0$	$\mathbb{N}\cup\{0\}$.
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi.
$\mathbb{R}^+$	Pozitif reel sayılar kümesi.
$\mathbb{P}_n$	Derecesi $\leq n$ olan cebirsel polinomlar kümesi.
I	Sonlu ya da sonsuz bir aralık.
$[a,b]$	Kapalı aralık.
(a,b)	Açık aralık.
$\mathcal{F}(M,K)$	M 'de tanımlı K -değerli bütün fonksiyonların uzayı.
$B(I)$	I 'da tanımlı reel değerli sınırlı fonksiyonların uzayı.
$C(I)$	I 'da tanımlı reel değerli sürekli fonksiyonların uzayı.
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli olan fonksiyonların uzayı.
$f^{(r)}$	f fonksiyonun r. mertebeden türevi.
$C^r[a,b]$	$f, f', \cdots, f^{(r)} \in C[a,b]$ olan fonksiyonların uzayı.
$Lip_M\alpha$	Lipschitz sınıfı.
$\lVert\cdot\rVert$	Düzgün norm.
L	Lineer operatör.
$\{L_n\}$	Operatörler dizisi.
$e_i(x)$	$x^i \quad (i\in\mathbb{N}_0)$.
$\omega(f;\delta)$	f fonksiyonun δ adımlı birinci süreklilik modülü.
$\omega_2(f;\delta)$	f fonksiyonun δ adımlı ikinci süreklilik modülü.
$B_n(f)$	f fonksiyonun n. Bernstein polinomu.
B_n	Bernstein operatörü.
S_n	Szasz-Mirakyan operatörü.
C_n	Chlodovsky operatörü.
$f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$	$\{f_n\}$ dizisi f 'e $[a,b]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.
$\binom{n}{k}$	$\dfrac{n!}{k!(n-k)!}$
$[n]_q$	$\dfrac{1-q^n}{1-q}$, $[0]_q := 0$ ile tanımlı q -tamsayılar.
$[n]_q!$	$[1]_q!.[2]_q!.[3]_q!.\cdots.[n]_q!$, $[0]_q! = 1$; q -faktöriyel.

$\begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q$	$\dfrac{[n]_q!}{[k]_q![n-k]_q!}$ ile tanımlı q-binom sayıları.
SMC	Szasz-Mirakyan-Bernstein Operatörü.
SMBC	Szasz-Mirakyan-Bernstein-Chlodovsky operatörü.
■	İspatın bittiğini gösterir.

1. GİRİŞ

K. Weierstrass, 1885 yılında yayınlanan "*Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veranderlichen*" adlı çalışmasında sürekli fonksiyonlara cebirsel polinomlarla yaklaşmanın mümkün olduğunu gösteren bir teorem vermiştir. Matematiksel analizde yaklaşım teorisinin temel teoremi olarak nitelendirilen bu teorem: *Sonlu* $[a,b]$ *aralığı üzerinde sürekli herhangi bir* f *fonksiyonuna bu aralık üzerinde düzgün yakınsayan polinomlar dizisinin varlığı* üzerinedir. Weierstrass'ın bu teoreminde, verilen sürekli fonksiyona yaklaşan polinomların sadece varlığı hakkında bilgi alınırken; 1912 yılında S. N. Bernstein, bu polinomların verilen fonksiyona nasıl bağlı olduğunu belirleyerek, Weierstrass teoreminin daha basit ve kullanışlı bir ispatını vermiştir. $[0,1]$ aralığında sürekli olan herhangi bir f fonksiyonuna bu aralıkta düzgün yakınsayan polinomlar dizisinin terimlerini

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{1.1}$$

biçiminde tanımlanmıştır. Yukarıda tanımlanan $B_n(f)$ polinomuna *f fonksiyonunun n. Bernstein polinomu* denir. I. Chlodovsky 1937 yılında Bernstein polinomlarını $[0,\infty)$ aralığı üzerine genellemiş ve bu polinomların yaklaşım özelliklerini incelemiştir. Literatürde *Bernstein-Chlodovsky polinomları* olarak adlandırılan bu polinomlar, $\{b_n\}$, $\lim_{n\to\infty} b_n=\infty$ ve $\lim_{n\to\infty} b_n/n=0$ koşullarını sağlayan pozitif reel sayıların artan bir dizisi olmak üzere

$$C_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}b_n\right), \qquad x\in[0,b_n], \tag{1.2}$$

şeklinde tanımlanır. Sınırsız aralıklarda sürekli bir fonksiyona yakınsayan önemli bir fonksiyon dizisi de G. Mirakyan tarafından inşa edilmiştir. Kırklı yıllarda inşa edilen ve yaklaşım özellikleri J. Favard ve O. Szasz tarafından incelenen dizinin terimleri; f, $[0,\infty)$ aralığında sürekli bir fonksiyon olmak üzere;

$$S_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^k}{k!}f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad n\in\mathbb{N}, \tag{1.3}$$

şeklindedir.

Dikkat edilirse (1.1), (1.2) ve (1.3) ile verilen B_n, C_n ve S_n fonksiyonları tanımlı oldukları fonksiyon uzaylarında pozitif ve lineer operatörlerdir. Bunlara sırasıyla *Bernstein, Bernstein-Chlodovsky* ve *Szasz-Mirakyan operatörleri* adı verilir. Ellilerde, H. Bohman ve P. P. Korovkin birbirlerinden bağımsız olarak, fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör dizilerinin yaklaşım teorisindeki uygulamaları üzerine önemli çalışmalar yapmışlardır. Kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsayan operatörler için kolay uygulanabilir kriter veren Bohman-Korovkin Teoremine göre: *Kompakt* $[a,b]$ *aralığı üzerinde sürekli bir* f *fonksiyonunun verilen pozitif lineer operatörler altındaki görüntülerinden oluşan dizinin bu fonksiyona düzgün yakınsaması için gerek ve yeter koşul* $1, x$ *ve* x^2 *fonksiyonlarının her birinin görüntülerinden oluşan dizinin kendilerine düzgün yakınsamasıdır.*

Yukarıda bahsedilen Bernstein, Bernstein-Chlodovsky ve Szasz-Mirakyan operatörler dizilerinin her biri, kompakt aralıklar üzerinde Bohman-Korovkin teoreminin koşullarını sağlar. Bunun sonucu olarak da Weierstrass teoreminin ispatını basitleştiren Bernstein teoreminin daha basit bir ispatı elde edilmiş olunur.

Bohman-Korovkin teoreminden sonra bu teoremin koşullarını sağlayan çok sayıda pozitif lineer operatörler dizisi inşa edilmiş ve yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

Bu çalışmada; $I \subset \mathbb{R}$ bir aralık olmak üzere $C(I)$ üzerinde tanımlı,

$$E_n(f;x) = \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m(nx) L_\nu(f;x),$$

biçimde operatörler inşa edilmiştir. Burada: $\{\omega_m\}$, I aralığı üzerinde tanımlı, her $m \in \mathbb{N}_0$ için negatif olmayan ve her $x \in I$ için $\sum_{m=1}^{\infty} \omega_m(x) = 1$ koşulunu sağlayan fonksiyonların, $\{L_n\}$ ise $C(I)$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin bir dizisidir. Ayrıca, tanımda geçen ν doğal sayıları, $\{\alpha_n\}$ azalmayan ve $\{\beta_m\}$ kesin artan bir doğal sayı dizisi olmak üzere $\nu := \nu(n;m) = \alpha_n \cdot \beta_m$ biçimindedir.

Bu tezin, Materyal ve Yöntem kısmında pozitif lineer operatörler ile süreklilik modüllerinin tanımları ve yaklaşım teorisinde kullanılan bazı özellikleri ile bazı operatör örnekleri verilmiştir. Ayrıca bu bölümde Weierstrass Teoreminin S. N. Bernstein tarafından yapılan ispatı ve Bohman-Korovkin teoreminin ispatı da verilmiştir. Bulgular ve Tartışma bölümü iki alt bölümden oluşmaktadır: Birincisinde yukarıda tanımlanan E_n operatöründe; $I=[0,1]$, $\beta_m = m+1$, $\omega_m(x) = e^{-x}x^m/m!$ ve L_ν olarak Bernstein operatörü alınarak $C[0,1]$ uzayındaki yaklaşım özellikleri araştırılmıştır. İkincisinde ise $I=[0,b_n]$, $\beta_m = m+1$, $\omega_m(x) = e^{-x}x^m/m!$ ve L_ν olarak da Bernstein-Chlodovsky operatörü alınarak yaklaşım özellikleri incelenmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Sürekli bir fonksiyona, polinomlar dizisi ile yaklaşımın varlığının ispatlanması yaklaşım kuramının önemli problemlerinden biridir. Yaklaşım Teorisinin öncülerinden sayılan P. L. Chebyshev [1] henüz polinomlarla yaklaşımın varlığı hakkında herhangi bir çalışma yokken 1854 yılında, bir polinomun, verilen polinomlar sınıfı içinde fonksiyona düzgün norma göre en yakın olup olmadığını belirleyen önemli bir kriter vermiştir.

K. Weierstrass [2], 1885 yılında yayınlanan "*Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veranderlichen*" adlı çalışmasında sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşımın mümkün olduğunu gösteren önemli bir teorem vermiştir. Teoreminde f, $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı ve sürekli bir fonksiyon olmak üzere,

$$W_n\left(f;x\right)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{\infty}e^{-n\frac{(t-x)^2}{2}}f\left(t\right)dt,\quad x\in\left(-\infty,\infty\right),$$

ile tanımlı $\left\{W_n\left(f\right)\right\}$ dizisinin bu fonksiyona $\mathbb{R}$ üzerinde noktasal; kapalı ve sınırlı aralıklar üzerinde ise düzgün yakınsak olduğunu göstermiştir. 1908 yılında E. Landau [3], Weierstrass Teoreminin bir başka ispatını vermiştir. E. Landau ispatında terimleri

$$\mathcal{L}_n\left(f;x\right)=\frac{\int_0^1\left(1-\left(t-x\right)^2\right)^n f\left(t\right)\,dt}{2\int_0^1\left(1-t^2\right)^n dt}$$

biçiminde tanımlı olan bir polinomlar dizisi kullanmıştır. Weierstrass Teoreminin verilen ispatlar içerisinde en önemli olanlardan bir tanesi 1912 yılında S. N. Bernstein [4] tarafından verilmiştir: f, $\left[0,1\right]$ aralığı üzerinde sınırlı bir fonksiyon olmak üzere,

$$B_n\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right),\qquad 0\le x\le 1,$$

biçiminde polinomlar dizisi tanımlamıştır. Bernstein, bu polinomlarla $\left[0,1\right]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Bu polinomlara *Bernstein polinomları* denir. Yaklaşım teorisinin temel teoremi olarak nitelendirilen Weierstrass Teoreminin yukarıda bahsedilen ispatların dışında birçok ispatı vardır [5]. Bernstein'in $B_n(f;.)$ dizilerini oluşturma tekniği pozitif lineer operatörlerle yaklaşımın ilk adımıdır. Sonraki yıllarda, kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara yaklaşılabilmek için pozitif lineer operatörler yaygın bir şekilde kullanılmaya başlanmıştır. 1930 yılında L. V. Kantorovich [6] Bernstein polinomlarını;

$$K_n(f;x) = (n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{k/n+1}^{k+1/n+1} f(t)\,dt, \qquad 0 \le x \le 1,$$

biçiminde $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallenebilir fonksiyonlara genelleştirmiştir. K_n operatörlerine *Kantorovich polinomları* denir.

1932 yılında E. Voronovskaya [7] tarafından $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı ve sabit bir x noktasında ikinci mertebeden sürekli türeve sahip ise,

$$\lim_{n\to\infty} n\left[B_n(f;x) - f(x)\right] = \frac{x(1-x)}{2}f''(x)$$

biçiminde bir asimptotik formül verilmiştir.

1935 yılında T. Popoviciu [8], $[0,1]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonu için süreklilik modülünün yardımıyla Bernstein polinomlarının fonksiyona yaklaşım hızını

$$\left|B_n(f;x) - f(x)\right| \le \frac{5}{4}\omega\left(f;n^{-\frac{1}{2}}\right)$$

şeklinde belirlemiştir.

1937 yılında I. Chlodovsky [9], Bernstein polinomlarını sonsuz aralıklarda

$$C_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}b_n\right), \qquad 0 \le x \le b_n,$$

olarak tanımlamış ve yakınsaklık özelliklerini incelemiştir. Burada $\{b_n\}$ $\lim_{n\to\infty} b_n = \infty,\ \lim_{n\to\infty} b_n/n = 0$ koşullarını sağlayan pozitif reel sayıların bir artan dizisidir. $C_n(f)$ polinomlarına *Bernstein-Chlodovsky polinomları* adı verilir.

1941 yılında G. M. Mirakyan [10], $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli olan ve $\lim_{x\to\infty} f(x)/(1+x^2) < \infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna yakınsak olan

$$S_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \frac{e^{-nx}(nx)^k}{k!} f\left(\frac{k}{n}\right), \qquad x \in [0,\infty),$$

ile tanımlı $\{S_n\}$ operatörler dizisini tanımlamıştır ve yaklaşım özelliklerini incelemiştir. 1944 yılında J. Favard [11] ve 1950 yılında O. Szasz [12] bu operatörlerin bazı özeliklerini incelemişlerdir. Genellikle $S_n(f)$ fonksiyon serileri *Szasz-Mirakyan operatörleri* olarak bilinirler.

1951 yılında H. Bohman [13],

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(t_{k,n}) u_k(x), \qquad x \in [0,1],\ 0 \le t_{k,n} \le 1,\ n \in \mathbb{N}$$

şeklinde olan pozitif lineer operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı hakkında oldukça kullanışlı bir kriter vermiştir. Ancak bu tipteki operatörler f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı dışındaki değerlerinden bağımsızdır. 1953 yılında P. P. Korovkin [14-15], H. Bohman'ın sonucunu genelleyen ve *pozitif lineer operatörler ile yaklaşım teorisini* derinleştiren bir çalışma sunmuştur. Çalışmadaki kritere göre; *keyfi bir* $\{L_n(f)\}$ *pozitif lineer operatör dizisinin* f *fonksiyonuna kapalı ve sonlu bir aralıkta düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her* $i = 0,1,2$ *için* $\{L_n(e_i)\}$ *dizisinin ilgili aralıkta* e_i *fonksiyonuna düzgün yakınsamasıdır.* Burada e_i'ler $e_i(x) = x^i,\ i \in \mathbb{N}_0$ ile tanımlı test fonksiyonlarıdır. Bu kriter, sürekli fonksiyonlara pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisinin temelini oluşturmuştur. Bohman-Korovkin teoremini gerçekleyen diğer operatör dizileri Bernstein polinomlarının bulunma yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu yüzden Bernstein polinomları pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisinin oluşmasında çok önemli bir yere sahiptir. Ayrıca, pozitif lineer operatör dizileri yaklaşım teorisinde en iyi yaklaşım sonuçlarını vermese de polinomların açık olarak yazılabilmesine imkân verdiğinden oldukça kullanışlıdır.

1957 yılında V. A. Baskakov [16], $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sürekli olan ve $\lim_{x\to\infty} f(x)\big/\left(1+x^2\right)<\infty$ koşulunu sağlayan f fonksiyonuna yakınsak olan

$$V_n(f;x)=(1+x)^{-n}\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k-1}{k}\left(\frac{x}{1+x}\right)^k f\left(\frac{k}{n}\right),\qquad x\in[0,\infty),$$

ile tanımlı $\{V_n\}$ operatörler dizisi tanımlamıştır ve yakınsaklık özelliklerini incelemiştir. Bu operatörler *Baskakov operatörleri* olarak literatüre geçmiştir.

1960 yılında W. Meyer König-K. Zeller [17] tarafından tanımlanan ve 1964 yılında E. W Cheney ve A. Sharma [18] tarafından günümüzdeki şekline kavuşturulan ve literatürde *Meyer König-Zeller operatörleri* olarak bilinen operatörler, $f\in C[0,1)$ olmak üzere

$$M_n(f;x)=\sum_{k=0}^{\infty}\binom{n+k}{k}x^k(1-x)^{n+1}f\left(\frac{k}{n+k}\right),\qquad 0\le x<1,$$

formunda tanımlamışlardır.

$[0,1]$ aralığı üzerinde integrallenebilir fonksiyonlara yakınsayan

$$D_n(f;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_0^1\binom{n}{k}t^k(1-t)^{n-k}f(t)\,dt,$$

ile tanımlı operatörler 1967 yılında J. L. Durrmeyer [19] tarafından verilmiştir.

1969 yılında D. D. Stancu [20], Bernstein operatörünü şu şekilde genelleştirmiştir:

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right),\qquad 0\le\alpha\le\beta.$$

Açıktır ki $\alpha = \beta = 0$ durumunda Bernstein polinomları elde edilir. Bu operatörlere *Stancu operatörleri* adı verilir.

Bohman-Korovkin teoremi reel eksenin sonlu ve kapalı aralıklarında verilmiştir. Sonlu olmayan aralıklarda ise pozitif lineer operatörler ile yaklaşım koşullarını ilk olarak 1974-76 yılları arasında A. D. Gadjiev [21] ve Z. Ditzian [22] ağırlıklı fonksiyon uzaylarında araştırmışlardır.

1980 yılında G. Bleimann, P. L. Butzer ve L. Hahn [23] sınırlı ve düzgün sürekli fonksiyonlar için,

$$H_n(f;x) = \frac{1}{(1+x)^n} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k f\left(\frac{k}{n-k+1}\right), \qquad x \in [0,\infty),$$

formunda pozitif lineer operatörlerin bir dizisini tanımlamışlardır. Bu operatörlere *Bleimann-Butzer-Hahn operatörleri* adı verilir.

1997 yılında G. M. Phillips [24], Bernstein polinomlarının

$$B_{n,q}(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \begin{bmatrix} n \\ k \end{bmatrix}_q x^k \prod_{i=0}^{n-k-1} \left(1-q^i x\right) f\left(\frac{[k]_q}{[n]_q}\right), \qquad 0 < q < 1,$$

biçiminde bir genellemesini yapmıştır. Bu operatörlere q*-Bernstein polinomları* adı verilir. $q = 1$ durumu Bernstein polinomlarını verir. G. M. Phillips'in bu çalışmasından sonra yukarıda verilen klasik operatörlerin hepsinin q benzerleri özellikle de ülkemizdeki matematikçiler tarafından tanımlanmış ve yakınsaklık özellikleri üzerinde çalışılmıştır. Bazıları şu şekilde listelenebilir: H. Oruç ve G. M. Phillips [25], O. Doğru ve O. Duman [26], A. II'inskii ve S. Ostrovska [27], V. S. Videnskii [28], E. İbikli [29], H. Karslı ve E. Ibikli [30], G. Nowak ve V. Gupta [31], H. Karslı [32], N. I. Mahmudov [33].

Szasz-Mirakyan operatörleri ve Baskakov operatörlerinin örnek olduğu

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{\infty} \varphi_{n,k}(x) A_{n,k}(f) \tag{2.1}$$

tipindeki operatörlerin yaklaşım özellikleri son yıllarda O. T. Pop, D. Barbosu ve D. Miclauş [34] tarafından çalışılmaktadır. Burada; I bir aralık olmak üzere $A_{n,k}$, $C(I)$ üzerinde tanımlı pozitif lineer fonksiyoneller, $\varphi_{n,k}$'lar ise I üzerinde tanımlı negatif olmayan fonksiyonlardır.

Bu tezde; (2.1)'de tanımlı olan operatörlerdeki $A_{n,k}$ fonksiyonelleri yerine $C(I)$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörler incelenmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, matematiksel analizin yaklaşım teorisinde sıkça kullanılan bazı temel konu ve kavramların yanı sıra yaklaşımın temel teoremlerine, pozitif lineer operatörlerin tanımına ve sağladığı temel özelliklere yer verilecektir.

3.1 TEMEL KAVRAMLAR

$a,b\in\mathbb{R}$ ve $a<b$ olsun. Bu durumda (a,b) ile gösterilen $\{x\in\mathbb{R}: a<x<b\}$ ve $[a,b]$ ile gösterilen $\{x\in\mathbb{R}: a\le x\le b\}$ kümelerine sırasıyla a, b *açık aralığı* ve a, b *kapalı aralığı* denir. $[a,b)$ ile gösterilen $\{x\in\mathbb{R}: a\le x<b\}$ ve $(a,b]$ ile gösterilen $\{x\in\mathbb{R}: a<x\le b\}$ kümelerine ise *yarı-açık aralıklar* denir. (a,∞) ile gösterilen $\{x\in\mathbb{R}: a<x\}$ ve $[a,\infty)$ ile gösterilen $\{x\in\mathbb{R}: a\le x\}$ kümelerine, sırasıyla, a notasından *sonsuzluğa açık aralık* ve a notasından *sonsuzluğa kapalı aralık* denir. Dikkat edelim ki ∞ ve $-\infty$ reel sayı değildirler. Uygunluk için $(-\infty,\infty)$, $\mathbb{R}$ kümesini ifade eder. Uç noktalardan en az biri ∞ veya $-\infty$ olan aralığa *sonsuz aralık* denir. $x\in\mathbb{R}$ ve $\varepsilon>0$ olmak üzere $(x-\varepsilon,\ x+\varepsilon)$ açık aralığına x'in $\varepsilon-$ *komşuluğu*; $(x-\varepsilon,x)\cup(x,x+\varepsilon)$ ifadesine ise x'in *delinmiş* $\varepsilon-$ *komşuluğu* denir.

X her hangi bir küme olmak üzere $f:\mathbb{N}\to X$ fonksiyonuna X'de bir *dizi* denir. Bir dizi, $n\in\mathbb{N}$ için $a_n\ (=f(n))$ ile tek ve tam olarak belirlendiği için $\{a_n\}$ ile gösterilir. a_n ifadesine $\{a_n\}$ dizisinin n. terimi denir. ℓ bir sayı olmak üzere, keyfi $\varepsilon>0$ sayısı verildiğinde bir N doğal sayısı, her $n\ge N$ için $|a_n-\ell|<\varepsilon$ olacak şekilde varsa $\{a_n\}$ dizisi ℓ *sayısına yakınsaktır* denir; $\lim\limits_{n\to\infty}a_n=\ell$ şeklinde gösterilir. Verilen bir dizi yakınsak yani, bir limiti varsa bu limit tektir. Ayrıca, her yakınsak dizi sınırlıdır; ancak bunun tersi doğru olmak zorunda değildir. Örneğin, $\{(-1)^n\}$

dizisi sınırlıdır ancak yakınsak değildir. Eğer $\{a_n\}$ ve $\{b_n\}$ dizileri, sırasıyla ℓ_1 ve ℓ_2 limitlerine yakınsak ise aşağıdaki önermeler doğrudur.

i) $\{a_n \pm b_n\}$ dizisi $\ell_1 \pm \ell_2$ limitine yakınsaktır.

ii) $\{a_n \cdot b_n\}$ dizisi $\ell_1 \cdot \ell_2$ limitine yakınsaktır.

iii) k bir sabit olmak üzere $\{ka_n\}$ dizisi $k\ell_1$ limitine yakınsaktır.

iv) $\ell_2 \neq 0$ olmak üzere $\{a_n / b_n\}$ dizisi ℓ_1 / ℓ_2 limitine yakınsaktır.

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $a_{n+1} \geq a_n$ ise $\{a_n\}$ dizisine *azalmayan dizi;* eşitsizlik kesin ise *(kesin) artan dizi,* $a_{n+1} \leq a_n$ ise *artmayan dizi;* eşitsizlik kesin ise *(kesin) azalan dizi* denir. Artmayan ya da azalmayan dizilere *monoton dizi* denir. Bir monoton dizi ya bir limite yakınsar ya da $\mp\infty$ 'a ıraksar. $\{a_n\}$ bir reel sayı dizisi olmak üzere keyfi $\varepsilon > 0$ verildiğinde bir n_0 doğal sayısı, her $n, m > n_0$ için $|a_n - a_m| < \varepsilon$ olacak şekilde varsa bu diziye bir *Cauchy dizisi* denir. Bir reel sayı dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul onun bir Cauchy dizisi olmasıdır.

Her $n = 1, 2, 3, \cdots$ için u_n reel sayı olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ ifadesine bir sayı serisi denir. $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $S_n = u_1 + u_2 + ... + u_n$ olsun. $\{S_n\}$ dizisine $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisinin kısmî toplamlar dizisi, S_n sayısına ise $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisinin n. kısmî toplamı denir. Eğer $\lim_{n\to\infty} S_n = S$ limiti varsa $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi *yakınsaktır*. Bu durumda

$$S = u_1 + u_2 + \cdots u_n + \cdots = \sum_{n=1}^{\infty} u_n$$

yazılır ve serinin toplamı S sayısıdır denir. $\sum_{n=1}^{\infty} |u_n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ *mutlak yakınsaktır*. Her mutlak yakınsak seri yakınsaktır; ancak keyfi terimlere sahip bir seri yakınsak olsa bile mutlak yakınsak olmayabilir. Örneğin, $u_n = (-1)^{n+1} / n^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi her $\alpha > 0$ için yakınsak iken sadece $\alpha > 1$ durumu için mutlak yakınsaktır.

$\{f_n\}$, D kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonların bir dizisi olsun. Her $x \in D$ için $\{f_n(x)\}$ reel sayılar dizisi yakınsak ise $\{f_n\}$ dizisi D üzerinde *noktasal yakınsaktır* denir. Bir başka değişle, her $x \in D$ ve $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(x, \varepsilon)$ doğal sayısı,

$$|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon \qquad (n \geq N) \tag{3.1}$$

olacak şekilde varsa $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna D üzerinde noktasal yakınsaktır. Bu durum $\lim_{n\to\infty} f_n(x) = f(x)$ biçiminde yazılır.

(3.1)'i eş zamanlı olarak bütün $x \in D$ sayıları için sağlayan bir N bulmak her zaman mümkün olmayabilir. Eğer her $\varepsilon > 0$ için (3.1)'i eş zamanlı olarak her $x \in D$ için sağlayan (sadece ε sayısına bağlı) bir N sayısı bulmak mümkün ise $\{f_n\}$ dizisi f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir ve $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ ile gösterilir. $f_n \overset{D}{\rightrightarrows} f$ olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{n\to\infty} \sup_{x\in D} |f_n(x) - f(x)| = 0$$

eşitliğinin sağlanmasıdır. Açıktır ki, bir dizi düzgün yakınsak ise elbette ki noktasal yakınsaktır; ancak bunun tersi doğru olmayabilir. Örneğin, $[0,1]$ aralığı üzerinde $f_n(x) = x^n$ ile tanımlı $\{f_n\}$ dizisi $[0,1]$ üzerinde

$$f(x) = \begin{cases} 0, & x \in [0,1) \\ 1, & x = 1 \end{cases}$$

ile tanımlı f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır. Ancak bu dizi f fonksiyonuna $[0,1]$ üzerinde düzgün yakınsak değildir.

Reel sayı serisinin yakınsaklığının, onun kısmî toplamlar dizisinin yakınsaklığı cinsinden tanımlandığı gibi fonksiyon serilerinin yakınsaklığı da kendisinin kısmî toplamlar dizisinin yakınsaklığı cinsinden tanımlanır. Buna göre, D üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların bir $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi için, eğer $f_n = u_1 + u_2 + \ldots + u_n$ ile tanımlı $\{f_n\}$ dizisi bir f fonksiyonuna noktasal yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi f fonksiyonuna *noktasal yakınsaktır* denir. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} u_n = f$

ya da $\sum_{n=1}^{\infty} u_n(x) = f(x) \quad (x \in D)$ şeklinde yazılır. Dahası, eğer $\{f_n\}$ dizisi f 'e D üzerinde düzgün yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} u_n$ serisi f fonksiyonuna D üzerinde düzgün yakınsaktır denir.

f bir c noktasının bir delinmiş komşuluğunda tanımlı olsun. Bu durumda, ℓ bir sayı olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık en az bir $\delta > 0$ sayısı,

$$0 < |x - c| < \delta \quad \text{iken} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

olacak şekilde varsa, f fonksiyonu c noktasında ℓ *limitine sahiptir* denir ve $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ ile gösterilir. Ayrıca, her $k > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı,

$$|x - c| < \delta \quad \text{iken} \quad f(x) > k$$

olacak şekilde varsa f fonksiyonunun c noktasındaki limiti $+\infty$ 'dur ve $\lim_{x \to c} f(x) = +\infty$ ile gösterilir. Benzer şekilde, her $k > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı,

$$|x - c| < \delta \quad \text{iken} \quad f(x) < -k$$

olacak şekilde varsa f fonksiyonunun c noktasındaki limiti $-\infty$ 'dur ve $\lim_{x \to c} f(x) = -\infty$ ile gösterilir.

Her bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı

$$c - \delta < x < c \quad \text{iken} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ise f fonksiyonunun c noktasındaki soldan limiti ℓ 'dir denir ve $\lim_{x \to c^-} f(x) = \ell$ ile gösterilir. Her bir $\varepsilon > 0$ için bir $\delta > 0$ sayısı

$$c < x < c + \delta \quad \text{iken} \quad |f(x) - \ell| < \varepsilon$$

ise f fonksiyonunun sağdan limiti ℓ 'dir denir ve $\lim_{x \to c^+} f(x) = \ell$ ile gösterilir. Açıktır ki, $\lim_{x \to c} f(x) = \ell$ olması için gerek ve yeter koşul sağdan ve soldan limitlerin var ve birbirine eşit olmalarıdır.

Eğer

$$\lim_{x \to c} f(x) = \ell$$

ise f fonksiyonu c noktasında *süreklidir* denir. Bir f fonksiyonu c noktasında

$$\lim_{x \to c^-} f(x) = f(c)$$

ise *soldan süreklidir;*

$$\lim_{x\to c^+} f(x)=f(c)$$

ise *sağdan süreklidir* denir. Ayrıca, bir f fonksiyonu aralığın her noktasında sürekli ise bu fonksiyona bu *aralık üzerinde süreklidir* denir. f ve g fonksiyonları bir c noktasında sürekli ise $f+g$, $f-g$, $f\cdot g$ ve f/g $(g\neq 0)$ fonksiyonları da c noktasında süreklidir. Sürekli fonksiyonların bazı önemli özellikleri aşağıda verilmiştir.

i) I aralığında tanımlı bir f fonksiyonun bir $c\in I$ noktasında sürekli olması için gerek ve yeter koşul c noktasına yakınsayan her $\{c_n\}$ dizisi için $\lim_{n\to\infty} f(c_n)=f(c)$ olmasıdır.

ii) f, $[a,b]$ aralığında sürekli ise f bu aralıkta sınırlıdır ve sınırlarını $[a,b]$ aralığında en az bir defa alır.

iii) Bir f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli ve $f(a)\cdot f(b)<0$ ise en az bir $c\in[a,b]$ noktası için $f(c)=0$. Sonuç olarak, eğer f, $[a,b]$ üzerinde sürekli ise kendi sınır değerleri arasındaki her değeri alır.

iv) Bir f fonksiyonun sürekli olması için gerek ve yeter koşul her açık (kapalı) kümenin ters görüntüsünün açık (kapalı) olmasıdır.

I aralığı üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu için her bir $\varepsilon>0$ sayısına karşılık bir $\delta>0$ sayısı

$$|x_1-x_2|<\delta \quad \text{olan} \quad x_1,x_2\in I \quad \text{için} \quad |f(x_1)-f(x_2)|<\varepsilon$$

olacak şekilde varsa f fonksiyonu I üzerinde *düzgün süreklidir* denir. Bir I aralığında düzgün sürekli olan bir fonksiyonun bu aralıkta süreklidir, fakat bunun tersi doğru olamayabilir. Ancak, I aralığı kapalı ise tersi de sağlanır.

f, $[a,b]$ üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. c bir iç nokta $(a<c<b)$ olmak üzere

$$\lim_{h\to\infty}\frac{f(c+h)-f(c)}{h}$$

ya da buna denk olarak

$$\lim_{x\to c}\frac{f(x)-f(c)}{x-c}$$

limiti varsa f fonksiyonu c noktasında *türevlenebilir* (*diferansiyelenebilir*) denir. Eğer varsa bu limite f fonksiyonun $x=c$ noktasındaki türevi adı verilir ve $f'(c)$ ile gösterilir. Bir noktada türevlenebilir fonksiyonun o noktada sürekli olması gerekirken, tersi doğru olmayabilir. Örneğin, $f(x)=|x|$ $(-\infty<x<\infty)$ ile tanımlı f fonksiyonu $x=0$ noktasında süreklidir ancak $f'(0)$ yoktur.

Yukarıda tanımlanan $f':[a,b]\to\mathbb{R}$ türev fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde (a da sağdan ve b de soldan) türevlenebiliyorsa, $(f')':[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna f 'nin 2. mertebeden türevi denir ve $f''(x)$ ile gösterilir. Bu süreç böyle devam ettirilirse, $r\in\mathbb{N}$ için $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde (a da sağdan ve b de soldan) $(r-1)$. mertebeden türevlenebilir olsun. Eğer $f^{(r-1)}:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde (a da sağdan ve b de soldan) türevlenebiliyorsa, bu fonksiyonun $\left(f^{(r-1)}\right)':[a,b]\to\mathbb{R}$ türev fonksiyonuna f 'nin r. mertebeden türevi denir ve $f^{(r)}$ ile gösterilir. Verilen bir f fonksiyonun 0. mertebeden türevi de f 'nin kendisi olarak, yani $f^{(0)}=f$ gibi tanımlanır.

Ortalama Değer Teoremi: $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $[a,b]$ üzerinde sürekli ve (a,b) üzerinde türevlenebilir olsun. Bu durumda,

$$f(b)-f(a)=f'(\xi)(b-a)$$

olacak şekilde en az bir $\xi\in(a,b)$ noktası vardır.

Taylor Formülü: $x_0\in(a,b)$ noktasında n. mertebeden türevlenebilir bir $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. Bu durumda,

$$f(x)=f(x_0)+\frac{f'(x_0)}{1!}(x-x_0)+\cdots+\frac{f^{(n)}(x_0)}{n!}(x-x_0)^n+\varepsilon_n(x,x_0)$$

formülü doğrudur; burada $\varepsilon_n(\cdot,x_0)$ sürekli ve $\varepsilon_n(x_0,x_0)=0$. Eğer, $x_0=0$ alınırsa, yukarıdaki ifadeye *Maclaurin formülü* denir.

$x_2 \geq x_1$ olan her $x_1, x_2 \in I$ için $f(x_2) \geq f(x_1)$ $\left(f(x_2) \leq f(x_1)\right)$ ise f fonksiyonu I aralığı üzerinde *artandır* (*azalandır*) denir. Yukarıdaki bağıntıların kesin eşitsizlik durumunda, f fonksiyonuna *kesin artan* (*kesin azalan*) adı verilir. Eğer f fonksiyonu artan ya da azalan ise *monoton*; kesin artan ya da kesin azalan ise *kesin monoton* adını alır.

Bu bölümde verilen tüm kavramlara temel analiz konularını içeren herhangi bir kaynaktan ulaşılabilir. Örneğin, [35], [36], [37].

3.2. BAZI FONKSİYON UZAYLARI

X boştan faklı bir küme ve K bir cisim olmak üzere

$$
\begin{aligned}
+ &: X \times X \to X, \qquad (x, x') \to x + x' \\
\bullet &: K \times X \to X, \qquad (k, x) \to k\,x
\end{aligned}
$$

fonksiyonları verilsin. Aşağıdaki aksiyomlar sağlanırsa X kümesine K cismi üzerinde bir *lineer uzay (veya vektör uzayı)* denir. “$+$” işlemine toplama, “$\bullet$” işlemine de skalerle çarpma denir.

i) Her $x, y, z \in X$ için $x + (y + z) = (x + y) + z$,

ii) Her $x, y \in X$ için $x + y = y + x$,

iii) Bir $\Theta \in X$ vardır öyle ki her $x \in X$ için $x + \Theta = x$, (Θ ’a toplamaya göre etkisiz eleman denir.)

iv) Her $x \in X$ için en az bir $x' \in X$ için $x + x' = \Theta$, (x' ’ne toplamaya göre x ’in tersi denir ve $x' = -x$ ile gösterilir.)

v) Her $x, y \in X$ ve her $\alpha \in K$ için $\alpha(x + y) = \alpha x + \alpha y$,

vi) Her $x \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için $(\alpha + \beta)x = \alpha x + \beta x$,

vii) Her $x \in X$ için $1 \cdot x = x$, (1, K ’nın birimidir.)

viii) Her $x \in X$ ve her $\alpha, \beta \in K$ için $(\alpha\beta)x = \alpha(\beta x)$.

X bir lineer uzay, $A \subset X$ olmak üzere her $x, y \in A$ ve $\alpha, \beta \in K$ için $\alpha x + \beta y \in A$ ise A ’ya X ’in bir *alt uzayı* denir.

Vektör uzayı cebirsel bir yapı olup, eğer bu yapı üzerinde analiz yapılmak isteniyorsa onun üzerine bir uzaklık ölçümünün inşa edilmesi gerekir. Bu, norm denilen bir kavramın tanımlanması yardımıyla yapılır.

X, K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun. $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonu

i) Her $x \in X$ için $\|x\| \geq 0$ ve $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \Theta$,

ii) Her $x \in X$ ve $\alpha \in K$ için $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$ (3.2)

iii) Her $x, y \in X$ için $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$ (üçgen eşitsizliği).

özelliklerini sağlıyorsa $\|\cdot\|$ fonksiyonuna X üzerinde bir *norm* denir. $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir *normlu uzay* adı verilir [38].

M boştan farklı bir küme ve K bir cisim olsun

$$\mathcal{F}(M,K) = \{ f \mid f : M \to K \text{ fonksiyondur} \},$$

M üzerinde tanımlı K-değerli tüm fonksiyonların sınıfını göstersin. f ve g fonksiyonlarının toplamı ve skalerle çarpımı her $x \in M$ ve $\alpha \in K$ için,

$$(f+g)(x) = f(x) + g(x),$$
$$(\alpha f)(x) = \alpha(f(x)),$$

ile tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathcal{F}(M,K)$ ailesi K cismi üzerinde bir lineer uzaydır. $K = \mathbb{R}$ ve M kümesini de $\mathbb{R}$'nin bir alt kümesi olarak seçilirse

$$\mathcal{F}(M,\mathbb{R}) = \{ f \mid f : M \to \mathbb{R} \text{ fonksiyondur} \},$$

M üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonların uzayı elde edilir.

Sürekli Fonksiyonlar Uzayı: I bir aralık ve f bu aralık üzerinde tanımlı bir fonksiyon olsun. $M > 0$ olmak üzere her $x \in I$ için $|f(x)| \leq M$ ise f, I üzerinde sınırlıdır denir. I üzerinde sınırlı tüm reel değerli fonksiyonların sınıfı $B(I)$ ile gösterilir:

$$B(I):=\left\{f\in\mathcal{F}(I,\mathbb{R}):\exists M>0;\ \ \forall x\in I,\ \ \left|f(x)\right|\le M\right\}.$$

I aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfı ise $C(I)$ ile gösterilir. Açıktır ki $B(I)$ ve $C(I)$ sınıfları $\mathcal{F}(I,\mathbb{R})$ uzayının alt uzaylarıdır.

$B(I)$ ve $C(I)$ üzerinde

$$\|f\|:=\sup_{x\in I}\left|f(x)\right| \tag{3.3}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|$ fonksiyonu (3.2) koşullarını sağladığından bu uzaylar üzerinde bir normdur. (3.3) ile tanımlı norma *düzgün norm* denir. r. mertebeden türevi $C(I)$ sınıfından olan fonksiyonların uzayı $C^r(I)$ ile gösterilir. Özel olarak $C^0(I):=C(I)$. $I=[a,b]$ ise $C[a,b]$ gösterimi kullanılır. Her $r\in\mathbb{N}_0$ için $C^r(I)$ uzayının önemli bir alt uzayı da polinomlar uzayıdır: $n\in\mathbb{N}$, $a_0,a_1,\cdots,a_n\in\mathbb{R}$, $a_n\neq 0$ olmak üzere

$$P(x)=a_0+a_1x+\cdots+a_nx^n$$

olarak tanımlı fonksiyona n dereceli polinom denir. Derecesi $\le n$ olan tüm polinomların kümesi $\mathbb{P}_n$ ile gösterilir. Açıktır ki $\mathbb{P}_n$, $C(I)$ uzayının bir alt uzayıdır.

Lipschitz Sınıfı: $f\in C[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Her $\delta>0$ için

$$\omega(f;\delta):=\sup\left\{\left|f(x+h)-f(x)\right|:\ x,\ x+h\in[a,b],\ \ 0\le h\le\delta\right\},$$

$$\omega_2(f;\delta):=\sup\left\{\left|f(x+h)-2f(x)+f(x-h)\right|:\ x,\ x\pm h\in[a,b],\ \ 0\le h\le\delta\right\}$$

ile tanımlanan $\omega(f;\delta)$ ve $\omega_2(f;\delta)$ ifadelerine, sırasıyla, *f fonksiyonunun δ adımlı birinci ve ikinci mertebeden süreklilik modülü* denir. Birinci süreklilik modülünün sık kullanılan bazı özellikleri aşağıda verilmiştir [39], [40].

i) $\omega(f;\delta)\ge 0$ (*pozitiflik*);

ii) $\delta_1\le\delta_2\Rightarrow\omega(f;\delta_1)\le\omega(f;\delta_2)$ (*monotonluk*);

iii) $\omega(f;\delta_1+\delta_2)\le\omega(f;\delta_1)+\omega(f;\delta_2)$ (*yarı toplamsallık*);

iv) $\lambda\in\mathbb{R}^+$ için $\omega(f;\lambda\delta)\le(\lambda+1)\omega(f;\delta)$;

v) $\lim\limits_{\delta\to 0}\omega(f;\delta)=0$;

vi) $|f(t)-f(x)|\le\omega(f;|t-x|)$;

vii) $|f(t)-f(x)|\le\left(1+\frac{1}{\delta}|t-x|\right)\omega(f;\delta)$.

f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon, $M>0$ ve $0<\alpha\le 1$ olsun. Her $x,\ t\in[a,b]$ için

$$|f(t)-f(x)|\le M\,|t-x|^{\alpha}$$

koşulu sağlanırsa f *Lipschitz sınıfındandır* denir ve $f\in Lip_M\alpha$ ile gösterilir. Ayrıca $f\in Lip_M\alpha$ olması için gerek ve yeter koşulun $\omega(f;\delta)\le M\delta^{\alpha}$ olduğu tanımdan kolayca görülür [39].

3.3. YAKLAŞIM KURAMI VE TEMEL TEOREMLERİ

Bu bölümde, verilen sürekli fonksiyona istenilen yakınlıkta polinomların varlığı hakkındaki Weierstrass teoremi, Bernstein teoremi ve Cebirsel polinomların yaklaşım hızı incelenecektir.

3.3.1. Weierstrass Yaklaşım Teoremi

1885 yılında K. Weierstrass [2], keyfi bir $f\in C[a,b]$ fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyona keyfi yakınlıkta bir cebirsel polinomun varlığını aşağıda verilen teoremiyle ispatlamıştır.

3.3.1. Teorem (Weierstrass Yaklaşım Teoremi). *Her bir $f\in C[a,b]$ fonksiyonu ve her $\varepsilon>0$ sayısı için $\|f-P\|<\varepsilon$ olacak şekilde bir P polinomu vardır.*

Yaklaşım teorisinin temel teoremi olarak nitelendirilen ve literatürde *Weierstrass Yaklaşım Teoremi* olarak bilinen teoremin birçok ispatı vardır. Bu ispatlar içerisinde önemli olanlardan bir tanesi 1912 yılında S. N. Bernstein tarafından verilmiştir. S. N. Bernstein, $[0,1]$ aralında tanımlı bir f fonksiyonu ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ile tanımlı polinomları tanımlamıştır. Bu polinomlara n. *Bernstein polinomu,* B_n operatörüne de n. *Bernstein operatörü* denir. Fonksiyonlar kümesinden polinomlar kümesine giden B_n operatörü lineerdir, yani her f, g fonksiyonu ve her α, β reel sayıları için

$$B_n(\alpha f + \beta g; x) = \alpha B_n(f;x) + \beta B_n(g;x)$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca, eğer $f \le g$ ise,

$$B_n(f;x) \le B_n(g;x)$$

eşitsizliği doğrudur. Öte yandan, tanımdan kolayca görüleceği üzere,

$$\left|B_n(f;x)\right| \le B_n(|f|;x)$$

olur.

S. N. Bernstein [4], bu polinomlarla $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yaklaşılabileceğini aşağıda verilen teoremiyle ispatlamıştır.

3.3.2. Teorem (Bernstein). *Bir* $f \in C[0,1]$ *fonksiyonu verildiğinde,* $\{B_n(f;.)\}$ *Bernstein polinomlar dizisi* f *fonksiyonuna* $[0,1]$ *kapalı aralığında düzgün yakınsaktır.*

3.3.2. Cebirsel Polinomların Yaklaşım Hızı

Cebirsel polinomların sürekli fonksiyonlara yaklaşımının varlığı dışında hangi hızda yaklaştığının bulunması da yaklaşım kuramının önemli problemlerindendir. Bu konuyla ilgili ilk çalışmalar D. Jackson [41] tarafından yirminci yüzyılın başlarında çalışılmıştır. İlk olarak yaklaşım hızını ölçecek bazı kavramlar verilecektir.

X bir normlu uzay olmak üzere $x, y \in X$ noktaları arasındaki *uzaklık* $\|x-y\|$ ile tanımlanır. $Y \subset X$ boş olmayan bir alt küme olsun. Bir $f \in X$ verildiğinde

$$E(f;Y) := \inf_{p \in Y} \|f-p\|$$

sayısına f elemanının Y kümesindeki *en iyi yaklaşım sayısı* denir. Açıktır ki, eğer $f \in Y$ ise en iyi yaklaşım sıfırdır. Eğer bir $p^* \in Y$ için

$$\inf_{p \in Y} \|f-p\| = \|f-p^*\|$$

oluyorsa p^* elemanına f elemanının Y kümesindeki *en iyi yaklaşım elemanı* denir.

$C[a,b]$ uzayındaki bir f fonksiyonun $\mathbb{P}_n$ uzayındaki en iyi yaklaşım sayısı

$$E_n(f) := \inf_{P \in \mathbb{P}_n} \max_{x \in [a,b]} |f(x) - P(x)|$$

ile tanımlanır. D. Jackson, 1912 yılında, kapalı aralıkta sürekli olan fonksiyonların derecesi $\leq n$ olan polinomlar uzayında en iyi yaklaşım sayısının süreklilik modülü cinsinden belirlenmesine dair sonuçlar elde etmiştir:

3.3.3. Teorem [41]. *Eğer* $f \in C[-1,1]$ *ise*

$$E_n(f) \leq 6\omega\left(f;\frac{1}{n}\right).$$

3.3.4. Sonuç [41]. *Eğer* f *fonksiyonu* $[-1,1]$ *aralığında* $Lip_M \alpha$*,* $0 < \alpha \leq 1$ *sınıfına ait ise*

$$E_n(f) \leq 6\frac{M}{n^\alpha}.$$

3.3.5. Teorem [41]. *Eğer* $f \in C^1[-1,1]$ *ise*

$$E_n(f) \leq 6\frac{E_{n-1}(f')}{n}.$$

3.3.6. Teorem [41]. *Eğer* $f \in C^r[-1,1]$ *ise*

$$E_n(f) \leq 6^r \frac{E_{n-r}\left(f^{(r)}\right)}{n(n-1)\cdots(n-r+1)}, \qquad n > r.$$

3.4. POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER

M ve N boştan faklı kümeler olmak üzere, X, $\mathcal{F}(M,\mathbb{R})$'nin, ve Y, $\mathcal{F}(N,\mathbb{R})$'nin birer alt uzayı olsun. Her $x, y \in X$ ve her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$ için

$$L(\alpha x + \beta y) = \alpha L(x) + \beta L(y)$$

eşitliğini sağlayan $L : X \to Y$ dönüşümüne *lineer operatör* denir. Bir lineer operatör tanım uzayının sıfır öğesini görüntü uzayının sıfır öğesine götürür. Bir lineer uzaydan cisme tanımlı herhangi bir fonksiyona *fonksiyonel* denir. Eğer bu fonksiyon lineer ise *lineer fonksiyonel* adını alır. Her pozitif $f \in X$ fonksiyonu için $L(f)$ pozitif fonksiyon ise L operatörüne *pozitif operatör* denir. Hem pozitif hem de lineer olan operatöre *pozitif lineer operatör* adı verilir.

Her $f, g \in X$ için $f \leq g$ olduğunda, $L(f) \leq L(g)$ oluyorsa L pozitif lineer operatörüne *monotondur* denir. Açıktır ki pozitif lineer operatörler aynı zamanda monotondurlar. Öte yandan, $L : X \to Y$ pozitif lineer operatör ve $f, |f| \in X$ için

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği doğrudur [42].

$L : X \to Y$ operatörü

$$\|L(f)\|_Y \leq C\|f\|_X$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, L operatörüne *sınırlı operatör* denir. Bu eşitsizliği sağlayan C sabitlerinin infimumuna L operatörünün *normu* denir ve $\|L\|$ ile gösterilir [43]. Öte yandan, $L: B(I) \to B(I)$ pozitif lineer operatör ise o zaman L sınırlıdır ve normu

$$\|L\| = \|L(1)\|$$

eşitliği ile hesaplanır [42].

Pozitif lineer operatör ile yaklaşım kuramında sık kullanılan eşitsizliklerden bir tanesi aşağıda verilmiştir:

$$|L(f\,g)| \leq \sqrt{L(f^2)}\sqrt{L(g^2)}.$$

Bu eşitsizliğe *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* denir. Bu eşitsizliğin genel hali de doğrudur: $L: X \to Y$ pozitif lineer operatör ve $p, q > 1$ reel sayılar öyle ki $1/p + 1/q = 1$ olsun. O zaman her $f, g \in X$ için

$$L(|f\,g|) \leq \left(L\left(|f|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \left(L\left(|g|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliğe *pozitif lineer operatörler için Hölder eşitsizliği* adı verilir. Özel olarak Hölder eşitsizliğinde $p = q = 2$ alınırsa yukarıda verilen *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* elde edilir [44].

Pozitif lineer operatörlerin n-inci mertebeden momentlerin hesaplanması bu tip operatörlerin yaklaşımında büyük bir önem taşır. $I = [a,b]$ olmak üzere $L: C[a,b] \to C[a,b]$ bir pozitif lineer operatör olsun. $i \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere $e_i(x) := x^i$ ve bu operatör için *n-inci mertebeden moment* $n \geq 0$ için $M_n(x) := L\left((e_1 - x)^n ; x\right)$, $x \in [a,b]$ olarak tanımlanır. $n \geq 1$ tek ise *n-inci mutlak moment* $\mathcal{M}_n(x) := L\left(|e_1 - x|^n ; x\right)$, $x \in [a,b]$ biçiminde tanımlanır. Birinci mutlak moment $\mathcal{M}_1(x)$ ve ikinci mertebenden moment $M_2(x)$ pozitif lineer operatörlerin yaklaşım hızının hesaplanmasında önemli rolleri vardır. Ayrıca Cauchy-Schwarz eşitsizliği kullanılarak aşağıdaki değerlendirme kolayca elde edilir.

$$\mathcal{M}_1(x) \le \sqrt{L(e_0^2;x)} \cdot \sqrt{M_2(x)} \tag{3.4}$$

Ancak bu eşitsizlik ince hesaplamalar için çok kullanışlı değildir. Bunun için aşağıdaki önermede verilen alternatif yollar izlenebilir.

3.4.1. Önerme [44]. *$L: X \to Y$ pozitif lineer operatör ve $p,q>1$ reel sayılar öyle ki $1/p+1/q=1$ olsun. Her $f,g\in X$ ve $n=n_1+n_2$* olan $n,n_1,n_2\ge 0$ *sayıları için*

$$\mathcal{M}_n(x) \le \left(\mathcal{M}_{n_1 p}(x)\right)^{\frac{1}{p}} \cdot \left(\mathcal{M}_{n_2 q}(x)\right)^{\frac{1}{q}}.$$

Eğer $n=1,\quad n=n_1+n_2=0+1,\quad p=q=2$ ise (3.4) *eşitsizliği elde edilir.*

3.4.2. Önerme [44] *$L: C[0,1] \to C[0,1]$ pozitif lineer operatör, $L(e_0)=e_0$ ve $1\le s<r$ olsun. O zaman*

$$\left(\mathcal{M}_s(x)\right)^{\frac{1}{s}} \le \left(\mathcal{M}_r(x)\right)^{\frac{1}{r}}, \qquad x\in[0,1].$$

Ayrıca

$$\mathcal{M}_1(x) \le \left(M_2(x)\right)^{\frac{1}{2}} \le \left(\mathcal{M}_3(x)\right)^{\frac{1}{3}} \le \left(M_4(x)\right)^{\frac{1}{4}} \le \cdots$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Aşağıdaki önerme lineer operatörlerin yüksek mertebeden momentlerin hesaplanmasında kullanılan bir rekürans formülüdür.

3.4.3. Önerme [44] *L lineer operatör ve $k\in\mathbb{N}_0$ olmak üzere*

$$M_k(x) = L(e_k;x) - \sum_{j=0}^{k-1} \binom{k}{j} x^{k-j} M_j(x).$$

3.4.4. Sonuç [44]. *L lineer operatör ve $L(e_i) = e_i$, $i = 0,1$ olsun. O halde üçüncü ve dördüncü mertebeden momentler aşağıdaki gibidir.*

$$M_3(x) = L(e_3;x) - x^3 - 3xM_2(x);$$
$$M_4(x) = L(e_4;x) - x^4 - 4xM_3(x) - 6x^2M_2(x).$$

3.5. POZİTİF LİNEER OPERATÖRLER İLE YAKLAŞIM

Bu bölümde, Weierstrass Teoreminin ispatı pozitif lineer operatörler yardımıyla verilecektir. İspatın temelini oluşturan Bohman-Korovkin teoreminin yanı sıra Jackson teoremlerine benzer olan pozitif lineer operatörler ile yaklaşımın, süreklilik modülü cinsinden, hızının verildiği teoremlere de değinilecektir. Ayrıca Voronovskaya teoremi de ispatı ile birlikte verilecektir.

3.5.1. Bohman-Korovkin Teoremi

1951 yılında H. Bohman, $f \in C[0,1]$ olmak üzere

$$L_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} f(\xi_{n,k})\, p_{n,k}(x); \qquad x,\ \xi_{n,k} \in [0,1],\ p_{n,k} \geq 0,\ n \in \mathbb{N}$$

ile tanımlı $\{L_n(f)\}$ dizisinin

$$L_n(e_i) \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} e_i, \qquad i = 0,1,2$$

koşullarını sağladığında, f fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsadığını ispatlamıştır. H. Bohman'ın ele aldığı bu tipteki operatörler, açıktır ki, pozitif ve lineerdir ve f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır. 1953 yılında P. P. Korovkin aynı problemi daha geniş operatörler sınıfında, b

noktasında sağdan, a noktasında soldan sürekli ve tüm reel eksende sınırlı olan $f \in C[a,b]$ fonksiyonları için incelemiştir [43].

3.5.1. Teorem (Korovkin). *$C[a,b]$ üzerinde tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörler dizisi verilsin. $f \in C[a,b]$ fonksiyonu b noktasında sağdan, a noktasında soldan sürekli ve tüm reel eksende sınırlı olmak üzere*

$$L_n(f) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$L_n(e_i) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} e_i, \qquad i = 0,1,2 \tag{3.5}$$

koşullarının sağlanmasıdır.

İspat. Gereklilik kısmının ispatı açıktır. Dolayısıyla sadece yeterlilik kısmı ispatlanacaktır. f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan bir $M > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$\text{her } x \in \mathbb{R} \text{ için } \quad |f(x)| \le M . \tag{3.6}$$

Ayrıca $f \in C[a,b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|t-x| < \delta$ olacak şekilde her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{3.7}$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Öte yandan $|t-x| \ge \delta$ için

$$\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \ge 2M$$

eşitsizliği doğrudur. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Son eşitsizlikle birlikte (3.6) ve (3.7) eşitsizlikleri yardımıyla ε yerine $\varepsilon/8$ alınırsa

$$|f(t) - f(x)| < \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \frac{\varepsilon}{8} \tag{3.8}$$

eşitsizliği bulunur. Pozitif lineer operatörün özelliklerinden her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned}\left|L_n(f;x)-f(x)\right| &= \left|L_n(f-f(x);x)+f(x)\left(L_n(e_0;x)-e_0(x)\right)\right| \\ &\leq \left|L_n(f-f(x);x)\right|+\left|f(x)\right|\left|L_n(e_0;x)-e_0(x)\right| \\ &\leq L_n\left(\left|f-f(x)\right|;x\right)+M\left\|L_n(e_0)-e_0\right\|\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3.5)'den dolayı bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq N$ için

$$\left\|L_n(e_0)-e_0\right\| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Dolayısıyla

$$\left|L_n(f;x)-f(x)\right| < L_n\left(\left|f-f(x)\right|;x\right)+\frac{\varepsilon}{2} \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.8) eşitsizliği ve pozitif lineer operatörün özellikleri kullanılarak

$$\begin{aligned}L_n\left(\left|f-f(x)\right|;x\right) &< L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(e_1-x)^2+\frac{\varepsilon}{8};x\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{8}L_n(e_0;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((e_1-x)^2;x\right) \\ &= \frac{\varepsilon}{8}L_n(e_0;x)+\frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(e_2;x)-2xL_n(e_1;x)+x^2L_n(e_0;x)\right] \\ &\leq \frac{\varepsilon}{8}\left[L_n(e_0;x)-e_0(x)\right]+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{2M}{\delta^2}\Big\{\left[L_n(e_2;x)-e_2(x)\right] \\ &\qquad -2x\left[L_n(e_1;x)-e_1(x)\right]+x^2\left[L_n(e_0;x)-e_0(x)\right]\Big\} \\ &= \frac{\varepsilon}{8}+\left(\frac{\varepsilon}{8}+\frac{2M}{\delta^2}x^2\right)\left[L_n(e_0;x)-e_0(x)\right]+\frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(e_2;x)-e_2(x)\right] \\ &\qquad -\frac{4M}{\delta^2}x\left[L_n(e_1;x)-e_1(x)\right]\end{aligned}$$

elde edilir.

$$\max_{x\in[a,b]}\left|\frac{\varepsilon}{8}+\frac{2M}{\delta^2}x^2\right| = M_0, \quad \max_{x\in[a,b]}\left|-\frac{4M}{\delta^2}x\right| = M_1, \quad \frac{2M}{\delta^2} = M_2$$

olmak üzere

$$L_n\left(\left|f-f(x)\right|;x\right) < \frac{\varepsilon}{8}+\sum_{i=0}^{2}M_i\left|L_n(e_i;x)-e_i(x)\right|$$

$$\leq \frac{\varepsilon}{8} + \sum_{i=0}^{2} M_i \left\| L_n\left(e_i\right) - e_i \right\|$$

(3.5)'den dolayı her bir $i = 0,1,2$ için bir $N_i \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq N_i$ için

$$\left\| L_n\left(e_i\right) - e_i \right\| < \frac{\varepsilon}{8M_i}.$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$L_n\left(\left|f - f\left(x\right)\right|; x\right) < \frac{\varepsilon}{2} \tag{3.10}$$

bulunur. Son eşitsizlik ve (3.9) eşitsizliği yardımıyla her $n \geq \max\left\{N, N_0, N_1, N_2\right\}$ için

$$\left\| L_n\left(f\right) - f \right\| < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla ispat tamamlanır. ■

3.5.2. Örnek (Bernstein Polinomları). $\left[0,1\right]$ aralığında tanımlı sürekli keyfi f fonksiyonu için n. Bernstein polinomu(operatörü)

$$B_n\left(f; x\right) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \left(1-x\right)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3.11}$$

şeklinde tanımlanır. Bu operatörlerin oluşturulma yapısı binom açılımına dayanmaktadır. Yani; x, y pozitif sayılar ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere binom açılımı

$$\left(x+y\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

biçimindedir. Bu açılımda $x \in \left[0,1\right]$ olmak üzere $y = 1 - x$ alınırsa;

$$1 = \left(x + 1 - x\right)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k \left(1-x\right)^{n-k}$$

eşitliği elde edilir. Aşağıda, verilen sürekli fonksiyona bağlı Bernstein polinomlar dizisinin bu fonksiyona düzgün yakınsadığını, yani Bernstein Teoremin (Teorem 3.3.2) ispatı Bohman-Korovkin Teoremi kullanılarak yapılacaktır.

Bernstein operatörleri lineerdir: Her $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, her $f,g\in C[0,1]$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$
\begin{aligned}
B_n(\alpha f+\beta g;x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(\alpha f+\beta g)\left(\frac{k}{n}\right)\\
&=\alpha\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}\right)+\beta\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}g\left(\frac{k}{n}\right)\\
&=\alpha B_n(f;x)+\beta B_n(g;x).
\end{aligned}
$$

Bernstein operatörleri pozitiftir: Her $x\in[0,1]$, her $n\in\mathbb{N}$ ve her $k=0,1,\cdots,n$ için $x^k(1-x)^{n-k}\geq 0$ olduğundan her $f\geq 0$ için $B_n(f;x)\geq 0$ sağlanır.

Bernstein operatörleri (3.5) *koşullarını sağlar:*

$$
B_n(e_0;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+1-x)^n=1
$$

$$
\begin{aligned}
B_n(e_1;x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}=x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\
&=x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{(n-1)-k}=x(1-x+x)^{n-1}=x
\end{aligned}
$$

$$
\begin{aligned}
B_n(e_2;x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\left(\frac{k}{n}\right)^2=x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}\\
&=x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\frac{k-1}{n}+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}\\
&=x^2\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{(n-1)-k}\\
&=x^2\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2}\binom{n-2}{k}x^k(1-x)^{(n-2)-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{(n-1)-k}\\
&=x^2\frac{n-1}{n}(1-x+x)^{n-2}+\frac{x}{n}(1-x+x)^{n-1}=x^2+\frac{x(1-x)}{n}.
\end{aligned}
$$

Bu sonuçlar toparlanırsa

$$
B_n(e_0;x)=1,\quad B_n(e_1;x)=x,\quad B_n(e_2;x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n} \tag{3.12}
$$

elde edilir. Buradan

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|B_n\left(e_i;x\right)-e_i\left(x\right)\right|=0, \qquad i=0,1$$

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|B_n\left(e_2;x\right)-e_2\left(x\right)\right|=\frac{1}{4n}$$

dolayısıyla Bernstein operatörler dizisi (3.5) koşullarını sağladığı görülür. O halde Bohman-Korovkin Teoremi gereğince her $f\in C\left[0,1\right]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\left(f\right)-f\right\|=0$$

olur. Bir başka deyişle, $\left\{B_n\left(f\right)\right\}$ dizisi f fonksiyonuna $\left[0,1\right]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla Bernstein Teoreminin sonuç olarak da Weierstrass Teoreminin farklı bir ispatı elde edilmiş olur.

Bernstein operatörlerinin merkezi momentleri: (3.12) eşitliklerinden her $x\in\left[0,1\right]$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$B_n\left(e_1-x;x\right)=0, \qquad B_n\left(\left(e_1-x\right)^2;x\right)=\frac{x\left(1-x\right)}{n} \tag{3.13}$$

elde edilir. Bernstein operatörlerinin tanımı yardımıyla

$$B_n\left(e_3;x\right)=x^3+\frac{3x^2\left(1-x\right)}{n}+\frac{x\left(1-x\right)\left(1-2x\right)}{n^2} \tag{3.14}$$

$$B_n\left(e_4;x\right)=x^4+\frac{6x^3\left(1-x\right)}{n}+\frac{x^2\left(1-x\right)\left(7-11x\right)}{n^2}+\frac{x\left(1-x\right)\left(6x^2-6x+1\right)}{n^3} \tag{3.15}$$

eşitlikleri elde edilebilir. Buradan aşağıdaki eşitlikler hesaplanabilir:

$$B_n\left(\left(e_1-x\right)^3;x\right)=\frac{x\left(1-x\right)\left(1-2x\right)}{n^2} \tag{3.16}$$

$$B_n\left(\left(e_1-x\right)^4;x\right)=\frac{x\left(1-x\right)\left[1+3\left(n-2x\left(1-x\right)\right)\right]}{n^3} \tag{3.17}$$

3.5.2. Bernstein-Chlodovsky Operatörleri

$\left[0,\infty\right)$ kapalı aralığında tanımlı bir f fonksiyonu ve $n\in\mathbb{N}$ için, n. Bernstein-Chlodovsky polinomu (operatörü)

$$C_n\left(f;x\right)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\left(\frac{x}{b_n}\right)^k\left(1-\frac{x}{b_n}\right)^{n-k}f\left(\frac{k}{n}b_n\right),\qquad x\in[0,b_n] \tag{3.18}$$

şeklinde tanımlanır; burada $\{b_n\}$,

$$\lim_{n\to\infty}b_n=\infty \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n}=0 \tag{3.19}$$

koşullarını sağlayan monoton artan bir pozitif reel sayı dizisidir [45].

Bernstein-Chlodovsky operatörü lineerdir: Her $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$, her $f,g\in C\left[0,\infty\right)$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}C_n\left(\alpha f+\beta g;x\right)&=\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left(\alpha f+\beta g\right)\left(\frac{kb_n}{n}\right)\\&=\alpha\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)f\left(\frac{kb_n}{n}\right)+\beta\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)g\left(\frac{kb_n}{n}\right)\\&=\alpha C_n\left(f;x\right)+\beta C_n\left(g;x\right),\end{aligned}$$

burada $p_{n,k}\left(x\right)=\binom{n}{k}x^k\left(1-x\right)^{n-k}$, $\left(0\le k\le n\right)$.

Bernstein-Chlodovsky operatörü pozitiftir: Her $x\in\left[0,b_n\right]$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\ge 0$ olduğundan $f\ge 0$ için $C_n\left(f;x\right)\ge 0$ olur.

Bernstein-Chlodovsky operatörünün merkezi momentleri: Her $x\in\left[0,b_n\right]$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için Bernstein-Chlodovsky operatörleri altında test fonksiyonları

$$C_n\left(e_0;x\right)=\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)=\left(\frac{x}{b_n}+1-\frac{x}{b_n}\right)^n=1$$

$$\begin{aligned}C_n\left(e_1;x\right)&=\sum_{k=0}^{n}p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\frac{kb_n}{n}=x\sum_{k=1}^{n}p_{n-1,k-1}\left(\frac{x}{b_n}\right)\\&=x\sum_{k=0}^{n-1}p_{n-1,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)=x\left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^{n-1}=x\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
C_n\left(e_2;x\right) &= \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left(\frac{kb_n}{n}\right)^2 = x\sum_{k=1}^{n} p_{n-1,k-1}\left(\frac{x}{b_n}\right)\frac{k}{n}b_n \\
&= x\sum_{k=1}^{n} p_{n-1,k-1}\left(\frac{x}{b_n}\right)\frac{k-1}{n}b_n + \frac{x}{n}b_n\sum_{k=1}^{n} p_{n-1,k-1}\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= x^2\,\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n} p_{n-2,k-2}\left(\frac{x}{b_n}\right) + \frac{x}{n}b_n\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= x^2\,\frac{n-1}{n}\sum_{k=0}^{n-2} p_{n-2,k}\left(\frac{x}{b_n}\right) + \frac{x}{n}b_n\sum_{k=0}^{n-1} p_{n-1,k}\left(\frac{x}{b_n}\right) \\
&= x^2\,\frac{n-1}{n}\left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^{n-2} + \frac{x}{n}b_n\left(1-\frac{x}{b_n}+\frac{x}{b_n}\right)^{n-1} = x^2 + \frac{x\left(b_n-x\right)}{n}
\end{aligned}
$$

şeklinde elde edilir. Bu sonuçlar aşağıda toparlanmıştır.

$$
C_n\left(e_0;x\right)=1,\quad C_n\left(e_1;x\right)=x,\quad C_n\left(e_2;x\right)=x^2+\frac{x\left(b_n-x\right)}{n}. \tag{3.20}
$$

(3.20) eşitliklerinden her $x\in\left[0,b_n\right]$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$
C_n\left(e_1-x;x\right)=0,\qquad C_n\left(\left(e_1-x\right)^2;x\right)=\frac{x\left(b_n-x\right)}{n} \tag{3.21}
$$

elde edilir. Yine Bernstein-Chlodovsky operatörlerinin tanımı yardımıyla

$$
C_n\left(e_3;x\right)=x^3+\frac{3x^2\left(b_n-x\right)}{n}+\frac{x\left(b_n-x\right)\left(b_n-2x\right)}{n^2} \tag{3.22}
$$

$$
\begin{aligned}
C_n\left(e_4;x\right) &= x^4+\frac{6x^3\left(b_n-x\right)}{n}+\frac{x^2\left(b_n-x\right)\left(7b_n-11x\right)}{n^2} \\
&\quad +\frac{x\left(b_n-x\right)\left(6x^2-6b_nx+b_n^2\right)}{n^3}
\end{aligned} \tag{3.23}
$$

eşitlikleri belli hesaplamalar sonucunda elde edilebilir. Bunlar yardımıyla daha yüksek mertebeden momentler

$$
C_n\left(\left(e_1-x\right)^3;x\right)=\frac{x\left(b_n-x\right)\left(b_n-2x\right)}{n^2} \tag{3.24}
$$

$$
\begin{aligned}
C_n\left(\left(e_1-x\right)^4;x\right) &= \frac{x\left(b_n-x\right)^2\left(b_n-2x\right)}{n^3} \\
&\quad +\frac{x^2\left(b_n-x\right)\left[\left(4x-b_n\right)+3n\left(b_n-x\right)\right]}{n^3}
\end{aligned} \tag{3.25}
$$

şeklinde hesaplanabilir.

Bernstein-Chlodovsky polinomları tanımlı olduğu $\left[0,b_n\right]$ aralığının $n\to\infty$ iken $\left[0,\infty\right)$ aralığına dönüşmesinden dolayı Bohman-Korovkin Teoremini sağlamaz. Çünkü Bohman-Korovkin Teoremi burada verilen haliyle sonsuz aralıklarda geçerli değildir. Gerçekten; $f\left(x\right)=x^2\in C\left(0,\infty\right)$ alınırsa

$$\max_{x\in[0,b_n]}\left|C_n\left(f;x\right)-x^2\right|=\frac{b_n^2}{4n}$$

eşitliği elde edilir. Buradan $b_n=n^{2/3}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,b_n]}\left|C_n\left(f;x\right)-x^2\right|=\infty$$

eşitliği bulunur. Bu ise yakınsamanın düzgün olmadığını gösterir.

Bohman-Korovkin Teoremi kullanılmadan verilen sürekli fonksiyona bağlı Bernstein-Chlodovsky polinomlar dizisinin bu fonksiyona yakınsadığını göstermek mümkündür.

3.5.3. Teorem [45] (Chlodovsky). $\{b_n\}$ (3.19) *koşullarını sağlayan bir dizi olsun. Eğer* f *fonksiyonu* $\left[0,\infty\right)$ *aralığı üzerinde sınırlı ise* f *fonksiyonun her bir* x *süreklilik noktası için*

$$\lim_{n\to\infty}C_n\left(f;x\right)=f\left(x\right) \tag{3.26}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Keyfi $\varepsilon>0$ sayısı verilsin ve f fonksiyonu bir $x\in\left[0,\infty\right)$ noktasında sürekli olsun. O zaman bir $\delta>0$ sayısı vardır öyle ki her $t\in\left[0,\infty\right)$ için $\left|t-x\right|<\delta$ iken $\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|<\varepsilon$. Eğer $x=0$ ise (3.26) hemen elde edilir. O halde varsayalım ki $x>0$ olsun. Bu durumda bir $N\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $b_N\geq x$. Dolayısıyla her $n\geq N$ için $b_n\geq x$. $n\geq N$ için

$$\begin{aligned}\left|C_n(f;x)-f(x)\right| &\le \sum_{k=0}^{n} p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left|f\left(\frac{kb_n}{n}\right)-f(x)\right| \\ &\le \sum_{\left|\frac{kb_n}{n}-x\right|<\delta} p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left|f\left(\frac{kb_n}{n}\right)-f(x)\right| + \sum_{\left|\frac{kb_n}{n}-x\right|\ge\delta} p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left|f\left(\frac{kb_n}{n}\right)-f(x)\right| \\ &=: \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. f fonksiyonun x noktasındaki sürekliliğinden

$$\sum\nolimits_1 \le C_n(e_0;x)\,\varepsilon = \varepsilon$$

elde edilir. Öte yandan f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sınırlı olduğundan bir $M>0$ sayısı vardır öyle ki her $t\in[0,\infty)$ için $|f(t)|\le M$. Ayrıca $t = xb_n^{-1}$ dönüşümü yapılırsa

$$\sum\nolimits_2 \le 2M \sum_{\left|\frac{k}{n}-t\right|\ge\frac{\delta}{b_n}} p_{n,k}(t) \le 2M\,\frac{t(1-t)}{n(\delta/b_n)^2} \le 2M\,\frac{x/b_n}{n(\delta/b_n)^2}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\left|C_n(f;x)-f(x)\right| \le \varepsilon + 2M\,\frac{x\,b_n}{n\delta^2}$$

yazılır. $b_n = o(n)$ $(n\to\infty)$ olduğundan istenilen elde edilir. ■

Bu teorem, sonsuzluktaki limitin sonsuzluğa gitme hızı yeterince düşük olan sınırsız fonksiyonlar için de doğrudur.

3.5.4. Lemma [46]. *$0<\delta\le x<b_n$ ve yeterince büyük $n\in\mathbb{N}$ için*

$$\sum_{\left|\frac{kb_n}{n}-x\right|\ge\delta} p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right) \le 2e^{-\frac{n\delta^2}{4xb_n}}$$

eşitsizliği doğrudur.

3.5.5. Teorem [45] (Chlodovsky). $\{b_n\}$ (3.19) *koşullarını sağlayan bir dizi,* f $[0,\infty)$ *aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyonu ve* $M(b_n)=\max_{x\in[0,b_n]}|f(x)|$ *olsun. Eğer*

$$\lim_{n\to\infty} M(b_n)e^{-\alpha n/b_n}=0, \qquad \alpha>0 \tag{3.27}$$

ise f *fonksiyonun her bir* x *süreklilik noktası için* (3.26) *doğrudur.*

İspat. Teorem 3.5.2'nin ispatındaki $\sum_2$ toplamındaki M yerine $M(b_n)$ alınır ve Lemma 3.5.4 kullanılırsa, $0<\delta<2x$ ve yeterince büyük n'ler için

$$\begin{aligned}\left|C_n(f;x)-f(x)\right| &\le \varepsilon+2M(b_n)\sum_{\left|\frac{kb_n}{n}-x\right|\ge\delta} p_{n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\le \varepsilon+2M(b_n)e^{-n\delta^2\left(4b_nx\left(1-xb_n^{-1}\right)\right)^{-1}}\\ &=\varepsilon+2M(b_n)e^{-n\delta^2\left(4b_nx\left(1-xb_n^{-1}\right)\right)^{-1}}\\ &=\varepsilon+2M(b_n)e^{-n\delta^2\left(4b_nx\left(1-xb_n^{-1}\right)\right)^{-1}}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Yukarıda $\delta^2\left(4x\left(1-xb_n^{-1}\right)\right)^{-1}$ sayısı α olarak alınırsa (3.27) 'dan (3.26) görülür. ■

3.5.3. Bernstein Polinomlarının Yaklaşım Hızı

Bernstein polinomlarının $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsamasının ancak ve ancak f fonksiyonun bu aralıkta sürekli olması halinde sağlandığı önceki bölümde gösterilmişti. Bernstein polinomları Jackson teoremlerinin ispatında kullanılamaz. Bu durum, $e_i,\ i=0,1,2$ fonksiyonlarının Bernstein polinomlarının değerinden kolayca anlaşılır. (3.12) eşitliklerinden Bernstein polinomlarının yardımıyla $f(t)=t^2$ fonksiyonunun x^2 fonksiyonuna yaklaşım hızının $1/n$'den daha hızlı olmadığı anlaşılır. Oysaki Jackson teoremlerinde çok daha iyi bir yaklaşım elde edilmiştir [14].

E. Voronovskaya [6] 1932 yılında, S. N. Bernstein tarafından tanımlanan Bernstein polinomları için aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

3.5.6. Teorem (Voronovskaya). *f fonksiyonu $[0,1]$ aralığında sınırlı ve $x \in [0,1]$ noktasında ikinci mertebeden türevi sürekli ise*

$$\lim_{n\to\infty} n\left[B_n(f;x) - f(x)\right] = \frac{1}{2}x(1-x)f''(x) \tag{3.28}$$

eşitliği sağlanır

İspat. f fonksiyonun sabit x noktası için Taylor formülü her $t \in (0,1)$ için

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}\left[f''(x)(t-x)^2 + g(t;x)(t-x)^2\right] \tag{3.29}$$

şeklindedir. Burada; $g(\cdot,x)$ x noktasında sürekli ve $\lim_{t\to x} g(t,x) = 0$. (3.29) eşitliğinin her iki tarafına Bernstein operatörü uygulanırsa

$$B_n(f;x) = f(x)B_n(e_0;x) + f'(x)B_n\left((e_0 - x);x\right) + \frac{1}{2}f''(x)B_n\left((e_0-x)^2;x\right)$$
$$+\frac{1}{2}B_n\left(g(\cdot,x)(e_0-x)^2;x\right)$$

elde edilir. Buradan, (3.13) dikkate alınırsa

$$B_n(f;x) - f(x) = \frac{x(1-x)}{2n}f''(x) + B_n\left(g(\cdot,x)(e_1-x)^2;x\right)$$

bulunur. Bu son ifade düzenlenirse,

$$n\cdot\left[B_n(f;x) - f(x)\right] = \frac{x(1-x)}{2}f''(x) + n\cdot B_n\left(g(\cdot,x)(e_1-x)^2;x\right) \tag{3.30}$$

ifadesi bulunur. O halde $\lim_{n\to\infty} n\cdot B_n\left(g(\cdot,x)(e_1-x)^2;x\right) = 0$ olduğu gösterilirse istenilen elde edilir. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$nB_n\left(g(\cdot,x)(e_1-x)^2;x\right) \le \left(n^2B_n\left((e_1-x)^4;x\right)\right)^{1/2}\left(B_n\left((g(\cdot,x))^2;x\right)\right)^{1/2} \tag{3.31}$$

eşitsizliği elde edilir. $g(x,x) = 0$ olduğundan Teorem 3.3.2 gereğince

$$\lim_{n\to\infty} B_n\left((g(\cdot,x))^2;x\right) = (g(x,x))^2 = 0$$

olur. Diğer taraftan (3.17)'u kullanılırsa (3.31) ifadesi

$$nB_n\left(g(\cdot,x)(e_1-x)^2;x\right)\leq\left(n^2\frac{x(1-x)\left[1+3\left(n-2x(1-x)\right)\right]}{n^3}\right)^{1/2}\cdot\left(B_n\left(\left(g(\cdot,x)\right)^2;x\right)\right)^{1/2}$$

$$\leq 2\left(B_n\left(\left(g(\cdot,x)\right)^2;x\right)\right)^{1/2}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} n\cdot B_n\left(g(\cdot,x)(e_1-x)^2;x\right)=0$ olur. Bu da istenen sonucu verir. ■

Bernstein polinomları yardımıyla Teorem 3.3.6 ispatlanamaz. Çünkü Teorem 3.3.6'da ikici mertebeden türevi sürekli olan fonksiyonlar için hesaplanan yaklaşım hızı A/n^2'den daha hızlıdır oysa Bernstein polinomları yardımıyla hesaplanan hız A/n dizisinin sıfıra yakınsama hızını dahi geçmemektedir. Bundan dolayı Teorem 3.3.6'nın ispatında Bernstein polinomları kullanılamaz. Hatta $[0,1]$ aralığında $f\in Lip_1\alpha$ sınıfına ait olan $f(x)=|x-1/2|^{\alpha}$ fonksiyonunun Bernstein polinomları yardımıyla yaklaşma hızının Sonuç 3.3.4'de verildiği gibi $1/n^{\alpha}$ olmadığı yalnızca $1/\left(n^{\alpha/2}\right)$ olduğunu hesaplamak zor değildir. Dolayısıyla Sonuç 3.3.4 de bu polinomlar yardımıyla ispatlanamaz [14].

3.5.4. Pozitif Lineer Operatörler ile Yaklaşım Hızı

Bu kısımda, verilen sürekli bir f fonksiyonuna yaklaşım hızı hakkında süreklilik modülünün yardımıyla genel teoremlerin yanında, Bernstein polinomlarının verilen fonksiyona yaklaşım hızına da yer verilecektir.

Sadece birinci süreklilik modülünü kullanarak yapılan ilk değerlendirme $L(e_0)=e_0$ koşulu altında R. Mamedov [47] tarafından verilmiştir.

3.5.7. Teorem [47]. *Eğer $f \in C[a,b]$ ise, o zaman her $x \in [a,b]$ ve her $\delta > 0$ için*

$$\left|L(f;x)-f(x)\right| \leq \left|f(x)\right| \cdot \left|L(e_0;x)-1\right| \\ +\left(L(e_0;x)+\frac{1}{\delta}\left(L(e_0;x)\cdot L\left((e_1-x)^2;x\right)\right)^{1/2}\right)\omega_1(f;\delta)$$

Daha sonra O. Shisha ve B. Mond [48] daha genel sonuçlar elde etmişlerdir.

Lineer fonksiyonların ikinci süreklilik modülü sıfır olduğundan bu süreklilik modülü çeşidi yardımıyla fonksiyonların yaklaşım mertebesini ölçmek daha avantajlıdır. İkinci süreklilik modülü yardımıyla ilk değerlendirmeyi H. Esser [49] 1976 yılında yapılmıştır. Daha sonra, 1984 yılında H. Gonska [50] H. Esser'in sonuçlarını iyileştirmiştir. 1995 yılında ise R. Paltenea [51] bu değerlendirmeleri oldukça titiz yapılmasına olanak sağlayan aşağıda teoremi vermiştir.

3.5.8. Teorem [51]. *Her $f \in C[a,b]$ için her $x \in [a,b]$ ve $0<\delta \leq 1/2(b-a)$ ise*

$$\left|L(f;x)-f(x)\right| \leq \left|f(x)\right| \cdot \left|L(e_0;x)-1\right| + \left|L(e_1-x;x)\right| \cdot \frac{1}{\delta}\omega_1(f;\delta) \\ +\left(L(e_0;x)+\frac{1}{2\delta^2}L\left((e_1-x)^2;x\right)\right)\omega_2(f;\delta)$$

Teoremdeki $0<\delta \leq 1/2(b-a)$ koşulu lineer fonksiyonların pozitif lineer operatörler altında invaryant (değişmez) olmasını sağlamak için konmuştur.

3.5.9. Sonuç. $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonu için

$$\left|B_n(f;x)-f(x)\right| \leq \frac{3}{2}\omega_1\left(f;\frac{1}{\sqrt{n}}\right)$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. Teorem 3.5.7'de $B_n(1;x)=1$ ve $B_n\left((e_1-x)^2;x\right)\leq 1/(4n)$ eşitsizliği uygun olarak yerlerine yazılırsa $\delta=n^{-1/2}$ olmak üzere istenilen elde edilir. ■

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde, verilen bir aralıkta sürekli fonksiyonlar uzayında pozitif lineer operatör dizileri inşa edilecek; bu uzaydaki fonksiyonların operatörler altındaki görüntülerinden oluşan dizinin yaklaşım özellikleri incelenecektir. Ayrıca, Voronovskaya tipi teoremler ve yaklaşımın hızının süreklilik modülü cinsinden verilmesi üzerinde durulacaktır. İlk kısımda, sonlu aralıklar üzerinde çalışılırken, ikinci kısımda sonsuz aralıklarda Chlodovsky tipi teoremler verilecektir.

Aşağıda tezde çalışılan operatörlerin üreteci verilmiştir:

$I \subset \mathbb{R}$ bir aralık (sonlu ya da sonsuz) olsun. $\{\omega_m\}$, bu aralık üzerinde tanımlı fonksiyonlar dizisi olsun öyle ki

i) Her $x \in I$ ve her $m \in \mathbb{N}_0$ için $\omega_m(x) \geq 0$,

ii) Her $x \in I$, $\sum_{m=1}^{\infty} \omega_m(x) = 1$

koşulları sağlansın. Örneğin, $\omega_m(x) = e^{-x} x^m / m!$, $x \in [0, \infty)$ ile tanımlı $\{\omega_m\}$ fonksiyonlar dizisi yukarıdaki (i) ve (ii) özelliklerini sağlar.

$\{L_n\}$, $C(I)$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörlerin $L_n(e_0) = e_0$ koşulunu sağlayan bir dizisi olsun. $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörler dizisi ile $\{\omega_m\}$ fonksiyon dizisi yardımıyla üretilen ve

$$E_n(f;x) := \sum_{m=0}^{\infty} \omega_m(nx) L_\nu(f;x), \qquad x \in I,\ n \in \mathbb{N} \tag{4.1}$$

ile tanımlı $E_n : C(I) \to C(I)$ operatörler, açıktır ki pozitif ve lineerdir; burada ν, $\{\alpha_n\}$ azalmayan ve $\{\beta_m\}$ kesin artan doğal sayı dizileri olmak üzere $\nu := \nu(n;m) = \alpha_n \cdot \beta_m$ biçiminde tanımlı doğal sayılardır.

4.1. SZASZ-MİRAKYAN-BERNSTEIN (SMB) OPERATÖRLER DİZİSİ

Bu bölümde, (4.1) ile tanımlı $\{E_n\}$ pozitif lineer operatörler dizisinin; $I = [0,1]$, $\beta_m = m+1$, $\omega_m(x) = e^{-x} x^m / m!$ ve $L_n = B_n$ (Bernstein operatörü) olduğu durum incelenecektir.

4.1.1. Tanım. $f \in C[0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{L}_n(f;x) = \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{k=0}^{m\alpha_n} p_{m\alpha_n,k}(x) f\left(\frac{k}{m\alpha_n}\right), \qquad x \in [0,1] \tag{4.2}$$

ile tanımlı operatöre *Szasz-Mirakyan-Bernstein (SMB) operatörü* denir; burada

$$q_{n,m}(x) = \frac{e^{-nx}(nx)^m}{m!}, \qquad m \in \mathbb{N}_0$$

$$p_{n,k}(x) = \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}, \qquad 1 \le k \le n.$$

4.1.2. Lemma. *$x \in [0,1]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere test fonksiyonları için*

$$\mathcal{L}_n(e_0;x) = 1; \qquad \mathcal{L}_n(e_1;x) = x; \qquad \mathcal{L}_n(e_2;x) = x^2 + \frac{(1-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}; \tag{4.3}$$

$$\mathcal{L}_n(e_3;x) = x^3 + \frac{3x(1-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n} + \frac{(1-x)(1-2x)}{n\alpha_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}; \tag{4.4}$$

$$\begin{aligned} \mathcal{L}_n(e_4;x) &= x^4 + \frac{6x^2(1-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n} + \frac{x(1-x)(7-11x)}{n\alpha_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!} \\ &\quad + \frac{(1-x)\left(6x^2-6x+1\right)}{n\alpha_n^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}(nx)^m}{m^2 m!} \end{aligned} \tag{4.5}$$

ve merkezi momentler için

$$\mathcal{L}_n((e_1-x);x) = 0; \qquad \mathcal{L}_n\left((e_1-x)^2;x\right) = \frac{(1-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}; \tag{4.6}$$

$$\mathcal{L}_n\left((e_1-x)^3;x\right) = \frac{(1-x)(1-2x)}{n\alpha_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}; \tag{4.7}$$

$$\mathcal{L}_n\left((e_1-x)^4;x\right) = \frac{3x(1-x)^2}{n\alpha_n^2} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!} + \frac{(1-x)\left(6x^2-6x+1\right)}{n\alpha_n^3} \sum_{m=1}^{\infty} \frac{e^{-nx}(nx)^m}{m^2 m!} \tag{4.8}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat. $x = 0$ olduğunda istenen eşitliklerin doğrulukları açıktır. $x > 0$ olsun. Bernstein operatörünün (3.12), (3.14) ve (3.15) özelliklerinden yararlanılarak SMB operatörü için (4.3), (4.4) ve (4.5) ifadeleri aşağıdaki gibi hesaplanır.

$$\mathcal{L}_n\left(e_0;x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)=1\,,$$

$$\mathcal{L}_n\left(e_1;x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(x\right)\frac{k}{m\alpha_n}=x\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)=x\,,$$

$$\mathcal{L}_n\left(e_2;x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(x\right)\left(\frac{k}{m\alpha_n}\right)^2$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\left(x^2+\frac{x\left(1-x\right)}{m\alpha_n}\right)$$

$$=x^2\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)+\frac{x\left(1-x\right)}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^{m-1}}{m(m-1)!}$$

$$=x^2+\frac{x\left(1-x\right)}{n\alpha_n x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^{m}}{m!}$$

$$=x^2+\frac{\left(1-x\right)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}$$

$$\mathcal{L}_n\left(e_3;x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(x\right)\left(\frac{k}{m\alpha_n}\right)^3$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\left(x^3+\frac{3x^2\left(1-x\right)}{m\alpha_n}+\frac{x\left(1-x\right)\left(1-2x\right)}{m^2\alpha_n^2}\right)$$

$$=x^3+\frac{3x\left(1-x\right)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}+\frac{e^{-nx}\left(1-x\right)\left(1-2x\right)}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{\left(nx\right)^m}{m.m!}$$

$$\mathcal{L}_n\left(e_4;x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(x\right)\left(\frac{k}{m\alpha_n}\right)^4$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\left(x^4+\frac{6x^3\left(1-x\right)}{m\alpha_n}+\frac{x^2\left(1-x\right)\left(7-11x\right)}{m^2\alpha_n^2}+\frac{x\left(1-x\right)\left(6x^2-6x+1\right)}{m^3\alpha_n^3}\right)$$

$$=x^4\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)+\frac{6x^3\left(1-x\right)}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\frac{1}{m}+$$

$$\frac{x^2\left(1-x\right)\left(7-11x\right)}{\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\frac{1}{m^2}+\frac{x\left(1-x\right)\left(6x^2-6x+1\right)}{\alpha_n^3}\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\frac{1}{m^3}$$

dolayısıyla

$$\mathcal{L}_n\left(e_4;x\right)=x^4+\frac{6x^2\left(1-x\right)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}+\frac{x\left(1-x\right)\left(7-11x\right)}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}+$$
$$\frac{\left(1-x\right)\left(6x^2-6x+1\right)}{n\alpha_n^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m^2m!}.$$

Şimdi (4.6), (4.7) ve (4.8) eşitlikleri hesaplanacaktır.

$\mathcal{L}_n\left(\left(e_1-x\right);x\right)=\mathcal{L}_n\left(e_1;x\right)-x\mathcal{L}_n\left(e_0;x\right)$ ve

$$\mathcal{L}_n\left(\left(e_1-x\right)^2;x\right)=\mathcal{L}_n\left(e_2;x\right)-2x\mathcal{L}_n\left(e_1;x\right)+x^2\mathcal{L}_n\left(e_0;x\right)$$

olduğundan (4.6) eşitlikleri (4.3)'den kolayca elde edilir. Aynı şekilde

$$\mathcal{L}_n\left(\left(e_1-x\right)^3;x\right)=\mathcal{L}_n\left(e_3;x\right)-3x\mathcal{L}_n\left(e_2;x\right)+3x^2\mathcal{L}_n\left(e_1;x\right)-x^3\mathcal{L}_n\left(e_0;x\right)$$

$$\mathcal{L}_n\left(\left(e_1-x\right)^4;x\right)=\mathcal{L}_n\left(e_4;x\right)-4x\mathcal{L}_n\left(e_3;x\right)+6x^2\mathcal{L}_n\left(e_2;x\right)-4x^3\mathcal{L}_n\left(e_1;x\right)+x^4\mathcal{L}_n\left(e_0;x\right)$$

olduğundan (4.7) ve (4.8) eşitlikleri (4.3), (4.4) ve (4.5) eşitlikleri kullanılarak gerekli hesaplamalar sonucunda elde edilir. ■

4.1.3. Lemma. $j\in\mathbb{N}_0$ *olmak üzere;*

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-x}x^m}{m^jm!}\leq\frac{\left(j+1\right)!}{x^j},\qquad x\in\left(0,\infty\right)\tag{4.9}$$

eşitsizliği doğrudur.

İspat. $j=0$ için

$$\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-x}x^m}{m!}=e^{-x}\left(e^x-1\right)=1-e^{-x}\leq 1.$$

$j\geq 1$ olsun. Her $m,j\in\mathbb{N}$ için $\left(m+j\right)/m\leq j+1$ olduğu dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m^jm!}&=\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^m}{m^jm!}\frac{\left(m+1\right).\left(m+2\right).\cdots.\left(m+j\right)}{\left(m+1\right).\left(m+2\right).\cdots.\left(m+j\right)}\\&=\frac{1}{x^j}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m+j}}{\left(m+j\right)!}\left(\frac{m+1}{m}\right).\left(\frac{m+2}{m}\right).\cdots.\left(\frac{m+j}{m}\right)\\&\leq\frac{1}{x^j}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m+j}}{\left(m+j\right)!}2.3.\cdots.\left(j+1\right)\\&=\frac{\left(j+1\right)!}{x^j}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{x^{m+j}}{\left(m+j\right)!}\end{aligned}$$

$$= \frac{(j+1)!}{x^j}\left(e^x - \sum_{k=0}^{j}\frac{x^k}{k!}\right)$$
$$\leq \frac{(j+1)!e^x}{x^j}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla (4.9) eşitsizliği ispatlanmış olur. ■

4.1.4. Lemma. *Her* $x \in (0,1]$ *ve* $n \in \mathbb{N}$ *için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.*

$$\mathcal{L}_n\left((e_1 - x)^4; x\right) \leq c_n(x)\left(\frac{1}{n\alpha_n}\right)^2 \tag{4.10}$$

Burada c_n*,* $(0,1]$ *de tanımlı bir fonksiyon ve her* $x \in (0,1]$ *için*

$$\lim_{n\to\infty} c_n(x) = 6.$$

İspat. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\mathcal{L}_n\left((e_1 - x)^4; x\right) = \frac{3x(1-x)^2}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!} + \frac{(1-x)(6x^2-6x+1)}{n\alpha_n^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m^2 m!}$$

ve (4.9) eşitsizliği kullanılırsa

$$\mathcal{L}_n\left((e_1 - x)^4; x\right) \leq \frac{3x(1-x)^2}{n\alpha_n^2}\frac{2!}{nx} + \frac{(1-x)(6x^2-6x+1)}{n\alpha_n^3}\frac{3!}{n^2x^2}$$
$$\leq \left(\frac{1}{n\alpha_n}\right)^2\left(6 + \frac{6x^2-6x+1}{x^2 n\alpha_n}\right) = \left(\frac{1}{n\alpha_n}\right)^2 c_n(x)$$

eşitsizliği elde edilir. ■

4.1.5. Teorem. *Herhangi bir* $f \in C[0,1]$ *fonksiyonu için* (4.2) *ile tanımlı* $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ *dizisi* f *fonksiyonuna* $[0,1]$*'de düzgün yakınsaktır.*

İspat. (4.2) operatörler dizisi pozitif ve lineer olduğundan teoremin ispatı Bohman-Korovkin Teoremi kullanılarak yapılacaktır. Dolayısıyla Bohman-Korovkin Teoreminin koşulları gereğince her bir $i = 0,1,2$ için

$$\mathcal{L}_n(e_i) \overset{[0,1]}{\rightrightarrows} e_i \tag{4.11}$$

olduğu gösterilirse ispat biter. (4.3) eşitliklerinden

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\mathcal{L}_n\left(e_i;x\right)-e_i\left(x\right)\right|=0, \qquad i=0,1$$

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|\mathcal{L}_n\left(e_2;x\right)-e_2\left(x\right)\right|\le\frac{1}{n\alpha_n}$$

elde edilir. Buradan (4.11) doğrudur. Yani her $f\in C\left[0,1\right]$ için $\mathcal{L}_n\left(f\right)\overset{[0,1]}{\rightrightarrows}f.$ ■

Aşağıda (4.2) ile tanımlı operatörler dizisi için Voronovskaya tipi teorem verilmiştir.

4.1.6. Teorem. $f\in C^2\left[0,1\right]$ *ise,*

$$\lim_{n\to\infty}n\alpha_n\left[\mathcal{L}_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right]=\frac{1}{2}(1-x)f''(x), \qquad x\in\left[0,1\right]$$

eşitliği sağlanır.

İspat. f fonksiyonun sabit x noktası için Taylor formülü her $t\in\left[0,1\right]$ için

$$f\left(t\right)=f\left(x\right)+f'\left(x\right)\left(t-x\right)+\frac{1}{2}\left[f''\left(x\right)\left(t-x\right)^2+g\left(t;x\right)\left(t-x\right)^2\right] \qquad (4.12)$$

şeklindedir. Burada; $g\left(\cdot,x\right)$ x noktasında sürekli ve $\lim_{t\to x}g\left(t,x\right)=0$. (4.12) eşitliğinin her iki tarafına (4.2) operatörü uygulanırsa

$$\mathcal{L}_n\left(f;x\right)=f\left(x\right)\mathcal{L}_n\left(e_0;x\right)+f'\left(x\right)\mathcal{L}_n\left(\left(e_1-x\right);x\right)+\frac{1}{2}f''\left(x\right)\mathcal{L}_n\left(\left(e_1-x\right)^2;x\right)$$
$$+\frac{1}{2}\mathcal{L}_n\left(g\left(\cdot,x\right)\cdot\left(e_1-x\right)^2;x\right)$$

elde edilir. Buradan, (4.6) dikkate alınırsa

$$\mathcal{L}_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)=\frac{\left(1-x\right)\left(1-e^{-nx}\right)}{2n\alpha_n}f''\left(x\right)+\mathcal{L}_n\left(g\left(\cdot,x\right)\left(e_1-x\right)^2;x\right)$$

bulunur. Bu son ifade düzenlenirse,

$$n\alpha_n\left[\mathcal{L}_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right]=\frac{\left(1-x\right)\left(1-e^{-nx}\right)}{2}f''\left(x\right)+n\alpha_n\mathcal{L}_n\left(g\left(\cdot,x\right)\left(e_1-x\right)^2;x\right)$$

ifadesi bulunur. Bu son ifade de $\lim_{n\to\infty}n\alpha_n\mathcal{L}_n\left(g\left(\cdot,x\right)\left(e_1-x\right)^2;x\right)=0$ olduğu gösterilirse istenilen elde edilir. Cauchy-Schwartz eşitsizliğinden

$$n\alpha_n\mathcal{L}_n\left(g\left(\cdot,x\right)\left(e_1-x\right)^2;x\right)\le\left[n^2\alpha_n^2\mathcal{L}_n\left(\left(e_1-x\right)^4;x\right)\right]^{1/2}\left[\mathcal{L}_n\left(\left(g\left(\cdot,x\right)\right)^2;x\right)\right]^{1/2} \qquad (4.13)$$

eşitsizliği elde edilir. $g(x,x)=0$ olduğundan Teorem 4.1.5 gereğince

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{L}_n\left(\left(g(\cdot,x)\right)^2;x\right)=\left(g(x,x)\right)^2=0$$

olur. Diğer taraftan (4.10) eşitsizliğini kullanılırsa (4.13) ifadesi

$$n\alpha_n\mathcal{L}_n\left(g(\cdot,x)(e_1-x)^2;x\right)\leq\left(n^2\alpha_n^2\left(c_n(x)\left(\frac{1}{n\alpha_n}\right)^2\right)\right)^{1/2}\left(\mathcal{L}_n\left(\left(g(\cdot,x)\right)^2;x\right)\right)^{1/2}$$

$$=\sqrt{c_n(x)}\left(\mathcal{L}_n\left(\left(g(\cdot,x)\right)^2;x\right)\right)^{1/2}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla $\lim_{n\to\infty} n\alpha_n\mathcal{L}_n\left(g(\cdot,x)(e_1-x)^2;x\right)=0$ olur. Bu da istenen sonucu verir. ■

4.2 SMB OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM HIZI

Verilen fonksiyonlara ne kadar iyi yaklaşıldığını yani yaklaşım hızına dair teoremleri elde edebilmek için fonksiyonun düzgünlüğünün tam ölçüsünün bilinmesi büyük önem taşır. Bu kısımda SMC operatörler dizisinin yardımıyla yaklaşım hızı, fonksiyonun düzgünlüğünü ölçen süreklilik modülleri cinsinden verilecektir.

4.2.1. Teorem. *Eğer* $f\in C[0,1]$ *ise*

$$\left\|\mathcal{L}_n(f)-f\right\|\leq 2\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n\alpha_n}}\right).$$

İspat. $\mathcal{L}_n$ pozitif ve lineer olduğundan, $x\in[0,1]$ için

$$\left|\mathcal{L}_n(f;x)-f(x)\right|\leq\mathcal{L}_n\left(\left|f-f(x)\right|;x\right).$$

Süreklilik modüllerinin (vi) ve (vii) özellikleri dikkate alınırsa,

$$\left|\mathcal{L}_n(f;x)-f(x)\right|\leq\mathcal{L}_n\left(\left|f-f(x)\right|;x\right)\leq\left(1+\frac{1}{\delta}\mathcal{L}_n\left(\left|e_1-x\right|;x\right)\right)\omega(f;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. $\mathcal{L}_n\left(\left|e_1-x\right|;x\right)$ ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\mathcal{L}_n(f;x)-f(x)\right|\leq\left(1+\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathcal{L}_n\left((e_1-x)^2;x\right)}\right)\omega(f;\delta)$$

$$=\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{(1-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}\right)^{1/2}\right)\omega(f;\delta)\leq\left(1+\frac{1}{\delta}\left(\frac{1}{n\alpha_n}\right)^{1/2}\right)\omega(f;\delta)$$

eşitsizliği elde edilir. $\delta=(n\alpha_n)^{-1/2}$ olarak seçilirse istenilen elde edilir. ■

4.2.2. Teorem. *Herhangi bir* $f\in Lip_M\alpha$ *için,*

$$\left\|\mathcal{L}_n(f)-f\right\|\leq M\left(\frac{1}{n\alpha_n}\right)^{\alpha/2}. \tag{4.14}$$

İspat. $\left|\mathcal{L}_n(f;x)-f(x)\right|\leq\mathcal{L}_n\left(\left|f-f(x)\right|;x\right)\leq M\mathcal{L}_n\left(\left|e_1-x\right|^{\alpha};x\right)$ Hölder eşitsizliğinde $p=2/\alpha$, $q=2/(2-\alpha)$ olarak seçilirse $\mathcal{L}_n\left(\left|e_1-x\right|^{\alpha};x\right)$ için

$$\left|\mathcal{L}_n(f;x)-f(x)\right|\leq M\left(\mathcal{L}_n\left((e_1-x)^2;x\right)\right)^{\alpha/2}=M\left(\frac{(1-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}\right)^{\alpha/2}\leq M\left(\frac{1}{n\alpha_n}\right)^{\alpha/2}$$

istenilen elde edilir. ■

Not: Teorem 4.2.2, Teorem 4.2.1'in sonucu olarak da yazılabilir. Ancak bu durumda (4.14)'da M yerine $2M$ gelir.

4.2.3 Teorem. $f\in C^1[0,1]$ *ise*

$$\left\|\mathcal{L}_n(f)-f\right\|\leq 2\frac{1}{\sqrt{n\alpha_n}}\,\omega\left(f';\frac{1}{\sqrt{n\alpha_n}}\right).$$

İspat. $x\in[0,1]$ olsun. Ortalama değer teoreminden her $t\in[0,1]$ için,

$$f(t)-f(x)=(t-x)f'\left(\xi_x(t)\right)$$

olacak şekilde en az bir $\xi_x(t)\in\left(\min\{t,x\},\max\{t,x\}\right)$ vardır. Bu eşitliğin her iki tarafına (4.2) operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{L}_n(f;x)-f(x)&=\mathcal{L}_n\left((e_1-x)f'(\xi_x);x\right)\\&=\mathcal{L}_n\left((e_1-x)\left(f'(\xi_x)-f'(x)\right);x\right)\end{aligned} \tag{4.15}$$

elde edilir. Süreklilik modüllerinin (vi) ve (vii) özellikleri dikkate alınırsa

$$\left|f'\left(\xi_x(t)\right)-f'(x)\right|\le\omega\left(f';\left|\xi_x(t)-x\right|\right)\le\omega\left(f';\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left|\xi_x(t)-x\right|\right)$$
$$\le\omega\left(f';\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left|t-x\right|\right).$$

Bu eşitsizlik (4.15) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\left|\mathcal{L}_n(f;x)-f(x)\right|\le\omega\left(f';\delta\right)\mathcal{L}_n\left(\left|e_1-x\right|\left(1+\frac{1}{\delta}\left|e_1-x\right|\right);x\right)$$
$$=\omega\left(f';\delta\right)\mathcal{L}_n\left(\left|e_1-x\right|+\frac{1}{\delta}\left(e_1-x\right)^2;x\right)$$
$$=\omega\left(f';\delta\right)\left(\mathcal{L}_n\left(\left|e_1-x\right|;x\right)+\frac{1}{\delta}\mathcal{L}_n\left(\left(e_1-x\right)^2;x\right)\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $\mathcal{L}_n\left(\left|e_1-x\right|;x\right)$ ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\left|\mathcal{L}_n(f;x)-f(x)\right|\le\omega\left(f';\delta\right)\left(\sqrt{\mathcal{L}_n\left(\left(e_1-x\right)^2;x\right)}+\frac{1}{\delta}\mathcal{L}_n\left(\left(e_1-x\right)^2;x\right)\right)$$
$$=\omega\left(f';\delta\right)\left(\sqrt{\frac{(1-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}}+\frac{1}{\delta}\frac{(1-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}\right)$$
$$\le\omega\left(f';\delta\right)\left(\frac{1}{\sqrt{n\alpha_n}}+\frac{1}{\delta}\frac{1}{n\alpha_n}\right)$$

eşitsizliği elde edilir. $\delta=\left(n\alpha_n\right)^{-1/2}$ olarak seçilirse istenilen elde edilir. ■

4.3. CHLODOVSKY TİPLİ SZASZ-MİRAKYAN-BERNSTEIN (SMBC) OPERATÖRLER DİZİSİ

Bu bölümde, (4.1) ile tanımlı $\{E_n\}$ pozitif lineer operatörler dizisinin; $I=\left[0,b_n\right]$, $\beta_m=m+1$, $\omega_m(x)=e^{-x}x^m/m!$ ve $L_n=C_n$ (Bernstein-Chlodovsky operatörü) olduğu durum incelenecektir. $\{\alpha_n\}$ doğal sayıların azalmayan bir dizisi olsun

4.3.1. Tanım. $f\in C[0,\infty)$ ve $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere

$$\mathcal{T}_n(f;x)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)f\left(\frac{k\,b_n}{m\,\alpha_n}\right),\qquad x\in\left[0,b_n\right]\qquad(4.16)$$

ile tanımlı operatöre *Chlodovsky tipli Szasz-Mirakyan-Bernstein (SMBC) operatörü* denir. Burada $q_{n,k}$ ve $p_{n,k}$ ifadeleri Tanım 4.1.1.'deki gibidir.

4.3.2. Lemma. *$x \in [0,b_n]$ ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere test fonksiyonları için*

$$\mathcal{T}_n(e_0;x)=1; \qquad \mathcal{T}_n(e_1;x)=x; \qquad \mathcal{T}_n(e_2;x)=x^2+\frac{(b_n-x)(1-e^{-nx})}{n\alpha_n}; \tag{4.17}$$

$$\mathcal{T}_n(e_3;x)=x^3+\frac{3x(b_n-x)(1-e^{-nx})}{n\alpha_n}+\frac{(b_n-x)(b_n-2x)}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}; \tag{4.18}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_n(e_4;x)=x^4&+\frac{6x^2(b_n-x)(1-e^{-nx})}{n\alpha_n}+\frac{x(b_n-x)(7b_n-11x)}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}\\&+\frac{(b_n-x)(6x^2-6b_nx+b_n^2)}{n\alpha_n^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m^2m!}\end{aligned} \tag{4.19}$$

ve merkezi momentler için

$$\mathcal{T}_n((e_1-x);x)=0; \qquad \mathcal{T}_n\left((e_1-x)^2;x\right)=\frac{(b_n-x)(1-e^{-nx})}{n\alpha_n}; \tag{4.20}$$

$$\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^3;x\right)=\frac{(b_n-x)(b_n-2x)}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}; \tag{4.21}$$

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^4;x\right)=&\frac{3x(b_n-x)^2}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}+\\&\frac{(b_n-x)(6x^2-6b_nx+b_n^2)}{n\alpha_n^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m^2m!}\end{aligned} \tag{4.22}$$

eşitlikleri doğrudur.

İspat. $x=0$ olduğunda istenen eşitliklerin doğrulukları açıktır. $x>0$ olsun. Bernstein-Chlodovsky operatörünün (3.20), (3.22) ve (3.23) özelliklerinden yararlanılarak SMBC operatörleri için (4.17), (4.18) ve (4.19) ifadeleri aşağıdaki gibi hesaplanır:

$$\mathcal{T}_n(e_0;x)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)=1,$$

$$\mathcal{T}_n(e_1;x)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\frac{kb_n}{m\alpha_n}=x\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)=x,$$

$$\mathcal{T}_n\left(e_2;x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}\right)^2$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\left(x^2+\frac{x\left(b_n-x\right)}{m\alpha_n}\right)$$

$$=x^2\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)+\frac{x\left(b_n-x\right)}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^{m-1}}{m(m-1)!}$$

$$=x^2+\frac{x\left(b_n-x\right)}{n\alpha_n x}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^{m}}{m!}$$

$$=x^2+\frac{\left(b_n-x\right)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}$$

$$\mathcal{T}_n\left(e_3;x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}\right)^3$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\left(x^3+\frac{3x^2\left(b_n-x\right)}{m\alpha_n}+\frac{x\left(b_n-x\right)\left(b_n-2x\right)}{m^2\alpha_n^2}\right)$$

$$=x^3+\frac{3x\left(b_n-x\right)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}+\frac{\left(b_n-x\right)\left(b_n-2x\right)}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}\left(nx\right)^m}{m.m!}$$

$$\mathcal{T}_n\left(e_4;x\right)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}\right)^4$$

$$=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\left(x^4+\frac{6x^3\left(b_n-x\right)}{m\alpha_n}+\frac{x^2\left(b_n-x\right)\left(7b_n-11x\right)}{m^2\alpha_n^2}+\frac{x\left(b_n-x\right)\left(6x^2-6b_nx+b_n^2\right)}{m^3\alpha_n^3}\right)$$

$$=x^4+\frac{6x^3\left(b_n-x\right)}{\alpha_n}\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\frac{1}{m}+\frac{x^2\left(b_n-x\right)\left(7b_n-11x\right)}{\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\frac{1}{m^2}+$$

$$\frac{x\left(b_n-x\right)\left(6x^2-6b_nx+b_n^2\right)}{\alpha_n^3}\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\frac{1}{m^3}$$

dolayısıyla

$$\mathcal{T}_n\left(e_4;x\right)=x^4+\frac{6x^2\left(b_n-x\right)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}+\frac{x\left(b_n-x\right)\left(7b_n-11x\right)}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}+$$

$$\frac{\left(b_n-x\right)\left(6x^2-6b_nx+b_n^2\right)}{n\alpha_n^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m^2m!}.$$

Şimdi de (4.20), (4.21) ve (4.22) eşitlikleri hesaplanacaktır.

$$\mathcal{T}_n\left((e_1-x);x\right)=\mathcal{T}_n\left(e_1;x\right)-x\mathcal{T}_n\left(e_0;x\right) \text{ ve}$$

$$\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^2;x\right)=\mathcal{T}_n\left(e_2;x\right)-2x\mathcal{T}_n\left(e_1;x\right)+x^2\mathcal{T}_n\left(e_0;x\right)$$

olduğundan (4.20) eşitlikleri (4.17)'den kolayca elde edilir. Aynı şekilde

$$\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^3;x\right)=\mathcal{T}_n\left(e_3;x\right)-3x\mathcal{T}_n\left(e_2;x\right)+3x^2\mathcal{T}_n\left(e_1;x\right)-x^3\mathcal{T}_n\left(e_0;x\right)$$

$$\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^4;x\right)=\mathcal{T}_n\left(e_4;x\right)-4x\mathcal{T}_n\left(e_3;x\right)+6x^2\mathcal{T}_n\left(e_2;x\right)-4x^3\mathcal{T}_n\left(e_1;x\right)+x^4\mathcal{T}_n\left(e_0;x\right)$$

olduğundan (4.21) ve (4.22) eşitlikleri (4.17), (4.18) ve (4.19) eşitlikleri kullanılarak gerekli hesaplamalar sonucunda elde edilir. ■

4.3.3. Lemma. *Her $x\in(0,b_n]$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur.*

$$\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^4;x\right)\le c_n\left(x\right)\left(\frac{b_n}{n\alpha_n}\right)^2, \tag{4.23}$$

burada c_n, $(0,\infty)$ 'da tanımlı bir fonksiyon ve her $x\in(0,\infty)$ için

$$\lim_{n\to\infty} c_n\left(x\right)=6$$

ve $\lim_{x\to\infty} c_n\left(x\right)=6\left(1+1/\left(nb_n\alpha_n\right)\right)$.

İspat. Her $n\in\mathbb{N}$ için (4.22) eşitliğinden

$$\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^4;x\right)=\frac{3x\left(b_n-x\right)^2}{n\alpha_n^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m.m!}+\frac{\left(b_n-x\right)\left(6x^2-6b_nx+b_n^2\right)}{n\alpha_n^3}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}(nx)^m}{m^2m!}$$

ve (4.9) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^4;x\right)&\le\frac{3x\left(b_n-x\right)^2}{n\alpha_n^2}\cdot\frac{2!}{nx}+\frac{\left(b_n-x\right)\left(6x^2-6b_nx+b_n^2\right)}{n\alpha_n^3}\cdot\frac{3!}{n^2x^2}\\&\le\left(\frac{b_n}{n\alpha_n}\right)^2\left(6+\frac{6x^2-6b_nx+b_n^2}{x^2nb_n\alpha_n}\right)=\left(\frac{b_n}{n\alpha_n}\right)^2c_n\left(x\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada $c_n\left(x\right)=\left(6+\dfrac{6x^2-6b_nx+b_n^2}{x^2nb_n\alpha_n}\right)$. Dolayısıyla her $x\in\left(0,\infty\right)$ için

$$\lim_{n\to\infty} c_n\left(x\right)=6$$

ve $\lim_{x\to\infty} c_n(x) = 6\left(1+1/\left(nb_n\alpha_n\right)\right)$. ■

4.3.4. Teorem. $\{b_n\}$ (3.19) *koşullarını sağlayan bir dizi olsun. Eğer* f *fonksiyonu* $[0,\infty)$ *aralığı üzerinde sınırlı ise* f *fonksiyonunun sürekli olduğu her* x *noktası için*

$$\lim_{n\to\infty} \mathcal{T}_n(f;x) = f(x) \tag{4.24}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. . Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin f fonksiyonu bir $x \in [0,\infty)$ noktasında sürekli olsun. O zaman bir $\delta > 0$ sayısı vardır öyle ki $|t-x| < \delta$ olan her $t \in [0,\infty)$ için $|f(t) - f(x)| < \varepsilon$. Eğer $x = 0$ ise (4.24) hemen elde edilir. O halde varsayalım ki $x > 0$ olsun. Bu durumda bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $b_N \geq x$. Dolayısıyla her $n \geq N$ için $b_n \geq x$. Her bir $n \geq N$ için

$$\begin{aligned}
\left|\mathcal{T}_n(f;x) - f(x)\right| &\leq \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{k=0}^{m\alpha_n} p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left|f\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}\right) - f(x)\right| \\
&\leq \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right|<\delta} p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left|f\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}\right) - f(x)\right| \\
&\quad + \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right|\geq\delta} p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left|f\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}\right) - f(x)\right| \\
&=: \sum\nolimits_1 + \sum\nolimits_2
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. f fonksiyonun x noktasındaki sürekliliğinden

$$\sum\nolimits_1 \leq C_n(e_0;x)\,\varepsilon = \varepsilon$$

elde edilir. Öte yandan f fonksiyonu $[0,\infty)$ aralığı üzerinde sınırlı olduğundan bir $M > 0$ sayısı vardır öyle ki her $t \in [0,\infty)$ için $|f(t)| \leq M$. Ayrıca $t = xb_n^{-1}$ dönüşümü yapılırsa

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 &\le 2M\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-ntb_n}\left(ntb_n\right)^{m-1}}{\left(m-1\right)!m}\sum_{\left|\frac{k}{m\alpha_n}-t\right|\ge\frac{\delta}{b_n}} p_{m\alpha_n,k}\left(t\right)\\ &\le 2M\,\frac{t\left(1-t\right)}{\alpha_n\left(\delta b_n^{-1}\right)^2}\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-ntb_n}\left(ntb_n\right)^{m-1}}{m!}\\ &= 2M\,\frac{\left(b_n-x\right)}{n\alpha_n\delta^2}\left(1-e^{-nx}\right)\le\frac{2Mb_n}{n\alpha_n\delta^2}.\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$\left|\mathcal{T}_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\le\varepsilon+\frac{2Mb_n}{n\alpha_n\delta^2}$$

yazılır. $b_n=o\left(n\right)$ $(n\to\infty)$ olduğundan istenilen elde edilir. ■

Bu teorem, sonsuzluktaki limitin sonsuzluğa gitme hızı yeterince düşük olan sınırsız fonksiyonlar için de doğrudur.

4.3.5. Teorem. $\{b_n\}$ (3.19) *koşullarını sağlayan bir dizi,* f $[0,\infty)$ *aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve* $M\left(b_n\right)=\max_{x\in[0,b_n]}\left|f\left(x\right)\right|$ *olsun.*

Eğer

$$\lim_{n\to\infty}M\left(b_n\right)e^{-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}-nx\left(1-\exp\left(-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}\right)\right)}=0 \tag{4.25}$$

ise f *fonksiyonunun sürekli olduğu her* $x>0$ *noktası için* (4.24) *bağıntısı doğrudur.*

İspat. Teorem 4.3.4'ün ispatındaki $\sum_2$ toplamındaki M yerine $M\left(b_n\right)$ alınır ve Lemma 3.5.4 kullanılırsa, $0<\delta<2x$ ve yeterince büyük n'ler için

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{T}_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right| &\le\varepsilon+2M\left(b_n\right)\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}\left(x\right)\sum_{\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right|\ge\delta}p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\\ &\le\varepsilon+4M\left(b_n\right)\sum_{m=1}^{\infty}\frac{e^{-nx}\left(nx\right)^{m-1}}{\left(m-1\right)!}e^{-\frac{\delta^2 m\alpha_n}{4xb_n}}\end{aligned}$$

buradan

$$\left|\mathcal{T}_n\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right|\le\varepsilon+4M\left(b_n\right)e^{-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}-nx\left(1-\exp\left(-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}\right)\right)}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla (4.25)'dan (4.24) görülür. ■

4.3.6. Uyarı. Eğer, Teorem 4.3.5 de $\alpha_n = O(1)$ olarak alınırsa (4.25) koşulu aşağıdaki koşula denk olacaktır.

$$\lim_{n\to\infty} M(b_n)e^{-\gamma\frac{n}{b_n}} = 0, \qquad \gamma = \frac{\delta^2}{4x}.$$

Bu koşul Bernstein-Chlodovsky tipli operatörler için bulunan koşul ile aynıdır.

4.3.7. Uyarı. Eğer, $\alpha_n = o(b_n)$ olarak alınırsa; (4.25) koşulu

$$\lim_{n\to\infty} M(b_n)e^{-\gamma\frac{n}{b_n}} = 0, \qquad \gamma = \frac{\delta^2}{4x},$$

şeklinde elde edilir. Öte yandan $\alpha_n = O(b_n)$ ise (4.25) koşulu,

$$\lim_{n\to\infty} M(b_n)e^{-\gamma n} = 0, \qquad \gamma = \frac{\delta^2}{4x}$$

şeklinde elde edilir.

Aşağıda SMBC operatörleri için Voronovskaya tipi teorem verilmiştir.

4.3.8. Teorem. $\{b_n\}$ (3.19) *koşullarını sağlayan bir dizi,* f *,* $[0,\infty)$ *aralığı üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve* $M(b_n) = \max_{x\in[0,b_n]}|f(x)|$ *olsun.* f *,* $x \in [0,\infty)$ *noktasında ikinci mertebeden sürekli türeve sahip ve*

$$\lim_{n\to\infty} M(b_n)\frac{n\alpha_n}{b_n}e^{-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}-nx\left(1-\exp\left(-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}\right)\right)} = 0, \qquad \delta > 0 \qquad (4.26)$$

ise

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\alpha_n}{b_n}\left[\mathcal{T}_n(f;x) - f(x)\right] = \frac{1}{2}f''(x)$$

eşitliği sağlanır.

İspat. f fonksiyonu x noktasında ikinci mertebeden sürekli türeve sahip ve $x \le b_n$ olsun. Taylor formülünden

$$f(t) = f(x) + f'(x)(t-x) + \frac{1}{2}\left[f''(x)(t-x)^2 + g(t;x)(t-x)^2\right] \qquad (4.27)$$

şeklindedir. Burada; $g(\cdot,x)$ x noktasında sürekli ve $\lim_{t\to x} g(t,x)=0$. (4.27) eşitliğinin her iki tarafına (4.16) operatörü uygulanır ve (4.20) eşitliklerini kullanılırsa

$$\mathcal{T}_n(f;x)=f(x)+\frac{1}{2}f''(x)\frac{(b_n-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}+R_n(x)$$

elde edilir. Burada

$$R_n(x):=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left(\frac{k\,b_n}{m\,\alpha_n}-x\right)^2 g\left(\frac{k\,b_n}{m\,\alpha_n}-x\right).$$

Teoremin ispatının bitmesi için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{n\alpha_n}{b_n}R_n(x)=0$$

eşitliğinin gösterilmesi yeterlidir. $R_n(x)$ ifadesi aşağıdaki gibi iki kısma ayrılırsa:

$$\begin{aligned}R_n(x)&=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\left(\sum_{\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right|<\delta}+\sum_{\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right|\geq\delta}\right)p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right)^2 g\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right)\\&=:R_{n,1}(x)+R_{n,2}(x).\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir. Her $\varepsilon>0$ için öyle $\delta>0$ sayısı bulunabilir ki $|\xi|<\delta$ iken $|g(\xi)|<\varepsilon$. $\delta\leq x$ olarak seçilir ve (4.20) eşitliği dikkate alınırsa, $R_{n,1}(x)$ ifadesi için

$$\frac{n\alpha_n}{b_n}R_{n,1}(x)<\varepsilon\frac{(b_n-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{b_n}<\varepsilon$$

eşitsizliği elde edilir. Diğer taraftan (4.27) ifadesinde $t=\frac{kb_n}{m\alpha_n}$ alınırsa

$$\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right)^2 g\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right)=f\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}\right)-f(x)-\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right)f'(x)-\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right)^2\frac{f''(x)}{2}$$

eşitliği elde edilir. Böylece; $R_{n,2}(x)$ ifadesi için

$$\begin{aligned}\left|R_{n,2}(x)\right| &\le \sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right|\ge\delta} p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left|f\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}\right)-f(x)\right| \\ &+\left|f'(x)\right|\sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right|\ge\delta} p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right| \\ &+\frac{\left|f''(x)\right|}{2}\sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right|\ge\delta} p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right)^2 \\ &=: \sum\nolimits_1+\sum\nolimits_2+\sum\nolimits_3 .\end{aligned}$$

elde edilir. $\sum_1$ için Lemma 3.5.4 dikkate alınırsa

$$\sum\nolimits_1 \le 4M(b_n)\, e^{-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}-nx\left(1-\exp\left(-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}\right)\right)},$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan;

$$\frac{n\alpha_n}{b_n}\sum\nolimits_1 \le 4M(b_n)\frac{b_n}{n\alpha_n} e^{-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}-nx\left(1-\exp\left(-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}\right)\right)}$$

eşitsizliği elde edilir. $\sum_2$ için Cauchy-Schwartz eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 \le \left|f'(x)\right| &\left\{\sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right|\ge\delta} p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\right\}^{1/2} \times \\ &\left\{\sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right|\ge\delta} p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right)^2\right\}^{1/2}\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Birinci çarpana Lemma 3.5.4, ikinci çarpan da $\delta^2 \le \left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right)^2$ eşitsizliği dikkate alınır ve (4.23) uygulanırsa

$$\begin{aligned}\sum\nolimits_2 &\le \sqrt{2}\left|f'(x)\right| e^{-\frac{\delta^2\alpha_n}{8xb_n}-\frac{nx}{2}\left(1-\exp\left(-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}\right)\right)} \times \left\{\frac{1}{\delta^2}\sum_{m=1}^{\infty} q_{n,m-1}(x) \sum_{\left|\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right|\ge\delta} p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}-x\right)^4\right\}^{1/2} \\ &\le \sqrt{2}\left|f'(x)\right|\delta^{-1}\sqrt{c_n(x)}\,\frac{b_n}{n\alpha_n} e^{-\frac{\delta^2\alpha_n}{8xb_n}-\frac{nx}{2}\left(1-\exp\left(-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}\right)\right)},\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan

$$\frac{b_n}{n\alpha_n}\sum\nolimits_2 \leq \sqrt{2}\left|f'(x)\right|\delta^{-1}\sqrt{c_n(x)}\,e^{-\frac{\delta^2\alpha_n}{8xb_n}-\frac{nx}{2}\left(1-\exp\left(-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}\right)\right)}.$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer hesaplamalar $\sum_3$ içinde yapılırsa aşağıdaki değerlendirme elde edilir.

$$\frac{b_n}{n\alpha_n}\sum\nolimits_3 \leq \frac{\sqrt{2}}{2}\left|f''(x)\right|\sqrt{c_n(x)}\,e^{-\frac{\delta^2\alpha_n}{8xb_n}-\frac{nx}{2}\left(1-\exp\left(-\frac{\delta^2\alpha_n}{4xb_n}\right)\right)}.$$

Sonuç olarak (4.26) koşulu altında her bir $i=1,2,3$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{b_n}{n\alpha_n}\sum\nolimits_i = 0. \qquad \blacksquare$$

4.4. SMBC OPERATÖRLER DİZİSİNİN YAKLAŞIM HIZI

4.4.1. Teorem. *Eğer f fonksiyonu $(0,\infty)$ aralığı üzerinde düzgün sürekli ise*

$$\left\|\mathcal{T}_n(f)-f\right\| \leq 2\omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n\alpha_n}}\right).$$

İspat. $x\in(0,b_n]$ olsun. O halde;

$$\mathcal{T}_n(f;x)-f(x)=\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left[f\left(\frac{kb_n}{m\alpha_n}\right)-f(x)\right].$$

Süreklilik modüllerin (vi). özelliği dikkate alınırsa,

$$\left|\mathcal{T}_n(f;x)-f(x)\right| \leq \sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\omega\left(f;\left|\frac{kb_n}{n\alpha_n}-x\right|\right)$$

elde edilir. Diğer taraftan, süreklilik modüllerinin (vii) özelliği ve Cauchy- Schwarz eşitsizliği kullanılırsa, $\delta>0$ için

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{T}_n(f;x)-f(x)\right| &\leq \omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sum_{m=1}^{\infty}q_{n,m-1}(x)\sum_{k=0}^{m\alpha_n}p_{m\alpha_n,k}\left(\frac{x}{b_n}\right)\left|\frac{kb_n}{n\alpha_n}-x\right|+1\right\}\\ &\leq \omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sqrt{\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^2;x\right)}+1\right\}\end{aligned}$$

$$=\omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{(b_n-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}}+1\right\}\le\omega(f;\delta)\left\{\frac{1}{\delta}\sqrt{\frac{b_n}{n\alpha_n}}+1\right\}$$

elde edilir. Bu son ifade de $\delta=\sqrt{b_n/(n\alpha_n)}$ olarak seçilirse istenilen elde edilir. $x=0$ durumunda ise ispat açıktır. ■

4.4.2. Teorem. $f\in C(0,\infty)$ olsun. *Her* $f\in Lip_M\alpha$ *için*

$$\left\|\mathcal{T}_n(f)-f\right\|\le M\left(\frac{b_n}{n\alpha_n}\right)^{\alpha/2} \tag{4.28}$$

İspat. $\left|\mathcal{T}_n(f;x)-f(x)\right|\le\mathcal{T}_n\left(\left|f-f(x)\right|;x\right)\le M\mathcal{T}_n\left(\left|e_1-x\right|^{\alpha};x\right)$ Hölder eşitsizliğinde $p=2/\alpha$, $q=2/(2-\alpha)$ olarak seçilirse $\mathcal{T}_n\left(\left|e_1-x\right|^{\alpha};x\right)$ için

$$\left|\mathcal{T}_n(f;x)-f(x)\right|\le M\left(\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^2;x\right)\right)^{\alpha/2}=M\left(\frac{(b_n-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}\right)^{\alpha/2}\le M\left(\frac{b_n}{n\alpha_n}\right)^{\alpha/2}$$

istenilen elde edilir. ■

Not: Teorem 4.4.2, Teorem 4.4.1'in sonucu olarak da yazılabilir. Ancak bu durumda (4.28)'de M yerine $2M$ gelir.

4.2.3 Teorem. $f\in C^1(0,\infty)$ *ise*

$$\left\|\mathcal{T}_n(f)-f\right\|\le 2\sqrt{\frac{b_n}{n\alpha_n}}\,\omega\left(f';\sqrt{\frac{b_n}{n\alpha_n}}\right).$$

İspat. $x\in[0,b_n]$ olsun. Ortalama değer teoreminden her $t\in[0,b_n]$ için,

$$f(t)-f(x)=(t-x)f'\left(\xi_x(t)\right)$$

olacak şekilde en az bir $\xi_x(t)\in\left(\min\{t,x\},\max\{t,x\}\right)$ vardır. Bu eşitliğin her iki tarafına (4.16) operatörü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\mathcal{T}_n(f;x)-f(x)&=\mathcal{T}_n\left((e_1-x)f'(\xi_x);x\right)\\&=\mathcal{T}_n\left((e_1-x)\left(f'(\xi_x)-f'(x)\right);x\right)\end{aligned} \tag{4.29}$$

elde edilir. Süreklilik modüllerinin (vi) ve (vii) özellikleri dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\left|f'\left(\xi_x(t)\right)-f'(x)\right| &\leq \omega\left(f';\left|\xi_x(t)-x\right|\right) \leq \omega\left(f';\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}\left|\xi_x(t)-x\right|\right)\\ &\leq \omega\left(f';\delta\right)\left(1+\frac{1}{\delta}|t-x|\right).\end{aligned}$$

Bu eşitsizlik (4.29) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{T}_n(f;x)-f(x)\right| &\leq \omega\left(f';\delta\right)\mathcal{T}_n\left(|e_1-x|\left(1+\frac{1}{\delta}|e_1-x|\right);x\right)\\ &= \omega\left(f';\delta\right)\mathcal{T}_n\left(|e_1-x|+\frac{1}{\delta}(e_1-x)^2;x\right)\\ &= \omega\left(f';\delta\right)\left(\mathcal{T}_n\left(|e_1-x|;x\right)+\frac{1}{\delta}\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^2;x\right)\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. $\mathcal{T}_n\left(|e_1-x|;x\right)$ ifadesine Cauchy-Schwarz eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned}\left|\mathcal{T}_n(f;x)-f(x)\right| &\leq \omega\left(f';\delta\right)\left(\sqrt{\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^2;x\right)}+\frac{1}{\delta}\mathcal{T}_n\left((e_1-x)^2;x\right)\right)\\ &= \omega\left(f';\delta\right)\left(\sqrt{\frac{(b_n-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}}+\frac{1}{\delta}\frac{(b_n-x)\left(1-e^{-nx}\right)}{n\alpha_n}\right)\\ &\leq \omega\left(f';\delta\right)\left(\sqrt{\frac{b_n}{n\alpha_n}}+\frac{1}{\delta}\frac{b_n}{n\alpha_n}\right)\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla $\delta=\sqrt{b_n/(n\alpha_n)}$ alınırsa istenilen elde edilir. ■

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 SONUÇLAR

Bu çalışmada, $\{E_n(f)\}$ dizileri kullanılarak üretilen $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ ve $\{\mathcal{T}_n(f)\}$ dizilerinin yaklaşım özellikleri incelenmiştir. Elde edilen sonuçlar şunlardır.

1. $f \in C[0,1]$ ise $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ dizisi $[0,1]$ aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

2. $f \in C[0,\infty)$ ise $\{\mathcal{T}_n(f)\}$ dizisi $[0,\infty)$ aralığında f fonksiyonuna yakınsaktır. $[0,\infty)$'nin her bir kapalı alt aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

3. $f \in C^2[0,1]$ ise aşağıdaki ifade doğrudur (Voronovskaya tipi teorem):

$$\lim_{n\to\infty} n\alpha_n\left[\mathcal{L}_n(f;x)-f(x)\right]=\frac{1}{2}(1-x)f''(x), \qquad x\in[0,1]$$

4. $f \in C^2[0,\infty)$ ise aşağıdaki ifade doğrudur (Voronovskaya tipi teorem):

$$\lim_{n\to\infty} \frac{n\alpha_n}{b_n}\left[\mathcal{T}_n(f;x)-f(x)\right]=\frac{1}{2}f''(x), \qquad x\in[0,\infty)$$

5. Operatörlerin yakınsaklık hızları süreklilik modülü cinsinden elde edildi:

$$\left\|\mathcal{L}_n(f)-f\right\| \le 2\omega\left(f;\frac{1}{\sqrt{n\alpha_n}}\right),$$

$$\left\|\mathcal{L}_n(f)-f\right\| \le 2\frac{1}{\sqrt{n\alpha_n}}\,\omega\left(f';\frac{1}{\sqrt{n\alpha_n}}\right),$$

$$\left\|\mathcal{T}_n(f)-f\right\| \le 2\omega\left(f;\sqrt{\frac{b_n}{n\alpha_n}}\right),$$

$$\left\|\mathcal{T}_n(f)-f\right\| \le 2\sqrt{\frac{b_n}{n\alpha_n}}\,\omega\left(f';\sqrt{\frac{b_n}{n\alpha_n}}\right).$$

6. Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlar için aşağıdaki eşitsizlikler elde edildi:

$$\left\|\mathcal{L}_n(f)-f\right\| \le M\left(\frac{1}{n\alpha_n}\right)^{\alpha/2}$$

$$\left\|\mathcal{T}_n(f)-f\right\| \leq M\left(\frac{b_n}{n\alpha_n}\right)^{\alpha/2}$$

7. $\{\mathcal{T}_n(f)\}$ dizisinin de $b_n = 1$ alınırsa $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ dizisi elde edilir. Yani, $\{\mathcal{T}_n(f)\}$ dizisi $\{\mathcal{L}_n(f)\}$ dizisinin genellemesidir.

5.2 ÖNERİLER

Tezde verilen bilgiler ışığında aşağıda verilen dört problem incelenebilir.

1. E_n üretici operatörlerinin verilen sürekli bir fonksiyona hangi koşullar altında düzgün yakınsaktır?

2. $f \in C^1[0,1]$ ise $\mathcal{L}_n'$ operatörü $[0,1]$ aralığında f' fonksiyonuna düzgün yakınsak mıdır?

3. $f \in C^1[0,\infty)$ ise $\mathcal{T}_n'$ operatörü $[0,b_n]$ aralığında f' fonksiyonuna düzgün yakınsak mıdır?

4. E_n üretici operatöründe Szasz-Mirakyan-Bernstein veya Szasz-Mirakyan-Bernstein-Chlodovsky operatörleri yerine Baskakov operatörü, Meyer-König-Zeller operatörü, Durrmeyer operatörü, vb. operatörleri alınarak bu operatörlerin kombinasyonu şeklinde yazılıp elde edilen yeni tip operatörlerin karşılaştırılması yapılırsa hangi kombinasyonun daha iyi yaklaşım sonuç vereceğinin araştırılması?

KAYNAKLAR

[1] Chebyshev, P. L. "Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes", Mémoires des Savants étrangers présentés à l'Académie de Saint-Pétersbourg, 7: 539–586, (1854).

[2] Weierstrass, K. "Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veranderlichen", Sitzungsberichete der Akademie zu Berlin, 633-639, (1885).

[3] Landau, E. "Uber die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganze rationale Funktion", Rend. Circ. Mat. Palermo, 25: 337-345, (1908).

[4] Bernstein, S. N. "Demonstration du theoreme de Weierstrass Fondee sur le Calcul de Probabilites", Commun. Soc. Math. Kharkow, 2(13): 1-2, (1912-13).

[5] Pinkus, A. "Weierstrass and approximation theory", J. Approx. Theory 107(1):1-66, (2000).

[6] Kantorovich, L. V. "Sur Certains developpements suivant les polynomes de la forme de S. Bernstein", I, II, C.R. Acad. URSS, 1(2): 563-568, 595-600, (1930).

[7] Voronovskaya, E. "Determination de la forme asymptotique d'approximation des fonctions par les polynomes de M.Bernstein",C. R. Acad. Sci. URSS, 79-85, (1932).

[8] Popoviciu, T. "Sur I'approximation des fonctions convexes d'ordre superieur", Mathematica(Cluj), 10: 49-54, (1935).

[9] Chlodovsky, I. "Sur le developpment des fonctions definies dans un interval infini en series de polynomes de M .S. Bernstein", Compositio Math., 4: 380-393, (1937).

[10] Mirakyan, G. M. "Approximation of continuous functions with the aid of polynomials", Dokl. Acad. Nauk SSSR, 31: 201-205, (1941).

[11] Favard, J. "Sur les multiplicateurs d'interpolation", J. Math. Pures Appl., 23(9): 219-247, (1944).

[12] Szasz, O. "Generalization of S. Bersntein's polynomials to the infinite inreval", J. Res., Nat. Bureau of St., 45: 239-245, (1950).

[13] Bohman, H. "On approximation of continuous and of analytic functions", Ark. Mat, 2: 43-56, (1952).

[14] Korovkin, P. P. "On the convergence of linear positive operators in the space of continuous functions", Dokl. Akad. Nauk, 90: 961-964, (1953).

[15] Korovkin, P. P., "Linear Operators and Approximation Theory", Hindustan Publishing Corp. (India), Delhi, 222 s., (1960).

[16] Bakakov, V. A. "An example of a sequence of linear positive operators in the space of continuous functions", Dokl. Akad. Nauk, 113: 249-251, (1957).

[17] Meyer-König, W. and Zeller, K. "Bernsteinsche Potenzreihen", Studia Math., 19: 89-94, (1960).

[18] Cheney, E. W. and Sharma, A. "Bernstein power series", Canadian J. Math., 16(2): 241-252, (1964).

[19] Durrmeyer, J. L., "Une formule d'inversion de la transformee de Laplace: Applications a la th´eorie des moments", Faculte des Sciences de l'Universite de Paris, PhD thesis, (1967).

[20] Stancu, D. D. "Asupra unei generalizari a polinoamelor lui Bernstein", Studia Univ. Babeş-Bolyai, Ser. Math. Phys., 14: 31-45, (1969).

[21] Gadjiev, A. D. "Theorems of Korovkin type", Mat. Zametki., 20(5): 781-786, Math. Notes, 20(5): 996-998, (1976) (in Russian).

[22] Ditzian, Z. "Convergence of Sequences of Linear Positive Operators: Remarks and Applications", J. Approx. Theory, 14: 296-301, (1975).

[23] Bleimann G., Butzer P. L. and Hahn L. A Bernstein-type operator approximating continuous functions on the semi-axis", Indag. Math., 42:255-262, (1980).

[24] Phillips, G. M. "Bernstein polynomials based on q-integers", Ann. Numer. Math., 4(1-4): 511-518, (1997).

[25] Oruç, H. and Phillips, G. M. "A Generalization of the Bernstein Polynomials", Proc. Edinburg Math. Soc., 42(2):403-413, (1999).

[26] Doğru, O. and Duman, O. "Statistical approximation of Meyer-König and Zeller operators based on q-integers", Publ. Math. Debrecen, 68(1-2):199-214, (2006).

[27] II'inskii, A. and Ostrovska, S. "Convergence of Generalized Bernstein Polynomials", J. Approx. Theory, 116:100-111, (2002).

[28] Videnskii, V. S. "On some Classes of q-Paramatric Positive Linear Operators", Oper. Theory Adv. Appl., 158: 213-222, (2005).

[29] Ibikli, E. "Approximation by Bernstein-Chlodowsky Polynomials", Hacettepe Journal of Math. and Statistics, 32:1-5, (2003).

[30] Karslı, H. and Ibikli, E. "Rate of Convergence of Chlodowsky-Type Bernstein Operators for Functions of Bounded Variation", Numerical Functional Analysis and Optimization, 28:3-4, 367-378, (2007).

[31] Nowak, G. and Gupta, V. "The Rate of Pointwise Approximation of Positive Linear Operators Based on q-Integer", Ukrainian Mathematical Journal, 3:350-360, (2011).

[32] Karslı, H. "Recent results on Chlodovsky operators", Stud. Univ. Babeş-Bolyai Math., 56(2): 423–436, (2011).

[33] Mahmudov, N. I. "Convergence properties and iterations for q-Stancu polynomials in compact disks", Comput. Math. Appl., 59(12): 3763–3769, (2010).

[34] Pop, O. T., Bărbosu, D. and Miclăuş, D. "The Voronovskaja Type Theorem for an Extension of Szasz-Mirakyajan Operators", Demonst. Math., 45(1):107-115, (2012).

[35] Balcı, M., "Matematik Analiz", Balcı Yayınları, Ankara, 420 s., (1997).

[36] Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N., Ekincioğlu, İ., "Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I-II, Tekağaç Eylül Yayıncılık, 1024 s., (2003).

[37] Marsden, J. E., "Elemantary Classical Analysis", W.H. Freeman and Company, San Francisco, 537 p., (1974)

[38] Kızmaz, H., “Fonksiyonel Analize Giriş”, Karadeniz Teknik Ünv. Basımevi, Trabzon, 322 s., (1993).

[39] Davis, P. J., “Interpolation and Approximation”, Blaisdell Publishing Company, 393 p., (1963).

[40] Shevchuk, I. A., “Approximation by Polynomials and Traces of Functions Continuous on a segment”, Naukova Dymka, Kiev, 324 p., (1992).

[41] Jackson, D. “On Approximation by Trigonometric Sums and Polynomials”, TAMS, 13: 491-515, (1912).

[42] Holhoş, A., “Contributions to the Approximation Of Functions”, Babeş-Boylai University, Ph. D. Thesis, 41 p., (2010).

[43] Hacıyev A, ve Hacısalihoğlu, H. H. “Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakınsaklığı” 1. Basım, A.Ü.F.F Döner Sermeye İşletmesi Yayınları:31, Ankara, 72 s., (1995).

[44] Pitul, P. A., “Evaluation of the Approximation Order by Positive Linear Operators” , Babeş-Boylai University, Ph. D. Thesis, 159 p., (2007).

[45] Lorentz, G. G., “Bernstein Polynomials”, Chelsea Publishing Company, New York,134 p., (1986).

[46] Albrycht J. and Radecki J. ”On a Generalization of the Theorem of Voronovskaya”, Zeszyty Naukowe UAM, 2: 1-7, (1960).

[47] Mamedov, R. G. “On the order of approximation of functions by sequences of linear positive operators”, (Russian), Dokl. Akad. Nauk SSSR, 128: 674–676, (1959).

[48] Shisha, O. and Mond, B. “The degree of convergence of linear positive operators”, Proc. Nat. Acad. Sci., 60:1196-1200, (1968).

[49] Esser, H. “On pointwise convergence estimates for positive linear operators on C [a, b]”, Indag. Math., 38:189–194, (1976).

[50] Gonska, H. “Quantitative Korovkin-type theorems on simultaneous approximation”, Math. Z., 186:419–433, (1984).

[51] Paltanea, R., “Approximation theory using positive linear operators”, Birkhauser, Boston, 202 p., (2004).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı **:** Ersin ŞİMŞEK

Doğum Tarihi **:** 10/01/1984

Öğrenim Durumu

Derece	**Bölüm/Program**	**Okul Adı**	**Yıl**
Lise	Matematik-Fen	Mersin Hasan Akel Lisesi	2000-2003
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2004-2008
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2009-2013

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. Approximation Properties of some positive linear operators with two variables, (with T. Tunç), Theory of Approximation of Funtions and its Applications, 70th Ann. of A.I. Stepatens, Kamianets Podilsky-Ukraine 28 May-3 June 2012.

2. Approximation properties of the Szasz-Bernstein-Chlodowsky type operators, (with T. Tunç), MADEA 2012, 04-09 September, 2012. Mersin TURKEY.

3. Approximation properties of the Szasz-Bernstein-Chlodowsky type operators, (with T. Tunç), Ukrainian Mathematical Journal (to appear).