ARŞİMEDYAN OLMAYAN DURUMDA LİOUVİLLE SAYILARININ BAZI KARAKTERİZASYONLARI

ABDULKADİR AŞAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

MERSİN
MAYIS – 2014

ARŞİMEDYAN OLMAYAN DURUMDA LİOUVİLLE SAYILARININ BAZI KARAKTERİZASYONLARI

ABDULKADİR AŞAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Danışman
Doç. Dr. Hamza MENKEN

MERSİN
MAYIS – 2014

Abdulkadir AŞAN tarafından Doç. Dr. Hamza MENKEN danışmanlığında hazırlanan "Arşimedyan Olmayan Durumda Liouville Sayılarının Bazı Karakterizasyonları" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	……………………
Doç. Dr. Hamza MENKEN	……………………
Doç. Dr. H. Nedret ÖZGEN	……………………
Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ	……………………
Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU	……………………

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 09/06/2014 tarih ve 2014-13/341 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

T.C. ... ÜNİVERSİTESİ FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ MÜDÜRLÜĞÜ

ARŞİMEDYAN OLMAYAN DURUMDA LİOUVİLLE SAYILARININ BAZI KARAKTERİZASYONLARI

Abdulkadir AŞAN

ÖZ

Bu tez çalışmasında, Arşimedyan olmayan durumda Liouville sayılarının bazı özellikleri incelenmiştir. Arşimedyan olmayan durum olarak, $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi ve K bir cisim olmak üzere $K\langle x\rangle$ fonksiyonlar cismi göz önüne alınmıştır.

Klasik Liouville sayıları hakkındaki bir Erdös Teoreminin, Arşimedyan olmayan durumda, hem $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi ve hem de $K\langle x\rangle$ fonksiyonlar cisminde analogları elde edilmiştir. Ayrıca, Arşimedyan olmayan durumda Liouville dizisi kavramı tanımlanmış, $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi ve $K\langle x\rangle$ fonksiyonlar cisminde bazı özellikleri verilmiştir.

Son olarak, $p-$adik Gamma fonksiyonu ele alınmış ve bazı değerlerinin transandantlığı hakkında sonuçlar elde dilmiştir.

Anahtar Kelimeler: $p-$adik sayılar, Arşimedyan olmayan cisim, fonksiyonlar cismi, Arşimedyan olmayan durumda transandant sayılar, Arşimedyan olmayan durumda Liouville sayıları, $p-$adik Gamma fonksiyonu.

Danışman: Doç. Dr. Hamza MENKEN, Matematik Ana Bilim Dalı, Mersin Üniversitesi

SOME CHARACTERIZATIONS OF LIOUVILLE NUMBERS IN NON-ARCHIMEDEAN CASE

Abdulkadir AŞAN

ABSTRACT

In this thesis work, some properties of Liouville numbers are studied in non-Archimedean case. The $p-$adic numbers field $\mathbb{Q}_p$ and the functions field $K\langle x\rangle$, where K is a field, are considered as non-Archimedean case.

The analogues of a classical Erdös theorem about Liouville numbers in the non-Archimedean case are given both in the $p-$adic numbers field $\mathbb{Q}_p$ and the functions field $K\langle x\rangle$. In addition, in the non-Archimedean case the definition of the concept of a Liouville sequence is given, some of its properties both in the $p-$adic numbers field $\mathbb{Q}_p$ and the functions field $K\langle x\rangle$ are obtained.

Finally, the $p-$adic Gamma function is considered and some results on transcendental values of the $p-$adic Gamma function are obtained.

Key Words: $p-$adic numbers, non-Archimedean field, functions field, transcendence in non-Archimedean case, Liouville numbers in non-Archimedean case, $p-$adic Gamma function.

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Hamza MENKEN, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Bu tezin çalışma konusunun belirlenmesi ve sonuçlanması sürecinde öneri ve katkılarını esirgemeyen danışman hocam Doç. Dr. Hamza MENKEN'e, Prof. Dr. Nazım KERİMOV, Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU ve Doç. Dr. H. Nedret ÖZGEN'e; Matematik Bölümü Başkanı Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV ve tüm öğretim üyelerine verdikleri emek için teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca başta annem ve babam olmak üzere, eğitim hayatım boyunca bana destek olan aileme teşekkür ederim.

Tezin oluşmasında proje desteği sağlayan Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi'ne teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Karmaşık sayılar kümesi
$\deg(P)$	$P(x)$ 'in derecesi
$H(P)$	$P(x)$ 'in yüksekliği
$L(P)$	$P(x)$ 'in uzunluğu
$\mathbb{Z}_p$	$p-$adik tam sayılar halkası
$\mathbb{Q}_p$	$p-$adik sayılar cismi
ν_p	$p-$adik değerlendirme
$(n!)_p$	$p-$adik faktöriyel
$\lvert\ \rvert_\infty$	Mutlak değer normu
$\lvert\ \rvert_p$	$p-$adik norm
$B(a,r)$	a merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\mathcal{O}$	$\mathbb{Q}_p$ 'nin değerlendirme halkası
$\mathfrak{P}$	$\mathbb{Q}_p$ 'nin değerlendirme ideali
$K[x]$	Polinomlar halkası
$K(x)$	Rasyonel fonksiyonlar cismi
$K\langle x\rangle$	Fonksiyonlar cismi
Γ	Klasik Gamma fonksiyonu
Γ_p	$p-$adik Gamma fonksiyonu

1.GİRİŞ

Bilindiği gibi sıfırdan farklı rasyonel katsayılı (veya özdeş olarak tam katsayılı) bir $f(x)=a_n x^n+...+a_1 x+a_0$ polinomunun kökü olan $\alpha\in\mathbb{C}$ sayısına *cebirsel sayı* denir. Bir α cebirsel sayısını kök kabul eden en küçük dereceli rasyonel katsayılı polinoma α 'nın minimal polinomu ve bu polinomun derecesine α 'nın *derecesi* denir. Örneğin $\sqrt[3]{2}\in\mathbb{R}$ reel sayısı 3. dereceden ve $i\in\mathbb{C}$ kompleks sayısı 2. dereceden birer cebirsel sayıdırlar ve minimal polinomları, sırasıyla $f(x)=x^3-2$ ve $g(x)=x^2+1$'dir. Cebirsel olmayan sayılara *transandant (aşkın) sayılar* denir. Cebirsel sayılar sayılabilir sonsuz ve dolayısıyla transandant sayılar sayılamaz sonsuzdur.

Bir $\alpha\in\mathbb{C}$ sayısı *n.* dereceden $(n\geq 2)$ bir cebirsel sayı ise *Liouville teoremi* ile (sadece α 'ya bağlı olan) öyle bir $C(\alpha)>0$ sabiti vardır ki her $a,b(>0)\in\mathbb{Z}$ için,

$$\left|\alpha-\frac{a}{b}\right|\geq\frac{C(\alpha)}{b^n}$$

sağlanır [1]. Transandant sayıların inşası genelde Liouville teoremi yardımıyla yapılır. Örneğin, $\xi=\sum_{n=1}^{\infty}10^{-n!}$ sayısının transandant olduğu Liouville teoreminden kolayca elde edilebilir. Transandant sayıların önemli bir sınıfını Liouville sayıları olarak bilinen sayılar oluşturur. Liouville sayısı şöyle tanımlanır:

Bir $\xi\in\mathbb{R}$ reel sayısı verilsin. Eğer her $\omega\in\mathbb{R}^+$ pozitif reel sayısı için,

$$\left|\xi-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{b^{\omega}}$$

koşulunu sağlayan $a,b(>1)\in\mathbb{Z}$ sayıları varsa $\xi\in\mathbb{R}$'ye *Liouville sayısı* denir. Liouville sayıları rasyonel sayılarla keyfi büyüklükte dereceden yaklaşılabilen sayılar olarak bilinir. Kolayca gösterilebilir ki $a_n\in\{1,2\}$ olmak üzere, $\sum_{n=1}^{\infty}a_n 10^{-n!}$ reel sayısı bir Liouville sayısıdır. Liouville sayılarının çok ilginç özellikleri vardır ve bu sayılar birçok araştırmacı tarafından incelenmiştir.

Bu tezde, Liouville sayılarının Arşimedyan olmayan durumdaki özellikleri ele alınacaktır. Bilindiği gibi $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi, üzerinde tanımlanan genel mutlak değer normu ile, (Arşimed prensibini sağladığından) Arşimedyan bir cisimdir. Birçok Arşimedyan olmayan cisim örneği vardır. Bunlardan biri, $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismidir. Şimdi $|\cdot|_p$ $p-$adik normunun ve $p-$adik sayılar cismi $\mathbb{Q}_p$'nin tanımını hatırlatalım:

p keyfi ve sabit bir asal sayı olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ için,

$$x = p^{\alpha}.\frac{a}{b}, \; p \nmid a \cdot b$$

olacak şekilde tek türlü belirli bir $\alpha \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır. Buna göre, x'in $p-$adik normu,

$$|x|_p = p^{-\alpha}$$

ile tanımlanır. Eğer $x = 0$ ise $|0|_p = 0$ olarak alınır. $p-$adik norm $|\cdot|_p$, üçgen eşitsizliğinden daha güçlü *ultrametrik üçgen eşitsizliği* olarak bilinen,

$$|x+y|_p \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}, \; \left(x, y \in \mathbb{Q}\right)$$

eşitsizliğini sağlar. Ultrametrik üçgen eşitsizliğini sağlayan normlara *Arşimedyan olmayan* norm ve bu normlu cisimlerde yapılan analize de *non-Arşimedyan Analiz* denir. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin $|\cdot|_p$ $p-$adik normuna göre tamlaştırılmasıyla elde edilen cisme, $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi denir.

Ostrowski teoremi ile $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin mümkün olan bütün tamlaştırmaları, Arşimedyan olan $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve p bir asal olmak üzere, Arşimedyan olmayan $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi olarak belirlenmiştir. $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi 1904'te Kurt Hensel tarafından inşa edilmiş ve uzun bir süre bu sayılar sadece sayılar teorisinin özel bir alanında kullanılmıştır [2]. Fizikte neden sadece reel sayıların kullanıldığı sorgulanmış ve 1968'de iki teorik matematikçi A.F. Monna ve F. Van der Blij tarafından $p-$adik sayılar fizikte kullanılmıştır. 1984'te V.S. Vladimirov ve I. V. Volovich tarafından $p-$adik sayıların süper cisim teorisine başarılı bir şekilde uygulanması ile birlikte $p-$adik sayılar uygulamalı alanlarda da kullanılmaya başlanmıştır [3]. Bununla beraber fizikte $p-$adik evren modeli, $p-$adik kuantum teorisi, $p-$adik sicim kuramı gibi alanlar oluşmuştur. Matematikte, $p-$adik sayıların kullanılması ile yapılan çalışmalar $p-$adik analiz denilen bir alanda toplanmıştır. Bu alanda, reel sayılarla verilen kavramlar $p-$adik sayıların kullanılması ile yeniden tanımlanmış ve yorumlanmıştır.

Bu tezde $p-$adik Liouville sayılarının bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca Hančl [4] tarafından verilen Liouville dizisi kavramının $p-$adik sayılar cisminde karşılığı tanımlanmış ve bunun için kriter verilmiştir.

$\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi gibi Arşimedyan olmayan başka önemli cisimler de vardır. Bunlardan biri, K bir cisim olmak üzere $K\langle x\rangle$ fonksiyonlar cismidir. Fonksiyonlar cisminde Liouville sayıları ve Liouville dizileri kavramları incelenmiş ve bazı özellikler verilmiştir.

Tezde bir uygulama olarak, $p-$adik Gamma fonksiyonunun $p-$adik Liouville sayılarındaki değerleri incelenmiş ve bazı sonuçlar elde edilmiştir. Bilindiği gibi $p-$adik Gamma fonksiyonu $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$,

$$\Gamma_p(x) := \lim_{n\to x}(-1)^n \prod_{1\le j<n}{}' j$$

ile tanımlanır [5]. Bu çalışmada $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ bir *p*-adik Liouville sayısı iken $\Gamma_p(\lambda)$ değeri tartışılmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

1904 yılında K. Hensel tarafından oluşturulan $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi belli bir süre sadece sayılar teorisindeki problemler için göz önüne alınmıştır. 1970'lerden sonra $p-$adik sayıların fizikte ve diğer alanlarda kullanılmaya başlanması bu sayılara ilginin artmasına sebep olmuştur. Her ne kadar bu sayıların uygulamaları önemli olsa da kendi özellikleri her zaman dikkat çekmiştir.

Bu tezde, klasik durumda transandant sayıların önemli bir sınıfı olarak kabul edilen Liouville sayılarının, Arşimedyan olmayan cisimler olan $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi ve K keyfi bir cisim olmak üzere $K\langle x\rangle$ fonksiyonlar cisminde özellikleri incelenmiştir.

K. Mahler 1932 'de kompleks sayıları $A-$, $S-$, $T-$ ve $U-$sayıları olarak dört ayrık sınıfa ayırmıştır [6]. Bu sınıflandırmada $A-$sınıfı cebirsel sayılardan ve diğer sınıflar transandant sayılardan oluşmaktadır. $U-$sayıları ise $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$ olarak alt sınıflara ayrılmıştır. U_n-alt sınıfı *n. dereceden cebirsel sayılarla yeterince iyi yaklaşılabilen sayılar* olarak tanımlanır [7, 8]. U_1 alt sınıfı, yani 1. dereceden cebirsel sayılar olan rasyonel sayılarla yeterince iyi yaklaşılabilen sayılar, literatürde *Liouville sayıları* olarak bilinir. Liouville sayılarının birçok önemli özellikleri ve karakterizasyonları vardır.

Kompleks sayıların Mahler sınıflandırmasına benzer bir sınıflandırma Koksma [9] tarafından verilmiştir. Bu sınıflandırmaya göre, kompleks sayılar A^*-, S^*-, T^*- ve U^*- sınıflarına ayrılmıştır. Mahler ve Koksma sınıflandırmalarının denk olduğu X. Long Xin tarafından gösterilmiştir [10].

$p-$adik sayıların kompleks sayılardaki Mahler ve Koksma sınıflandırmalarına benzer sınıflandırmaları ise sırasıyla, K. Mahler [9] ve H. P. Schlickewei [12] tarafından yapılmıştır. Bu sınıflandırmalara göre $p-$adik sayılar, $A-$, $S-$, $T-$ ve $U-$sayıları (veya A^*-, S^*-, T^*- ve U^*- sayıları) olarak dört ayrık sınıfa ayrılmıştır. Burada $A-$sınıfı (veya A^*-sınıfı) $p-$adik cebirsel sayılardan ve diğer sınıflar da $p-$adik transandant sayılardan oluşmaktadır.

$U-$sayıları ise $U=\bigcup_{n=1}^{\infty}U_n$ olarak alt sınıflara ayrılmıştır. U_n-alt sınıfı *n. dereceden p-adik cebirsel sayılarla yeterince iyi yaklaşılabilen sayılar* olarak tanımlanır. U_1- alt sınıfı, yani 1. dereceden cebirsel sayılarla yeterince iyi yaklaşılabilen sayılar, literatürde *$p-$adik Liouville sayıları* olarak bilinir. Daha açık olarak bir $p-$adik Liouville sayısı şöyle tanımlanır: $\lambda\in\mathbb{Z}_p$ olsun. Eğer,

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\lambda-n|_p}=0$$

ise, λ 'ya bir $p-$adik Liouville sayısı denir. Bu tanıma göre, eğer

$$\liminf_{n\to\infty}\sqrt[n]{|\lambda-a_n|_p}=0$$

olacak şekilde bir (a_n) doğal sayısı dizisi varsa, λ bir $p-$adik Liouville sayısıdır. Örneğin,

$$\lambda=\sum_{n=1}^{\infty}p^{n!}$$

bir $p-$adik Liouville sayısıdır. $p-$adik Liouville sayısının başka formlarda verilen tanımları da mevcuttur. Yukarıdaki tanım D. N. Clark tarafından verilmiştir [13].

Bu tanım kullanılarak $p-$adik Liouville sayıları $p-$adik diferansiyel denklemlere uygulanabilir. Örneğin $\lambda\in\mathbb{Z}_p\setminus\mathbb{N}$ olmak üzere $\mathbb{Z}_p$'de 0 (sıfır)'ın bir D komşuluğunda

$$xy'-\lambda y=\frac{1}{1-x}$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin formal çözüm serisi,

$$y(x)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{n-\lambda}x^n$$

şeklindedir ve çözümün ıraksak olması için gerek ve yeter koşul, λ 'nın bir $p-$adik Liouville sayısı olmasıdır [14]. $p-$adik Liouville sayıları $\mathbb{Q}$ 'da transandanttır. Klasik Liouville sayıları ile ilgili yapılan birçok incelemenin benzeri $p-$adik Liouville sayıları için de yapılmaktadır.

Genel durumda $p-$adik transandant sayılar K. Mahler [11], W.W. Adams [15], X. Long Xin [10], K. Nishioka [16] ve diğer birçok matematikçi tarafından çalışılmıştır. Bir özel durum olarak $p-$adik Liouville sayıları [17], [18], [19] ve [20]'de ele alınmıştır. Arşimedyan ve non-Arşimedyan (Arşimedyan olmayan) durumdaki cebirsel sayılarla yaklaşımın genel teorisi ise, Y. Bugeaud [21] tarafından verilmiştir.

Bu tezde elde edilen sonuçlar üç ana kısımda verilmiştir. Birinci kısımda, P. Erdös [22] tarafından verilen bir sonucun non-Arşimedyan cisim olan $p-$adik sayılar cisminde karşılığı elde edilmiştir. Ayrıca, Hančl [4] tarafından verilen Liouville dizisi kavramı $p-$adik sayılar cisminde tanımlanmış ve onunla ilgili sonuçlar elde edilmiştir. İkinci kısımda, birinci kısımda $p-$adik sayılar cisminde tartışılan konular başka bir non-Arşimedyan cisim olan $K\langle x\rangle$ fonksiyonlar cismi için ele alınmıştır. Tezin son bölümünde ise özel fonksiyonlardan $p-$adik Gamma fonksiyonu $\Gamma_p:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Q}_p$ için, $\lambda\in\mathbb{Z}_p\setminus\mathbb{N}$ ve λ'nın bir $p-$adik Liouville sayısı olması durumunda, $\Gamma_p(\lambda)$ değeri tartışılmıştır. Bilindiği gibi $\Gamma_p:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Q}_p$ fonksiyonu,

$$\Gamma_p(x):=\lim_{n\to x}(-1)^n\prod_{\substack{1\le j<n\\(j,p)=1}} j$$

ile tanımlıdır [5]. Bu fonksiyon, ilk olarak Morita tarafından tanımlanmış ve daha sonra, J. Diamond [23], D. Barsky [24], B. Gross ve N. Koblitz [25], H. Cohen ve E. Friedman [26] ve I. Shapiro [27] gibi birçok matematikçi tarafından incelenmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. CEBİRSEL SAYILAR

Tanım 3.1.1. $\alpha \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer $\alpha \in \mathbb{C}$ sayısı, sıfırdan farklı bir

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Q}[x]$$

polinomunun kökü ise, α sayısına *cebirsel sayı* denir. Eğer α, sıfırdan farklı monik bir

$$P(x) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0 \in \mathbb{Z}[x]$$

polinomunun kökü ise, α'ya *cebirsel tamsayı* denir. $\alpha \in \mathbb{C}$ sayısı cebirsel ise, α'yı kök kabul eden (sabitle çarpım dışında tek türlü belirli) en küçük dereceli $P(x) \in \mathbb{Q}[x]$ polinomuna da α'nın *minimal polinomu* denir.

Her $r = \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q}$ rasyonel sayısı, $P(x) = bx - a \in \mathbb{Z}[x]$ polinomunun kökü olacağından, bir cebirsel sayıdır. Rasyonel sayılardan cebirsel tamsayı olanlar sadece $0, \mp 1, \mp 2, \cdots$ sayılarıdır.

Tanım 3.1.2. $P(x) = a_n x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_0$ kompleks katsayılı bir polinom olsun.

i. Polinomun derecesi $\deg(P)$ ile gösterilir. $a_n \neq 0$ sayısı $P(x)$'in baş katsayısı olarak adlandırılır.

ii. $P(x)$'in yüksekliği $H(P) = \max\limits_{0 \le i \le n} |a_i|$ ile, $P(x)$'in uzunluğu ise $L(P) = |a_n| + \ldots + |a_0|$ ile tanımlanır.

iii. α bir cebirsel sayı ve $P(x)$, α'nın minimal polinomu olsun. Bu takdirde, α'nın derecesi $\deg(\alpha)$, yüksekliği $H(\alpha)$ ve uzunluğu $L(\alpha)$, $P(x)$'in derecesi, yüksekliği ve uzunluğu ile tanımlanır.

Teorem 3.1.1 [1]. Eğer α ve β cebirsel sayılar ise, $\alpha \mp \beta$, $\alpha.\beta$ sayıları ve $\alpha \neq 0$ olmak üzere, $1/\alpha$ sayısı cebirseldir. Eğer α ve β cebirsel tamsayılar ise, $\alpha + \beta$ ve $\alpha.\beta$ sayıları da cebirsel tamsayıdır.

Teorem 3.1.2 [1]. Cebirsel sayılar kümesi bir cisim, cebirsel tamsayılar kümesi de bir halka oluşturur.

Tanım 3.1.3. Cebirsel olmayan kompleks bir sayıya *transandantal sayı* denir.

Teorem 3.1.3 [1]. Cebirsel sayılar kümesi sayılabilirdir.

Sonuç 3.1.1 (Cantor) [1]. Reel sayılar kümesi sayılamaz olduğundan transandant sayılar vardır.

3.2. LİOUVİLLE SAYILARI

Teorem 3.2.1 (Liouville) [1]. α, derecesi $n(\geq 2)$ olan bir cebirsel sayı olsun. Bu takdirde, her $p, q(>0) \in \mathbb{Z}$ için,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| > \frac{C(\alpha)}{q^n}$$

olacak biçimde α 'ya bağlı bir $C(\alpha) > 0$ sabit sayısı vardır.

Sonuç 3.2.1 (Liouville). α derecesi $n(\geq 2)$ olan bir cebirsel sayı olsun. Bu takdirde,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^{n+1}}$$

eşitsizliği, sonlu sayıda $p, q(>0) \in \mathbb{Z}$ için sağlanır.

Tanım 3.2.1 [1]. Bir α reel sayısı verilsin. Eğer her $n > 0$ tamsayısı için,

$$\left|\alpha - \frac{p}{q}\right| < \frac{1}{q^n} \tag{3.1}$$

eşitsizliğini gerçekleyecek biçimde, $p, q(>1)$ tamsayıları bulunabiliyorsa, α 'ya bir *Liouville sayısı* denir.

Not 3.2.1. Bu tanıma göre,

i. α bir Liouville sayısı ise, her bir $n > 0$ tamsayısı için, (3.1) eşitsizliğini gerçekleyen birbirinden farklı, sonsuz sayıda $\frac{p}{q}$, $(q > 1)$ rasyonel sayısı vardır.

ii. Hatta paydaları keyfi bir sayıdan büyük olacak biçimde (3.1) eşitsizliğini sağlayan birbirinden farklı, sonsuz sayıda $\frac{p}{q}$ rasyonel sayısı bulunabilir.

Teorem 3.2.2 [1]. Liouville sayıları transandanttır.

Örnek 3.2.1. $\xi = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{10^{n!}}$ sayısı bir Liouville sayısı ve dolayısıyla bir transandant sayıdır.

3.2.1. Liouville Sayılarının Bazı Özellikleri

Teorem 3.2.3. α sıfırdan farklı bir Liouville sayısı ise, $\beta = \frac{1}{\alpha}$ sayısı da bir Liouville sayısıdır.

Teorem 3.2.4. İki irrasyonel α ve β sayıları arasında,

$$\beta = k_0 + k_1\alpha + ... + k_m\alpha^m \ , \ \left(k_i \in \mathbb{Q}, \ i = 0,1,...,m\right)$$

bağıntısı var ve α bir Liouville sayısı ise, β da bir Liouville sayısıdır.

Teorem 3.2.5. İki irrasyonel α ve β sayıları arasında,

$$\beta = \frac{p_0 + p_1\alpha + ... + p_m\alpha^m}{q_0 + q_1\alpha + ... + q_m\alpha^m} \ , \ \left(p_i, q_i \in \mathbb{Z}, \ i = 0,1,...,m\right)$$

bağıntısı var ve α bir Liouville sayısı ise, β da bir Liouville sayısıdır.

Teorem 3.2.6. Liouville sayıları $\mathbb{R}$ ’de yoğundur.

Teorem 3.2.7 (P. Erdös) [28]. Her $t \neq 0$ reel sayısına karşılık,

$$t = x + y = u.v$$

eşitliğini sağlayan $x, \ y, \ u$ ve v Liouville sayıları vardır.

Teorem 3.2.8 [29]. Sürekli ve kesin artan bir $f : [0,1] \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Bu takdirde, kontinium kuvvetinde öyle $\alpha \in [0,1]$ Liouville sayıları vardır ki, $f(\alpha)$ da Liouville sayısıdır.

Teorem 3.2.9 [29]. r bir doğal sayı olmak üzere, sürekli ve kesin artan $f_j:[0,1]\to\mathbb{R},(1\le j\le r)$ fonksiyonları verilsin. Bu takdirde, kontinium kuvvetinde öyle $\alpha\in[0,1]$ Liouville sayıları vardır ki, $f_1(\alpha),\ f_2(\alpha),\cdots,\ f_r(\alpha)$ da Liouville sayılarıdır.

Sonuç 3.2.2 [29]. Keyfi verilmiş β_1,β_2 reel sayıları için,

$$\alpha_1+\alpha_3=\beta_1 \quad , \quad \alpha_2+\alpha_3=\beta_2$$

olacak şekilde kontinium kuvvetinde $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ Liouville sayıları vardır.

Sonuç 3.2.3 [29]. Keyfi verilmiş $\beta_1(\neq 0),\beta_2$ reel sayıları için,

$$\alpha_1.\alpha_3=\beta_1 \quad , \quad \alpha_2+\alpha_3=\beta_2$$

olacak şekilde kontinium kuvvetinde $\alpha_1,\ \alpha_2,\ \alpha_3$ Liouville sayıları vardır.

3.3. $p-$ADİK SAYILAR

3.3.1. Bir Cisim Üzerinde Norm

Tanım 3.3.1. K bir cisim olmak üzere, $\|\cdot\|: K \to [0,\infty)$ fonksiyonu,

i. Her $x \in K$ için, $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

ii. Her $x, y \in K$ için, $\|xy\| = \|x\|\|y\|$

iii. Her $x, y \in K$ için, $\|x+y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şeklindeki üç koşulu sağlıyorsa bu fonksiyona bir norm denir.

Eğer bu fonksiyon,

iv. Her $x, y \in K$ için, $\|x+y\| \leq \max\{\|x\|, \|y\|\}$

koşulunu da sağlarsa bu norma K üzerinde bir non-Arşimedyan (Arşimed olmayan) norm denir.

(iv) koşulu, (iii) koşulundan daha güçlüdür. Çünkü $\max\{\|x\|, \|y\|\} \leq \|x\| + \|y\|$ eşitsizliği, $\forall\, x, y \in K$ için sağlanır.

Örnek 3.3.1. $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde $x \in \mathbb{Q}$ olmak üzere,

$$|x| = \begin{cases} x\,, & x \geq 0 \\ -x\,, & x < 0 \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan genel mutlak değer normu bir Arşimedyan normdur. Çünkü $x = 1$, $y = 1$ için, $|1+1| \leq \max\{|1|, |1|\}$ eşitsizliği doğru olmadığından, (iv) koşulunu sağlamaz.

Örnek 3.3.2. K bir cisim olmak üzere, $x \in K$ için,

$$\|x\| = \begin{cases} 1\,, & x \neq 0 \\ 0\,, & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlı norm herhangi bir K cismi için non-Arşimedyan bir normdur. Bu norma *trivial (aşikâr) norm* denir.

Lemma 3.3.1 [30]. Bir K cismi üzerinde herhangi bir $\|\cdot\|$ normu için aşağıdakiler sağlanır:

i. $\|1\| = 1$.

ii. $x \in K$ ve $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için, $\|x^n\| = 1$ ise, $\|x\| = 1$.

iii. $\|-1\| = 1$.

iv. Her $x \in K$ için, $\|-x\| = \|x\|$.

v. Eğer K sonlu bir cisim ise, $\|\cdot\|$ normu trivialdir.

3.3.2. $p-$Adik Değerlendirme ve $p-$Adik Norm

Tanım 3.3.2 [30]. p herhangi bir asal sayı olsun. Sıfırdan farklı bir $n \in \mathbb{Z}$ için, n'yi bölen p'nin en büyük kuvveti, $v_p(n)$ ile gösterilsin: $n = p^{v_p(n)}.n'$, $p \nmid n'$.

Bu takdirde,

$$v_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^+$$

fonksiyonuna $\mathbb{Z}$'de $p-$*adik değerlendirme* denir.

Örnek 3.3.3. $p = 5$ için 150 sayısı, $150 = 5^2.6$ olduğundan, $v_5(150) = 2$ bulunur.

Not 3.3.1 [30]. $x = a/b \in \mathbb{Q}^\times$ için,

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b) \qquad (3.2)$$

tanımı ile v_p fonksiyonu, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismine genişletilmiş olur. Burada $v_p(x)$ değeri, x'in kesir gösteriminden bağımsızdır. Yani, $a/b = c/d$ ise,

$$v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d).$$

Kolayca gösterilebilir ki, $x = a/b \in \mathbb{Q}^\times$ için, $p-$adik değerlendirme,

$$x = p^{v_p(x)}.\frac{a'}{b'} \ , \ p \nmid a'b'$$

ile belirlenir.

Örnek 3.3.4. $p=5$ için, $\nu_5(1)=0$, $\nu_5(125)=3$ ve böylece (3.2) ile,

$$\nu_5\left(\frac{1}{125}\right)=\nu_5(1)-\nu_5(125)=0-3=-3$$

bulunur.

3.3.2.1. $p-$adik değerlendirmenin özellikleri

Lemma 3.3.2 [30, 31]. Her $x, y\in\mathbb{Q}$ için,

i. $\nu_p(x.y)=\nu_p(x)+\nu_p(y)$ (3.3)

ii. $\nu_p(x+y)\geq\min\{\nu_p(x),\nu_p(y)\}$ (3.4)

iii. $x=0$ ise, $\nu_p(0)=+\infty$ olarak tanımlanır.

Tanım 3.3.3 [30, 32]. Her $x\in\mathbb{Q}$ için,

$$|x|_p=\begin{cases} p^{-\nu_p(x)}, & x\neq 0 \\ 0 & , x=0 \end{cases} \tag{3.5}$$

ile tanımlı $|\cdot|_p:\mathbb{Q}\to[0,\infty)$ fonksiyonu bir normdur. $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlı bu norma, $p-$*adik norm* denir.

Önerme 3.3.1 [30, 31]. $|\cdot|_p$ fonksiyonu (normu), $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde Arşimedyan olmayan normdur.

Örnek 3.3.5. $\frac{21}{45}$ rasyonel sayısının $3-$adik normu kaçtır?

$\frac{21}{45}\neq 0$ olduğundan, (3.5)'ten,

$$\left|\frac{21}{45}\right|_3=3^{-\nu_3(21/45)}=\left(\frac{1}{3}\right)^{\nu_3(21/45)}$$

dir. (3.2)'den, $\nu_3(21/45)=\nu_3(21)-\nu_3(45)=1-2=-1$. Böylece, $\left|\frac{21}{45}\right|_3=3$ bulunur.

Aşağıdaki teorem, bir normun non-Arşimedyanlığı hakkında bir kriter verir:

Teorem 3.3.1 [2, 30]. Keyfi bir K cismi için, $\varphi : \mathbb{Z} \to K$

$$n \to \begin{cases} \underbrace{1+1+...+1}_{n\ kez}, & n>0 \\ 0, & n=0 \\ -\left(\underbrace{1+1+...+1}_{-n\ kez}\right), & n<0 \end{cases}$$

dönüşümü tanımlansın.

$A=\varphi(\mathbb{Z})\subset K$ kümesine K'nın tam sayıları denir. K'da bir $\|\cdot\|$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, her $a\in A$ için $\|a\|\le 1$ olmasıdır.

Özel olarak, $\mathbb{Q}$'da bir $\|\cdot\|$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, her $n\in\mathbb{Z}$ için $\|n\|\le 1$ olmasıdır.

Arşimed Özelliği: K bir cisim olsun.

$\forall\, x, y\in K$, $x\neq 0$ için, $\exists\, n\in\mathbb{Z}^{+}$ vardır öyle ki $\|nx\|>\|y\|$ eşitsizliği sağlanır.

Uyarı: Arşimed özelliği $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$'deki mutlak değer normu için geçerlidir.

Sonuç 3.3.1 [2, 31]. Bir $\|\cdot\|$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, $\sup\{\|n\| : n\in\mathbb{Z}\}=1$ olmasıdır.

3.3.3. Metrik Uzay

Tanım 3.3.4. K bir cisim ve $\|\cdot\|$, K'da bir norm olsun. $\forall\, x, y\in K$ için,

$$d(x,y)=\|x-y\|$$

ile tanımlı

$$d : K\times K\to\mathbb{R}^{+}=[0,\infty)$$

fonksiyonuna, $\|\cdot\|$ *normuyla üretilen metrik* denir.

$d(x,y)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. Her $x, y \in K$ için $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

ii. Her $x, y \in K$ için $d(x,y) = d(y,x)$,

iii. Her $x, y, z \in K$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği).

Tanım 3.3.5. Bir küme üzerinde bir metrik tanımlı ise bu metrik ile birlikte bu kümeye bir *metrik uzay* denir.

Lemma 3.3.3 [3, 31]. $\|\cdot\|$, K cismi üzerinde bir norm ve metrik $d(x,y) = \|x-y\|$ ile tanımlı olsun. Bu takdirde, $\|\cdot\|$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, her $x, y, z \in K$ için,

$$d(x,y) \leq \max\{d(x,z), d(z,y)\} \text{ (\textit{ultra metrik eşitsizliği})}$$

olmasıdır.

Tanım 3.3.6. Lemma 3.3.3'teki ultra metrik eşitsizliğini sağlayan metriğe *ultra metrik* denir.

Önerme 3.3.2 [30, 31, 32]. K bir cisim ve $\|\cdot\|$, K'da non-Arşimedyan norm olsun. Eğer $x, y \in K$ ve $\|x\| \neq \|y\|$ ise,

$$\|x+y\| = \max\{\|x\|, \|y\|\}$$

eşitliği sağlanır.

Sonuç 3.3.2 [30, 31]. Bir ultra metrik uzayda bütün üçgenler ikizkenardır.

Örnek 3.3.6. $p = 3$ için $\mathbb{Q}$ da $3-$adik norm ile köşeleri

$$x = \frac{2}{3},\ y = \frac{1}{3} \text{ ve } z = \frac{5}{12}$$

olan üçgenin kenar uzunlukları:

$$|x-y|_3=\left|\frac{2}{3}-\frac{1}{3}\right|_3=\left|\frac{1}{3}\right|_3=3,$$

$$|y-z|_3=\left|\frac{1}{3}-\frac{5}{12}\right|_3=\left|\frac{1}{12}\right|_3=3 \text{ ve}$$

$$|x-z|_3=\left|\frac{2}{3}-\frac{5}{12}\right|_3=\left|\frac{1}{4}\right|_3=1.$$

Böylece bu üçgen, bir ikizkenar üçgendir.

Tanım 3.3.7 [30]. $K=\mathbb{Q}$ ve $|\cdot|_p$, $p-$adik norm, $a\in\mathbb{Q}$ ve $r\in\mathbb{R}^+$ olsun. $a-$merkezli ve $r-$yarıçaplı açık yuvar,

$$B(a,r)=\{x\in\mathbb{Q}:d(x,a)<r\}=\left\{x\in\mathbb{Q}:|x-a|_p<r\right\};$$

$a-$merkezli ve $r-$yarıçaplı kapalı yuvar,

$$\overline{B}(a,r)=\{x\in\mathbb{Q}:d(x,a)\le r\}=\left\{x\in\mathbb{Q}:|x-a|_p\le r\right\}$$

olarak tanımlanır.

Önerme 3.3.3 [30, 31, 32]. $K=\mathbb{Q}$ ve $|\cdot|_p$, $p-$adik norm olsun.

i. Eğer $b\in B(a,r)$ ise $B(a,r)=B(b,r)$'dir.

Başka bir deyişle, bir açık yuvarda içerilen her nokta bu açık yuvarın merkezidir.

ii. Eğer $b\in\overline{B}(a,r)$ ise $\overline{B}(a,r)=\overline{B}(b,r)$.

Başka bir deyişle, bir kapalı yuvarda içerilen her nokta bu kapalı yuvarın merkezidir.

iii. $B(a,r)$ kümesi hem açık hem de kapalıdır.

iv. $r\neq 0$ ise, $\overline{B}(a,r)$ kümesi hem kapalı hem de açıktır.

v. $a,b\in\mathbb{Q}$ ve $r,s\in\mathbb{R}^+\setminus\{0\}$ ise,

$$B(a,r)\cap B(b,s)\neq\varnothing\Leftrightarrow B(a,r)\subset B(b,s) \text{ veya } B(b,s)\subset B(a,r).$$

Başka bir deyişle, iki açık (kapalı) yuvar, ya ayrıktır ya da iç içedir.

Tanım 3.3.8 [30]. K bir cisim ve $\|\cdot\|$, K'da bir norm olsun. Bir $S \subset K$ kümesi hem açık hem de kapalı ise S'ye *kapalı-açık (clopen) küme* denir.

Tanım 3.3.9 [30]. $K = \mathbb{Q}$ ve $|\cdot|_p$, $p-$adik norm olsun.

i. $U_1 \cap U_2 = \varnothing$

ii. $S = (S \cap U_1) \cup (S \cap U_2)$

iii. $S \cap U_1 \neq \varnothing$ ve $S \cap U_2 \neq \varnothing$

olacak şekilde U_1, U_2 açık kümeleri varsa $S \subset \mathbb{Q}$ kümesine *bağlantısız küme* denir.

S kümesinin bağlantısız küme olması, S'nin iki açık ayrık kümenin birleşimi olarak ifade edilebilmesi demektir.

Tanım 3.3.10. $x \in \mathbb{Q}$ olsun. x noktasını içeren bütün bağlantılı kümelerin birleşimine x'*in bağlantılı bileşeni* denir.

Önerme 3.3.4 [30]. K, üzerinde non-Arşimedyan norm tanımlı bir cisim olsun. Herhangi bir $x \in K$ noktasının bağlantılı bileşeni tek noktalı $\{x\}$ kümesidir.

Tanım 3.3.11. K bir cisim olsun. Her $x \in K$ noktasının bağlantılı bileşeni $\{x\}$ kümesi ise, K'ya *tamamen bağlantısız küme* denir.

Önerme 3.3.5 [30, 31]. K bir cisim ve $\|\cdot\|$, K'da bir non-Arşimedyan norm olsun.

$$\mathcal{O} = \overline{B}(0,1) = \{x \in K : \|x\| \leq 1\}$$

kümesi K'nın bir alt halkasıdır.

$$\mathfrak{P} = B(0,1) = \{x \in K : \|x\| < 1\}$$

$\mathcal{O}$'nun bir idealidir. Üstelik, $\mathfrak{P}$, $\mathcal{O}$'nun bir maksimal idealidir ve $\mathcal{O}-\mathfrak{P}$'nın her elemanı $\mathcal{O}$'da tersinirdir.

Tanım 3.3.12. K bir cisim ve $\|\cdot\|$, K'da bir non-Arşimedyan norm olsun.

$$\mathcal{O} = \overline{B}(0,1) = \{x \in K : \|x\| \leq 1\} \subset K$$

alt halkasına, $\|\cdot\|$ normunun *değerlendirme halkası* denir.

$$\mathfrak{P} = B(0,1) = \{x \in K : \|x\| < 1\} \subset \mathcal{O}$$

idealine, $\|\cdot\|$ normunun *değerlendirme ideali* denir.

$$\mathcal{K} = \mathcal{O} / \mathfrak{P}$$

bölümüne, $\|\cdot\|$ normunun *kalan (rezidü) cismi* denir.

Önerme 3.3.6 [30, 31]. $K = \mathbb{Q}$ ve $|\cdot|_p$, $p-$adik norm olsun. Bu takdirde,

i. $|\cdot|_p$'nin değerlendirme halkası,

$$\mathcal{O} = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b \right\},$$

ii. $|\cdot|_p$'nin değerlendirme ideali,

$$\mathfrak{P} = p\mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \frac{a}{b} : p \nmid b \text{ ve } p \,|\, a \right\},$$

iii. Kalan cismi p elemanlı $\mathcal{K} = \mathcal{O}/\mathfrak{P} = \mathbb{F}_p$'dir.

3.3.4. $\mathbb{Q}$ Kümesinde Norm

Tanım 3.3.13. Bir K cismi üzerinde $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ normları için, bir norma göre açık olan her küme diğerine göre de açıksa, $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$'ye *denk normlar* denir.

Lemma 3.3.4 [30, 31, 32]. $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ bir K cisminde iki norm olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $\|\cdot\|_1$ ve $\|\cdot\|_2$ denk normlardır.

ii. Her $x \in K$ için, $\|x\|_1 < 1 \Leftrightarrow \|x\|_2 < 1$.

iii. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ öyle ki her $x \in K$ için, $\|\cdot\|_1 = \|\cdot\|_2^{\alpha}$.

Teorem 3.3.2 (Ostrowski) [30, 31, 32]. $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlı her trivial olmayan norm, $p=\infty$ ya da p bir asal sayı olmak üzere bir $\left|\cdot\right|_p$ normuna denktir.

Önerme 3.3.7 [30, 31, 32]. Her $x\in\mathbb{Q}^{\times}$ için $p=\infty$ veya p bir asal sayı olmak üzere,

$$\prod_{p\leq\infty}\left|x\right|_p=1$$

dir.

Tanım 3.3.14. K bir cisim ve $\left\|\cdot\right\|$, K'da bir norm olsun.

i. $(x_n)\subset K$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon>0$ için, $\exists\, N\in\mathbb{N}$ vardır, öyle ki her $n, m\geq N$ için, $\left|x_n-x_m\right|<\varepsilon$ ise, (x_n)'ye bir *Cauchy dizisi* denir.

ii. K'nın her Cauchy dizisi (K içinde) bir limite sahipse K'ya *tamdır* denir.

iii. $S\subset K$ olsun. Her $x\in K$ ve her $\varepsilon>0$ için $B(x,\varepsilon)\cap S\neq\varnothing$ ise, S'ye, K'da bir *yoğun alt küme* denir.

Lemma 3.3.5 [30, 31, 32]. $\mathbb{Q}$ cismi, trivial olmayan herhangi bir norma göre tam değildir.

Lemma 3.3.6 [30, 31, 32]. $\mathbb{Q}$'da bir (x_n) dizisinin, $p-$adik norma göre bir Cauchy dizisi olması gerek ve yeter koşul, $\left|x_{n+1}-x_n\right|_p\to 0$, $(n\to\infty)$ olmasıdır.

Uyarı: Lemma 3.3.6, $\mathbb{R}$'nin, $\left|\cdot\right|_\infty$ genel mutlak değer normuna göre doğru değildir. Örneğin,

$$x_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}$$

dizisi, Lemma 3.3.6'daki $\left|x_{n+1}-x_n\right|_\infty\to 0$ $(n\to\infty)$ koşulunu sağlar, fakat Cauchy dizisi değildir.

Analizden biliyoruz ki;

i. $|\cdot|_\infty$, $\mathbb{R}$ ’ye genişletilebilir.

ii. $\mathbb{R}$, $|\cdot|_\infty$ normuna göre tamdır.

iii. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ ’de yoğundur.

Başka bir ifadeyle, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ ’nun $|\cdot|_\infty$ normuna göre tamlaştırılmasıdır.

Şimdi $\mathbb{Q}$ ’nun $|\cdot|_p$ $p-$adik normuna göre tamlaştırılmasını elde edelim.

Tanım 3.3.15 [30]. $\|\cdot\| = |\cdot|_p$, $\mathbb{Q}$ ’da bir non-Arşimedyan norm olsun. $\mathbb{Q}$ ’nun bütün Cauchy dizilerinin kümesi $\mathcal{C}$ veya $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{Q}) = \left\{ (x_n) : (x_n),\ |\cdot|_p \text{’ye göre bir Cauchy dizisidir.} \right\}$$

ile gösterilir.

Önerme 3.3.8 [30, 31]. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ kümesi,

$$(x_n) + (y_n) \to (x_n + y_n)$$
$$(x_n).(y_n) \to (x_n.y_n)$$

tanımları ile bir birimli halkadır.

Tanım 3.3.16 [30]. $\mathcal{N} = \left\{ (x_n) \in \mathcal{C} : x_n \to 0 \right\} = \left\{ (x_n) : \lim\limits_{n\to\infty} |x_n|_p = 0 \right\}$

şeklinde tanımlanır.

Lemma 3.3.7 [30]. $\mathcal{N}$, $\mathcal{C}$ ’nin bir maksimal idealidir.

$\mathcal{N}$ maksimal ideal olduğundan, $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ cismi tanımlanabilir:

Tanım 3.3.17 [30]. $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi, $\mathcal{C}$ halkasının $\mathcal{N}$ maksimal idealinin bölüm cismi olarak tanımlanır:

$$\mathbb{Q}_p = \mathcal{C}/\mathcal{N}.$$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ 'dir ve $|\cdot|_p$, $\mathbb{Q}_p$ 'ye genişletilebilir.

Lemma 3.3.8 [30]. $(x_n) \in \mathcal{C}$ ve $(x_n) \notin \mathcal{N}$ olsun. $|x_n|_p$ reel sayı dizisi belli bir n 'den sonra sabittir. Yani, öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n, m \geq N$ için, $|x_n|_p = |x_m|_p$ 'dir.

Tanım 3.3.18 [30, 32]. $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ ve (x_n), λ 'ya karşılık gelen Cauchy dizisi ise,

$$|\lambda|_p = \lim_{n \to \infty} |x_n|_p$$

ile tanımlanır.

Önerme 3.3.9 [32]. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ 'nin yoğun bir alt kümesidir.

Teorem 3.3.3 [30]. Her $p \in \mathbb{Z}$ asal sayısı için, $|\cdot|_p$, non-Arşimedyan normuna sahip öyle bir $\mathbb{Q}_p$ cismi vardır ki,

i. $|\cdot|_p$ 'nin $\mathbb{Q}$ 'ya kısıtlanışı $|\cdot|_p$ $p-$adik normunu verir.

ii. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ 'de yoğundur.

iii. $\mathbb{Q}_p$, $|\cdot|_p$ 'ye göre tamdır.

i, ii ve iii koşullarını sağlayan $\mathbb{Q}_p$ cismi normu koruyan izomorfi hariç tek türlü belirlidir.

3.3.5. $\mathbb{Q}_p$ Cisminin Özellikleri

i. $\mathbb{Q}_p$ 'de bir $\|\cdot\| = |\cdot|_p$ normu var ve $\mathbb{Q}_p$ bu norma göre tamdır.

ii. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ 'de yoğun ve $|\cdot|_p$ 'nin $\mathbb{Q}$ 'ya kısıtlanışı $p-$adik norm ile çakışır.

iii. $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Q}_p$ 'nin $|\cdot|_p$ altındaki değer kümeleri eşittir.

iv. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$'nin bir alt cismi olarak düşünülebilir [30].

Lemma 3.3.9 [30, 32]. Her $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$ için $|x|_p = p^{-n}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır.

Lemma 3.3.10 [30, 32]. Her $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$ için,

$$|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$$

olacak şekilde $\nu_p(x)$ tam sayısı vardır.

Başka bir deyişle, ν_p $p-$adik değerlendirmesi $\mathbb{Q}_p$'ye genişletilebilir.

Tanım 3.3.19. $p-$adik değerlendirme halkası

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1 \right\}$$

dir. $\mathbb{Z}_p$, $0-$merkezli ve $1-$yarıçaplı kapalı birim yuvardır ve bu yuvar, hem açık hem de kapalıdır.

Önerme 3.3.10 [30, 32]. $\mathbb{Z}_p$ $p-$adik tam sayılar halkası, esas ideali,

$$p\mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < 1 \right\} = \langle p \rangle = \left\{ px : x \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

olan bir yerel halkadır. Ayrıca,

i. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p = \mathbb{Z}_{(p)} = \left\{ \dfrac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b \right\}$

ii. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ de yoğundur. Ayrıca verilen her $x \in \mathbb{Z}_p$ ve $n \geq 0$ için

$$0 \leq \alpha \leq p^n - 1 \text{ ve } |x - \alpha|_p \leq p^{-n}$$

olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{Z}$ vardır. α tam sayısı bu özelliklerle tek türlü belirlidir.

iii. Her $x \in \mathbb{Z}_p$ için, $\alpha_n \to x$ özelliğinde ve aşağıdaki koşullarla tek türlü belirli bir (α_n) Cauchy dizisi vardır:

a) $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha_n \leq p^n - 1$,

b) Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\alpha_n \equiv \alpha_{n-1} \left(\bmod p^{n-1} \right)$.

Sonuç 3.3.3 [30, 31]. $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p\left[1/p\right]$'dir. Yani, her $x \in \mathbb{Q}_p$ için, $p^n x \in \mathbb{Z}_p$ olacak biçimde $n \geq 0$ tam sayısı vardır.

Sonuç 3.3.4 [30, 31]. $\mathbb{Q}_p$ tamamen bağlantısız bir Hausdorff topolojik uzayıdır.

Sonuç 3.3.5 [30, 31, 32]. $\mathbb{Z}_p$ kompakt ve $\mathbb{Q}_p$ yerel kompakttır.

Lemma 3.3.11 [30, 31, 32]. Her $x \in \mathbb{Z}_p$, $0 \leq b_i \leq p-1$ olmak üzere,

$$x = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + ... + b_n p^n + ...$$

biçiminde tek türlü yazılır.

Örnek 3.3.7. $x = p^{3!} + p^{4!} + ... + p^{n!} + ...$ ise,

$$\begin{aligned} |x|_p &= \left|p^{3!}\left(1 + p^{4!-3!} + ... + p^{n!-3!} + ...\right)\right|_p \\ &= \left|p^{3!}\right|_p . \left|1 + p^{4!-3!} + ... + p^{n!-3!} + ...\right|_p = p^{-3!}.1 = p^{-6} \end{aligned}$$

olarak hesaplanır.

Sonuç 3.3.6 [30]. Her $x \in \mathbb{Q}_p$, $m \in \mathbb{Z}$, $y \in \mathbb{Z}_p$ olmak üzere,

$$x = \frac{y}{p^m} = yp^{-m}$$

biçiminde bir gösterime sahiptir.

Sonuç 3.3.7 [30, 31]. Her $x \in \mathbb{Q}_p$, $0 \leq b_n \leq p-1$ ve $-n_0 = v_p(x)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &= b_{-n_o} p^{-n_o} + ... + b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + ... + b_n p^n + ... \\ &= \sum_{n \geq -n_0} b_n p^n \end{aligned}$$

şeklinde tek türlü yazılır.

Lemma 3.3.12 [2, 30, 32]. $\mathbb{Q}_p$'de bir (a_n) dizisinin bir Cauchy dizisi veya buna denk olarak yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lim_{n\to\infty}\left|a_{n+1}-a_n\right|_p=0$$

olmasıdır.

Örnek 3.3.8. $a_n=n$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty}\left|n+1-n\right|_p=\lim_{n\to\infty}\left|1\right|_p=1\neq 0$$

olduğundan bu dizi yakınsak değildir.

Örnek 3.3.9. $a_n=p^n$ dizisi için,

$$\begin{aligned}\lim_{n\to\infty}\left|p^{n+1}-p^n\right|_p&=\lim_{n\to\infty}\left|p^n(p-1)\right|_p\\&=\lim_{n\to\infty}\left|p^n\right|_p\lim_{n\to\infty}\left|p-1\right|_p=0\end{aligned}$$

olduğundan dizi yakınsaktır ve limiti 0'dır.

Sonuç 3.3.8 [2, 30, 32]. $\sum_{n=0}^{\infty}a_n$, $\mathbb{Q}_p$'de bir seri olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty}a_n \text{ yakınsaktır} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty}a_n=0$$

dır. Bu durumda,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty}a_n\right|_p\leq\max_n\left|a_n\right|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

3.4. $p-$ADİK LİOUVİLLE SAYILARI

Tanım 3.4.1 [13, 31]. Bir $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ verilsin. Eğer $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n-\lambda|_p} = 0$ oluyorsa, λ sayısına $p-$adik Liouville sayısıdır denir.

Her $\lambda \in \{0,1,2,...\}$ için, $\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n-\lambda|_p} = 1$ olur.

Buna göre, $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ bir $p-$adik Liouville sayısı ise $\lambda \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}$ olmak zorundadır.

$p-$adik Liouville sayıları $p-$adik diferansiyel denklemlerin analitik çözümlerinin incelenmesinde önemli bir yere sahiptir. Örneğin $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ ve D, 0 (sıfır)'ın bir komşuluğu olmak üzere,

$$xy' - \lambda y = \frac{1}{1-x} \ , \quad (x \in D)$$

diferansiyel denklemini göz önüne alalım. Eğer $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ bir $p-$adik Liouville sayısı ise, söz konusu denklem $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$ şeklinde analitik bir çözüme sahip değildir. Gerçekten, böyle bir çözüm $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{n-\lambda} x^n$ biçiminde olmak zorundadır. Fakat $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ bir Liouville sayısı ise, bu çözüm D bölgesinde yakınsak değildir [14].

Tanım.3.4.2 [31]. $x \in \mathbb{Z}_p$'nin $x = \sum_{j=0}^{\infty} a_j p^j$ açılımında,

$$a_s \neq 0, \ a_{s+1} = a_{s+2} = ... = a_{t-1}, \ a_t \neq 0$$

koşullarını sağlayan $s < t$ özelliğindeki sayı ikilisine *boşluk* denir. Böyle bir boşluğun uzunluğu $\left[t/p^s \right]$ ile tanımlanır.

Teorem 3.4.1 [31]. Bir $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ verilsin. Aşağıdaki önermerler denktir:

i. λ bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

ii. λ'nın açılımı keyfi uzunlukta boşluklara sahiptir.

Teorem 3.4.2 [31]. Bir $p-$adik Liouville sayısı $\mathbb{Q}$ üzerinde cebirsel değildir.

Tanım 3.4.3 [31]. $\mathbb{Z}_p$'nin sayılabilir açık kümelerinin kesişimi olan bir alt kümesine G_δ küme denir.

Tanım 3.4.4 [31]. $\mathbb{Z}_p$'nin bir alt kümesi her $\varepsilon > 0$ için, $\sum_j d\left(B_j\right) < \varepsilon$ olacak biçimde sayılabilir $B_1, B_2, ...$ yuvarları tarafından örtülebiliyorsa, bu alt kümeye sıfır küme denir. (Burada $d\left(B_j\right) = \sup_{x,y \in B_j} |x-y|_p$ ile tanımlanır.)

Teorem 3.4.3 [31]. $p-$adik Liouville sayıları $\mathbb{Z}_p$'nin yoğun bir G_δ alt kümesini oluşturur.

Teorem 3.4.4 [31]. $p-$adik Liouville sayıları kümesi $\mathbb{Z}_p$'de sıfır ölçüye sahip bir kümedir.

Bu tezde klasik Gamma fonksiyonun analoğu olan $p-$adik Gamma fonksiyonunun Liouville sayılarındaki değerleri incelendiğinden klasik Gamma fonksiyonunun tanımını ve özelliklerini hatırlamak yerinde olacaktır.

3.5. KLASİK GAMMA FONKSİYONU

Tanım 3.5.1 (Euler, 1730) [33]. $x>0$ için, Gamma fonksiyonu

$$\Gamma(x)=\int_0^1 \left(-\log(t)\right)^{x-1} dt \qquad (3.6)$$

ile tanımlanır.

Uygun değişken dönüşümü ile Tanım 3.5.1 daha kullanışlı bir hale gelir:

Teorem 3.5.1 [33]. $x>0$ için,

$$\Gamma(x)=\int_0^\infty t^{x-1}e^{-t}dt \qquad \left(\text{Tanım 3.5.1'de } u=-\log t \text{ alınarak}\right)$$

ya da

$$\Gamma(x)=2\int_0^\infty t^{2x-1}e^{-t^2}dt \qquad \left(\text{Tanım 3.5.1'de } u^2=-\log t \text{ alınarak}\right)$$

ile verilebilir.

Tanım 3.5.2 [33]. $x>0$ olmak üzere,

$$\Gamma(x)=\int_0^{+\infty} e^{-t}t^{x-1}dt$$

olarak tanımlanan fonksiyona *Gamma fonksiyonu* denir. Bu eşitlikteki integral Euler'in ikinci integrali olarak da bilinir.

Tanım 3.5.3. Bir $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. $\forall\, x,y\in(a,b)$ ve $0<\alpha<1$ için,

$$f\left(\alpha x+(1-\alpha)y\right)\le \alpha f(x)+(1-\alpha)f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f 'ye *konveks fonksiyon* denir.

Tanım 3.5.4 [33]. Bir $f:(a,b)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $\forall\, x\in(a,b)$ için, $f(x)>0$ koşulunu gerçeklesin. Eğer $\log(f(x))$ fonksiyonu konveks ise, f 'ye *logaritmik konveks fonksiyon* denir.

Teorem 3.5.2 (Bohr-Mollerup, 1922) [33]. $\log(f(x))$ konveks ve

$$f(1)=1,\ f(x+1)=x.f(x)$$

koşullarını sağlayan tek bir $f:(0,\infty)\to(0,\infty)$ fonksiyonu vardır. Bu fonksiyon Gamma fonksiyonudur.

Tanım 3.5.5. (Euler 1729 ve Gauss 1812)

$$\Gamma_n(x)=\frac{n^x n!}{x(x+1)...(x+n)}=\frac{n^x}{x(1+x/1)(1+x/2)...(1+x/n)}$$

gösterimi kullanıldığında,

$$\Gamma(x)=\lim_{n\to\infty}\Gamma_n(x)$$

olarak tanımlanır.

3.5.1. Klasik Gamma Fonksiyonunun Temel Özellikleri

i. $\Gamma(n)=(n-1)!,\ (n=1,2,...)$

ii. Herhangi bir $x>0$ için, $\Gamma(x+1)=x\Gamma(x)$ 'dir.

iii. Her bir $x>0$ ve her pozitif n tamsayısı için,

$$\Gamma(x+n)=(x+n-1)(x+n-2)...(x+1)x\Gamma(x)$$

eşitliği sağlanır. Tanım 3.5.5'teki eşitlik sadece pozitif x 'ler için tanımlıdır. Bu tanıma negatif gerçel sayılar katılabilir: x, $-n<x<-n+1$ aralığında tanımlı ise,

$$\Gamma(x)=\frac{1}{x(x+1)...(x+n-1)}\Gamma(x+n)$$

olur. Özel olarak, herhangi $x>0$ için $(0,1]$ aralığındaki $\Gamma(x)$ için,

$$\int_{0}^{+\infty} e^{-t}dt = 1$$

olduğundan $\Gamma(1)=1$ ve bu nedenle, $\Gamma(n)=(n-1)!$ eşitliği sağlanır.

iv. $\Gamma(x)\Gamma(1-x)=\dfrac{\pi}{\sin(\pi x)}$, $(x>0)$.

Bu eşitlik, genellikle Euler'in fonksiyonel denklemi olarak adlandırılır.

v. Gamma fonksiyonunun Weierstrass formu:

$$\Gamma(x)=e^{-cx}\frac{1}{x}\lim_{n\to\infty}\prod_{i=1}^{n}\frac{e^{\frac{x}{i}}}{1+\frac{x}{i}}=e^{-cx}\frac{1}{x}\prod_{i=1}^{\infty}\frac{e^{\frac{x}{i}}}{1+\frac{x}{i}}$$

ile verilir. Burada,

$$c=\lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{2}+\frac{1}{3}+...+\frac{1}{n}-\log n\right)=-\frac{\Gamma'(1)}{\Gamma(1)}$$

olup, bu sabit Euler sabiti olarak adlandırılır.

$\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)=\sqrt{\pi}$ olarak bilinir.

3.6. $p-$ADİK GAMMA FONKSİYONU

Klasik Gamma fonksiyonu $\mathbb{C}$'de $0,-1,-2,\ldots$şeklinde basit kutup noktalarına sahip meramorfik bir fonksiyon olup,

$$\Gamma(1)=1,\ \Gamma(z+1)=z.\Gamma(z),\ \left(z\in\mathbb{C}\setminus\{0,-1,-2,\ldots\}\right)$$

şeklindeki fonksiyonel bağıntıyı sağlar. Böylece, $n\in\mathbb{N}$ için,

$$\Gamma(n+1)=n!$$

olur.

Teorem 3.6.1 [32]. E, $\mathbb{Z}_p$'nin bir altkümesi ve $\bar{E}$, E'nin kapanışı olsun. E üzerinde düzgün sürekli bir $f:E\to\mathbb{Q}_p$ fonksiyonu verildiğinde, $\bar{E}$ üzerinde düzgün sürekli ve sınırlı olan bir tek

$$F:\bar{E}\to\mathbb{Q}_p,\ F(x)=f(x),\ x\in E$$

fonksiyonu vardır.

$\mathbb{Q}_p$ içinde bir $a_1,a_2,\ldots$ dizisi verilsin. Bu dizi, $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}_p$, $f(n)=a_n$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olarak düşünülebilir. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi $\mathbb{Z}_p$'nin yoğun bir alt kümesi olduğundan, Teorem 3.6.1'e göre,

$$F:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Q}_p,\ F(n)=f(n),\ n\in\mathbb{N}$$

olacak biçimde en çok bir tane sürekli fonksiyon vardır. Eğer böyle bir F fonksiyonu varsa, (a_n) dizisi *interpole edilebilir* denir. Eğer $f(n)=a_n$ fonksiyonu $\mathbb{N}$ üzerinde düzgün sürekli ise, Teorem 3.6.1 ile (a_n) dizisinin interpole edilebileceği kesin olarak söylenebilir [32].

Önerme 3.6.1 [32]. Bir $f:\mathbb{N}\to\mathbb{Q}_p$, $f(n)=a_n$ fonksiyonunun $\mathbb{N}$ üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon>0$ sayısı için,

$$n=m+p^N\Rightarrow|a_n-a_m|_p<\varepsilon \qquad (3.7)$$

gerektirmesi doğrulanacak biçimde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısının bulunmasıdır.

Gamma fonksiyonunun $p-$adik analoğu için, $n \to n!$ dönüşümü $p-$adik olarak yorumlanmalı ve interpolasyonla elde edilebileceği gösterilmelidir.

$x \in \mathbb{Z}_p$ ve $n \in \mathbb{N}\left(n \neq x\right)$ sayısı x'e yaklaştığında n değeri büyürken $\left|n!\right|_p$ küçüleceğinden $p-$adik olarak $\lim\limits_{n\to\infty} n! = 0$ elde edilir. Bu durumda ise,

$$f\left(n\right) = n!,\ \left(n = 1, 2, ...\right)$$

koşulunu gerçekleyen sürekli bir $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ fonksiyonu bulunamaz.

Bu sorunu aşmak için, $n!$'in modifiye edilmesi Morita [5] tarafından önerilmiştir. Bu yaklaşımdaki fikir,

$$n! = 1.2...n$$

çarpımında p ile bölünen çarpanların elimine edilmesi üzerine kuruludur.

Tanım 3.6.1 [5, 31]. $p-$adik faktöriyel,

$$\left(n!\right)_p := \prod_{1\leq j<n}{}' j$$

ile tanımlanır. Burada $\prod'$, p ile bölünmeyen çarpanların çarpımını gösterir.

Bu tanıma göre, $\left|\left(n!\right)_p\right|_p = 1$ olur.

$n \to \left(n!\right)_p$ dönüşümünün interpole edilip edilemeyeceği araştırılırken, s'nin yeterince büyük değerleri için, $\left(\left(n+p^s\right)!\right)_p$ ve $\left(n!\right)_p$ sayıları karşılaştırılmalıdır. Bu sayılar arasında,

$$\left(\left(n+p^s\right)!\right)_p = \left(n!\right)_p \prod_{j=1}^{p^s}{}'\left(n+j\right) \tag{3.8}$$

şeklindeki eşitlik yazılabilir. Aşağıdaki önerme, bulunan eşitliğin sağ tarafındaki çarpım için önemli sonuçlar içerir:

Önerme 3.6.2 (Genelleştirilmiş Wilson Teoremi) [31]. $p \neq 2$ bir asal sayı $n \in \mathbb{Z}$ ve $s \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde,

$$\prod_{j=0}^{p^s-1}{}'\left(n+j\right) \equiv -1 \left(\operatorname{mod} p^s\right)$$

denkliği sağlanır.

Bu önermenin hipotezinde $n=0$ ve $s=1$ alınırsa, Wilson Teoremi olarak bilinen,

$$(p-1)!\equiv -1(\mathrm{mod}\, p)$$

denkliği bulunur.

Önerme 3.6.2 ile, $\left((n+p^s)!\right)_p$ ve $(n!)_p$ sayıları arasındaki (3.8) eşitliğinden,

$$\left((n+p^s)!\right)_p \equiv -(n!)_p\left(\mathrm{mod}\, p^s\right)$$

denkliği elde edilir. Bu denklikteki işaret sorunu için, ikinci bir düzenlemeyle,

$$g(n):=(-1)^{n+1}(n!)_p,\ (n\in\mathbb{N})$$

fonksiyonu tanımlanırsa, p'nin tek bir asal sayı olduğu kullanılarak, önceki denklikten,

$$g\left(n+p^s\right)\equiv g(n)\left(\mathrm{mod}\, p^s\right)$$

bulunur. Buradan $\varepsilon=p^{-s+1}$ ve $m=n+p^s$ olmak üzere,

$$\left|g(m)-g(n)\right|_p \leq p^{-s} < p^{-s+1}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Böylece Önerme 3.6.1'deki (3.7) gerektirmesi doğrulanacağından, $g:\mathbb{N}\to\mathbb{Z}$ fonksiyonunun interpole edilebileceği sonucu elde edilir.

Tanım 3.6.2 [31]. $p-$adik Gamma fonksiyonu,

$$n\to(-1)^n\prod_{\substack{1\leq j<n\\ (j,p)=1}} j\equiv(-1)^n{\prod_{1\leq j<n}}' j\ ,\ (n\geq 2)$$

fonksiyonunun $\mathbb{Z}_p$'ye sürekli genişlemesi olarak tanımlanır. Burada $\prod'$ sembolü, $1\leq j<n$ aralığında yer alan tamsayılardan p ile aralarında asal olanların çarpımını gösterir. Başka bir ifade ile $\Gamma_p:\mathbb{Z}_p\to\mathbb{Q}_p$ fonksiyonu,

$$\Gamma_p(x):=\lim_{n\to x}(-1)^n{\prod_{1\leq j<n}}' j$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.6.2 [31]. $p \neq 2$ olsun. Bu takdirde,

i. $\forall\, x \in \mathbb{Z}_p$ için,

$$h_p(x) = \begin{cases} -x \ , & |x|_p = 1 \\ -1 \ , & |x|_p < 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanmak üzere,

$$\Gamma_p(x+1) = h_p(x)\Gamma_p(x).$$

ii. $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_p$ için, $\left|\Gamma_p(x) - \Gamma_p(y)\right|_p \leq |x-y|_p$.

iii. $\Gamma_p(0) = 1,\ \Gamma_p(1) = -1,\ \Gamma_p(2) = 1$ ve $\forall\, x \in \mathbb{Z}_p$ için, $\left|\Gamma_p(x)\right|_p = 1$.

Not 3.6.1 [31]. $p = 2$ durumunda $2-$adik Gamma fonksiyonu,

$$n \to (-1)^n \prod_{\substack{1 \leq j < n \\ (j,2)=1}} j \equiv (-1)^n \prod_{1 \leq j < n}{}' j \ , \ (n \geq 2)$$

fonksiyonunun $\mathbb{Z}_2$'ye sürekli genişlemesi olarak tanımlanır. Başka bir ifade ile $\Gamma_2 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Q}_2$ fonksiyonu

$$\Gamma_2(x) := \lim_{n \to x} (-1)^n \prod_{1 \leq j < n}{}' j$$

ile tanımlanır. Γ_2 fonksiyonu için,

$$\left|\Gamma_2(x) - \Gamma_2(y)\right|_2 \leq |x-y|_2 \ , \ \left(x, y \in \mathbb{Z}_2 \ , \ |x-y|_2 \neq \frac{1}{4} \right)$$

$$\left|\Gamma_2(x) - \Gamma_2(y)\right|_2 \leq 2|x-y|_2 \ , \ \left(x, y \in \mathbb{Z}_2 \ , \ |x-y|_2 = \frac{1}{4} \right)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 3.6.3 [31]. $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\Gamma_p(-n) = (-1)^{n+1-\left[\frac{n}{p}\right]} \left(\Gamma_p(n+1)\right)^{-1}$$

eşitliği gerçeklenir.

Teorem 3.6.4 [31]. $p \neq 2$ olmak üzere,

$$\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x) = (-1)^{l(x)} \quad , \quad (x \in \mathbb{Z}_p)$$

sağlanır. Burada l, $l : \mathbb{Z}_p \to \{1, 2, ..., p\}$ olup, $x \in \mathbb{Z}_p$'yi $\bmod p\mathbb{Z}_p$'ye göre, onun $\{1, 2, ..., p\}$ kalanlarına eşler.

$p = 2$ ise, her $x \in \mathbb{Z}_2$ için,

$$\Gamma_2(x)\Gamma_2(1-x) = (-1)^{\sigma_1(x)+1}$$

olur ve burada σ_1,

$$\sigma_1\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j\right) = a_1$$

formülüyle tanımlanır.

Not 3.6.2 [31]. $\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x)$ için verilen eşitlikler,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)} \tag{3.9}$$

klasik formülünün $p-$adik analoğunu oluşturur.

(3.9)'da $z = \frac{1}{2}$ alınırsa, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$ elde edilir.

Ayrıca, Teorem 3.6.4 ile $p \neq 2$ için, $\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)$ değeri hesaplanabilir:

$$\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^{l\left(\frac{1}{2}\right)}$$

bulunur. Burada,

$$l\left(\frac{1}{2}\right) = l\left(\frac{1}{2}(p+1)\right) = \frac{1}{2}(p+1)$$

olduğundan,

$$\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \begin{cases} 1 & , \quad p \equiv 3 (\bmod 4) \\ -1 & , \quad p \equiv 1 (\bmod 4) \end{cases}$$

olur. Böylece, klasik durumda $\pi = 3{,}14...$ sayısının oynadığı rol, $p-$adik durumda, 1, -1, sayılarından biri tarafından devralınır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu kısımda tez çalışmasından elde edilen sonuçlar verilmiştir. Bu sonuçlar üç alt başlıkta toplanmıştır.

4.1. $p-$ADİK SAYILAR CİSMİNDE ERDÖS TEOREMİ

Bu kısımda $p-$adik Liouville sayılarının bazı özellikleri elde edilmiştir. İlk olarak $p-$adik Liouville sayısı tanımını hatırlayalım:

Tanım 4.1.1. $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ sayısı için,

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n-\lambda|_p} = 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, λ 'ya bir $p-$adik Liouville sayısı denir [13, 31].

Bu tanıma göre, eğer

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\lambda - a_n|_p} = 0$$

olacak şekilde bir (a_n) doğal sayısı dizisi varsa λ bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

Örnek 4.1.1. $\lambda = \sum_{n=0}^{\infty} p^{n!}$ serisi bir $p-$adik Liouville sayısıdır. Gerçekten $S_n = \sum_{k=0}^{n} p^{k!}$ olmak üzere,

$$|\lambda - S_n|_p = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} p^{k!}\right|_p \leq \max_{k\geq n+1} \left|p^{k!}\right|_p = p^{-(n+1)!}$$

ve böylece,

$$\lim_{n\to\infty} \sqrt[n]{|\lambda - S_n|_p} = \lim_{n\to\infty} p^{-\frac{(n+1)!}{n}} = 0$$

bulunur.

Klasik Liouville sayıları ile ilgili P. Erdös tarafından verilen aşağıdaki sonuç bilinmektedir:

Teorem 4.1.1 (P. Erdös) [22]. $a_1 < a_2 < a_3 < \ldots$ biçiminde, pozitif tamsayıların artan bir dizisi, her $t > 0$ için,

$$\limsup_{n\to\infty} a_n^{\frac{1}{t^n}} = \infty$$

ve sabit bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $n > n_0(\varepsilon)$ için,

$$a_n > n^{1+\varepsilon}$$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n}$$

serisi bir Liouville sayısıdır.

P. Erdös tarafından verilen bu sonucun $p-$adik sayılar cisminde benzeri aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

Teorem 4.1.2. $(a_n) \subset \mathbb{Z}_p$ dizisi, her n için,

$$\nu_p(a_n) < \nu_p(a_{n+1}) \tag{4.1}$$

ve sabit bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $n > n_0(\varepsilon)$ için,

$$\nu_p(a_{n+1}) \geq n^{1+\varepsilon} \tag{4.2}$$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serisi bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

İspat: İlk olarak $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olduğunu gösterelim. Sabit bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $n > n_0(\varepsilon)$ için,

$$\nu_p(a_{n+1}) \geq n^{1+\varepsilon} \tag{4.2}$$

koşuluna göre,

$$|a_{n+1}|_p = p^{-\nu_p(a_{n+1})} \leq p^{-n^{1+\varepsilon}} \to 0, \ (n \to \infty)$$

olacağından, $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ve bundan da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisinin yakınsak olduğu çıkar. Seriler için sağlandığı bilinen $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n\right|_p \leq \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n|_p$ özelliği ile, $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \in \mathbb{Z}_p$ elde edilir. Ayrıca (4.1) koşulundan, $\alpha \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}$ bulunur.

Keyfi bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı verildiğinde, $S_n = \sum_{i=1}^{n} a_i$ olmak üzere,

$$0 < |\alpha - S_n|_p^{\frac{1}{n}} = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i}\right|_p^{\frac{1}{n}} = \left[\max\left\{|a_{n+1}|_p, |a_{n+2}|_p, \ldots\right\}\right]^{\frac{1}{n}}$$

olur. Şimdi sırasıyla (4.1) ve (4.2) koşulları uygulanırsa,

$$0 < |\alpha - S_n|_p^{\frac{1}{n}} = |a_{n+1}|_p^{\frac{1}{n}} = \left[p^{-\nu_p(a_{n+1})}\right]^{\frac{1}{n}}$$

ve

$$0 < |\alpha - S_n|_p^{\frac{1}{n}} = |a_{n+1}|_p^{\frac{1}{n}} = \left[p^{-\nu_p(a_{n+1})}\right]^{\frac{1}{n}} \leq p^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{n}} = p^{-n^{\varepsilon}}, \ (n \geq n_0)$$

bulunur. Böylece,

$$0 < |\alpha - S_n|_p^{\frac{1}{n}} \to 0, \ (n \to \infty)$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $S_n \in \mathbb{Z}_p$ ve $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi $\mathbb{Z}_p$'de yoğun olduğundan,

$$|S_n - b_n|_p < |\alpha - S_n|_p$$

olacak biçimde $(b_n) \subset \mathbb{N}$ dizisi vardır. Buradan güçlü üçgen eşitsizliğiyle, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$0 < |\alpha - b_n|_p \leq \max\left\{|\alpha - S_n|_p, |S_n - b_n|_p\right\} = |\alpha - S_n|_p$$

sağlanır. Şu halde,

$$0 < |\alpha - b_n|_p^{\frac{1}{n}} \leq |\alpha - S_n|_p^{\frac{1}{n}} = p^{-n^{\varepsilon}} \to 0, \ (n \to \infty)$$

olacak biçimde bir $(b_n) \subset \mathbb{N}$ bulunduğundan istenen elde edilmiş olur.

Uyarı: Her $a_n \in \mathbb{Z}_p$ için, $\nu_p\left(a_n\right) \in \mathbb{N}$ olduğundan, Teorem 4.1.2 'deki (4.2) koşulu,

$$\nu_p\left(a_{n+1}\right) \geq n^2$$

olarak değiştirilebilir.

Buna göre, Teorem 4.1.2 aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Sonuç 4.1.1. $\left(a_n\right) \subset \mathbb{Z}_p$ dizisi, her n için,

$$\nu_p\left(a_n\right) < \nu_p\left(a_{n+1}\right) \tag{4.3}$$

ve $n > n_0$ için,

$$\nu_p\left(a_{n+1}\right) \geq n^2 \tag{4.4}$$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serisi bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

İspat: (4.3) ve (4.4) koşullarına göre, $\lim\limits_{n\to\infty} a_n = 0$ olduğundan $\sum\limits_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi yakınsak ve böylece $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ bulunur. Benzer olarak, $S_n = \sum\limits_{i=1}^{n} a_i$ olmak üzere,

$$0 < \left|\alpha - S_n\right|_p^{\frac{1}{n}} = \left[p^{-\nu_p\left(a_{n+1}\right)}\right]^{\frac{1}{n}} \leq p^{-\frac{n^2}{n}} = p^{-n}, \ \left(n \to \infty\right)$$

olur. Yine, her $n \in \mathbb{N}$ için, $S_n \in \mathbb{N}$ olduğundan, α 'nın bir $p-$adik Liouville sayısı olduğu sonucu elde edilir.

4.2. $p-$ADİK LİOUVİLLE DİZİLERİ

Reel durumda Liouville dizisinin tanımı J. Hančl tarafından aşağıdaki şekilde verilmiştir:

Tanım 4.2.1 [4]. (a_n) bir pozitif reel sayı dizisi olsun. Eğer her (c_n) pozitif tamsayı dizisi için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \frac{1}{a_n c_n}$$

toplamı bir Liouville sayısı oluyorsa, (a_n) dizisine *Liouville dizisi* denir.

Louville dizisi tanımının $p-$adik analoğu aşağıdaki gibi verilebilir:

Tanım 4.2.2. (a_n) bir $p-$adik tamsayı dizisi olsun. Eğer her (c_n) pozitif tamsayı dizisi için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$$

toplamı bir $p-$adik Liouville sayısına eşit oluyorsa, (a_n) dizisi $p-$adik Liouville dizisidir denir.

Örnek 4.2.1. $(a_n) = \left(p^{n!}\right) \subset \mathbb{Z}_p$ dizisi bir $p-$adik Liouville dizisidir.

Keyfi bir $(c_n) \subset \mathbb{Z}^+$ dizisi verilsin. Tanıma göre $(a_n) \subset \mathbb{Z}_p$ dizisinin bir $p-$adik Liouville dizisi olabilmesi için,

$$\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} c_n p^{n!}$$

toplamının $p-$adik Liouville sayısı olduğu gösterilmelidir.

Her $n \in \mathbb{N}$ için, $|c_n|_p \leq 1$ ve $\left|c_n p^{n!}\right|_p \leq \left|p^{n!}\right|_p = p^{-n!} \to 0,\ (n \to \infty)$

olduğundan, $\sum_{n=1}^{\infty} c_n p^{n!}$ serisi yakınsaktır. $S_n = \sum_{k=1}^{n} c_k p^{k!}$ olmak üzere,

$$0 < \left|\gamma - S_{n-1}\right|_p^{\frac{1}{n}} = \left|\sum_{i=0}^{\infty} c_{n+i} p^{(n+1)!}\right|_p^{\frac{1}{n}} = \left[\max\left\{\left|c_n p^{n!}\right|_p, \left|c_{n+1} p^{(n+1)!}\right|_p, \ldots\right\}\right]^{\frac{1}{n}} = \left[\left|c_n\right|_p \left|p^{n!}\right|_p\right]^{\frac{1}{n}}$$

yazılabilir. Yine, $(c_n) \subset \mathbb{Z}^+$ olduğundan, $\left|c_n\right|_p \leq 1$ ve buradan,

$$0 < \left|\gamma - S_{n-1}\right|_p^{\frac{1}{n}} = \left[\left|c_n\right|_p \left|p^{n!}\right|_p\right]^{\frac{1}{n}} \leq \left|p^{n!}\right|_p^{\frac{1}{n}} = p^{-(n-1)!}$$

bulunur. Böylece,

$$0 < \left|\gamma - S_{n-1}\right|_p^{\frac{1}{n}} \to 0, \ (n \to \infty)$$

olacağından, $\gamma = \sum_{n=1}^{\infty} c_n p^{n!}$ toplamının bir $p-$adik Liouville sayısı olduğu görülür.

Teorem 4.2.1. Bir $(a_n) \subset \mathbb{Z}^+$ dizisi, her $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\nu_p(a_n) < \nu_p(a_{n+1}) \qquad (4.5)$$

ve sabit bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $n > n_0(\varepsilon)$ için,

$$\nu_p(a_{n+1}) \geq n^{1+\varepsilon} \qquad (4.6)$$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde, (a_n) bir $p-$adik Liouville dizisidir.

İspat: Keyfi bir (c_n) pozitif tamsayı dizisi ve herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. İlk olarak $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ serisinin yakınsak olduğunu gösterelim. Her $n > n_0(\varepsilon)$ için,

$$\nu_p(a_{n+1}) \geq n^{1+\varepsilon} \qquad (4.6)$$

koşulu ve her $n \in \mathbb{N}$ için sağlanan, $\left|c_n\right|_p \leq 1$ eşitsizliğinden,

$$\left|a_{n+1} c_{n+1}\right|_p \leq \left|a_{n+1}\right|_p = p^{-\nu_p(a_{n+1})} \leq p^{-n^{1+\varepsilon}}$$

olur. Böylece, $\lim_{n\to\infty} a_n c_n = 0$ ve bundan da $\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ serisinin yakınsak olduğu çıkar. Ayrıca, $\left|\sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n\right|_p \le \max_{n\in\mathbb{N}} |a_n c_n|_p$ özelliği ile, $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n \in \mathbb{Z}_p$ elde edilir. Diğer taraftan (4.5) koşulu ile, $\alpha \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{Z}$ bulunur. Şimdi $\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n c_n$ toplamının bir $p-$adik Liouville sayısı olduğu gösterilmelidir. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ reel sayısı verildiğinde, $S_n = \sum_{k=1}^{n} a_k c_k$ olmak üzere, sırasıyla (4.5) ve (4.6) koşulları uygulanırsa,

$$0 < |\alpha - S_n|_p^{\frac{1}{n}} = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i} c_{n+i}\right|_p^{\frac{1}{n}} = \left[\max\left\{|a_{n+1}c_{n+1}|_p, |a_{n+2}c_{n+2}|_p, \ldots\right\}\right]^{\frac{1}{n}} = |a_{n+1}c_{n+1}|_p^{\frac{1}{n}}$$

olur. Her $i = 1, 2, 3, \ldots$ için, $|c_{n+i}|_p \le 1$ olduğundan,

$$0 < |\alpha - S_n|_p^{\frac{1}{n}} = \left|\sum_{i=1}^{\infty} a_{n+i} c_{n+i}\right|_p^{\frac{1}{n}} \le |a_{n+1}|_p^{\frac{1}{n}} = p^{\frac{-\nu_p(a_{n+1})}{n}} \le p^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{n}} = p^{-n^{\varepsilon}} \to 0, \ (n \to \infty)$$

elde edilir. Her $n \in \mathbb{N}$ için, $S_n \in \mathbb{N}$ olduğundan, α 'nın bir $p-$adik Liouville sayısı olduğu görülür.

Uyarı: Her $a_n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\nu_p(a_n) \in \mathbb{N}$ olduğundan, Teorem 4.2.1'deki (4.6) koşulu,

$$\nu_p(a_{n+1}) \ge n^2$$

olarak değiştirilebilir.

Buna göre, Teorem 4.2.1 aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

Sonuç 4.2.1. $(a_n)\subset\mathbb{Z}^+$ dizisi, her n için,

$$\nu_p(a_n)<\nu_p(a_{n+1}) \tag{4.7}$$

ve $n>n_0$ için,

$$\nu_p(a_{n+1})\geq n^2 \tag{4.8}$$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde, (a_n) bir $p-$adik Liouville dizisidir.

Teorem 4.2.2. Bir $(a_n)\subset\mathbb{Z}^+$ dizisi, herhangi bir $\varepsilon>0$ verildiğinde, $n>n_0(\varepsilon)$ için,

$$0<|a_n|_p^{\frac{1}{n}}<\varepsilon$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde,

i. $\alpha=\sum_{k=1}^{\infty}a_k$ bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

ii. (a_n) bir $p-$adik Liouville dizisidir.

İspat: Keyfi bir $\varepsilon>0$ sayısı verilsin.

i. Hipotezden dolayı $\forall n\geq n_0(\varepsilon)$ için,

$$0<|a_n|_p^{\frac{1}{n}}<\varepsilon$$

olduğundan,

$$0<|a_n|_p<\varepsilon^n$$

ve buradan $a_n\to 0,\ (n\to\infty)$ yani,

$$\sum_{k=1}^{\infty}a_k$$

toplamı yakınsak olur. Diğer taraftan,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty}a_k\right|_p\leq\max_{k\in\mathbb{Z}^+}|a_k|_p\leq 1$$

eşitsizliği ile $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k \in \mathbb{Z}_p$'dir. Şimdi $\alpha_n = \sum_{k=1}^{n} a_k$ olmak üzere, $\forall n \geq n_0(\varepsilon)$ için,

$$0 < \left|\alpha - \alpha_n\right|_p^{\frac{1}{n}} = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} a_k\right|_p^{\frac{1}{n}} \leq \max_{k \geq n+1} \left|a_k\right|_p^{\frac{1}{n}}$$

ve böylece,

$$0 < \left|\alpha - \alpha_n\right|_p^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

elde edilir. $\alpha_n \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan $\alpha \in \mathbb{Z}_p$ bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

ii. $(c_n) \subset \mathbb{Z}^+$ keyfi bir dizi olsun. $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$ için,

$$\left|c_n a_n\right|_p \leq \left|a_n\right|_p < \varepsilon^n \to 0$$

olduğundan, $\sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k$ toplamı yakınsaktır. Ayrıca,

$$\left|\sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k\right|_p \leq \max_{k \in \mathbb{Z}^+} \left|c_k a_k\right| \leq 1$$

eşitsizliğinden, $\gamma = \sum_{k=1}^{\infty} c_k a_k \in \mathbb{Z}_p$'dir. Şimdi $\gamma_n = \sum_{k=1}^{n} c_k a_k \in \mathbb{Z}^+$ olmak üzere, $\forall\, n \geq n_0(\varepsilon)$ için,

$$0 < \left|\alpha - \gamma_n\right|_p^{\frac{1}{n}} = \left|\sum_{k=n+1}^{\infty} c_k a_k\right|_p^{\frac{1}{n}} \leq \max_{k \geq n+1} \left|c_k a_k\right|_p^{\frac{1}{n}} \leq \max_{k \geq n+1} \left|a_k\right|_p^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

olur. Böylece $\liminf_{n \to \infty} \sqrt[n]{\left|\gamma - \gamma_n\right|_p} = 0$ ve $\gamma_n \in \mathbb{Z}^+$ olduğundan, γ bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

4.3 FONKSİYONLAR CİSMİNDE LİOUVİLLE SAYILARI

K keyfi bir cisim, x bir değişken, $K[x]$ polinomlar halkası, $K(x)$ rasyonel fonksiyonları cismi ve $K\langle x\rangle$, $a_k, a_{k-1}, a_{k-2}, \ldots \in K$ olmak üzere,

$$z = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \ldots$$

biçiminde formal seriler cismi olsun.

Böylece $K(x)$, $K[x]$'in kesir cismi ve $K\langle x\rangle$'in bir alt cismi olur.

$K\langle x\rangle$ üzerinde bir $\|\cdot\| = |\cdot|$ normu, $|0| = 0$ ve $a_k \neq 0$ olmak üzere,

$$z = a_k x^k + a_{k-1}x^{k-1} + a_{k-2}x^{k-2} + \ldots \in K\langle x\rangle$$

için, $|z| = e^k$ olarak tanımlanabilir.

Eğer $z \in K[x]$ ise, $\log|z| = \deg(z)$ olur [34].

Bu şekilde tanımlanan norm bir non-Arşimedyan normdur ve bu norma göre $K\langle x\rangle$ non-Arşimedyan bir cisimdir.

Liouville teoreminin $K\langle x\rangle$ cismindeki benzeri şöyle ifade edilebilir:

Teorem 4.3.1 [34]. $\alpha \in K\langle x\rangle$ verilsin. α, $K(x)$ üzerinde derecesi $n(\geq 2)$ olan cebirsel bir sayı ise, her $a, b(\neq 0) \in K[x]$ için,

$$\left|\alpha - \frac{a}{b}\right| \geq \frac{C(\alpha)}{b^n}$$

olacak biçimde α'ya bağlı sabit bir $C(\alpha)$ pozitif sayısı vardır.

Şimdi, $K\langle x\rangle$ cisminde Liouville sayısının tanımını verelim.

Tanım 4.3.1 [18, 34]. $\xi \in K\langle x\rangle$ verilsin. Eğer her $\omega \in \mathbb{R}^{+}$ için,

$$0<\left|\xi-\frac{a}{b}\right|<\frac{1}{b^{\omega}}$$

olacak biçimde $a, b \in K[x]\backslash\{0\}$, $|b|>1$ bulunabilirse, ξ'ye bir Liouville sayısıdır denir.

Erdös teoreminin fonksiyonlar cismindeki benzeri de aşağıdaki şekilde verilebilir.

Teorem 4.3.2. $K\langle x\rangle$'de formal serilerden oluşan (z_n) dizisi, her n için,

$$\deg(z_{n+1})<\deg(z_n)<0 \tag{4.9}$$

ve sabit bir $\varepsilon>0$ verildiğinde, $n>n_0(\varepsilon)$ için,

$$\deg(z_{n+1}) \leq -n^{1+\varepsilon} \tag{4.10}$$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde,

$$\alpha=\sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

serisi bir Liouville sayısıdır.

İspat: İlk olarak $\alpha=\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisinin yakınsak olduğunu kanıtlayalım. Sabit bir $\varepsilon>0$ verildiğinde, $n>n_0(\varepsilon)$ için,

$$\deg(z_{n+1}) \leq -n^{1+\varepsilon} \tag{4.10}$$

koşulundan, $\lim_{n\to\infty} z_n=0$ ve bundan da $\sum_{n=1}^{\infty} z_n$ serisinin yakınsak olduğu çıkar.

Keyfi bir $\varepsilon>0$ reel sayısı verildiğinde, $S_n=\sum_{i=1}^{n} a_i$ olmak üzere,

$$0<\left|\alpha-S_n\right|^{\frac{1}{n}}=\left|\sum_{i=1}^{\infty}z_{n+i}\right|^{\frac{1}{n}}=\left[\max\left\{\left|z_{n+1}\right|,\left|z_{n+2}\right|,\ldots\right\}\right]^{\frac{1}{n}}$$

olur. Şimdi sırasıyla (4.9) ve (4.10) koşulları uygulanırsa,

$$0<\left|\alpha-S_n\right|^{\frac{1}{n}}=\left|z_{n+1}\right|^{\frac{1}{n}}=\left[e^{\deg(z_{n+1})}\right]^{\frac{1}{n}}$$

ve

$$0<\left|\alpha-S_n\right|^{\frac{1}{n}}=\left|z_{n+1}\right|^{\frac{1}{n}}=\left[e^{\deg(z_{n+1})}\right]^{\frac{1}{n}}\leq e^{-\frac{n^{1+\varepsilon}}{n}}=e^{-n^{\varepsilon}}.$$

Böylece,

$$0<\left|\alpha-S_n\right|^{\frac{1}{n}}\to 0,\ \left(n\to\infty\right)$$

elde edilir. Her $n\in\mathbb{N}$ için, $S_n\in K\langle x\rangle$ ve $K(x)$ rasyonel fonksiyonlar cismi, $K\langle x\rangle$'te tanımlanan norma göre yoğun olduğundan,

$$\left|S_n-\frac{a_n}{b_n}\right|<\left|\alpha-S_n\right|$$

olacak biçimde $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\subset K(x)$ $\left(a_n,b_n\in K[x]\right)$ dizisi vardır. Buradan güçlü üçgen eşitsizliğiyle, her $n\in\mathbb{N}$ için,

$$0<\left|\alpha-\frac{a_n}{b_n}\right|\leq\max\left\{\left|\alpha-S_n\right|,\left|S_n-\frac{a_n}{b_n}\right|\right\}=\left|\alpha-S_n\right|.$$

Şu halde,

$$0<\left|\alpha-\frac{a_n}{b_n}\right|^{\frac{1}{n}}\leq\left|\alpha-S_n\right|^{\frac{1}{n}}=e^{-n^{\varepsilon}}\to 0,\ \left(n\to\infty\right)$$

olacak biçimde bir $\left(\frac{a_n}{b_n}\right)\subset K(x)$ bulunduğundan istenen elde edilmiş olur.

Örnek 4.3.1. $\xi=\sum_{n=1}^{\infty}x^{-n!}\in K\langle x\rangle$ verilsin ve $z_n=x^{-n!}$ olsun. (z_n) dizisi (4.9) ve (4.10) koşullarını gerçeklediğinden Teorem 4.3.2 ile ξ, fonksiyonlar cisminde bir Liouville sayısıdır.

4.4 $p-$ADİK GAMMA FONKSİYONUN LİOUVİLLE SAYILARINDAKİ DEĞERLERİ

Elde edilen sonuçları vermeden önce $p-$adik Gamma fonksiyonunun tanımını ve ispatlarda kullanacağımız temel özelliklerini hatırlatalım:

$p-$adik Gamma fonksiyonu $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$

$$\Gamma_p(x) := \lim_{n \to x} (-1)^n \prod_{1 \le j < n}{}' j$$

ile tanımlanır [5, 31].

$p \neq 2$ durumunda $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ $p-$adik Gamma fonksiyonunun sağladığı temel özellikler şöyle sıralanabilir:

i. $\forall\, x \in \mathbb{Z}_p$ için,

$$\Gamma_p(x+1) = h_p(x)\Gamma_p(x)$$

eşitliği sağlanır ve burada,

$$h_p(x) = \begin{cases} -x & , \ |x|_p = 1 \\ -1 & , \ |x|_p < 1 \end{cases}$$

olarak tanımlanır.

ii. $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_p$ için, $\left|\Gamma_p(x) - \Gamma_p(y)\right|_p \le |x-y|_p$.

iii. $\Gamma_p(0) = 1,\ \Gamma_p(1) = -1,\ \Gamma_p(2) = 1$ ve $\forall\, x \in \mathbb{Z}_p$ için, $\left|\Gamma_p(x)\right|_p = 1$.

$p = 2$ durumunda ise, $\Gamma_2 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Q}_2$ fonksiyonu için,

$$\left|\Gamma_2(x) - \Gamma_2(y)\right|_2 \le |x-y|_2 \ , \ \left(x, y \in \mathbb{Z}_2 \ , \ |x-y|_2 \neq \frac{1}{4} \right)$$

$$\left|\Gamma_2(x) - \Gamma_2(y)\right|_2 \le 2|x-y|_2 \ , \ \left(x, y \in \mathbb{Z}_2 \ , \ |x-y|_2 = \frac{1}{4} \right)$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 4.4.1. $\lambda \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$ ise, $\Gamma_p(\lambda) \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$ 'dir.

İspat: $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ olduğundan,

$$\lambda = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ... + a_n p^n + ... \ , \ (0 \le a_i \le p-1)$$

şeklinde bir açılıma sahiptir.

$\lambda \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$ alındığından, bu açılımda sonsuz sayıda n göstergeci için, $a_n \neq 0$ 'dır. Sıfırdan farklı a_n sayılarının indisleri n_k ile gösterilirse, her $k \in \mathbb{N}$ için, $a_{n_k} \neq 0$ olur.

$$S_{n_k} = a_{n_0} + a_{n_1} p^{n_1} + a_{n_2} p^{n_2} + ... + a_{n_k} p^{n_k} = \sum_{i=1}^{n_k} a_i p^i$$

olsun. Böylece, $S_{n_k} \xrightarrow{|\cdot|_p} \lambda, \ (k \to \infty)$ olur. Buradan,

$$\Gamma_p(\lambda) = \lim_{k\to\infty} \Gamma_p(S_{n_k}) = \lim_{k\to\infty} (-1)^{S_{n_k}} \prod_{1 \le i < S_{n_k}}{}' \, j$$

elde edilir.

$\Gamma_p(\lambda) \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$ olmak zorundadır.

Eğer $\Gamma_p(\lambda) \in \mathbb{N}$ olsaydı $0 \le b_i \le p-1$ ve $b_m \neq 0$ olmak üzere, $\Gamma_p(\lambda)$

$$\Gamma_p(\lambda) = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + ... + b_m p^m$$

şeklinde sonlu bir $p-$adik açılıma sahip olurdu.

Diğer taraftan, $\Gamma_p(\lambda) = \lim_{k\to\infty} \Gamma_p(S_{n_k})$ olduğundan, $\Gamma_p(\lambda)$'nın sonlu bir $p-$adik açılıma sahip olması, $\Gamma_p(S_{n_k})$'ya ait $p-$adik açılımın belli bir k indisinden sonra $\Gamma_p(\lambda)$ ile aynı olmasını yani, k indisinden sonraki S_{n_k} kısmi toplamlarının eşit olmasını gerektirir.

Fakat bu durum imkânsızdır. Gerçekten, her $k \in \mathbb{N}^+$ için $a_{n_k} \neq 0$ ve $k_1 < k_2$ olmak üzere,

$$S_{n_{k_1}} = a_{n_0} + a_{n_1} p^{n_1} + a_{n_2} p^{n_2} + ... + a_{n_{k_1}} p^{n_{k_1}} ,$$

$$S_{n_{k_2}} = a_{n_0} + a_{n_1} p^{n_1} + a_{n_2} p^{n_2} + ... + a_{n_{k_1}} p^{n_{k_1}} + ... + a_{n_{k_2}} p^{n_{k_2}}$$

yazılabilir. $S_{n_{k_2}}$ toplamı içinde, $S_{n_{k_1}} < j < S_{n_{k_2}}$ ve $(j,p)=1$ olacak şekilde j sayılarının varlığı nedeniyle, $\Gamma_p\left(S_{n_{k_1}}\right) \neq \Gamma_p\left(S_{n_{k_2}}\right)$ ve dolayısıyla farklı $p-$adik açılımlara sahip olurlar.

Şu halde $\Gamma_p(\lambda)$ sonlu bir $p-$adik açılıma sahip olamaz yani, $\Gamma_p(\lambda) \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$ olmak zorundadır.

Teorem 4.4.2. $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ bir $p-$adik Liouville sayısı ise, $\Gamma_p(\lambda)$ transandanttır.

İspat: $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ bir $p-$adik Liouville sayısı ise,

$$\liminf_{n\to\infty} \sqrt[n]{|n-\lambda|_p} = 0$$

olacağından, $\forall \varepsilon > 0$ için, $0 < |\lambda - z_n|_p^{1/n} < \varepsilon$ olacak biçimde bir $(z_n) \subset \mathbb{N}$ dizisi vardır.

Burada $(z_n) \subset \mathbb{N}$ olduğundan, her $n \in \mathbb{N}$ için, $\Gamma_p(z_n) \in \mathbb{Z}$'dir.

Diğer taraftan Γ_p fonksiyonunun sağladığı bilinen

$$|\Gamma_p(x) - \Gamma_p(y)|_p \leq |x-y|_p \ , \ (\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_p)$$

eşitsizliği ile

$$|\Gamma_p(\lambda) - \Gamma_p(z_n)|_p^{1/n} \leq |\lambda - z_n|_p^{1/n} < \varepsilon$$

yazılabilir.

Şimdi $\Gamma_p(\lambda)$'nın cebirsel olamayacağını gösterelim.

Eğer $\Gamma_p(\lambda)$, derecesi m olan bir cebirsel bir sayı olsaydı, $p-$adik Liouville teoremine göre, $H\left(\frac{a}{b}\right) := \max\{|a|, |b|\}$ olmak üzere,

$$\left|\Gamma_p(\lambda) - \frac{a}{b}\right|_p < \frac{1}{H\left(\frac{a}{b}\right)^{m+1}}$$

eşitsizliğinin $\mathbb{Q}$ içinde sonlu sayıda çözümü olurdu. Bu çözümler,

$$\frac{a_1}{b_1}, \frac{a_2}{b_2}, \ldots, \frac{a_N}{b_N}$$

olsun.

$M = \max_{1 \le i \le N} \left\{ H\left(\frac{a_i}{b_i} \right) \right\}$ olarak tanımlayalım. Buna göre,

$$\left| \Gamma_p(\lambda) - x \right|_p < \frac{1}{M^{m+1}}$$

eşitsizliği $\mathbb{Q}$ içinde sonlu sayıda çözüme sahip olur.

$\varepsilon = \frac{1}{M}$ seçildiğinde, $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ bir $p-$adik Liouville sayısı olduğundan, $\forall\, n \ge N_0$ için,

$$\left| \lambda - z_n \right|_p < \frac{1}{M^n}$$

olacak biçimde bir $N_0(\varepsilon)$ doğal sayısı bulunabilir. Şimdi Γ_p fonksiyonunun sağladığı

$$\left| \Gamma_p(x) - \Gamma_p(y) \right|_p \le |x - y|_p \ , \ \left(\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_p \right)$$

eşitsizliği kullanılırsa, $\forall\, n \ge N_0$ için,

$$\left| \Gamma_p(\lambda) - \Gamma_p(z_n) \right|_p \le \left| \lambda - z_n \right|_p < \frac{1}{M^n}$$

bulunur. Teorem 4.4.1'e göre, $\Gamma_p(\lambda)$ sonsuz bir $p-$adik açılıma sahip olduğundan, söz konusu eşitsizlik nedeniyle $\Gamma_p(z_n)$'nin sonlu sayıda değerler alamayacağı açıktır.

Böylece, $\forall\, n \ge \max\{N_0, m+1\}$ için,

$$\left| \Gamma_p(\lambda) - \Gamma_p(z_n) \right|_p < \frac{1}{M^n} \le \frac{1}{M^{m+1}}$$

eşitsizliğinin $\mathbb{Z}$'de ve dolayısıyla $\mathbb{Q}$'da sonsuz sayıda çözümü vardır.

O halde, $\Gamma_p(\lambda)$ cebirsel olamaz yani, transandanttır.

Teorem 4.4.3. $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ ve (z_n) çift doğal sayılardan oluşan bir dizi olsun. Eğer bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, her $n \geq N_0$ için,

$$0 < |\lambda - z_n|_p^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $N_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa,

i. λ bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

ii. $\Gamma_p(\lambda)$ bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

İspat:

i. Hipotez ve tanımdan açıktır.

ii. Teorem 4.4.1 ile $\Gamma_p(\lambda) \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$'dir. Γ_p $p-$adik Gamma fonksiyonu için sağlanan,

$$|\Gamma_p(x) - \Gamma_p(y)|_p \leq |x-y|_p \ , \ (\forall x, y \in \mathbb{Z}_p)$$

eşitsizliği ve teoremin hipotezi kullanılırsa, herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, her $n \geq N_0$ için,

$$|\Gamma_p(\lambda) - \Gamma_p(z_n)|_p^{\frac{1}{n}} \leq |\lambda - z_n|_p^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

eşitsizliği doğrulanacak şekilde bir $N_0(\varepsilon)$ sayısı bulunabilir. Böylece her $n \geq N_0$ için,

$$|\Gamma_p(\lambda) - \Gamma_p(z_n)|_p^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

olduğu görülür. (z_n) çift doğal sayıların bir dizisi olduğundan $\Gamma_p(z_n) \in \mathbb{N}$'dir.

Diğer taraftan $\Gamma_p(\lambda) \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$ ve $\Gamma_p(z_n) \to \Gamma_p(\lambda)$, $(n \to \infty)$ olduğu için, $\Gamma_p(z_n)$ sonsuz bir doğal sayı dizisidir. O halde,

$$\liminf_{x \to \infty} |\Gamma_p(\lambda) - n|_p^{\frac{1}{n}} = 0$$

olur, yani $\Gamma_p(\lambda)$ bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu çalışmada aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1) $(a_n) \subset \mathbb{Z}_p$ dizisi, her n için,

$$\nu_p(a_n) < \nu_p(a_{n+1}) \tag{4.1}$$

ve sabit bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $n > n_0(\varepsilon)$ için,

$$\nu_p(a_{n+1}) \geq n^{1+\varepsilon} \tag{4.2}$$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} a_n$$

serisi bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

2) Bir $(a_n) \subset \mathbb{Z}^+$ dizisi, her n için,

$$\nu_p(a_n) < \nu_p(a_{n+1}) \tag{4.5}$$

ve sabit bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $n > n_0(\varepsilon)$ için,

$$\nu_p(a_{n+1}) \geq n^{1+\varepsilon} \tag{4.6}$$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde, (a_n), bir $p-$adik Liouville dizisidir.

3) Bir $(a_n) \subset \mathbb{Z}^+$ dizisi, herhangi bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $n > n_0(\varepsilon)$ için,

$$0 < |a_n|_p^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

koşulunu sağlasın. Bu takdirde,

i. $\alpha = \sum_{k=1}^{\infty} a_k$ bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

ii. (a_n) bir $p-$adik Liouville dizisidir.

4) $K\langle x\rangle$'de formal serilerden oluşan (z_n) dizisi, her n için,

$$\deg(z_{n+1}) < \deg(z_n) < 0 \tag{4.9}$$

ve sabit bir $\varepsilon > 0$ verildiğinde, $n > n_0(\varepsilon)$ için,

$$\deg(z_{n+1}) \le -n^{1+\varepsilon} \tag{4.10}$$

koşullarını sağlasın. Bu takdirde,

$$\alpha = \sum_{n=1}^{\infty} z_n$$

serisi bir Liouville sayısıdır.

5) $\lambda \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$ ise, $\Gamma_p(\lambda) \in \mathbb{Z}_p \setminus \mathbb{N}$'dir.

6) $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ bir $p-$adik Liouville sayısı ise, $\Gamma_p(\lambda)$ transandanttır.

7) $\lambda \in \mathbb{Z}_p$ olsun. Eğer bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde, çift doğal sayılardan oluşan bir (z_n) dizisi ve her $n \ge N_0$ için,

$$0 < |\lambda - z_n|_p^{\frac{1}{n}} < \varepsilon$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $N_0(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa,

i. λ bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

ii. $\Gamma_p(\lambda)$ bir $p-$adik Liouville sayısıdır.

5.2. ÖNERİLER

Bu çalışmada non-Arşimedyan cisimler olan $p-$adik sayılar ve fonksiyonlar cisminde Liouville sayılarının bazı özellikleri verilmiştir. Ayrıca bu cisimlerde Liouville sayısı tanımı ve bununla ilgili kriterler elde edilmiştir. Çalışmanın son kısmında klasik Gamma Fonksiyonunun $p-$adik sayılar cismindeki karşılığı olan $p-$adik Gamma fonksiyonunun Liouville sayılarındaki değerleri tartışılmıştır. Bu çalışmadan hareketle aşağıdaki öneriler verilebilir:

1) Erdös Teoreminin non-Arşimedyan durumdaki karşılıkları olan Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.3.2'de verilen ve belli bir n göstergecinden sonra sağlanması istenen (4.1), (4.2) ve (4.9), (4.10) koşulları zayıflatılarak sonsuz sayıda n göstergeci için sağlanması durumunda söz konusu teoremlerin doğruluğu araştırılabilir.

2) Teorem 4.2.1 ve Teorem 4.2.2'de verilen $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serileri için hipotezdeki $a_n \in \mathbb{Z}^+$ koşulu yerine, daha genel olan $a_n \in \mathbb{Z}_p$ koşulu alındığında aynı sonuçların elde edilip edilemeyeceği araştırılabilir.

3) $p-$adik Gamma fonksiyonunun Liouville sayılarındaki değerleri tartışılmıştır. Benzer değerlendirmeler $p-$adik Gamma fonksiyonunun $q-$genişlemesi için incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Baker, A., “Transcendental Number Theory”, Cambridge University Press, Cambridge,147 s., (1975).

[2] Koblitz, N., ‘‘ $p-$adic Numbers, $p-$adic Analysis, and Zeta Functions’’, Springer-Verlag, New York, 122 s., (1984).

[3] Vladimirov, V.S., Volovich, I. V. and Zelenov, E. I., “ $p-$adic Analysis and Mathematical Physics”, World Scientific, Singapore, s.319, (1998).

[4] Hančl, J., ‘‘Liouville sequences’’, Nagoya Mathematical Journal, 172 , 173-187, (2003).

[5] Morita, Y., ‘‘A $p-$adic analogue of the $\Gamma-$function’’, J. Fac. Science Univ. Tokyo, 22, 225-266, (1975).

[6] Mahler, K., ‘‘Zur approximation der exponentialfunktion und des logarithmus’’, Teil II, Journal Fur Die Reine Und Angewandte Mathematik, 166, 137-150, (1932).

[7] Leveque, W. J., ‘‘On Mahler's $U-$numbers’’, The Journal of the London Mathematical Society, 28, 220-229, (1953).

[8] Alniaçik, K., “On U_m-numbers”, Proceedings of the American Mathematical Society, 85, No. 4, 499-505 (1982).

[9] Koksma, J. F., ‘‘Über die Mahlersche kIasseneinteilung der transzendenten zahlen und die approximation komplexer zahlen durch algebraische zahlen’’, Monatshefte für Mathematik und Physik, 48, 176- 189, (1939).

[10] Xin, X. Long, ‘‘Mahler's classification of $p-$adic numbers’’, Pure and Applied Mathematics, 5, 73-80, (1989).

[11] Mahler, K., “Über eine klasseneinteilung der $p-$adischen zahlen”, Mathematica (Zutphen) 3B, 177-185, (1935).

[12] Schlickewei, H. P., “ $p-$adic $T-$numbers do exist”, Acta Arithmetica, 39 No.2, 181- 191. (1981).

[13] Clark, D.N., ‘‘A note on the $p-$adic convergence of the solutions of linear differential equations’’, Proceedings of the American Mathematical Society, Vol. 17, No.1, 262-269 (1966).

[14] Put, M. van der and Taelman, L., ‘‘Local $p-$adic differential equations’’, $p-$Adic Mathematical Physics, AIP Conf. Proc., 826, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 291-297, (2006).

[15] Adams, W. W., “Transcendental numbers in the $p-$adic domain”, Amer. J. Math.,V. 88, 279-308 (1966).

[16] Nishioka, K., ‘‘ $p-$adic transcendental numbers’’, Proceedings of the American Mathematical Society, 108, No.1, 39-41, (1990).

[17] Beresnevich, V.V., Bernik, V.I. and Kovalevskaya, E.I., ‘‘On approximation of $p-$adic numbers by $p-$adic algebraic numbers’’, Journal of Number Theory 111, 33-56 (2005).

[18] Chaichana, T., Komatsu, T. and Laohakosol, V., ‘‘Liouville numbers in the non-archimedean case’’, Publicationes Mathematicae Debrecen, 77/1-2, 39-63 (2010).

[19] Menken, H., ‘‘An investigation on $p-$adic $U-$numbers’’, İstanbul Üniv. Fen Fak. Mat. Derg. 59 (2000), 111-143 (2001).

[20] Menken, H. and Mamedov, Kh. R., ‘‘Point on curves whose coordinates are $p-$adic $U-$numbers’’, $p-$Adic Mathematical Physics, AIP Conf. Proc., 826, Amer. Inst. Phys., Melville, NY, 267-273, (2006).

[21] Bugeaud, Y., “Approximation by Algebraic Numbers”, Cambridge University Press, Cambridge, 274 s., (2007).

[22] Erdös, P., ‘‘Some problems and results on the irrationality of the sum of infinite series’’, Journal of Mathematical Sciences, 10, 1-7, (1975).

[23] Diamond, J., “The $p-$adic log gamma function and $p-$adic Euler constants”, Transactions of the American Mathematical Society,Vol. 233, 321–337, (1979).

[24] Barsky, D., “On Morita's $p-$adic Gamma function”, Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society, Vol. 89 No. 1, 23-27 (1981).

[25] Gross, B.H. and Koblitz, N., ‘‘Gauss sums and the $p-$adic $\Gamma-$function’’, The Annals of Mathematics, Second Series, Vol. 109, No. 3, 569-581, (1979).

[26] Cohen, H. and Friedman, E., “Raabe’s formula for $p-$adic Gamma and Zeta functions”, Annales de l’Institut Fourier, Vol. 58, No. 1, 363–376, (2008).

[27] Shapiro, I., ‘‘Frobenius map and the $p-$adic gamma function’’, Journal of Number Theory, 132, No. 8, 1770-1779, (2012).

[28] Erdös, P., ‘‘Representations of real numbers as sums and products of Liouville numbers’’, Michigan Mathematical Journal, 9, 59-60, (1962).

[29] Rieger, G. J., ‘‘Uber die lösbarkeit von gleichungssystemen durch Liouville zahlen’’, Archiv der Mathematik, 26, 40-43, (1975).

[30] Gouvêa, F.Q., “ $p-$adic Numbers An Introduction”, Springer-Verlag, Berlin, 298 s., (1997).

[31] Schikhof, WH., “Ultrametric Calculus: An Introduction to $p-$adic Analysis”, Cambridge University Press,306 s., (1984).

[32] Katok, S., ‘‘ $p-$adic Analysis Compared with Real’’, AMS/MASS, Student Mathematical Library, Vol. 37, Providence, 152 s., (2007).

[33] Artin, E., “The Gamma Function”, Holt, Rinehart and Winston, New York, 39 s., (1964).

[34] Mahler, K., ‘‘On a theorem of Liouville in fields of positive characteristic’’, Canadian Journal of Mathematics, 1, 397–400, (1949).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Abdulkadir AŞAN

Doğum Tarihi: 20.01.1978

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Lise/Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	Fatih Lisesi	1991-1994
Lisans	Matematik	Akdeniz Üniversitesi	1996-2002
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2004-2008

ESERLER LİSTESİ

A-Makaleler:

1. H. Menken and A. Aşan, ‘‘Recurrent Relations for the Coefficients of Some $p-$Adic Differential Equations’’, *Int. Journal of Math. Analysis*, Vol. 4, no. 23, pp.1145-1152 (2010).

2. H. Menken and A. Aşan, ‘‘On Some Properties of Liouville Numbers in the non-Archimedean Case’’, *European Journal of Pure and Applied Mathematics*, vol. 6, no. 2, pp. 239–246, (2013).

3. H. Menken and A. Aşan, ‘‘On Liouville Sequences in the Non-Archimedean Case’’, *Chinese Journal of Mathematics,* Vol. 2014, Article ID 813924, pp.1-6 (2014).

B-Bildiriler:

1. H. Menken ve A. Aşan, "Recursive relations on the coefficients of some $p-$adic differential equations", *The 20. International Congress of Jangjeon Mathematical Society*, Bursa, Turkey, 2008.

2. A. Aşan ve H. Menken, ‘‘On the Erdos's theorem in the non-Archimedean case’’, *International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications,* Mersin, Turkey, 2012.