BİR BOYUTLU ISI DENKLEMİ İÇİN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

VOLKAN ALA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2014

BİR BOYUTLU ISI DENKLEMİ İÇİN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

VOLKAN ALA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

MERSİN
HAZİRAN – 2014

Volkan ALA tarafından Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU danışmanlığında hazırlanan "Bir Boyutlu Isı Denklemi İçin Bir Sınır Değer Probleminin Çözümü Üzerine" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU ....

Prof. Dr. Nazım KERİMOV ....

Prof. Dr. Ali HAVARE ....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03./09/2014.tarih ve 2014.19...../.531..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

BİR BOYUTLU ISI DENKLEMİ İÇİN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÇÖZÜMÜ ÜZERİNE

Volkan ALA

ÖZ

Bu çalışmada $D=\{(x,t):0<x<\infty,\ 0<t<\infty\}$ bölgesinde bir boyutlu ısı denklemine ilişkin sınır koşulunda zamana göre türev içeren aşağıdaki sınır-değer problemi incelenmiştir:

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-q(x)u$$
$$\left.\left(-\beta_1 u+\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right|_{x=0}=0$$
$$u(x,0)=\phi_0(x),$$
$$u(0,0)=\vartheta_0$$

Yukarıdaki ısı iletim denklemi için değişkenlere ayırma metodu uygulanarak, yukarıda verilen sınır koşullarında özdeğer parametresi içeren Sturm-Liouville problemi ele alınmıştır. $H_\rho=L_{2,\rho}(0,\infty)\times\mathbb{C}$ Hilbert uzayı tanımlanarak bu uzayda sınır değer probleminin operatör teoritik formülasyonu verilmiş, rezolvent operatör inşa edilmiştir. Titchmarsh metodu kullanılarak özfonksiyonlara göre ayrışım formülleri bulunmuş ve ayrışım formülleri yardımıyla sınır değer probleminin çözümü elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Isı İletimi, Rezolvent Operatör, Ayrışım Formülü, Süreksiz Katsayı

Danışman: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

ON A SOLUTION OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM FOR ONE DIMENSIONAL HEAT EQUATION

Volkan ALA

ABSTRACT

In this work, below the following boundary value problem which is related to one-dimensional heat equation that contains derivative according to the time in boundary condition is examined in the region $D = \{(x,t) : 0 < x < \infty,\ 0 < t < \infty\}$

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u$$

$$\left(-\beta_1 u + \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial t}\right)\Bigg|_{x=0} = 0$$

$$u(x,0) = \phi_0(x),$$

$$u(0,0) = \vartheta_0$$

Applying the seperation of variables method, we get Sturm-Liouville equation spectral parameter dependent boundary condition. For this spectral problem, the operator theoretic formula is given in $H_\rho = L_{2,\rho}(0,\infty)\times\mathbb{C}$, constructed the form of resolvent operator and using Titchmarsh method, expansion formula with respect to the eigenfunctions is obtained and with the help of expansion formula we expressed the solution of boundary value problem for one dimensional heat equation.

Key Words: Heat Transmission, Resolvent Operator, Expansion Formula, Discontinuous Coefficient

Advisor: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Department of Mathematics, Mersin University.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın ortaya çıkmasında desteğini ve emeğini esirgemeyen; fikirlerini ve bilgilerini benimle paylaşan; bilimsel anlamda hiçbir özveriden kaçınmayan saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Hanlar Reşidoğlu’na şükranlarımı sunarım.

Yüksek lisans öğrenimim boyunca desteğini hiçbir zaman esirgemeyen, başta bölüm başkanım Prof. Dr. Fahreddin Abdullayev olmak üzere, bölümdeki hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans tez projesine destek olan Mersin Üniversitesi BAP Koordinatörlüğüne;

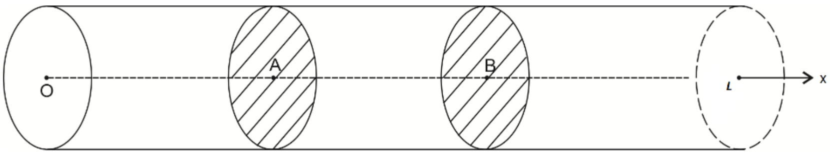
Son olarak, hayatım boyunca maddi ve manevi her zaman yanımda olduğu gibi çalışmalarım süresince de beni destekleyen kıymetli anneme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

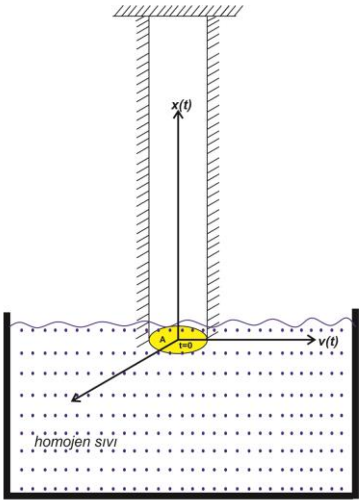
SİMGE ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
λ	Spektral parametre
L	Diferansiyel operatör
$D(L)$	L operatörünün tanım bölgesi
W	Wronskian
$\dot{f}(x,\lambda)$	λ 'ya göre türev
$f'(x,\lambda)$	x 'e göre türev
R_λ	Rezolvent operatör
$S(\lambda)$	Saçılma fonksiyonu
$AC[a,b]$	$[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar
$l(y)$	Lineer diferansiyel ifade
$G(x,\xi;\lambda)$	Green fonksiyonu
u	Sıcaklık
u_t	Sıcaklık değişim hızı $\left({C^\circ}/{sn}\right)$
c	Özısı $\left({kal}/{grC^\circ}\right)$
k	Isı iletimi $\left({kal}/{cm.sn.C^\circ}\right)$
ρ	Yoğunluk $\left({kal}/{grC^\circ}\right)$
α^2	Sıcaklık iletimi $\left({kal}/{grC^\circ}\right)$
$\blacksquare$	İspatın bittiğini gösterir

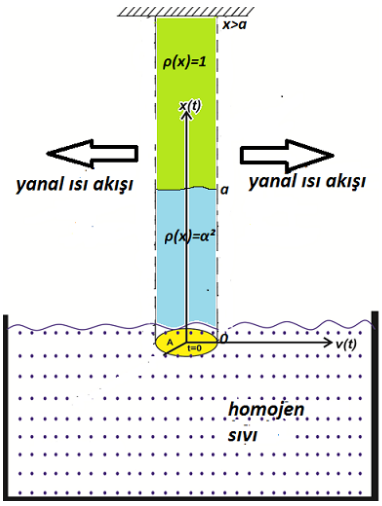
ŞEKİLLER DİZİNİ



Şekil 3.1.1. Sonlu Boyutlu Bir Çubukta Difüzyon Olayı



Şekil 3.3.1. Bir Uç Yüzeyi Sıvıyla Temas Halinde Olan Yalıtılmış Çubukta Difüzyon Olayı



Şekil 3.4.1.Yan(Lateral) Yüzeyleri İzole Edilmemiş Homojen Olmayan Bir Çubukta Difüzyon Olayı

1. GİRİŞ

Doğada pek çok fiziksel olayın modellenmesi, kısmi diferansiyel denklemlerden oluşan problemler ile ifade edilir. Uygulamalı dallardaki problemlerin matematiksel modellemelerine örnek olarak, ısı iletimini ele alalım:

Isının bir nesne üzerinde, belli bir konumda ve zamanda, nasıl dağılacağını tanımlayan kısmi diferansiyel denkleme *ısı denklemi* denir. Isı denklemi parabolik tipten bir denklemdir. Kartezyen koordinat sisteminde (x, y, z) konumu ve t zamanı göstermek üzere, ısı denkleminin genel ifadesi

$$\frac{\partial u}{\partial t} = k\left(\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 u}{\partial z^2}\right)$$

biçimindedir. Burada k fiziksel bir sabittir.

Isı iletiminin matematiksel modeli 1800'lerde ortaya çıkmıştır ve günümüzde de modern fizikçilerin dikkatini çekmeye devam etmektedir. Örneğin, yüksek hızda makinelerin kaynaklarının ısı transferi, dağılımının analizi hala önemli bir teknolojik problemdir.

Matematiksel fiziğin birçok problemi, diferansiyel operatörün özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunmasına ve özfonksiyonlara göre ayrışım probleminin incelenmesine indirgenir. Bu problemler kısmi diferansiyel denklemin, başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan çözümü bulunurken Fourier yönteminin uygulanmasıyla karşılaşılır. Örneğin,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^n u}{\partial x^n} + p_1(x)\frac{\partial^{n-1} u}{\partial x^{n-1}} + \ldots + p_n(x)u, \qquad a \le x \le b \tag{1.1.1}$$

denklemi

$$u\big|_{t=0} = f(x), \tag{1.1.2}$$

başlangıç koşulu ve

$$\sum_{v=0}^{n-1} \alpha_{jv}\left(\frac{\partial^v u}{\partial x^v}\right)_{x=a} + \sum_{v=0}^{n-1} \beta_{jv}\left(\frac{\partial^v u}{\partial x^v}\right)_{x=b} = 0, \qquad j = 1, 2, \ldots, n \tag{1.1.3}$$

sınır koşulları ile verilen sınır değer probleminin çözümünü Fourier metodu ile bulalım.

(1.1.1) denkleminin (1.1.3) sınır koşulunu sağlayan çözümünü

$$u(x,t) = y(x)T(t) \tag{1.1.4}$$

biçiminde arayalım. (1.1.4) ifadesi (1.1.1) denkleminde ve (1.1.3) sınır koşullarında yazılırsa, $y(x)$ fonksiyonunu

$$l(y) \equiv \frac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + ... + p_n(x)y = -\lambda^2 y \tag{1.1.5}$$

denklemini ve

$$U_j(y) = \sum_{v=0}^{n-1} \alpha_{jv} y_a^{(v)} + \sum_{v=0}^{n-1} \beta_{jv} y_b^{(v)} = 0 \tag{1.1.6}$$

sınır koşullarını sağlar.

Eğer $y(x) \neq 0$ ise, $y(x)$ (1.1.5)-(1.1.6) sınır değer probleminin $-\lambda^2$ özdeğerine uygun özfonksiyonudur. (1.1.5)-(1.1.6) sınır değer probleminin bütün özdeğerleri

$$-\lambda_1^2, -\lambda_2^2, -\lambda_3^2 ...$$

ve bu özdeğerlere uygun özfonksiyonları da

$$y_1(x), y_2(x), y_3(x), ...$$

biçiminde olsun. O halde (1.1.2)'yi sağlatmak için aşağıdaki seri oluşturulur:

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x) e^{-\lambda_n^2 t}$$

Bu seri formal olarak (1.1.1) denklemini ve (1.1.3) sınır koşullarını sağlar. (1.1.2) sağlatılırsa

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} A_n y_n(x) \tag{1.1.7}$$

elde edilir. Bu eşitlik, verilen $f(x)$ fonksiyonunun (1.1.5)-(1.1.6) sınır değer probleminin özfonksiyonlara göre ayrışımıdır. Dolayısıyla Fourier metodunun gerçekleştirilmesiyle; verilen $f(x)$ fonksiyonunun sınır değer probleminin özfonksiyonlara göre ayrışımı problemine indirgenir.

Özfonksiyonlara göre (1.1.7) ayrışımı yeterince düzgün (ve gereken koşulları sağlayan) fonksiyonlar için sağlansa da, A_n katsayılarının bulunması sorusu ile karşılaşılır. Bu ise $\{y_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlarının ortogonallik ve tamlık özelliği ile ilgilidir. Bundan dolayı, ısı ve titreşim denklemlerinin başlangıç ve sınır koşullarını sağlayan çözümün bulunması problemi adi diferansiyel denklem için sınır değer probleminin özfonksiyonlara göre ayrışım problemine indirgenir. Bu problem ise, klasik durumlarda birçok diferansiyel operatörler için çözülmüş olsa da, bu yönde çalışmalar devam etmektedir [V. A. Steklov, C. Birkhof, Y. D. Tamarkin, M. Stoun vb]. Operatörler teorisinde bu problem operatörlerin spektral teorisi olarak tanımlanmaktadır.

İkinci mertebeden singüler operatörlerin spektral teorisine yeni bir yaklaşımı 1946 yılında A. B. Titchmarsh vermiştir. Ox ekseninde tanımlı $q(x)$ potansiyelli

$$L = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x)$$

Sturm-Liouville operatörleri için özdeğerlere göre ayrışım formülü A. B. Titchmarsh tarafından bulunmuştur. Bu operatör fizikte geniş uygulamalara sahip Schrödinger operatörü ile yakın ilişki içerisindedir.

Singüler diferansiyel operatörlerin incelenmesine ilişkin ve diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde önemli bir yere sahip olan çalışmalar 1949 yılında B. M. Levitan tarafından yapılmıştır. B. M. Levitan bu çalışmalarında spektral teoriyi gerçekleştirmek için kendine has bir yöntem vermiştir.

Tezde singüler durumda, Sturm-Liouville operatörü için farklı sınır koşulu altında ayrışım problemi incelenmiştir. Tezin Materyal ve Metot kısmında gerekli tanım ve teoremler verilmiş, Kaynak Araştırması kısmında konuyla ilgili literatür taraması yapılmış ve Bulgular ve Tartışma kısmında ise bir boyutlu ısı denklemine ilişkin sınır koşulunda zamana göre türev içeren sınır değer problemi ele alınmıştır.

$D = \{(x,t) : 0 < x < \infty, 0 < t < \infty,\}$ bölgesinde

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u \tag{1.1.8}$$

ısı iletim denklemi için

$$\left. \left(-\beta_1 u + \frac{\partial u}{\partial x} + \beta_2 \frac{\partial u}{\partial t} \right) \right|_{x=0} = 0, \tag{1.1.9}$$

sınır koşulu ve

$$u(x,0) = \phi_0(x), \tag{1.1.10}$$

$$u(0,0) = \vartheta_0 \tag{1.1.11}$$

başlangıç koşullarıyla üretilen sınır değer problemi ele alınır. Burada λ spektral parametre, $q(x)$ ise ölçülebilir hızla sıfıra giden reel değerli bir fonksiyondur.

Denklemin çözümünün integral gösterimi kullanılarak, Wronskiyen tanımlanmış; çözümün özellikleri incelenmiş, özdeğer ve özfonksiyonlar tanımlanmıştır. Sınır değer probleminin uygun bir H Hilbert uzayındaki bir operatör denkleme denk olduğu gösterilmiş ve bu operatörün rezolvent operatörü inşa edilmiştir. Rezolvent operatöre ilişkin yardımcı lemmalar ispatlanmıştır. Kontür üzeri integralleme kullanılarak ele alınan sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülü elde edilmiştir ve elde edilen ayrışım formüllerinden faydalanılarak ısı iletim probleminin çözümü ifade edilmiştir.

Tezde ele alınan sınır problemi, klasik durumlardan aşağıdaki özellikleri ile farklıdır:

1) Sınır koşulu zamana göre türev içerir, bundan dolayı değişkenlere ayrıldığında sınır koşulu spektral parametre içeren Sturm-Liouville problemi ile karşılaşılır.

2) Ele alınan problem sonlu aralıkta değil, yarı sonsuz eksende incelenir.

3) Denklemin katsayısı parçalı-sürekli fonksiyon içerir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Matematiksel fizik denklemlerinde sınır koşulu zamana (veya yöne) göre türev içeriyorsa, değişkenlere ayırma yönteminin uygulanmasıyla sınır koşulunda spektral parametre içeren ikinci mertebeden adi diferansiyel denklemler için sınır değer problemi ile karşılaşılır.

Literatürde, böyle spektral problemler klasik uzaylarda özdeğer-özfonksiyon problemi olarak yorumlanmadığı için özel Hilbert uzayları oluşturarak incelemeler yapılmıştır (Bknz [1-8]).

Bu problemlerin ısı iletkenliği ve dalga denklemleri için sınır problemlerinde fiziksel uygulamaları [9], [10],[11]' de verilmiştir.

Problemin çözümü sırasında elde edilen Sturm-Liouville probleminin özfonksiyonlara göre ayrışım formülü kısmi diferansiyel denklemin çözümünün bulunmasında önem taşır.

Problemin incelenmesi sırasında karşılaşılan diferansiyel denklemlerin çözümleri için kullanılan yöntem ve teknikler [12], [13] ve [14]'den alınmıştır.

Regüler problemler için ayrışım formülünü birkaç metotla elde etmek mümkündür. Bunlardan en önemlileri; integral denklemler metodu, sonlu farklar metodu, kontür üzerinde integralleme metodu vb. dir (Bknz. [12]). Daha önce klasik Sturm-Liouville problemi için kullanılan, kontür üzerinde integralleme ve rezidü teorisi yöntemi, [13] ve [15]'de, singüler probleme uygulanmıştır.

[16]'da yarı eksende ikinci mertebeden denklemin çözümü için operatör dönüşümün

$$e(\lambda, x) = e^{i\lambda x} + \int_x^{\infty} K(x,t) e^{i\lambda t} dt$$

ifadesi kullanılır.

Süreksiz durumda ise, yarı eksendeki problem iki kısıma ayrılarak [13] ve [15] çalışmalarında incelenmiştir. Bu durumda; $\left[0,\infty\right)$ aralığı $\left[0,a\right]$ ve $\left[a,\infty\right)$ (a süreksizlik noktası) aralıklarına indirgenerek incelemeler yapılmış ve $e(\lambda, x)$'in [16]'daki ifadesi kullanılmıştır. [17]'de ikinci mertebeden denklemin çözümü için yeni bir integral gösterimi elde edilmiştir.

Bu gösterim

$$f(x,\lambda) = f_0(x,\lambda) + \int_{\mu^+(x)}^{\infty} K(x,t)e^{i\lambda t}dt$$

biçimindedir. Burada

$$f_0(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)} + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

denklemin $q(x) \equiv 0$ halindeki çözümüdür ve $\mu^{\pm}(x) = \pm x\sqrt{\rho(x)} + a(1 \mp \sqrt{\rho(x)})$ biçimindedir. Tezde sonuçlar, çözüm için bu integral gösterim kullanılarak elde edilmiştir. Sınır koşulunda spektral parametre içeren yarı eksendeki problemler için ayrışım formülleri [20] ve [21] çalışmalarında incelenmiştir. Klasik Sturm-Liouville problemi için ayrışım formülü [12], [14], [16] ve [22] çalışmalarında verilmiştir.

Tezde ele alınan problem bir matematiksel fizik problemidir ve problemin konusuna ilişkin kısmi diferansiyel denklemlere ait [23] ve [24] kitaplardan yararlanılır. Tezde ele alınan problemin çözümü sırasında [25], [26], [27] kaynaklarından da yararlanılır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde ileri kısımda kullanılacak temel tanımlar, kavramlar ve teoremler verilecektir.

3.1. ÖN BİLGİLER

3.1.1 Temel Tanımlar ve Kavramlar

Tanım 3.1.1.1 Bir veya daha çok bağımlı değişken, birden fazla bağımsız değişken ve bunların türevlerinden oluşan denkleme *kısmi türevli denklem* denir.

Tanım 3.1.1.2 İki bağımsız değişkenli ikinci basamaktan lineer kısmi diferansiyel denklem:

$$A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u=G(x,y)$$

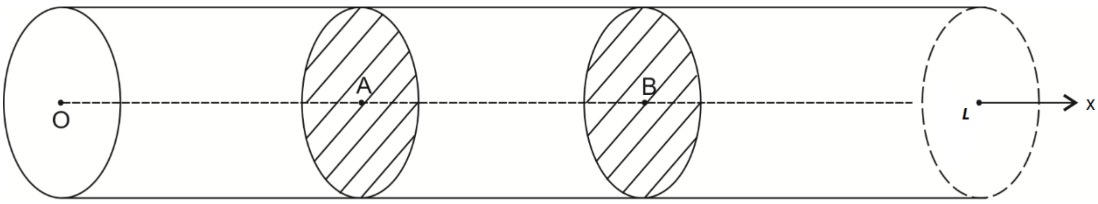
biçimindedir. $A(x,y)u_{xx}+B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}$ terimlerinin toplamına *esas kısım* denir. Denklemin *u* çözümünün özelliklerini bu kısım belirler. Belirli bir $(x_0,y_0)\in\Omega$ noktası için $\Delta(x_0,y_0)=B^2(x_0,y_0)-4A(x_0,y_0)C(x_0,y_0)$ diskriminant olmak üzere;

- $\Delta(x_0,y_0)>0\Rightarrow$ denklem $(x_0,y_0)\in\Omega$ da hiperbolik,
- $\Delta(x_0,y_0)=0\Rightarrow$ denklem $(x_0,y_0)\in\Omega$ da parabolik,
- $\Delta(x_0,y_0)<0\Rightarrow$ denklem $(x_0,y_0)\in\Omega$ da eliptiktir.

Parabolik tipten denklemlerin klasik bir örneği difüzyon denklemidir.

3.1.2 Bir Boyutlu Isı Denklemi ve Matematiksel Modelleme

Şimdi, uygulamalı dallardaki problemlerin matematiksel modellemelerine örnek olarak, sonlu bir çubuktaki bir difüzyon problemini ele alalım ve bu problemin matematiksel modellemesini yapalım:



Şekil 3.1.1

Şekil 3.1.1'deki uç noktaları sabit sıcaklıkta, örneğin 0° C de tutulan ve başlangıç sıcaklık dağılımı bilinen L uzunluğundaki sonlu bir metal bir çubuktaki ısı yayılımı problemini ele alalım. Çubuğun sol ucu $x=0$ ve sağ ucu $x=L$ noktasında olacak şekilde $+x$ ekseni boyunca uzatıldığını varsayalım. Eğer çubuğun farklı kısımları farklı sıcaklıklarda ise, sıcak kısımlardan soğuk kısımlara doğru bir ısı akımı olur.

t anında x noktasındaki sıcaklığı u veya $u(x,t)$ ile gösterelim. Denklemi basitleştirmek için, aşağıdaki kabulleri yapalım:

Çubuk, x eksenine dik düzgün kesitlere sahiptir. $u(x,t)$, her bir dik kesit üzerinde sabittir.

Çubuğun yanal yüzeyi, ısıyı geçirmeyecek şekilde yalıtılmıştır. Bu son kabul, çubukta x eksenine dik yönde içeri ve dışarı yönde bir ısı akımı olmadığını, başka bir deyişle, çubukta sadece x ekseni yönünde bir ısı akımı olduğunu ifade eder.

Isı iletimi için bir matematiksel formül elde etmek için, çubuğun x eksenine dik A ve B dik kesitlerini göz önüne alalım (Şekil 3.1.1). A'nın x ve B'nin de $x+\Delta x$ noktasında olduğunu varsayalım. t anında A kesiti üzerinde sıcaklık $u(x,t)$ ve B kesiti üzerinde sıcaklık $u(x+\Delta x,t)$ olsun.

Ayrıca, aşağıdaki fiziksel prensipleri hatırlayalım:

(i). Isı akımının hızı, başka bir deyişle; bir dik kesitin birim alanından birim zamanda geçen ısı akımı $\frac{\partial u}{\partial x}$ (yani sıcaklığın gradyenti) ile orantılı ve $q = -k\frac{\partial u}{\partial x}$'dir. Burada k orantı sabitine materyalin *termal geçirgenliği* denir. Temel geçirgenlik, genellikle noktaya göre değişir, yani $k = k(x)$'dir.

(ii). Isı akımının yönü, yüksek sıcaklıktaki noktalardan daha düşük sıcaklıktaki noktalara doğrudur.

(iii). Kütlesi m olan bir nesnenin sıcaklığını Δu kadar arttırmak için gerekli ısı miktarı $cm\Delta u$ dır. Burada c'ye materyalin *öz ısısı* veya *özgül ısısı* denir. Bu, genellikle noktaya göre değişir, yani $c = c(x)$ dir.

Eğer Δt zaman aralığında A kesitinden sağa doğru akan ısı miktarı $H(x)$ ile gösterilirse, bu taktirde (i) prensibi gereğince $H(x) = -k(x)S\Delta t\frac{\partial u(x,t)}{\partial x}$ yazılabilir. Burada S çubuğun dik kesit alanıdır. Negatif işaret (ii) prensibinden dolayı yazılmıştır. Çünkü eğer $\frac{\partial u}{\partial x} > 0$ ise, ısı sağdan sola akar. Benzer şekilde, bir Δt zaman aralığında B kesitinden sağa doğru akan ısı miktarı

$$H\left(x+\Delta x\right) = -k\left(x+\Delta x\right)S\Delta t\frac{\partial u\left(x+\Delta x\right)}{\partial x}$$

dir. Buna göre, dik kesitler arasındaki hacimde net ısı değişimi = A kesitinden giren ısı miktarı - B kesitinden çıkan ısı miktarı + Çubuğun içinde ısı kaynakları tarafından oluşturulan ısı miktarıdır.

Çubuğun içinde ısı kaynakları tarafından oluşturulan ısı miktarı, $Q(x,t)$ ısı enerjisi yoğunluğu olmak üzere $Q(x,t)S\Delta x\Delta t$ ile modellenir. Böylece net ısı miktarı, formül olarak

$$\begin{aligned}\Delta E &= H\left(x\right) - H\left(x+\Delta x\right) + Q\left(x,t\right)S\Delta x\Delta t\\ &= S\Delta t\left[k\left(x+\Delta x\right)\frac{\partial u\left(x+\Delta x\right)}{\partial x} - k\left(x\right)\frac{\partial u\left(x,t\right)}{\partial x}\right] + Q\left(x,t\right)S\Delta x\Delta t\end{aligned} \tag{3.1.1}$$

şeklinde yazılabilir. Öte yandan, (iii) prensibi gereğince net değişiklik $\Delta E = cm\Delta u$ olmalıdır. Burada c *öz ısı kapasitesi,* Δu sıcaklıktaki değişiklik ve m, dik kesitler arasındaki hacmin kütlesidir. $\rho = \rho(x)$ *çubuğun yoğunluğu* olmak üzere, dik kesitler arasındaki hacmin kütlesi $m = \rho S \Delta x$ olur. Eğer dik kesitler arasında kalan hacimdeki sıcaklık değişiminin x noktasındaki sıcaklık değişimine eşit, yani

$$\Delta u = u(x,t+\Delta t) - u(x,t)$$

$$\Delta E = c(x)\rho(x) S \Delta x \left[u(x,t+\Delta t) - u(x,t) \right] \tag{3.1.2}$$

olur. Böylece (3.1.1) ve (3.1.2) eşitlenerek,

$$S\Delta t \left[k(x+\Delta x) \frac{\partial u(x+\Delta x)}{\partial x} - k(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] + Q(x,t) S \Delta x \Delta t$$

$$= c(x)\rho(x) S \Delta x \left[u(x,t+\Delta t) - u(x,t) \right]$$

elde edilir. Her iki taraf $S\Delta x \Delta t$ ile bölünür ve $\Delta x \to 0,\ \Delta t \to 0$ için limit alınırsa

$$\frac{\partial}{\partial x}\left[k(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial x} \right] + Q(x,t) = c(x)\rho(x) \frac{\partial u(x,t)}{\partial t} \tag{3.1.3}$$

kısmi diferansiyel denklemi elde edilir. Bu metal bir çubukta, ısı yayılımının diferansiyel denklemidir.

Eğer k, c ve ρ fiziksel parametreleri çubuk boyunca düzgün, yani sabit iseler, (3.1.3) denklemi

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} + F(x,t) \tag{3.1.4}$$

denklemine indirgenir. Burada $\alpha^2 = \dfrac{k}{c\rho}$ materyalin geçirgenliği ve $F(x,t) = \dfrac{Q(x,t)}{c\rho}$ dır.

Özel olarak çubukta ısı oluşturan bir kaynak yok ise $Q(x,t) = 0$ olur ve denklem

$$\frac{\partial u(x,t)}{\partial x} = \alpha^2 \frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2} \tag{3.1.5}$$

halini alır. Buna *bir boyutlu ısı denklemi* denir.

Isı yayılımı probleminde tek bir çözüm elde edebilmek için, (3.1.3) denklemi ile birlikte, çubuğun başlangıç ısısı ve çubuğun uç noktalarındaki sıcaklıklarının verilmesi gerekir. Yani,

$$u(x,0) = f(x),\ u(0,t) = T_0,\ u(L,t) = u_L$$

koşulları verilmelidir. Bunlardan ilki başlangıç, diğer ikisi sınır koşullarıdır.

3.2 SONLU BOYUTLU BİR ÇUBUKTA ISI İLETİM PROBLEMİ

Sıfır derecede, sonlu miktarda sıvıyla temas içinde bulunan sonlu ince katı bir çubuğun soğuması durumu göz önüne alınsın. Isı akışının sadece sıvıya doğru olduğu ve sıvıdan çevreye ısı iletiminin olmadığı kabul edilsin. O zaman çubuk için başlangıç-sınır değer problemi şu şekildedir:

$$u_t = \alpha^2 u_{xx} \tag{3.2.1}$$

$$\forall t \text{ için } \quad u_x(0,t) = 0 \tag{3.2.2}$$

$$-kAu_x(1,t) = qM\left(d\vartheta / dt\right) + k_1 B\vartheta(t) \tag{3.2.3}$$

$$u(x,0) = u_0(x), \qquad 0 \le x \le 1 \tag{3.2.4}$$

$$\vartheta(0) = \vartheta_0$$

Burada, $\alpha^2 = \dfrac{k}{\rho c}$, k katının öz iletkenliği, ρ yoğunluğu, c ise özgül ısısıdır. M sıvının kütlesi, q ise özgül ısısıdır. k_1, k öz iletkenliğine ve h ısı değişimi katsayısına bağlı bir sabittir $\left(k_1 = \dfrac{h}{k}\right)$.

Katı-sıvı arasında yüzeydeki ısı transferinin oranı, çubuğun ucuyla sıvı arasındaki sıcaklık farkıyla orantılıdır ve $x = 1$'de Fourier'in ısı iletimi yasası uygulanarak,

$$\vartheta(t) = u(1,t) + kc^{-}u_x(1,t), \qquad t > 0 \tag{3.2.5}$$

elde edilir.

Çözümü bulmak için değişkenlere ayırma yöntemi uygulanırsa problemin sıfır olmayan çözümü,

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.2.6}$$

şeklindedir. Bu ifadeyi (3.2.1)' de yerine yazarak,

$$\frac{T'(t)}{\alpha^2 T(t)} = \frac{X''(x)}{X(x)} = -\lambda$$

elde edilir. Burada $\lambda > 0$ 'dır. Bu durumda,

$$T(t) = e^{-\lambda\alpha^2 t}$$

bulunur. (3.2.6) ifadesi,

$$u(x,t) = X(x)e^{-\lambda\alpha^2 t} \tag{3.2.7}$$

olur. (3.2.7)'yi (3.2.3)'de yerine yazarak,

$$-kAu_x(1,t) = qM\left[u_t(1,t) + kc^{-1}u_{xt}(1,t)\right] + k_1B\left[u(1,t) + kc^{-1}u_x(1,t)\right]$$

$$\left(-kA - kk_1Bc^{-1}\right)u_x(1,t) = k_1Bu(1,t) + qMu_t(1,t) + qMkc^{-1}u_{xt}(1,t) \tag{3.2.8}$$

elde edilir. $\alpha_i, \beta_i \ (i=1,2)$ katsayılar olmak üzere,

$$-kA - kk_1Bc^{-1} = \alpha_1,\ \ k_1B = \alpha_2,\ \ qM = \beta_1,\ \ qMkc^{-1} = \beta_2$$

dönüşümleri yapılır, (3.2.7) ve (3.2.8)' de yerine yazılırsa

$$\alpha_2 X'(1) - \alpha_1 X(1) = -\lambda\alpha^2\left(\beta_1 X(1) + \beta_2 X'(1)\right)$$

elde edilir. $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1, \beta_2$ katsayılarını qM 'ye bölersek,

$$\begin{pmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} 1 & \dfrac{-k_1B}{\alpha^2 qM} \\ \dfrac{-k}{c} & \dfrac{\left[1 + k_1B/cA\right]}{\sigma} \end{pmatrix} \tag{3.2.9}$$

elde edilir. Burada, $\rho = \dfrac{1}{\sigma} := \dfrac{kA}{\alpha^2 qM}$ şeklindedir.

$x = 0$ ve $x = 1$'de sınır koşullarının uygulanmasıyla, ikinci mertebeden sınır değer problemi elde edilir.

[1]'de sınır koşulunda λ parametresi içeren

$$\tau u := -u'' + qu = \lambda u \tag{3.2.10}$$

$$\cos\alpha u(a) + \sin\alpha u'(a) = 0 \tag{3.2.11}$$

$$-\left(\alpha_1 u(b) - \alpha_2 u'(b)\right) = \lambda\left(\beta_1 u(b) - \beta_2 u'(b)\right) \tag{3.2.12}$$

sınır-değer problemi ele alınır. Burada, $q(x)$, $[a,b]$'de sürekli bir fonksiyon, $\alpha \in [0,\pi)$ ve

$$\rho = \begin{vmatrix} \beta_1 & \alpha_1 \\ \beta_2 & \alpha_2 \end{vmatrix} > 0, \qquad \alpha_1, \alpha_2\ \beta_1\ \beta_2 \in \mathbb{R} \tag{3.2.13}$$

şeklindedir.

Özel olarak $k_1 = 0$ durumunda (3.2.10)-(3.2.12) için öz fonksiyon açılımını kullanarak, (3.2.1)-(3.2.4) probleminin çözümünü sunan bir seri elde edilebilir.

$H = L_2[a,b] \times \mathbb{C}$ Hilbert uzayı olarak iki bileşenli vektörler için iç çarpımı

$$\langle F, G \rangle := \int_a^b F_1(x)\overline{G_1(x)}\,dx + \frac{1}{\rho} F_2 \overline{G_2} \tag{3.2.14}$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

$$F = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix}, \quad G = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \end{pmatrix} \in H,$$

ve ρ (3.2.13)'de tanımlanmış bir sabittir. Gereklilik için,

$$R_0[u] := \alpha_1 u(0) - \alpha_2 u'(0) \tag{3.2.15}$$

$$R_0'[u] := \beta_1 u(0) - \beta_2 u'(0) \tag{3.2.16}$$

şeklinde yazılır [1].

(3.2.1)-(3.2.4)'de verilmiş sınır problem [1]'den operatör biçiminde aşağıdaki gibi yazılır:

$$A(F) := \begin{pmatrix} -F_1''(x) + q(x) \\ -R_b(F_1) \end{pmatrix} \tag{3.2.17}$$

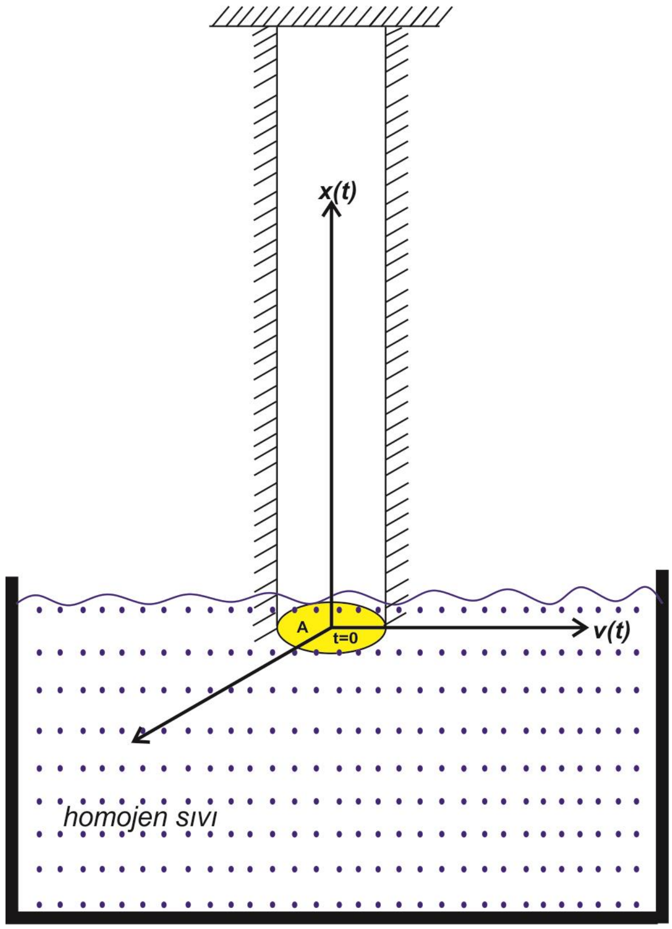
$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} F \in H \mid F_1(x) \in AC[a,b], \tau F_1 \in L_2[a,b], \cos\alpha F_1(a) + \sin\alpha F_1'(a) = 0, \\ F_2 = R_b'(F_1) \end{array} \right\}$$

3.3. BİR UÇ YÜZEYİ SIVIYLA TEMAS HALİNDEKİ YALITILMIŞ YARI SONSUZ BİR ÇUBUKTA DİFÜZYON OLAYI

Yarı sonsuz silindirik katı cisim, keyfi şekil ve boyutta çapraz kesite ve $x = 0$ ’da düz uç yüzeye sahiptir.

Yan yüzeyler, ısı alış-verişi olmaması için izole edilmiştir ve pozitif x eksenine bağlı başlangıç sıcaklık dağılımına sahiptir.

Sıvı, keyfi başlangıç sıcaklığını muhafaza etmek için iyi karışmış (homojen) şekildedir.



Şekil 3.3.1

Sıvıdan çevreye ve çevreden de sıvıya ısı iletiminin olmadığını varsayalım. $t=0$ anında katının tabanı sıvıyla temas halindedir.

Amaç, herhangi bir $t>0$ anında, sıvının sıcaklığına ve katının sıcaklık dağılımına uygun bir kural belirlemektir.

t anındaki ve x pozisyonundaki katının sıcaklığı $u(x,t)$ ile gösterilsin.

Bu durumda zamana bağlı olarak, bir boyutlu ısı denklemi

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x} \tag{3.3.1}$$

biçiminde ifade edilir.

$\alpha^2 = \dfrac{k}{\rho . c}$ olup fiziksel bir sabittir.

$k-$ katının öz iletkenliği, $\rho-$yoğunluk ve $c-$özgül ısıdır.

A katı cismin çapraz kesitin alanı olsun. Bu ucun yüzeyi sıvıyla temastadır.

$v(t)$ her t anında sıvının sıcaklığını göstersin.

O halde katı cisimle sıvı arasındaki termik(sıcaklık) bağıntı;

$$u(0,t) = v(t), \qquad t>0 \tag{3.3.2}$$

ile ifade edilir. Katı cisimden sıvıya ısı akışının oranı $x=0$ uç yüzeyinde $-kAu_x$ dir.

Sıvıdaki ısı birikiminin oranı $qMv'(t)$ dir ($M-$sıvının kütlesi, $q-$özgül ısı). Burada ısı transferi söz konusu olup alınan ısı, verilen ısıya eşit olacağından

$$qMv'\left(t\right) = -kAu_x\left(0,t\right) \tag{3.3.3}$$

eşitliği sağlanır.

Sonuç olarak, eğer $\phi_0(x)$ ve v_0 katıdaki ve sıvıdaki başlangıç sıcaklıklarını gösterirse,

$$\begin{cases} \lim\limits_{t\to 0} u(x,t) = \phi_0(x), & x > 0, \\ \lim\limits_{t\to 0} v(t) = v_0 \end{cases} \tag{3.3.4}$$

sağlanır.

Problem sadece $u(x,t)$ için şu şekilde formüle edilebilir:

$$qMv'(t) = -kAu_x(0,t)$$

$$qMv'(t) + kAu_x(0,t) = 0$$

Bu denklemin bütün terimlerini α^2 ile çarpıp $u_x(0,t)$'nin katsayısına bölersek,

$$\frac{\alpha^2 qMv'(t)}{kA} + \alpha^2 u_x(0,t) = 0$$

elde edilir. Burada $\sigma = \dfrac{\alpha^2 qMv'(t)}{kA}$ diyelim. Genelliği bozmadan $\sigma = 1$ alınırsa

$$v'(t) + \alpha^2 u_x(0,t) = 0 \tag{3.3.5}$$

olur.

(3.3.2) denklemini t'ye göre türevlendirerek

$$\begin{aligned} &u(0,t) = v(t) && t > 0 \\ &u_t(0,t) = v'(t) && (*) \end{aligned}$$

yazılabilir. $(*)$ ifadesini (3.3.5)'te kullanarak $u_t(0,t) + \alpha^2 u_x(0,t) = 0$ şeklinde yazılabilir. O halde $u(x,t)$ için problem,

$$\alpha^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} = \frac{\partial u}{\partial x}, \qquad x > 0, \tag{3.3.6}$$

$$u_t(0,t) + \alpha^2 u_x(0,t) = 0, \quad t > 0, \tag{3.3.7}$$

$$u(x,t) = \phi_0(x), \qquad x > 0, \tag{3.3.8}$$

$$u(0,0) = v_0 \tag{3.3.9}$$

biçimindedir.

Problemin fiziksel durumunu korumak için, $x \to \infty$ da $u(x,t)$ çözümü için

$$\lim_{x\to\infty} \left|u\left(x,t\right)\right| < \infty \tag{3.3.10}$$

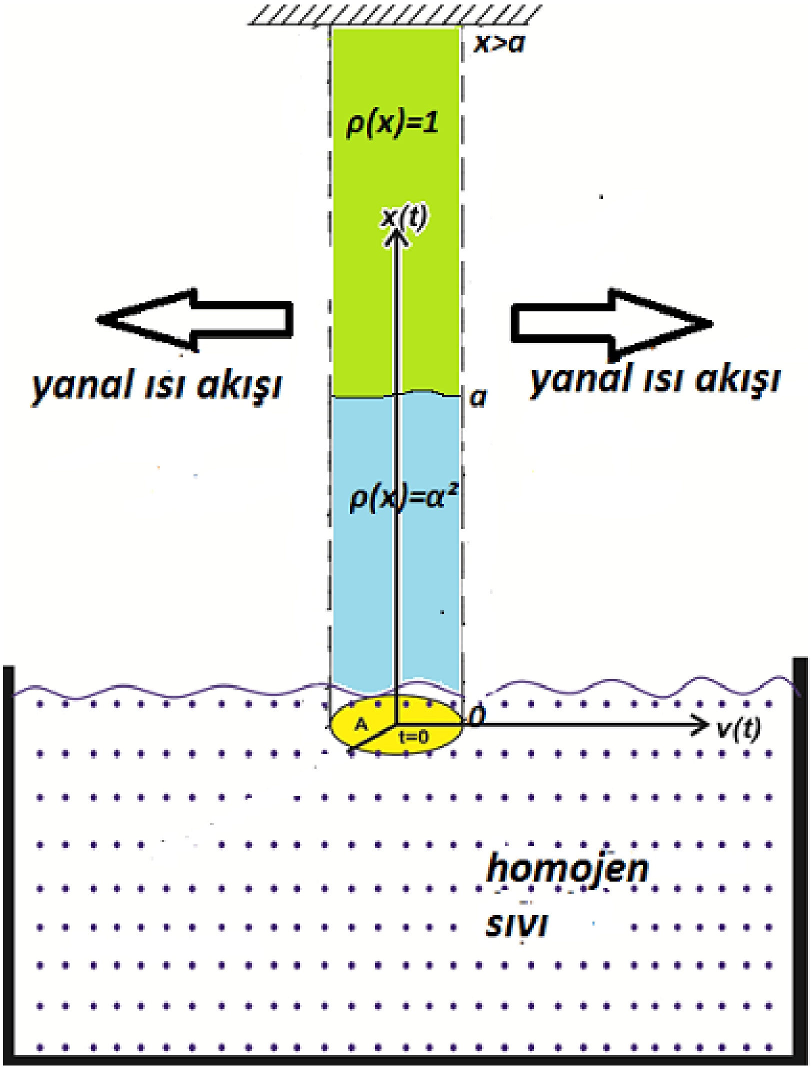
koşulu sağlanır.

3.4 YAN (LATERAL) YÜZEYLERİ İZOLE EDİLMEMİŞ HOMOJEN OLMAYAN BİR ÇUBUKTA DİFÜZYON OLAYI

$t = 0$ anında tabanı keyfi başlangıç sıcaklığına sahip iyi karışmış bir sıvıyla temas halinde olan, yan yüzeyleri (lateral kısımları) izole edilmemiş, ısı alışverişi sırasında $-q(x)u$ miktarda ısı kaybeden, $0 < x \le a$ uzunluğunda yoğunluğu 1 br/cm^3, $0 \le x < \infty$ uzunluğunda ise yoğunluğu α^2 br/cm^3 olan homojen olmayan yarı sonsuz silindirik bir katı cisim düşünelim. Bu taktirde sıvı ile katı arasında sıcaklık bağıntısını bulmaya yarayan ısı denklemi

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t} = \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} - q(x)u$$

biçimindedir [17].



Şekil 3.4.1

3.5 STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN YARI EKSENDE AYRIŞIM PROBLEMİ

3.5.1 Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 3.5.1.1 $W(x) = W\left[y_1(x), y_2(x)\right] = \begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) \\ y_1'(x) & y_2'(x) \end{vmatrix}$ biçiminde tanımlanan $W(x)$ determinantına, $y_1(x)$ ve $y_2(x)$ fonksiyonlarının *Wronskiyeni* denir.

Tanım 3.5.1.2 Sturm-Liouville problemi olarak bilinen

$$Ly(x) = -y'' + q(x)y = \lambda y \qquad (3.5.1)$$

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0 \qquad (3.5.2)$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \qquad (3.5.3)$$

probleminin tanımlı olduğu $[a,b]$ aralığı sonlu ve problemdeki $q(x)$ fonksiyonu bu aralıkta toplanabilir ise, bu sınır değer problemine *regülerdir* denir. Diğer durumlarda, yani $[a,b]$ aralığının sonlu olmadığı veya $q(x)$ ’in $[a,b]$' de toplanabilir olmadığı veya bu iki durumun her ikisinin geçerli olması halinde ise probleme *singülerdir* denir.

Tanım 3.5.1.3 Eğer (3.5.1)-(3.5.3) sınır değer problemi belli bir λ_1 değeri için aşikar olmayan bir $y(x,\lambda_1)$ çözümüne sahipse, λ_1’e (3.5.1)-(3.5.3) sınır değer probleminin bir *özdeğeri*, $y(x,\lambda_1)$’e ise bu özdeğere karşılık gelen *özfonksiyon* denir.

Tanım 3.5.1.4 H bir Hilbert uzayı ve A bu uzayda tanımlı bir operatör olsun. $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ varsa ve bütün H uzayında tanımlı operatörü ifade ediyorsa $\lambda \in \mathbb{C}$ değerine A operatörünün *regüler noktası* denir. R_λ operatörü ise A’nın *rezolventi* olarak adlandırılır. Regüler olmayan bütün $\lambda \in \mathbb{C}$ sayılarına *A operatörünün spektrumu* denir. Bir operatörün özdeğerleri spektrum kümesine dahildir. O halde $\lambda \in \mathbb{C}$ için $R_\lambda = (A - \lambda I)^{-1}$ yoktur. Bütün özdeğerlerin kümesine operatörün *discrete spektrumu* denir. Spektrumun diğer noktalarına *sürekli spektrum noktaları* denir. Bu noktaların oluşturduğu kümeye operatörün *sürekli spektrumu* denir [22].

Tanım 3.5.1.5 Bir $[a,b]$ aralığında tanımlı ve sürekli tüm $f(x)$ fonksiyonları için

$$Af(x) = \int_a^b k(x,\xi) f(\xi) d\xi$$

biçiminde tanımlanan A operatörüne $k(x,\xi)$ çekirdeğine sahip *integral operatör* denir. Burada $\xi \in [a,b]$'dir.

Tanım 3.5.1.6 L operatörü

$$l(y) = p_0(x)\frac{d^2y}{dx^2} + p_1(x)\frac{dy}{dx} + p_2(x)y$$

diferansiyel ifadesi ve

$$U_v(y) = 0 \qquad\qquad v = 1,2$$

sınır koşullarından oluşan diferansiyel operatör olsun, burada $\frac{1}{p_0(x)}, p_1(x), p_2(x)$ katsayıları süreklidir. Ayrıca $U_2(y)$ sınır koşulları aşağıdaki biçimde bir lineer form oluşturur:

$$U_v(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y'_a + \beta_0 y_b + \beta_1 y'_b = 0.$$

Tanım 3.5.1.7

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{3.5.4}$$

denklemi ve

$$\begin{aligned} &\alpha_{11}y(a) + \alpha_{12}y'(a) + \beta_{11}y(b) + \beta_{12}y'(b) = 0 \\ &\alpha_{21}y(a) + \alpha_{22}y'(a) + \beta_{12}y(b) + \beta_{22}y'(b) = 0 \end{aligned} \tag{3.5.5}$$

sınır koşulları verilsin.

$D = \{(x,t) \mid a \le x \le b,\ a \le t \le b\}$ dikdörtgeninde aşağıdaki koşulları sağlayan $G(x,t)$ fonksiyonuna (3.5.4)-(3.5.5) sınır probleminin *Green Fonksiyonu* denir.

1) $G(x,t)$ fonksiyonu sabitleştirilmiş $t \in (a,b)$ için; (a,t) ve (t,b) aralıklarında x'e göre homojen (3.5.4) denklemini sağlar.

2) $G(x,t)$, $[a,b]$ aralığında süreklidir. $\forall x \in (a,b)$ ve $\forall t \in (a,b)$ için x'e göre 1. mertebeden türevi $x = t$ noktasında sıçramalı süreksizliğe sahiptir;

$$G_x(t+0,t) - G_x(t-0,t) = \frac{1}{p_0(t)},$$

3) $G(x,t)$ fonksiyonu (3.5.5) sınır koşullarını sağlar.

Teorem 3.5.1.8 $f(x)$'in ikinci mertebeden türeve sahip bir fonksiyon olduğunu ve (3.5.2)-(3.5.3) sınır koşullarını sağladığını kabul edelim. Bu durumda $f(x)$, (3.5.1)-(3.5.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarıyla, mutlak ve düzgün yakınsak bir Fourier serisine açılabilir. O halde

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n v_n(x), \qquad a_n = \int_0^{\pi} f(x) v_n(x)\,dx$$

sağlanır.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1 ISI İLETİM DENKLEMİ İÇİN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİ

4.1.1 Problemin İfadesi

Bu bölümde bir boyutlu ısı denklemine ilişkin sınır koşulunda zamana göre türev içeren bir sınır değer problemini ele alacağız.

$D=\{(x,t):0<x<\infty,\ 0<t<\infty\}$ bölgesinde aşağıdaki

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-q(x)u \tag{4.1.1}$$

ısı iletim denklemi için

$$\left.\left(-\beta_1 u+\frac{\partial u}{\partial x}+\beta_2\frac{\partial u}{\partial t}\right)\right|_{x=0}=0, \tag{4.1.2}$$

sınır koşulu ve

$$u(x,0)=\phi_0(x), \tag{4.1.3}$$

$$u(0,0)=\vartheta_0 \tag{4.1.4}$$

başlangıç koşullarını göz önüne alalım.

$u(x,t)$, $\phi_0(x)$ve ϑ_0 D bölgesinde tanımlı, sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır ve $\beta_1,\ \beta_2<0$ reel sayılardır. Problemin fiziksel durumunu korumak için, $x\to\infty$ da

$$\lim_{x\to\infty}|u(x,t)|<\infty.$$

Amacımız (4.1.1) denkleminin $\overline{D}=\{(x,t):0\le x<\infty,\ 0\le t<\infty\}$ bölgesinde sürekli ve (4.1.2)-(4.1.4) koşullarını sağlayan çözümünü bulmaktır.

4.1.2 Değişkenlerin Ayrılması ve Sturm-Liouville Problemi

(4.1.1)-(4.1.4) problemini çözmek için değişkenlere ayırma yöntemini kullanalım. (4.1.1)'in (4.1.2) sınır değer probleminin sıfır olmayan çözümünü

$$u(x,t) = y(x)g(t) \tag{4.1.5}$$

biçiminde arayalım. (4.1.5)'i (4.1.1) denkleminde yazarak

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)\rho(x)} - \frac{q(x)}{\rho(x)}$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sol tarafı sadece t'ye, sağ tarafı ise sadece x'e bağlı ve t ile x birbirine bağlı olmayan bağımsız değişkenler olduğundan eşitliğin her iki tarafı *ayrılma sabiti* denilen aynı bir sabite eşittir.

$$\frac{g'(t)}{g(t)} = \frac{y''(x)}{y(x)\rho(x)} - \frac{q(x)}{\rho(x)} = -\lambda^2$$

olsun. O halde

$$-y''(x) + q(x)y(x) = \lambda^2 \rho(x) y(x) \tag{4.1.6}$$

$$g'(t) + \lambda^2 g(t) = 0 \tag{4.1.7}$$

denklemleri elde edilir. (4.1.7) denkleminin bir özel çözümü

$$g(t) = e^{-\lambda^2 t}$$

biçimindedir. Öte yandan (4.1.5)'i (4.1.2)'de yazarak

$$y'(0) - (\beta_1 + \beta_2 \lambda^2) y(0) = 0 \tag{4.1.8}$$

sınır koşulu elde edilir. Dolayısıyla, $y(x)$ fonksiyonu (4.1.6) denklemini ve (4.1.8) sınır koşulunu sağlar.

$u(x,t)$ fonksiyonu (4.1.1)-(4.1.4) probleminin sıfır olmayan çözümü olduğundan $y(x)$ fonksiyonu, (4.1.6), (4.1.8) sınır değer probleminin özfonksiyonu olmalıdır. Bundan dolayı (4.1.6), (4.1.8) Sturm-Liouville problemi için özfonksiyonlara göre ayrışım probleminin incelenmesine gerek duyulur.

4.2 SINIR KOŞULU SPEKTRAL PARAMETRE İÇEREN BİR STURM-LIOUVILLE DENKLEMİ İÇİN AYRIŞIM FORMÜLÜ

4.2.1 Probleme Giriş

Pozitif yarı eksende (4.1.6), (4.1.8) sınır değer problemini ele alalım:

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2\rho(x)y(x) \tag{4.2.1}$$

$$y'(0)-(\beta_1+\beta_2\lambda^2)y(0)=0 \tag{4.2.2}$$

Burada $q(x)$ reel değerli bir fonksiyon olup

$$\int_0^\infty (1+x)\left|q(x)\right|dx<\infty \tag{4.2.3}$$

eşitsizliğini sağlar, λ bir spektral parametre ve $\rho(x)$ katsayısı $0<\alpha\neq 1$ olmak üzere

$$\rho(x)=\begin{cases}\alpha^2, & 0\leq x\leq a\\ 1\ , & x\geq a\end{cases}$$

biçiminde olup $a\in[0,\infty)$ noktasında süreksizliğe sahiptir.

4.2.2 $q(x)\neq 0$ iken (4.2.1), (4.2.2) Sınır Değer Probleminin Çözümü

$$f_0(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}$$

(4.1.6) denkleminin $q(x)\equiv 0$ durumundaki çözümüdür.

Burada $\mu^{\pm}(x)=\pm x\sqrt{\rho(x)}+a(1\mp\sqrt{\rho(x)})$ biçimindedir. [10]'dan bilindiği gibi, kapalı üst yarı düzlemden olan her λ için $K(x,.)\in L_1(\mu^+(x),+\infty)$ olmak üzere (4.1.6) denkleminin aşağıdaki şekilde tek bir $f(x,\lambda)$ çözümü vardır:

$$f(x,\lambda)=f_0(x,\lambda)+\int_{\mu^{\pm}(x)}^{\infty}K(x,t)e^{i\lambda t}dt.$$

Burada $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu

$$\int_{\mu^{\pm}(x)}^{\infty} |K(x,t)|dt \leq c\int_{x}^{\infty} t|q(t)|dt, \quad 0 < c = sabit$$

eşitsizliğini sağlar. (4.1.6) denkleminin katsayıları reel olduğundan $\overline{f(x,\lambda)}$ fonksiyonu da çözümdür. $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ fonksiyonlarının Wronskiyenleri x'e bağlı değildir ve her reel $\lambda \neq 0$ için $W\left[f(x,\lambda), \overline{f(x,\lambda)}\right] = 2i\lambda$'dır. Bu nedenle $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ fonksiyonları (4.1.6) denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur [16].

4.2.3 Özel Çözüm ve Saçılma Fonksiyonu

$\omega(x,\lambda)$ ile (4.1.6) denkleminin $\omega(0,\lambda) = 1,\quad \omega'(0,\lambda) = \beta_1 + \beta_2\lambda^2$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü gösterilsin.

Lemma 4.2.3.1 Reel $\lambda \neq 0$ için

$$\frac{2i\lambda\omega(x,\lambda)}{f'(0,\lambda) - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) f(0,\lambda)} = \overline{f(x,\lambda)} - S(\lambda) f(x,\lambda) \tag{4.2.4}$$

özdeşliği her reel $\lambda \neq 0$ için sağlanır. Burada

$$S(\lambda) = \frac{\overline{f'(0,\lambda)} - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right)\overline{f(0,\lambda)}}{f'(0,\lambda) - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) f(0,\lambda)} \tag{4.2.5}$$

biçimindedir, ve

$$|S(\lambda)| = 1$$

bağıntısını sağlar.

İspat: (4.1.6) diferansiyel denkleminin çözümleri olan $f(x,\lambda)$ ve $\overline{f(x,\lambda)}$ temel çözüm sistemini oluşturduğundan her $\lambda \neq 0$ için $\omega(x,\lambda)$

$$\omega(x,\lambda) = c_1(\lambda) f(x,\lambda) + c_2(\lambda)\overline{f(x,\lambda)}$$

yazılabilir ve burada $c_1(\lambda), c_2(\lambda)$ λ'ya bağlı bulunması gereken fonksiyonlardır.

$$\omega'(x,\lambda) = c_1(\lambda) f'(x,\lambda) + c_2(\lambda)\overline{f'(x,\lambda)}$$

olduğu açıktır. Bu çözüm (4.1.6) diferansiyel denklemini ve (4.2.2) sınır koşulunu sağladığından

$$\omega(0,\lambda)=c_1(\lambda)\,f(0,\lambda)+c_2(\lambda)\,\overline{f(0,\lambda)}=1,$$

$$\omega'(0,\lambda)=c_1(\lambda)\,f'(0,\lambda)+c_2(\lambda)\,\overline{f'(0,\lambda)}=\beta_1+\beta_2\lambda^2$$

yazılabilir. Birinci denklemin her iki tarafı $\overline{f'(0,\lambda)}$ ile, ikinci denklemin her iki tarafı $\overline{f(0,\lambda)}$ ile çarpılır ve taraf tarafa çıkartılırsa:

$$c_1(\lambda)=\frac{\overline{f'(0,\lambda)}-\left(\beta_1+\beta_2\lambda^2\right)\overline{f(0,\lambda)}}{-2i\lambda}$$

elde edilir. Benzer şekilde birinci denklem $f'(0,\lambda)$ ile ikincisi $f(0,\lambda)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkartıldığında

$$c_2(\lambda)=\frac{f'(0,\lambda)-\left(\beta_1+\beta_2\lambda^2\right)f(0,\lambda)}{2i\lambda}$$

bulunur. O halde

$$\omega(x,\lambda)=c_1(\lambda)\,f(x,\lambda)+c_2(\lambda)\,\overline{f(x,\lambda)}$$

ifadesinde bulduğumuz $c_1(\lambda)$ ve $c_2(\lambda)$ değerleri yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}\omega(x,\lambda)=&\frac{\overline{f'(0,\lambda)}-\left(\beta_1+\beta_2\lambda^2\right)\overline{f(0,\lambda)}}{-2i\lambda}f(x,\lambda)\\&+\frac{f'(0,\lambda)-\left(\beta_1+\beta_2\lambda^2\right)f(0,\lambda)}{2i\lambda}\overline{f(x,\lambda)}\end{aligned}\tag{4.2.6}$$

olarak elde edilir.

$$\varphi(\lambda)=f'(0,\lambda)-\left(\beta_1+\beta_2\lambda^2\right)f(0,\lambda)$$

fonksiyonu tanımlansın.

Şimdi, tüm reel $\lambda\neq 0$ için $\varphi(\lambda)\neq 0$ olduğunu gösterelim. Bunun için aksini varsayalım. Yani sıfırdan farklı $\lambda_0\in\left(-\infty,+\infty\right)$ olsun öyle ki;

$$\varphi(\lambda_0)=f'(0,\lambda_0)-\left(\beta_1+\beta_2\lambda_0^2\right)f(0,\lambda_0)=0.$$

Buradan

$$f'(0,\lambda_0)=\left(\beta_1+\beta_2\lambda_0^2\right)f(0,\lambda_0)\tag{4.2.7}$$

ifadesi çekilir,

$$W\left[f(0,\lambda), \overline{f(0,\lambda_0)} \right] = f'(0,\lambda_0)\overline{f(0,\lambda_0)} - f(0,\lambda_0)\overline{f'(0,\lambda_0)} = 2i\lambda_0$$

Wronskiyenin ifadesinde (4.2.6) eşitliği yerine yazılırsa

$$\left(\beta_1 + \beta_2\lambda_0^2\right) f(0,\lambda_0)\overline{f(0,\lambda_0)} - f(0,\lambda_0)\overline{\left(\beta_1 + \beta_2\lambda_0^2\right)}\,\overline{f(0,\lambda_0)} = 2i\lambda_0$$

olur ve

$$\left(\beta_1 + \beta_2\lambda_0^2\right)\left| f(0,\lambda_0)\right|^2 - \overline{\left(\beta_1 + \beta_2\lambda_0^2\right)}\left| f(0,\lambda_0)\right|^2 = 2i\lambda_0 \qquad (4.2.8)$$

elde edilir. $\beta_1,\ \beta_2$ ve λ_0 ifadelerinin reel olduğu göz önünde bulundurulduğunda (4.2.8) eşitliğinin sol tarafı sıfıra eşittir ve $\lambda_0 = 0$ dır. O halde bir çelişki elde edilir ve dolayısıyla tüm reel $\lambda \neq 0$ için $\varphi(\lambda) \neq 0$ olduğu görülür. (4.2.6) eşitliğinin her iki tarafı $2i\lambda$ ile çarpılıp, $\varphi(\lambda) \neq 0$ 'a bölünürse:

$$\frac{2i\lambda\omega(x,\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \frac{\left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right)\overline{f(0,\lambda)} - \overline{f'(0,\lambda)}}{f'(0,\lambda) - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) f(0,\lambda)}\, f(x,\lambda)$$
$$+\frac{f'(0,\lambda) - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) f(0,\lambda)}{f'(0,\lambda) - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) f(0,\lambda)}\,\overline{f(x,\lambda)}$$

veya

$$\frac{2i\lambda\omega(x,\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \overline{f(x,\lambda)} - \frac{\overline{f'(0,\lambda)} - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right)\overline{f(0,\lambda)}}{f'(0,\lambda) - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) f(0,\lambda)}\, f(x,\lambda)$$

elde edilir. O halde

$$S(\lambda) = \frac{\overline{f'(0,\lambda)} - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right)\overline{f(0,\lambda)}}{f'(0,\lambda) - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) f(0,\lambda)}$$

olmak üzere

$$\frac{2i\lambda\omega(x,\lambda)}{\varphi(\lambda)} = \overline{f(x,\lambda)} - S(\lambda) f(x,\lambda)$$

eşitliği bulunur.

$$\varphi(\lambda) = f'(0,\lambda) - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) f(0,\lambda)$$

olduğu dikkate alınarak

$$\overline{S(\lambda)} = \frac{\overline{\overline{f'(0,\lambda)} - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right)\overline{f(0,\lambda)}}}{\overline{f'(0,\lambda) - \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) f(0,\lambda)}} = \frac{\varphi(\lambda)}{\overline{\varphi(\lambda)}} = \left[S(\lambda)\right]^{-1}$$

olduğundan

$$S(\lambda) = \left[\overline{S(\lambda)}\right]^{-1}$$

ve

$$S(\lambda).\overline{S(\lambda)} = |S(\lambda)| = \frac{\overline{\varphi(\lambda)}}{\varphi(\lambda)}.\frac{\varphi(\lambda)}{\overline{\varphi(\lambda)}} = 1$$

bulunur. Böylece lemma ispatlanır.■

Tanım 4.2.3.1 (4.2.5) ile tanımlı $S(\lambda)$ fonksiyonuna (4.2.1), (4.2.2) sınır değer probleminin *saçılma fonksiyonu* denir.

4.2.4 $\varphi(\lambda)$ Fonksiyonunun Özelliklerinin İncelenmesi

Lemma 4.2.4.1 $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları sanal eksende yerleşir.

İspat: Kabul edelim ki λ_1 ve λ_2 $(\operatorname{Im}\lambda_j \geq 0, j = 1,2)$ $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun iki sıfırı olsun. O halde (4.2.1) denklemini sağlarlar.

$$-f''(x,\lambda_1) + q(x) f(x,\lambda_1) = \lambda_1^2 \rho(x) f(x,\lambda_1),$$

$$-\overline{f''(x,\lambda_2)} + q(x)\overline{f(x,\lambda_2)} = \overline{\lambda_2}^2 \rho(x)\overline{f(x,\lambda_2)}.$$

Birinci denklem $\overline{f(x,\lambda_2)}$ ile ikinci denklemi $f(x,\lambda_1)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkartılırsa,

$$-f''(x,\lambda_1)\overline{f(x,\lambda_2)} - \overline{f''(x,\lambda_2)} f(x,\lambda_1), = \left(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2}^2\right) f(x,\lambda_1)\overline{f(x,\lambda_2)}\rho(x)$$

elde edilir.

Her iki tarafın 0 ’ dan $+\infty$ ’a integrali alınırsa

$$-f''(x,\lambda_1)\overline{f(x,\lambda_2)} - \overline{f''(x,\lambda_2)} f(x,\lambda_1), = \left(\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2}^2\right) f(x,\lambda_1)\overline{f(x,\lambda_2)}\rho(x)$$

$$\int_0^\infty \overline{f''(x,\lambda_2)} f(x,\lambda_1)dx - \int_0^\infty f''(x,\lambda_1)\overline{f(x,\lambda_2)}dx = (\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2}^2)\int_0^\infty f(x,\lambda_1)\overline{f(x,\lambda_2)}\rho(x)dx$$

olur. Kısmi integrasyon yardımıyla

$$f'(0,\lambda_1)\overline{f(0,\lambda_2)} - f(0,\lambda_1)\overline{f'(0,\lambda_2)} = (\lambda_1^2 - \overline{\lambda_2}^2)\int_0^\infty f(x,\lambda_1)\overline{f(x,\lambda_2)}\rho(x)dx$$

bulunur. Buradan,

$$(\lambda_1^2-\overline{\lambda_2}^2)\int_0^\infty f(x,\lambda_1)\overline{f(x,\lambda_2)}\rho(x)dx+f(0,\lambda_1)\overline{f'(0,\lambda_2)}-f'(0,\lambda_1)\overline{f(0,\lambda_2)}=0,$$

$$\left(\lambda_1^2-\overline{\lambda}_2^2\right)\int_0^\infty f\left(x,\lambda_1\right)\overline{f\left(x,\lambda_2\right)}\rho\left(x\right)dx-W\left\{f\left(0,\lambda_1\right),\overline{f\left(0,\lambda_2\right)}\right\}=0 \qquad (4.2.9)$$

olduğu görülür. Diğer yandan λ_j 'ler $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları olduğundan

$$\varphi(\lambda_j)=f'(0,\lambda_j)-\left(\beta_1+\beta_2\lambda_j^2\right)f(0,\lambda_j)=0$$

sağlanır. O halde bu bağıntılardan

$$f'(0,\lambda_1)=\left(\beta_1+\beta_2\lambda_1^2\right)f(0,\lambda_1)$$

$$\overline{f'(0,\lambda_2)}=\left(\beta_1+\beta_2\overline{\lambda_2}^2\right)\overline{f(0,\lambda_2)}$$

bulunur. Bu ifadeler Wronskiyenin ifadesinde yerine yazılırsa

$$W\left\{f(x,\lambda_1),\overline{f(x,\lambda_2)}\right\}_{x=0}=f'(0,\lambda_1)\overline{f(0,\lambda_2)}-f(0,\lambda_1)\overline{f'(0,\lambda_2)}$$

$$=f(0,\lambda_1)\left(\beta_1+\beta_2\lambda_1^2\right)\overline{f(0,\lambda_2)}-f(0,\lambda_1)\left(\beta_1+\beta_2\overline{\lambda_2}^2\right)\overline{f(0,\lambda_2)}$$

$$=\beta_2 f(0,\lambda_1)\overline{f(0,\lambda_2)}\left(\lambda_1^2-\overline{\lambda_2}^2\right)$$

elde edilir. $\lambda_1=\lambda_2$ için bu eşitlik yeniden yazılırsa

$$W\left\{f(x,\lambda_1),\overline{f(x,\lambda_2)}\right\}_{x=0}=\beta_2\left|f(0,\lambda_1)\right|^2\left(\lambda_1^2-\overline{\lambda_1}^2\right)$$

olduğu görülür. Bu bulunan Wronskiyenin ifadesi (4.2.9) denkleminde yerine yazılırsa

$$(\lambda_1^2-\overline{\lambda_1}^2)\int_0^\infty\left|f(x,\lambda_1)\right|^2\rho(x)dx-(\lambda_1^2-\overline{\lambda_1}^2)\beta_2\left|f(0,\lambda_1)\right|^2=0$$

$$(\lambda_1^2-\overline{\lambda_1}^2)\left[\int_0^\infty\left|f(x,\lambda_1)\right|^2\rho(x)dx-\beta_2\left|f(0,\lambda_1)\right|^2\right]=0$$

elde edilir. $\beta_2<0,\ \operatorname{Im}\lambda_1>0$ olduğundan köşeli parantezin içindeki ifadenin pozitif olduğu görülür. Buradan

$$\lambda_1+\overline{\lambda_1}=0$$

olduğu elde edilir. Dolayısıyla

$$2\operatorname{Re}\lambda_1=0$$

veya

$$\operatorname{Re}\lambda_1 = 0.$$

Yani $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları sadece sanal eksende yerleşir.

Lemma 4.2.4.2 $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları basittir.

İspat: $f(x,\lambda)$ fonksiyonunun λ 'ya göre diferansiyeli $\dot{f}(x,\lambda) = \frac{\partial}{\partial\lambda} f(x,\lambda)$ ile gösterilsin.

$$-f''(x,\lambda) + q(x)\, f(x,\lambda) = \lambda^2 \rho(x)\, f(x,\lambda) \tag{4.2.10}$$

denkleminin λ 'ya göre diferansiyeli alınırsa,

$$-\dot{f}''(x,\lambda) + q(x)\, \dot{f}(x,\lambda) = 2\lambda\rho(x)\, f(x,\lambda) + \lambda^2\rho(x)\, \dot{f}(x,\lambda) \tag{4.2.11}$$

elde edilir. (4.2.10) denklemi $\dot{f}(x,\lambda)$ ile (4.2.11) denklemi ise $f(x,\lambda)$ ile çarpılıp taraf tarafa çıkartılırsa

$$2\lambda\rho(x)\, f^2(x,\lambda) = f''(x,\lambda)\, \dot{f}(x,\lambda) - \dot{f}''(x,\lambda)\, f(x,\lambda)$$

elde edilir. Her iki tarafın 0'dan $+\infty$'a integrali alınırsa

$$2\lambda \int_0^\infty \rho(x) \left| f(x,\lambda) \right|^2 dx = \int_0^\infty f''(x,\lambda)\, \dot{f}(x,\lambda) - \int_0^\infty \dot{f}''(x,\lambda)\, f(x,\lambda) dx$$

$$= \dot{f}(x,\lambda)\, f'(x,\lambda)\Big|_0^{+\infty} - \int_0^{+\infty} f'(x,\lambda)\dot{f}'(x,\lambda)dx - \dot{f}'(x,\lambda)\, f(x,\lambda)\Big|_0^{+\infty} + \int_0^{+\infty} f'(x,\lambda)\dot{f}'(x,\lambda)dx$$

veya

$$2\lambda \int_0^\infty \rho(x) \left| f(x,\lambda) \right|^2 dx = f(0,\lambda)\, \dot{f}'(0,\lambda) - \dot{f}(0,\lambda)\, f'(0,\lambda) \tag{4.2.12}$$

elde edilir.

Diğer taraftan $\varphi(\lambda)$ 'nın tanımını dikkate alarak λ 'ya göre türevi;

$$\dot{\varphi}(\lambda) = \dot{f}'(0,\lambda) - \dot{f}(0,\lambda)\left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) - 2\beta_2\lambda\, f(0,\lambda)$$

olur. Bu ifadelerden

$$\dot{f}'(0,\lambda) = \dot{\varphi}(\lambda) + \dot{f}(0,\lambda)\left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) + 2\beta_2\lambda\, f(0,\lambda)$$

ve

$$f'(0,\lambda) = \varphi(\lambda) + \left(\beta_1 + \beta_2\lambda^2\right) f(0,\lambda)$$

ifadeleri çekilip (4.2.12) denkleminde yerine yazılırsa;

$$
\begin{aligned}
2\lambda\int_0^\infty \rho(x)\left|f(x,\lambda)\right|^2 dx &= f(0,\lambda)\,\dot f'(0,\lambda)-\dot f(0,\lambda)\,f'(0,\lambda)\\
&= f(0,\lambda)\left[\dot\varphi(\lambda)+\dot f(0,\lambda)\left(\beta_1+\beta_2\lambda_1^2\right)+2\beta_2\lambda f(0,\lambda)\right]\\
&\quad -\dot f(0,\lambda)\left[\varphi(\lambda)+\left(\beta_1+\beta_2\lambda^2\right)f(0,\lambda)\right]
\end{aligned}
$$

$$2\lambda\int_0^\infty \rho(x)\left|f(x,\lambda)\right|^2 dx = f(0,\lambda)\dot\varphi(\lambda)-\varphi(\lambda)\,\dot f(0,\lambda)+2\beta_2\lambda f^2(0,\lambda)$$

elde edilir. Burada $\lambda = i\mu_k$ alınırsa,

$$2i\mu_k\int_0^\infty \rho(x)\left|f(x,i\mu_k)\right|^2 dx = f(0,i\mu_k)\dot\varphi(i\mu_k)+2\beta_2 i\mu_k f^2(0,i\mu_k) \qquad (4.2.13)$$

elde edilir. Eşitliğin sol tarafı sıfırdan farklı olduğundan sağ taraf da sıfırdan farklıdır. Dolayısıyla $\dot\varphi(i\mu_k)\neq 0$ ki, bu da $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının basit olması demektir. ■

Lemma 4.2.4.3 $\varphi(\lambda)$ fonksiyonu üst düzlemde $(\operatorname{Im}\lambda>0)$ sonlu sayıda λ_k $(k=1,2,...,n)$ sıfırlarına sahiptir.

İspat: δ, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun, birbirine komşu olan, iki sıfırı arasındaki uzaklığın infumumu olsun. $\delta>0$ olduğunu gösterelim.

Aksini kabul edelim. O halde $\lim\limits_{k\to\infty}\left\{\tilde\lambda_k-\lambda_k\right\}=0$, $\tilde\lambda_k\geq\lambda_k>0$ ve $\max\limits_k\tilde\lambda_k<M$ sağlanacak biçimde, $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarından oluşan, $\left\{i\tilde\lambda_k\right\}$ ve $\left\{i\lambda_k\right\}$ dizileri vardır. (4.2.1) denkleminin $f(x,\lambda)$ çözümünün özelliğinden (Bknz. [10]) yeterince büyük A sayıları için,

$f(x,\lambda)>\dfrac{1}{2}\exp(-\lambda x)$ eşitsizliğinin $x\in[A,\infty]$ ve $\lambda\in[0,\infty)$'a göre gerçeklediğini söyleyebiliriz. Buradan ise

$$\int_A^\infty f\left(x,i\tilde\lambda_k\right)\overline{f\left(x,i\lambda_k\right)}dx>\frac{e^{-A\left(\tilde\lambda_k+\lambda_k\right)}}{4\left(\tilde\lambda_k+\lambda_k\right)}>\frac{e^{-2MA}}{8M} \qquad (4.2.14)$$

sağlanır. Diğer taraftan (4.2.13) den,

$$0=\int_0^\infty f(x,i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x,i\lambda_k)}dx=\int_A^\infty f(x,i\tilde{\lambda}_k)\left[\overline{f(x,i\lambda_k)}-\overline{f(x,i\tilde{\lambda}_k)}\right]dx+$$

$$+\int_0^A f(x,i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x,i\tilde{\lambda}_k)}dx+\int_0^A f(x,i\tilde{\lambda}_k)\overline{f(x,i\lambda_k)}dx$$

olur. $k\to\infty$ iken $x\in[0,A)$ için $\lim\limits_{k\to\infty}\left[f(x,i\tilde{\lambda}_k)-f(x,i\lambda_k)\right]=0$ olduğundan,

$$0\geq\varliminf_{k\to\infty}\int_A^\infty f\left(x,i\tilde{\lambda}_k\right)\overline{f\left(x,i\lambda_k\right)}dx \tag{4.2.15}$$

sağlanır. (4.2.14) ve (4.2.15) ifadeleri bir çelişki oluşturur. O halde kabulümüzün yanlış olduğunu ve dolayısıyla $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısının sonlu olduğu söylenebilir. ■

$\lambda=i\lambda_j\ (\lambda_j>0), j=1,2,...,n$ ler $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları olsunlar. Ayrıca m_j^{-1} nin $f(x,i\lambda_j)$ fonksiyonunun $L_{2,\rho}(0,\infty)$'daki normu olduğunu kabul edelim.

O halde, (4.2.13)'den (4.2.1), (4.2.2) probleminin *normlaştırıcı sayılarını*

$$m_j^{-2}=\int_0^\infty\rho(x)\left|f(x,i\lambda_j)\right|^2dx-\beta_2\left|f(0,i\lambda_j)\right|^2=-\frac{1}{2i\lambda_j}\dot{\varphi}(i\lambda_j)f(0,i\lambda_j) \tag{4.2.16}$$

şeklinde yazılabilir.

4.2.5 Rezolvent Operatörün İnşa Edilmesi

Bu bölümde (4.2.1), (4.2.2) sınır değer probleminin rezolvent operatörünü inşa edeceğiz.

$H_\rho=L_{2,\rho}(0,\infty)\times\mathbb{C}$ Hilbert uzayında $F=\begin{pmatrix}F_1(x)\\F_2\end{pmatrix}\in H_\rho$, $G=\begin{pmatrix}G_1(x)\\G_2\end{pmatrix}\in H_\rho$ vektörleri için

$$\langle F,G\rangle:=\int_0^\infty F_1(x)\overline{G_1(x)}\rho(x)dx-\frac{1}{\beta_2}F_2\overline{G_2}\rho(0)$$

ile iç çarpım tanımlayalım ve

$$l(F_1)=\frac{1}{\rho(x)}\left\{-F_1''+q(x)F_1\right\}$$

olsun.

(4.2.1), (4.2.2) sınır değer problemine karşılık gelen L operatörü [1] kullanılarak aşağıdaki formda tanımlansın:

$$R_0\left[F_1\right]=\beta_1F_1(0)-F_1'(0),$$
$$R_0'\left[F_1\right]=\beta_2F_1(0).$$

$$L\left(F\right):=\begin{pmatrix} l(F_1)=\dfrac{1}{\rho(x)}\left\{-F_1''+q(x)F_1\right\} \\ F_1'(0)\end{pmatrix}, F\in D(L)$$

olup, burada L operatörünün tanım kümesi

$$D(L):=\left\{F\in H_\rho \mid F_1(x),\ F_1'(x)\ \in\ \mathrm{AC}\left[0,b\right]\subset\left[0,\infty\right), l(F_1)\in L_{2,\rho}(0,\infty),\ F_2=\beta_2F_1(0)\right\}$$

biçimindedir. (4.2.1), (4.2.2) sınır değer problemi $Ly=\lambda^2\rho(x)y$ eşitliğine denktir. Ayrıca L operatörü H_ρ uzayında öz eşleniktir.

Eğer λ^2, L operatörünün spektrum noktası değilse $R_{\lambda^2}(L)=(L-\lambda^2I)^{-1}$ rezolvent operatörü vardır. Şimdi rezolvent operatörünün biçimi bulunacaktır.

Teorem 4.2.5.1 Tüm λ^2, $(\operatorname{Im}\lambda>0,\varphi(\lambda)\neq 0)$ sayıları L operatörünün rezolvent kümesine aittir. $R_{\lambda^2}(L)$ rezolventi

$$R_{\lambda^2}(L)=\int_0^\infty G(x,\xi;\lambda)F(\xi)\rho(\xi)d\xi$$

çekirdeğine sahip bir integral operatördür. Burada

$$G(x,\xi;\lambda)=\frac{-1}{\varphi(\lambda)}\begin{cases}\omega(x,\lambda)f(\xi,\lambda), & x\le\xi\\ f(x,\lambda)\omega(\xi,\lambda), & \xi\le x\end{cases}$$

biçimindedir.

İspat: $F(\xi)\in D(L)$**'nin** sonsuzlukta sonlu değere sahip bir fonksiyon olduğunu kabul edelim. Rezolventin açık biçimini bulmak için

$$-y''+q\left(x\right)y=\lambda^2\rho\left(x\right)F_1\left(x\right), \tag{4.2.17}$$

$$y'(0)=\left(\beta_1+\beta_2\lambda^2\right)y(0)+F_2\rho(0) \tag{4.2.18}$$

sınır değer problemi çözülmelidir. (4.2.17), (4.2.18) probleminin çözümünü

$$y(x,\lambda)=c_1(x,\lambda)\omega(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)f(x,\lambda), \tag{4.2.19}$$

biçiminde arayalım. Burada $\omega(x,\lambda)$ ve $f(x,\lambda)$ fonksiyonları $\operatorname{Im}\lambda>0$ için homojen problemin çözümleridir.

Sabitlerin değişimi yöntemini uygulayarak, aşağıdaki denklemler sistemini elde ederiz:

$$\begin{cases} c_1'(x,\lambda)\omega(x,\lambda)+c_2'(x,\lambda)f(x,\lambda)=0 \\ c_1'(x,\lambda)\omega'(x,\lambda)+c_2'(x,\lambda)f'(x,\lambda)=-\rho(x)F_1(x) \end{cases} \tag{4.2.20}$$

(4.2.20) denklem sistemindeki birinci denklemi $f'(x,\lambda)$ ile ikinci denklemi $f(x,\lambda)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkartılırsa,

$$c_1'(x,\lambda)\left[\omega(x,\lambda)f'(x,\lambda)-\omega'(x,\lambda)f(x,\lambda)\right]=\rho(x)F_1(x)f(x,\lambda) \tag{4.2.21}$$

elde edilir. Burada $y(x,\lambda)$ çözümün $L_{2,\rho}(0,\infty)$'dan olması için $c_1(\infty,\lambda)=0$ olması gerekir. (4.2.21) ifadesi (x,∞) aralığında integrallendiğinde $c_1(x,\lambda)$ değeri,

$$c_1(x,\lambda)=-\int_x^\infty \frac{f(\xi,\lambda)}{\varphi(\lambda)}F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi$$

biçiminde bulunur.

Benzer şekilde (4.2.20) denklem sistemindeki birinci denklemi $\omega'(x,\lambda)$ ile ikinci denklemi $\omega(x,\lambda)$ ile çarpıp taraf tarafa çıkartırsak

$$c_2'(x,\lambda)\left[\omega'(x,\lambda)f(x,\lambda)-\omega(x,\lambda)f'(x,\lambda)\right]=\rho(x)F_1(x)\omega(x,\lambda) \tag{4.2.22}$$

elde edilir ve bu ifadeyi $(0,x)$ aralığında integrallersek $c_2(x,\lambda)$ değeri

$$c_2(x,\lambda)=c_2(0,\lambda)-\int_0^x \frac{\omega(\xi,\lambda)}{\varphi(\lambda)}F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi \tag{4.2.23}$$

biçiminde bulunur. (4.2.19) kullanılarak

$$y(x,\lambda)=\omega(x,\lambda)\left(-\int_x^\infty \frac{f(\xi,\lambda)}{\varphi(\lambda)}F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi\right)$$
$$+f(x,\lambda)\left(c_2(0,\lambda)-\frac{1}{\varphi(\lambda)}\int_0^x \frac{\omega(\xi,\lambda)}{\varphi(\lambda)}F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi\right)$$

$$= -\frac{1}{\varphi(\lambda)} \int_x^{\infty} \omega(x,\lambda) f(\xi,\lambda) F_1(\xi)\rho(\xi) d\xi$$

$$-\frac{1}{\varphi(\lambda)} f(x,\lambda) \int_0^{x} \omega(\xi,\lambda) F_1(\xi)\rho(\xi) d\xi + c_2(0,\lambda) f(x,\lambda).$$

$$y(x,\lambda) = \int_0^{\infty} G(x,\xi;\lambda) F_1(\xi)\rho(\xi) d\xi + c_2(0,\lambda) f(x,\lambda) \qquad (4.2.24)$$

bulunur. $c_2(0,\lambda)$'nın ifadesini bulmak için (4.2.18) koşulunu kullanmak gerekir. $y(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.2.18) koşulunu sağlar.

$$y'(x,\lambda) = c_1'(x,\lambda)\omega(x,\lambda) + c_1(x,\lambda)\omega'(x,\lambda) + c_2'(x,\lambda) f(x,\lambda) + c_2(x,\lambda) f'(x,\lambda)$$

olmak üzere (4.2.18) koşulunu sağlatırsak,

$$c_1'(0,\lambda) + c_2'(0,\lambda) f(0,\lambda) + c_2(0,\lambda) f'(0,\lambda) = (\beta_1 + \beta_2\lambda^2) c_2(0,\lambda) f(0,\lambda) + \alpha^2 F_2$$

elde edilir. Bu ifadeyi düzenlendiğinde

$$c_2(0,\lambda)\varphi(\lambda) + c_1'(0,\lambda) + c_2'(0,\lambda) f(0,\lambda) = \alpha^2 F_2 \qquad (4.2.25)$$

eşitliği elde edilir. (4.2.25) ifadesindeki $c_1'(0,\lambda), c_2'(0,\lambda)$ değerleri (4.2.21) ve (4.2.22) eşitlikleri yardımıyla

$$c_2(0,\lambda) = \frac{\alpha^2 F_2}{\varphi(\lambda)} \qquad (4.2.26)$$

elde edilir. (4.2.24) ifadesinde (4.2.26) değeri yazılırsa rezolvent operatörünün biçimi

$$y(x,\lambda) = \int_0^{\infty} G(x,\xi;\lambda) F_1(\xi) d\xi + \frac{\alpha^2 F_2}{\varphi(\lambda)} f(x,\lambda)$$

şeklinde bulunur ve teoremin ispatı biter. ■

Lemma 4.2.5.1 $F_1(x) \in D(L)$ iki kez türevlenebilen, sonsuzlukta sonlu değer alan bir fonksiyon olsun. O halde $|\lambda| \to \infty$, $\operatorname{Im}\lambda \ge 0$ iken

$$\langle G, F \rangle = \int_0^{\infty} G(x,\xi;\lambda) F_1(\xi)\rho(\xi) d\xi + \frac{\alpha^2 F_2}{\varphi(\lambda)} f(x,\lambda) = -\frac{F_1(x)}{\lambda^2} + O\left(\frac{1}{\lambda^2}\right) \qquad (4.2.27)$$

dir.

İspat: Teorem, (4.2.17) kullanılarak ve kısmi integrasyon yapılarak

$$\int_0^\infty G(x,\xi;\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi = -\int_x^\infty \frac{\omega(x,\lambda)f(\xi,\lambda)}{\varphi(\lambda)}F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi$$

$$-\int_0^x \frac{\omega(\xi,\lambda)f(x,\lambda)}{\varphi(\lambda)}F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi$$

$$\frac{\omega(x,\lambda)}{\varphi(\lambda)}\left\{f''(\xi,\lambda)-q(\xi)f(\xi,\lambda)\right\}F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\int_0^x \frac{f(x,\lambda)}{\varphi(\lambda)}\left\{\omega''(\xi,\lambda)-q(\xi)\omega(\xi,\lambda)\right\}F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi$$

$$=\frac{W\left\{\omega(x,\lambda),f(x,\lambda)\right\}}{\lambda^2\varphi(\lambda)}F_1(x)\rho(\xi)$$

$$+\frac{\alpha^2 f(x,\lambda)}{\lambda^2\varphi(\lambda)}\left[\omega(0,\lambda)F_1'(0)-\omega'(0,\lambda)F_1(0)\right]$$

$$-\frac{1}{\lambda^2}G(x,\xi;\lambda)\overline{F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi}$$

bulunur. Burada

$$F_1(\xi) = -F_1''(\xi)+q(\xi)F_1(\xi)$$

ve

$$\left\langle G,F\right\rangle = \int_0^\infty G(x,\xi;\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi + \frac{\alpha^2 F_2}{\varphi(\lambda)}f(x,\lambda) = -\frac{F_1(x)}{\lambda^2}$$

$$+\frac{1}{\lambda^2}\left[\frac{\alpha^2 f(x,\lambda)}{\varphi(\lambda)}F_1'(0)-\frac{\alpha^2\left(\beta_1+\beta_2\lambda^2\right)f(x,\lambda)}{\varphi(\lambda)}F_1(0)-\int_0^\infty G(x,\xi;\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi\right]$$

biçiminde olduğu ve böylece (4.2.27) ifadesinin sağlandığı görülür. ■

4.2.6 Özfonksiyonlara Göre Ayrışım Formülünün Elde Edilmesi

Bu bölümde (4.2.1), (4.2.2) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülünü bulacağız.

$$F(x,\lambda) = \int_0^\infty G(\xi,t;\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi$$

alalım ve Γ_R'nin sıfır merkezli R yarıçaplı pozitif yönlendirilmiş bir çember olduğunu kabul edelim.

$$D = \left\{z : |z| \le R,\ \ |\operatorname{Im} z| \ge \varepsilon\right\}$$

bölgesinin pozitif yönlendirilmiş sınırını $\Gamma_{R,\varepsilon}$ ile gösterelim ve bu eğri üzerinden integral alalım. $D=\left\{ z \mid |z|\le R, |\operatorname{Im} z|\le \varepsilon \right\}$ bölgesinin negatif yönlendirilmiş sınırını $\Gamma'_{R,\varepsilon}$ ile gösterelim ve

$$\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} = \int\limits_{\Gamma_R} + \int\limits_{\Gamma'_{R,\varepsilon}} \tag{4.2.28}$$

integrasyon özelliğini kullanalım.

(4.2.27) eşitliğinin her tarafını $\dfrac{1}{2\pi i}\lambda$ ile çarpıp, λ ya göre $\Gamma_{R,\varepsilon}$ çemberi üzerinden integral alırsak,

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda F(x,\lambda)\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \frac{F_1(x)}{\lambda}\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\lambda \tag{4.2.29}$$

elde ederiz.

(4.2.28) eşitliğini kullanarak (4.2.29) ifadesini aşağıdaki biçimde yazabiliriz:

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda F(x,\lambda)\,d\lambda = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \lambda F(x,\lambda)\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma'_{R,\varepsilon}} \lambda F(x,\lambda)\,d\lambda \tag{4.2.30}$$

Şimdi (4.2.29)'yi kullanarak (4.2.30) integralinin sağ tarafını hesaplayalım.

$\omega(x,\lambda)$ ve $f(x,\lambda)$ fonksiyonlarının özelliklerinden, $R\to\infty$ ve $\varepsilon\to 0$ iken $\forall x\in[0,T]\subset[0,\infty)$ için $\dfrac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} O\left(\dfrac{1}{\lambda}\right)d\lambda \to 0$ sağlanır.

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \lambda F(x,\lambda)\,d\lambda = -\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} \frac{F_1(x)}{\lambda}\,d\lambda + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_R} O\left(\frac{1}{\lambda}\right) d\lambda \underset{R\to\infty}{\longrightarrow} -F_1(x)$$

Bu son eşitlikten, $R\to\infty$ ve $\varepsilon\to 0$ iken (4.2.30) integralini

$$\lim_{\substack{R\to\infty \\ \varepsilon\to 0}} \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda F(x,\lambda)\,d\lambda = -F_1(x) + \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{-\infty}^{\infty} \lambda\left[F(x,\lambda+i0) - F(x,\lambda-i0)\right] d\lambda \tag{4.2.31}$$

biçiminde yazılabilir.

Diğer taraftan, rezidü teorisinden

$$\frac{1}{2\pi i}\int\limits_{\Gamma_{R,\varepsilon}} \lambda F(x,\lambda)\,d\lambda = \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\lambda=i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] + \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\lambda=-i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] \tag{4.2.32}$$

olur. (4.2.31) ve (4.2.32) eşitliklerini kullanarak

$$
\begin{aligned}
F_1(x) = & -\sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\lambda=i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] - \sum_{j=1}^{n} \operatorname*{Res}_{\lambda=-i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] \\
& + \frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty} \lambda\left[F(x,\lambda+i0) - F(x,\lambda-i0)\right] d\lambda
\end{aligned}
\tag{4.2.33}
$$

elde edilir.

Şimdi, $\psi(x,\lambda)$ ’nın (4.2.1) denkleminin $\psi(0,\lambda)=0,\ \psi'(0,\lambda)=\beta_2$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olduğunu kabul edelim. $W\{\omega(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\}=1$ olduğu açıktır. O halde $f(x,\lambda)=c_1\omega(x,\lambda)+c_2\psi(x,\lambda)$ yazabiliriz. Burada

$$
c_1 = f(0,\lambda), \qquad c_2 = \frac{\varphi(\lambda)}{\beta_2}
$$

olup,

$$
f(x,\lambda) = f(0,\lambda)\omega(x,\lambda) + \frac{\varphi(\lambda)}{\beta_2}\psi(x,\lambda)
$$

olduğu kolayca görülür. Dolayısıyla,

$$
G(x,\xi,\lambda) = -\frac{f(0,\lambda)}{\varphi(\lambda)}\omega(x,\lambda)\omega(\xi,\lambda) + \frac{1}{\beta_2}\begin{cases}\omega(x,\lambda)\psi(\xi,\lambda), & x \le \xi \\ \psi(x,\lambda)\omega(\xi,\lambda), & \xi \le x\end{cases}
\tag{4.2.34}
$$

olur.

$$
\begin{aligned}
F(x,\lambda) = & -\frac{1}{\varphi(\lambda)} f(0,\lambda)\omega(x,\lambda)\int_0^{\infty}\omega(\xi,\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi \\
& -\frac{\psi(x,\lambda)}{\beta_2}\int_0^{x}\omega(\xi,\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi - \frac{\omega(x,\lambda)}{\beta_2}\int_x^{\infty}\psi(\xi,\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi \\
& -\frac{\alpha^2 F_2}{\beta_2\varphi(\lambda)} f(0,\lambda)\omega(x,\lambda) - \frac{\alpha^2 F_2}{\beta_2}\psi(x,\lambda)
\end{aligned}
$$

O halde,

$$
\begin{aligned}
\operatorname*{Res}_{\lambda=i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right] = & \frac{i\lambda_j}{\dot{\varphi}(i\lambda_j)} f(0,i\lambda_j)\omega(x,i\lambda_j)\int_0^{\infty}\omega(\xi,i\lambda_j)F_1(\xi)d\xi \\
& -\beta_2\frac{i\lambda_j\alpha^2 F_2}{\dot{\varphi}(i\lambda_j)} f(0,i\lambda_j)\omega(x,i\lambda_j), \quad j=1,2,...,n
\end{aligned}
$$

yazılabilir.

$f(x,\lambda)$ ve $\omega(x,\lambda)$ ’nın özelliklerini kullanarak

$$
f(x,\lambda_j) = f(0,\lambda_j)\omega(x,\lambda_j), \qquad j=1,2,...,n
\tag{4.2.35}
$$

yazılabilir. (4.2.16) ve (4.2.35) bağıntıları kullanılarak

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right]+\operatorname*{Res}_{\lambda=-i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right].$$

$$=-m_j^2 f(x,i\lambda_j)\int_0^\infty f(\xi,i\lambda_j)F_1(\xi)d\xi-\frac{m_j^2\alpha^2}{\beta_2}F_2 f(0,i\lambda_j)f(x,i\lambda_j)$$

formunda yazılabilir Bu ifadeyi

$$U_j(x)=m_j\begin{pmatrix} f(x,i\lambda_j)\\ -\beta_2 f(0,i\lambda_j)\end{pmatrix},\qquad F(x)=\begin{pmatrix}F_1(x)\\ F_2\end{pmatrix},\qquad j=1,2,...,n$$

olmak üzere

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right]+\operatorname*{Res}_{\lambda=-i\lambda_j}\left[\lambda F(x,\lambda)\right]=-m_j^2\left\langle F,U_j(x)\right\rangle\Big|_{H_\rho} f(x,i\lambda_j) \qquad (4.2.36)$$

biçiminde yazabilmemiz mümkündür.

Şimdi

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\left[F\left(x,\lambda+i0\right)-F\left(x,\lambda-i0\right)\right]d\lambda$$

ifadesini hesaplayalım.

(4.2.34) den ve $F\left(x,\lambda+i0\right)=\overline{F\left(x,\lambda-i0\right)}$ eşitliğinden

$$F(x,\lambda+i0)-F(x,\lambda-i0)=\left[\frac{1}{\overline{\varphi(\lambda)}}\overline{f(0,\lambda)}-\frac{1}{\varphi(\lambda)}f(0,\lambda)\right]\omega(x,\lambda)\int_0^\infty\omega(\xi,\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi$$

$$+\frac{\alpha^2F_2}{-\beta_2}\left[\frac{\beta_2}{\varphi(\lambda)}f(0,\lambda)+\frac{\beta_2}{\overline{\varphi(\lambda)}}\overline{f(0,\lambda)}\right]\omega(x,\lambda)$$

$$=\frac{2i\lambda}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}\omega(x,\lambda)\int_0^\infty\omega(\xi,\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi-\frac{\alpha^2 2i\lambda F_2}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}\omega(x,\lambda)$$

Buradan elde edilir ki

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{-\infty}^{\infty}\lambda\left[F(x,\lambda+i0)-F(x,\lambda-i0)\right]d\lambda$$

$$=\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda^2}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}\omega(x,\lambda)\int_0^\infty\omega(t,\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi d\lambda-\frac{2F_2\alpha^2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda^2\omega(x,\lambda)}{\left|\varphi(\lambda)\right|^2}d\lambda \qquad (4.2.37)$$

biçimindedir.

Böylece (4.2.36) ve (4.2.37) ifadeleri (4.2.33)'da yerlerine yazılırsa özfonksiyonlara göre ayrışım formülü aşağıdaki gibi bulunur:

$$\begin{aligned} F_1(x) &= \sum_{j=1}^{n} m_j \left\langle F, U_j(x) \right\rangle\Big|_{H\rho} f(x, i\lambda_j) \\ &+ \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{|\varphi(\lambda)|^2}\,\omega(x,\lambda)\int_0^\infty \omega(\xi,\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi d\lambda \\ &- \frac{2\alpha^2 F_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^2\omega(x,\lambda)}{|\varphi(\lambda)|^2}d\lambda. \end{aligned} \tag{4.2.38}$$

$$\begin{aligned} F_2 = \beta_2 F_1(0) &= \sum_{j=1}^{n} m_j \beta_2 \left\langle F, U_j(0) \right\rangle\Big|_{H_\rho} f(0, i\lambda_j) \\ &+ \frac{2\beta_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{|\varphi(\lambda)|^2}\int_0^\infty \omega(\xi,\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi d\lambda \\ &- \frac{2\alpha^2\beta_2 F_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{|\varphi(\lambda)|^2}d\lambda. \end{aligned} \tag{4.2.39}$$

biçiminde bulunur.

4.2.7 Isı İletim Probleminin Çözümü

(4.2.38) ve (4.2.39) formülleri kullanılarak, (4.1.1)-(4.1.4) probleminin çözümü

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ u(0,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix} e^{-\lambda^2 t}$$

biçimindedir. Buradan

$$\begin{aligned} u(x,t) &= \sum_{j=1}^{n} m_j e^{-\lambda^2 t} \left\langle F, U_j(x) \right\rangle\Big|_{H_\rho} f(x, i\lambda_j) + \frac{2}{\pi}e^{-\lambda^2 t}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{|\varphi(\lambda)|^2}\omega(x,\lambda) \\ &\times\int_0^\infty \omega(\xi,\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi - \frac{2\alpha^2 e^{-\lambda^2 t}F_2}{\pi}\int_0^\infty \lambda^2\frac{\omega(x,\lambda)}{|\varphi(\lambda)|^2}d\lambda \end{aligned} \tag{4.2.40}$$

$$\begin{aligned} u(x,0) = \phi_0(x) &= \sum_{j=1}^{n} m_j \left\langle F, U_j(x) \right\rangle\Big|_{H_\rho} f(x, i\lambda_j) + \frac{2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{|\varphi(\lambda)|^2}\omega(x,\lambda) \\ &\times\int_0^\infty \omega(\xi,\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi d\lambda - \frac{2\alpha^2 F_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^2\omega(x,\lambda)}{|\varphi(\lambda)|^2}d\lambda. \end{aligned} \tag{4.2.41}$$

ifadelerinde sınır koşulları yazılacak olursa sınır değer probleminin çözümü

$$u(0,0)=\vartheta_0=\sum_{j=1}^{n} m_j \left\langle F, U_j(0)\right\rangle f(0,i\lambda_j)+\frac{2\beta_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^2 d\lambda}{|\varphi(\lambda)|^2}\int_0^\infty \omega(\xi,\lambda)F_1(\xi)\rho(\xi)d\xi d\lambda$$

$$-\frac{2\beta_2 F_2}{\pi}\int_0^\infty \frac{\lambda^2}{|\varphi(\lambda)|^2}d\lambda.$$

biçiminde elde edilir.

4.2.8 Özel Durumda Isı İletim Probleminin Çözümü

$q(x)\equiv 0,\ \rho(x)\equiv 1\ \beta_1=0,\ \beta_2=1$ durumu için (4.1.6), (4.1.8) problemi

$$-y''(x)=\lambda^2 y(x), \tag{4.2.42}$$

$$y'(0)-\lambda^2 y(0)=0 \tag{4.2.43}$$

biçimini alır.

Açıktır ki, (4.2.42) denkleminin $\lim\limits_{x\to 0} e^{-i\lambda x} f_0(x,\lambda)=1$ koşulunu sağlayan çözümü $f_0(x,\lambda)=e^{i\lambda x}$ biçimindedir.

(4.2.42) denkleminin $\omega_0(0,\lambda)=1,\ \omega_0'(0,\lambda)=\lambda^2$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü $\omega_0(x,\lambda)=\lambda\sin\lambda x+\cos\lambda x$ biçimindedir.

Reel $\lambda\neq 0$ için

$$2i\lambda\frac{\lambda\sin\lambda x+\cos\lambda x}{\lambda^2-i\lambda}=e^{-i\lambda x}-\frac{\lambda^2+i\lambda}{\lambda^2-i\lambda}e^{i\lambda x} \tag{4.2.44}$$

özdeşliği sağlanır. Burada

$$S_0(\lambda)=\frac{\lambda^2+i\lambda}{\lambda^2-i\lambda},\qquad \varphi_0(\lambda)=\lambda^2-i\lambda$$

olduğu açıktır. $\varphi_0(\lambda)$ fonksiyonunun $\operatorname{Im}\lambda>0$ üst yarı düzlemde tek bir $\lambda_1=i$ sıfırı vardır. (4.2.16)'yı kullanarak m_1 normlaştırıcı sayısı $\sqrt{2}$ olarak hesaplanır. (4.2.42), (4.2.43) sınır değer probleminin rezolvent operatörü

$$R_{\lambda^2}(L)=\int_0^\infty G_0(x,\xi;\lambda)F(\xi)d\xi$$

çekirdeğine sahip bir integral operatördür. Burada

$$G_0(x,\xi;\lambda)=\frac{1}{\lambda^2-i\lambda}\begin{cases}(\lambda\sin\lambda x+\cos\lambda x)e^{i\lambda\xi}, & x\le\xi\\ e^{i\lambda x}(\lambda\sin\lambda\xi+\cos\lambda\xi), & \xi\le x\end{cases}$$

biçimindedir.

(4.2.38) ve (4.2.39) formüllerini kullanarak (4.2.42), (4.2.43) sınır değer probleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülünü bulalım:

$$\begin{aligned}F_1(x)=&\,2e^{-x}\int_0^\infty e^{-\xi}F_1(\xi)d\xi-2F_2e^{-x}\\ &+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda\sin\lambda x+\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\int_0^\infty(\lambda\sin\lambda\xi+\cos\lambda\xi)F_1(\xi)d\xi d\lambda\\ &-\frac{2F_2}{\pi}\int_0^\infty\frac{(\lambda\sin\lambda x+\cos\lambda x)}{\lambda^2+1}d\lambda\end{aligned}$$

Bu ifade düzenlenirse

$$\begin{aligned}F_1(x)=&\,2e^{-x}\left[\int_0^\infty F_1(\xi)d\xi-F_2\right]\\ &+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{\lambda\sin\lambda x+\cos\lambda x}{\lambda^2+1}\left\{\int_0^\infty(\lambda\sin\lambda\xi+\cos\lambda\xi)F_1(\xi)d\xi-F_2\right\}d\lambda\end{aligned}\tag{4.2.45}$$

sonucu elde edilir. Şimdi F_2 bileşenini hesaplayalım:

$$\begin{aligned}F_2=F_1(0)=&\,2\int_0^\infty e^{-\xi}F_1(\xi)d\xi-2F_2\\ &+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\lambda^2+1}\int_0^\infty(\lambda\sin\lambda\xi+\cos\lambda\xi)F_1(\xi)d\xi d\lambda-\frac{2F_2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\lambda^2+1}d\lambda\end{aligned}$$

$$F_2=2\left[\int_0^\infty e^{-\xi}F_1(\xi)d\xi-F_2\right]+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty\frac{1}{\lambda^2+1}\left\{\int_0^\infty(\lambda\sin\lambda\xi+\cos\lambda\xi)F_1(\xi)d\xi-F_2\right\}d\lambda\tag{4.2.46}$$

biçimindedir.

$-F_2+\int_0^\infty e^{-\xi}F_1(\xi)d\xi$ integralinin değerini β ile, $-F_2+\int_0^\infty(\lambda\sin\lambda\xi+\cos\lambda\xi)F_1(\xi)d\xi$ integralini ise $B(\lambda)$ ile işaretleyecek olursak,

$$F_1(x)=2\beta e^{-x}+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(\lambda)\frac{\lambda\sin\lambda x+\cos\lambda x}{\lambda^2+1}d\lambda,\tag{4.2.47}$$

$$F_2=2\beta+\frac{2}{\pi}\int_0^\infty B(\lambda)\frac{1}{\lambda^2+1}d\lambda\tag{4.2.48}$$

elde edilir.

(4.2.38) ve (4.2.39) formülleri kullanılarak, (4.2.42)-(4.2.43) probleminin çözümü

$$\begin{pmatrix} u(x,t) \\ u(0,t) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix} e^{\lambda^2 t}$$

biçimindedir.

Buradan

$$u(x,t) = 2\beta e^{-x-\lambda^2 t} + \frac{2}{\pi} e^{-\lambda^2 t} \int_0^\infty B(\lambda) \frac{\lambda \sin \lambda x + \cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda \qquad (4.2.49)$$

$$u(0,t) = 2\beta e^{-\lambda^2 t} + \frac{2}{\pi} e^{-\lambda^2 t} \int_0^\infty B(\lambda) \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\lambda \qquad (4.2.50)$$

elde edilir.

(4.2.49), (4.2.50) ifadelerine sırasıyla (4.1.3), (4.1.4) koşulları sağlatılırsa

$$u(x,0) = \phi_0(x) = 2\beta e^{-x} + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B(\lambda) \frac{\lambda \sin \lambda x + \cos \lambda x}{\lambda^2 + 1} d\lambda$$

$$u(0,0) = \vartheta_0 = 2\beta + \frac{2}{\pi} \int_0^\infty B(\lambda) \frac{1}{\lambda^2 + 1} d\lambda$$

biçiminde problemin çözümü bulunur.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bulgular ve Tartışmalar bölümünde, bir uç yüzeyi homojen bir sıvıyla temas halinde olan, yan yüzeyleri izole edilmemiş, homojen olmayan bir katı cisim ile homojen sıvı arasındaki ısı iletiminin problemi ele alınmıştır.

Değişkenlere ayırma metodu kullanılarak, bu sınır-değer problemi iki adi diferansiyel denkleme dönüştürüldü. Problemin çözümü esnasında spektral parametreyi içeren ve sınır koşullarını sağlayan özel çözüm bulundu ve problemin çözümünde gerekli olan $\varphi(\lambda)$ fonksiyonunun özellikleri incelendi. Isı iletim probleminin çözümünde pozitif yarı eksende Sturm-Liouville operatörü ile oluşturulan sınır değer probleminin

1) Çözümlerinin özellikleri incelendi.

2) Rezolvent operatörü inşa edildi.

3) Özfonksiyonlara göre ayrışım formülü elde edildi.

4) Ayrışım formülleri kullanılarak ısı iletim denkleminin çözümü elde edildi.

5) Sıvının sıcaklığı ile katının sıcaklığı arasında zamana bağlı olarak bağıntı elde edildi. Elde edilen sonuç [9] çalışmasının genelleşmiş halidir.

(4.2.8)'deki $q(x)\equiv 0,\quad \rho(x)\equiv 1,\quad \beta_1 = 0,\ \beta_2 = 1$ özel durumu için sınır probleminin çözümü [9]'daki sonuçlarla birebir çakışmaktadır.

Elde edilen sonuçlar ısı iletimi olaylarında ve çözümün bulunmasında kullanılabilir.

5.2. ÖNERİLER

Bu tür problemler klasik ısı iletim problemlerinden farklıdır. Dolayısıyla zamana göre türev içeren ısı iletim problemleri, başka sınır koşulları için yukarıdaki özellikler incelenerek literatüre katkıda bulunulabilir.

KAYNAKLAR

[1] C. T. Fulton, ‘‘Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions’’, In.Proc.Roy.Soc. Edin., 77 A, (1977), 293- 308.

[2] C. T. Fulton, ‘‘Two-Point Boundary Value Problems with Eigenvalue Parameter Contained in the Boundary Conditions,’’ In.Proc.Roy.Soc. Edin., 87 A, (1980), 1-34.

[3] A. Binding, P.J. Browne, K. Siddighi, ‘‘Sturm-Liouville Problems with Eigenparameter Dependent Conditions’’, Proc. Edinburg Math. Soc. V.37, No.1 (1999), pp. 57-72.

[4] A. Binding, P.J. Browne, B.A.Watson, ‘‘Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Rationally Dependent on the Eigenparameter I’’, Proc. Edinburg Math. Soc. 45 (2002) pp, 631-645.

[5] A. Binding, P.J. Browne, B.A. Watson, “Sturm-Liouville Problems with Boundary Conditions Rationally Dependent on the Eigenparameter II”, Journal of Comp. and Appl. Math. 148 (2002), pp. 147-168.

[6] D. B. Hinton, ‘‘An Expansion Theorem for an Eigenvalue Problem with Eigenvalue Parameter in the Boundary Condition”, Quart. J. Math. Oxford, 30, No.2 (1979), pp. 33-42.

[7] Kh. R. Mamedov, ‘‘On one Boundary Value Problem with Parameter in the Boundary Conditions”, Spektralmaya Teoriya Operatorov i Prilojeniya, N.11 (1997), pp. 117-121.

[8] J. Walter, ‘‘Regular Eigenvalue Problems with Eigenvalue Parameter in the Boundary Conditions”, Math. Z., 133 (1973), pp. 301-312.

[9] D. S. Cohen, “An Integral Transform Associated with Boundary Conditions Containing an Eigenvalue Parameter”, SIAM Journal on Applied Mathematics, Vol. 14, No. 5 (1966), 1164-1175.

[10] R. E. Langer, "A Problem in Diffusion or in the Flow of Heat for a Solid in contact with a Fluid", Tohoku Math. J., 35 (1935), pp. 260-275.

[11] A. N. Tychonov and A. A. Samarski, Partial Differential Equations of Mathematical Physics, vol 1, San Fransisco, 1964.

[12] B. M. Levitan, I. S. Sargsjan, Introduction to Spectral Theory, American Mathematical Society, 1975.

[13] M. G. Gasymov, The Direct and Inverse Problem of Spectral Analysis for a Class of Equations with a Discontinuous Coefficient, Nonclassical Methods in Geophysics, Nauka, Novosibirsk, USSR, (1977), 37-44.

[14] E. C. Titchmarsh, Eigenfunctions Expansions, Oxford, 1962.

[15] A. Darwish , The Inverse Scattering Problem for a Singular Boundary Value Problem, New Zealand Journal of Mathematics, Volume 22, (1993), 37-56.

[16] V. A. Marchenko, Sturm Liouville Operators and Applications, AMS Chelsea Publishing, 2011.

[17] I. M. Guseinov, R. T. Pashaev, On an Inverse Problem for a Second Order Differantial Operator, In Usp. Math. Nauk., Volume 57, No: 3, (2002), 597-598.

[18] Kh. R. Mamedov, On an Inverse Scattering Problem for a Discontinuous Sturm-Liouville Equation with a Spectral Parameter in the Boundary Condition, Boundary Value Problem, (2010), 17pp.

[19] Kh. R. Mamedov, Uniqueness of the Solution of the Inverse Problem of Scattering Theory for Sturm Liouville Operator with Discontinuous Coefficient, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, (2006), 163-172.

[20] Kh. R. Mamedov, N. Palamut, On a Direct Problem of Scattering Theory for a Class of Sturm-Liouville Operators with Discontinuous Coefficient, Proceedings of Jangjeon Mathematical Society, 12 (2009), No. 243-251.

[21] Kh. R. Mamedov and V. Ala, ‘‘On the Solution of a Boundary Value Problem related to the Heat Transmission’’, American Journal of Applied Mathematics, Vol. 2, 2014, pp. 54-59. doi: 10.11648/j.ajam.20140202.12.

[22] M. A. Naimark, Linear Differantial Operators, Frederick Ungar Publishing, 1967.

[23] S. J. Farlow, Partial Differential Equations for Scientists and Engineers,Dover Publications, New York, 1982.

[24] A. Hasanov, Kısmi Türevli Denklemler, Literatür Yayınları, İstanbul,2010.

[25] J. Wedmann, Spectral Theory of Ordinary Differential Operators, Lecture Notes in Math. 1258, Springer-Verlag, Berlin, 1987.

[26] E. A. Coddington, and N. Levinson, ‘‘Theory of Ordinary Differential Equations, McGraw-Hill, 429 p., New York, (1955).

[27] H. Kızmaz, ‘‘Fonksiyonel Analize Giriş’’, 287 s, Trabzon, (1993).

ÖZGEÇMİŞ ve ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Volkan ALA

Doğum Tarihi: 30/01/1986

Öğrenim Durumu

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
İlköğretim-Ortaöğretim	Fen-Matematik	Antalya Hacı Malike Bileydi Anad. Lisesi	1997–2004
Lisans	Matematik	Uludağ Üniversitesi	2005–2009
Yüksek Lisans(Tezsiz)	Ortaöğretim Matematik Ö.	Uludağ Üniversitesi	2009–2010
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2011-

Görevler

Görev Unvanı	**Görev Yeri**	**Yıl**
Arş. Görevlisi	Mersin Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi	2011-

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. Khanlar R. Mamedov and Volkan Ala, ‘‘On the solution of a boundary value problem related to the heat transmission’’, American Journal of Applied Mathematics, Vol. 2, No. 2, 2014, pp. 54-59. doi: 10.11648/j.ajam.20140202.12.

2. Khanlar R. Mamedov and Volkan Ala, “On the Solution of a Boundary Value Problem Related to the Heat Conduction”, International Conference on Nonlinear Differential and Difference

Equations, Recent Developments and Applications, 26-30 May 2014, Antalya