AĞIRLIKLI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

ZEHRA KURTDİŞİ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
TEMMUZ – 2014

AĞIRLIKLI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

ZEHRA KURTDİŞİ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. MEHMET KÜÇÜKASLAN

MERSİN
TEMMUZ– 2014

Zehra KURTDİŞİ tarafından Doç.Dr.Mehmet KÜÇÜKASLAN danışmanlığında hazırlanan " Ağırlıklı İstatistiksel Yakınsaklık" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

Doç. Dr. İlhan DAĞADUR

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 11.../08./2014 tarih ve 2014..17..../...T09..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

T.C.

Doç.Dr.Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

AĞIRLIKLI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Zehra KURTDİŞİ

ÖZ

İstatistiksel yakınsaklık kavramı 1951 yılında ilk kez Fast ve Steinhaus tarafından tanımlanmış ve bu tarihten itibaren üzerinde birçok matematikçinin çalıştığı bir konu haline gelmiştir.

Küçükaslan tarafından 2012 yılında istatistiksel yakınsaklık metodunun bir genellemesi olan Ağırlıklı İstatistiksel Yakınsaklık metodu aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır:

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere her $n \in \mathbb{N}$ için (p_n) negatif olmayan reel sayıların bir dizisi öyle ki, $p_n \neq 0$ ve $p_1 > 0$ için,

$$P_n = p_1 + p_2 + ... + p_n \text{ ve } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{P_n} = 1$$

olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ için;

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \left| \left\{ k : k \leq n,\ p_k \left| x_k - l \right| \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise (x_n) dizisi $l \in \mathbb{R}$ sayısına ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_n \to l\left(S_{\overline{N}}\right)$ biçiminde gösterilir.

Bu tezde genel olarak ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık ile Nörlund ve Riesz toplanabilme metotları kıyaslanacak ve ağırlıklı istatistiksel yakınsaklığın temel özellikleri verilecektir. Ayrıca, ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık ile istatistiksel yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: İstatistiksel yakınsaklık; Doğal yoğunluk; Dizilerde toplanabilme; Nörlund toplanabilme; Riesz toplanabilme.

Danışman: Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN Matematik Anabilim Dalı, Mersin Üniversitesi.

WEIGHTED STATISTICAL CONVERGENCE

Zehra KURTDİŞİ

ABSTRACT

The concept of statistical convergence was first introduced by Fast and Steinhaus in the year 1951. Since then, this concept has been studied by many researchers.

The concept of statistical convergence is generalized by Küçükaslan in 2012 and is called weighted statistical convergence. The weighted statistical convergence is described in the following way:

Let $\mathbb{N}$ be the set of all natural numbers. Let (p_n) be a sequence of nonnegatif numbers such that

$$P_n = p_1 + p_2 + ... + p_n \text{ and } \lim_{n\to\infty} \frac{n}{P_n} = 1$$

where $p_n \neq 0$ and $\mathrm{p}_1 > 0$ for all $n \in \mathbb{N}$.

In this instance, a sequence (x_n) is said to be weighted statistical convergence to $l \in \mathbb{R}$ if for every $\varepsilon > 0$,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \left|\left\{k : k \leq n,\ p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

hold. It is denoted by $x_n \to l\left(S_{\overline{N}}\right)$.

In this paper; Generaly, Nörlund and Riesz summability methods with weighted statistical convergence compared and the basic properties of weighted statistical convergence are given. We also investigated the relationship between statistical convergence with weighted statistical convergence.

Key Words: Statistical convergence; Natural density; Summability of sequences; Nörlund summability; Riesz summability.

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Department of Mathematics, Mersin University.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmamın belirlenmesi ve yürütülmesi sürecinde bana yardımcı olan, bilgi ve tecrübelerinden her zaman yararlandığım saygıdeğer hocam; Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür eder, saygılarımı sunarım.

Ayrıca hayatımın her aşamasında bana maddi ve manevi destek olan hayat boyu her türlü sıkıntımda yanımda yer alan ve çalışmalarım esnasında bana anlayış gösteren haklarını ödeyemeyeceğim sevgili aileme teşekkür etmeyi bir borç bilirim.

Zehra KURTDİŞİ

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	: Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{N}$	: Doğal Sayılar Kümesi
ℓ_∞	: Sınırlı Diziler Uzayı
c	: Yakınsak Diziler Uzayı
δ	: Yoğunluk fonksiyonu
δ_A	: A-Yoğunluk fonksiyonu
δ(K)	: K kümesinin doğal yoğunluğu
$\lvert K \rvert$	: K kümesinin eleman sayısı
K^c	: K kümesinin tümleyeni
$a.a.k.$	: Hemen hemen her k
$x=(x_n)$	: Reel sayıların bir dizisi
S	: İstatistiksel yakınsak diziler uzayı
st	: İstatistiksel yakınsama
$S_{\overline{N}}$	: Ağırlıklı istatistiksel yakınsak diziler uzayı
$(C,1)$	: Cesaro toplanabilme
$N(p)$	: Nörlund toplanabilme
$\overline{N}(p)$	: Riesz toplanabilme
$st-N(p)$	: İstatistiksel Nörlund yakınsama
ω	: Tüm diziler uzayı
P_n	$:= p_1+p_2+\ldots+p_n$
$P_n \approx n$	: $\exists m_1, m_2>0 \ \ni \ m_1 n \le P_n \le m_2 n$
$A-st$	: A-İstatistiksel yakınsama
$st-N(p)\ a.a.n.$	: $st-N(p)$ anlamında hemen hemen her n

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı matematiğin en temel kavramlarından biri olup noktasal yakınsaklık, düzgün yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, ölçüsel yakınsaklık v.b. gibi birbirinden farklı yakınsaklık türleri vardır. Özellikle, İstatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlandığı 1951 yılından bu yana üzerinde birçok matematikçinin çalıştığı bir konu haline gelmiştir[1],[2]. Zaman içerisinde istatistiksel yakınsaklık kavramı matematiğin çeşitli alt dallarına uygulanmış ve bu kavramın birçok önemli özelliği verilmiştir [1],[3],[4],[5].

Reel ya da kompleks terimli dizilerde istatistiksel yakınsaklık kavramı esasen doğal sayıların alt kümelerinin asimptotik yoğunluğuna bağlıdır [3].

$A=(a_{nk})$ regüler bir matris olmak üzere $K\subseteq\mathbb{N}$ kümesinin A-yoğunluğu,

$$\delta_A\left(K\right):=\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\chi_K(k)$$

biçiminde tanımlanmıştır [5].

Eğer, keyfi $\varepsilon>0$ ve $l\in\mathbb{R}$ için $K\left(n,\varepsilon\right)=\left\{k:k\le n,\left|x_k-l\right|\ge\varepsilon\right\}$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{nk}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)=0$$

ise $\left(x_n\right)$ dizisi l sayısına A-istatistiksel yakınsaktır denir ve $x_n\to l\left(A-st\right)$ biçiminde gösterilir.

Eğer $A=C_1$ Cesaro matrisi seçilirse A-yoğunluk asimptotik (doğal) yoğunlukla, A-st yakınsama ise st-yakınsama ile çakışır.

Bu çalışmada, $A=(a_{nk})$ matrisi olarak $p=(p_n)$ negatif olmayan tamsayıların $p_n\neq0$ ve $p_1>0$ koşulunu sağlayan bir dizisi için Nörlund ve Riesz matrisleri göz önüne alınacaktır. Elde edilecek yeni metotlar $st-N\left(p\right)$ ve $S_{\overline{N}}$ sembolleriyle gösterilerek diğer toplanabilme metotlarıyla ve istatistiksel yakınsaklıkla ilişkisi incelenecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Toplanabilme teorisinin önemli problemlerinden biri dizilerin yakınsaklık probleminin incelenmesidir. Bu alandaki çalışmalar Leonhard Euler (1707-1789)'e kadar dizilerin Cauchy anlamında yakınsaklığını araştırmakla sınırlı kalmasına rağmen, özellikle Cauchy anlamında yakınsak olan dizilerin kümesinin farklı anlamlarda genişletilmesi problemi günümüzde oldukça önemlidir.

(x_n) reel yada kompleks terimli dizisi verilsin. Bu (x_n) dizisinin $l \in \mathbb{R}$ 'ye Cauchy anlamında yakınsaklığı aşağıdaki biçimde tanımlanır;

Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki $\forall n \geq n_0$ için $|x_n - l| < \varepsilon$ sağlanıyor ise $x = (x_n)$ dizisine l sayısına 'Cauchy anlamında' yakınsaktır denir.

Şimdi 1 ve -1 gibi farklı iki yığılma noktasına sahip $x = (x_n) = \left((-1)^n\right)$ dizisini göz önüne alalım. Açıktır ki bu dizi Cauchy anlamında yakınsak değildir.

Eğer $x = (x_n) = \left((-1)^n\right)$ dizisinin terimleri yardımıyla

$$s_n := \frac{x_1 + x_2 + \ldots + x_n}{n} \tag{1}$$

dizisi tanımlanırsa

$$s_n := \begin{cases} 0, & n \text{ çift}, \\ -\dfrac{1}{n}, & n \text{ tek}, \end{cases}$$

olduğundan $s = (s_n)$ dizisi 0 noktasına Cauchy anlamında yakınsaktır. Yani, (x_n) dizisi yakınsak olmamasına rağmen (s_n) dizisi 0'a yakınsaktır.

(1)'de verilen dizi bir matris ile de ifade edilebilir. Bu bakış açısıyla toplanabilme teorisinde reguler matrisler tanımlanmıştır. Reguler matrisler, yakınsak dizileri yakınsak dizilere çeviren ve limiti koruyan matrislerdir [6].

Burada esasen yapılan işlem Cauchy anlamında yakınsak olmayan dizilerin bir işleme tabi tutulup sonra Cauchy anlamda yakınsaklığının incelenmesidir. İşlemin anlamlı olabilmesi yakınsak her diziyi yakınsak diziye ve en az bir ıraksak diziyi ise yakınsak diziye çevirmesidir.

Temeli pozitif tamsayılarda doğal yoğunluk kavramına dayanan istatistiksel yakınsaklığın Cauchy anlamında yakınsaklığın bir genellemesi olduğu söylenebilir.

İlk defa 1951 yılında Fast [1] ve Steinhaus [2] tarafından (x_n) dizisinin $l \in \mathbb{R}$ 'ye yakınsaklığı uzaklık kavramından yoğunluk kavramına taşınmıştır.

$\wp(\mathbb{N})$ doğal sayıların kuvvet kümesi olmak üzere; $\delta : \wp(\mathbb{N}) \to [0,1]$ fonksiyonu

$$\delta(K) := \lim_{n\to\infty} \frac{|K(n)|}{n} \tag{2}$$

biçiminde tanımlansın. Bu taktirde; $\delta(K)$ fonksiyonuna, eğer limiti varsa $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesinin asimptotik (doğal) yoğunluğu denir. Burada $|K(n)|$ ile $K(n) = \{k : k \le n,\ k \in K\}$ kümesinin elaman sayısı gösterilmektedir.

1951 yılında Fast [1] ve Steinhaus [2] birbirinden bağımsız olarak $x = (x_n)$ dizisinin $l \in \mathbb{R}$ 'ye yakınsaklığını (2) de verilen asimptotik yoğunluğu kullanarak aşağıdaki biçimde tanımlamışlardır. Buna göre $K(n,\varepsilon) = \{k : k \le n,\ |x_k - \ell| \ge \varepsilon\}$ olmak üzere

$$\delta(K(n,\varepsilon)) = 0 \tag{3}$$

dir. (3)'de verilen yeni yakınsama "istatistiksel yakınsaklık" olarak adlandırılmış ve $x_n \to l(st)$ ya da $\lim_{n\to\infty} x_n = l(st)$ biçiminde gösterilmiştir.

Zaman içerisinde istatistiksel yakınsaklık kavramı matematiğin temel alanlarıyla olan ilişkisi nedeniyle yaklaşık yarım asırdır birçok matematikçinin ilgilendiği önemli bir çalışma alanı haline gelmiş ve bu kavram Toplanabilme Teorisi ([7], [8]), Fourier Serileri ([9]), Fonksiyonel Analiz ([10], [11], [12], [13], [14]), Sayılar Teorisi ([15]), Ölçü Teorisi ([16], [17]), İstatistik ([18]), Optimizasyon Teorisi ([19]) ve Yaklaşım Teorisi ([20]), gibi alanlara uygulanmıştır.

Ayrıca,

$C_1 = (c_{nk})$ Cesaro matrisi olmak üzere,

$$\begin{aligned} \lim_{n\to\infty} x_n = l\,(st) &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|x_k - l\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0 \\ &\Leftrightarrow \ \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{\infty} \chi_{K(n,\varepsilon)}\left(k\right) = 0 \\ &\Leftrightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \lim_{n\to\infty} \left(C_1 \chi_{K(n,\varepsilon)}\right)_n = 0 \end{aligned}$$

şeklinde Cesaro matrisi yardımıyla istatistiksel yakınsamaya denk bir tanım elde edilebilir [7]. Cesaro matrisi regüler olduğu için istatistiksel yakınsaklık aslında dizi uzayında regüler bir toplanabilme metodu verir.

Buradan yola çıkarak Buch 1953 yılında [3] çalışmasında Cesaro matrisi yerine negatif olmayan özel regüler bir A matrisi alıp istatistiksel yakınsaklığın bir genellemesini yapmıştır. Daha sonra Freedman ve Sember [5] $A-$yoğunluk kavramını tanımlamıştır.

Connor [12], Kolk [21], Miller [16] tarafından $A-$istatistiksel yakınsaklık tanımlanmıştır.

2009'da Karakaya ve Chishti [22] tarafından ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramı tanımlanmıştır.

2012'de Küçükaslan [23] tarafından ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kavramı tekrar ele alınmıştır.

2012'de Mursaleen, Karakaya, Ertürk ve Gürsoy [24] tarafından ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık kullanılarak bazı Korovkin tipi teoremler elde edilmiştir.

Böylece Analizde iyi bilinen bazı klasik sonuçların daha zayıf koşullar altında gerçeklenebileceği gösterilmiştir.

Son yıllarda yapılan çalışmalar ve elde edilen sonuçlar ağırlıklı istatistiksel yakınsaklığın ne kadar önemli olduğunu ortaya açık bir biçimde koymaktadır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bazı temel tanımlar, teoremler ve notasyonlar verilecektir. Öncelikle "Yoğunluk" kavramı verilerek bunun yardımıyla "İstatistiksel Yakınsaklık" kavramı tanımlanacak ve bu yüksek lisans tezinde gerekli olan teoremler hatırlatılacaktır. Daha sonra "A-İstatistiksel Yakınsaklık" , "Cesaro, Nörlund ve Riesz Toplanabilme" metotları ile "Ağırlıklı İstatistiksel Yakınsaklık" hakkında genel bilgiler verilecektir.

3.1. DOĞAL YOĞUNLUK

$\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere $K \subseteq \mathbb{N}$ ve $K(n) := \{k \in K : k \leq n\}$ kümesinin eleman sayısı $|K(n)|$ ile gösterilsin.

Tanım 3.1.1. $K \subseteq \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta(K) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} |K(n)|$$

limiti mevcut ise bu limite K kümesinin "asimptotik yoğunluğu" (veya "doğal yoğunluğu") denir ve $\delta(K)$ sembolü ile gösterilir [4].

Ayrıca, (a_n) pozitif tamsayılarının bir dizisi ve $K = \{a_k : k \in \mathbb{N}\}$ olsun. Eğer, $\delta(K)$ mevcut ise K 'nın doğal yoğunluğu

$$\delta(K) := \lim_{n\to\infty} \frac{n}{a_n} \tag{4}$$

dir [4].

Örneğin: $\delta(\mathbb{N})=1$, $\delta(\{n^2 : n\in\mathbb{N}\})=0$, $\delta(\{k : k \text{ asal sayı}\})=0$,

$$\delta(\{2n : n\in\mathbb{N}\})=\delta(\{2n+1 : n\in\mathbb{N}\})=\frac{1}{2}$$

olduğu (4) den kolayca elde edilir.

Ayrıca, B kümesi doğal yoğunluğa sahip ise, $\delta(\mathbb{N}-B)=1-\delta(B)$ ve $0\leq\delta(B)\leq 1$ olacaktır [4],[5].

Doğal sayıların sonlu her alt kümesinin doğal yoğunluğu sıfırdır. Bunun tersi doğru değildir.

$K\subseteq\mathbb{N}$ olmak üzere eğer $\delta(K)=0$ ise K kümesine sıfır yoğunlukludur denir. Diğer durumlarda K'nın yoğunluğu sıfırdan farklıdır denir ve $\delta(K)\neq 0$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.2. $K\subseteq\mathbb{N}$ olmak üzere K kümesinin alt ve üst yoğunluğu sırasıyla

$$\underline{\delta}(K):=\liminf_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|K(n)\right|,\ \overline{\delta}(K):=\limsup_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|K(n)\right|$$

şeklinde tanımlanır.

Eğer, alt ve üst yoğunluk eşit ise $K\subseteq\mathbb{N}$ nin doğal yoğunluğu vardır ve $\underline{\delta}(K)=\overline{\delta}(K)=\delta(K)$ dır [5].

Örnek 3.1.3. $K=\{1,2,3,...\}$ ise $\underline{\delta}(K)=\overline{\delta}(K)=\delta(K)=1$ dir.

Örnek 3.1.4. $K=\{2,4,6,...\}$ olsun. $\frac{|K(n)|}{n}$ dizisi,

$$\frac{0}{1},\frac{1}{2},\frac{1}{3},\frac{2}{4},\frac{2}{5},\frac{3}{6},\frac{3}{7},...$$

şeklinde ve $\underline{\delta}(K)=\delta(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{|K(n)|}{n}=\frac{1}{2}$ dir.

Şimdi, $\overline{\delta}$ yoğunluk fonksiyonun bazı özelliklerini verelim: $K, M \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer,

i) $\delta(K)$ mevcut ise $\delta(K) = \overline{\delta}(K)$'dır.

ii) $\delta(K) \neq 0$ olması için gerek ve yeter koşul $\overline{\delta}(K) > 0$ 'dır.

iii) $K \subseteq M$ ise $\overline{\delta}(K) \leq \overline{\delta}(M)$'dır.

Uyarı 3.1.5. Her doğal sayı kümesinin alt ve üst asimptotik yoğunluğu vardır, fakat asimptotik yoğunluğu olmayabilir.

Sıradaki örnekte doğal yoğunluğa sahip olmayan bir küme örneği verilecektir.

Örnek 3.1.6. Bir $A \subseteq \mathbb{N}$ kümesi,

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = 1, \\ k + 2^{2n+1}, & 2^{2n} + 1 \leq k \leq 2^{2(n+1)}, n = 0,1,... \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan bir $x = (x_k)$ dizisinin terimlerinden oluşsun. Bu durumda,

$$A = \{1,4,5,6,13,14,15,...,24,49,50,51,...,96,193,194,...384,...\}$$

şeklindedir ve $\frac{|A(n)|}{n}$ dizisinin üst limitini veren alt dizisi,

$$\frac{1}{1}, \frac{4}{6}, \frac{16}{24}, \frac{64}{96}, ... \to \frac{2}{3},$$

alt limitini veren alt dizisi ise

$$\frac{1}{3}, \frac{4}{12}, \frac{16}{48}, \frac{64}{192}, ... \to \frac{1}{3}$$

şeklindedir. Dolayısıyla bu örnekte A kümesinin alt ve üst asimptotik yoğunluğu $\frac{1}{3}$ ve $\frac{2}{3}$ olmasına rağmen asimptotik yoğunluğu yoktur.

3.2. İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

Tanım 3.2.1. $x=(x_n)$ reel (veya kompleks) terimli bir dizi ve $l\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer, $\forall\varepsilon>0$ için

$$\delta\left(\left\{k : k\le n\,,\, |x_k-l|\ge\varepsilon\right\}\right)=0,$$

ise $x=(x_n)$ dizisine l sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l(st)$ sembolü ile gösterilir [1], [2].

İstatistiksel yakınsaklık tanımından da anlaşılacağı gibi, $x=(x_n)$ dizisi bir l sayısına İstatistiksel yakınsak ise, bu durumda l sayısının herhangi bir $\varepsilon>0$ komşuluğunda dizinin sonsuz çoklukta terimi bulunurken bu komşuluğun dışında da, indis kümesinin yoğunluğu sıfır olmak koşulu ile yine diziye ait sonlu veya sonsuz çoklukta terim bulunabilir. Bu durum, istatistiksel yakınsaklığın bilinen anlamdaki yakınsaklıktan daha genel olduğunu gösterir.

Tanım 3.2.1.'den görüleceği gibi yakınsak her dizi istatistiksel yakınsaktır. Yani Cauchy anlamında yakınsak bir dizi için $\left\{k : k\le n, |x_k-l|\ge\varepsilon\right\}$ kümesi $\mathbb{N}$ 'nin sonlu bir alt kümesi olacağından $x=(x_n)$ dizinin $l\in\mathbb{R}$ 'ye istatistiksel yakınsak olduğu açıktır. Yani, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ ise $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l(st)$ dir [8]. Fakat bunun tersi doğru değildir.

Örnek 3.2.2. $x=(x_n)$ dizisi,

$$x_n=\begin{cases} n, & n=m^2, \quad m\in\mathbb{N} \\ 0, & n\ne m^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Her $\varepsilon>0$ için,

$$K(\varepsilon)=\left\{k : k\le n,\, |x_k-0|\ge\varepsilon\right\}=\left\{k : k\le n,\; x_k\ne 0\right\}=\left\{m : m\le \left[\!\left[\sqrt{n}\right]\!\right]\right\}$$

olduğundan $|K|\le\left[\!\left[\sqrt{n}\right]\!\right]$ olur ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k : k \le n,\ x_k \ne 0\right\}\right| \le \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\!\left[\sqrt{n}\right]\!\right]}{n} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla $\left(x_n\right)$ dizisi $l = 0$ ’a istatistiksel yakınsaktır, yani $\lim_{n\to\infty} x_n = 0\,(st)$ dır.

Fakat, bu dizinin sıfırın ε komşuluğu dışında kalan elemanları sonsuz sayıda olduğundan $x = \left(x_n\right)$ dizisi yakınsak değildir.

Yakınsak her dizi sınırlıdır. Fakat, örnek 3.2.2.’den istatistiksel yakınsak bir dizinin sınırlı olması gerekmez. Yani istatistiksel yakınsaklık, sınırlı ve sınırsız ıraksak dizileri de limitleyebilir.

J.A. Fridy 1985 yılında [8] çalışmasında bir dizinin istatistiksel yakınsaması için aşağıdaki önemli karakterizasyonu vermiştir:

Teorem 3.2.3. $x = \left(x_n\right)$ dizisinin bir $l \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter şart $K = \left\{n_k : k \in \mathbb{N}\right\} \subset \mathbb{N}$ için $\delta\left(K\right) = 1$ ve $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = l$ olmasıdır [8].

Kısaca sıfır yoğunluklu indis kümesi dışında (eşdeğer olarak 1 yoğunluklu indis kümesi üzerinde) $\left(x_{n_k}\right)$ dizisi l değerine klasik anlamda yakınsak ise bu durumda $\left(x_n\right)$ dizisi l sayısına istatistiksel yakınsaktır.

Sonuç olarak, istatistiksel yakınsak diziler uzayı, Cauchy anlamında yakınsak diziler uzayını kapsar.

Tanım 3.2.4. $\forall \varepsilon > 0$ için $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir öyle ki $\left\{k \in \mathbb{N} : \left|x_k - x_{n_0}\right| \ge \varepsilon\right\}$ kümesi sıfır yoğunluğa sahip ise $x = \left(x_k\right)$ dizisine istatistiksel Cauchy dizisidir denir. [8].

Klasik yakınsaklıkta olduğu gibi istatistiksel yakınsaklık ve istatistiksel Cauchy dizileri arasında da aşağıdaki teoremde verilen ilişki vardır.

Teorem 3.2.5. Aşağıdaki ifadeler denktir:

i) $x = (x_n)$ istatistiksel yakınsaktır.

ii) $x = (x_n)$ istatistiksel Cauchy dizisidir.

iii) $x = (x_n)$ dizisi için $\delta(\{k : x_k \neq y_k\}) = 0$ olacak şekilde bir yakınsak $y = (y_n)$ dizisi vardır. [8].

Sonuç 3.2.6. Bir $x = (x_n)$ dizisi $l \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsak ise bu durumda $x = (x_n)$ dizisi l sayısına klasik anlamda yakınsayan bir alt diziye sahiptir.

Tez boyunca S sembolü ile istatistiksel yakınsak dizilerin kümesi gösterilerek $S = \{x_n : \exists l \in \mathbb{R} \ni x_n \to l(st)\}$ biçiminde tanımlanacaktır.

3.3. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

J.A.Fridy 1985'te [8] çalışmasında istatistiksel yakınsaklık ile klasik toplanabilme arasındaki ilişkiyi incelenmiştir. Şimdi bu ilişkiyi vermeden önce bazı temel bilgileri hatırlayalım:

$A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi olsun. Eğer, $\forall k > n$ için $a_{nk} = 0$ ise A matrisine üçgensel matris denir. Hem üçgensel hem de $\forall n \in \mathbb{N}$ için $a_{nn} \neq 0$ ise A matrisine üçgen matris denir.

w tüm dizilerin uzayı olsun. X ve Y ise w dizi uzayının iki altkümesi ve $A = (a_{nk})$ reel yada kompleks değerli sonsuz bir matris olsun. $x = (x_k) \in X$ olmak üzere her $n \geq 1$ için,

$$y_n := (Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

dizisi yakınsak ise $y = (y_n) := (Ax)_n$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir.

Eğer, her $x \in X$ için $y = (Ax)_n$ dönüşüm dizisi mevcut ve $y \in Y$ ise $A = (a_{nk})$ matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir.

Bir $x=(x_n)$ dizisi için $(Ax)_n$ dönüşüm dizisi mevcut ve bir l değerine yakınsak ise $x=(x_n)$ dizisi l sayısına $A-$toplanabilir denir ve $A-\lim_{n\to\infty} x_n = l$ biçiminde gösterilir.

X den Y ye tüm matrislerin sınıfı (X,Y) biçiminde gösterilir. Eğer, A matrisi X den Y içine bir matris dönüşümü ise $A\in(X,Y)$ seklinde yazılır.

Tanım 3.3.1. $A=(a_{nk})$ sonsuz matris ve $x=(x_n)$ dizisi verisin. Eğer, $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ olduğunda $\lim_{n\to\infty}(Ax)_n = l$ ise $A=(a_{nk})$ matrisine “regüler matris” denir [25].

Teorem 3.3.2. (Silverman –Toeplitz) $A=(a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul,

i) $\forall n\in\mathbb{N}$ için, $\|A\| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty,$ (1.1)

ii) $\lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0,\ \ k=1,2,...,$ (1.2)

iii) $\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$ (1.3)

olmasıdır [6], [25].

İstatistiksel yakınsaklık ile toplanabilme arasındaki ilişki J. A. Fridy tarafından [8] çalışmasında aşağıda ifade edilen teoremde verilmiştir:

Teorem 3.3.3. Hiçbir matris toplanabilme metodu istatistiksel yakınsaklık metodunu içermez.

Yani, her $x=(x_n)\in S$ için $A-\lim_{n\to\infty} x_n = st-\lim_{n\to\infty} x_n$ olacak biçimde bir A matrisi yoktur [8].

Tanım 3.3.4. $C_1 = (c_{nk})$ matrisi

$$c_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & 0 < k \le n \\ 0, & \textit{diğer durumda} \end{cases}$$

olmak üzere birinci mertebeden Cesaro matrisi olarak adlandırılır.

$C_1 = (c_{nk})$ matrisi regülerdir yani Teorem 3.3.2.'in koşullarını sağladığı açıktır.

Freedman ve Sember 1981 yılında [5] çalışmasında istatistiksel yakınsaklık tanımında $C_1 = (c_{nk})$ Cesaro matrisi yerine negatif olmayan regüler özel bir $A = (a_{nk})$ sonsuz matrisi alarak istatistiksel yakınsaklığı A-istatistiksel yakınsaklığa genişletmişlerdir.

3.4. A-İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK

$x = (x_n)$ reel veya kompleks terimli bir dizi ve $l \in \mathbb{R}$ verilsin. $\forall \varepsilon > 0$ için $K(n,\varepsilon) = \{k : k \le n, \, |x_k - l| \ge \varepsilon\}$ olmak üzere $\chi_{K(n,\varepsilon)}$ ile $K(n,\varepsilon)$ kümesinin karakteristik fonksiyonunu gösterilsin. Yani,

$$\chi_{K(n,\varepsilon)} = \begin{cases} 1, & k \in K(n,\varepsilon) \\ 0, & k \notin K(n,\varepsilon) \end{cases}$$

dır. Bu durumda, $\forall \varepsilon > 0$ için,

$$\lim_{n\to\infty} x_n = l(st) \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} \left(C_1 \chi_{K(n,\varepsilon)} \right)_n = 0$$

olur ki bu durum bir dizinin istatistiksel yakınsamasının aslında $K(n,\varepsilon)$ kümelerinin Cesaro ortalaması olduğunu gösterir. O halde bir A matrisini göz önüne alarak $K \subseteq \mathbb{N}$ nin $A-$istatistiksel yoğunluğunu ve (x_n) dizisinin $A-$istatistiksel yakınsaklığını tanımlanabilir:

Tanım 3.4.1. $A=(a_{nk})$ bir matris ve $K \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer,

$$\delta_A(K) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \chi_{K(n,\varepsilon)}(k)$$

limiti mevcut ise $\delta_A(K)$ sayısına K nın $A-$yoğunluğu denir. Benzer biçimde, (x_n) dizisi ve $l \in \mathbb{R}$ sayısı verildiğinde $K(n,\varepsilon)=\{k : k \le n, |x_k - l| \ge \varepsilon\}$ kümesinin $A-$yoğunluğu sıfır yani,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} \chi_{K(n,\varepsilon)}(k) = 0 \, ,$$

ise (x_n) dizisi $l \in \mathbb{R}$ sayısına $A-$istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $x_n \to l(A-st)$ şeklinde ifade edilir [5], [16], [11].

3.5. İSTATİSTİKSEL NÖRLUND YAKINSAKLIK VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere her $n \in \mathbb{N}$ için (p_n) negatif olmayan reel sayıların $p_n \neq 0$ ve $p_1 > 0$ koşulunu sağlayan bir dizisi öyle ki,

$$P_n = p_1 + p_2 + \ldots + p_n \ , \ (n = 1,2,\ldots)$$

olsun.

Tanım 3.5.1. $x=(x_n)$ reel terimli bir dizi olmak üzere,

$$t_n := \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1} x_k$$

dönüşümüne (x_n) dizisinin Nörlund Dönüşümünü denir [25], [26].

Bu durumda;

i) Eğer, $l \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1} x_k = l \, ,$$

ise (x_n) dizisine $l \in \mathbb{R}$ sayısına $N(p)$ yakınsaktır denir ve $x_n \to l\left(N(p)\right)$ biçiminde gösterilir.

ii) Eğer, $0 < \alpha < \infty$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1} \left|x_k - l\right|^{\alpha} = 0,$$

ise (x_n) dizisine $l \in \mathbb{R}$ sayısına $\alpha - kuvvetli$ $N(p)$ yakınsaktır denir ve $x_n \to l(\alpha - N(p))$ şeklinde gösterilir.

iii) Eğer, her $\varepsilon > 0$ için $K(n,\varepsilon) = \left\{k : k \le n, \left|x_k - \ell\right| \ge \varepsilon\right\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}\delta_{N(p)}(K(n,\varepsilon)) &:= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k\in K(n,\varepsilon)} p_{n-k+1} \\ &= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1} \chi_{K(n,\varepsilon)}(k) = 0\end{aligned}$$

ise (x_n) dizisine $l \in \mathbb{R}$ sayısına istatistiksel $N(p)$ yakınsaktır denir ve $x_n \to l(st - N(p))$ biçiminde gösterilir.

Lemma 3.5.2. $N\left(p\right)$ Nörlund metodunun regüler olması için gerekli ve yeterli koşul $\frac{p_n}{P_n} \to 0$ olmasıdır.

İspat: "Yeter Şart"

$\frac{p_n}{P_n} \to 0$ olsun. Bu durumda Teorem 3.3.2.'nin (Silverman–Toeplitz koşulları) sağlandığını göstermek yeterlidir. $\forall n \in \mathbb{N}$ için,

$$0 \le a_{mn} = \frac{p_{m-n+1}}{P_m} \le \frac{p_{m-n+1}}{P_{m-n+1}} \to 0 \text{ , } \left(m \to \infty\right)$$

dir. Ayrıca, $\forall m \in \mathbb{N}$ için,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left|a_{mn}\right| = \sum_{n=1}^{\infty} a_{mn} = \frac{p_m}{P_m} + \frac{p_{m-1}}{P_m} + \ldots + \frac{p_1}{P_m} = 1$$

dir.

“Gerek Şart”

$N(p)$ Nörlund matrisi regüler olsun. Buradan $a_{m1} \to 0$, $m \to \infty$ dır. O halde,

$$\frac{p_m}{P_m} = a_{m1} \to 0$$

dır. ■

Ayrıca, bu tez boyunca $N(p)$ Nörlund matrisinin regüler olduğu kabul edilecektir.

Lemma 3.5.3. $N(p)$ regüler Nörlund matrisi olsun. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} p_n x^{n-1}$ ve $\sum_{n=1}^{\infty} P_n x^{n-1}$ serileri $|x| < 1$ koşulunu sağlayan $\forall x \in \mathbb{R}$ için yakınsaktır [26].

İspat: $N(p)$ regüler olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{p_n}{P_n} = 0$ sağlanır. Buradan,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{P_{n-1}}{P_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{P_n - p_n}{P_n}$$

$$= \lim_{n\to\infty} (1 - \frac{p_n}{P_n}) = 1$$

dir. Böylece $P(x) = \sum_{n=1}^{\infty} P_n x^{n-1}$ serisi $|x| < 1$'de yakınsaktır.

Ayrıca, $p(x) = (1-x).\sum_{n=1}^{\infty} P_n x^{n-1}$ olduğundan $p(x) = \sum_{n=1}^{\infty} p_n x^{n-1}$ seriside $|x| < 1$'de yakınsaktır. ■

Sonuç 3.5.4. (q_n) negatif olmayan tam sayıların $q_n \neq 0$ ve $q_1 > 0$ koşulunu sağlayan bir dizisi için $Q_n = q_1 + ... + q_n$ olsun.

$q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} q_n x^{n-1}$ ve $Q(x) = \sum_{n=1}^{\infty} Q_n x^{n-1}$ olmak üzere Lemma 3.5.2.'den

$$k(x) = \sum_{n=1}^{\infty} k_n x^{n-1} = \frac{q(x)}{p(x)} = \frac{Q(x)}{P(x)}, \text{ ve } h(x) = \sum_{n=1}^{\infty} h_n x^{n-1} = \frac{p(x)}{q(x)} = \frac{P(x)}{Q(x)}$$

serilerinin $|x| < 1$ 'de yakınsak oldukları görülür.

Ayrıca, $p(x)$, $k(x)$ ve $q(x)$, $h(x)$ serilerinin çarpımından kolayca,

$$k_1 p_n + k_2 p_{n-1} + ... + k_n p_1 = q_n \text{, ve } k_1 P_n + k_2 P_{n-1} + ... + k_n P_1 = Q_n$$

$$h_1 q_n + h_2 q_{n-1} + ... + h_n q_1 = p_n \text{, ve } h_1 Q_n + h_2 Q_{n-1} + ... + h_n Q_1 = P_n$$

eşitlikleri elde edilir.

3.6. RİESZ YAKINSAKLIK VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, Riesz dönüşümü, Riesz yakınsaklık ve α-kuvvetli Riesz yakınsaklık kavramları tanımlanacaktır.

Tanım 3.6.1. $x = (x_n)$ dizisi verilsin. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesini göstermek üzere her $n \in \mathbb{N}$ için (p_n) negatif olmayan reel sayıların $p_n \neq 0$ ve $p_1 > 0$ koşulunu sağlayan bir dizisi öyle ki, $P_n = p_1 + p_2 + ... + p_n$ olmak üzere,

$$t_n := \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_k x_k \ ,$$

dönüşümüne (x_n) dizisinin Riesz Dönüşümü denir [26]. Bu durumda;

i) Eğer, $l \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_k x_k = l \, ,$$

ise (x_n) dizisi $l \in \mathbb{R}$ sayısına Riesz yakınsaktır denir ve $x_n \to l\left(\overline{N}(p)\right)$ biçiminde gösterilir [26].

ii) Eğer, $0 < \alpha < \infty$ ve $l \in \mathbb{R}$ için,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_k . |x_k - l|^{\alpha} = 0 \, ,$$

ise (x_n) dizisine $l \in \mathbb{R}$ sayısına $\alpha - kuvvetli\ \overline{N}(p)$ yakınsaktır denir ve bu durum $x_n \to l\left(\alpha - \overline{N}(p)\right)$ biçiminde gösterilir.

Lemma 3.6.2. $\left(\overline{N},p\right)$ Riesz metodunun regüler olması için gerek ve yeter koşul $P_n \to \infty$, $\left(n \to \infty\right)$ olmasıdır.

İspat: Teorem 3.3.2. koşullarından,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left|a_{mn}\right| = \sum_{n=1}^{\infty}a_{mn} = \frac{p_m}{P_m} + \frac{p_{m-1}}{P_m} + \ldots + \frac{p_1}{P_m} = 1$$

dir.

$\forall n \in \mathbb{N}$ için $P_n \to \infty$, $\left(n \to \infty\right)$ olsun. Bu durumda,

$$a_{mn} = \frac{p_n}{P_m} \to 0$$

olur ki $\left(\overline{N},p\right)$ Riesz matrisi regülerdir.

3.7. AĞIRLIKLI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE ÖZELLİKLERİ

Bu bölümde, m_1, m_2 pozitif reel sabitleri için, $m_1 n \le P_n \le m_2 n$ eşitsizliğini sağlayan $\left(p_n\right)$ dizisi ile ilgilenilecek ve bu durum $P_n \approx n$ sembolü ile gösterilecektir.

Tanım 3.7.1. $P_n \approx n$ olmak üzere $x = \left(x_n\right)$ dizisi ve bir $l \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\left|\left\{k : k \le n, p_k\left|x_k - l\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0,$$

ise $\left(x_n\right)$ dizisine $l \in \mathbb{R}$ sayısına ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır denir ve bu durum $x_n \to l\left(S_{\overline{N}}\right)$ biçiminde gösterilir [23].

Ağırlıklı İstatistiksel yakınsak dizi uzayı $S_{\overline{N}}$ sembolü ile gösterilir ve

$$S_{\overline{N}} := \left\{x = \left(x_n\right) : \exists l \in \mathbb{R} \ni \lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\left|\left\{k : k \le n, p_k\left|x_k - l\right| \ge \varepsilon\right\}\right| = 0\right\}$$

şeklinde tanımlanır.

Uyarı 3.7.2. Ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık tanımında $\delta(\mathbb{N})=1$ olması için, $\lim_{n\to\infty}\frac{n}{P_n}=1$ olmasıdır. Yani $P_n \approx n$ koşulu doğal bir koşuldur. Eğer, $P_n \approx n$ olacak şekilde seçilmezse;

i) $(p_k)=\frac{1}{k}$ için $\delta(\mathbb{N})=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\right)^{-1}\left|\{k : k\le n, k\in\mathbb{N}\}\right|=\lim_{n\to\infty}(\ln n)^{-1}.n=\infty$

ii) $(p_k)=k$ için $\delta(\mathbb{N})=\lim_{n\to\infty}\left(\sum_{k=1}^{n}k\right)^{-1}\left|\{k : k\le n, k\in\mathbb{N}\}\right|=\lim_{n\to\infty}\left(\frac{n.(n+1)}{2}\right)^{-1}.n=0$

elde edilir. Bu ise seçilen bazı (p_n)'ler için $\delta(\mathbb{N})\neq 1$ olması demektir. Bu da doğal sayıların doğal yoğunluğunun 1 olması ile çelişir.

Tanım 3.7.3. Bir $u(n)$ önermesi verilsin ve $A=\{n\in\mathbb{N} : u(n)\ yanlış\}$ olsun. Eğer, A kümesinin doğal yoğunluğu (veya $st-N(p)$ yoğunluğu) sıfır ise $u(n)$ önermesine hemen hemen her n için sağlanır denir ve $st-a.a.n.$ (veya $st-N(p)a.a.n.$) biçiminde gösterilir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. İSTATİSTİKSEL NÖRLUND YAKINSAKLIK

Aşağıdaki teoremde $N(p)$ yakınsaklık ile $st-N(p)$ yakınsaklık arasındaki ilişki verilecektir:

Teorem 4.1.1. (x_n) reel ya da kompleks terimli bir dizi ve $l \in \mathbb{R}$ olsun. Eğer, $x_n \to l(N(p))$, $(n \to \infty)$ ise $x_n \to l(st-N(p))$ dir.

İspat: Eğer, (x_n) dizisi $l \in \mathbb{R}$ sayısına $N(p)$ yakınsak ise tanımdan $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1} |x_k - l| = 0$ olduğu açıktır. Her $\varepsilon > 0$ için $K(n,\varepsilon) = \{k : k \le n, |x_k - \ell| \ge \varepsilon\}$ biçiminde seçilirse

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}|x_k - l| &= \frac{1}{P_n}\left(\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} + \sum_{k\notin K(n,\varepsilon)}\right) p_{n-k+1}|x_k - l| \\
&\ge \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} p_{n-k+1}|x_k - l| \\
&\ge \varepsilon \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} p_{n-k+1} \\
&= \varepsilon \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer, yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limit alınırsa $\delta_{N(p)}\left(K(n,\varepsilon)\right) = 0$ olduğu elde edilir. Yani, $\left(x_n\right)$ dizisi $l \in \mathbb{R}$ sayısına $st-N(p)$ yakınsaktır. ■

Sıradaki teoremde $\alpha - kuvvetli$ $N(p)$ yakınsama ($\alpha - N(p)$) ile $st-N(p)$ yakınsaklık arasındaki ilişki verilecektir:

Teorem 4.1.2. (x_n) reel ya da kompleks terimli dizisi ve $l \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. Eğer, $x_n \to l(\alpha - N(p))$, $(0 < \alpha < \infty)$ ise $x_n \to l(st - N(p))$ dır.

İspat: (x_n) dizisinin bir $l \in \mathbb{R}$ sayısına $\alpha - N(p)$ yakınsak olduğunu kabul edelim. Bu durumda, $\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1} \left|x_k - l\right|^{\alpha} = 0$ dır. Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için $K(n,\varepsilon) = \left\{k : k \le n, \left|x_k - \ell\right| \ge \varepsilon\right\}$ olmak üzere,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\left|x_k - l\right|^{\alpha} &= \frac{1}{P_n}\left(\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} + \sum_{k\notin K(n,\varepsilon)}\right) p_{n-k+1}\left|x_k - l\right|^{\alpha} \\
&\ge \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} p_{n-k+1}\left|x_k - l\right|^{\alpha} \\
&\ge \varepsilon^{\alpha}\frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} p_{n-k+1} \\
&= \varepsilon^{\alpha}\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer, eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limit alınırsa $\delta_{N(p)}\left(K(n,\varepsilon\right) = 0$ bulunur. Böylece ispat tamamlanır. ■

Sonuç 4.1.3. Eğer $x_n \to l$, $(n \to \infty)$ ise $x_n \to l(st - N(p))$ dır.

İspat: (N, p_n) regüler toplanabilme metodu olduğundan $x_n \to l(N(p))$ dir. Teorem 4.1.1 den ispat tamamlanır. ■

Uyarı 4.1.4. Teorem 4.1.1. , Teorem 4.1.2. ve sonuç 4.1.3.'ün tersi doğru değildir. Bunu bir örnekle görelim:

Örneğin, Genelliği kaybetmeksizin $\alpha = 1$, ve $\forall n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ olduğunu kabul edelim. Ayrıca, $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} m^3, & n = m^2, m \in \mathbb{N}, \\ 0, & n \ne m^2, \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O halde,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{m=1}^{\sqrt{n}} 1$$

olduğundan $x_n \to 0(st - N(p))$ dır. Fakat,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1.\left|x_k - 0\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{[\![\sqrt{n}]\!]} m^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left([\![\sqrt{n}]\!].\left([\![\sqrt{n}]\!]+1\right)\right)^2}{4n} = \infty$$

olduğundan $x_n \not\to 0(N(p))$ dır.

Sıradaki teorem $st - N(p)$ yakınsaklık ile $\alpha - N(p)$ yakınsaklığın ancak sınırlı diziler için aynı olduğunu söyler:

Teorem 4.1.5. $x = (x_n)$ sınırlı dizisi ve $l \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. Eğer, $x_n \to l(st - N(p))$ ise $x_n \to l(\alpha - N(p))$ dir.

İspat: Teoremin koşulundan $x = (x_n)$ sınırlı bir dizi ve

$$\delta_{N(p)}(K(n,\varepsilon)) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \sum_{k\in K(n,\varepsilon)} p_{n-k+1} \chi_{K(n,\varepsilon)}(k) = 0$$

dır. Bu durumda, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $\left|x_n - l\right| \le M$ olacak şekilde bir $M > 0$ vardır. Böylece,

$$\begin{aligned} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1} \left|x_k - l\right|^{\alpha} &= \frac{1}{P_n} \left(\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} + \sum_{k\notin K(n,\varepsilon)} \right) p_{n-k+1} \left|x_k - l\right|^{\alpha} \\ &\le M^{\alpha} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1} \chi_{K(n,\varepsilon)}(k) + \varepsilon^{\alpha} \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1} < \varepsilon \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer eşitsizliğin her iki tarafında $n \to \infty$ iken limit alınırsa istenen elde edilir. Böylece teorem ispatlanır. ■

Aşağıda verilecek teoremlerde özellikle $st - N(p)$ ve $st - N(q)$ metotlarının denkliği için gerek ve yeter koşullar belirlenecektir:

Teorem 4.1.6. $N(p)$ ve $N(q)$ regüler Nörlund metotları olsun. $st - N(p)$ yakınsak bir (x_n) dizisinin $st - N(q)$ yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall n \in \mathbb{N}$ için

$$\left|k_1\right| P_n + \left|k_2\right| P_{n-1} + \ldots + \left|k_n\right| P_1 \le MQ_n \quad \text{ve} \quad \lim_{n\to\infty} \frac{k_n}{Q_n} = 0$$

olacak şekilde bir $M > 0$ vardır.

İspat: (x_n) dizisi verilsin. (x_n) dizisinin $st-N(p)$ ve $st-N(q)$ dönüşümleri sırasıyla (t_n^p) ve (t_n^q) olsun. Yani; $\forall \varepsilon > 0$ için

$$t_n^p := \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) \quad \text{ve} \quad t_n^q := \frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n} q_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)$$

dir. Böylece; $Q_n t_n^q = q_n\chi_{K(n,\varepsilon)}(1) + q_{n-1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(2) + ... + q_1\chi_{K(n,\varepsilon)}(n)$

Sonuç 3.5.4.'den;

$$Q_n t_n^q = k_n P_1 t_1^p + k_{n-1} P_2 t_2^p + ... + k_1 P_n t_n^p$$

elde edilir. Bu son eşitlik eğer, $B = (b_{nm})$ matrisi

$$b_{nm} = \begin{cases} \dfrac{k_{n-m+1}P_m}{Q_n}, & m \le n, \\ 0, & m > n. \end{cases}$$

biçiminde seçilirse,

$$t_n^q = \sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} t_m^p$$

şeklinde ifade edilebilir. Bu ise t_n^q dizisinin aslında t_m^p dizisinin bir lineer toplamı olduğunu söyler. O halde ispat için $B = (b_{nm})$ matrisinin regüler olduğunu göstermek gerekli ve yeterlidir. Her $m \in \mathbb{N}$ için

$$\lim_{n\to\infty} b_{nm} = \lim_{n\to\infty}\frac{k_{n-m+1}P_m}{Q_n} = \lim_{n\to\infty}\frac{k_{n-m+1}P_m}{Q_{n-m+1}} = P_m \lim_{n\to\infty}\frac{k_n}{Q_n} = 0,$$

ve

$$\sum_{m=1}^{\infty}|b_{nm}| = \frac{|k_1|P_n + ... + |k_n|P_1}{Q_n} \le M$$

son olarak,

$$\sum_{m=1}^{\infty} b_{nm} = \frac{k_1P_n + ... + k_nP_1}{Q_n} = \frac{Q_n}{Q_n} = 1$$

dir. Böylece $B = (b_{nm})$ matrisi regülerdir. ■

Teorem 4.1.7. $N(p)$ ve $N(q)$ regüler Nörlund metotları olsun. $st-N(q)$ yakınsak bir (x_n) dizisinin $st-N(p)$ yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$|h_1|Q_n+|h_2|Q_{n-1}+...+|h_n|Q_1\le M.P_n$$

ve

$$\lim_{n\to\infty}\frac{h_n}{P_n}=0$$

olacak şekilde bir $M>0$ vardır.

İspat: Teoremin ispatı Teorem 4.1.6.'da olduğu gibi yapılır. ■

Teorem 4.1.8. $x=(x_n)$ dizisi $l\in\mathbb{R}$ sayısına hem $st-N(p)$ hem de $st-N(q)$ yakınsak ise (x_n) dizisinin $l\in\mathbb{R}$ sayısına aynı zamanda $st-N(r)$ yakınsak olacak şekilde pozitif bir (r_n) dizisi vardır.

İspat: (x_n)dizisinin, $st-N(p)$ ve $st-N(q)$ dönüşümleri sırasıyla (t_n^p) ve (t_n^q) olsun. Yani,

$$t_n^p:=\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)\quad\text{ve}\quad t_n^q:=\frac{1}{Q_n}\sum_{k=1}^{n}q_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)$$

dir. Şimdi (r_n) dizisini $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere,

$$r_n:=p_nq_1+p_{n-1}q_2+...+p_1q_n$$

biçiminde seçelim. O halde (x_n) dizisinin $st-N(r)$ dönüşümü $R_n=r_1+r_2+...+r_n$ olmak üzere, $t_n^r:=\frac{1}{R_n}\sum_{k=1}^{n}r_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)$ biçimindedir.

Buradan,

$$\frac{1}{R_n}\sum_{k=1}^{n}r_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)=\frac{r_n\chi_{K(n,\varepsilon)}(1)+r_{n-1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(2)+...+r_1\chi_{K(n,\varepsilon)}(n)}{p_1q_1+(p_1q_2+p_2q_1)+...+(p_1q_n+...+p_nq_1)}$$

$$=\frac{p_1q_1\chi_{K(n,\varepsilon)}(n)+(p_1q_2+p_2q_1)\chi_{K(n,\varepsilon)}(n-1)+...+(p_nq_1+...+p_1q_n)\chi_{K(n,\varepsilon)}(1)}{p_1q_1+(p_1q_2+p_2q_1)+...+(p_1q_n+...+p_nq_1)}$$

$$=\frac{p_1(q_1\chi_{K(n,\varepsilon)}(n)+q_2\chi_{K(n,\varepsilon)}(n-1)+...+q_n\chi_{K(n,\varepsilon)}(1))+...+p_nq_1\chi_{K(n,\varepsilon)}(1)}{p_1(q_1+q_2+...+q_n)+...+p_nq_1}$$

$$=\frac{p_1Q_nt_n^q+...+p_1Q_nt_1^q}{p_1Q_n+p_2Q_{n-1}+...+p_nQ_1}=\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{n-k+1}Q_k}{\left(\sum_{i=1}^{n}p_{n-i+1}Q_i\right)}t_k^q$$

elde edilir. Bu ifade (x_n) dizisinin $st-N(r)$ dönüşümünün aslında (x_n) dizisinin $st-N(q)$ dönüşümünün

$$b_{nk}:=\begin{cases}\dfrac{p_{n-k+1}Q_k}{\sum_{i=1}^{n}p_{n-i+1}Q_i}, & k\le n,\\ 0, & k>n,\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan $B=(b_{nk})$ matrisi altındaki dönüşümü olduğunu söyler. O halde, (t_n^r) dizisinin yakınsaklığı için $B=(b_{nk})$ matrisinin regüler olduğunu göstermek gerekli ve yeterlidir. Açıktır ki,

$$\sum_{k=1}^{n}b_{nk}=\sum_{k=1}^{n}|b_{nk}|=1,$$

ve

$$\sum_{i=1}^{n}p_{n-i+1}Q_i>KP_n\quad,\quad K\ge q_1>0$$

eşitsizliği dikkate alınırsa

$$0\le\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-k+1}Q_n}{\sum_{i=1}^{n}p_{n-i+1}Q_i}<\lim_{n\to\infty}\frac{p_{n-k+1}Q_n}{KP_n}=0$$

elde edilir. O halde, Teorem 3.3.2'nin (Silverman-Toeplitz Teoremi) koşulları sağlanır. Bu ise $st-N(q)$ yakınsak dizinin $st-N(r)$ yakınsak olduğunu gösterir. Benzer biçimde $st-N(p)$ yakınsak dizinin $st-N(r)$ yakınsak olduğu kolayca gösterilir. ■

Sıradaki teoremlerde A bir regüler matris olmak üzere $A-$istatistiksel yakınsaklık ile $st-N(p)$ yakınsaklık arasındaki ilişki verilecektir:

Teorem 4.1.9. $N(p)$ ve $A=(a_{nk})$ regüler toplanabilme metotları olsun. $st-N(p)$ yakınsak bir (x_n) dizisinin, $A-st$ yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall n\in\mathbb{N}$ için

i) $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{a_{nk}}{p_{n-k+1}}=0$,

ii) En az bir $M>0$ için $\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{1}{p_{n-k+1}}+\dfrac{1}{p_{n-k}})P_k<M$,

iii) $\sum\limits_{k=1}^{n}(\dfrac{a_{nk}}{p_{n-k+1}}-\dfrac{a_{n,k+1}}{p_{n-k}})P_k=1$,

dir.

İspat: (x_k) bir dizi olmak üzere (x_k) dizisinin $st-N(p)$ ve $A-st$ dönüşümleri sırasıyla (t_n^p) ve (σ_n) olsun. Yani;

$$t_n^p:=\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) \text{ ve } \sigma_n:=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)$$

dır. Buradan,

$$t_k^p=\frac{1}{P_k}\left[p_n\chi_{K(n,\varepsilon)}(1)+...+p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)\right],$$

$$t_{k-1}^p=\frac{1}{P_{k-1}}\left[p_n\chi_{K(n,\varepsilon)}(1)+...+p_{n-k+2}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k-1)\right]$$

ve bu iki ifade taraf tarafa çıkartılırsa

$$\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)=\frac{P_kt_k^p-P_{k-1}t_{k-1}^p}{p_{n-k+1}},$$

elde edilir. Bu eşitlik eğer $P_0=0$ kabul edilirse $\forall k$ için geçerlidir. Böylece,

$$\sigma_n=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\frac{P_kt_k^p-P_{k-1}t_{k-1}^p}{p_{n-k+1}}$$

$$=\sum_{k=1}^{n}(\frac{a_{nk}}{p_{n-k+1}}-\frac{a_{n,k+1}}{p_{n-k}})P_kt_k^p$$

elde edilir. Bu son eşitlik (σ_n) dizisinin aslında $B=(b_{nk})$ aşağıdaki gibi seçilmek üzere,

$$b_{nk} = \begin{cases} \left(\dfrac{a_{nk}}{p_{n-k+1}} - \dfrac{a_{n,k+1}}{p_{n-k}}\right)P_k, & k \le n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

(t_k^p) dizisinin B dönüşümü olduğunu söyler. O halde $B=(b_{nk})$ matrisinin regüler olması teoremin ispatı için gerekli ve yeterli koşuldur. Böylece,
(i)' den,

$$\lim_{n\to\infty} b_{nk} = \lim_{n\to\infty}\left(\frac{a_{nk}}{p_{n-k+1}} - \frac{a_{n,k+1}}{p_{n-k}}\right)P_k = 0,$$

olduğu, (ii)' den,

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |b_{nk}| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|\frac{a_{nk}}{p_{n-k+1}} - \frac{a_{n,k+1}}{p_{n-k}}\right| P_k$$

$$\le \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{nk}}{p_{n-k+1}} + \frac{a_{n,k+1}}{p_{n-k}}\right) P_k$$

$$\le \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{1}{p_{n-k+1}} + \frac{1}{p_{n-k}}\right) P_k$$

$$< \left(\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} |a_{nk}|\right) M < \infty,$$

olduğu, son olarak (iii)' den,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{a_{nk}}{p_{n-k+1}} - \frac{a_{n,k+1}}{p_{n-k}}\right) P_k = 1$$

olduğu elde edilmiş olur. Böylece (b_{nk}) bir regüler matristir ve $st - N(p)$ yakınsak her dizi $A - st$ yakınsaktır. ■

Teorem 4.1.10. $N(p)$ ve $A=(a_{nk})$ regüler toplanabilme metotları ve $a_{nk}\neq 0$ olsun. $A-st$ yakınsak bir dizinin $st-N(p)$ yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\forall n\in\mathbb{N}$ için,

i) $\sup\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} \dfrac{p_{n-k+1}+p_n}{P_n}<\infty$,

ii) $\sup\limits_n \sum\limits_{k=1}^{n} \left|\dfrac{1}{a_{nk}}\right|<\infty$,

iii) $\sum\limits_{k=1}^{\infty}\left(\dfrac{p_n}{a_{n1}}-\dfrac{p_{n-k}}{a_{n,k+1}}\right)\dfrac{1}{P_n}=1$,

sağlanmasıdır.

İspat: (x_k) bir dizi olmak üzere (x_k) dizisinin $st-N(p)$ ve $A-st$ dönüşümleri sırasıyla (t_n^p) ve σ_n olsun. Yani;

$$t_n^p=\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) \quad \text{ve} \quad \sigma_n=\sum_{k=1}^{n}a_{nk}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)$$

dır. Buradan,

$$\sigma_k=a_{n1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(1)+a_{n2}\chi_{K(n,\varepsilon)}(2)+...+a_{nk}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k),$$

ve

$$\sigma_{k-1}=a_{n1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(1)+a_{n2}\chi_{K(n,\varepsilon)}(2)+...+a_{n,k-1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k-1)$$

dir. Böylece,

$\sigma_k-\sigma_{k-1}=a_{nk}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)$ elde edilir. Yani;

$$\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)=\frac{\sigma_k-\sigma_{k-1}}{a_{nk}}$$

olur. Bu ifade (t_n^p) dizisinde yerine yazılırsa,

$$t_n^p:=\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}p_{n-k+1}\left(\frac{\sigma_k-\sigma_{k-1}}{a_{nk}}\right)=\frac{1}{P_n}\left[\sum_{k=1}^{n}\frac{p_{n-k+1}\sigma_k}{a_{nk}}-\sum_{k-1=1}^{n}\frac{p_{n-k+1}\sigma_{k-1}}{a_{nk}}\right]$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p_{n-k+1}\sigma_k}{a_{nk}} - \frac{p_{n-k}\sigma_k}{a_{n,k+1}} \right)$$

$$= \frac{1}{P_n} \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p_{n-k+1}}{a_{nk}} - \frac{p_{n-k}}{a_{n,k+1}} \right) \sigma_k$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left(\frac{p_{n-k+1}}{a_{nk}} - \frac{p_{n-k}}{a_{n,k+1}} \right) \frac{1}{P_n} \sigma_k$$

elde edilir. Buradan $\left(t_n^p\right)$ dizisi σ_n dizisinin bir lineer toplamıdır. Yani, $B = \left(b_{nk}\right)$ matrisi aşağıdaki gibi seçilirse,

$$b_{nk} = \begin{cases} \left(\frac{p_{n-k+1}}{a_{nk}} - \frac{p_{n-k}}{a_{n,k+1}}\right)\frac{1}{P_n}, & k \le n, \\ 0, & k > n, \end{cases}$$

$t_n^p = \sum_{k=1}^{n} b_{nk}\sigma_k$ biçimindedir. O halde, Teoremin ispatı için gerekli ve yeterli koşul $B = \left(b_{nk}\right)$ matrisinin regüler olduğunun gösterilmesidir. $N(p)$ regüler olduğundan $\lim_{n\to\infty} \frac{p_{n-k+1}}{P_n} = 0$ dır.

Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} b_{nk} = \lim_{n\to\infty} \left(\frac{p_{n-k+1}}{a_{nk}} - \frac{p_{n-k}}{a_{n,k+1}} \right) \frac{1}{P_n} = 0$$

olduğu elde edilir. Ayrıca, (i) ve (ii)' den

$$\sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left|b_{nk}\right| = \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{p_{n-k+1}}{a_{nk}} - \frac{p_{n-k}}{a_{n,k+1}} \right| \frac{1}{P_n} \le \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{p_{n-k+1}}{a_{nk}} + \frac{p_{n-k}}{a_{n,k+1}} \right) \frac{1}{P_n}$$

$$\le \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_{nk}} \right| \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{p_{n-k+1}}{P_n} + \frac{p_{n-k}}{P_n} \right)$$

$$< \sup_n \sum_{k=1}^{\infty} \left| \frac{1}{a_{nk}} \right| < \infty$$

ve (iii)' den,

$$\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty} b_{nk} = \lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{p_{n-k+1}}{a_{nk}} - \frac{p_{n-k}}{a_{n,k+1}}\right)\frac{1}{P_n}$$

$$= \sum_{k=1}^{\infty}\left(\frac{p_n}{a_{n1}} - \frac{p_{n-k}}{a_{n,k+1}}\right)\frac{1}{P_n} = 1$$

elde edilir. Böylece (b_{nk}) matrisi regülerdir. Bu irdeleme $A-$istatistiksel yakınsak her (x_n) dizisinin $st-N(p)$ yakınsak olduğunu söyler. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.2. İSTATİSTİKSEL NÖRLUND YAKINSAKLIK İLE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde, $st-N(p)$ yakınsaklık ile istatistiksel yakınsama arasındaki ilişki verilecektir.

Teorem 4.2.1. $x=(x_n)$ bir dizi, $l\in\mathbb{R}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i) Her $n\in\mathbb{N}$ için $p_n\geq 1$ olmak üzere $x_n\to l(st-N(p))$ olduğunda $x_n\to l(st)$ olması için gerek ve yeter koşul $\limsup_{n\to\infty}\frac{P_n}{n}<\infty$ dur.

ii) Her $n\in\mathbb{N}$ için $p_n<1$ olmak üzere $x_n\to l(st)$ olduğunda $x_n\to l(st-N(p))$ olması için gerek ve yeter koşul $\limsup_{n\to\infty}\frac{n}{P_n}<\infty$ dır.

İspat: i) $x_n\to l(st-N(p))$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $p_n\geq 1$ olsun. Bu durumda $\forall n\in\mathbb{N}$ için $P_n\geq n$ dır. O halde,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) \leq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)$$
$$= \frac{P_n}{n}\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n}p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $x_n\to l(st-N(p))$ olduğundan $x_n\to l(st)$ olması için gerek ve yeter koşul $\limsup_{n\to\infty}\frac{P_n}{n}<\infty$ olmasıdır.

ii) $x_n \to l(st)$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n < 1$ olsun. O halde,

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) \geq \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) = \frac{P_n}{n}\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)$$

dir. Buradan;

$$\frac{n}{P_n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) \geq \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\,\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $x_n \to l(st)$ olduğundan $x_n \to l(st-N(p))$ olması için gerek ve yeter koşul $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{n}{P_n} < \infty$ olmasıdır. ■

Teorem 4.2.2. $p_n \geq 1(st-a.a.n.)$ olsun. Bu durumda, $x_n \to l\left(st-N(p)\right)$ olduğunda $x_n \to l\left(st\right)$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{n} < \infty$ olmasıdır.

İspat: $A = \left\{n \in \mathbb{N} : p_n < 1\right\}$ olmak üzere hipotezden $\delta\left(A\right) = 0$ dır. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}
\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) &= \frac{1}{n}\left(\sum_{k\in K(n,\varepsilon)\cap A}\chi_{K(\varepsilon)}(k) + \sum_{k\in K(n,\varepsilon)\cap A^c}\chi_{K(\varepsilon)}(k)\right)\\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)\cap A}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) + \frac{1}{n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)\cap A^c}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)\\
&\leq \frac{1}{n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)\cap A}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) + \left(\frac{P_n}{n}\right)\frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)\cap A^c} p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k)
\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Burada, $x_n \to l\left(st-N(p)\right)$ olduğu göz önüne alınırsa,

$$K\left(n,\varepsilon\right) \cap A \subset A \quad \text{ve} \quad K\left(n,\varepsilon\right) \cap A^c \subset K(n,\varepsilon)$$

olduğundan,

$$\frac{1}{n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)\cap A}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) \to 0 \quad \text{ve} \quad \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)\cap A^c} p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) \to 0,\ (n \to \infty)$$

dır. Böylece, yukarıdaki eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) = 0$$

olması için gerek ve yeter koşulun $\limsup\limits_{n\to\infty}\frac{P_n}{n} < \infty$ olduğu görülür. ■

Teorem 4.2.3. $p_n < 1 \ \left(st - N(p) \ a.a.n.\right)$ olsun. Bu durumda, $x_n \to l\left(st\right)$ olduğunda $x_n \to l\left(st - N(p)\right)$ olması için gerek ve yeter şart $\limsup\limits_{n\to\infty} \dfrac{n}{P_n} < \infty$, olmasıdır.

İspat: $A = \left\{n \in \mathbb{N} : p_n \geq 1\right\}$ olmak üzere hipotezden $\delta_{N(p)}\left(A\right) = 0$ dır. Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için,

$$\begin{aligned}
\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)}(k) &= \frac{1}{P_n}\left(\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)\cap A}(k) + \sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\chi_{K(n,\varepsilon)\cap A^c}(k)\right) \\
&\leq \frac{1}{P_n}\left[\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\chi_{A}(k) + \sum_{k=1}^{n} \chi_{K(n,\varepsilon)}(k)\right] \\
&\leq \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_{n-k+1}\chi_{A}(k) + \frac{n}{P_n}\cdot\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{K(n,\varepsilon)}(k)
\end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece, $x_n \to l\left(st\right)$ ve $\delta_{N(p)}\left(A\right) = 0$ olduğundan $x_n \to l\left(st - N(p)\right)$ olması için gerek ve yeter şartın

$$\limsup_{n\to\infty} \frac{n}{P_n} < \infty$$

olduğu görülür ki böylece ispat tamamlanır. ■

4.3. AĞIRLIKLI İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK VE İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIK ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde, 4.1.'deki gibi $\left(p_n\right)$ ile negatif olmayan reel sayıların $p_n \neq 0$ ve $p_1 > 0$ koşulunu sağlayan dizisi gösterilecek öyle ki $P_n = p_1 + p_2 + ... + p_n$,$(n = 1, 2, ...)$ olmak üzere, $\exists m_1, m_2$ pozitif reel sabitleri için, $m_1 n \leq P_n \leq m_2 n$ eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilecektir. Bu durum $P_n \approx n$ sembolü ile gösterilecektir.

Teorem 4.3.1. $P_n \approx n$ olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n \geq 1$ olmak üzere, eğer, $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ ise $x_n \to l(st)$ dır.

İspat: Teoremin kabulünden, $m_1, m_2 > 0$ için $m_1 n \leq P_n \leq m_2 n$ dır. $p_n \geq 1$ için $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ olsun. Böylece

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k : k \leq n, \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \frac{1}{n}\left|\left\{k : k \leq n, p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq m_2.\frac{1}{P_n}\left|\left\{k : k \leq n, p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. Eğer, eşitsizliğin her iki tarafında $n \to \infty$ iken limit alınırsa $x_n \to l(st)$ elde edilir. ■

Teorem 4.3.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n \approx n$ olsun. Bu durumda, her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n < 1$ olmak üzere, eğer, $x_n \to l(st)$ ise $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ dır.

İspat: Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n < 1$ ve $x_n \to l(st)$ olsun. Buradan

$$\frac{1}{P_n}\left|\left\{k : k \leq n, p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \leq \frac{1}{P_n}\left|\left\{k : k \leq n, \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\leq \frac{1}{m_1}.\frac{1}{n}\left|\left\{k : k \leq n, \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. Eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limit alınırsa $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ elde edilir. ■

Teorem 4.3.3. Her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n \approx n$ olsun. Bu durumda $p_n \left|x_n - l\right| \to 0(st)$ olması için gerek ve yeter koşul $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ olmasıdır.

İspat: $P_n \approx n$ ve $n \to \infty$ iken $p_n \left|x_n - l\right| \to 0(st)$ olsun $P_n \approx n$ olduğundan $m_1.\frac{1}{P_n} \leq \frac{1}{n} \leq m_2.\frac{1}{P_n}$ eşitsizliği sağlanır. Böylece,

$$m_2.\frac{1}{P_n}\left|\left\{k : k \leq n, p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right| \geq \frac{1}{n}\left|\left\{k : k \leq n, p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$\geq m_1.\frac{1}{P_n}\left|\left\{k : k \leq n, p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

elde edilir. Bu son eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limit alırsak, $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ olur. ■

Sonuç 4.3.4. $P_n \approx n$ olsun. Eğer $p_n \left| x_n - l \right| \to 0 \ \left(n \to \infty \right)$ ise $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ dır.

İspat: $p_n \left| x_n - l \right| \to 0$ olsun. O halde $\forall \varepsilon > 0$ iken $\exists n_0 = n_0\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}$ olmak üzere, $\forall n \geq n_0$ için $p_n \left| x_n - l \right| < \varepsilon$ sağlanır. Böylece,

$$K = \left\{ k \in \mathbb{N} : k \leq n, p_k \left| x_k - l \right| \geq \varepsilon \right\}$$

olarak seçilirse

$$K \subset \mathbb{N} \setminus \left\{ k_{n_0+1}, k_{n_0+2}, k_{n_0+3}, \ldots \right\}$$

olduğu açıktır. Sonuç olarak $\delta\left(K\right) = 0$ olur. Böylece, $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \left| K \right| = 0$ dır. Bu ise $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ olması demektir. ■

Uyarı 4.3.5. Sonuç 4.3.4.'nün tersi doğru değildir. Bunu görmek için aşağıda verilen $x = \left(x_n \right)$ ve $p = \left(p_n \right)$ dizilerini göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = \begin{cases} k, & n = k^2, k \in \mathbb{N}, \\ \frac{1}{k}, & n \neq k^2 \end{cases}$$

ve $p_n = \left(1 + 2^{-n} \right)$ olsun. Bu durumda,

$$p_n \left| x_n - 0 \right| = \begin{cases} (1 + 2^{-k}).k, & n = k^2 \\ \frac{1}{k}.\left(1 + 2^{-k} \right), & n \neq k^2 \end{cases}$$

olur. Ayrıca $P_n = n + 1$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \left| \left\{ k : k \leq n, \ p_k \left| x_k - l \right| \geq \varepsilon \right\} \right| =$$

$$= \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1} \left| \left\{ k : k \leq n, \left(1 + 2^{-k} \right).\frac{1}{k} \geq \varepsilon \right\} \right| = 0.$$

Buradan görülür ki $x = \left(x_n \right)$ dizisi sıfıra ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır. Fakat sıfırın $\varepsilon > 0$ komşuluğu dışında dizinin sonsuz çoklukta terimi olduğundan yakınsak değildir.

Teorem 4.3.6. Her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n \approx n$ ve $x = (x_n)$ dizisi $l \in \mathbb{R}$ ye ağırlıklı istatistiksel yakınsak bir dizi olsun. Hemen hemen her n için $(x_n) = (y_n)$ olacak şekilde (y_n) dizisi varsa (y_n) dizisi de l'ye ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $P_n \approx n$ ve $x = (x_n)$ dizisi l ye ağırlıklı istatistiksel yakınsak bir dizi ve a.a.n. için $x_n = y_n$ olacak şekilde (y_n) dizisi olsun. Yani,

$$A = \{n : (x_n) \neq (y_n)\}$$

kümesinin doğal yoğunluğu

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{k : k \leq n, k \in A\} \right| = 0,$$

dır. Böylece;

$$\{k : k \leq n, p_k |y_k - l| \geq \varepsilon\} =$$

$$= \{k : k \leq n, k \notin A, p_k |x_k - l| \geq \varepsilon\} \cup \{k : k \leq n, k \in A, p_k |y_k - l| \geq \varepsilon\}$$

ve $m_1, m_2 > 0$ için $m_1 n \leq P_n \leq m_2 n$ olduğundan,

$$\frac{1}{P_n} \left| \{k : k \leq n, p_k |y_k - l| \geq \varepsilon\} \right| =$$

$$= \frac{1}{P_n} \left| \{k : k \leq n, k \notin A, p_k |x_k - l| \geq \varepsilon\} \right| + \frac{1}{P_n} \left| \{k : k \leq n, k \in A, p_k |y_k - l| \geq \varepsilon\} \right|$$

$$\leq \frac{1}{m_1 n} \left| \{k : k \leq n, k \notin A, p_k |x_k - l| \geq \varepsilon\} \right| + \frac{1}{m_1 n} \left| \{k : k \leq n, k \in A, p_k |y_k - l| \geq \varepsilon\} \right|$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer, eşitsizlikte $n \to \infty$ iken limit alınırsa,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n} \left| \{k : k \leq n, p_k |x_k - l| \geq \varepsilon\} \right| = 0,$$

bulunur. Bu ise (y_n) dizisinin $l \in \mathbb{R}$ sayısına ağırlıklı istatistiksel yakınsak olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.3.7. Her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n \approx n$ ve $x = (x_n)$ dizisi $l \in \mathbb{R}$ sayısına ağırlıklı istatistiksel yakınsak bir dizi olması için gerek ve yeter şart monoton artan ve $\delta\left(\left\{k_n : n \in \mathbb{N}\right\}\right) = 1$ koşulunu sağlayan bir $\left(k_n\right)$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} p_{k_n} \left|x_{k_n} - l\right| = 0$$

sağlanmasıdır.

İspat: "Yeter Koşul"

Monoton artan bir $\left(k_n\right)$ dizisi olsun öyle ki $\delta\left(\left\{k_n : n \in \mathbb{N}\right\}\right) = 1$, $\lim_{n\to\infty} p_{k_n} \left|x_{k_n} - l\right| = 0$ sağlansın. O halde, $\forall \varepsilon > 0$ için $\exists n_0 = n_0\left(\varepsilon\right) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n > n_0\left(\varepsilon\right)$ için $p_{k_n} \left|x_{k_n} - l\right| < \varepsilon$ sağlanır.

Teorem 4.3.3.' den $\left(x_{k_n}\right)$ dizisi l ye ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır. Şimdi $K\left(n,\varepsilon\right) = \left\{k : p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}$ ve $K^*\left(n,\varepsilon\right) = \left\{k_{n_o+1}, k_{n_o+2}, ...\right\}$ kümelerini tanımlayalım. Buradan, $\delta(K^*(n,\varepsilon)) = 1$ ve $K\left(n,\varepsilon\right) \subset \mathbb{N} - K^*\left(n,\varepsilon\right)$ olur. Böylece $\delta\left(K\left(n,\varepsilon\right)\right) = \delta\left(\mathbb{N}\right) - \delta\left(K^*\left(n,\varepsilon\right)\right)$ ve $x = (x_n)$ dizisi l ye ağırlıklı istatistiksel yakınsaktır.

"Gerek Koşul"

Teoremin gerek şartını ispatlamak için, $x = (x_n)$ dizisi l ye ağırlıklı istatistiksel yakınsak olsun. $K\left(n,\varepsilon\right) = \left\{k : p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}$ ve $K^c\left(n,\varepsilon\right) = \left\{k : p_k \left|x_k - l\right| < \varepsilon\right\}$ kümeleri tanımlansın. Kabulümüzden dolayı her $\varepsilon > 0$ için $\delta(K(n,\varepsilon)) = 0$ ve $\delta(K^c(n,\varepsilon)) = 1$ dir. Eğer her $r \in \mathbb{N}$ için, $\varepsilon = \frac{1}{r}$ alırsak

$\delta\left(K\left(\frac{1}{r}\right)\right) = 0 \quad ve \quad \delta\left(K^c\left(\frac{1}{r}\right)\right) = 1$ dır.

Açıktır ki,

$$K^c\left(1\right) \supset K^c\left(\frac{1}{2}\right) \supset .... \supset K^c\left(\frac{1}{r}\right) \supset K^c\left(\frac{1}{r+1}\right) \supset ...$$

seçimimize k_1 yı $K^c(1)$ nin minimal elemanı olarak seçerek başlayalım ve $k_2 \geq k_1$ yi $K^c\left(\frac{1}{2}\right)$ nin minimal elemanı olarak seçelim. Aksi halde $K^c\left(\frac{1}{2}\right)$ nin eleman sayısı en fazla k_1 dir. Bu ise $K^c\left(\frac{1}{2}\right)$ nın varsayımından dolayı bir çelişkidir. Böylece süreç devam ettirilerek (k_n) dizisi monoton artan olur öyle ki:

$$\lim_{n\to\infty} p_{k_n} \left|x_{k_n} - l\right| = 0$$

olur. ■

4.4. AĞIRLIKLI İSTATİSTİKSEL YAKINSAMA VE RİESZ YAKINSAMA ARASINDAKİ İLİŞKİ

Bu bölümde, Riesz yakınsaklık ve ağırlıklı istatistiksel yakınsama arasındaki ilişki incelenecektir.

Teorem 4.4.1. $P_n \approx n$ olsun, eğer $x_n \to l\left(\overline{N}(p)\right)$ ise $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ dir.

İspat: $P_n \approx n$ ve $x_n \to l\left(\overline{N}(p)\right)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için $K(n,\varepsilon) = \left\{k : k \leq n,\ p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}$ olmak üzere,

$$\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_k \left|x_k - l\right| = \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} p_k \left|x_k - l\right| + \frac{1}{P_n}\sum_{k\notin K(n,\varepsilon)} p_k \left|x_k - l\right|$$

$$\geq \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} p_k \left|x_k - l\right| \geq \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} \varepsilon = \varepsilon.\frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} 1$$

$$= \varepsilon \frac{1}{P_n}\left|\left\{k : k \leq n, p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğin her iki tarafının limiti $n \to \infty$ alınırsa $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ olur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Aşağıdaki örnek Teorem 4.4.1.'nin karşıtının her zaman doğru olmayacağını göstermektedir.

Örnek 4.4.2. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = 1$ ve $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} m^3, & n = m^2 \ , \ m \in \mathbb{N}, \\ 0, & n \neq m^2 \end{cases}$$

biçiminde seçilsin. $P_n = n$ olduğundan Teorem 4.1.1.'in ön koşulu olan $P_n \approx n$ sağlanır. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k : k \le n, 1.\left| x_k - 0 \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k : k = m^2 \le n, 1.\left| m^3 - 0 \right| \ge \varepsilon \right\} \right| = 0$$

olduğundan $x_n \to 0(S_{\overline{N}})$ dır. Fakat,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{k=1}^{n} 1.\left| x_k - 0 \right| = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \sum_{m=1}^{[\![\sqrt{n}]\!]} m^3 = \lim_{n\to\infty} \frac{\left([\![\sqrt{n}]\!] . \left([\![\sqrt{n}]\!] + 1 \right) \right)^2}{4n} = \infty$$

olur ki bu da $x_n \not\to 0(\overline{N}(p))$ dir. Ayrıca, (x_n) dizisi sınırsız bir dizidir.

Teorem 4.4.3. $P_n \approx n$ ve $x = (x_n) \in \ell_\infty$ olsun. Eğer, $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ ise $x_n \to l(\overline{N}(p))$ dir.

İspat: $P_n \approx n$ olmak üzere $x = (x_n) \in \ell_\infty$ dizisi l' ye ağırlıklı istatistiksel yakınsak olsun. $x = (x_n)$ dizisi sınırlı olduğundan, $\exists M$ pozitif sayısı vardır öyle ki; $\left| x_n - l \right| \le M$ sağlanır.

Ayrıca $P_n \approx n$ olduğundan $(p_n) \in \ell_\infty$ olur. Bir an (p_n) dizisinin sınırsız olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\forall K > 0$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N} \ni p_{n_0} > K$ dir. Özel olarak $K = n^2$ alınırsa $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki, $p_{n_0} > n^2$ olur. $\forall n > n_0$ için, $P_n = p_1 + p_2 + ... + p_{n_0} + p_{n_{0+1}} + ... + p_n > p_{n_0} > n^2$ olur. Buradan $P_n > n^2$ olduğu elde edilir. Eşitsizliğin her iki tarafı n ile bölünürse $\frac{P_n}{n} > n$ olur ki $\frac{P_n}{n} \not\approx 1$ bulunur. Bu ise çelişkidir. Dolayısıyla $\exists m_1 > 0$ için $p_n \le m_1$ dir. Ayrıca, her $\varepsilon > 0$ için,

$$K(n,\varepsilon) = \left\{ k : k \le n, p_k \left| x_k - l \right| \ge \varepsilon \right\} \text{ ve } K^c(n,\varepsilon) = \left\{ k : k \le n, p_k \left| x_k - l \right| < \varepsilon \right\}$$

kümeleri tanımlansın. Buradan,

$$\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_k \left|x_k - l\right| = \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} p_k \left|x_k - l\right| + \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K^c(n,\varepsilon)} p_k \left|x_k - l\right|$$

$$\leq M.\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_k \chi_{K(n,\varepsilon)}(k) + \varepsilon.\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_k \chi_{K^c(n,\varepsilon)}(k)$$

$$= M\cdot m_1 \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{K(n,\varepsilon)}\left(k\right) + \varepsilon\cdot m_1 \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} \chi_{K^c(n,\varepsilon)}\left(k\right)$$

$$\leq M\cdot m_1 \cdot \frac{1}{P_n}\left|\left\{k \leq n : p_k.\left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right|$$

$$+\ \varepsilon.m_1 \frac{1}{P_n}\left|\left\{k \leq n : p_k \left|x_k - l\right| < \varepsilon\right\}\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Eğer, $n \to \infty$ iken eşitsizliğin her iki tarafının limiti alınır ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n}\left|\left\{k \leq n : p_k \left|x_k - l\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0 \ ,$$

ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{P_n}\left|\left\{k \leq n : p_k \left|x_k - l\right| < \varepsilon\right\}\right| = 1$$

olduğu dikkate alınırsa $x_n \to l(\overline{N}(p))$ olduğu ispat edilmiş olur. ■

Sonuç 4.4.4. $P_n \approx n$ olsun. Eğer en az bir pozitif M sayısı için $p_k \left|x_k - l\right| \leq M$ ise $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ olduğunda $x_n \to l(\overline{N}(p))$ dir.

Sıradaki teoremde ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık ile $\alpha - kuvvetli\ \overline{N}(p)$ yakınsaklık arasındaki ilişki verilecektir:

Teorem 4.4.5. Her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n \approx n$ olsun. $x = \left(x_n\right)$ dizisi ve $l \in \mathbb{R}$ verilsin. Eğer, $x = \left(x_n\right)$ dizisi ve $l \in \mathbb{R}$ sayısına $\alpha - \overline{N}\left(p\right)$ yakınsak ise

i) $0 < \alpha < 1$ ve $0 \leq \left|x_n - l\right| < 1$ olduğunda $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ dır.

ii) $1 \leq \alpha < \infty$ ve $1 \leq \left|x_n - l\right| < \infty$ olduğunda $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ dır.

İspat: **(**i) ve (ii)'nin ispatı birlikte verilecektir. **(**i) ve (ii)'nin kabulünden $p_k.|x_k-l|^\alpha \geq p_k.|x_k-l|$ olduğu açıktır. O halde,

$$\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_k\,|x_k-l|^\alpha \geq \frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_k\,|x_k-l|$$

$$\geq \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} p_k\,|x_k-l| \geq \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} \varepsilon = \varepsilon\cdot\frac{|K(n,\varepsilon)|}{P_n}$$

eşitsizliği sağlanır. Eğer $n\to\infty$ iken limit alınırsa $\lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}|K(n,\varepsilon)|=0$ olur. Bu da $x_n \to l(S_{\overline{N}})$ dır. ■

Teorem 4.4.6. Her $n\in\mathbb{N}$ için $P_n \approx n$ olsun. $x=(x_n)$ dizisi ve $l\in\mathbb{R}$ verilsin. Eğer, $x_n\to l(S_{\overline{N}})$ ve en az bir $M>0$ sayısı için $p_k.|x_k-l|\leq M$ ise,

i) $0<\alpha<1$ ve $1\leq M<\infty$ olduğunda $x_k \to l\left(\alpha-\overline{N}(p)\right)$ dır.

ii) $1\leq\alpha<\infty$ ve $0\leq M<1$ olduğunda $x_k \to l\left(\alpha-\overline{N}(p)\right)$ dır.

İspat: $x=(x_n)$ dizisi $l\in\mathbb{R}$ 'ye ağırlıklı istatistiksel yakınsak ve en az bir $M>0$ sayısı için $p_k.|x_k-l|\leq M$ sağlansın. Ayrıca,

$$\frac{1}{P_n}\sum_{k=1}^{n} p_k\,|x_k-l|^\alpha = \frac{1}{P_n}\sum_{k\notin K(n,\varepsilon)} p_k\,|x_k-l|^\alpha + \frac{1}{P_n}\sum_{k\in K(n,\varepsilon)} p_k\,|x_k-l|^\alpha$$

ifadesinin sağ tarafı

$$S_1(n)=\frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\notin K(n,\varepsilon)}}^{n} p_k\,|x_k-l|^\alpha \text{ ve } S_2(n)=\frac{1}{P_n}\sum_{\substack{k=1\\ k\in K(n,\varepsilon)}}^{n} p_k\,|x_k-l|^\alpha$$

biçiminde işaretlenirse $k\notin K(n,\varepsilon)$ için,

$$S_1(n) = \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K(n,\varepsilon)}}^{n} p_k \left|x_k - l\right|^{\alpha} \leq \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \notin K(n,\varepsilon)}}^{n} p_k \left|x_k - l\right| = \varepsilon . \frac{1}{P_n} \left|K^c(n,\varepsilon)\right| = \varepsilon$$

$k \in K \ (n, \varepsilon)$ için ise

$$S_2(n) = \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K(n,\varepsilon)}}^{n} p_k \left|x_k - l\right|^{\alpha} \leq \frac{1}{P_n} \sum_{\substack{k=1 \\ k \in K(n,\varepsilon)}}^{n} p_k \left|x_k - l\right|$$

$$\leq \left(\sup p_k \left|x_k - l\right|\right) \frac{\left|K(n,\varepsilon)\right|}{P_n} \leq M . \frac{\left|K(n,\varepsilon)\right|}{P_n} \to 0$$

olur. Bu ise $x_n \to l\left(\alpha - \overline{N}(p)\right)$ dir. ■

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bulguların ilk bölümünde $N(p)$ yakınsaklık ve $\alpha - kuvvetli\ N(p)$ yakınsama ($\alpha - N(p)$) ile $st - N(p)$ yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelendi. Aynı zamanda $st - N(p)$ yakınsaklık ile $\alpha - N(p)$ yakınsaklığın ancak sınırlı diziler için aynı olduğu bir teoremle verildi.

$st - N(p)$ ve $st - N(q)$ metotlarının denkliği için gerek ve yeter koşullar belirlendi.

Bir $x = (x_n)$ dizisi $l \in \mathbb{R}$ sayısına hem $st - N(p)$ hem de $st - N(q)$ yakınsak ise pozitif bir (r_n) dizisi için (x_n) dizisinin $l \in \mathbb{R}$ sayısına aynı zamanda $st - N(r)$ yakınsak olduğu ispatlandı.

$A-$istatistiksel yakınsaklık ile $st - N(p)$ yakınsaklık arasındaki ilişkiler incelendi.

Bulguların ikinci bölümünde, $st - N(p)$ yakınsaklık ile istatistiksel yakınsama arasındaki ilişkiler verildi. Ayrıca $st - N(p) a.a.n.$ tanımı verilerek $p_n \geq 1 (st - a.a.n.)$ ve $p_n < 1$ $(st - N(p)\ a.a.n.)$ koşulları altında $st - N(p)$ ile st arasındaki ilişkiler verildi.

Bulguların üçüncü bölümünde, $p_n \geq 1$ ve $p_n < 1$ şartları altında, st ile $S_{\overline{N}}$ arasındaki ilişkiler verildi. Aynı zamanda ağırlıklı istatistiksel yakınsama ve klasik yakınsama arasındaki ilişkiler incelendi. Ağırlıklı istatistiksel yakınsak olan dizilerin bazı özellikleri verildi.

Bulguların dördüncü bölümünde, Riesz yakınsaklık ve $\alpha - kuvvetli\ \overline{N}(p)$ yakınsama ile ağırlıklı istatistiksel yakınsama arasındaki ilişkiler incelendi.

Ayrıca ağırlıklı istatistiksel yakınsaklık metodu kullanılarak reel sayıların keyfi aralıkları üzerinde pozitif lineer operatör dizileri için daha genel bazı Korovkin tipi teoremler elde edilebilir.

6. KAYNAKLAR

[1] Fast, H. “Sur la Convergence Statistique”, Colloquium Math. , Vol.2, 241-244, (1951).

[2] Steinhous, H. “Sur la Convergence Ordinaire et la Convergence Asymptotique”, Colloquium Math., Vol.2, 73-74, (1951).

[3] Buck, R. C. “Generalized Asymptotic Density”, Amer. J. Math. 75, 335-346, (1953).

[4] Niven, I. and Zuckerman, H.S. “An Introduction to the Theory of Numbers”, John Wiley & Sons,Fourt Ed.,New York, (1980).

[5] Freedman, A. R. and Sember, J. J. “Densities and Summability”, Pacific Joumal of Math., vol.59,no.2, 283-305, (1981).

[6] Maddox, I. J. “Elements of Functional Analysis”, Cambridge Univ. Press., (1970).

[7] Schoenberg, I. J. “The integrability of certain functions and related summability methods”, The American Math. Monthly, vol.66, 361-375, (1959).

[8] Fridy, J. A. “On Statistical Convergence”, Analysis 5, 301-313, (1985).

[9] Zygmund, A. “Trigonometrik Series”, Cambridge University Pres, Cambirdge, UK (1979).

[10] Connor, J. “The statistical and strong p-Cesaro convergence of sequenses”, Analysis 8, 47-63, (1988).

[11] Connor, J. S. “On Strong Matrix Summability With Respect To A Modulus and Statistical Convergence”, Canad Math. Bull.,32, 194-198,(1989).

[12] Connor, J. S. “Two Valued Measures and Summability”, Analysis 10, 373-385, (1990).

[13] Demirci, K. and Orhan, C. “Bounded Multipliers of Bounded A-statistically Convergent Sequences”, J. Math. Anal. Appl., 235, 122-129, (1999).

[14] Kline, J. “The T-statistically Convergent Sequences are not an FK-space”, Internat. J. Math. Sci., 184, 825-827, (1995).

[15] Erdös,P. and Tenenbaum, G. “Sur les Densities de Certaines Suites d’entries”, Proc. London math. Soc., 59, 417-438, (1989).

[16] Miller, H. I. “A Measure Theoretical Subsequence Characterization of Statistical Convergence”, Transaction of American Math. Society, vol.347, number5, 1811-1819, (1995).

[17] Miller, H. I. and Orhan, C. “On Almost Convergent and Statistically Convergent Subsequences”, Acta Math. Hungar., 93, 135-15, (2001).

[18] Fridy, J. A. and Khan, M. K. “Tauberian Theorems Via Statistical Convergence”, J. Math. Anal. Appl., 228, 73-95, (1998).

[19] Pehlivan, S. and Mamedov, M. A. “Statistical Cluster Points and Turnpike”, Optimization, 48, 93-106, (2001).

[20] Gadjiev, A. D. and Orhan, C. “Some Approximation Theorems Via Statistical Convergence”, Rocky Mountain J. Math., 32, 129-138, (2002).

[21] Kolk, E. “Matrix Summability of Statistically Convergent Sequences”, Analysis. 13, 77-83, (1993).

[22] Karakaya, V. and Chishti, T.A. “Weighted Statistical Convergence”, İranıan Journal of Science and Technology. Transaction A, vol.33,No.A3, (2009).

[23] Küçükaslan, M. “Weighted Statistical Convergence”, İnternational Journal of Science and Technology,vol.2,no.10, (2012).

[24] Mursaleen, M., Karakaya, V., Erturk, M., Gursoy, F. “Weighted Statistical Convergence And Its Application to Korovkin Type Approximation Theorem”, Applied Mathematics and Computation 218,9132-9137, (2012).

[25] Hardy, G. H. “Divergent Series”, Oxford Univ. Press, London, (1949).

[26] Petersen, G. M. “Reguler Matrix Transformations”, Mc Graw Hill Pablishing Company Limited, London, (1966).

[27] Niven, I. and Zuckerman, H. S., Montgomery, H. L. “An Introduction to the Theory of Numbers”,fifty edition, Wiley, (1991).

7. ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı: Zehra KURTDİŞİ

Doğum Yeri: Adana

Doğum Tarihi: 02/02/1981

Öğrenim Durumu:

Derece	Kurum	Yıl
Lise	Nevşehir Anadolu Öğretmen Lisesi	1996-1999
Lisans	Selçuk Üniversitesi Eğitim Fakültesi	1999-2004

Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Matematik Öğretmeni (MEB)	Mersin-Tarsus Sağlıklı İ.Ö.O.	2004-2007
Matematik Öğretmeni (MEB)	Mersin-Mut Hamam Karatahta İ.Ö.O.	2007-2010
Matematik Öğretmeni (MEB)	Mersin-Tarsus Hayrünnisa Köylügil İ.Ö.O.	2010-2012
Matematik Öğretmeni (MEB)	Mersin-Tarsus İ.M.K.B. Tek.ve End.Meslek Lisesi	2012-…