SEZGİSEL FUZZY HİPER YAPILARIN BİRİNCİ VE İKİNCİ TİP MODAL OPERATÖRLERLE İLİŞKİLERİ

REŞAT SÖYLEMEZ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

MERSİN
EYLÜL – 2013

SEZGİSEL FUZZY HİPER YAPILARIN BİRİNCİ VE İKİNCİ TİP MODAL OPERATÖRLERLE İLİŞKİLERİ

REŞAT SÖYLEMEZ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

MERSİN
EYLÜL – 2013

Reşat SÖYLEMEZ tarafından Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU danışmanlığında hazırlanan "Sezgisel Fuzzy Hiper Yapıların Birinci ve İkinci Tip Modal Operatörlerle İlişkileri" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV	....
Prof. Dr. Fikret KUYUCU	....
Doç. Dr. Hamza MENKEN	....
Doç. Dr. Nedret ÖZGEN	....
Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 11/10/2013 tarihi ve 2013/19/592 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

SEZGİSEL FUZZY HİPER YAPILARIN BİRİNCİ VE İKİNCİ TİP MODAL OPERATÖRLERLE İLİŞKİLERİ

Reşat SÖYLEMEZ

ÖZ

$H \neq \varnothing$ ve $\bullet : HxH \to P^{*}(H)$ fonksiyonu verilsin. $(H, \bullet)$ ikilisine birden hiper yapı adı verilir.

Bu çalışmada, intuitionistic fuzzy H_v halka tanımı verilmiş ve bir intuitionistic fuzzy H_v halkasının intuitionistic fuzzy modal operatörleri altındaki görüntüsü incelenmiştir. Ayrıca intuitionistic fuzzy H_v halkasının yapısı ve cebirsel özellikleri incelenmiştir.

Bunlara ek olarak, T-intuitionistic fuzzy H_v halka tanımı verilmiş ve T-intuitionistic fuzzy H_v halkasının yapısı ile cebirsel özellikleri incelenmiştir. Temel bağıntıların özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Intuitionistic fuzzy H_v halka, T-intuitionistic fuzzy H_v halka, Hiper yapılar, H_v yapılar.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. GÖKHAN ÇUVALCIOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

THE RELATIONS OF ONE AND TWO TYPES OF INTUITIONISTIC FUZZY MODEL OPERATORS WITH INTUITIONISTIC FUZZY HYPERSTRUCTURES

Reşat SÖYLEMEZ

ABSTRACT

A hyperstructure is a set H together with a function $\bullet : \mathrm{HxH} \to \mathrm{P}^*(\mathrm{H})$ called hyperoperation, where $\mathrm{P}^*(\mathrm{H})$ denotes the set of all no-empty subsets of H.

In this paper, we define intuitionistic fuzzy H_v - ring. We apply the concept of an intuitionistic fuzzy modal operator to intuitionistic fuzzy H_v - ring. Also, we give some properties of intuitionistic fuzzy H_v - ring.

Moreover, we define T-intuitionistic fuzzy H_v -subring of R and investigate some related properties. Some fundamental relation properties are studied.

Key Words: Intuitionistic fuzzy H_v -ring, T-intuitionistic fuzzy H_v -ring, Hyperstructure, H_v -structures.

Advisor: Asst. Prof. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU, Department of Mathematics, University of Mersin

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında, yanımda olup yol gösteren, bilgi, görüş ve önerilerini esirgemeyen, gösterdiği sabır ve anlayıştan dolayı çok değerli danışman hocam Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU' na teşekkür ederim.

Bu çalışmanın bütün aşamalarında desteğini esirgemeyen Matematik Bölüm Başkanı Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV'e ve bölümdeki öğretim elemanlarına teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZ i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ v

1. GİRİŞ 1

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI 3

3. MATERYAL ve YÖNTEM 5

3.1. FUZZY VE INTUITIONISTIC FUZZY KÜMELER 5

3.2. INTUITIONISTIC FUZZY MODAL OPERATÖRLER 9

3.3. H_v -YAPILARI 11

3.4. T-NORM 17

4. BULGULAR ve TARTIŞMA 19

4.1. INTUITIONISTIC FUZZY H_v -HALKALAR 19

4.2. T-INTUITIONISTIC FUZZY H_v -HALKALAR 41

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER 50

KAYNAKLAR 51

ÖZGEÇMİŞ 54

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER	**AÇIKLAMALAR**
μ	Fuzzy küme
ν	Fuzzy küme
$(H,\bullet)$	Hiper yapı
γ_R^*	Temel bağıntı
$R\setminus\gamma_R^*$	Temel halka
$U(\mu,t)$	μ nin t-seviye üst kesiti
$L(\mu,t)$	μ nin t-seviye alt kesiti
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Ancak ve Ancak
FS	Fuzzy Küme
IFS	Intuitionistic Fuzzy Küme

1.GİRİŞ

Hiper yapı teorisi ilk defa Marty'nin [31] çalışmaları ile başlamıştır. Birçok araştırmacı modern cebirin bu yeni cismi üzerinde çalışmışlar ve geliştirmişlerdir. Aynı zamanda, hiper halkaların farklı tanımlarını geliştirmiştir. Günümüzde, hiper yapıların matematiğin birkaç alanında ve bilgisayar biliminde uygulamaları vardır.

$P^*(H)$, H ın boştan farklı alt kümelerin kümesi ve $H \neq \varnothing$ olmak üzere, $\bullet : HxH \to P^*(H)$ fonksiyonu verilsin. $(H,\bullet)$ ikilisine bir hiper yapı adı verilir. (x,y) ikilisinin görüntüsü $x \bullet y$ ile gösterilir.

$x \in H$ ve $A, B \subseteq H$ olsun. $A \bullet B$, $A \bullet x$ ve $x \bullet B$ kümeleri

$$A \bullet B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \bullet b, \quad A \bullet x = A \bullet \{x\}, \quad x \bullet B = \{x\} \bullet B$$

şeklinde tanımlanır.

T. Vougiouklis [34] tarafından, H_ν halka tanımı verildi. $(H,+,\bullet)$ yapısına H_ν -halka denir: $\Leftrightarrow$

1) $\forall x, y, z \in R, \quad (x+(y+z)) \cap ((x+y)+z) \neq \varnothing$

$$\forall x \in H, \ x + H = H + x = H$$

2) $\forall x, y, z \in R, \quad (x \bullet (y \bullet z)) \cap ((x \bullet y) \bullet z) \neq \varnothing$

3) $\forall x, y, z \in R,$

$$(x \bullet (y+z)) \cap (x \bullet y + x \bullet z) \neq \varnothing$$
$$((x+y) \bullet z) \cap (x \bullet z + y \bullet z) \neq \varnothing$$

Bu tezde, intuitionistic fuzzy H_ν halka tanımı verilmiş ve bir intuitionistic fuzzy H_ν halkasının intuitionistic fuzzy modal operatörleri altındaki görüntüsü incelenmiştir. Ve intuitionistic fuzzy H_ν halkasının yapısı ve cebirsel özellikleri incelenmiştir.

Bunlara ek olarak, T- intuitionistic fuzzy H_v halka tanımı verildi. Ve T-intuitionistic fuzzy H_v halkasının yapısı ve cebirsel özellikleri incelenmiştir.

Bu tezin, materyal ve yöntem kısmında gerekli tanımlar, lemmalar, önermeler ve teoremler verilecek, bulgular ve tartışma kısmında ise intuitionistic fuzzy H_v halka ve T-intuitionistic fuzzy H_v halkasının yapısı ve cebirsel özellikleri incelenecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

1965 yılında, L. A. Zadeh [37] tarafından fuzzy küme tanımı verildi. Intuitionistic fuzzy küme teorisi 1983 yılında K. Atanassov [1] tarafından ortaya atılmıştır. 1999 yılında, K. Atanassov, [3] intuitionistic fuzzy modal operatör tanımını vermiştir. 2007 yılında, G. Çuvalcıoğlu [11] tarafından $E_{\alpha,\beta}$ operatörünü tanımı verildi. 2008 yılında, L. Yang [36] tarafından intuitionistic fuzzy halka tanımı verildi.

2010 yılında, G. Çuvalcıoğlu [10] tarafından $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}$ operatörünü tanımı verildi. 2013 yılında G. Çuvalcığlu [12] $Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}$ operatörünü tanıtmıştır.

Hiper yapı teorisi ilk defa 1934 yılında Marty'nin [31] çalışmaları ile başlamıştır. 1935 yılında, Marty hiper grup tanımı verdi. Birçok araştırmacı modern cebirin bu yeni cismi üzerinde çalışmışlar ve geliştirmişlerdir. Aynı zamanda, hiper halkaların farklı tanımlarını geliştirmiştir. Günümüzde, hiper yapıların matematiğin birkaç alanında ve bilgisayar biliminde uygulamaları vardır.

1983 yılında Krasner [28] hiper halka ve hiper cisimlerin bir sınıfının tanımı verdi. 1990 yılında, T. Vougiouklis [34] tarafından, H_v halka tanımı verildi. 1994 yılında, T. Vougiouklis, S. Spartalis [33] tarafından H_v halka teorisinde temel bağıntıları incelenmiştir. 1999 yılında, B. Davvaz [13] tarafından, fuzzy H_v grup ve T-fuzzy H_v grup tanımı verildi. 2003 yılında, B. Davvaz [21] tarafından, T-fuzzy H_v halka tanımı verildi.

2006 yılında, B. Davvaz, Wieslaw A. Dudek [17] tarafından intuitionistic fuzzy H_v ideal tanımı verildi. Aynı yıl, B. Davvaz, Wieslaw A. Dudek, Young Bae Jun [16] intuitionistic fuzzy H_v alt modül tanımı verildi. Aynı zamanda, intuitionistic fuzzy H_v alt modülde temel bağıntıları ve intuitionistic fuzzy kümelerin $\Diamond A$, $\Box A$ operatörleri altındaki görüntüsü incelenmiştir.

2009 yılında B. Davvaz H_v-kafes tanımı verdi. J. G. Lee, K. H. Kım [29] T-hipernear halka tanımı vermiş ve cebirsel özellikleri incelenmiştir.

2011 yılında D. Heidari, B. Davvaz [22] hiper yapılarda sıralamayı incelenmiştir. V. Leoreanu- Fotea, B. Davvaz [30] fuzzy hiper halka tanımı verdi. Ve fuzzy hiper halka üzerinde temel bağıntı ve fuzzy hiper halka ile hiper halka arasındaki bağlantıyı incelenmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bulgular kısmında kullanılacak bazı tanımlar ve temel teoremler verilecektir.

3.1. FUZZY VE INTUITIONISTIC FUZZY KÜMELER

Tanım 3.1.1. H bir evrensel küme olsun.

$$A = \{< x, \mu_A(x) > \mid x \in H, \mu_A : H \to [0,1]\}$$

kümesine H de fuzzy küme denir [37].

Burada, μ_A (x), $x \in H$ elemanına H kümesine üye olma derecesidir. H üzerindeki fuzzy kümelerin ailesini FS(H) ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.2. H bir evrensel küme $\mu, \lambda \in$FS(H) olsun. μ ve λ üzerindeki bazı bağıntı ve işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır [37].

1) $\lambda = \mu :\Leftrightarrow \forall x \in H,\ \lambda(x) = \mu(x)$
2) $\lambda \subseteq \mu :\Leftrightarrow \forall x \in H,\ \lambda(x) \leq \mu(x)$
3) $\forall x \in H,\ (\mu \cap \lambda)(x) = \min\{\mu(x), \lambda(x)\}$
4) $\forall x \in H,\ (\mu \cup \lambda)(x) = \max\{\mu(x), \lambda(x)\}$
5) μ fuzzy kümesinin tümleyeni μ^c ile gösterilir. Ve $\forall x \in H,\ \mu^c(x) = 1 - \mu(x)$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.3. [32] H bir grup ve $\mu \in$FS(H)olsun. μ ye fuzzy altgrup denir: $\Leftrightarrow$

1) $\forall x, y \in H$, μ_A (xy) $\geq$ max(μ_A (x), μ_A (y))
2) $\forall x \in H$, μ_A (x^{-1}) $\geq$ μ_A (x)

Tanım 3.1.4. L=[0,1] ve $L^*=\{(x_1,x_2)\in[0,1]^2 \mid x_1+x_2\leq 1\}$ öyle ki

$$(x_1,x_2)\leq_{L^*}(y_1,y_2) :\Leftrightarrow x_1\leq y_1 \wedge x_2\geq y_2,\ \forall(x_1,x_2),(y_1,y_2)\in L^*$$

ile bir kafestir. $(L^*,\leq_{L^*})$ bir tam kafestir. Bu kafesin birimleri, $0_{L^*}=(0,1)$ ve $1_{L^*}=(1,0)$ şeklinde tanımlanır. $\forall A\subseteq L^*$,

$$\sup A=(\sup\{x\in[0,1]:(y\in[0,1]),((x,y)\in A)\},\ \inf\{y\in[0,1]:(x\in[0,1]),((x,y)\in A)\})$$

$$\inf A=(\inf\{x\in[0,1]:(y\in[0,1]),((x,y)\in A)\},\ \sup\{y\in[0,1]:(x\in[0,1]),((x,y)\in A)\})$$

şeklinde tanımlanır [12].

Tanım 3.1.5. H bir evrensel küme olsun.

$$A=\{<x,\mu_A(x),\nu_A(x)> \mid x\in H,\ 0\leq\mu_A(x)+\nu_A(x)\leq 1\}$$

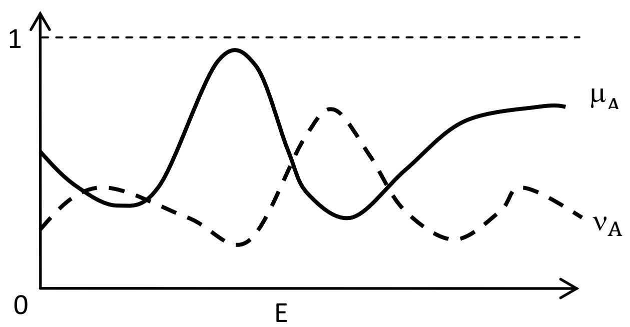
kümesine H da intuitionistic fuzzy küme denir.

$$\mu_A: H\rightarrow[0,1] \text{ ve } \nu_A: H\rightarrow[0,1]$$

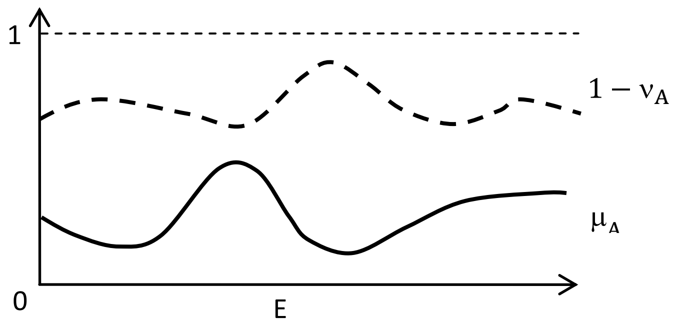
fonksiyonlarına sırasıyla, $x\in H$ ın üye olma derecesi ve üye olmama derecesi denir. H da intuitionistic fuzzy kümelerin ailesi IFS(H) ile gösterilir [1].

Burada $A=\{<x,\mu_A(x),\nu_A(x)> \mid x\in H,\ 0\leq\mu_A(x)+\nu_A(x)\leq 1\}$ intuitionistic fuzzy kümesini $A=(\mu_A,\nu_A)$ ile göstereceğiz.

Intuitionistic fuzzy kümeler farklı geometrik gösterimlere sahiptir.

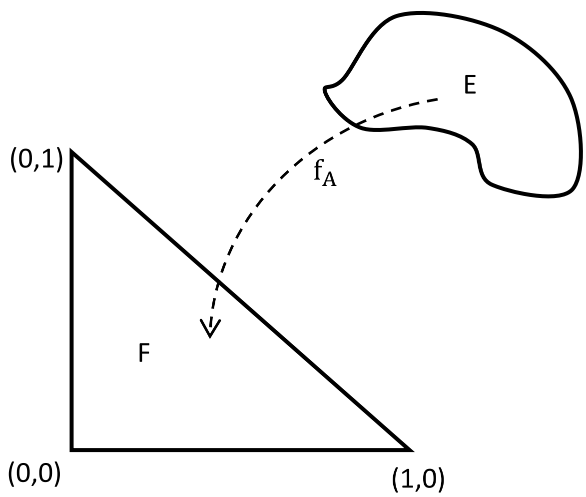


Şekil 3.1.5.a



Şekil 3.1.5.b

Şekil 3.1.5.a ve Şekil 3.1.5.bye intuitionistic fuzzy kümenin standart (birinci) geometrik gösterimi denir.



Şekil 3.1.5.c Intuitionistic fuzzy kümenin ikinci geometrik gösterimi.

$A \subseteq E$ olsun. O zaman $f_A : E \to A$ fonksiyonu inşa edebiliriz öyle ki $x \in E$, $p = f_A(x) \in F$ ve p, $\langle a, b \rangle$ koordinatlarına sahip öyle ki $0 \le a + b \le 1$ dır. Ve $a = \mu_A(x)$, $b = \nu_A(x)$ dır.

Tanım 3.1.6. H bir evrensel küme, $A \in$IFS(H) olsun.

$$\pi_A(x) = 1 - (\mu_A(x) + \nu_A(x))$$

ifadesine herhangi bir $x \in A$ nın kesin olmayan derecesi denir [1].

Tanım 3.1.7. H bir evrensel küme ve $A \in IFS(H)$ olsun.

$\exists\, x \in H,\ \pi_A(x) > 0$ ise A kümesine öz intuitionistic fuzzy küme denir [1].

Tanım 3.1.8. H bir evrensel küme A, $B \in IFS(H)$ olsun. A ve B üzerindeki bazı işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır [1].

1) $A \sqsubseteq B :\Leftrightarrow\ \forall x \in H,\ \mu_A(x) \le \mu_B(x)$ ve $\nu_A(x) \ge \nu_B(x)$
2) $A = B :\Leftrightarrow\ A \sqsubseteq B\ \wedge\ B \sqsubseteq A$
3) $A \sqcap B = \{< x, \mu_A(x) \wedge \mu_B(x), \nu_A(x) \vee \nu_B(x) > \mid x \in H\}$
4) $A \sqcup B = \{< x, \mu_A(x) \vee \mu_B(x), \nu_A(x) \wedge \nu_B(x) > \mid x \in H\}$
5) $A^c = \{< x, \nu_A(x), \mu_A(x) > \mid x \in H\}$

Tanım 3.1.9. [36] H bir halka ve $A \in IFS(H)$olsun. A ya intuitionistic fuzzy halka denir: $\Leftrightarrow \forall x, y \in H$,

1) $\mu_A(x+y) \ge \mu_A(x) \wedge \mu_A(y),\ \nu_A(x+y) \le \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$
2) $\mu_A(x) \ge \mu_A(-x),\ \nu_A(-x) \le \nu_A(x)$
3) $\mu_A(xy) \ge \mu_A(x) \wedge \mu_A(y),\ \nu_A(xy) \le \nu_A(x) \vee \nu_A(y)$

Tanım 3.1.10. $f : X \to Y$, $x \mapsto f(x)$ fonksiyon olsun. O zaman;

$$f : IFS(X) \to IFS(Y),\ A \mapsto f(A)$$
$$f^{-1} : IFS(X) \to IFS(Y),\ B \mapsto f^{-1}(B)$$

$f(A) = \left\{ \left\langle y, \mu_{f(A)}(y), \vartheta_{f(A)}(y) \right\rangle : y \in Y \right\}$,

$$\mu_{f(A)}(y) = \bigvee_{f(x)=y} \mu_{A(x)}, \qquad \vartheta_{f(A)}(y) = \bigwedge_{f(x)=y} \vartheta_{A(x)}$$

$f^{-1}(B) = \left\{ \left\langle y, \mu_{f^{-1}(B)}(x), \vartheta_{f^{-1}(B)}(x) \right\rangle : x \in X \right\}$,

$$\mu_{f^{-1}(B)}(x) = \mu_B f(x),\ \vartheta_{f^{-1}(B)}(x) = \vartheta_B f(x)$$

şeklinde fonksiyonları tanımlanabilir. Burada, $\sup\varnothing = 0,\ \inf\varnothing = 1$dir [36].

3.2. INTUITIONISTIC FUZZY MODAL OPERATÖRLER

Tanım 3.2.1. [3] H evrensel küme, A∈IFS(H) olsun.

1) $\Box A=\{<x, \mu_A(x), 1-\mu_A(x)>: x\in H\}$

2) $\Diamond A=\{<x, 1-\nu_A(x), \nu_A(x)>: x\in H\}$

Tanım 3.2.2. [3] H bir evrensel küme ve A∈IFS(H) olsun.

1) $\boxplus A=\{<x, \frac{\mu_A(x)}{2}, \frac{\nu_A(x)+1}{2}> \mid x\in H\}$

2) $\boxtimes A=\{<x, \frac{\mu_A(x)+1}{2}, \frac{\nu_A(x)}{2}> \mid x\in H\}$

Tanım 3.2.3. [4] H bir evrensel küme ve A∈IFS(H), α,β∈[0,1] olsun.

1) $\boxplus_\alpha A=\{<x, \alpha\mu_A(x), \alpha\nu_A(x)+1-\alpha> \mid x\in H\}$

2) $\boxtimes_\alpha A=\{<x, \alpha\mu_A(x)+1-\alpha, \alpha\nu_A(x)> \mid x\in H\}$

Tanım 3.2.4. [23] H bir evrensel küme ve A∈IFS(H), α, β, γ, α+β∈ [0,1] olsun.

1) $\boxplus_{\alpha,\beta}(A)=\{<x, \alpha\,\mu_A(x), \alpha\nu_A(x)+\beta> \mid x\in H\}$

2) $\boxtimes_{\alpha,\beta}(A)=\{<x, \alpha\mu_A(x)+\beta, \alpha\nu_A(x)> \mid x\in H\}$

Tanım 3.2.5. H bir evrensel küme ve A∈IFS(H) olsun. $\alpha,\beta,\gamma\in[0,1]$,

$\text{maks}\{\alpha,\beta\}+\gamma\leq 1$ olmak üzere;

1) $\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}(A)=\{<x, \alpha\mu_A(x), \beta\nu_A(x)+\gamma> \mid x\in H\}$

2) $\boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}(A)=\{<x, \alpha\mu_A(x)+\gamma, \beta\nu_A(x)> \mid x\in H\}$

dır [6].

Tanım 3.2.6. H bir evrensel küme ve $A\in IFS(H)$, $\alpha,\beta\in[0,1]$ olsun.

$$E_{\alpha,\beta}(A)=\{<x,\beta(\alpha\,\mu_A(x)+1-\alpha),\alpha(\beta\nu_A(x)+1-\beta)>|\,x\in H\}$$

dır [11].

Tanım 3.2.7. H bir evrensel küme, $A\in IFS(H)$ ve α, β, $\omega\in[0,1]$ olmak üzere;

$$Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)=\{<x,\ \beta(\alpha\mu_A(x)+\omega-\omega\alpha),\alpha(\beta\,\nu_A(x)+\omega-\omega\beta)>|\,x\in H\}$$

dır [10].

Tanım 3.2.8. H bir evrensel küme ve $A\in IFS(H)$, α, β, ω, $\theta\in[0,1]$ olmak üzere;

$$Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)=\{<x,\ \beta(\alpha\mu_A(x)+\omega-\omega\alpha),\ \alpha(\beta\nu_A(x)+\theta-\theta\beta)>|\,x\in H\}$$

dır [12].

Tanım 3.2.9. H bir evrensel küme ve $A\in IFS(H)$, α, $\beta\in[0,1]$ olsun.

$$G_{\alpha,\beta}(A)=\{<x,\alpha\mu_A(x),\beta\nu_A(x)>:\ x\in X\}$$

dır [6].

Tanım 3.2.10. H bir evrensel küme ve $A\in IFS(H)$, α, β, γ, $\delta\in[0,1]$ öyle ki

maks$(\alpha,\beta)+\gamma+\delta\leq 1$ olmak üzere

$$\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)=\{<x,\ \alpha\mu_A(x)+\gamma,\beta\nu_A(x)+\delta>|\,x\in H\}$$

dır [7].

3.3. H_v-YAPILARI

Tanım 3.3.1. $P^*(H)$, H ın boştan farklı alt kümelerin kümesi ve $H \neq \emptyset$ olmak üzere, $\bullet : HxH \to P^*(H)$ fonksiyonu verilsin. $(H, \bullet)$ ikilisine bir hiper yapı adı verilir. (x, y) ikilisinin görüntüsü $x \bullet y$ ile gösterilir.

$x \in H$ ve $A, B \subseteq H$ olsun. $A \bullet B$, $A \bullet x$ ve $x \bullet B$ kümeleri

$$A \bullet B = \bigcup_{a \in A, b \in B} a \bullet b, \quad A \bullet x = A \bullet \{x\}, \quad x \bullet B = \{x\} \bullet B$$

şeklinde tanımlanır [13].

Tanım 3.3.2. [13] $(H, \bullet)$ yapısına hiper grup denir: $\Leftrightarrow$

1) $\forall x, y, z \in R, \quad (x \bullet (y \bullet z)) = ((x \bullet y) \bullet z)$
2) $\forall x \in H, \ x \bullet H = H \bullet x = H$

Tanım 3.3.3. [13] $(H, \bullet)$ yapısına H_v-grup denir: $\Leftrightarrow$

1) $\forall x, y, z \in R, \quad (x \bullet (y \bullet z)) \cap ((x \bullet y) \bullet z) \neq \emptyset$
2) $\forall x \in H, \ x \bullet H = H \bullet x = H$

Tanım 3.3.4. [34] $(H, +, \bullet)$ yapısına H_v-halka denir: $\Leftrightarrow$

1) $\forall x, y, z \in R, \quad (x + (y + z)) \cap ((x + y) + z) \neq \emptyset$

$\forall x \in H, \ x + H = H + x = H$

2) $\forall x, y, z \in R, \quad (x \bullet (y \bullet z)) \cap ((x \bullet y) \bullet z) \neq \emptyset$

3) $\forall x, y, z \in R,$

$$(x \bullet (y + z)) \cap (x \bullet y + x \bullet z) \neq \emptyset$$
$$((x + y) \bullet z) \cap (x \bullet z + y \bullet z) \neq \emptyset$$

$(H,+,\bullet)$ H_v-halkasına dual H_v-halkası denir: $\Leftrightarrow$ $(H,\bullet,+)$ H_v-halkadır.

Örnek 3.3.1. $(R,+,\bullet)$ bir halka ve μ, R nin fuzzy altkümesi olsun. R de $\oplus, \otimes, *$ hiper operatörleri;

$$\begin{aligned}
&x \oplus y = \{t : \mu(t) = \mu(x+y)\} \\
&x \otimes y = \{t : \mu(t) = \mu(x.y)\} \\
&x * y = y * x = \{t : \mu(x) \le \mu(t) \le \mu(y)\}, \ \ (\mu(x) \le \mu(y))
\end{aligned}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda; $(R,*,*)$, $(R,*,\otimes)$, $(R,*,\oplus)$, $(R,\oplus,*)$, $(R,\oplus,\otimes)$ H_v-halkalarıdır [17].

Örnek 3.3.2. $H = (\{a,b\},+,\bullet)$,

$$\begin{aligned}
&a + a = \{a\}, \quad a + b = b + a = b + b = \{a,b\} \\
&a \bullet a = b \bullet a = \{a\}, \quad a \bullet b = b \bullet b = \{a,b\}
\end{aligned}$$

Bu durumda H hiper halka olur [15].

Tanım 3.3.5. [13] $(H,\bullet)$ bir hiper grup (H_v-grup) ve μ, H ın fuzzy altkümesi olsun. μ, fuzzy hiper altgrup (H_v-altgrup) denir: $\Leftrightarrow$

1) $\forall x,y \in H,\ \min\{\mu(x),\mu(y)\} \le \inf\{\mu(\alpha) : \alpha \in x.y\}$

2) $\forall x,a \in H,\ \exists y \in H \ni\ x \in a.y \wedge \min\{\mu(a),\mu(x)\} \le \mu(y)$

Önerme 3.3.1. $(H,\bullet)$ bir grup ve μ, fuzzy hiper altgrup olsun $* : HxH \to P^*(H)$ hiper operatörü , $x * y = \{t : \mu(t) = \mu(x.y)\}$ şeklinde tanımlanırsa, $(H,*)$ H_v-altgrup ve μ fuzzy H_v-altgrup olur [13].

Tanım 3.3.6. [13] $(H,\bullet)$ bir H_v-grup ve μ, H ın fuzzy altkümesi olsun.

μ T-fuzzy H_v-altgrup denir: $\Leftrightarrow$

1) $\forall x, y \in H,\ T\big(\mu(x), \mu(y)\big) \le \inf\{\mu(\alpha) : \alpha \in x.y\}$

2) $\forall x, a \in H,\ \exists y \in H \ni\ x \in a.y \wedge T\big(\mu(a), \mu(x)\big) \le \mu(y)$

Tanım 3.3.7. [17] $(R, +, \bullet)$ H_ν-halka ve μ, R nin fuzzy altkümesi olsun. μ, R nin sol (sağ) fuzzy H_ν-R idealdir : $\Leftrightarrow$

1) $\forall x, y \in R,\ \min\{\mu(x), \mu(y)\} \le \inf\{\mu(z) : z \in x + y\}$

2) $\forall x, a \in R,\ \exists y \in R \ni\ x \in a + y \wedge \min\{\mu(x), \mu(a)\} \le \mu(y)$

3) $\forall x, a \in R,\ \exists z \in R \ni\ x \in z + a \wedge \min\{\mu(x), \mu(a)\} \le \mu(z)$

4) $\mu(y) \le \inf\{\mu(z) : z \in x.y\}$ $\big($veya, $\mu(x) \le \inf\{\mu(z) : z \in x.y\}\big)$

Tanım 3.3.8. [17] R H_ν-halka ve $A = (\mu_A, \nu_A)$ R nin intuitionistic fuzzy altkümesi olsun. $A = (\mu_A, \nu_A)$ sol (sağ) intuitionistic fuzzy H_ν-R ideal denir: $\Leftrightarrow$

1) $\forall x, y \in R,\ \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \le \inf\{\mu_A(z) : z \in x + y\}$

2) $\forall x, y \in R,\ \sup\{\nu_A(z) : z \in x.y\} \le \nu_A(y)$,
$\big(\text{veya}, \sup\{\nu_A(z) : z \in x.y\} \le \nu_A(x)\big)$

3) $\forall x, a \in R,\ \exists z, y \in R \ni\ x \in (a + y) \cap (z + a)$
$\min\{\mu_A(x), \mu_A(a)\} \le \min\{\mu_A(y), \mu_A(z)\}$

4) $\forall x, y \in R,\ \mu_A(y) \le \inf\{\mu_A(z) : z \in x.y\}$,
$\big(\text{veya}, \mu_A(x) \le \inf\{\mu_A(z) : z \in x.y\}\big)$

5) $\forall x, y \in R,\ \sup\{\nu_A(z) : z \in x + y\} \le \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$

6) $\forall x, a \in R,\ \exists z, y \in R \ni x \in (a + y) \cap (z + a)$
$\max\{\nu_A(z), \nu_A(y)\} \le \max\{\nu_A(a), \nu_A(x)\}$

Lemma 3.3.1. $A = (\mu_A, \nu_A)$ sol intuitionistic fuzzy H_ν-R ideal ise $\Box A = (\mu_A, 1 - \mu_A)$ sol intuitionistic fuzzy H_ν-R idealdir [17].

Lemma 3.3.2. $A = (\mu_A, \nu_A)$ sol intuitionistic fuzzy H_ν-R ideal ise $\lozenge A = (1 - \nu_A, \nu_A)$ sol intuitionistic fuzzy H_ν-R idealdir [17].

Teorem 3.3.1. $A=(\mu_A,\nu_A)$ sol intuitionistic fuzzy H_ν -R idealdir. $\Leftrightarrow$ $\Diamond A$, $\Box A$ sol intuitionistic fuzzy H_ν -R idealdir [17].

Sonuç 3.3.1. $A=(\mu_A,\nu_A)$ sol intuitionistic fuzzy H_ν -R idealdir. $\Leftrightarrow$ μ_A ve $1-\nu_A$ sol fuzzy H_ν -R idealdir [17].

Tanım 3.3.9. $t\in[0,1]$ ve μ, R nin fuzzy altkümesi olsun.

$$U(\mu,t)=\{x\in R:\mu(x)\geq t\}$$
$$L(\mu,t)=\{x\in R:\mu(x)\leq t\}$$

kümelerine sırasıyla μ nin t-seviye üst kesiti ve t-seviye alt kesiti adı verilir [17].

Teorem 3.3.2. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_ν -R ideal ise $\forall t\in \mathrm{Im}(\mu_A)\cap \mathrm{Im}(\nu_A)$, $U(\mu_A;t)$ ve $L(\nu_A;t)$ kümeleri H_ν -ideallerdir [17].

Teorem 3.3.3. $A=(\mu_A,\nu_A)$, R nin intuitionistic fuzzy kümesi öyle ki boştan farklı her $U(\mu_A;t)$ ve $L(\nu_A;t)$ kümeleri H_ν -idealler ise $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_ν -R idealdir [17].

Önerme 3.3.2. $A=(\mu_A,\nu_A)$ sol intuitionistic fuzzy H_ν ideal ise, $\forall x\in R$, $\mu_A(x)=\sup\{\alpha\in[0,1]: x\in U(\mu_A;\alpha)\}$, $\nu_A(x)=\inf\{\alpha\in[0,1]: x\in L(\nu_A;\alpha)\}$ olur [17].

Tanım 3.3.10. $(R,+,.)$ H_ν-halka ve $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_ν -R halka olsun. $A\setminus\gamma_R^*=\left(\mu_{\gamma_R^*},\nu_{\gamma_R^*}\right)$ intuitionistic fuzzy kümesi;

$$\mu_{\gamma_R^*}:R/\gamma_R^*\to[0,1],$$

$$\mu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(x)\right)=\begin{cases}\sup\limits_{a\in\gamma_R^*(x)}\{\mu_A(a)\} & ,\gamma_R^*\neq\omega_R\\ 1 & ,\gamma_R^*=\omega_R\end{cases}$$

ve

$$\nu_{\gamma_R^*} : R/\gamma_R^* \to [0,1],$$

$$\nu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(x)\right) = \begin{cases} \inf\limits_{a\in\gamma_R^*(x)} \{\mu_A(a)\} & ,\gamma_R^* \neq \omega_R \\ 0 & ,\gamma_R^* = \omega_R \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [16].

Tanım 3.3.11. $(R,+,.)$ H_v-halka olsun. γ_R^*, $R\backslash\gamma_R^*$ halka yapan en küçük denklik bağıntısıdır. γ_R^* temel bağıntı ve $R\backslash\gamma_R^*$ temel halka adı verilir. Ω, R nin elemanlarının sonlu çarpımların kümesi olsun.

$$x, y \in R,\ x\gamma_R y :\Leftrightarrow \exists \Lambda \in \Omega,\ \{x, y\} \subseteq \Lambda$$

şeklinde γ_R denklik bağıntısı tanımlanabilir. γ_R ın geçişli kapalısı γ_R^* temel bağıntısıdır. Varsayalım $\gamma_R^*(a)$, $a \in R$ nin denklik sınıfı olsun. O zaman $R\backslash\gamma_R^*$ da $\odot$, $\oplus$ operatörleri,

$$\forall c \in \gamma_R^*(a)+\gamma_R^*(b),\ \gamma_R^*(a)\oplus\gamma_R^*(b)=\gamma_R^*(c)$$
$$\forall d \in \gamma_R^*(a)\cdot\gamma_R^*(b),\ \gamma_R^*(a)\odot\gamma_R^*(b)=\gamma_R^*(d)$$

şeklinde tanımlanır. [16].

Tanım 3.3.12. $\varnothing \neq M$ kümesine R H_v-halkasında H_v-modül denir: $\Leftrightarrow$ $(M,+)$ zayıf değişmeli H_v-grup ve vardır "•" fonksiyonu,

$$\bullet : HxH \to P^*(H),\ (r,x) \to r.x$$

öyle ki her $a,b \in R$ ve $x,y \in M$,

$$((a+b)\cdot x)\cap(a\cdot x+b\cdot x)\neq\varnothing$$
$$(a\cdot(x+y))\cap(a\cdot x+a\cdot y)\neq\varnothing$$
$$((ab)\cdot x)\cap(a\cdot(b\cdot x))\neq\varnothing$$

dır [16].

Tanım 3.3.13. [16] M, H_v-R modül ve $A=(\mu_A,\nu_A)$ R nin intuitionistic fuzzy altkümesi olsun. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-M modül denir: $\Leftrightarrow$

1) $\forall x,y\in M,\ \min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\}\le \inf\{\mu_A(z): z\in x+y\}$
2) $\forall x\in M,\ r\in R,\ \sup\{\nu_A(z): z\in r.x\}\le \nu_A(x)$
3) $\forall x,a\in M,\ \exists z,y\in M \ni x\in(a+y)\cap(z+a)$
$\min\{\mu_A(x),\ \mu_A(a)\}\le \min\{\mu_A(y),\ \mu_A(z)\}$
4) $\forall x\in M,\ r\in R,\ \mu_A(x)\le \inf\{\mu_A(z): z\in r.x\}$
5) $\forall x,y\in M,\ \sup\{\nu_A(z): z\in x+y\}\le \max\{\nu_A(x),\ \nu_A(y)\}$
6) $\forall x,a\in M,\ \exists z,y\in M \ni x\in(a+y)\cap(z+a)$
$\max\{\nu_A(z),\ \nu_A(y)\}\le \max\{\nu_A(a),\ \nu_A(x)\}$

Tanım 3.3.14. $f: X\to Y$ fonksiyon olsun. μ, X de fuzzy kümesi ve ν, Y nin fuzzy kümesi olsun. Bu durumda;

$f^{-1}(\nu)$, X in fuzzy kümesi;

$$\forall x\in X,\ f^{-1}(\nu)(x)=\nu(f(x))$$

ve

$f(\mu)$, Y nin fuzzy kümesi;

$$f(\mu)((y))=\begin{cases}\sup\limits_{x\in f^{-1}(y)}\{\mu_A(a)\} & ,f^{-1}(y)\ne\varnothing\\ 0 & ,\text{d.d}\end{cases}$$

şeklinde tanımlanır [16].

Tanım 3.3.15. μ, fuzzy kümesi sup özelliğine sahiptir: $\Leftrightarrow$

$$\forall\ \varnothing\ne S\subseteq X,\ \exists x_0\in S \ni \mu(x_0)=\sup_{x\in S}\{\mu(x)\}$$

dır.

μ, fuzzy kümesi inf özelliğine sahiptir: $\Leftrightarrow$

$$\forall\ \varnothing \neq S \subseteq X,\ \exists x_1 \in S \ni \mu(x_1) = \inf_{x \in S}\{\mu(x)\}$$

dır [16].

Önerme 3.3.3. M_1 , M_2 H_ν -modül ve $f : M_1 \to M_2$ örten fonksiyon olsun. $A = (\mu_A, \nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_ν -modül M_1 öyle ki μ_A ve ν_A sup özelliğine sahipse;

$$1)\ f(U(\mu_A;t)) = U(f(\mu_A);t)$$
$$2)\ f(L(\nu_A;t)) \supseteq L(f(\lambda_A);t)$$

koşulları sağlanır [16].

3.4. T-NORM

Tanım 3.4.1. [29] T: $[0,1]x[0,1] \to [0,1]$ fonksiyonuna t-norm denir: $\Leftrightarrow$

1) $T(x,1) = x$
2) $y \leq z \Rightarrow T(x,y) \leq T(x,z)$
3) $T(x,y) = T(y,x)$
4) $\forall x,y,z \in [0,1]$, $T(x,T(y,z)) = T(T(x,y),z)$

Örnek 3.4.1. Aşağıda bazı t-norm örnekleri verilmiştir [8].

1) $T_D(x,y) = \begin{cases} x \wedge y & ; \quad x \vee y = 1 \\ 0 & ; \quad d.d \end{cases}$ (Drastic product)

2) $T_{nM}(x,y) = \begin{cases} 0 & ; \quad x + y \leq 1 \\ x \wedge y & ; \quad d.d \end{cases}$ (Nilpotent minimum)

3) $T_L(x,y) = 0 \vee (x + y - 1)$ (Lukasiewichz)

4) $T_P(x,y) = x.y$ (Product)

5) $T_M(x,y) = x \wedge y \quad (\text{minimum})$

Bir t-norm T, $\alpha \in [0,1]$, $\Delta_T := \{\alpha \in [0,1]: \ T(\alpha,\alpha) = \alpha\}$ dir [29].

Önerme 3.4.1. Her t-norm T,

$$\forall \alpha, \beta \in [0,1], \ T(\alpha, \beta) \leq \min(\alpha, \beta)$$

ifadesi sağlanır [29].

Tanım 3.4.2. T bir t-norm olsun. μ fuzzy kümesine idempotent özelliğine sahiptir:$\Leftrightarrow$ Im $\mu \subseteq \Delta_T$ dır [29].

Tanım 3.4.3. Bir t-norm T süreklidir:$\Leftrightarrow$ $\forall \, (x_n)_{n \in \mathbb{N}}, (y_n)_{n \in \mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$,

yakınsak dizileri için, $\lim\limits_{n \to \infty} T(x_n, y_n) = T\left(\lim\limits_{n \to \infty} x_n, \lim\limits_{n \to \infty} y_n\right)$ dir [27].

T_M, T_P ve T_L sürekli t-normdur. T_D sürekli değildir [27].

Lemma 3.4.1. T , H kümesinde sürekli bir t-norm , $\mu \in FS(H)$ ve A, B boştan farklı H ın alt kümeleri olsun. Bu taktirde;

$$\sup_{x \in A, y \in B} T(\mu(x), \mu(y)) = T\left(\sup_{x \in A} \mu(x) \, , \, \sup_{y \in B} \mu(y)\right)$$

olur [8].

4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

4.1. INTUITIONISTIC FUZZY H_v -HALKALAR

Bu kısımda intuitionistic fuzzy H_v halka tanımı verilecek. Bir intuitionistic fuzzy H_v halkasının intuitionistic fuzzy modal operatörleri altındaki görüntüsü ve intuitionistic fuzzy H_v halkasının yapısı ve cebirsel özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1.1. R H_v -halka ve $A=(\mu_A,\nu_A)$ R nin intuitionistic fuzzy altkümesi olsun. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halka denir: $\Leftrightarrow$

1) $\forall x,y\in R,\ \min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}\le \inf\{\mu_A(z): z\in x+y\}$
2) $\forall x,y\in R,\ \sup\{\nu_A(z): z\in x+y\}\le \max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\}$
3) $\forall x,a\in R\ ,\ \exists z,y\in R \ni x\in(a+y)\cap(z+a)$
$\min\{\mu_A(a),\mu_A(x)\}\le \min\{\mu_A(y),\mu_A(z)\}$
4) $\forall x,y\in R,\ \min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}\le \inf\{\mu_A(z): z\in x.y\}$
5) $\forall x,y\in R,\ \sup\{\nu_A(z): z\in x.y\}\le \max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\}$
6) $\forall x,a\in R\ ,\ \exists z,y\in R \ni x\in(a+y)\cap(z+a)$
$\max\{\nu_A(z),\nu_A(y)\}\le \max\{\nu_A(x),\nu_A(a)\}$

Teorem 4.1.1. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v -R halkadır. $\Leftrightarrow$

$$⊞A=\left(\frac{\mu_A}{2},\frac{\nu_A+1}{2}\right) \text{ ve } ⊠A=\left(\frac{\mu_A+1}{2},\frac{\nu_A}{2}\right)$$

intuitionistic fuzzy H_v -R halkalardır.

İspat: Varsayalım ki $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v -R halka olsun.

$⊞A=\left(\frac{\mu_A}{2},\frac{\nu_A+1}{2}\right)$ intuitionistic fuzzy H_v -R halka olduğunu gösterelim. $x,y\in R$ keyfi verilsin. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v -R olduğundan;

$$\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\} \le \inf\{\mu_A(z) \;:\; z \in x+y\}$$

olur. Buradan;

$$\frac{1}{2}.\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\} \le \frac{1}{2}.\inf\{\mu_A(z) \;:\; z \in x+y\}$$
$$\le \inf\left\{\frac{1}{2}.\mu_A(z) \;:\; z \in x+y\right\}$$

ve

$$\min\left\{\frac{\mu_A(x)}{2},\frac{\mu_A(y)}{2}\right\} \le \inf\left\{\frac{\mu_A(z)}{2} \;:\; z \in x+y\right\}$$

elde edilir. $x,a \in R$ olsun. Bu durumda, $\exists z,y \in R \ni x \in (a+y)\cap(z+a)$ ve $\min\{\mu_A(a),\mu_A(x)\} \le \min\{\mu_A(y),\mu_A(z)\}$ dır. Buradan;

$$\min\left\{\frac{\mu_A(a)}{2},\frac{\mu_A(x)}{2}\right\} \le \min\left\{\frac{\mu_A(y)}{2},\frac{\mu_A(z)}{2}\right\}$$

elde edilir.

$x,y \in R$ olsun. O zaman $\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\} \le \inf\{\mu_A(z) : z \in x.y\}$ olur. Buradan

$$\min\left\{\frac{\mu_A(y)}{2},\frac{\mu_A(x)}{2}\right\} \le \frac{1}{2}.\inf\{\mu_A(z) \;:\; z \in x\cdot y\}$$
$$\le \inf\left\{\frac{1}{2}.\mu_A(z) \;:\; z \in x\cdot y\right\}$$

elde edilir. $x,y \in R$ olsun. Tanımdan $\sup\{\nu_A(z) \;:\; z \in x+y\} \le \max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\}$ olur. Buradan;

$$\sup\left\{\frac{1}{2}.\nu_A(z) \;:\; z \in x+y\right\} \le \frac{1}{2}.\sup\{\nu_A(z) \;:\; z \in x+y\}$$
$$\le \frac{1}{2}.\max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\}$$

$$\sup\left\{\frac{\nu_A(z)}{2}\ :\ z\in x+y\right\}\le \max\left\{\frac{\nu_A(x)}{2},\frac{\nu_A(y)}{2}\right\}$$

elde edilir. Böylece;

$$\sup\left\{\frac{\nu_A(z)+1}{2}\ :\ z\in x+y\right\}\le \max\left\{\frac{\nu_A(x)+1}{2},\frac{\nu_A(y)+1}{2}\right\}$$

elde edilir. $x,a\in R$ olsun. Bu durumda, $\exists z,y\in R \ni x\in(a+y)\cap(z+a)$ ve $\max\{\nu_A(z),\nu_A(y)\}\le\max\{\nu_A(x),\nu_A(a)\}$ dır. Buradan;

$$\max\left\{\frac{\nu_A(y)+1}{2},\frac{\nu_A(z)+1}{2}\right\}\le \max\left\{\frac{\nu_A(a)+1}{2},\frac{\nu_A(x)+1}{2}\right\}$$

olur.

$x,y\in R$ olsun. Tanımdan $\sup\{\nu_A(z)\ :\ z\in x.y\}\le\max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\}$ olur. Buradan;

$$\sup\left\{\frac{1}{2}.\nu_A(z)\ :\ z\in x.y\right\}\le\frac{1}{2}.\sup\{\nu_A(z)\ :\ z\in x.y\}$$
$$\le\frac{1}{2}.\max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\}$$

$$\sup\left\{\frac{\nu_A(z)}{2}\ :\ z\in x.y\right\}\le \max\left\{\frac{\nu_A(x)}{2},\frac{\nu_A(y)}{2}\right\}$$

elde edilir. Böylece;

$$\sup\left\{\frac{\nu_A(z)+1}{2}\ :\ z\in x.y\right\}\le \max\left\{\frac{\nu_A(x)+1}{2},\frac{\nu_A(y)+1}{2}\right\}$$

elde edilir.

Böylece, $\boxplus A=\left(\frac{\mu_A}{2},\frac{\nu_A+1}{2}\right)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halka olur.

Varsayalım ki $\boxplus A=\left(\frac{\mu_A}{2},\frac{\nu_A+1}{2}\right)$ intuitionistic fuzzy H_v -R halka olsun. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v -R halka olduğu yukarıdakine benzer şekilde ispat edilir.

Benzer şekilde $\boxtimes A=\left(\frac{\mu_A+1}{2},\frac{\nu_A}{2}\right)$ içinde ispat yapılır.

Teorem 4.1.2. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v -R halkadır. $\Leftrightarrow$ $\alpha\neq 0$, $\boxplus_\alpha A=(\alpha\mu_A,\ \alpha\nu_A+1-\alpha)$ ve $\boxtimes_\alpha A=(\alpha\mu_A+1-\alpha,\ \alpha\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v -R halkalardır.

İspat: Varsayalım ki $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v -R halka olsun. $\boxplus_\alpha A=(\alpha\mu_A,\ \alpha\nu_A+1-\alpha)$ intuitionistic fuzzy H_v -R halka olduğunu gösterelim. $x,y\in R$ keyfi verilsin. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v -R olduğundan;

$$\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}\leq\inf\{\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\}$$

ve

$$\begin{aligned}\inf\{\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\}=t_0 &\Rightarrow\forall\, z\in x+y,\ t_0\leq\mu_A(z)\\ &\Rightarrow\forall\, z\in x+y,\ \alpha.t_0\leq\alpha.\mu_A(z)\\ &\Rightarrow\alpha.\inf\{\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\}\leq\inf\{\alpha.\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\}\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}\alpha.\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}&\leq\alpha.\inf\{\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\}\\ &\leq\inf\{\alpha.\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\}\end{aligned}$$

ve

$$\min\{\alpha.\mu_A(x),\ \alpha.\mu_A(y)\}\leq\inf\{\alpha.\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\}$$

olur.

$x, a \in R$ olsun. Bu durumda, $\exists z, y \in R \ni x \in (a+y) \cap (z+a)$ ve $\min\{\mu_A(a), \mu_A(x)\} \leq \min\{\mu_A(y), \mu_A(z)\}$ dir.

Bu nedenle;

$$\alpha.\min\{\mu_A(a), \mu_A(x)\} \leq \alpha.\min\{\mu_A(y), \mu_A(z)\}$$

buradan

$$\min\{\alpha.\mu_A(a), \alpha.\mu_A(x)\} \leq \min\{\alpha.\mu_A(y), \alpha.\mu_A(z)\}$$

olur. $x, y \in R$ olsun. O zaman $\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \leq \inf\{\mu_A(z) : z \in x.y\}$ olur. Buradan

$$\begin{aligned}\alpha.\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} &\leq \alpha.\inf\{\mu_A(z) \ : \ z \in x.y\} \\ &\leq \inf\{\alpha.\mu_A(z) \ : \ z \in x.y\}\end{aligned}$$

ve

$$\min\{\alpha.\mu_A(x), \ \alpha.\mu_A(y)\} \leq \inf\{\alpha.\mu_A(z) \ : \ z \in x.y\}$$

elde edilir.

$x, y \in R$ olsun. R H_v-halka olduğundan, $\sup\{\nu_A(z) \ : \ z \in x+y\} \leq \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$ olur. Ve

$$\sup\{\nu_A(z) \ : \ z \in x+y\} = t_0 \Rightarrow \forall\, z \in x+y, \ \nu_A(z) \leq t_0$$

$$\begin{aligned}&\Rightarrow \forall\, z \in x+y, \ \alpha.\nu_A(z) \leq \alpha.t_0 \\ &\Rightarrow \forall\, z \in x+y, \ \alpha.\nu_A(z) + 1 - \alpha \leq \alpha.t_0 + 1 - \alpha \\ &\Rightarrow \sup\{\alpha\nu_A(z) + 1 - \alpha \ : \ z \in x+y\} \leq \alpha.\sup\{\nu_A(z) \ : \ z \in x+y\} + 1 - \alpha\end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned}\sup\{\alpha\nu_A(z) + 1 - \alpha \ : \ z \in x+y\} &\leq \alpha.\sup\{\nu_A(z) \ : \ z \in x+y\} + 1 - \alpha \\ &\leq \alpha.\max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\} + 1 - \alpha\end{aligned}$$

ve

$$\sup\left\{\alpha\nu_A(z)+1-\alpha \ : \ z\in x+y\right\}\le \max\left\{\alpha\nu_A(x)+1-\alpha,\ \alpha\nu_A(y)+1-\alpha\right\}$$

olur. $x,a\in R$ olsun. Bu durumda, $\exists z,y\in R \ \ni \ x\in(a+y)\cap(z+a)$ ve $\max\left\{\nu_A(z),\nu_A(y)\right\}\le\max\left\{\nu_A(x),\nu_A(a)\right\}$ dır. Buradan;

$$\max\left\{\alpha\nu_A(y)+1-\alpha,\ \alpha\nu_A(z)+1-\alpha\right\}\le\max\left\{\alpha\nu_A(a)+1-\alpha,\ \alpha\nu_A(x)+1-\alpha\right\}$$

olur.

$x,y\in R$ olsun. R H_v-halka olduğundan, $\sup\left\{\nu_A(z) \ : \ z\in x.y\right\}\le\max\left\{\nu_A(x),\nu_A(y)\right\}$ olur. Buradan;

$$\begin{aligned}\sup\left\{\alpha\nu_A(z)+1-\alpha \ : \ z\in x.y\right\} &\le \alpha.\sup\left\{\nu_A(z) \ : \ z\in x+y\right\}+1-\alpha\\ &\le \alpha.\max\left\{\nu_A(x),\nu_A(y)\right\}+1-\alpha\end{aligned}$$

$$\sup\left\{\alpha\nu_A(z)+1-\alpha \ : \ z\in x.y\right\}\le\max\left\{\alpha\nu_A(x)+1-\alpha,\ \alpha\nu_A(y)+1-\alpha\right\}$$

elde edilir.

Böylece, $\boxplus_\alpha A=\left(\alpha\mu_A,\ \alpha\nu_A+1-\alpha\right)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halka olur.

Varsayalım ki $\boxplus_\alpha A=\left(\alpha\mu_A,\ \alpha\nu_A+1-\alpha\right)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halka olsun.

$A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halka olduğunu gösterelim.

$x,y\in R$ keyfi verilsin. Tanımdan,

$$\min\left\{\alpha.\mu_A(x),\ \alpha.\mu_A(y)\right\}\le\inf\left\{\alpha.\mu_A(z) \ : \ z\in x+y\right\}$$

olur. Buradan;

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}.\min\left\{\alpha.\mu_A(x),\alpha.\mu_A(y)\right\} &\le \frac{1}{\alpha}.\inf\left\{\alpha.\mu_A(z) \ : \ z\in x+y\right\}\\ &\le \inf\left\{\mu_A(z) \ : \ z\in x+y\right\}\end{aligned}$$

ve

$$\min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\} \le \inf\{\mu_A(z)\ :\ z \in x+y\}$$

elde edilir. $x, a \in R$ olsun. Bu durumda, $\exists z, y \in R \ni x \in (a+y) \cap (z+a)$ ve $\min\{\alpha.\mu_A(a),\ \alpha.\mu_A(x)\} \le \min\{\alpha.\mu_A(y), \alpha.\mu_A(z)\}$ dir. Buradan; $\min\{\mu_A(a),\ \mu_A(x)\} \le \min\{\mu_A(y), \mu_A(z)\}$ olur. $x, y \in R$ olsun. Ve

$$\begin{aligned}\frac{1}{\alpha}.\min\{\alpha.\mu_A(x), \alpha.\mu_A(y)\} &\le \frac{1}{\alpha}.\inf\{\alpha.\mu_A(z)\ :\ z \in x.y\}\\ &\le \inf\{\mu_A(z)\ :\ z \in x.y\}\end{aligned}$$

Buradan $\min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\} \le \inf\{\mu_A(z)\ :\ z \in x+y\}$ olur. $x, y \in R$ olsun. Tanımdan ,

$$\sup\{\alpha\nu_A(z)+1-\alpha\ :\ z \in x+y\} \le \max\{\alpha\nu_A(x)+1-\alpha,\ \alpha\nu_A(y)+1-\alpha\}$$

olur.

$$\begin{aligned}\sup\{\alpha\nu_A(z)+1-\alpha\ :\ z \in x+y\} = t_0 &\Rightarrow \forall\, z \in x+y,\ \ \alpha.\nu_A(z)+1-\alpha \le t_0\\ &\Rightarrow \forall\, z \in x+y,\ \alpha.\nu_A(z) \le t_0+\alpha-1\\ &\Rightarrow \forall\, z \in x+y,\ \nu_A(z) \le \frac{1}{\alpha}.(t_0+\alpha-1)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup\{\nu_A(z)\ :\ z \in x+y\} \le \tfrac{1}{\alpha}.\left[\left(\sup\{\alpha\nu_A(z)+1-\alpha\ :\ z \in x+y\}+\alpha-1\right)\right]$$

Buradan;

$$\begin{aligned}\sup\{\nu_A(z)\ :\ z \in x+y\} &\le \frac{1}{\alpha}.\left[\sup\{\alpha\nu_A(z)+1-\alpha\ :\ z \in x+y\}+\alpha-1\right]\\ &\le \frac{1}{\alpha}.\left[\max\{\alpha\nu_A(x)+1-\alpha, \alpha\nu_A(y)+1-\alpha\}+\alpha-1\right]\end{aligned}$$

ve

$$\sup\{\nu_A(z)\ :\ z \in x+y\} \le \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$$

elde edilir. $x,a\in R$ olsun. Bu durumda, $\exists z,y\in R \ni x\in(a+y)\cap(z+a)$ ve $\max\{\alpha\nu_A(y)+1-\alpha,\ \alpha\nu_A(z)+1-\alpha\}\le\max\{\alpha\nu_A(a)+1-\alpha,\ \alpha\nu_A(x)+1-\alpha\}$ dır.

$$\frac{1}{\alpha}.\left[\max\{\alpha\nu_A(y)+1-\alpha,\alpha\nu_A(z)+1-\alpha\}+\alpha-1\right]\le\frac{1}{\alpha}.\left[\max\{\alpha\nu_A(a)+1-\alpha,\alpha\nu_A(x)+1-\alpha\}+\alpha-1\right]$$

Buradan;

$$\max\{\nu_A(y),\nu_A(z)\}\le\max\{\nu_A(a),\nu_A(x)\}$$

olur.

$x,y\in R$,

$$\begin{aligned}\sup\{\nu_A(z)\ :\ z\in x.y\}&\le\frac{1}{\alpha}.\left[\sup\{\alpha\nu_A(z)+1-\alpha\ :\ z\in x.y\}+\alpha-1\right]\\&\le\frac{1}{\alpha}.\left[\max\{\alpha\nu_A(x)+1-\alpha,\alpha\nu_A(y)+1-\alpha\}+\alpha-1\right]\end{aligned}$$

Buradan,

$$\sup\{\nu_A(z)\ :\ z\in x.y\}\le\max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\}$$

olur.

Benzer şekilde $\boxtimes_\alpha A=(\alpha\mu_A+1-\alpha,\ \alpha\nu_A)$ içinde ispat yapılır.

Teorem 4.1.3. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halkadır. $\Leftrightarrow$

$$\alpha,\beta\in(0,1],\ E_{\alpha,\beta}(A)=\left(\beta(\alpha\mu_A+1-\alpha),\ \alpha(\beta\nu_A+1-\beta)\right)$$

intuitionistic fuzzy H_v-R halkalardır.

İspat: Varsayalım ki $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halka olsun. $E_{\alpha,\beta}(A)=\left(\beta(\alpha\mu_A+1-\alpha),\ \alpha(\beta\nu_A+1-\beta)\right)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halka olduğunu gösterelim. $x,y\in R$ keyfi verilsin. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v -R olduğundan;

$$\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}\le \inf\{\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\}$$

ve

$$\begin{aligned}
\inf\{\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\}=t_0 &\Rightarrow \forall\, z\in x+y,\ t_0\le \mu_A(z)\\
&\Rightarrow \forall\, z\in x+y,\ \alpha.t_0\le \alpha.\mu_A(z)\\
&\Rightarrow \forall\, z\in x+y,\ \beta.(\alpha.t_0+1-\alpha)\le \beta.(\alpha.\mu_A(z)+1-\alpha)\\
&\Rightarrow \forall\, z\in x+y,\ \beta.(\alpha.t_0+1-\alpha)\le \inf\{\beta(\alpha\mu_A(z)+1-\alpha):\ z\in x+y\}\\
&\Rightarrow \beta.(\alpha.\inf\{\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\}+1-\alpha)\le \inf\{\beta(\alpha\mu_A(z)+1-\alpha):\ z\in x+y\}
\end{aligned}$$

buradan

$$\begin{aligned}
\beta.\left[\alpha.\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}+1-\alpha\right] &\le \beta.\left[\alpha.\inf\{\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\}+1-\alpha\right]\\
&\le \inf\{\beta(\alpha\mu_A(z)+1-\alpha):\ z\in x+y\}
\end{aligned}$$

ve

$$\beta.\left[\alpha.\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}+1-\alpha\right]\le \inf\{\beta(\alpha\mu_A(z)+1-\alpha):\ z\in x+y\}$$

olur.

$x,a\in R$ olsun. Bu durumda, $\exists z,y\in R\ \ni\ x\in(a+y)\cap(z+a)$ ve $\min\{\mu_A(a),\mu_A(x)\}\le \min\{\mu_A(y),\mu_A(z)\}$ dir.

Bu nedenle;

$$\beta.\left[\alpha.\min\{\mu_A(a),\mu_A(x)\}+1-\alpha\right]\le \beta.\left[\alpha.\min\{\mu_A(y),\mu_A(z)\}+1-\alpha\right]$$

buradan

$$\min\{\beta(\alpha\mu_A(a)+1-\alpha),\beta(\alpha\mu_A(x)+1-\alpha)\}\le \min\{\beta(\alpha\mu_A(y)+1-\alpha),\ \beta(\alpha\mu_A(z)+1-\alpha)\}$$

olur. $x,y\in R$ olsun. O zaman $\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}\le \inf\{\mu_A(z): z\in x.y\}$ olur.

Buradan,

$$\begin{aligned}\beta.\left[\alpha.\min\left\{\mu_A(x),\mu_A(y)\right\}+1-\alpha\right] &\le \beta.\left[\alpha.\inf\left\{\mu_A(z)\ :\ z\in x.y\right\}+1-\alpha\right]\\ &\le \inf\left\{\beta(\alpha\mu_A(z)+1-\alpha):\ z\in x.y\right\}\end{aligned}$$

ve

$$\beta.\left[\alpha.\min\left\{\mu_A(x),\mu_A(y)\right\}+1-\alpha\right]\le \inf\left\{\beta(\alpha\mu_A(z)+1-\alpha):\ z\in x.y\right\}$$

olur. $x,y\in R$ olsun. R H_v-halka olduğundan,

$\sup\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in x+y\right\}\le \max\left\{\nu_A(x),\nu_A(y)\right\}$ olur. Ve

$$\begin{aligned}\sup\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in x+y\right\}=t_0 &\Rightarrow \forall\, z\in x+y,\ \nu_A(z)\le t_0\\ &\Rightarrow \forall\, z\in x+y,\ \beta.\nu_A(z)\le \beta.t_0\\ &\Rightarrow \forall\, z\in x+y,\ \alpha.\left(\beta.\nu_A(z)+1-\beta\right)\le \alpha.\left(\beta.t_0+1-\beta\right)\\ &\Rightarrow \sup\left\{\alpha(\beta\nu_A(z)+1-\beta):\ z\in x+y\right\}\le \alpha.\left(\beta.\sup\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in x+y\right\}+1-\beta\right)\end{aligned}$$

buradan,

$$\begin{aligned}\sup\left\{\alpha(\beta\nu_A(z)+1-\beta):\ z\in x+y\right\} &\le \alpha.\left[\beta.\sup\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in x+y\right\}+1-\beta\right]\\ &\le \alpha.\left[\beta.\max\left\{\nu_A(x),\nu_A(y)\right\}+1-\beta\right]\end{aligned}$$

ve

$$\sup\left\{\alpha(\beta\nu_A(z)+1-\beta):\ z\in x+y\right\}\le \max\left\{\alpha(\beta\nu_A(x)+1-\beta),\alpha(\beta\nu_A(y)+1-\beta)\right\}$$

olur. $x,a\in R$ olsun. Bu durumda, $\exists z,y\in R \ni x\in(a+y)\cap(z+a)$ ve

$\max\left\{\nu_A(z),\nu_A(y)\right\}\le\max\left\{\nu_A(x),\nu_A(a)\right\}$ dir.

Buradan;

$$\max\left\{\alpha(\beta\nu_A(y)+1-\beta),\alpha(\beta\nu_A(z)+1-\beta)\right\}\le\max\left\{\alpha(\beta\nu_A(a)+1-\beta),\alpha(\beta\nu_A(x)+1-\beta)\right\}$$

olur.

$x,y\in R$ olsun. R H_v-halka olduğundan,

$\sup\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in x.y\right\}\le\max\left\{\nu_A(x),\nu_A(y)\right\}$ olur. Buradan;

$$\begin{aligned}\sup\left\{\alpha(\beta\nu_A(z)+1-\beta):\ z\in x.y\right\} &\leq \alpha.\left[\beta.\sup\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in x.y\right\}+1-\beta\right]\\ &\leq \alpha.\left[\beta.\max\left\{\nu_A(x),\nu_A(y)\right\}+1-\beta\right]\end{aligned}$$

ve

$$\sup\left\{\alpha(\beta\nu_A(z)+1-\beta):\ z\in x.y\right\}\leq \max\left\{\alpha(\beta\nu_A(x)+1-\beta),\alpha(\beta\nu_A(y)+1-\beta)\right\}$$

elde edilir.

Sonuç olarak, $E_{\alpha,\beta}(A)=\left(\beta(\alpha\mu_A+1-\alpha),\ \alpha(\beta\nu_A+1-\beta)\right)$ intuitionistic fuzzy H_ν -R halkadır.

Varsayalım ki $E_{\alpha,\beta}(A)=\left(\beta(\alpha\mu_A+1-\alpha),\ \alpha(\beta\nu_A+1-\beta)\right)$ intuitionistic fuzzy H_ν -R halka olsun. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_ν -R halka olduğunu gösterelim. $x,y\in R$ keyfi verilsin. Tanımdan,

$$\beta.\left[\alpha.\min\left\{\mu_A(x),\mu_A(y)\right\}+1-\alpha\right]\leq \inf\left\{\beta(\alpha\mu_A(z)+1-\alpha):\ z\in x+y\right\}$$

olur. Buradan;

$$\frac{1}{\alpha.\beta}.\left[\beta.\left(\alpha.\min\left\{\mu_A(x),\mu_A(y)\right\}+1-\alpha\right)-\beta(1-\alpha)\right]\leq \frac{1}{\alpha.\beta}.\left[\inf\left\{\beta(\alpha\mu_A(z)+1-\alpha):\ z\in x+y\right\}-\beta(1-\alpha)\right]$$

ve

$$\min\left\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\right\}\leq \inf\left\{\mu_A(z)\ :\ z\in x+y\right\}$$

elde edilir. $x,a\in R$ olsun. Bu durumda, $\exists z,y\in R\ \ni\ x\in(a+y)\cap(z+a)$ ve

$$\min\left\{\beta(\alpha\mu_A(a)+1-\alpha),\beta(\alpha\mu_A(x)+1-\alpha)\right\}\leq \min\left\{\beta(\alpha\mu_A(y)+1-\alpha),\beta(\alpha\mu_A(z)+1-\alpha)\right\}$$

dir.

Buradan; $\min\left\{\mu_A(a),\ \mu_A(x)\right\}\leq \min\left\{\mu_A(y),\mu_A(z)\right\}$ olur. $x,y\in R$ olsun.

$$\frac{1}{\alpha.\beta}.\left[\beta.\left(\alpha.\min\left\{\mu_A(x),\mu_A(y)\right\}+1-\alpha\right)-\beta(1-\alpha)\right]\leq \frac{1}{\alpha.\beta}.\left[\inf\left\{\beta(\alpha\mu_A(z)+1-\alpha):z\in x.y\right\}-\beta(1-\alpha)\right]$$

ve

$$\min\{\mu_A(x),\ \mu_A(y)\} \leq \inf\{\mu_A(z)\ :\ z \in x.y\}$$

olur.

$x, y \in R$ olsun. Tanımdan ,

$\sup\{\alpha(\beta\nu_A(z)+1-\beta):\ z \in x+y\} \leq \max\{\alpha(\beta\nu_A(x)+1-\beta), \alpha(\beta\nu_A(y)+1-\beta)\}$ olur.

Buradan;

$$\begin{aligned}\sup\{\nu_A(z)\ :\ z \in x+y\} &\leq \frac{1}{\alpha.\beta}.\left[\sup\{\alpha(\beta\nu_A(z)+1-\beta):\ z \in x+y\} - \alpha(1-\beta)\right]\\ &\leq \frac{1}{\alpha.\beta}.\left[\max\{\alpha(\beta\nu_A(x)+1-\beta), \alpha(\beta\nu_A(y)+1-\beta)\} - \alpha(1-\beta)\right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup\{\nu_A(z)\ :\ z \in x+y\} \leq \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$$

elde edilir. $x, a \in R$ olsun. Bu durumda, $\exists z, y \in R\ \ni\ x \in (a+y) \cap (z+a)$ ve

$\max\{\alpha(\beta\nu_A(y)+1-\beta), \alpha(\beta\nu_A(z)+1-\beta)\} \leq \max\{\alpha(\beta\nu_A(a)+1-\beta), \alpha(\beta\nu_A(x)+1-\beta)\}$ dir. Ve $\max\{\nu_A(y), \nu_A(z)\} \leq \max\{\nu_A(a),\ \nu_A(x)\}$ olur.

$x, y \in R$,

$$\begin{aligned}\sup\{\nu_A(z)\ :\ z \in x.y\} &\leq \frac{1}{\alpha.\beta}.\left[\sup\{\alpha(\beta\nu_A(z)+1-\beta):\ z \in x.y\} - \alpha(1-\beta)\right]\\ &\leq \frac{1}{\alpha.\beta}.\left[\max\{\alpha(\beta\nu_A(x)+1-\beta), \alpha(\beta\nu_A(y)+1-\beta)\} - \alpha(1-\beta)\right]\end{aligned}$$

$$\Rightarrow \sup\{\nu_A(z)\ :\ z \in x.y\} \leq \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$$

Buradan,

$$\sup\{\nu_A(z)\ :\ z \in x.y\} \leq \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$$

olur.

Teorem 4.1.4. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halkadır. $\Leftrightarrow$

$\alpha,\beta\in(0,1)$ ve $\omega\in[0,1]$, $Z^{\omega}_{\alpha,\beta}(A)=(\beta(\alpha\mu_A+\omega-\omega.\alpha),\alpha(\beta\nu_A+\omega-\omega.\beta))$

intuitionistic fuzzy H_v-R halkalardır.

İspat: Teorem 4.1.1, 4.1.2 ve 4.1.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.5. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halkadır. $\Leftrightarrow$

$\alpha,\beta\in(0,1]$ ve $\omega\in[0,1]$, $Z^{\omega,\theta}_{\alpha,\beta}(A)=(\beta(\alpha\mu_A+\omega-\omega.\alpha),\alpha(\beta\nu_A+\theta-\theta.\beta))$

intuitionistic fuzzy H_v-R halkalardır.

İspat: Teorem 4.1.1, 4.1.2 ve 4.1.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.6. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halkadır. $\Leftrightarrow$

$\alpha,\beta\in(0,1]$, $\gamma,\delta\in[0,1]$ ve $\max(\alpha,\beta)+\gamma+\delta\leq 1$,

$$\boxdot_{\alpha,\beta,\gamma,\delta}(A)=(\alpha\mu_A+\gamma,\beta\nu_A+\delta)$$

intuitionistic fuzzy H_v-R halkalardır.

İspat: Teorem 4.1.1, 4.1.2 ve 4.1.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.7. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halkadır. $\Leftrightarrow$

$\alpha\in(0,1]$, $\beta\in[0,1]$, $\alpha+\beta\in(0,1]$,

$$\boxplus_{\alpha,\beta}(A)=(\alpha\,\mu_A,\alpha\nu_A+\beta) \text{ ve } \boxtimes_{\alpha,\beta}(A)=(\alpha\mu_A+\beta,\alpha\nu_A)$$

intuitionistic fuzzy H_v-R halkalardır.

İspat: Teorem 4.1.1, 4.1.2 ve 4.1.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.8. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halkadır. $\Leftrightarrow$

$\alpha,\beta\in(0,1]$, $\gamma\in[0,1]$ ve $\max(\alpha,\beta)+\gamma\leq 1$,

$$\boxplus_{\alpha,\beta,\gamma}(A)=(\alpha\mu_A,\beta\nu_A+\gamma) \text{ ve } \boxtimes_{\alpha,\beta,\gamma}(A)=(\alpha\mu_A+\gamma,\beta\nu_A)$$

intuitionistic fuzzy H_v-R halkalardır.

İspat: Teorem 4.1.1, 4.1.2 ve 4.1.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.9. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halkadır.$\Leftrightarrow$

$$\alpha,\beta\in(0,1],\ G_{\alpha,\beta}(A)=(\alpha\mu_A,\beta\nu_A)$$

intuitionistic fuzzy H_v-R halkalardır.

İspat: Teorem 4.1.1, 4.1.2 ve 4.1.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.1.10. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_v-R halkadır.$\Leftrightarrow$ $\Diamond A$, $\Box A$ intuitionistic fuzzy H_v-R halkadır.

İspat: Teorem 4.1.1, 4.1.2 ve 4.1.3 ün ispatına benzer şekilde yapılır.

Önerme 4.1.1. R_1 , R_2 H_ν-halka ve $f:R_1\to R_2$ örten fonksiyon olsun. $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_ν-halka R_1 öyle ki μ_A ve ν_A sup özelliğine sahipse;

1) $f(U(\mu_A;t))=U(\mu_{f(A)};t)$
2) $f(L(\nu_A;t))\supseteq L(\nu_{f(A)};t)$

koşulları sağlanır.

İspat:

1) $$\begin{aligned} y\in U(\mu_{f(A)};t) &\Leftrightarrow f(\mu_A)(y)\geq t\\ &\Leftrightarrow \sup_{x\in f^{-1}(y)}\{\mu_A(x)\}\geq t\\ &\Leftrightarrow \exists x_0\in f^{-1}(y),\ \mu_A(x_0)\geq t\\ &\Leftrightarrow \exists x_0\in f^{-1}(y),\ x_0\in U(\mu_A;t)\\ &\Leftrightarrow f(x_0)=y,\ x_0\in U(\mu_A;t)\\ &\Leftrightarrow y\in f(U(\mu_A;t)) \end{aligned}$$

2) $y \in L\left(\nu_{f(A)};t\right) \Leftrightarrow f(\nu_A)\left(y\right) \leq t$

$$\Leftrightarrow \sup_{x\in f^{-1}(y)} \left\{\nu_A\left(x\right)\right\} \leq t$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in f^{-1}\left(y\right),\ \nu_A\left(x\right) \leq t$$

$$\Leftrightarrow \forall x \in f^{-1}\left(y\right),\ x \in L\left(\nu_A;t\right)$$

$$\Leftrightarrow y \in f\left(L\left(\nu_A;t\right)\right)$$

Önerme 4.1.2. R_1 , R_2 H_ν -halka ve $f: R_1 \to R_2$ örten fonksiyon olsun. $A = \left(\mu_A, \nu_A\right)$ intuitionistic fuzzy H_ν -halka R_1 öyle ki μ_A sup ve ν_A inf özelliğine sahipse;

1) $f\left(U\left(\nu_A;t\right)\right) \supseteq U\left(\nu_{f(A)};t\right)$
2) $f\left(U\left(\mu_A;t\right)\right) \supseteq U\left(\mu_{f(A)};t\right)$
3) $f\left(L\left(\nu_A;t\right)\right) \supseteq L\left(\nu_{f(A)};t\right)$
4) $f\left(L\left(\mu_A;t\right)\right) \supseteq L\left(\mu_{f(A)};t\right)$

koşulları sağlanır.

İspat:

1) $y \in U\left(\nu_{f(A)};t\right) \Rightarrow \nu_{f(A)}\left(y\right) \geq t$

$$\Rightarrow \inf_{x\in f^{-1}(y)} \left\{\nu_A\left(x\right)\right\} \geq t$$

$$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}\left(y\right),\ \nu_A\left(x\right) \geq t$$

$$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}\left(y\right),\ x \in U\left(\nu_A;t\right)$$

$$\Rightarrow y \in f\left(U\left(\nu_A;t\right)\right)$$

2) $y \in U\left(\mu_{f(A)};t\right) \Rightarrow \mu_{f(A)}\left(y\right) \geq t$

$$\Rightarrow \sup_{x\in f^{-1}(y)} \left\{\mu_A\left(x\right)\right\} \geq t$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}\left(y\right),\ \mu_A\left(x_0\right) \geq t$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}\left(y\right),\ x_0 \in U\left(\mu_A;t\right)$$

$$\Rightarrow f\left(x_0\right) = y,\ x_0 \in U\left(\mu_A;t\right)$$

$$\Rightarrow y \in f\left(U\left(\mu_A;t\right)\right)$$

3) $y \in L(\nu_{f(A)};t) \Rightarrow \nu_{f(A)}(y) \le t$

$$\Rightarrow \inf_{x \in f^{-1}(y)} \{\nu_A(x)\} \le t$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(y),\ \nu_A(x_0) \le t$$

$$\Rightarrow \exists x_0 \in f^{-1}(y),\ x_0 \in L(\nu_A;t)$$

$$\Rightarrow f(x_0) = y,\ y \in f(L(\nu_A;t))$$

4) $y \in L(\mu_{f(A)};t) \Rightarrow \mu_{f(A)}(y) \le t$

$$\Rightarrow \sup_{x \in f^{-1}(y)} \{\mu_A(x)\} \le t$$

$$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y),\ \mu_A(x) \le t$$

$$\Rightarrow \forall x \in f^{-1}(y),\ x \in L(\mu_A;t)$$

$$\Rightarrow y \in f(L(\mu_A;t))$$

Önerme 4.1.3. $A = (\mu_A, \nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_ν-halka ise

$\forall x \in R,\ \mu_A(x) = \sup\{\alpha \in [0,1] : x \in U(\mu_A;\alpha)\},\ \nu_A(x) = \inf\{\alpha \in [0,1] : x \in L(\nu_A;\alpha)\}$ olur.

İspat: $\delta = \sup\{\alpha \in [0,1] :\ x \in U(\mu_A;\alpha)\}$ ve $\varepsilon > 0$ verilsin. Bu durumda,

$$\exists \alpha \in [0,1] \ni x \in U(\mu_A;\alpha),\ \delta - \varepsilon < \alpha \Rightarrow \delta - \varepsilon < \mu_A(x) \Rightarrow \delta \le \mu_A(x)$$

olur. Şimdi $\mu_A(x) \le \delta$ olduğunu gösterelim. $\mu_A(x) = \beta$ olsun.

$$\mu_A(x) = \beta \Rightarrow x \in U(\mu_A;\beta)$$

$$\Rightarrow \beta \in \{\alpha \in [0,1] :\ x \in U(\mu_A;\alpha)\}$$

$$\Rightarrow \mu_A(x) = \beta \le \sup\{\alpha \in [0,1] :\ x \in U(\mu_A;\alpha)\} = \delta$$

Böylece , $\mu_A(x) = \delta = \sup\{\alpha \in [0,1] :\ x \in U(\mu_A;\alpha)\}$ olur.

$\gamma = \inf\{\alpha \in [0,1] :\ x \in L(\nu_A;\alpha)\}$ olsun. O zaman,

$\forall \varepsilon > 0,\ \inf\{\alpha \in [0,1] :\ x \in L(\nu_A;\alpha)\} < \gamma + \varepsilon \Rightarrow \exists \alpha \in [0,1],\ \alpha < \gamma + \varepsilon,\ x \in L(\nu_A;\alpha)$

$\Rightarrow \nu_A(x) \leq \alpha \Rightarrow \nu_A(x) \leq \gamma$

Şimdi $\nu_A(x) \geq \gamma$ olduğunu gösterelim. $\nu_A(x) = \eta$ olsun.

$$\nu_A(x) = \eta \Rightarrow x \in L(\nu_A;\eta) \Rightarrow \eta \in \inf\{\alpha \in [0,1]:\ x \in L(\nu_A;\alpha)\}$$
$$\Rightarrow \inf\{\alpha \in [0,1]:\ x \in L(\nu_A;\alpha)\} \leq \nu_A(x) = \eta$$

Böylece , $\nu_A(x) = \inf\{\alpha \in [0,1]:\ x \in L(\nu_A;\alpha)\}$ olur.

Önerme 4.1.4. $A = (\mu_A, \nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_ν - halka ise

$$R^W = \{x \in R: \mu_A(x) \geq \mu(w)\},\quad L^W = \{x \in R: \vartheta(x) \leq \vartheta(w)\}$$

kümeleri R nin H_ν -althalkasıdır.

İspat: $x, y \in R^w$ keyfi verilsin.

$x, y \in R^w \Rightarrow \mu_A(x) \geq \mu_A(w),\ \mu_A(y) \geq \mu_A(w)$

$$\Rightarrow \inf\{\mu_A(z)\ :\ z \in x+y\} \geq \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\}$$
$$\geq \min\{\mu_A(w), \mu_A(w)\} = \mu_A(w)$$

$\Rightarrow x+y \subseteq R^w \Rightarrow x+y \in P^*(R^w)$.

Benzer şekilde, $x.y \in P^*(R^w)$ olur. Buradan,

$$\forall a \in R^w,\ a + R^w \subseteq R^w \text{ ve } R^w + a \subseteq R^w$$

olur. $x \in R^w$ olsun.

$$x \in R^w \Rightarrow \exists y, z \in R \ni x \in (a+y) \cap (z+a),$$
$$\min\{\mu_A(x), \mu_A(a)\} \leq \min\{\mu_A(z), \mu_A(y)\}$$
$$a, x \in R^w \Rightarrow \mu_A(w) = \min\{\mu_A(w), \mu_A(w)\} \leq \min\{\mu_A(x), \mu_A(a)\} \Rightarrow$$
$$\Rightarrow \mu_A(w) \leq \min\{\mu_A(y), \mu_A(z)\}$$

$\Rightarrow y \in R^w,\ z \in R^w$

Böylece, $R^w \subseteq a+R^w$, $R^w \subseteq R^w + a$ olur. $(R,+,\cdot)$ H_ν-halka ve $R^w \subseteq R$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\forall x,y,z\in R^w,\\
&((x+y)+z)\cap(x+(y+z))\neq\varnothing\\
&((x+y)\cdot z)\cap(x\cdot z+y\cdot z)\neq\varnothing\\
&(x\cdot(y+z))\cap(x\cdot y+x\cdot z)\neq\varnothing\\
&((x\cdot y)\cdot z)\cap(x\cdot(y\cdot z))\neq\varnothing
\end{aligned}$$

Böylece R^w, R nin H_ν-alt halkasıdır. $x,y\in L^w$ keyfi verilsin.

$$x,y\in L^w \Rightarrow \nu_A(x)\le\nu_A(w),\nu_A(y)\le\nu_A(w)$$

$$\begin{aligned}
\Rightarrow \sup\{\nu_A(z)\ :\ z\in x+y\} &\le \max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\}\\
&\le \max\{\nu_A(w),\nu_A(w)\}=\nu_A(w)
\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x+y\subseteq L^w$$

Benzer şekilde, $x\cdot y\subseteq L^w$ olur. Buradan,

$$\forall a\in R,\ a+L^w\subseteq L^w \text{ ve } L^w+a\subseteq L^w$$

olur. $x\in L^w$ olsun.

$$x\in L^w \Rightarrow \exists y,z\in R \ni x\in(a+y)\cap(z+a), \max\{\nu_A(y),\nu_A(z)\}\le\max\{\nu_A(a),\nu_A(x)\}$$
$$x\in L^w \Rightarrow \max\{\nu_A(y),\nu_A(z)\}\le\max\{\nu_A(x),\nu_A(a)\}\le\nu_A(w)\Rightarrow y\in L^w,\ z\in L^w$$

Böylece, $L^w \subseteq a+L^w$, $L^w\subseteq L^w+a$ olur. $(R,+,\cdot)$ H_ν-halka ve $L^w\subseteq R$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\forall x,y,z\in L^w,\\
&((x+y)+z)\cap(x+(y+z))\neq\varnothing\\
&((x+y)\cdot z)\cap(x\cdot z+y\cdot z)\neq\varnothing\\
&(x\cdot(y+z))\cap(x\cdot y+x\cdot z)\neq\varnothing\\
&((x\cdot y)\cdot z)\cap(x\cdot(y\cdot z))\neq\varnothing
\end{aligned}$$

Böylece L^{w}, R nin H_{ν}-althalkasıdır.

Teorem 4.1.11. $(R,+,\cdot)$ dual H_{ν} -halka olsun. $A=(\mu_A,\nu_A)$ **,** R nin intuitionistic fuzzy kümesi öyle ki boştan farklı her $U(\mu_A;t)$ ve $L(\nu_A;t)$ kümeleri dual H_{ν}-halkalar ise $A=(\mu_A,\nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_{ν} -R halkadır.

İspat: Varsayalım ki boştan farklı $U(\mu_A;t)$ ve $L(\nu_A;t)$ kümeleri dual H_{ν} -halkalar olsun. $\forall x,y\in R,\ t_0=\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\},\ t_1=\max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\}$ olsun. Buradan $x,y\in U(\mu_A;t_0)$ ve $x,y\in L(\nu_A;t_1)$ olur.

$$\begin{aligned}&x,y\in U(\mu_A;t_0),\ x,y\in L(\nu_A;t_1)\Rightarrow x+y\subseteq U(\mu_A;t_0),\ x+y\subseteq L(\nu_A;t_1)\\&x+y\subseteq U(\mu_A;t_0),\ x+y\subseteq L(\nu_A;t_1)\Rightarrow \forall z\in x+y,\ \mu_A(z)\geq t_0,\nu_A(z)\leq t_1\end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned}&\min\{\mu_A(x),\mu_A(y)\}\leq\inf\{\mu_A(z):z\in x+y\}\\&\sup\{\nu_A(z):z\in x+y\}\leq\max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\}\end{aligned}$$

koşuları sağlanır. $\forall x,a\in R,\ t_2=\min\{\mu_A(a),\mu_A(x)\}$ olsun. Buradan,

$x,a\in U(\mu_A;t_2)$ olur.

$$\begin{aligned}x,a\in U(\mu_A;t_2)&\Rightarrow\exists z_1,y_1\in U(\mu_A;t_2)\ \ni\ x\in(a+y_1)\ \text{ve}\ x\in(z_1+a)\\&\Rightarrow t_2\leq\min\{\mu_A(y_1),\mu_A(z_1)\}\end{aligned}$$

Böylece ,

$$\begin{aligned}&\forall x,a\in R\ ,\ \exists z,y\in R\ \ni\ x\in(a+y)\cap(z+a)\\&\min\{\mu_A(a),\mu_A(x)\}\leq\min\{\mu_A(y),\mu_A(z)\}\end{aligned}$$

koşulu sağlanır.

. $\forall x, a \in R,\ t_3 = \max\{\nu_A(x), \nu_A(a)\}$ olsun. Buradan, $x, a \in L(\nu_A; t_3)$ olur.

$$\begin{aligned} x, a \in L(\nu_A; t_3) &\Rightarrow \exists z_2, y_2 \in L(\nu_A; t_3) \ni x \in (a + y_2) \text{ ve } x \in (z_2 + a) \\ &\Rightarrow \max\{\nu_A(y_2), \nu_A(z_2)\} \le t_3 \end{aligned}$$

Böylece ,

$$\begin{aligned} &\forall x, a \in R\ ,\ \exists z, y \in R \ni x \in (a + y) \cap (z + a) \\ &\max\{\nu_A(z), \nu_A(y)\} \le \max\{\nu_A(x), \nu_A(a)\} \end{aligned}$$

koşulu sağlanır.

$\forall x, y \in R,\ t_4 = \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\},\ t_5 = \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\}$ olsun.

Buradan $x, y \in U(\mu_A; t_4)$ ve $x, y \in L(\nu_A; t_5)$ olur.

$$\begin{aligned} &x, y \in U(\mu_A; t_4),\ x, y \in L(\nu_A; t_5) \Rightarrow x.y \subseteq U(\mu_A; t_4),\ x.y \subseteq L(\nu_A; t_5) \\ &x + y \subseteq U(\mu_A; t_4),\ x + y \subseteq L(\nu_A; t_5) \Rightarrow \forall z \in x + y,\ \mu_A(z) \ge t_4, \nu_A(z) \le t_5 \end{aligned}$$

Böylece,

$$\begin{aligned} &\min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \le \inf\{\mu_A(z) : z \in x.y\} \\ &\sup\{\nu_A(z) : z \in x.y\} \le \max\{\nu_A(x), \nu_A(y)\} \end{aligned}$$

koşulları sağlanır.

Teorem 4.1.12. $A = (\mu_A, \nu_A)$ intuitionistic fuzzy H_ν -R halka ise $\forall t \in \mathrm{Im}(\mu_A) \cap \mathrm{Im}(\nu_A)$, $U(\mu_A; t)$ ve $L(\nu_A; t)$ kümeleri H_ν-halkalardır.

İspat: $t \in \mathrm{Im}(\mu_A) \cap \mathrm{Im}(\nu_A) \subseteq [0,1]$ ve $x, y \in U(\mu_A; t)$ keyfi verilsin.

$$x, y \in U(\mu_A; t) \Rightarrow \mu_A(x) \ge t,\ \mu_A(y) \ge t$$

$$\Rightarrow \inf\{\mu_A(z) \ :\ z \in x + y\} \ge \min\{\mu_A(x), \mu_A(y)\} \ge t$$

$$\Rightarrow x + y \subseteq U(\mu_A; t).$$

Benzer şekilde, $x.y \in U(\mu_A;t)$ olur. Buradan,

$$\forall a \in U(\mu_A;t),\ a + U(\mu_A;t) \subseteq U(\mu_A;t) \text{ ve } U(\mu_A;t) + a \subseteq U(\mu_A;t)$$

olur. $x \in U(\mu_A;t)$ keyfi verilsin.

$$x \in U(\mu_A;t) \Rightarrow \exists y,z \in R \ni x \in (a+y) \cap (z+a),$$
$$\min\{\mu_A(x),\mu_A(a)\} \le \min\{\mu_A(z),\mu_A(y)\}$$

$$a,x \in U(\mu_A;t) \Rightarrow t \le \min\{\mu_A(x),\mu_A(a)\} \Rightarrow t \le \min\{\mu_A(y),\mu_A(z)\}$$
$$\Rightarrow y \in U(\mu_A;t),\ z \in U(\mu_A;t)$$

Böylece, $U(\mu_A;t) \subseteq a + U(\mu_A;t)$, $U(\mu_A;t) \subseteq U(\mu_A;t) + a$ elde edilir.

Böylece $U(\mu_A;t)$, R nin H_ν-althalkasıdır. $x, y \in L(\nu_A;t)$ keyfi verilsin.

$$x,y \in L(\nu_A;t) \Rightarrow \nu_A(x) \le t, \nu_A(y) \le t$$

$$\Rightarrow \sup\{\nu_A(z) \,:\, z \in x+y\} \le \max\{\nu_A(x),\nu_A(y)\} \le t$$

$$\Rightarrow x + y \subseteq L(\nu_A;t)$$

Benzer şekilde, $x \cdot y \subseteq L(\nu_A;t)$ olur. Buradan,

$$\forall a \in R,\ a + L(\nu_A;t) \subseteq L(\nu_A;t) \text{ ve } L(\nu_A;t) + a \subseteq L(\nu_A;t)$$

olur. $x \in L(\nu_A;t)$ olsun.

$$x \in L(\nu_A;t) \Rightarrow \exists y,z \in R \ni x \in (a+y) \cap (z+a),$$
$$\max\{\nu_A(y),\nu_A(z)\} \le \max\{\nu_A(a),\nu_A(x)\}$$
$$a,x \in L(\nu_A;t) \Rightarrow \max\{\nu_A(y),\nu_A(z)\} \le \max\{\nu_A(x),\nu_A(a)\} \le t$$
$$\Rightarrow y \in L(\nu_A;t),\ z \in L(\nu_A;t)$$

Böylece, $L(\nu_A;t) \subseteq a + L(\nu_A;t)$, $L(\nu_A;t) \subseteq L(\nu_A;t) + a$ olur. $(R,+,\cdot)$ H_ν-halka ve $L(\nu_A;t) \subseteq R$ olduğundan,

$$\begin{aligned}
&\forall x, y, z \in L(\nu_A;t),\\
&((x+y)+z) \cap (x+(y+z)) \neq \emptyset\\
&((x+y)\cdot z) \cap (x\cdot z + y\cdot z) \neq \emptyset\\
&(x\cdot(y+z)) \cap (x\cdot y + x\cdot z) \neq \emptyset\\
&((x\cdot y)\cdot z) \cap (x\cdot(y\cdot z)) \neq \emptyset
\end{aligned}$$

Böylece $L(\nu_A;t)$, R nin H_ν-althalkasıdır.

4.2. T-INTUITIONISTIC FUZZY H_ν-HALKALAR

Bu kısımda T- intuitionistic fuzzy H_ν halka tanımı verilecek. Ve T- intuitionistic fuzzy H_ν halkasının yapısı ve cebirsel özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.2.1. R H_ν-halka ve $A=(\mu_A,\nu_A)$ R nin intuitionistic fuzzy kümesi olsun. $A=(\mu_A,\nu_A)$ T- intuitionistic fuzzy H_ν-R halka denir: $\Leftrightarrow$

1) $T(\mu(x),\mu(y)) \leq \inf\{\mu(z) : z \in x+y\}$
2) $\sup\{\vartheta(z): z \in x+y\} \leq 1-T(1-\vartheta(x),\ 1-\vartheta(y))$
3) $\forall x,a \in R,\ \exists y,z \in R \ni x \in (a+y)\cap(z+a),$

$$T(\mu(x),\mu(a)) \leq T(\mu(y),\mu(z))$$

4) $T(\mu(x),\mu(y)) \leq \inf\{\mu(z) : z \in x.y\}$
5) $\sup\{\vartheta(z): z \in x.y\} \leq 1-T(1-\vartheta(x),\ 1-\vartheta(y))$
6) $\forall x,a \in R,\ \exists y,z \in R \ni x \in (a+y)\cap(z+a),$

$$T(1-\vartheta(x),1-\vartheta(a)) \leq T(1-\vartheta(z),1-\vartheta(y))$$

Önerme 4.2.1. $A=(\mu_A,\nu_A)$ T- intuitionistic fuzzy H_ν-R halka ve μ_A, $1-\nu_A$ idempotent özelliğine sahip olsun. Bu takdirde;

$$R^W=\{x \in R: \mu_A(x) \geq \mu(w)\},\quad L^W=\{x \in R: \vartheta(x) \leq \vartheta(w)\}$$

kümeleri R nin H_ν-althalkasıdır.

İspat: $x,y \in R^w$ keyfi verilsin.

$$x,y \in R^w \Rightarrow \mu_A(x) \geq \mu_A(w),\ \mu_A(y) \geq \mu_A(w)$$

$$\begin{aligned}\inf\{\mu_A(z) : z \in x+y\} &\geq T(\mu_A(x),\mu_A(y))\\ &\geq T(\mu_A(x),\mu_A(w))\\ &\geq T(\mu_A(w),\mu_A(w)) = \mu_A(w)\end{aligned}$$

$$\Rightarrow x+y \subseteq R^w \Rightarrow x+y \in P^*(R^w).$$

Benzer şekilde, $x.y \in P^*(R^w)$ olur. Buradan,

$$\forall a \in R^w,\ a+R^w \subseteq R^w \text{ ve } R^w + a \subseteq R^w$$

olur. $x \in R^w$ olsun.

$$\begin{aligned}&x \in R^w \Rightarrow \exists y,z \in R \ni x \in (a+y)\cap(z+a) \Rightarrow T(\mu_A(a),\mu_A(x)) \leq T(\mu_A(y),\mu_A(z))\\ &a,x \in R^w \Rightarrow \mu_A(w) = T(\mu_A(w),\mu_A(w)) \leq T(\mu_A(a),\mu_A(x))\\ &\Rightarrow \mu_A(w) \leq T(\mu_A(y),\mu_A(z)) \leq \min\{\mu_A(y),\mu_A(z)\}\end{aligned}$$

$$\Rightarrow y \in R^w,\ z \in R^w$$

Böylece, $R^w \subseteq a+R^w$, $R^w \subseteq R^w + a$ olur. $(R,+,\cdot)$ H_ν-halka ve $R^w \subseteq R$ olduğundan,

$$\begin{aligned}&\forall x,y,z \in R^w,\\ &((x+y)+z)\cap(x+(y+z)) \neq \varnothing\\ &((x+y)\cdot z)\cap(x\cdot z + y\cdot z) \neq \varnothing\\ &(x\cdot(y+z))\cap(x\cdot y + x\cdot z) \neq \varnothing\\ &((x\cdot y)\cdot z)\cap(x\cdot(y\cdot z)) \neq \varnothing\end{aligned}$$

Böylece R^w, R nin H_ν-althalkasıdır. $x,y \in L^w$ keyfi verilsin.

$$x,y \in L^w \Rightarrow \nu_A(x) \leq \nu_A(w), \nu_A(y) \leq \nu_A(w)$$

$$\begin{aligned}\sup\{\vartheta_A(z) : z \in x+y\} &\leq 1 - T(1-\vartheta_A(x), 1-\vartheta_A(y))\\ &\leq 1 - T(1-\vartheta_A(w), 1-\vartheta_A(w)) = \vartheta_A(w)\end{aligned}$$

$\Rightarrow x+y \subseteq L^w$

Benzer şekilde, $x \cdot y \subseteq L^w$ olur. Buradan,

$$\forall a \in R,\ a+L^w \subseteq L^w \text{ ve } L^w + a \subseteq L^w$$

olur. $x \in L^w$ olsun.

$$x \in L^w \Rightarrow \exists y,z \in R \ni x \in (a+y) \cap (z+a),$$
$$T(1-\nu_A(a), 1-\nu_A(x)) \leq T(1-\nu_A(y), 1-\nu_A(z))$$
$$x \in L^w \Rightarrow 1-\nu_A(w) = T(1-\nu_A(w), 1-\nu_A(w)) \leq T(1-\nu_A(w), 1-\nu_A(x))$$
$T(1-\nu_A(w), 1-\nu_A(x)) \leq T(1-\nu_A(a), 1-\nu_A(x))$ olduğundan,

$1-\nu_A(w) \leq T(1-\nu_A(y), 1-\nu_A(z)) \leq \min\{1-\nu_A(y), 1-\nu_A(z)\}$ olur.

O zaman, $y \in L^w$, $z \in L^w$ olur.

Böylece, $L^w \subseteq a+L^w$, $L^w \subseteq L^w + a$ olur. $(R,+,\cdot)$ H_ν-halka ve $L^w \subseteq R$ olduğundan,

$$\forall x,y,z \in L^w,$$
$$((x+y)+z) \cap (x+(y+z)) \neq \varnothing$$
$$((x+y)\cdot z) \cap (x\cdot z + y \cdot z) \neq \varnothing$$
$$(x\cdot(y+z)) \cap (x\cdot y + x\cdot z) \neq \varnothing$$
$$((x\cdot y)\cdot z) \cap (x\cdot(y\cdot z)) \neq \varnothing$$

Böylece L^w, R nin H_ν-althalkasıdır.

Önerme 4.2.2. R H_ν-halka, $\varnothing \neq H \subseteq R$ ve μ,ν fuzzy kümeleri;

$$\mu\ x = \begin{cases} \alpha_0 & , x \in H \\ \alpha_1 & , \text{d.d} \end{cases} \qquad \nu\ x = \begin{cases} \beta_0 & , x \in H \\ \beta_1 & , \text{d.d} \end{cases}$$

$0 \leq \alpha_1 < \alpha_0$, $0 \leq \beta_0 < \beta_1$ ve $\alpha_i + \beta_i \leq 1$ for $i = 0,1$

şeklinde tanımlansın. Bu takdirde;

$A=(\mu,\nu)$ T- intuitionistic fuzzy H_ν -R halkadır. $\Leftrightarrow$ H, R nin H_ν -althalkasıdır.

İspat: Varsayalım ki $A=(\mu,\nu)$ intuitionistic fuzzy H_ν -R halka olsun. $x,y\in H$ keyfi verilsin.

$$x,y\in H\Rightarrow \inf\{\mu(z)\ :\ z\in x+y\}\geq T(\mu(x),\mu(y))=T(\alpha_0,\alpha_0)$$

$$\Rightarrow x+y\subseteq H$$

Benzer şekilde, $x.y\subseteq H$ olur. Buradan,

$$\forall a\in H,\ a+H\subseteq H \text{ ve } H+a\subseteq H$$

olur. $x\in H$ olsun.

$$x\in H\Rightarrow \exists y,z\in R \ni x\in(a+y)\cap(z+a)\Rightarrow T(\mu(a),\mu(x))\leq T(\mu(y),\mu(z))$$
$$a,x\in H\Rightarrow \alpha_0=T(\mu(a),\mu(x))\leq T(\mu(y),\mu(z))\leq \min\{\mu(y),\mu(z)\}\Rightarrow y\in H,\ z\in H$$

Böylece, $H\subseteq a+H$, $H\subseteq H+a$ olur. $(R,+,\cdot)$ H_ν-halka ve $H\subseteq R$ olduğundan,

$$\forall x,y,z\in H,$$
$$((x+y)+z)\cap(x+(y+z))\neq\varnothing$$
$$((x+y)\cdot z)\cap(x\cdot z+y\cdot z)\neq\varnothing$$
$$(x\cdot(y+z))\cap(x\cdot y+x\cdot z)\neq\varnothing$$
$$((x\cdot y)\cdot z)\cap(x\cdot(y\cdot z))\neq\varnothing$$

Böylece H, R nin H_ν-althalkasıdır. $x,y\in R$ keyfi verilsin.

$x\in R\setminus H$ veya $y\in R\setminus H$ ise $\mu(x)=\alpha_1$ veya $\mu(y)=\alpha_1$ olur.

$$\Rightarrow \inf\{\mu(z)\ :\ z\in x+y\}\geq \min\{\mu(x),\mu(y)\}=\alpha_1\geq T(\mu(x),\mu(y))$$
$$x,y\in H\Rightarrow x+y\subseteq H$$
$$\Rightarrow \inf\{\mu(z)\ :\ z\in x+y\}\geq \min\{\mu(x),\mu(y)\}=\alpha_0\geq T(\mu(x),\mu(y))$$

Böylece tanım 4.2.1 in 1) koşulu sağlanır.

$x,y\in R$ keyfi verilsin. $x\in R\setminus H$ veya $y\in R\setminus H$ ise $\nu(x)=\beta_1$ veya $\nu(y)=\beta_1$ olur.

$$\begin{aligned}\sup\{\nu(z) \,:\, z\in x+y\} \le \beta_1 = \max\{\nu(x),\nu(y)\} &= 1-\min\{1-\nu(x),1-\nu(y)\}\\ &\le 1-T(1-\nu(x),1-\nu(y))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x,y\in H \Rightarrow x+y\subseteq H \Rightarrow \sup\{\nu(z) \,:\, z\in x+y\} \le \beta_0 &= \max\{\nu(x),\nu(y)\}\\ &\le 1-T(1-\nu(x),1-\nu(y))\end{aligned}$$

Böylece tanım 4.2.1 in 2) koşulu sağlanır. $x,y\in R$ keyfi verilsin.

$x\in R\setminus H$ veya $y\in R\setminus H$ ise $\mu(x)=\alpha_1$ veya $\mu(y)=\alpha_1$ olur.

$$\Rightarrow \inf\{\mu(z) \,:\, z\in x.y\} \ge \min\{\mu(x),\mu(y)\} = \alpha_1 \ge T(\mu(x),\mu(y))$$
$$x,y\in H \Rightarrow x+y\subseteq H$$
$$\Rightarrow \inf\{\mu(z) \,:\, z\in x.y\} \ge \min\{\mu(x),\mu(y)\} = \alpha_0 \ge T(\mu(x),\mu(y))$$

Böylece tanım 4.2.1 in 4) koşulu sağlanır.

$x,y\in R$ keyfi verilsin. $x\in R\setminus H$ veya $y\in R\setminus H$ ise $\nu(x)=\beta_1$ veya $\nu(y)=\beta_1$ olur.

$$\begin{aligned}\sup\{\nu(z) \,:\, z\in x.y\} \le \beta_1 = \max\{\nu(x),\nu(y)\} &= 1-\min\{1-\nu(x),1-\nu(y)\}\\ &\le 1-T(1-\nu(x),1-\nu(y))\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}x,y\in H \Rightarrow x+y\subseteq H \Rightarrow \sup\{\nu(z) \,:\, z\in x.y\} \le \beta_0 &= \max\{\nu(x),\nu(y)\}\\ &\le 1-T(1-\nu(x),1-\nu(y))\end{aligned}$$

Böylece tanım 4.2.1 in 5) koşulu sağlanır.

$x,a\in R$ keyfi verilsin. R , H_v-halka olduğundan; $\exists y,z\in R \ni x\in(a+y)\cap(z+a)$ dir.

$x\in R\setminus H$ veya $a\in R\setminus H$ ise $\mu(x)=\alpha_1$ veya $\mu(a)=\alpha_1$ olur. Buradan,

$\mu(x)\le\mu(y),\ \mu(a)\le\mu(z)$ olur.

$$\mu(x)\le\mu(y),\ \mu(a)\le\mu(z) \Rightarrow T(\mu(a),\mu(x)) \le T(\mu(y),\mu(z))$$

Varsayalım ki $x, a \in H$ olsun. H, H_ν -althalka olduğundan

$\exists y, z \in R \ni x \in (a+y) \cap (z+a)$ dır. O zaman, $\mu(x) = \mu(y) = \mu(a) = \mu(z) = \alpha_0$ olur.

$$\mu(x) = \mu(y) = \mu(a) = \mu(z) = \alpha_0 \Rightarrow T(\mu(a), \mu(x)) \le T(\mu(y), \mu(z))$$

Benzer şekilde, $\forall x, a \in R$,

$\exists y, z \in R \ni x \in (a+y) \cap (z+a)$, $T(1-\nu(a), 1-\nu(x)) \le T(1-\nu(y), 1-\nu(z))$

olur.

Sonuç olarak, $A = (\mu, \nu)$ T- intuitionistic fuzzy H_ν -R halkadır.

Teorem 4.2.1. T sürekli t-norm ve $A = (\mu_A, \nu_A)$ T- intuitionistic fuzzy H_ν -R halka olsun. R/γ_R^* hiper halka olarak alınırsa; $A \setminus \gamma_R^* = \left(\mu_{\gamma_R^*}, \nu_{\gamma_R^*}\right)$, R/γ_R^* da T-intuitionistic H_ν -althalka olur.

İspat. $\gamma_R^*(x), \gamma_R^*(y) \in R \setminus \gamma_R^*$ keyfi verilsin.

$$\begin{aligned}
T\left(\mu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(x)\right), \mu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(y)\right)\right) &= T\left(\sup_{a \in \gamma_R^*(x)}\{\mu_A(a)\} \ , \ \sup_{b \in \gamma_R^*(y)}\{\mu_A(b)\}\right) \\
&= \sup_{b \in \gamma_R^*(y), a \in \gamma_R^*(x)} \left\{T\left(\mu_A(a), \mu_A(b)\right)\right\} \\
&\le \sup_{b \in \gamma_R^*(y), a \in \gamma_R^*(x)} \left\{\inf\{\mu_A(z) \ : \ z \in a+b\}\right\} \\
&\le \sup_{b \in \gamma_R^*(y), a \in \gamma_R^*(x)} \left\{\sup\{\mu_A(z) \ : \ z \in a+b\}\right\} \\
&\le \sup_{b \in \gamma_R^*(y), a \in \gamma_R^*(x)} \left\{\sup\{\mu_A(z) \ : \ z \in \gamma_R^*(a+b)\}\right\} \\
&= \sup_{b \in \gamma_R^*(y), a \in \gamma_R^*(x)} \left\{\mu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a+b)\right)\right\} \\
&= \mu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a+b)\right) = \mu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a) \oplus \gamma_R^*(b)\right)
\end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
T\left(1-\nu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(x)\right),1-\nu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(y)\right)\right) &= T\left(1-\inf_{a\in\gamma_R^*(x)}\left\{\nu_A(a)\right\},1-\inf_{b\in\gamma_R^*(y)}\left\{\nu_A(b)\right\}\right)\\
&= T\left(\sup_{a\in\gamma_R^*(x)}\left\{1-\nu_A(a)\right\}\ ,\ \sup_{b\in\gamma_R^*(y)}\left\{1-\nu_A(b)\right\}\right)\\
&= \sup_{b\in\gamma_R^*(y),a\in\gamma_R^*(x)}\left\{T\left(1-\nu_A(a),1-\nu_A(b)\right)\right\}\\
&\le \sup_{b\in\gamma_R^*(y),a\in\gamma_R^*(x)}\left\{1-\sup\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in a+b\right\}\right\}\\
&\le \sup_{b\in\gamma_R^*(y),a\in\gamma_R^*(x)}\left\{1-\inf\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in a+b\right\}\right\}\\
&\le \sup_{b\in\gamma_R^*(y),a\in\gamma_R^*(x)}\left\{1-\inf\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in \gamma_R^*(a+b)\right\}\right\}\\
&= \sup_{b\in\gamma_R^*(y),a\in\gamma_R^*(x)}\left\{1-\nu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a+b)\right)\right\}\\
&=1-\nu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a+b)\right)\\
&=1-\nu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a)\oplus\gamma_R^*(b)\right)
\end{aligned}
$$

$\gamma_R^*(x),\gamma_R^*(a)\in R\setminus\gamma_R^*$ keyfi verilsin. $A=(\mu_A,\nu_A)$ T- intuitionistic fuzzy H_ν - R halka olduğundan,

$$
\begin{gathered}
\forall r\in\gamma_R^*(a),s\in\gamma_R^*(x),\ \exists y_{r,s},\ z_{r,s}\in R \ni r\in\left(s+y_{r,s}\right)\cap\left(z_{r,s}+s\right)\\
T\left(\mu_A(r),\mu_A(s)\right)\le T\left(\mu_A\left(y_{r,s}\right),\mu_A\left(z_{r,s}\right)\right)
\end{gathered}
$$

olur.

$$
\begin{aligned}
&r\in\left(s+y_{r,s}\right)\cap\left(z_{r,s}+s\right)\Rightarrow\gamma_R^*(s)\oplus\gamma_R^*\left(y_{r,s}\right)=\gamma_R^*(r)\ ,\ \gamma_R^*\left(z_{r,s}\right)\oplus\gamma_R^*(s)=\gamma_R^*(r)\\
&\Rightarrow\gamma_R^*(x)\oplus\gamma_R^*\left(y_{r,s}\right)=\gamma_R^*(a)\ ,\ \gamma_R^*\left(z_{r,s}\right)\oplus\gamma_R^*(x)=\gamma_R^*(a)
\end{aligned}
$$

$$
r_1\in\gamma_R^*(a),s_1\in\gamma_R^*(x)\Rightarrow\exists y_{r_1,s_1},z_{r_1,s_1}\in R \ni \gamma_R^*(s_1)\oplus\gamma_R^*\left(y_{r_1,s_1}\right)=\gamma_R^*(r_1)
$$

Ve $\gamma_R^*(r_1)=\gamma_R^*(r)$ olduğundan, $\gamma_R^*(s_1)\oplus\gamma_R^*\left(y_{r_1,s_1}\right)=\gamma_R^*(s)\oplus\gamma_R^*\left(y_{r,s}\right)$ elde edilir.

Böylece $\gamma_R^*\left(y_{r,s}\right)=\gamma_R^*\left(y_{r_1,s_1}\right)$ olur. Benzer şekilde, $\gamma_R^*\left(z_{r,s}\right)=\gamma_R^*\left(z_{r_1,s_1}\right)$ olur.

Bu durumda; $\forall y_{r,s}, z_{r,s}$, $T(\mu_A(r), \mu_A(s)) \leq T(\mu_A(y_{r,s}), \mu_A(z_{r,s}))$ ifadesi sağlanır.

Ve $y_{r,s}, z_{r,s}$ aynı denklik sınıfın elemanları olur. Ve

$$\begin{aligned}
T\left(\mu_{\gamma_R^*}(\gamma_R^*(x)), \mu_{\gamma_R^*}(\gamma_R^*(a))\right) &= T\left(\sup_{r\in\gamma_R^*(a)}\{\mu_A(r)\}\ ,\ \sup_{s\in\gamma_R^*(x)}\{\mu_A(s)\}\right) \\
&= \sup_{r\in\gamma_R^*(a), s\in\gamma_R^*(x)}\{T(\mu_A(r), \mu_A(s))\} \\
&\leq \sup_{r\in\gamma_R^*(a), s\in\gamma_R^*(x)}\{T(\mu_A(y_{r,s}), \mu_A(z_{r,s}))\} \\
&= T\left(\sup_{r\in\gamma_R^*(a), s\in\gamma_R^*(x)}\{\mu_A(y_{r,s})\}\ ,\ \sup_{r\in\gamma_R^*(a), s\in\gamma_R^*(x)}\{\mu_A(z_{r,s})\}\right) \\
&\leq T\left(\sup_{y\in\gamma_R^*(y_{r,s})}\{\mu_A(y)\}\ ,\ \sup_{z\in\gamma_R^*(z_{r,s})}\{\mu_A(z)\}\right) \\
&= T\left(\mu_{\gamma_R^*}(\gamma_R^*(y_{r,s}))\ ,\ \mu_{\gamma_R^*}(\gamma_R^*(z_{r,s}))\right)
\end{aligned}$$

olur. Benzer şekilde,

$$\begin{aligned}
T\left(1-\nu_{\gamma_R^*}(\gamma_R^*(a)), 1-\nu_{\gamma_R^*}(\gamma_R^*(x))\right) &= T\left(1-\inf_{r\in\gamma_R^*(a)}\{\nu_A(r)\}, 1-\inf_{s\in\gamma_R^*(x)}\{\nu_A(s)\}\right) \\
&= T\left(\sup_{r\in\gamma_R^*(a)}\{1-\nu_A(r)\}\ ,\ \sup_{s\in\gamma_R^*(x)}\{1-\nu_A(s)\}\right) \\
&= \sup_{r\in\gamma_R^*(a), s\in\gamma_R^*(x)}\{T(1-\nu_A(r), 1-\nu_A(s))\} \\
&\leq \sup_{r\in\gamma_R^*(a), s\in\gamma_R^*(x)}\{T(1-\nu_A(y_{r,s}), 1-\nu_A(z_{r,s}))\} \\
&= T\left(\sup_{r\in\gamma_R^*(a)}\{1-\nu_A(y_{r,s})\}\ ,\ \sup_{s\in\gamma_R^*(x)}\{1-\nu_A(z_{r,s})\}\right) \\
&= T\left(1-\inf_{r\in\gamma_R^*(a), s\in\gamma_R^*(x)}\{\nu_A(y_{r,s})\}, 1-\inf_{r\in\gamma_R^*(a), s\in\gamma_R^*(x)}\{\nu_A(z_{r,s})\}\right) \\
&\leq T\left(1-\inf_{y\in\gamma_R^*(y_{r,s})}\{\nu_A(y_{r,s})\}, 1-\inf_{z\in\gamma_R^*(z_{r,s})}\{\nu_A(z_{r,s})\}\right) \\
&= T\left(1-\nu_{\gamma_R^*}(\gamma_R^*(y_{r,s})), 1-\nu_{\gamma_R^*}(\gamma_R^*(z_{r,s}))\right)
\end{aligned}$$

$\gamma_R^*(x), \gamma_R^*(y) \in R \backslash \gamma_R^*$ keyfi verilsin. Bu durumda,

$$\begin{aligned}
T\left(\mu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(x)\right), \mu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(y)\right)\right) &= T\left(\sup_{a\in\gamma_R^*(x)}\{\mu_A(a)\}\ ,\ \sup_{b\in\gamma_R^*(y)}\{\mu_A(b)\}\right) \\
&= \sup_{b\in\gamma_R^*(y), a\in\gamma_R^*(x)}\left\{T\left(\mu_A(a), \mu_A(b)\right)\right\} \\
&\leq \sup_{b\in\gamma_R^*(y), a\in\gamma_R^*(x)}\left\{\inf\left\{\mu_A(z)\ :\ z\in a\cdot b\right\}\right\} \\
&\leq \sup_{b\in\gamma_R^*(y), a\in\gamma_R^*(x)}\left\{\sup\left\{\mu_A(z)\ :\ z\in a\cdot b\right\}\right\} \\
&\leq \sup_{b\in\gamma_R^*(y), a\in\gamma_R^*(x)}\left\{\sup\left\{\mu_A(z)\ :\ z\in \gamma_R^*(a\cdot b)\right\}\right\} \\
&= \sup_{b\in\gamma_R^*(y), a\in\gamma_R^*(x)}\left\{\mu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a\cdot b)\right)\right\} \\
&= \mu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a\cdot b)\right) = \mu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a)\odot\gamma_R^*(b)\right)
\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}
T\left(1-\nu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(x)\right), 1-\nu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(y)\right)\right) &= T\left(1-\inf_{a\in\gamma_R^*(x)}\{\nu_A(a)\}, 1-\inf_{b\in\gamma_R^*(y)}\{\nu_A(b)\}\right) \\
&= T\left(\sup_{a\in\gamma_R^*(x)}\{1-\nu_A(a)\}\ ,\ \sup_{b\in\gamma_R^*(y)}\{1-\nu_A(b)\}\right) \\
&= \sup_{b\in\gamma_R^*(y), a\in\gamma_R^*(x)}\left\{T\left(1-\nu_A(a), 1-\nu_A(b)\right)\right\} \\
&\leq \sup_{b\in\gamma_R^*(y), a\in\gamma_R^*(x)}\left\{1-\sup\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in a\cdot b\right\}\right\} \\
&\leq \sup_{b\in\gamma_R^*(y), a\in\gamma_R^*(x)}\left\{1-\inf\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in a\cdot b\right\}\right\} \\
&\leq \sup_{b\in\gamma_R^*(y), a\in\gamma_R^*(x)}\left\{1-\inf\left\{\nu_A(z)\ :\ z\in \gamma_R^*(a\cdot b)\right\}\right\} \\
&= \sup_{b\in\gamma_R^*(y), a\in\gamma_R^*(x)}\left\{1-\nu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a\cdot b)\right)\right\} \\
&= 1-\nu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a\cdot b)\right) \\
&= 1-\nu_{\gamma_R^*}\left(\gamma_R^*(a)\odot\gamma_R^*(b)\right)
\end{aligned}$$

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde öncelikle bu tez çalışmasında ele alınan sonuçlar özetlenecek daha sonra bu konu ile ilgili başka nelerin yapılabileceği ile ilgili öneriler verilecektir.

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde, intuitionistic fuzzy H_v halka ve T- intuitionistic fuzzy H_v halka tanımı verildi. Bir intuitionistic fuzzy H_v halkasının intuitionistic fuzzy modal operatörleri altındaki görüntüsü incelenmiştir.

Intuitionistic fuzzy H_v halka ve T- intuitionistic fuzzy H_v halkasının yapısı ve cebirsel özellikleri incelenmiştir

5.2.ÖNERİLER

Bir intuitionistic fuzzy H_v halkasının diğer ikinci tip intuitionistic fuzzy modal operatörleri altındaki görüntüsü incelenebilir. Intuitionistic fuzzy H_v halkalarda temel bağıntı yapısı incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Atanassov, K.T. "Intuitionistic Fuzzy Sets", VII ITKR's Session, Sofia, June (1983).

[2] Atanassov, K. T. "Intuitionistic Fuzzy Sets", Fuzzy Sets and Systems, 20: 87-96, (1986).

[3] Atanassov, K. T. " Intuitionistic Fuzzy Sets", Phiysica-Verlag, Heidelberg, NewYork, (1999).

[4] Atanassov, K. T. "Remark on Two Operations Over Intuitionistic Fuzzy Sets", Int. J. of Unceratanity, Fuzzyness and Knowledge Syst.,9(1):71-75, (2001).

[5] Atanassov, K. T. "On the type of intuitionistic fuzzy modal operators", NIFS 11(5): 24-25, (2005).

[6] Atanassov, K. T. "The most general form of one type of intuitionistic fuzzy modal operators", NIFS, 12 (2): 36-38, (2006).

[7] Atanassov, K. T. "Some properties of the operators from one type of intuitionistic fuzzy modal operators", Advanced Studies on Contemporary Mathematics, 15(1): 13-20, (2007).

[8] Bakhshi, M., Borzooei, R., A. " Some properties of T-fuzzy generalized subgroups", Iranian Journal of Fuzzy Systems, 6(4): 73-87, (2009).

[9] Corsini, P. "Applications of hyperstructures theory", Advanced in Mathematics, Kluwer Academic Publisher, (2003).

[10] Çuvalcıoğlu, G. "Expand the modal operator diagram with $Z_{\alpha,\beta}^{\omega}$", Proc. Jangjeon Math.Soc.,13(3): 403-412, (2010).

[11] Çuvalcıoğlu, G."Some Properties of $E_{\alpha,\beta}$ operatör", Advanced studies on Contemporary Mathematics, 14(2): 305-310, (2007).

[12] Çuvalcıoğlu, G."On the diagram of OTMOS on IFSs: last expanding with $Z_{\alpha,\beta}^{\omega,\theta}$", Iranian Journal of Mathematics, 10(1): 89-106, (2013).

[13] Davvaz, B. " Fuzzy H_v-groups" , Fuzzy Sets and System, 101: 191-195, (1999).

[14] Davvaz, B. "On H_v -rings and fuzzy H_v -ideals", Journal of Fuzzy Mathematics, 6: 33-42, (1998).

[15] Davvaz, B., Leoreanu-Fotea, V. "Hyperring Theorey and Application", International Academic Press,USA, (2008).

[16] Davvaz, B., Dudek, W.A., Jun,Y.B. "Intuitionistic fuzzy H_v-submodules, Information Sciences", 176: 285-300, (2006).

[17] Davvaz, B.,Dudek, W.A. "Intuitionistic fuzzy H_v -ideals", International Journal of Mathematicsand Mathematical Sciences, 1-11, (2006).

[18] Davvaz, B. " Fuzzy H_v-submodules", Fuzzy Sets and System, 117: 477-484, (2001).

[19] Davvaz, B.,Dudek, W.A., Jun,Y.B."On intuitionistic fuzzy subhyperquasi groups of hyperquasi groups", Information Sciences, 170: 251-262, (2005).

[20] Davvaz, B. " Fuzzy subrings of fundamental rings", J.Korea Soc. Math. Educ. Ser. B: Pure Appl. Math. , 127-132, (2004).

[21] Davvaz, B. "T-fuzzy H_v -subrings of an H_v-ring", The Journal of Fuzzy Mathematics, 11: 215-224, (2003).

[22] Dehghan, A., Davvaz B. " An Introduction to the theory of H_v -semilattices", Bull. Malays. Math. Sci. Soc. 32: 375-390, (2009).

[23] Dencheva, K. "Extension of intuitionistic fuzzy modal operators ⊞ and ⊠", Proc.of the Second Int. IEEE Symp. IntelligentSystems, 3: 22-24, (2004).

[24] Li, D.,Shan, F., Cheng, C. " On Properties of Four IFS Operators", Fuzzy Sets and Systems, 151-155, (2005).

[25] Feis, "Modal Logics", Gauthier-Villars,Paris , (1965).

[26] Heidari, D.,Davvaz, B. “ On ordered hyperstructures”, U.P.B. Sci. Bull. Series A, 73: 1223-7027, (2011).

[27] Klement, E.P.,Mesiar, R., and Pap, E. ”Triangular Norms”, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, (2000).

[28] Krasner, M. “A class of hyperrings and hyperfields”, Intern. J. Math. Sci. 6: 307-312, (1983).

[29] Lee, J.G.,Kım, K. H. “On fuzzy subhypernear-rings of hypernear-rings with t-norms”, Journal of the chungcheong mathematical socıety (2010).

[30] Leoreanu-Fotea, V. and Davvaz, B. “Fuzzy hyperrings”, Fuzzy Sets and System, 160: 2366-2378, (2009).

[31] Marty, F. “Surune generalization de la notion de groupe”, congres Math. Skandinaves, Stockholm, 45-49, (1934).

[32] Rosenfeld, A. “Fuzzy Groups”, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35: 512-517, (1971).

[33] Spartalis, S. Vougiouklis T., ”The fundamental relations of H_v -rings”, Riv. Mat. Pura Apply.,14: 7-20, (1994).

[34] Vougiouklis, T. “The fundamental relation in hyperrings. The general hyperfield.”, In: T. Vougiouklis (Ed.), Algebraic hyperstructures and applications. Proceedings of the Fourth International Congress held at “ Demokritos” University of Thrace, Xanthi, June, 27-30, (1990).

[35] Vougiouklis, T. “ On H_v -ring and H_v -representations”, Discrete Math, 615-620, (1999).

[36] Yan, L. “Intuitionistic Fuzzy Ring and Its Homomorphism Image”, International Seminar on Future BioMedical Information Engineering, 75-77, (2008).

[37] Zadeh L.A., Fuzzy Sets, Information and Control, 8: 338-353, (1965).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: ReşatSÖYLEMEZ

Doğum Tarihi:14.08.1981

Öğrenim Durumu:Yüksek Lisans

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	Atatürk Lisesi	1995–1999
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2000–2004
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2004– 2008

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. Çuvalcıoglu, G., Söylemez, R. “On Some Properties of Lower and Upper Approximations In A Multiplicative Set”, IJFLS Journal, (2013). (basımda)

2. Çuvalcıoglu, G., Söylemez, R., Obuz, T.L,“Intuitionistic Fuzzy Hyper Structures With T-(co) Norm(s)”, International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications, Sempozyumu, MERSİN, (2012).

3. Çuvalcıoglu, G., Söylemez, R. “On Intuitionistic Fuzzy Modal Operator Applied to Intuitionistic fuzzy H_v -ideals”, Journal of Intelligent and Fuzzy Systems**,** (2013). (incelenmede)

4. Çuvalcıoglu, G., Söylemez, R. “On Intuitionistic Fuzzy Hyperstructure With T-norm”, (2013). (incelenmede)