LİPSCHİTZ SINIFINDAN OLAN FONKSİYONLARA TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM

MUSA KAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
TEMMUZ 2014

LİPSCHİTZ SINIFINDAN OLAN FONKSİYONLARA TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM

MUSA KAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Uğur DEĞER

MERSİN
TEMMUZ 2014

Musa KAYA tarafından Yrd. Doç. Dr. Uğur DEĞER danışmanlığında hazırlanan "Lipschitz Sınıfından Olan Fonksiyonlara Trigonometrik Polinomlar ile Yaklaşım" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV	....
Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM	....
Yrd. Doç. Dr. Uğur DEĞER	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 20../.08./.2014.tarih ve .2014...18.../...520.... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

LİPSCHİTZ SINIFINDAN OLAN FONKSİYONLARA TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM

Musa KAYA

ÖZ

f , 2π periyodik bir fonksiyon ve $p \geq 1$ için

$$L_p := L_p[0,2\pi] = \left\{ f : \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

olsun. Bu çalışmada, Cesáro matrisinden satırların bir kümesini silerek elde edilen C_λ toplanabilme metodu ile L_p normunda Lipschitz sınıfına ait fonksiyonlara yaklaşımın derecesi üzerine sonuçlar elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Trigonometrik polinomlar, hemen hemen monoton diziler, Cesáro alt metodu, yaklaşımın derecesi.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Uğur DEĞER, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

APPROXIMATION BY TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS TO FUNCTIONS BELONGING TO LIPSCHITZ CLASS

Musa KAYA

ABSTRACT

Let f be a 2π periodic function and let

$$L_p := L_p\left[0,2\pi\right] = \left\{ f : \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(x\right) \right|^p dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

for $p \geq 1$. In this studying, the results on the degree of approximation to functions belonging to Lipschitz class is obtained by C_λ-method obtained by deleting a set of rows from the Cesáro matrix in L_p norm.

Key Words: Trigonometric polynomials, almost monotone sequences, Cesáro submethod, degree of approximation.

Advisor: Asist. Prof. Dr. Uğur DEĞER, Mersin University, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Bu tezin ortaya çıkmasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen çok değerli danışmanım Yrd. Doç. Dr. Uğur DEĞER hocama teşekkür ederim.

Yüksek lisans eğitimimin ders aşamasında bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Mersin üniversitesi matematik bölümü hocalarına teşekkür ederim.

Yüksek lisans tez çalışmamda BAP-FBE-MB (MK) 2012-2 YL proje numarası ile destek sağlayan Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırmalar Projeleri Birimine (BAP) teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi manevi yanımda olan başta eşim olmak üzere aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\sum$	Toplam işareti (Sigma)
$\forall$	Her
$:=$	Tanım olarak eşittir.
$<$	Küçük
$>$	Büyük
$\leq$	Küçük eşit.
$\geq$	Büyük eşit
$\mathbb{N}^{+}$	Pozitif doğal sayılar kümesi.
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
O	Landau sembolü
$\omega(f,u)$	f nin birinci mertebeden süreklilik modülü
$\omega(u)$	Süreklilik modülü
$(C,1)$	Cesáro metodu
C_{λ}	Cesáro alt metodu
N_n	Nörlund metodu
R_n	Riesz metodu
N_n^{λ}	Nörlund alt metodu
R_n^{λ}	Riesz alt metodu
AMDS	Hemen hemen azalan dizilerin sınıfı
AMIS	Hemen hemen artan dizilerin sınıfı
HBVS	Baş kısmı sınırlı varyasyonlu dizilerin sınıfı
RBVS	Kalan kısmı sınırlı varyasyonlu dizilerin sınıfı
AMDMS	Ortalaması hemen hemen azalan dizilerin sınıfı
AMIMS	Ortalaması hemen hemen artan dizilerin sınıfı

1. GİRİŞ

f , 2π periyodik bir fonksiyon ve $p \geq 1$ için L_p sınıfı

$$L_p := L_p[0,2\pi] = \left\{ f : \ \|f\|_p := \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x)|^p \, dx \right)^{1/p} < \infty \right\}$$

biçiminde tanımlanır. Buna göre $f \in L_p, (p \geq 1)$ olmak üzere bir x noktasında f 'nin Fourier serisinin kısmı toplamı

$$s_n(f;x) = \frac{1}{2}a_0 + \sum_{k=1}^{n} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \equiv \sum_{k=0}^{n} A_k(f;x)$$

biçimindedir.

$f \in L_p$ 'nin süreklilik integral modülü

$$\omega_p(u;f) := \sup_{0<|h|\leq u} \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} |f(x+h) - f(x)|^p \, dx \right\}^{1/p}$$

ile tanımlanır. Buna tanıma göre $\alpha > 0$ ve $p \geq 1$ için,

$$\omega_p(u;f) = O(u^\alpha)$$

ise f fonksiyonu $Lip(\alpha, p)$ sınıfındandır denir.

Fourier seri teorisinde ve fonksiyonlara yaklaşım teorisinde temel problemlerden biri, belli yöntemler ile verilen fonksiyonlar uzayında yaklaşımın derecesini incelemektir. 1928 yılında G. H. Hardy ve J. E. Littlewood tarafından; $Lip(\alpha, p)$ ($0 < \alpha \leq 1$, $p \geq 1$) sınıfının, *n.* dereceden trigonometrik polinomlar ile $O(n^{-\alpha})$ hata ile *p.* kuvvetten orta anlamda yaklaşılabilen $f(x)$ fonksiyonlarının sınıfına özdeş olduğu ispatsız olarak verilmiştir [Hardy ve Littlewood, 1928]. Buna ek olarak Hardy ve Littlewood bu yaklaşımın $f(x)$'in Fourier polinomları ile yapılabileceğini belirtmişlerdir ($1 \leq p < \infty$).

Bu bağlamda, karşılaşılan önemli sonuçlardan biri Quade'ye aittir [Quade 1937]. Quade, Hardy ve Littlewood tarafından yukarıda bahsedilen konjonktür üzerinden yola çıkarak $s_n(f;x)$ toplamı ile $Lip(\alpha, p)$ sınıfından olan fonksiyonlara yaklaşımın derecesi üzerine sonuçlar elde etmiştir. Daha sonraki yıllarda, pek çok matematikçi tarafından, Quade'nin bazı sonuçlarından daha kesin değerlendirmeler içeren bazı çalışmalar yapılmıştır. Bunlar içerisinde en önemlilerinden biri Chandra tarafından verilen sonuçlardır [Chandra, 2002]. Chandra, Nörlund ve Riesz metotları ile $Lip(\alpha, p)$ sınıfından olan fonksiyonlara yaklaşımın derecesini bu metotların içerdiği diziler üzerinde monotonluk koşulunu göz önünde tutarak vermiştir. 2005 yılında Leindler aynı problemi diziler üzerindeki monotonluk koşulunu zayıflatarak ele almıştır [Leindler, 2005].

Biliyoruz ki Nörlund ve Riesz metotları bu teoride önemli bir yere sahip olan Cesáro metodunun bir genelleştirmesidir. Yukarıda bahsedilen çalışmaları göz önünde tuttuğumuz zaman doğal olarak, bu yaklaşım yöntemlerinin ve sonuçların nasıl genelleştirilebileceği sorusu ortaya çıkar. Bunu iki olası şekilde yapmak mümkündür. İlk olarak, toplanabilme yöntemleri göz önünde tutularak bu problemler ele alınabilir. İkinci olarak ise dizi sınıflarını genişleterek, yani monotonluk koşulunu zayıflatarak bu yapılabilir. Bu tez çalışmasında her iki durum göz önünde tutularak yukarıda bahsedilen problem ele alınmış ve ilgili sonuçlar Bulgular ve Tartışma kısmında verilmiştir. Bu çalışmada ele alınan toplanabilme yöntemleri aşağıdaki gibidir:

F doğal sayılar kümesinin sonsuz bir alt kümesi ve pozitif tamsayıların kesin artan bir dizisinin görüntüsü olmak üzere $F := \{\lambda(n)\}_{n=1}^{\infty}$ olsun. Reel ya da kompleks sayıların bir $\{x_k\}$ dizisi için C_λ Cesáro alt metodu

$$\left(C_\lambda x\right)_n = \frac{1}{\lambda(n)} \sum_{k=1}^{\lambda(n)} x_k, \quad (n = 1, 2, ...)$$

ile tanımlanır. C_λ metodu, Cesáro matrisinden satırların bir kümesini silerek elde edilir. Böylece C_λ metodu $(C,1)$ Cesáro metodu'nun bir alt dizisi olur ve dolayısıyla herhangi bir λ için regülerdir. C_λ metodunun temel özellikleri [Armitage ve Maddox, 1989] ve [Osikiewicz, 2000] çalışmalarında bulunmaktadır.

C_λ metodu göz önüne alınarak Nörlund ve Riesz toplamlarının alt metodları aşağıdaki gibi verilmiştir [Değer vd., 2012]. Buna göre $\lambda(n) \geq n$ olmak üzere

$$N_n^\lambda(f;x) = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} s_m(f;x) \text{ ve } R_n^\lambda(f;x) = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m s_m(f;x)$$

şeklinde tanımlanır. Burada,

$$s_n(f;x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{2\pi} f(x+t)D_n(t)\,dt \text{ ve } D_n(t)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)}=\sum_{k=0}^{n}\sin(kt).$$

Ayrıca $P_{\lambda(n)}=p_0+p_1+p_2+...+p_{\lambda(n)}\neq 0 \quad (n\geq 0)$ ve $p_{-1}=P_{-1}=0$ olarak alınır.

$\lambda(n)=n$ durumunda, $N_n^{\lambda}(f;x)$ ve $R_n^{\lambda}(f;x)$ metotları klasik olarak bilinen Nörlund ve Riesz toplamlarıdır. Bundan başka yukarıdaki toplamlar $\forall n$ için $p_n=1$ olduğunda

$$\sigma_n^{\lambda}(f;x)=\frac{1}{\lambda(n)+1}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}s_m(f;x)$$

C_{λ} metodunu verecektir. Diğer yandan C_{λ} metodunda $\lambda(n)=n$ alınırsa

$$\sigma_n(f;x)=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}s_m(f;x)$$

eşitliği ile Cesáro toplamını verecektir.

Dikkat edilmelidir ki ele alınan yöntem önceki yöntemlerin bir genelleştirmesidir.

İkinci genelleştirme aşağıda verilen dizi sınıflarına göre yapılmıştır. Buna göre $u:=\{u_n\}$ negatif olmayan bir dizi ve

$$C:=(C_n)=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n}u_m$$

olsun. Her $n\geq m$ için $K\,u_n\geq u_m \quad (u_n\leq K\,u_m)$ koşulunu sağlayan sadece u dizisine bağlı bir $K:=K(u)>0$ sabiti varsa, u dizisine hemen hemen monoton artan (azalan) bir dizi denir ve kısaca $u\in AMIS$ ($u\in AMDS$) ile gösterilir. Bu kavram S. N. Bernstein tarafından verilmiştir [Zygmund, 1959]. Eğer $C\in AMDS \quad (C\in AMIS)$ ise, o zaman u dizisine ortalama anlamda hemen hemen monoton azalan (artan) dizi denir ve $C\in AMDMS \; (C\in AMIMS)$ olarak gösterilir [Mohapatra ve Szal, 2012].

Sıfıra yakınsayan bir u dizisi, bütün k doğal sayıları için

$$\sum_{m=k}^{\infty}|\Delta u_m|\leq K(u)u_k \quad \left(\sum_{m=k}^{\infty}|\Delta C_m|\leq K(u)C_k\right)$$

özelliğine sahip ise u dizisine Kalanı Sınırlı Varyasyonlu Dizi (Ortalamasının Kalanı Sınırlı Varyasyonlu Dizi) denir ve kısaca $u \in RBVS$ ($u \in RBVMS$) ile gösterilir. Kalanı sınırlı varyasyon koşulu ilk olarak Leindler tarafından verilmiştir. [Leindler, 2001].

Bir u dizisi bütün k doğal sayıları için veya u dizisinin sıfır olmayan terimleri sonlu sayıda sıfırdan farklı son terimi u_N olmak üzere sadece bütün $k \leq N$ için

$$\sum_{m=1}^{k-1} |\Delta u_m| \leq K(u) u_k \qquad , \qquad \left(\sum_{m=1}^{k-1} |\Delta C_m| \leq K(u) C_k \right)$$

özelliğine sahip ise u dizisine Başlangıcı Sınırlı Varyasyonlu Dizi (Ortalamasının Başlangıcı Sınırlı Varyasyonlu Dizi) denir ve $u \in HBVS$ ($u \in HBVMS$) ile gösterilir. Bu dizi sınıfları için

$$RBVS \subset AMDS, \qquad RBVMS \subset AMDMS$$
$$HBVS \subset AMIS, \qquad HBVMS \subset AMIMS$$

ve

$$AMDS \subset AMDMS$$
$$AMIS \subset AMIMS$$

içerme bağıntıları sağlanır [Mohapatra ve Szal, 2012].

Negatif olmayan ve azalmayan (artmayan) diziler, hemen hemen monoton azalan (artan) dizilerin alt kümesi olduğu açıktır. Bu içermeleri göz önünde tutarak hem monotonluk koşulunu zayıflatıp hem de $p \geq 1$ için L_p sınıfına ait olan fonksiyonların Fourier serilerinin C_λ-metodu ile Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlara yaklaşımın derecesi elde edilecektir. Özellikle, $N_n^\lambda(f;x)$ ve $R_n^\lambda(f;x)$ trigonometrik polinomları ile $f \in L_P$'nin yaklaşımının derecesi ön plana çıkacaktır.

Materyal ve Yöntem kısmında ilk olarak bazı temel kavramlar ele alınacak, daha sonra bazı fonksiyon uzayları ve bu uzaylar ile ilgili özellikler verilecektir. Ayrıca yaklaşım teorisiyle ilişkili kavramlar ve bazı temel teoremler sunulacaktır.

Bulgular ve tartışma kısmında tez çalışmasında ortaya çıkan sonuçlar ve bu sonuçların ispatları sunulacaktır. Ayrıca elde edilen sonuçlar önceki sonuçlar ile karşılaştırmalı olarak verilecektir.

Sonuçlar ve öneriler bu tezin son bölümünü oluşturacak ve burada tez çalışmasında elde edilen sonuçların bir derlemesi verilecektir. Öneriler kısmında ise ele alınabilecek bazı problemler sunulacaktır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Yaklaşımın temel problemlerinden birini, verilen bir X uzayında, bu uzayın bir ϕ alt kümesindeki basit bir φ fonksiyonuna yeteri derecede yakın olan bir f fonksiyonunun bulunması oluşturur. Bu problemin çözümünde dikkat edilmesi gereken üç temel unsur söz konusudur. Birincisi, X uzaylarının hepsi genellikle $C=C\left[a,b\right]$, L_p ya da fonksiyonların diğer Banach uzayları gibi bir normlu uzaydır. İkinci olarak φ den f ye olan uzaklık X deki $\left\|f-\varphi\right\|$ normu ile ölçülebilir. Son olarak buradaki yaklaşımı mümkün kılan, ϕ kümesindeki özel fonksiyonları tanımlamak zorundayız. Bu fonksiyon sınıfları ile ilgili çok çalışma mevcuttur. Ancak aşağıda bahsedeceğimiz üç sınıf teorideki temel sınıfları oluşturmaktadır [Devore ve Lorentz, 1993]

1) Kompakt bir $\left[a,b\right]$ aralığındaki fonksiyonlar için $\wp_n$, derecesi n yi aşmayan bütün cebirsel P polinomlarının uzayı olmak üzere $\phi=\wp_n$ seçilir. Burada

$$P(x):=P_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k .$$

2) T çemberi üzerinde tanımlı fonksiyonlar için ise, $\mathcal{T}_n$, derecesi n yi aşmayan bütün trigonometrik T polinomlarının sınıfı olmak üzere $\phi=\mathcal{T}_n$ seçilir. Burada

$$T(x):=T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right).$$

3) Üçüncü önemli sınıf splines denilen parçalı polinomların oluşturduğu sınıftır.

Özellikle yukarıda bahsedilen ikinci sınıf bu çalışmada önemli bir yere sahiptir. Bu sınıfları göz önünde tutarak yaklaşım teorisinde iyi bilinen Weierstrass'ın iki temel teoremi aşağıdaki gibidir [Devore ve Lorentz, 1993].

Teorem 2.1. [Weierstrass, 1885] $\left[a,b\right]$ aralığında tanımlı her reel değerli sürekli fonksiyona cebirsel polinomlar ile düzgün olarak yaklaşılabilir. Yani, her $\varepsilon>0$ için

$$\left|f\left(x\right)-P\left(x\right)\right|<\varepsilon, \qquad a\le x\le b$$

olacak şekilde bir $P\in\wp_n$ cebirsel polinomu vardır.

Teorem 2.2. $C(\mathrm{T})$, T üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayı olsun. Her bir $f \in C(\mathrm{T})$ ve her $\varepsilon > 0$ için

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \qquad x \in \mathrm{T}$$

olacak şekilde bir $T \in \mathcal{T}_n$ vardır.

Yukarıdaki iki teorem yaklaşımın hızıyla ilgili bilgi içermez. Bu teoremler yaklaşımın varlığını ortaya koyması açısından önemlidir. Burada yaklaşımın nasıl geliştirilebileceği ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Eğer yaklaşımın hızı ile ilgili bir değerlendirme elde edilebilirse, bu durumda yaklaşımın derecesinden söz edebiliriz. Bu sorunun cevabı en iyi yaklaşım denilen kavram ile ilgilidir:

X reel veya kompleks cismi üzerinde bir Banach uzayı ve Y, X in bir kapalı lineer alt uzayı olsun. Her bir $f \in X$ için Y deki elemanlar ile f nin yaklaşımının hatası

$$E(f) := E(f, Y)_X := \inf_{P \in Y} \|f - P\| \tag{1}$$

ile gösterilir. $E(f)$, f nin sürekli bir fonksiyonudur. (1) ifadesindeki infumum bir $P = P_0$ için elde edilirse, Y den olan bu P_0'a, f ye en iyi yaklaşım denir. X_n, X in sonlu boyutlu alt uzayını göstermek üzere, $E(f)$ nin n ye bağımlılığını ortaya koymak istediğimiz zaman $E(f)$ yerine $E_n(f)$ yazarız [Devore ve Lorentz, 1993].

Bir tek f fonksiyonu verildiğinde, onun yaklaşım hatası için kesin bir formül elde etmek genellikle mümkün değildir. Bundan dolayı fonksiyon sınıfları öne çıkmaktadır. Örneğin, K, T üzerinde tanımlı fonksiyonlardan oluşan X Banach uzayının bir alt kümesi olsun. $E_n(f)$, trigonometrik polinomlar ile $f \in X$ nin yaklaşımının hatası ise, $\mathcal{T}_n$ sınıfındaki fonksiyonlar ile K nın yaklaşım hatası

$$E_n(K)_X := \sup_{f \in K} E_n(f)$$

formülü ile tanımlanır.

Yaklaşımın derecesi üzerine teoremler, yukarıda bahsedilen temel yaklaşım sınıfları ile verilen reel değerli fonksiyonlar için ortaya koyulur. Yaklaşım teoremlerinin iki temel tipi vardır. Bunlardan birincisi, direk yaklaşım teoremleri de denilen T üzerindeki düzgün trigonometrik yaklaşım ile ilişkili olan Jackson (1912) teoremleri, diğeri ise ters teoremler de denilen Bernstein teoremleridir [Cheney, 1982].

Farklı uzaylarda $s_n(f;x)$ toplamının yaklaşımının derecesi, Quade [Quade, 1937], Zygmund [Zygmund, 1959], Chandra [Chandra, 1986, 1990, 2002], Leindler [Leindler, 2005] gibi pek çok matematikçi tarafından çalışılmıştır.

f, 2π periyotlu bir fonksiyon ve $p \geq 1$ için $f \in L_p := L_p(0,2\pi)$ olsun. Biliyoruz ki, Lebesgue uzayı olarak da bilinen L_p uzayı $p \geq 1$ için yukarıdaki norm ile bir Banach uzayıdır. Bu uzaydaki normu ve bu uzaydan olan bazı fonksiyonların oluşturduğu $Lip(\alpha, p)$ ($0 < \alpha \leq 1$, $p \geq 1$) sınıfını göz önünde tutarak, 1928 yılında G. H. Hardy ve J. E. Littlewood tarafından ortaya atılan bakış açısı altında Quade, L_p normunda $Lip(\alpha, p)$ ($0 < \alpha \leq 1$, $p \geq 1$) sınıfından olan fonksiyonlara bazı koşullar altında n-inci mertebeden Cesáro toplamı ile yaklaşımın hızını $O(n^{-\alpha})$ ile değerlendirmiştir [Quade, 1937].

Daha sonraki yıllarda Quade'nin bu çalışması daha genel trigonometrik polinomlar için P. Chandra tarafından geliştirilmiştir Chandra 1986 yılında Riesz ortalamaları ile L_p normunda $Lip(\alpha, p)$ ($0 < \alpha \leq 1$, $p \geq 1$) sınıfından olan fonksiyonlara bazı koşullar altında yaklaşımı ele almıştır [Chandra, 1986]. 1990 yılında Chandra,

$$D_n(t) = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t}{2\sin\left(\frac{t}{2}\right)} = \sum_{k=0}^{n} \sin(kt),\ s_n(f;x) = \frac{1}{\pi}\int f(x+t)D_n(t)\,dt$$

ve

$$P_n = p_0 + p_1 + p_2 + \ldots + p_n \neq 0 \quad (n \geq 0);\ p_{-1} = P_{-1} = 0$$

olmak üzere, Cesáro toplamından daha genel olan

$$N_n(f;x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m} s_m(f;x) \text{ ve } R_n(f;x) = \frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_m s_m(f;x)$$

trigonometrik polinomları ile bazı koşullar altında yaklaşımın derecesini ele almıştır [Chandra, 1990]. 2002 yılında Chandra Nörlund ve Riesz ortalamalarındaki pozitif

(p_n) dizisi üzerindeki monotonluk koşulunu göz önünde tutarak Quade'nin çalışmasını genişletmiştir [Chandra, 2002].

2005 yılında Leindler Chandra'nın [Chandra, 2002] çalışmasını AMDS ve AMIS dizi sınıflarını göz önünde tutarak ele almıştır. Bu çalışmada (p_n) dizisi üzerindeki monotonluk koşulu zayıflatılarak, "hemen hemen monoton diziler" için Chandra'nın çalışması daha geniş dizi sınıflarına göre genişletilmiştir [Leindler, 2005].

[Değer vd, 2012] çalışmasında birinci bölümde verilen alt metodlar ile Chandra'nın yapmış olduğu çalışma (p_n) dizisi üzerindeki monotonluk koşulu göz önünde tutularak incelenmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde yaklaşım teorisi ve Fourier seri teorisindeki temel kavramlar ve bir takım özellikler verilecektir.

Analizde ve uygulamalı matematikte, bir dizinin indeksi sonsuza yaklaşırken o dizinin davranışının belirlenmesi veya bir fonksiyonun parametrelerinden birinin özel bir değere yaklaşırken o fonksiyonun davranışının belirlenmesi hakkındaki problemlerle sık sık karşılaşılır. Matematiğin bu tip problemlerini inceleyen dalına *asimptotikler* denir.

Buna göre,

$$\log n! \sim \left(n+\frac{1}{2}\right)\log n - n + \frac{1}{2}\log 2\pi \quad \text{(Stirling formülü)} \tag{3.1}$$

$$1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+\cdots+\frac{1}{n} \sim \log n \quad \text{(Harmonik sayılar)} \tag{3.2}$$

ve

$$\frac{1}{\pi}\int_0^{\pi}\frac{\left|\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)t\right|}{\sin\frac{1}{2}t}\,dt \sim \frac{4}{\pi^2}\log n \quad \text{(Lebesgue Sabiti)} \tag{3.3}$$

gibi örnekler bu konunun ana kısmını oluşturmaktadır. Buradaki $\sim$ işareti $n \to \infty$ iken sağ taraf ile sol tarafın bölümünün 1 e yaklaşması anlamında kullanılır. (3.1)-(3.3) ifadelerindeki gibi formüllere *asimptotik formüller* veya *asimptotik eşitlikler* denir [Wong, 2001].

$\sim, o$ ve O Sembolleri

$x \to \infty$ iken bilinen bir $\phi(x)$ fonksiyonuna göre araştırılan bir $f(x)$ fonksiyonunun davranışını anlatmak için Bachmann ve Landau'ya göre bilinen $\sim, o$ ve O sembolleri kullanılır. İlk olarak x in reel bir değer olduğunu kabul edelim. Sonsuzda $\phi(x)$ fonksiyonu sıfıra, sonsuza veya diğer davranışlara sahip olabilir [Wong, 2001]. Buna göre,

i. $f(x)/\phi(x) \to 1$ ise,

$$f(x) \sim \phi(x) \qquad (x \to \infty)$$

ya da kısacası belirsizlik olmadığında $f \sim \phi$ ile gösterilir ve "f, ϕ ye asimptotiktir" veya "ϕ, f'ye bir asimptotik yaklaşımdır" şeklinde okunur.

ii. $f(x)/\phi(x) \to 0$ ise,

$$f(x) = o\{\phi(x)\} \qquad (x \to \infty)$$

ya da kısacası $f = o(\phi)$ ile gösterilir ve "f, ϕ'den daha küçük mertebedendir" şeklinde okunur.

iii. $|f(x)/\phi(x)|$ sınırlı ise,

$$f(x) = O\{\phi(x)\} \qquad (x \to \infty)$$

ya da $f = O(\phi)$ ile gösterilir ve "f, ϕ'yi aşmayan mertebedendir" şeklinde okunur.

Bu tanımların özel durumları olan $f = o(1)$ $(x \to \infty)$; $x \to \infty$ iken f nin sıfıra yaklaştığı anlamında ve $f = O(1)$ $(x \to \infty)$ ise, $x \to \infty$ iken $|f|$ nin sınırlı olduğu anlamındadır.

$\phi(x)$ fonksiyonunun reel ve pozitif olmadığı durumda, bazı yazarlar tanımı verirken modül işaretini kullanır. Bu durumda Tanım (ii)-(iii), $f(x) = o(|\phi(x)|)$ ve $f(x) = O(|\phi(x)|)$ şeklinde verilir. Yukarıda verilen kavramlara örnek olarak aşağıdakiler verilebilir: $x \to \infty$ olmak üzere

$$(x+1)^2 \sim x^2, \qquad \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \sinh x = O(e^x).$$

3.1. SÜREKLİLİK MODÜLÜ

$[a,b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonu için birinci mertebeden süreklilik modülü veya basit olarak süreklilik modülü $u \in [0, b-a]$ olmak üzere

$$\omega(u) = \omega(u; f; [a,b]) = \sup_{\substack{a \le x \le b-h \\ 0 \le h \le u}} |f(x+h) - f(x)| = \sup_{\substack{|x_2 - x_1| \le u \\ x_1, x_2 \in [a,b]}} |f(x_1) - f(x_2)|$$

eşitliği ile tanımlanır.

Bu tanıma göre, sabit her bir $u \in [0, b-a]$ için bir f fonksiyonunun $\omega(u; f; [a,b])$ süreklilik modülü, $[a,b]$ aralığında olan u uzunluğundaki keyfi bir parçada fonksiyonun maksimal salınımının genişliğini gösterir.

Bu tanım fonksiyon $(-\infty,\infty)$ aralığında düzgün sürekli ise yine geçerlidir. Bununla ilgili bazı örnekler aşağıdaki gibidir.

Örnek 3.1.1.

$x\in(-\infty,\infty)$ için $f(x)=Ax+B$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $u\geq 0$ için,

$$\omega(u)=\sup_{\substack{-\infty<x<\infty \\ 0\leq h\leq u}}\left|A(x+h)+B-Ax-B\right|=\sup_{0\leq h\leq u}|Ah|=|A|u.$$

Süreklilik modülünün özellikleri aşağıdaki gibidir :

- $\omega(0)=0$
- $\omega(u)$, $[0,b-a]$ üzerinde azalmayan bir fonksiyondur.
- $\omega(u)$, $[0,b-a]$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur.
- $\omega(u)$ yarı toplamsal bir fonksiyondur. Yani herhangi bir $u_1\geq 0$ ve $u_2\geq 0$ için

$$\omega(u_1+u_2)\leq\omega(u_1)+\omega(u_2),$$

özellikleri sağlanır.

Bir f fonksiyonu $[0,b-a]$ aralığı üzerinde bu dört özelliğe sahipse, f fonksiyonunun $\omega(u;f,[0,b-a])$ süreklilik modülü $f(u)$ ile çakışır. Yani $\omega(u;f,[0,b-a])=f(u)$ olacaktır. Bununla ilgili bilinen bazı örnekler aşağıda verilmiştir [Stepanets, 2005].

$\omega(u)$ süreklilik modülünün yarı toplamsallık özelliğinden herhangi bir $n\in\mathbb{N}$ için

$$\omega(nu)\leq n\omega(u),$$

ve keyfi $\lambda>0$, $(\lambda+1)u\in[0,b-a]$ için

$$\omega(\lambda u)\leq(\lambda+1)\omega(u)$$

olduğu kolayca elde edilir [Stepanets, 2005].

Örnek 3.1.2.

$K>0$ sabit bir sayı ve $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $t\geq 0$ için Kt^{α} formundaki bütün fonksiyonlar sürekliliğin modülüdür [Stepanets, 2005].

f fonksiyonu $\left[a,b\right]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon $M>0$ ve $0<\alpha\leq 1$ olsun. Her $x,\, t\in\left[a,b\right]$ için

$$\left|f\left(t\right)-f\left(x\right)\right|\leq M\left|t-x\right|^{\alpha}$$

koşulu sağlanırsa f Lipschitz sınıfındandır denir ve $f\in Lip_{M}\alpha$ ile gösterilir. Ayrıca tanımdan kolayca görülür ki, $f\in Lip_{M}\alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $\omega\left(f;\delta\right)\leq M\delta^{\alpha}$ eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

$f\in L_{p}$'nin süreklilik integral modülü

$$\omega_{p}\left(\delta;f\right):=\sup_{0<|h|\leq\delta}\left\{\frac{1}{2\pi}\int_{0}^{2\pi}\left|f\left(x+h\right)-f\left(x\right)\right|^{p}dx\right\}^{1/p}$$

ile tanımlanır. Buna göre $\alpha>0$ ve $p\geq 1$ için,

$$\omega_{p}\left(\delta;f\right)=O\left(\delta^{\alpha}\right)$$

ise $f\in Lip\left(\alpha,p\right)$ dir.

3.2. PARÇALI SÜREKLİ FONKSİYONLAR

Reel değerli bir f fonksiyonunun bir x_{0} noktasındaki sağ ve sol limitleri, $\varepsilon>0$ olmak üzere sırasıyla

$$f\left(x_{0}^{+}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}f\left(x_{0}+\varepsilon\right),$$

$$f\left(x_{0}^{-}\right)=\lim_{\varepsilon\to 0}f\left(x_{0}-\varepsilon\right)$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Tanım 3.2.1. (Düzgün Süreksizlik Noktası).

Bir f fonksiyonunun bir x_{0} noktasındaki sağ ve sol limitleri sonlu değerler olup bu iki değer birbirinden farklı ise, x_{0} noktasına f fonksiyonunun bir düzgün süreksizlik noktası denir. Eğer f fonksiyonu x_{0} noktasında sürekli ise,

$$f\left(x_{0}^{+}\right)=f\left(x_{0}^{-}\right)=f\left(x_{0}\right)$$

dır.

Tanım 3.2.2. (Parçalı Sürekli Fonksiyon).

Bir $\left[a,b\right]$ aralığında sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası dışında sürekli olan bir fonksiyona o aralıkta parçalı sürekli denir.

Örnek 3.2.1.

$$f(x) = x^2 + \frac{|x|}{x} \qquad \text{ve} \qquad g(x) = \begin{cases} x \;, & -2 \le x < 1 \\ x^2 - 1 \;, & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

fonksiyonlarının her ikiside $[-2,3]$ aralığında parçalı süreklidir.

f fonksiyonu $x_0 = 0 \in [-2,3]$ ve

g fonksiyonu ise $x_0 = 1 \in [-2,3]$

noktalarında düzgün süreksizliklere sahiptir.

Örnek 3.2.2.

$$f(x) = \frac{1}{x-2} \qquad \text{ve} \qquad g(x) = \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

fonksiyonları $[2,4]$ aralığında parçalı sürekli olamazlar. Çünkü her iki fonksiyon içinde $f(2^+)$ ve $g(2^+)$ limitleri sonlu olarak tanımlanamaz.

3.3. PERİYODİK FONKSİYON

f, $[a,b]$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $p \in \mathbb{R}$ varsa f'ye periyodik fonksiyon p ye de f'nin periyodu denir. En popüler periyodik fonksiyonlar trigonometrik olanlar yani $\sin x$, $\cos x$, $\tan x, \ldots$ fonksiyonlarıdır. p, $f(x)$ fonksiyonunun periyodu ise o zaman $2p, 3p, 4p, \ldots$ sayıları da periyot olur. Yani,

$$f(x+p) = f(x)$$

$$f(x+2p) = f\left[(x+p)+p\right] = f(x+p) = f(x)$$

$$f(x+3p) = f\left[(x+2p)+p\right] = f(x+2p) = f(x)$$

$$\vdots$$

$$f(x+np) = f\left[\left(x+(n-1)p\right)+p\right] = f\left(x+(n-1)p\right) = f(x).$$

Buradan görülüyor ki, n herhangi bir tamsayı olmak üzere $f(x+np) = f(x)$ dir. Bu demektir ki p, f'nin bir periyodu ise, p nin tüm katları da f nin bir periyodudur.

Periyodik bir f fonksiyonunun pozitif p periyotları arasında bir en küçüğü varsa ona f'nin asli periyodu ya da temel periyodu denir. Asli periyot T ile gösterilir ve ona kısaca periyot denilir.

Örnek 3.3.1.

$k = 0, \mp 1, \mp 2, ...$ için

$$\sin(x + 2k\pi) = \sin x, \qquad \cos(x + 2k\pi) = \cos x$$

$$\tan(x + k\pi) = \tan x \ , \qquad \cot(x + k\pi) = \cot x$$

eşitlikleri $\forall x \in \mathbb{R}$ için doğrudur. $2k\pi$ lerin en küçük pozitif değerlisi 2π ve $k\pi$ lerin en küçük pozitif değerlisi π olduğundan, $\sin x$ ve $\cos x$ fonksiyonları 2π periyotlu, $\tan x$ ve $\cot x$ fonksiyonları π periyotlu periyodik fonksiyonlardır.

Örnek 3.3.2.

$f(x) = c(sabit)$ fonksiyonu keyfi periyotlu periyodik bir fonksiyondur. Asli periyodu yoktur.

Örnek 3.3.3.

$$f(x) = \begin{cases} 0 & , x \in \mathbb{Q} \\ 1 & , x \notin \mathbb{Q} \end{cases}$$

fonksiyonu için her rasyonel sayı periyottur. Ancak asli periyodu yoktur. Çünkü pozitif rasyonel sayıların bir en küçüğü tanımlanamaz.

Örnek 3.3.4.

$f(x) = \sin\dfrac{1}{x}$ fonksiyonu periyodik değildir.

Örnek 3.3.5.

$f_1, f_2, ..., f_k$ ların her biri p periyotlu periyodik fonksiyon iseler o taktirde $c_1, ..., c_k$ lar herhangi reel sabitler olmak üzere

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + ... + c_k f_k$$

fonksiyonu da p periyotlu periyodik bir fonksiyondur.

$f(x)$, T uzunluğundaki bir aralıkta integrallenebiliyorsa, aynı uzunluktaki bütün aralıklarda integrallenebilirdir. Yani,

$$\int_a^{a+T} f(x)\,dx = \int_b^{b+T} f(x)\,dx$$

şeklinde ifade edilir.

Uygulamalar için önemli olan en basit periyodik fonksiyon $y = A\sin\left(wx+\varphi\right)$ fonksiyonudur. Bu fonksiyona $\left|A\right|$ genişliğinde, w frekanslı ve φ başlangıç noktası ile bir harmonik adı verilir. Öyle bir harmonik fonksiyonun periyodu

$$T = 2\pi/w$$

dır. Yani $\forall x$ için

$$A\sin\left[w\left(x+\frac{2\pi}{w}\right)+\varphi\right] = A\sin\left[\left(wx+\varphi\right)+2\pi\right] = A\sin\left(wx+\varphi\right)$$

eşitliği sağlanır.

$T = 2l$ alınırsa, o zaman $T = 2\pi/w$, olduğundan

$$w = \frac{2\pi}{T} = \frac{\pi}{l}$$

elde edilir. Bu nedenle, $T = 2l$ periyodu ile harmonik fonksiyon

$$a\cos\frac{\pi x}{l} + b\sin\frac{\pi x}{l}$$

şeklinde yazılır.

$T = 2l$ periyodu verildiğinde, $T_k = 2\pi/w_k = 2l/k$ periyotları ve $w_k = \pi k/l$ frekansları ile

$$a_k\cos\frac{\pi kx}{l} + b_k\sin\frac{\pi kx}{l} \qquad \left(k = 1,2,...\right) \tag{3.4}$$

harmonik fonksiyonları göz önünde tutalım.

$$T = 2l = kT_k,$$

olduğundan $T = 2l$ sayısı bütün (3.4) harmonik fonksiyonlarının da bir periyodudur. Çünkü bir periyodun tam katsayıları da bir periyot olur. Böylece, A bir sabit olmak üzere

$$s_n\left(x\right) = A + \sum_{k=1}(a_k\cos\frac{\pi kx}{l} + b_k\sin\frac{\pi kx}{l}),$$

biçimindeki her toplam, $2l$ periyotlu fonksiyonların bir toplamı olduğu için $2l$ periyotlu bir fonksiyondur. (Periyoda sabit bir sayı eklemek fonksiyonun periyodunu kesinlikle etkilemez) Buna göre $s_n\left(x\right)$ fonksiyonuna $2l$ periyotlu n. dereceden trigonometrik polinom denir. Farklı harmoniklerin bir toplamı olmasına rağmen, trigonometrik polinom genelde basit bir harmonikten çok karmaşık bir yapıya sahip bir fonksiyonu temsil eder. $A, a_1, b_1, a_2, b_2, ...$ katsayıları ile uygun bir basit harmoniğin düzgün ve simetrik grafiğinin tam aksine $y = s_n(x)$ fonksiyonları oluşturulabilir [Tolstov, 1962]. Örneğin, $y = \sin x + \frac{1}{2}\sin 2x + \frac{1}{4}\sin 3x$ trigonometrik polinomu ele alınabilir.

$$A + \sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos\frac{k\pi x}{l} + b_n \sin\frac{k\pi x}{l}\right)$$

sonsuz trigonometrik serisi yakınsak ise $2l$ periyotlu bir fonksiyonu gösterir. Öyle sonsuz trigonometrik serilerin toplamı olan fonksiyonların yapısı bile ıraksaktır. Böylece doğal olarak aşağıdaki soru ortaya çıkar: $2l$ periyotlu bir fonksiyon trigonometrik bir serinin toplamı olarak gösterilebilir mi? Öyle bir gösterim fonksiyonların çok geniş bir sınıfı için mümkündür. Bu gösterim verilen bir fonksiyonun Fourier katsayısı olarak karşımıza çıkar. Fourier serisi kavramı 2π periyotlu fonksiyonlar için ele alınarak, $2l$ periyotlu fonksiyonlara genişletilebilir.

Biliyoruz ki $1, \cos x, \sin x, \cos 2x, \sin 2x, ...$ fonksiyonları $[-\pi, \pi]$ aralığında ortogonal bir sistem oluştururlar. Yani, $[-\pi, \pi]$ aralığında bu sistemdeki fonksiyonların ikişerli çarpımlarının integrali sıfırdır. 2π ortak periyoduna sahip olan bu fonksiyonlar yardımı ile oluşturulan

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.5}$$

trigonometrik serisi yakınsak ise, onun toplamı da 2π periyotlu periyodik bir $f(x)$ fonksiyonu olacaktır. (3.5) serisinin yakınsadığı periyodik bir $f(x)$ fonksiyonunun bulunması halinde

$$f(x) = \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx)$$

serisine $f(x)$ in Fourier serisi ve a_0, a_n, b_n sabitlerine de $f(x)$ in Fourier katsayıları adı verilir. $f(x)$'in Fourier katsayıları

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \qquad (n = 0, 1, 2, ...),$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \qquad (n = 1, 2, ...)$$

şeklindedir.

2π periyotlu $f(x)$ fonksiyonuna yakınsayan bir trigonometrik serinin bulunması için $f(x)$ in Dirichlet koşulları olarak bilinen aşağıdaki koşulları gerçeklemesi yeterlidir.

1. $f(x)$ fonksiyonu 2π periyotlu periyodik bir fonksiyonu olsun.

2. $f(x), [-\pi, \pi]$ aralığında parçalı sürekli olsun.

3. $f(x), [-\pi, \pi]$ aralığında sonlu sayıda ektremuma sahip olsun.

Bu takdirde $f(x)$ fonksiyonu x in her değeri için yakınsak olan ve toplamı;

a. x bir süreklilik noktası ise $f(x)$ e

b. x bir düzgün süreksizlik noktası ise $\dfrac{f(x^+) + f(x^-)}{2}$ ye

c. Aralığın uç noktalarında $f(-\pi) = f(\pi) = \dfrac{f(-\pi^+) + f(\pi^-)}{2}$ ye

eşit olan bir Fourier serisine açılabilir. Belirtelim ki, herhangi bir trigonometrik seri yakınsak ya da ıraksak olabilir. Yakınsak olan her trigonometrik serinin bir Fourier serisi olması gerekmez.

3.4. LİNEER UZAYLAR

Bir lineer uzay tanımlamak için, elemanlarına vektör diyeceğimiz boş olmayan bir küme ve elemanlarına skaler diyeceğimiz bir cisim ve uygun tanımlanmış iki işleme ihtiyaç vardır.

Tanım 3.4.1.

$X \neq \varnothing$ bir küme ve F de bir cisim olsun.

$+ : X \times X \to X$ ve $\quad . : F \times X \to X$

$(x, y) \to x + y \quad (\lambda, x) \to \lambda x$

fonksiyonları aşağıdaki koşulları sağlarsa, X e F üzerinde bir "lineer uzay (vektör uzayı)" denir [Kızmaz, 1993].

$\forall\ x, y, z \in X$, $\quad \forall\ \lambda, \mu \in F$ için

i. $x+y=y+x$, (+ işleminin değişme özelliği)

ii. $(x+y)+z=x+(y+z)$, (+ işleminin birleşme özelliği)

iii. $\exists\,\theta\in X$, öyle ki $x+\theta=x$, (+ işlemine göre etkisiz elemanın varlığı)

iv. $\exists -x\in X$, öyle ki $x+(-x)=\theta$, (+ işlemine göre ters elemanın varlığı)

v. $1.x=x$, (Birimle çarpım özelliği)

vi. $\lambda.(x+y)=\lambda.x+\lambda.y$

vii. $(\lambda+\mu).x=\lambda.x+\mu.x$ (Skalerle çarpmanın dağılma özelliği)

viii. $\lambda(\mu.x)=(\lambda\mu).x$ (Skalerle çarpmanın birleşme özelliği)

Burada $1\in F$, cismin çarpma işlemine göre birim elemanıdır. $\lambda.x$ bundan sonra λx ile gösterilecektir. İlk dört aksiyom X in $+$ işlemine göre bir Abel gurubu olduğunu gösterir. Geriye kalan dört aksiyom ise “skalerle çarpma” aksiyomları olarak anılır. Bir gurupta birim eleman ve her eleman tersinin tek olduğu bilindiğine göre bu özellikler açık olarak lineer uzaylar için de geçerlidir.

Lineer uzaylar, üzerinde tanımlandıkları cisme göre isim alırlar. Örneğin, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde tanımlı ise “kompleks lineer uzay” , $\mathbb{R}$ cismi üzerinde tanımlı ise “reel lineer uzay” olarak adlandırılır.

Örnek 3.4.1.

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi, $\mathbb{C}$ cismi üzerinde bir lineer uzaydır.

Örnek 3.4.2.

$\mathbb{R}^n$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir reel lineer uzaydır.

$x=(x_1,x_2,...,x_n)$, $y=(y_1,y_2,...,y_n)\in\mathbb{R}^n$ ise

$x+y=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$ ve $\lambda\in\mathbb{R}$ için

$\lambda x=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)$

ile tanımlanır. Fakat $\lambda\in\mathbb{C}$ ise λx, $\mathbb{R}^n$ ye ait olmayabilir. Yani $\mathbb{R}^n$ kompleks lineer uzay değildir.

Örnek 3.4.3.

(X,T) topolojik uzay ve $C(X)=\{f\,/\,f:X\to\mathbb{R}\ \textit{sürekli}\}$ kümesini gözönüne alalım

$\forall x\in X$, $\forall f,g\in C(X)$ ve $\forall\lambda\in\mathbb{R}$ için

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x)$$

$$(\lambda f)(x)=\lambda f(x)$$

ile tanımlanırsa, $C(X)$ bir reel lineer uzaydır.

Örnek 3.4.4.

s bütün kompleks terimli dizilerin kümesini göstersin.

$x=(x_n), y=(y_n)\in s$ ve $\forall\lambda\in\mathbb{C}$ için

$$x+y=(x_n+y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...)$$

$$\lambda x=(\lambda x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,...)$$

ile tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemleri altında s bir lineer uzaydır.

Örnek 3.4.5.

$$\ell_\infty=\left\{x=(x_k)\ /\ \sup k|x_k|<\infty,\ \ x_k\in\mathbb{C}\right\}$$

$$\ell_p=\left\{x=(x_k)\ /\ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p<\infty,\ p>0,\ x_k\in\mathbb{C}\right\}$$

$$c_0=\left\{x=(x_k)\ /\ \lim_k x_k=0,\ x_k\in\mathbb{C}\right\}$$

$$c=\left\{x=(x_k)\ /\ \lim_k x_k=a\ \text{ var},\ x_k\in\mathbb{C}\right\}$$

kümeleri, bir önceki örnekte tanımlanan işlemler altında lineer uzaydır.

Örnek 3.4.6.

$X_1,X_2,...,X_n$ lineer uzaylar ise $x_i,y_i\in X_i$,

$$(x_1,x_2,...,x_n)+(y_1,y_2,...,y_n)=(x_1+y_1,x_2+y_2,...,x_n+y_n)$$

$$\lambda(x_1,x_2,...,x_n)=(\lambda x_1,\lambda x_2,...,\lambda x_n)$$

işlemleri altında

$$X=X_1\times X_2\times...\times X_n$$

de bir lineer uzaydır.

X kümesi bir lineer uzay ise, X in elemanlarına vektör, $\mathbb{C}$ cisminin elemanlarına da skaler diyoruz. Skalerler vektörlere katsayı olarak gelecektir.

X bir lineer uzay ve $\lambda\in\mathbb{C}$ tespit edilsin.

$h: X \to X$, $h(x) = \lambda x$ fonksiyonu "skalerle çarpma" (homoteti) ve bir $a \in X$ için,

$f: X \to X$, $f(x) = a + x$ fonksiyonu da "a kadar öteleme" adını alır.

$x_1, x_2, ..., x_n \in X$, $\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_n \in \mathbb{C}$ olmak üzere

$x = \sum_{k=1}^{n} \lambda_k x_k$ vektörüne $x_1, x_2, ..., x_n$ vektörlerinin bir "sonlu lineer kombinasyonu" denir [Kızmaz, 1993].

3.5. NORMLU LİNEER UZAYLAR

Tanım 3.5.1.

X bir lineer uzay ve $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa buna bir "norm fonksiyonu" (norm), $(X, \|.\|)$ ikilisine de bir "normlu lineer uzay" denir [Kızmaz, 1993].

1) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

2) $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$

3) $\forall x, y \in X$, $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$.

(2) özelliğine, normun mutlak homojeniteliği, (3) özelliğine ise üçgen eşitsizliği adı verilir. (3) de $-x = y$ seçilerek (2) yardımıyla $\forall x \in X$, $\|x\| \ge 0$ olduğu görülür. Buna göre norm, negatif değerli olmayan bir fonksiyondur.

X bir lineer uzay, $p > 0$ ve $\|.\|: X \to \mathbb{R}$ fonksiyonu

i) $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$

ii) $\forall x \in X$, $\forall \lambda \in \mathbb{C}$, $\|x\| = |\lambda|^p \|x\|$

iii) $\forall x, y \in X$, $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

koşullarını sağlarsa X uzayına "p normlu lineer uzay" denir. Buna göre normlu lineer uzay $1-$normlu uzaydır.

Örnek 3.5 1.

$\mathbb{R}$ reel lineer uzayında ve $\mathbb{C}$ lineer uzayında $\|x\| = |x|$ bir normdur.

Örnek 3.5.2.

$\mathbb{R}^n$ de, $x=(x_1,...,x_n)$ olmak üzere,

$$\|x\|_1 = \left(\sum_{k=1}^{n}|x_k|^2\right)^{1/2}$$

$$\|x\|_2 = \sum_{k=1}^{n}|x_k|$$

$$\|x\|_3 = \max_{1\le k\le n}|x_k|$$

birer normdur. Aynı normlar $\mathbb{C}^n$ için tanımlanabilir.

Örnek 3.5.3.

$$\ell_p = \left\{ x=(x_k) \ / \ \sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p < \infty, \ x_k \in \mathbb{C}, \ p\in[1,\infty) \right\}$$

bir lineer uzaydır ve bu uzayda

$$\|x\| = \left(\sum_{k=1}^{\infty}|x_k|^p\right)^{1/p}$$

ile tanımlanan fonksiyon bir normdur [Stepanets, 2005].

Şimdi bazı fonksiyon uzaylarını ele alalım. $(0,2\pi)$ üzerinde, 2π -periyodik toplanabilir fonksiyonların kümesi $L(0,2\pi)$ olsun. $L(0,2\pi)$'nin alt kümeleri olan temel fonksiyonel uzaylar aşağıdaki gibidir

C, $\|f\|_C := \max_t |f(t)|$ normu ile tüm eksen üzerinde sürekli 2π -periyodik $f(t)$ fonksiyonlarının uzayını

1. M , $\|f\|_M := ess\sup_t |f(t)|$ normu ile 2π -periyodik *h.h.h.y.* sınırlı $f(t)$ fonksiyonlarının uzayını

2. L_p, $1\le p<\infty$, $\|f\|_{L_p} := \left(\int_0^{2\pi}|f(t)|^p\,dt\right)^{1/p}$ normu ile $(0,2\pi)$ üzerinde p. kuvvetten toplanabilir 2π -periyodik $f(t)$ fonksiyonlarının uzayını gösterir.

Gösterim olarak bundan sonra $\|f\|_{L_p}$ yerine $\|f\|_p$ ve $\|f\|_\infty = \|f\|_{L_\infty} = \|f\|_M$ eşitliğini göz önünde tutarak, $\|f\|_M$ yerine $\|f\|_\infty$ alınacaktır. Buradan anlaşılır ki M

uzayı yapısal olarak L_∞ uzayı ile aynıdır. Açıktır ki, herhangi p, p' sayıları için $1 < p < p' < \infty$ olmak üzere,

$$C \subset L_\infty \subset L_{p'} \subset L_p \subset L_1$$

sağlanır [Jain ve Gupta, 1986].

Örnek 3.5.4.

$E = [0,16]$ ve $f : E \to \mathbb{R}$

$$f(x) = x^{-1/4}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $f \in L^1(E)$ fakat $f \notin L^4(E)$ dir.

Örnek 3.5.5.

$E = \left[0, \frac{1}{2}\right]$ ve $f : E \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \left[x \log^2\left(\frac{1}{x}\right)\right]^{-1}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu $f \in L^1(E)$ dir.

Örnek 3.5.6.

$E =]0, \infty[$ ve $f : E \to \mathbb{R}$

$$f(x) = (1+x)^{-1/2}$$

şeklinde tanımlanan f fonksiyonu; $2 < p < \infty$ aralığındaki her bir p için $f \in L^P(E)$ dir.

$L^P(E)$, $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzaydır. Gerçekten, böyle olduğu aşağıdaki şekilde anlaşılabilir:

a) $f, g \in L^P(E) \Rightarrow f + g \in L^P(E)$, çünkü

$$\begin{aligned} |f+g|^P &\le 2^P \max\left\{|f|^p, |g|^p\right\} \\ &\le 2^P\left(|f|^p + |g|^p\right). \end{aligned}$$

b) $f \in L^P(E)$ ve $\alpha \in \mathbb{R} \Rightarrow \alpha f \in L^P(E)$.

Tanım 3.5.2.

E, sonlu ölçüye sahip ölçülebilir bir küme olsun$\left(m(E)>0\right)$. f, E kümesi üzerinde ölçülebilir, reel değerli bir fonksiyon olmak üzere. E üzerinde *h.h.h.y.* $|f(x)|\leq k$ olacak şekilde bir k reel sayısı varsa, bu k sayısına f fonksiyonu için *esaslı sınırdır* denir.

Bir f fonksiyonu bir esaslı sınıra sahip ise, f fonksiyonuna *esaslı sınırlıdır* denir. Başka bir deyişle f, E üzerinde tanımlı bir fonksiyon olmak üzere, f fonksiyonu ölçümü sıfır olan küme hariç sınırlı ise, f ye esaslı sınırlıdır denir. E üzerinde f nin esaslı supremumu

$$ess\sup|f(x)|=\inf\left\{k: h.h.h.y.\ |f(x)|\leq k\right\}$$

ya da buna denk olan

$$ess\sup|f(x)|=\inf\left\{k: m\left(\left\{x\in E: |f(x)|>k\right\}\right)=0\right\}$$

ile tanımlanır. Buna göre $L_\infty(E)$ uzayı, E üzerinde tanımlı esaslı sınıra sahip olan bütün ölçülebilir fonksiyonlar sınıfıdır ve bu fonksiyonlar sınıfı

$$L_\infty(E)=\left\{f: ess\sup|f|<\infty\right\}$$

ile gösterilir [Jain ve Gupta, 1986].

Örnek 3.5.7.

E üzerinde sınırlı her fonksiyon $L_\infty(E)$ uzayındandır.

Örnek 3.5.8.

$f:[a,b]\to\mathbb{R}$, $f(x)=\begin{cases}1 & ,x\in\mathbb{Q}' \\ \infty & ,x\in\mathbb{Q}\end{cases}$ olmak üzere, $f\in L_\infty[a,b]$ dir.

Lemma 3.5.1.

[Jain ve Gupta, 1986]

$f\in L_\infty[a,b]$ olsun. Bu durumda,

a) E üzerinde *h.h.h.y.* $|f(x)|\leq\|f\|_\infty$

b) $\|f\|_\infty=\sup\left\{k: m\left(\left\{x\in E: |f(x)|\geq k\right\}\right)\neq 0\right\}$.

Teorem 3.5.1.

E, sonlu ölçüye sahip ölçülebilir bir küme olsun. Bu durumda her bir $p(1 \le p < \infty)$, sayısı için $L_\infty(E) \subset L_p(E)$ dir. Ayrıca $f \in L_\infty(E)$ ise $\|f\|_\infty = \lim_{p\to\infty} \|f\|_p$ [Jain ve Gupta, 1986].

3.6. BAZI EŞİTSİZLİKLER

Bu bölümde ileride karşılaşılacak bazı eşitsizlikler verilecektir.

Hölder Eşitsizliği:

$p > 1$ ve $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ için $f(x) \in L^p(E)$ ve $g(x) \in L^q(E)$ olsun. $f(x).g(x) \in L^1(E)$ olmak üzere

$$\left| \int_E f(x) g(x) dx \right| \le \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} \left(\int_E |g(x)|^q dx \right)^{1/q}$$

olur [A. Zygmund, 1959].

Minkowski Eşitsizliği:

$p \ge 1$ için $f(x), g(x) \in L^p(E)$ ise

$$\left| \int_E |f(x) + g(x)|^p dx \right|^{1/p} \le \left(\int_E |f(x)|^p dx \right)^{1/p} + \left(\int_E |g(x)|^p dx \right)^{1/p}$$

olur [A. Zygmund, 1959].

Genelleştirilmiş Minkowski Eşitsizliği:

Uygun koşullar altında $1 \le p < \infty$ için aşağıdaki eşitsizlik f fonksiyonu için elde edilir [A. Zygmund, 1959].

.

$$\left[\int_a^b \left| \int_c^d f(x,y) dy \right|^p dx \right]^{1/p} \le \int_c^d \left[\int_a^b |f(x,y)|^p dx \right]^{1/p} dy .$$

Jordan Eşitsizliği:

$0 < |x| \le \pi/2$ ise, bu durumda

$$\frac{2}{\pi} \le \frac{\sin x}{x} < 1$$

eşitsizliği geçerlidir [P. S. Bullen, 1997].

Abel Dönüşümü:

(u_k) ve (v_k) negatif olmayan iki dizi olsun. $k \geq 0$ bir tamsayı, $U_{-1} = 0$ ve $U_k = u_0 + u_1 + ... + u_k$ olmak üzere $0 \leq m \leq n$ için

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m}^{n-1} U_k \left(v_k - v_{k+1}\right) - U_{m-1} v_m + U_n v_n$$

eşitliğine (u_k) ve (v_k) dizilerinin Abel dönüşümü adı verilir [A. Zygmund, 1959].

3.7. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

$A := (a_{nk})$ $k, n = 1,2,3,...$ sonsuz bir matris olmak üzere, verilen $x := (x_n)$ dizisi için " A-dönüşüm dizisi" $Ax := \left((Ax)_n\right)$ ile gösterilir ve

$$(Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\forall n$ için seri yakınsak kabul edilmektedir. Ayrıca $\lim\limits_{n\to\infty} (Ax)_n = L$ ise x dizisi L değerine A-toplanabilirdir denir.

X ile Y reel ya da kompleks terimli dizilerden oluşan iki dizi uzayı ve $A := (a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere eğer her $x \in X$ için $\left((Ax)_n\right)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in Y$ ise , $A := (a_{nk})$ matrisi X uzayının Y uzayı içine bir matris dönüşümü tanımlar denir ve X uzayından Y uzayı içine tanımlı tüm matrislerin sınıfı (X, Y) ile gösterilir. Eğer A, X uzayından Y uzayı içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X, Y)$ şeklinde yazılır. $(X, Y; p)$ ile toplam ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı gösterilecektir. Örneğin $A \in (c, c; p)$ olması, $x_n \to L$ olduğunda $(Ax)_n \to L$ olması demektir. Böyle matrislere "regüler matris" adı verilir [Boos, 2000].

Toplanabilme teorisinde $C_1 := (a_{nk})$ matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}; & 1 \leq k \leq n \\ 0\,; & k > n \end{cases}$$

ile verilir ve " (birinci mertebeden) Cesáro matrisi" olarak adlandırılır. Örneğin C_1 Cesáro matrisi regülerdir. Bir $A:=\left(a_{nk}\right)$ matrisinin regüler olması Silverman-Toeplitz koşulları olarak da bilinen aşağıdaki teorem ile karakterize edilmektedir.

Teorem 3.7.1. (Silverman-Toeplitz).

Bir $A:=\left(a_{nk}\right)$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

i. $\|A\|=\sup\limits_{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left|a_{nk}\right|<\infty$

ii. Her k için $\lim\limits_{n} a_{nk}=0$

iii. $\lim\limits_{n}\sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk}=1$

koşullarının sağlanmasıdır [Wilansky, 1984].

$p_0=0$, $p_i\geq 0$, $(i=1,2,...)$ ve $P_n=p_0+p_1+...+p_n$ olsun. Iraksak bir serinin kısmi toplamları $S_0,S_1,S_2,...$ olmak üzere

$$\lim_{m\to\infty}\frac{p_m S_0+p_{m-1}S_1+...+p_1 S_{m-1}+p_0 S_m}{P_m}$$

sonlu ise, bu limitin değerine serinin Nörlund anlamında toplamı veya (N,p_n) toplamı denir. (N,p_n) toplamı olan seriye (N,p_n) toplanabilir seri denir. Ayrıca

$$P_n=p_0+p_1+p_2+...+p_n\neq 0 \quad \left(n\geq 0\right) \ ; \ p_{-1}=P_{-1}=0$$

olmak üzere, Nörlund ve Riesz ortalamaları (veya toplamları) sırası ile

$$N_n\left(f;x\right)=\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_{n-m}s_m\left(f;x\right)$$

ve

$$R_n\left(f;x\right)=\frac{1}{P_n}\sum_{m=0}^{n} p_m s_m\left(f;x\right)$$

şeklinde verilir.

Yukarıda verilen ortalamalarda, $\forall n\geq 0$ için $p_n=1$ alınırsa $N_n\left(f;x\right)$ ve $R_n\left(f;x\right)$ toplamlarının her ikisi de

$$\sigma_n\left(f;x\right)=\frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} s_m\left(f;x\right)$$

Cesáro toplamını verecektir [Wilansky, 1984].

3.7.1. Cesáro Alt Metodu

F doğal sayılar kümesinin sonsuz bir alt kümesi ve pozitif tamsayıların kesin artan bir dizisinin görüntüsü olarak $F=\{\lambda(n)\}_{n=1}^{\infty}$ olsun. $\{x_k\}$ reel ya da kompleks sayıların bir dizisi olmak üzere C_λ -Cesáro alt metodu

$$\left(C_\lambda x\right)_n = \frac{1}{\lambda(n)}\sum_{k=1}^{\lambda(n)} x_k, \quad (n=1,2,...)$$

ile tanımlanır. C_λ -metodu Cesáro matrisinden satırların bir kümesini silerek elde edilir. C_λ -metodunun temel özellikleri [Armitage ve Maddox, 1989] ve [Osikiewicz, 2000] çalışmalarında bulunmaktadır. Bundan başka bu alt metodu göz önünde tutarak Nörlund ve Riesz ortalamalarının alt metotları

$P_{\lambda(n)} = p_0 + p_1 + p_2 + ... + p_{\lambda(n)} \neq 0 \quad (n \geq 0)$ ve $p_{-1} = P_{-1} = 0$

olmak üzere sırasıyla

$$N_n^\lambda(f;x) = \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} s_m(f;x)$$

ve

$$R_n^\lambda(f;x) = \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m s_m(f;x)$$

eşitlikleri ile verilir [Değer ve vd., 2012]. Yukarıdaki toplamlar $\forall n$ için $p_n = 1$ olduğunda

$$\sigma_n^\lambda(f;x) = \frac{1}{\lambda(n)+1}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} s_m(f;x)$$

C_λ -metodunu verecektir. C_λ metodunda, $\lambda(n)=n$ alınırsa

$$\sigma_n(f;x) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} s_m(f;x)$$

Cesáro toplamını verecektir.

Son olarak daha sonra kullanılacak olan temel bir teoremi verelim.

Teorem 3.7.1.1. (Lagrange Ortalama Değer Teoremi).

$[a,b]$ kapalı aralığında sürekli ve (a,b) açık aralığında diferansiyellenebilen $f(x)$ fonksiyonu için,

$$\frac{f(b)-f(a)}{b-a}=f'(\xi)$$

olacak şekilde bir $\xi \in (a,b)$ noktası vardır [A. Zygmund, 1959].

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Aşağıdaki sonuçlar Fourier serileri ve yaklaşım teorisinde, Fourier serilerinin yaklaşım hızının hangi koşullar altında belirlendiğini ortaya koyması açısından önemlidir.

4.1. ANA BULGULAR

Elde edilen sonuçlar α ve p nin durumları göz önünde tutularak verilmiştir.

Teorem 4.1.

$f \in Lip(\alpha, p)$ ve (p_n) pozitif bir dizi olsun.

(i) $p > 1,$ $0 < \alpha < 1$ ve $(p_n) \in AMIMS$

$$\left(\lambda(n)+1\right) p_{\lambda(n)} = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right) \tag{4.1}$$

(ii) $p > 1,$ $0 < \alpha < 1,$ $(p_n) \in AMDMS$

koşullardan herhangi biri sağlanırsa, bu durumda

$$\left\| f - N_n^{\lambda} \right\|_p = \mathrm{O}\left(\lambda(n)^{-\alpha}\right)$$

olur.

$$AMDS \subset AMDMS \text{ ve } AMIS \subset AMIMS$$

olduğundan Teorem 4.1 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Sonuç 4.1.

$f \in Lip(\alpha, p)$ ve (p_n) pozitif bir dizi olsun.

(i) $p > 1,$ $0 < \alpha < 1,$ $(p_n) \in AMIS$ ve (4.1) sağlansın

(ii) $p > 1,$ $0 < \alpha < 1$ ve $(p_n) \in AMDS$

koşullarından herhangi biri sağlanırsa, bu durumda

$$\left\| f - N_n^{\lambda} \right\|_p = \mathrm{O}\left(\lambda(n)^{-\alpha}\right)$$

olur.

Bu sonuç hem monotonluk koşulu hem de C_λ -alt metoduna göre [Leindler, 2005] de verilen Teorem 1'in (i) ve (ii) durumlarını genelleştirir. Böylece Chandra'nın sonuçları genelleştirilir [Chandra, 2002]. Ayrıca bu sonuç $HBVMS$ ve $RBVMS$ dizi sınıflarına göre de yazılabilir.

Bir sonraki sonuç, [Leindler, 2005] de verilen Teorem 1'in $p>1$, $\alpha=1$ durumu için monoton dizilerden daha genel olan diziler ile ilgilidir. Buna göre (p_n) azalmayan ve (4.1) sağlanırsa bu durumda

$$\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1} |\Delta p_k| = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}/\lambda(n)\right)$$

ifadesi sağlanır. Diğer taraftan (p_n) artmayan ise o zaman

$$\sum_{k=1}^{\lambda(n)-1} k|\Delta p_k| = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$$

ifadesi de doğrudur. O halde yukarıdaki ifadeleri sağlayan dizi sınıfı monoton dizilerin sınıfından daha geneldir. Buna göre aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.

$f \in Lip(1,p)$ ve (p_n) pozitif bir dizi olsun. Aşağıdaki durumlardan biri sağlanırsa

(i) $p>1$, $\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1} |\Delta p_k| = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}/\lambda(n)\right)$ ve (4.1) sağlansın

(ii) $p>1$ *ve* $\sum_{k=1}^{\lambda(n)-1} k|\Delta p_k| = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$

o zaman

$$\left\| f - N_n^{\lambda} \right\|_p = \mathrm{O}\left(n^{-1}\right) \tag{4.2}$$

elde edilir.

Uyarı 4.1.

$(\lambda(n)+1) = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ koşuluyla $(p_n) \in RBVS$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{\lambda(n)-1} k|\Delta p_k| = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$$

doğru olduğu açıktır. Bu nedenle Teorem 4.2. (ii) 'yi göz önünde tutarak aşağıdaki sonuç yazılabilir:

Sonuç 4.2.

$f \in Lip(1,p)$, $p>1$ olsun. $(p_n) \in RBVS$ ve $(\lambda(n)+1) = O(P_{\lambda(n)})$ sağlanırsa, o zaman

$$\left\| f - N_n^\lambda \right\|_p = O(n^{-1}) \tag{4.3}$$

elde edilir.

Aşağıdaki iki sonuç, $\lambda(n) = n$ durumunda $p=1$ ve $0<\alpha<1$ için [Leindler, 2005] ’in çalışmasındaki sonuçları verir.

Teorem 4.3.

$f \in Lip(\alpha,1)$, $0<\alpha<1$ ve (p_n) pozitif bir dizi olsun.

$$\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1} |\Delta p_k| = O\left(P_{\lambda(n)} / \lambda(n)\right)$$

koşulu sağlanırsa,

$$\left\| f - N_n^\lambda \right\|_1 = O\left((\lambda(n))^{-\alpha}\right)$$

elde edilir.

Uyarı 4.2.

$p_n = 1$ durumunda Teorem 4.3’ te $N_n^\lambda(f;x)$, $\sigma_n^\lambda(f,x)$’in metodunu verir. Böylece,

$$\left\| f - \alpha_n^\lambda(f) \right\|_1 = O\left((\lambda(n))^{-\alpha}\right) \tag{4.4}$$

ifadesi elde edilir. Bir sonraki sonuç Riesz alt metodu ile ilgilidir.

Teorem 4.4.

$f \in Lip(\alpha,1)$, $0<\alpha<1$ ve (p_n) pozitif bir dizi olsun. (p_n) (4.1)’ i sağlarsa ve

$$\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1} |\Delta p_k| = O\left(P_{\lambda(n)} / \lambda(n)\right)$$

koşulu elde edilirse

$$\left\| f - R_n^\lambda \right\|_1 = O\left((\lambda(n))^{-\alpha}\right) \tag{4.5}$$

olur.

Uyarı 4.3.

(4.1) koşulu ile $(p_n) \in HBVS$ olsun. O zaman

$$\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1} |\Delta p_k| = \mathrm{O}\left(\left(\lambda(n)\right)^{-1} P_{\lambda(n)}\right)$$

eşitliği sağlanır. Dolayısıyla, Teorem 4.4.'e göre aşağıdaki sonuç yazılır:

Sonuç 4.3.

$f \in Lip(\alpha, 1)$, $0 < \alpha < 1$ olsun. $(p_n) \in HBVS$ ve (4.1) sağlanırsa, o zaman (4.5) sağlanır.

Bundan başka, genelleştirilmiş Riesz metodu için Teorem 4.1 dekine benzer şekilde aşağıdaki sonuç elde edilir.

Teorem 4.5.

Varsayalım ki $f \in Lip(\alpha, p)$ ve (p_n) pozitif bir dizi olsun. Aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa,

(i) $p > 1$, $0 < \alpha < 1$, $(p_n) \in AMDMS$ ve $\left(\lambda(n) + 1\right) = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ sağlansın,

(ii) $p > 1$, $0 < \alpha < 1$, $(p_n) \in AMIMS$

bu durumda

$$\left\| f - R_n^{\lambda} \right\|_p = \mathrm{O}\left(\left(\lambda(n)\right)^{-\alpha}\right)$$

elde edilir.

[Mohapatra ve Szal, 2012]' da, Başlangıcı Sınırlı Varyasyonlu Dizi (HBVS) sınıfı, azalmayan dizilerin (NDS) sınıfını içerdiğini biliyoruz. Bunun için, bu gerçeği dikkate alarak, [Mohapatra ve Szal, 2012]'den hareket ederek [Chandra, 2002]'de verilen Teorem 3'ün genelleştirilmesi aşağıdaki şekilde yazılabilir.

Teorem 4.6.

$f \in Lip(1,1)$, ve (p_n) (4.1) ile pozitif olsun. Bazı $\eta > 0$ için $\left((n+1)^{-\eta} p_n\right) \in HBVS$ ise, o zaman

$$\left\| f - R_n^{\lambda}(f) \right\|_1 = \mathrm{O}\left(n^{-1}\right) \tag{4.6}$$

elde edilir.

4.2. YARDIMCI BULGULAR VE İSPATI

Bu bölümde, bölüm 3'te verilen teoremlerin ispatı için ihtiyaç duyulan yardımcı sonuçlar verilecektir.

Lemma 4.1.

$(p_n) \in AMDMS$ veya $(p_n) \in AMIMS$ ve $(\lambda(n)+1)\, p_{\lambda(n)} = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$

sağlanırsa, o zaman, $0<\alpha<1$ için,

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)} (m+1)^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m} = \mathrm{O}\left(\left(\lambda(n)+1\right)^{-\alpha} P_{\lambda(n)}\right)$$

elde edilir.

İspat.

Bu Lemma'nın ispatında [Mohapatra ve Szal, 2012]'deki benzer tekniği kullanabiliriz. $r = \left[\!\left[\dfrac{\lambda(n)}{2} \right]\!\right]$ olsun. Böylece,

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)} (m+1)^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m} = \sum_{m=0}^{r} (m+1)^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m} + \sum_{m=r+1}^{\lambda(n)} m^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m}$$

$$\leq \sum_{m=0}^{r} (m+1)^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m} + (r+1)^{-\alpha} P_{\lambda(n)} .$$

İlk olarak yukarıdaki eşitsizliğin sağ tarafındaki toplam için Abel dönüşümü uygulanırsa ve sonra $(m+1, m+2)$ aralığında $0<\alpha<1$ için $f(x) = x^{-\alpha}$ fonksiyonu için Lagrange ortalama değer teoremi kullanılırsa,

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)} (m+1)^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m} \leq \sum_{m=0}^{r-1} \left\{ (m+1)^{-\alpha} - (m+2)^{-\alpha} \right\} + \sum_{k=0}^{m} m^{-\alpha} p_{\lambda(n)-k} + (r+1)^{-\alpha} P_{\lambda(n)}$$

$$= \sum_{m=0}^{r-1} \frac{\alpha (m+1)^{\alpha-1}}{(m+1)^{\alpha} (m+2)^{\alpha}} + \sum_{k=0}^{m} p_{\lambda(n)-k} + (r+1)^{-\alpha} P_{\lambda(n)}$$

$$\leq \sum_{m=0}^{r-1} \frac{1}{(m+2)^{\alpha}} \left(\frac{1}{(m+1)} \sum_{k=0}^{m} p_{\lambda(n)-k} \right) + (r+1)^{-\alpha} P_{\lambda(n)}$$

sonucu elde edilir.

$(p_n) \in AMIMS$ ve (4.1) sağlanırsa, bu durumda

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)} (m+1)^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m} \leq p_{\lambda(n)} \sum_{m=0}^{r-1} \frac{1}{(m+2)^{\alpha}} + (r+1)^{-\alpha} P_{\lambda(n)} =$$

$$=O\left(\frac{p_{\lambda(n)}}{1+\lambda(n)}\right)\left(1+\lambda(n)\right)^{1-\alpha}+\left(r+1\right)^{-\alpha}P_{\lambda(n)}=O\left(\left(1+\lambda(n)\right)^{-\alpha}P_{\lambda(n)}\right) \tag{4.7}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $\left(p_n\right)\in AMDMS$ ise o zaman

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)}\left(m+1\right)^{-\alpha}p_{\lambda(n)-m}\le\left(\frac{1}{\left(r+1\right)}\sum_{k=0}^{r}p_{\lambda(n)-k}\right)\sum_{m=0}^{r-1}\frac{1}{\left(m+2\right)^{\alpha}}+\left(r+1\right)^{-\alpha}P_{\lambda(n)}$$

$$\le\left(r+1\right)^{-\alpha}\sum_{k=0}^{r}p_{\lambda(n)-k}+\left(r+1\right)^{-\alpha}P_{\lambda(n)}=O\left(\left(1+\lambda(n)\right)^{-\alpha}P_{\lambda(n)}\right) \tag{4.8}$$

olur. Böylece istenen sonuç (4.7) ve (4.8) den elde edilir.

Lemma 4.2.

$\left(p_n\right)\in AMDMS$ veya $\left(p_n\right)\in AMIMS$ ve $\left(\lambda(n)+1\right)=\mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ sağlanırsa, o zaman, $0<\alpha<1$ için,

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)}\left(m+1\right)^{-\alpha}p_m=\mathrm{O}\left(\left(\lambda(n)+1\right)^{-\alpha}P_{\lambda(n)}\right)$$

doğrudur.

Burada Lemma 4.2.'nin ispatı Lemma 4.1.'in ispatına benzer olduğundan ispat verilmeyecektir.

Sonuç 4.1'in ispatı Teorem 4.1.'den açıktır. Ancak ispatı yukarıdaki Lemmanın ispatından çok az farklı olan aşağıdaki Lemmayı kullanarak Sonuç 4.1 ispatlanabilir.

Lemma 4.3.

$\left(p_n\right)\in AMDS$ veya $\left(p_n\right)\in AMIS$ ve (4.1) sağlansın. O zaman $0<\alpha<1$ için,

$$\sum_{m=1}^{\lambda(n)}m^{-\alpha}p_{\lambda(n)-m}=\mathrm{O}\left(n^{-\alpha}P_{\lambda(n)}\right) \tag{4.9}$$

elde edilir.

İspat.

$r=\left[\!\left[\frac{\lambda(n)}{2}\right]\!\right]$ olsun. Böylece,

$$\sum_{m=1}^{\lambda(n)}\left(m\right)^{-\alpha}p_{\lambda(n)-m}=\sum_{m=1}^{r}\left(m\right)^{-\alpha}p_{\lambda(n)-m}+\sum_{m=r+1}^{\lambda(n)}m^{-\alpha}p_{\lambda(n)-m} \tag{4.10}$$

olur.

$(p_n) \in AMDS$ ise, bu durumda

$$\sum_{m=1}^{r} m^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m} \leq K p_{\lambda(n)-r} \sum_{m=1}^{\lambda(n)} m^{-\alpha} = \mathrm{O}\left(n^{1-\alpha}\right) p_{\lambda(n)-r} \tag{4.11}$$

ve

$$\sum_{m=r+1}^{\lambda(n)} m^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m} \leq (r+1)^{-\alpha} \sum_{m=1}^{\lambda(n)} m^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m} = (r+1)^{-\alpha} P_{\lambda(n)} \tag{4.12}$$

sağlanır. Böylece (4.10), (4.11) ve (4.12) den, (4.9) elde edilir. $(p_n) \in AMIS$ ve (4.1) koşulu sağlanırsa

$$\sum_{m=1}^{r} m^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m} \leq K p_{\lambda(n)} \sum_{m=1}^{\lambda(n)} m^{-\alpha} = \mathrm{O}\left(\frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)} \lambda(n)^{1-\alpha}\right) \tag{4.13}$$

olur. (4.12) ve (4.13)'ü kullanarak yine (4.9) elde edilir.

Lemma 4.4.

Aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$A_n^{\lambda} = \sum_{m=1}^{\lambda(n)} \left| \Delta_m \left\{ m^{-1} \left(P_{\lambda(n)} - P_{\lambda(n)-m} \right) \right\} \right| = O(1) \sum_{m=0}^{\lambda(n)-1} \left| \Delta_{p_m} \right| \tag{4.14}$$

$\sum_{m=1}^{\lambda(n)-1} m \left| \Delta_{p_m} \right| = O\left(P_{\lambda(n)}\right)$ sağlanırsa ve bu durumda

$$A_n^{\lambda} = \mathrm{O}\left(\frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)}\right) \tag{4.15}$$

dir.

İspat.

Basit bir analiz ile,

$$U_m^{\lambda(n)} := P_{\lambda(n)} - P_{\lambda(n)-m}$$

olmak üzere

$$\left| \Delta_m \left\{ m^{-1} U_m^{\lambda(n)} \right\} \right| = \left| \frac{p_{\lambda(n)} - p_{\lambda(n)-m-1}}{m(m+1)} - \frac{P_{\lambda(n)-m-1} - P_{\lambda(n)-m}}{m} \right|$$

$$= \left| \frac{1}{m(m+1)} \left\{ \sum_{k=\lambda(n)-m}^{\lambda(n)} p_k - (m+1) p_{\lambda(n)-m} \right\} \right|$$

elde edilir. Kolayca gösterilebilir ki [Leindler, 2005] dekine benzer şekilde

$$\left|\left\{\sum_{k=\lambda(n)-m}^{\lambda(n)} p_k-(m+1)p_{\lambda(n)-m}\right\}\right| \le \sum_{k=1}^{m} k\left|p_{\lambda(n)-k+1}-p_{\lambda(n)-k}\right|$$

sağlanır. Bunun sonucu olarak

$$\sum_{m=1}^{\lambda(n)}\left|\Delta_m\left(\frac{U_m^{\lambda(n)}}{m}\right)\right| \le \sum_{m=1}^{\lambda(n)}\frac{1}{m(m+1)}\sum_{k=1}^{m} k\left|p_{\lambda(n)-k+1}-p_{\lambda(n)-k}\right|$$

$$\le \sum_{k=1}^{\lambda(n)} k\left|p_{\lambda(n)-k+1}-p_{\lambda(n)-k}\right|\left(\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}\right)=\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta p_k\right|$$

elde edilir. Dolayısıyla Lemmanın ilk kısmı ispatlanır. Şimdi Lemmanın ikinci kısmını doğrulayalım. $r=\left[\!\left[\frac{\lambda(n)}{2}\right]\!\right]$ olmak üzere,

$$A_n^{\lambda} \le \sum_{m=1}^{\lambda(n)}\frac{1}{m(m+1)}\sum_{k=1}^{m} k\left|p_{\lambda(n)-k+1}-p_{\lambda(n)-k}\right|$$

$$=\left(\sum_{m=1}^{r}+\sum_{m=r+1}^{\lambda(n)}\right)\frac{1}{m(m+1)}\sum_{k=1}^{m} k\left|\Delta_k p_{\lambda(n)-k}\right| := I+J \tag{4.16}$$

sağlanır. Buna göre ilk olarak I' yı ele alalım.

$$I \le \sum_{k=1}^{r} k\left|\Delta_k p_{\lambda(n)-k}\right|\sum_{m=k}^{\infty}\frac{1}{m(m+1)}=\sum_{k=1}^{r}\left|\Delta_k p_{\lambda(n)-k}\right|$$

$$\le \frac{1}{\lambda(n)-r}\sum_{k=1}^{\lambda(n)-1} k\left|\Delta p_k\right| = O\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)\sum_{k=1}^{\lambda(n)-1} k\left|\Delta p_k\right| = O\left(\frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)}\right) \tag{4.17}$$

Diğer taraftan,

$$J \le \sum_{m=r}^{\lambda(n)}\frac{1}{m(m+1)}\sum_{k=1}^{m} k\left|\Delta_k p_{\lambda(n)-k}\right|$$

$$\le \sum_{m=r}^{\lambda(n)}\frac{1}{m(m+1)}\left(\sum_{k=1}^{r}+\sum_{k=r+1}^{m}\right) k\left|\Delta_k p_{\lambda(n)-k}\right| =: J_1+J_2 \tag{4.18}$$

elde edilir. $J_1 \, ve \, J_2$ için varsayımımızı dikkate alarak, sırasıyla,

$$J_1 \le \sum_{m=r}^{\lambda(n)}\frac{1}{m(m+1)}\sum_{k=1}^{m} k\left|\Delta_k p_{\lambda(n)-k}\right|$$

$$\le \sum_{m=r}^{\lambda(n)}\frac{1}{(m+1)}\sum_{k=1}^{r}\left|\Delta_k p_{\lambda(n)-k}\right| = O\left(\frac{1}{\lambda(n)-r}\right)\sum_{k=\lambda(n)-r}^{\lambda(n)-1} k\left|\Delta p_k\right|$$

$$=O\left(\left(\lambda(n)\right)^{-1}\right)\sum_{k=1}^{\lambda(n)-1}k\left|\Delta p_k\right|=O\left(\frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)}\right) \tag{4.19}$$

ve

$$J_2\le\sum_{m=r}^{\lambda(n)}\frac{1}{m(m+1)}\left\{\sum_{k=r}^{m}k\left|\Delta_k p_{\lambda(n)-k}\right|\right\}$$

$$=O\left(\left(\lambda(n)\right)^{-1}\right)\sum_{m=r}^{\lambda(n)}\sum_{k=r}^{m}\left|\Delta_k p_{\lambda(n)-k}\right|$$

$$=O\left(\left(\lambda(n)\right)^{-1}\right)\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1}(k+1)\left|\Delta p_k\right|=O\left(\frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)}\right) \tag{4.20}$$

elde edilir. Böylece (4.16)-(4.20) birleşimiyle, (4.15) doğrulanır.

Aşağıdaki yardımcı sonuçlar [Quade, 1937]'de verilmiştir.

Lemma 4.5.

$f\in Lip(\alpha,1)$ ve $0<\alpha<1$ ise bu durumda

$$\left\|f-\sigma_n(f)\right\|_1=O\left(n^{-\alpha}\right),\quad n\to\infty$$

dir.

Lemma 4.6.

$p>1$ve $0<\alpha\le 1$ için $f\in Lip(\alpha,p)$ olsun. O zaman

$$\left\|f-s_n(f)\right\|_p=O\left(n^{-\alpha}\right),\quad n\to\infty$$

dir.

Lemma 4.7.

$p>1$ ve $0<\alpha\le 1$ için $f\in Lip(\alpha,p)$ ise o zaman herhangi bir $n\in\mathbb{N}^+$ için, n. dereceden bir t_n trigonometrik polinomu ile L_p uzayında f fonksiyonuna yaklaşılabilir öyle ki

$$\left\|f-t_n\right\|_p=O\left(n^{-\alpha}\right),\qquad n\to\infty$$

olur.

Lemma 4.8.

$p>1$ için $f\in Lip(1,p)$ ise bu durumda

$$\left\|\sigma_n(f)-s_n(f)\right\|_p=O\left(n^{-1}\right)$$

dir.

Bir sonraki bölümde, [Chandra, 2002], [Leindler, 2005] gibi bazı çalışmalardaki benzer teknikten yola çıkarak teoremlerin ispatları verilecektir.

4.3. ANA BULGULAR'IN İSPATI

İspatlarda kullanılacak bazı kavramlar aşağıdaki gibidir. t_n n. dereceden trigonometrik bir polinom olsun. Bu durumda t_n, 2π periyodik ve Lebesgue integrallenebilirdir. $s_m(t_n;x)$, x noktasında t_n' nin Fourier serisinin ilk $(m+1)$ teriminin kısmi toplamını göstermek üzere,

$$s_m(t_n;x)=\begin{cases} t_m(x), & m\le n \ \ ise; \\ t_n(x), & m\ge n \ \ ise. \end{cases}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.'in İspatı.

$N_n^\lambda(f;x)$ tanımını kullanarak,

$$N^\lambda(f,x)-f(x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left\{s_m(f;x)-f(x)\right\} \tag{4.21}$$

yukarıdaki eşitlik elde edilir. Teoremin hipotezi, Lemma 4.1 ve Lemma 4.6 göz önünde tutularak

$$\begin{aligned}\left\|N_n^\lambda(f)-f\right\|_p &\le \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left\|s_m(f)-f\right\|_p \\ &=\frac{O(1)}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}(m+1)^{-\alpha}=O\left((\lambda(n))^{-\alpha}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Böylelikle, (i) ve (ii) durumlarının ispatları tamamlanmış olur.

Sonuç 4.1.'in ispatı.

Lemma 4.3 ve Lemma 4.6 dan, yukarıdaki gibi işlemleri uygulayarak,

$$\begin{aligned}\left\|N_n^\lambda(f)-f\right\|_p &\le \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=1}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left\|s_m(f)-f\right\|_p+\frac{p_{\lambda(n)}}{P_{\lambda(n)}}\left\|s_0(f)-f\right\|_p \\ &=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\mathrm{O}\left((\lambda(n))^{-\alpha}p_{\lambda(n)}\right)+\mathrm{O}\left((\lambda(n))^{-\alpha}\right)=\mathrm{O}\left((\lambda(n))^{-\alpha}\right)\end{aligned}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.'nin ispatı.

İlk olarak (i) durumunu göz önünde tutalım. $p>1$ ve $\alpha=1$ olsun. Açıktır ki

$$N_n^{\lambda}(f,x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m}A_m$$

eşitliği sağlanır. Bu eşitliğe göre

$$s_n(f,x)-N_n^{\lambda}(f,x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{n}U_m^{\lambda(n)}A_m-\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=n+1}^{\lambda(n)}P_{\lambda(n)-m}A_m$$

şeklindedir.

$\eta_m:=P_{\lambda(n)-m}$ ve $I:=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=n+1}^{\lambda(n)}\eta_m A_m$ olmak üzere, Abel dönüşümü yardımıyla

$$s_n(f,x)-N_n^{\lambda}(f,x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left[\sum_{m=1}^{n-1}\Delta_m\left(\frac{U_m^{\lambda(n)}}{m}\right)\sum_{k=0}^{m}kA_k+\frac{U_n^{\lambda(n)}}{n}\sum_{k=0}^{m}kA_k\right]-I$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left[\sum_{m=1}^{n}\Delta_m\left(\frac{U_m^{\lambda(n)}}{m}\right)\sum_{k=0}^{m}kA_k+\frac{U_{n+1}^{\lambda(n)}}{n+1}\sum_{k=0}^{m}kA_k\right]-I$$

elde edilir. Buradan p-normuna göre

$$\left\|s_n(f,x)-N_n^{\lambda}(f,x)\right\|_p\le\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{U_m^{\lambda(n)}}{m}\right)\right|\sum_{k=0}^{m}kA_k$$

$$+\frac{U_{n+1}^{\lambda(n)}}{P_{\lambda(n)}}\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=0}^{m}kA_k\right\|_p+\|I\|_P \tag{4.22}$$

olur. I ifadesine Abel dönüşümü uygulayarak

$$I=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left(\sum_{m=n+1}^{\lambda(n)}\Delta_m\left(\frac{\eta_m}{m}\right)\sum_{k=1}^{m}kA_k+\left[\frac{\eta_{\lambda(n)}}{\lambda(n)}-\Delta\left(\frac{\eta_{\lambda(n)}}{\lambda(n)}\right)\right]\sum_{k=1}^{\lambda(n)}kA_k-\frac{\eta_{n+1}}{n+1}\sum_{k=1}^{n}kA_k\right)$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left(\sum_{m=n+1}^{\lambda(n)}\Delta_m\left(\frac{\eta_m}{m}\right)\sum_{k=1}^{m}kA_k-\frac{\eta_{n+1}}{n+1}\sum_{k=1}^{n}kA_k\right)$$

elde edilir ve buradan

$$\|I\|_p\le\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=n+1}^{\lambda(n)}\left|\Delta_m\left(\frac{\eta_m}{m}\right)\right|\left\|\sum_{k=1}^{m}kA_k\right\|+\frac{\eta_{n+1}}{P_{\lambda(n)}}\frac{1}{n+1}\left\|\sum_{k=1}^{n}kA_k\right\|_p \tag{4.23}$$

olur.

$$s_n(f,x)-\sigma_n(f,x)=\frac{1}{n+1}\sum_{k=1}^{n}kA_k$$

olduğu için Lemma 4.8 ile

$$(n+1)\left\|s_n(f)-\sigma_n(f)\right\|_p=\left\|\sum_{k=1}^{n}kA_k\right\|_p=O(1) \tag{4.24}$$

eşitliği sağlanır. Böylece, (4.22), (4.23) ve (4.24) ifadelerine göre

$$\left\|s_n(f)-N_n^{\lambda}(f)\right\|_p=O\left(\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\right)\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{U_m^{\lambda(n)}}{m}\right)\right|+\frac{U_{n+1}^{\lambda(n)}}{P_{\lambda(n)}}O\left(n^{-1}\right)$$

$$+O\left(\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\right)\sum_{m=n+1}^{\lambda(n)}\left|\Delta_m\left(\frac{\eta_m}{m}\right)\right|+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.25}$$

elde edilir. Buradan

$$\Delta_m\left(\frac{\eta_m}{m}\right)=\Delta_m\left(\frac{-U_m^{\lambda(n)}}{m}\right)+P_{\lambda(n)}\Delta_m\left(\frac{1}{m}\right)$$

eşitliği dikkate alınırsa, bu durumda

$$\sum_{m=n+1}^{\lambda(n)}\left|\Delta_m\left(\frac{\eta_m}{m}\right)\right|=\sum_{m=n+1}^{\lambda(n)}\left|\Delta_m\left(\frac{\eta_m}{m}\right)\right|+P_{\lambda(n)}\sum_{m=n+1}^{\lambda(n)}\Delta_m\left(\frac{1}{m}\right)$$

$$=\sum_{m=n+1}^{\lambda(n)}\left|\Delta_m\left(\frac{U_m^{\lambda(n)}}{m}\right)\right|+O\left(\frac{P_{\lambda(n)}}{n}\right) \tag{4.26}$$

yazılır. Lemma 4.4 (4.14)'e göre

$$\sum_{m=n+1}^{\lambda(n)}\left|\Delta_m\left(\frac{\eta_m}{m}\right)\right|=O(1)\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta p_k\right| \tag{4.27}$$

ve

$$\sum_{m=1}^{n}\left|\Delta_m\left(\frac{\eta_m}{m}\right)\right|=O(1)\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta p_k\right| \tag{4.28}$$

sağlanır.

Teorem 4.2'nin (i) koşulu ve (4.25)-(4.28)'i göz önünde tutarak

$$\left\|s_n(f)-N_n^{\lambda}(f)\right\|_p=O\left(n^{-1}\right) \tag{4.29}$$

elde edilir. Böylece (i) durumu için Lemma 4.6 ve (4.29)'u kullanalarak (4.2) elde edilir.

Benzer şekilde (ii) durumunu ispatlarız. Yani, Teorem 4.2 (ii) koşulu altında Lemma 4.6, Lemma 4.4'ün (4.15)'i, (4.29) ve (4.26)'yı dikkate alarak (4.2) elde edilir. Buna göre, Teorem 4.2'nin ispatı tamamlanır.

Teorem 4.3'ün ispatı.

Abel dönüşümü ve (4.1) kullanılarak,

$$
\begin{aligned}
N_n^\lambda(f,x)-f(x) &= \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m}\left\{s_m - f(x)\right\} \\
&= \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} (m+1)\Delta_m\left(p_{\lambda(n)-m}\right)\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}\left\{s_k - f(x)\right\} \\
&= \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} (m+1)\Delta_m\left(p_{\lambda(n)-m}\right)\left(\sigma_m(f,x)-f(x)\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. $0<\alpha<1$ ve $p=1$ için Lemma 4.5 kullanılır ve her iki tarafın $\|.\|_1$ normu alınırsa, teoremin koşulu altında $p_{-1}=0$ uygunluğu ile

$$
\begin{aligned}
\left\|N_n^\lambda(f)-f\right\|_1 &\le \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} (m+1)\left|\Delta_m\left(p_{\lambda(n)-m}\right)\right|\left\|\left(\sigma_m(f)-f\right)\right\|_1 \\
&\le \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} (m+1)m^{-\alpha}\left|\Delta_m\left(p_{\lambda(n)-m}\right)\right| \\
&= O\left(\frac{\left(\lambda(n)+1\right)^{1-\alpha}}{P_{\lambda(n)}}\right)\sum_{m=0}^{\lambda(n)}\left|\Delta_m\left(p_{\lambda(n)-m}\right)\right| \\
&= O\left(\frac{\left(\lambda(n)+1\right)^{1-\alpha}}{P_{\lambda(n)}}\right)\sum_{m=-1}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta p_m\right| = O\left(\left(\lambda(n)\right)^{-\alpha}\right)
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.4'ün ispatı.

$$
f(x)-R_n^\lambda(f,x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m\left(f(x)-s_m(f,x)\right) \tag{4.30}
$$

olduğundan, Abel dönüşümüne göre

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m\left(f(x)-s_m(f,x)\right)=\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}(m+1)\left(f(x)-\sigma_m(f;x)\right)\Delta p_m\sum_{k=0}^{m}\left(f(x)-s_m(f,x)\right)$$

$$+\left(\lambda(n)+1\right)p_{\lambda(n)}\left(f(x)-\sigma_m^{\lambda}(f;x)\right)$$

elde edilir.

(4.4) ve Lemma 4.5'teki ifadeler göz önünde bulundurularak norm ile devam edilirse,

$$\left\|F-R_n^{\lambda}(f)\right\|_1\leq\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}(m+1)\left|\Delta_m(p_m)\right|\left\|f-\sigma_m(f)\right\|_1$$

$$+\frac{\left(\lambda(n)+1\right)p_{\lambda(n)}}{P_{\lambda(n)}}\left\|f-\sigma_n^{\lambda}(f)\right\|_1$$

$$+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=1}^{\lambda(n)-1}(m+1)\left|\Delta(p_m)\right|\left\|f-\sigma_m(f)\right\|_1$$

$$+\frac{\left(\lambda(n)+1\right)p_{\lambda(n)}}{P_{\lambda(n)}}\left\|f-\sigma_n^{\lambda}(f)\right\|_1$$

$$=O\left(\frac{\left(\lambda(n)\right)^{1-\alpha}}{P_{\lambda(n)}}\right)\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta(p_m)\right|+O\left(\left(\lambda(n)\right)^{-\alpha}\right)=O\left(\lambda(n)^{-\alpha}\right)$$

olur. Böylece (4.5) elde edilir.

Teorem 4.5'in ispatı.

$p>1$ ve $0<\alpha<1$ olsun.

$$f(x)-R_n^{\lambda}(f;x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_m\left(f(x)-s_m(f,x)\right)$$

olmak üzere, (i) ve (ii) koşullarının birleştirilmesiyle Lemma 4.2 ve Lemma 4.6 'dan istenen sonuç elde edilir. Yani,

$$\left\|f-R_n^{\lambda}(f)\right\|_p\leq\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_m\left\|f-s_m(f)\right\|_p$$

$$=\frac{O(1)}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_m(m+1)^{-\alpha}=O\left(\left(\lambda(n)\right)^{-\alpha}\right)$$

Teorem 4.6'nın ispatı.

$t_n(x)$ trigonometrik bir polinom ise $m \le n$ olduğu zaman $s_m(t_n,x) = t_m(x)$ olacaktır. Buradan

$$s_m(f,x) - t_m(x) = s_m(f,x) - s_m(t_n,x) = s_m(f - t_n, x).$$

Fourier serilerinin kısmi toplamının integral gösteriminden $D_m(u)$ Dirichlet çekirdeği olmak üzere

$$K_n^{\lambda}(u) := \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m D_m(u),$$

$$s_m(f - t_n, x) = \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{ f(x+u) - t_n(x+u) \} D_m(u)\, du,$$

ve

$$R_n^{\lambda}(f,x) - \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m t_m(x) = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m s_m(f - t_n, x)$$

$$= \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{ f(x+u) - t_n(x+u) \} D_m(u)\, du$$

$$= \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{ f(x+u) - t_n(x+u) \} K_n^{\lambda}(u)\, du \tag{4.31}$$

eşitlikleri sağlanır. Genelleştirilmiş Minkowskii eşitsizliğinden (4.31)'in $\|\cdot\|_1$ normunu ele alarak

$$\left\| R_n^{\lambda}(f) - \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m t_m \right\|_1 = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| \frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \{ f(x+u) - t_n(x+u) \} K_n^{\lambda}(u)\, du \right| dx$$

$$\le \left(\frac{1}{\pi} \int_0^{2\pi} \left| K_n^{\lambda}(u) \right| du \right) \left(\frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f(x) - t_n(x) \right| dx \right) = \frac{1}{\pi} \| f - t_n \|_1 \int_0^{2\pi} \left| K_n^{\lambda}(u) \right| du$$

$$= \frac{2}{\pi} \| f - t_n \|_1 \left(\int_0^{\pi/\lambda(n)} \left| K_n^{\lambda}(u) \right| du + \int_{\pi/\lambda(n)}^{2\pi} \left| K_n^{\lambda}(u) \right| du \right) =: \frac{2}{\pi} \| f - t_n \|_1 (I_1 + J_1)$$

elde edilir. Daha sonra, [Mohapatra, 2012]'deki metodu göz önünde bulundurarak ispat tamamlanır. Buna göre ilk olarak I_1'i değerlendirelim. Jordan eşitsizliğinden, $\left(\sin(t/2) \right)^{-1} \le \pi/t$ ve $\sin(n+1)t \le (n+1)t$, $0 < t \le \pi/\lambda(n) \le \pi/n$ olmak üzere,

$$I_1 = \int_0^{\pi/\lambda(n)} \left|K_n^\lambda(u)\right| du = \frac{O(1)}{P_{\lambda(n)}} \int_0^{\pi/\lambda(n)} \left|\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m (m+1)\right| du = O(1) \tag{4.32}$$

elde edilir. Biliyoruz ki $\left((n+1)^{-\eta} p_n\right) \in HBVS$ ise o zaman $\left((n+1)^{-\eta} p_n\right) \in AMIS$ dır Buradan $(p_n) \in AMIS$ olur. Böylece, (4.1) ifadesini göz önünde tutarak ve Jordan eşitsizliğini tekrar kullanarak,

$$J_1 = \int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi} \left|K_n^\lambda(u)\right| du = \frac{O(1)}{P_{\lambda(n)}} \int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi} \frac{1}{u} \left|\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m \sin\left(m+\frac{1}{2}\right)u\right| du$$

$$= \frac{O(1)}{P_{\lambda(n)}} \int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi} \frac{1}{u} p_{\lambda(n)} u^{-1} du = O(1) \tag{4.33}$$

bulunur. Böylece, (4.32) ve (4.33) sonuçlarını ele alarak

$$\left\| R_n^\lambda(f) - \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m t_m \right\|_1 = O(1) \left\| f - t_n \right\|_1 \tag{4.34}$$

elde edilir.

$p = \alpha = 1$ durumunda Lemma 4.7 ve (4.34)'ü kullanarak,

$$\left\| f - R_n^\lambda(f) \right\|_1 = O\left(n^{-1}\right) + \left\| f - \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m t_m \right\|_1 \tag{4.35}$$

ortaya çıkar.

Lemma 4.7 için, $(p_n) \in AMIS$ ve (4.1)'e göre (4.35)'in sağ tarafındaki norm için

$$\left\| f - \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m t_m \right\|_1 \leq \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m \left\| f - t_m \right\|_1$$

$$= O\left(\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\right) \sum_{m=1}^{\lambda(n)} p_m \left\| f - t_m \right\|_1 + O\left(\frac{p_0}{P_{\lambda(n)}}\right) \left\| f - t_0 \right\|_1$$

$$= O\left(\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\right) \sum_{m=0}^{\lambda(n)} (m+1)^{-1} p_m + O\left(n^{-1}\right)$$

sağlanacaktır. Son toplama Abel dönüşümünü uygulayarak

$$\left\| f - R_n^\lambda(f) \right\|_1 = O\left(n^{-1}\right) + \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)-1} \left| \Delta_m \left(\frac{p_m}{(m+1)^\eta} \right) \right| \sum_{k=0}^{m} (k+1)^{\eta-1}$$

$$+\frac{p_{\lambda(n)}}{P_{\lambda(n)}\left(\lambda(n)+1\right)^{\eta}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}(m+1)^{\eta-1}$$

$$\leq\frac{\left(\lambda(n)+1\right)^{\eta}}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta_m\left(\frac{p_m}{(m+1)^{\eta}}\right)\right|+\frac{p_{\lambda(n)}}{P_{\lambda(n)}}+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.36}$$

eşitliği elde edilir. Ayrıca

$$\left((n+1)^{-\eta}\,p_n\right)\in HBVS$$

olduğundan (4.1) ve

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta_m\left(\frac{p_m}{(m+1)^{\eta}}\right)\right|=O\left(\left(\lambda(n)+1\right)^{-\eta}\,p_{\lambda(n)}\right)$$

ifadelerine göre, (4.36)'dan, (4.6) elde edilir. Böylelikle, Teorem 4.6 ispatlanır.

Sonuç 4.2 ve Sonuç 4.3'ün ispatları sırasıyla Teorem 4.2 ve Teorem 4.4'ten ortaya çıkar.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında L_p $(p \geq 1)$ normunda, Cesáro metodunun alt metodlarını kullanarak $Lip(\alpha, p)$ sınıfına ait fonksiyonlara yaklaşımın hızı değerlendirilmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir.

1. $(p_n) \in AMDMS$ ve $p > 1,\ 0 < \alpha < 1$ için $f \in Lip(\alpha, p)$ olsun. Bu durumda $\left\| f - N_n^\lambda \right\|_p = \mathrm{O}\left(\lambda(n)^{-\alpha}\right)$ elde edilir. Böylece kullanılan toplanabilme yöntemi ve genişletilen dizi sınıflarına göre yaklaşımın $\mathrm{O}\left(\lambda(n)^{-\alpha}\right)$ hızı $\mathrm{O}\left(n^{-\alpha}\right)$ ile yer değiştirir.

2. $(\lambda(n)+1)\, p_{\lambda(n)} = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ koşulu sağlanmak üzere $(p_n) \in AMIMS$ ve $p > 1$, $0 < \alpha < 1$ için $f \in Lip(\alpha, p)$ olsun. Benzer şekilde $\left\| f - N_n^\lambda \right\|_p = \mathrm{O}\left(\lambda(n)^{-\alpha}\right)$ olacaktır.

3. $AMDS \subset AMDMS$ ve $AMIS \subset AMIMS$ içerme bağıntısından dolayı yukarıdaki sonuçlar $AMDS$ ve $AMIS$ dizi sınıfları içinde geçerlidir.

4. $(\lambda(n)+1)\, p_{\lambda(n)} = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ ve $\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1} \left|\Delta p_k\right| = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)} / \lambda(n)\right)$ koşulları altında (p_n) pozitif bir dizi ve $p > 1$ için $f \in Lip(1, p)$ olsun. Bu durumda $\left\| f - N_n^\lambda \right\|_p = \mathrm{O}\left(n^{-1}\right)$ değerlendirmesi doğrudur.

5. $\sum_{k=1}^{\lambda(n)-1} k\left|\Delta p_k\right| = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ koşulu altında (p_n) pozitif bir dizi ve $p > 1$ için $f \in Lip(1, p)$ olsun. Bu durumda $\left\| f - N_n^\lambda \right\|_p = \mathrm{O}\left(n^{-1}\right)$ değerlendirmesi de doğrudur.

6. $(\lambda(n)+1) = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ koşulu altında $(p_n) \in RBVS$ ise $\sum_{k=1}^{\lambda(n)-1} k\left|\Delta p_k\right| = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ koşulu her zaman sağlanacaktır.

7. $\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1} |\Delta p_k| = O\left(P_{\lambda(n)} / \lambda(n)\right)$ ile (p_n) pozitif dizisi verilsin. Buna göre $0 < \alpha < 1$ için $f \in Lip(\alpha,1)$ olmak üzere $\left\|f - N_n^{\lambda}\right\|_1 = O\left(\left(\lambda(n)\right)^{-\alpha}\right)$ değerlendirmesi elde edilir.

8. $\left(\lambda(n)+1\right) p_{\lambda(n)} = O\left(P_{\lambda(n)}\right)$ ve $\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1} |\Delta p_k| = O\left(P_{\lambda(n)} / \lambda(n)\right)$ koşulları altında (p_n) pozitif bir dizi olsun. Bu durumda $0 < \alpha < 1$ olmak üzere $f \in Lip(\alpha,1)$ için $\left\|f - R_n^{\lambda}\right\|_1 = O\left(\left(\lambda(n)\right)^{-\alpha}\right)$ değerlendirmesi doğrudur.

9. $\left(\lambda(n)+1\right) = O\left(P_{\lambda(n)}\right)$ koşulu altında $(p_n) \in HBVS$ olmak üzere $\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1} |\Delta p_k| = O\left(\left(\lambda(n)\right)^{-1} P_{\lambda(n)}\right)$ ifadesi her zaman sağlanacaktır.

10. $(p_n) \in AMIMS$ ve $p > 1$, $0 < \alpha < 1$ için $f \in Lip(\alpha, p)$ olsun. Bu durumda $\left\|f - R_n^{\lambda}\right\|_p = O\left(\left(\lambda(n)\right)^{-\alpha}\right)$ elde edilir.

11. $\left(\lambda(n)+1\right) = O\left(P_{\lambda(n)}\right)$ koşulu sağlanmak üzere $(p_n) \in AMDMS$ ve $p > 1$, $0 < \alpha < 1$ için $f \in Lip(\alpha, p)$ ise $\left\|f - R_n^{\lambda}\right\|_p = O\left(\left(\lambda(n)\right)^{-\alpha}\right)$ olur.

12. $\left(\lambda(n)+1\right) p_{\lambda(n)} = O\left(P_{\lambda(n)}\right)$ ile (p_n) pozitif olsun. Bazı $\eta > 0$ için $\left((n+1)^{-\eta} p_n\right) \in HBVS$ ise $\left\|f - R_n^{\lambda}(f)\right\|_1 = O\left(n^{-1}\right)$ sağlanır. Burada $\alpha = p = 1$ durumunda yaklaşımın $O\left(n^{-1}\right)$ hızı $O\left(n^{-1}\log n\right)$ hızı ile yer değiştirmiştir. Ancak bu durumda dizi üzerindeki koşul ağırlaştırılmıştır.

5.2. ÖNERİLER

Bu tez çalışmasında ele alınan problemler daha geniş dizi sınıfları ve farklı toplanabilme metotları için ele alınabilir.

$Lip(\alpha, p)$ sınıfından daha geniş fonksiyon sınıflarına göre yaklaşımın hızının araştırılması.

KAYNAKLAR

Armitage, D. H., Maddox, I. J. "A new type of Cesáro mean", Analysis, 9: 195-204, (1989)

Boos, J., "Classical and modern methods in summability", Oxford University Pres, Oxford, 600 s., (2000).

Bullen, P. S., "A Dictionary of Inequalities", Pitman Monographs and Surveys in Pure and Applied Mathematics 283 s., (1997)

Chandra, P. "Approximation by Nörlund operators", Mat. Vesnik, 38: 263-269, (1986).

Chandra, P., "Functions of classes L_p and $Lip(\alpha, p)$ and their Riesz means", Riv. Mat. Univ. Parma 4: 12 275-282, (1986).

Chandra, P., "A note on degree of approximation by Nörlund and Riesz operators", Mat. Vestnik, 42: 9-10, (1990).

Chandra, P., "Trigonometric approximation of functions in L_p-norm", J. Math. Anal. Appl., 275: 13–26, (2002).

Cheney, E. W. "Introduction to Approximation Theory", AMS Chelsea Publishing, 259 s. (1982).

Değer, U., Dağadur, İ., Küçükaslan, M. "On Approximation by trigonometric polynomials to functions in L_p norm.", Proc. Jangjeon Math. Soc., 15(2), 203-213, (2012).

Devore, R. A. and Lorentz, G. G., "Constructive Approximation", Springer-Verlag, 449 s., (1993).

Hardy, G. H. and Littlewood J. E., "A convergence criterion for Fourier series", Math. Zeit., Vol. 28: 612-634, (1928).

Jain, P. K. and Gupta, V. P., "Lebesgue Measure and Integration", Wiley Eastern Limited, New Delhi, India, 260 s., (1986).

Kızmaz, H., "Fonksiyonel Analize Giriş", KTÜ Yayınları, Turkey, 322 s., (1993)

Leindler, L., "On the uniform convergence and boundedness of a certain class of sine series", Analysis Mathematica, 27: 279-285, (2001).

Leindler, L., "Trigonometric approximation in L_p –norm", J. Math. Anal. Appl. 30(2): 129-136, (2005)

Mohapatra, R. N., Russell, D. C. "Some direct and inverse theorems in approximation of functions", J. Austral. Math. Soc. (Ser. A) 34: 143–154, (1983).

Mohapatra, R. N., Szal, D. C. "On Trigonometric approximation of functions in the L_P-norm", [math. CA], (2012) arXiv: 1205.5869v1

Osikiewicz, J. A., "Equivalance result for Cesáro submethods", Analysis, 20:13-35, (2000).

Petersen, G. M., "Reguler Matrix Transformation", Mc Graw Hill, New York, Toronto, Sydney, 142 s., (1966).

Quade, E. S., "Trigonometric approximation in the mean.", Duke Math. J., 3: 529–542, (1937).

Sahney, B. N., Rao, V. V. G. "Error bounds in the approximation of functions", Bull. Austral. Math. Soc., 6: 11–18, (1972).

Stepanets, A. I., "Methods of Aproximation Theory", VSP, Boston, (2005).

Wilansky, A., "Summability through Functional Analysis", Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland, 318 s., (1984).

Wong, R., "Asymptotic Approximations of Integrals", SIAM, 543 s., (2001).

Tolstov, G. P., "Fourier Series", Prentice-Hall, Inc, 336 s., (1962).

Zygmund, A., "Trigonometric Series", Vol I-II,Cambridge at the University Press, (1959).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Musa KAYA

Doğum Tarihi: 08/07/1982

Öğrenim Durumu:

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lise	Fen	Finike Ç.P.C. Lisesi	1996-2000
Lisans	Matematik	Ege Üniversitesi	2001-2006
Yüksek Lisans	Matematik A.B.D.	Mersin Üniversitesi	2010-

Görevler:

Görev Unvanı	**Görev Yeri**	**Yıl**
Matematik Öğretmeni	İslahiye/Gaziantep	2013-

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. On the Approximation by Cesáro Submethod, (with U. Değer), Palestine Journal of Mathematics (Accepted).

2. On trigonometrik approximation by Cesáro Submethod, (with U. Değer), XXVI. Ulusal Matematik Sempozyumu, 04-07 Eylül, 2013, Diyarbakır.