SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONA SAHİP RİEMANN ÇAPRAŞIK ÇARPIM MANİFOLDUNUN ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

ALİ YAKAR

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
NİSAN – 2014

Ali YAKAR tarafından Doç.Dr. Erol YAŞAR danışmanlığında "Semi-seimetrik Metrik Konneksiyona Sahip Riemann Çapraşık Çarpım Manifoldunun Altmanifoldlarının Geometrisi Üzerine " başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Nazım KERİMOV

Doç.Dr. Erol KILIÇ

Doç.Dr. Erol YAŞAR

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..16./.05./.2014.tarih ve.2014...11...../..309..... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç.Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONA SAHİP RİEMANN ÇAPRAŞIK ÇARPIM MANİFOLDUNUN ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ ÜZERİNE

Ali YAKAR

ÖZ

Bu çalışmada Levi-Civita konneksiyonuna sahip Riemann çapraşık çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldunun geometrisi ile semi-simetrik metrik konneksiyona sahip Riemann çapraşık çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldunun geometrisi arasındaki ilişki araştırılmıştır. Semi-simetrik metrik konneksiyona sahip Riemann çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldunun Riemann çarpım manifoldu olmadığı gösterildi. Son olarak semi-simetrik metrik konneksiyona sahip invaryant altmanifold üzerindeki integral manifoldlardan bir tanesinin eğrilik invaryant altmanifold olmadığı elde edildi.

Anahtar Kelimeler: Riemann Manifold, Çapraşık çarpım manifoldu, İnvaryant altmanifold, Semi-simetrik, Metric Konneksiyon, Quarter simetrik konneksiyon.

Danışman: Doç. Dr. Erol YAŞAR, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

Yakar A., 2014. On Geometry of Submanifolds of Riemannian Warped Product Manifold with Semi-Symmetric Metric Connection, M. Sc. Thesis, Mersin Üniversity

ON GEOMETRY OF SUBMANİFOLDS OF RİEMANNİAN WARPED PRODUCT MANİFOLD WİTH SEMİ-SYMMETRİC METRİC CONNECTİON

Ali YAKAR

ABSTRACT

The relation between the geometry of the invariant submanifolds of Riemannian warped product manifold with Levi-Civita connection and the geometry of the invariant submanifolds of Riemannian warped product manifold with semi-symmetric metric connection is studied. It is showed that invariant submanifold of the Riemannian warped product manifold with semi-symmetric metric connection is not a Riemannian warped product manifold. Finally, it is obtained that one of integral manifolds on an invariant submanifold with semi-symmetric metric connection is not curvature-invariant submanifold.

Key Words: Riemannian Manifold, Warped Product Manifold, Invariant Submanifold, Semi-Symmetric, Metric Connection, Quarter Symmetric.

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Erol YAŞAR, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Bu çalışma konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında yardımlarını hiç eksik etmeyen, daima yanımda olan çok değerli tez danışmanım Doç Dr. Erol Yaşar'a ayrıca maddi ve manevi desteklerini esirgemeyen aileme teşekkürlerimi sunarım. Yüksek lisans ders ve tez aşamasında desteklerini hiçbir zaman esirgemeyen bölümdeki hocalarıma, tüm doktora, yüksek lisans arkadaşlarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE ve KISALTMALAR

M	Manifold
TM	Tanjant demet
$TM^{\perp}$	Normal demet
g	Metrik tensörü
∇	Konneksiyon
$\overset{\circ}{h}$	İkinci temel form
R	Eğrilik tensörü
[ ]	Lie-Bracket operatörü
H	Ortalama eğrilik
c	Sabit kesitsel eğrilik
K	Riemann Christoffel tensörü
e_i	Ortanormal baz
π, σ	Projeksiyon eşleştirmeleri(mapping)
$grad$	Gradyant
$\tilde{T}$	Torsion tensörü
D	Distribüsyon
I	Birim dönüşüm

1.GİRİŞ

Altmanifoldların geometrisi, diferensiyel geometrinin önemli konularından biridir. Riemannian manifoldlarda ise altmanifoldların ayrı bir yeri vardır. Riemann metrik, eğriler, yüzeyler ve altmanifoldları karekterize etmek daha sistematik ve metodolojik açıdan daha elverişli bir yapıya sahiptir. Her bir Riemann manifoldu üzerinde bir tek Levi-Civita konneksiyonu vardır. Bir Riemann manifoldunun altmanifolduda bir Riemann manifoldudur ve altmanifoldlar üzerine indirgenen konneksiyonda bir Levi-Civita konneksiyonudur.

Bir $(\tilde{M},\tilde{g})$ Riemann manifoldu üzerinde $f^3=f$ şartını sağlayan $(1,1)$ tipindeki bir f tensörüne $(3,1)-f-yapı$ ($f-structure$), $f^3=-f$ şartını sağlayan f $(1,1)$ tensörüne ise $(3,-1)-f-yapı$ denir. $(3,1)-f-yapı$ için kompleks yapı, hemen hemen kompleks yapı ve kontakt yapılar örnek verilebilir. $(3,-1)-f-yapı$ lar ise $para-yapı$ lar ($para-structure$) olarak adlandırılan yapılardır. Bunlara ise para-kompleks, para kontakt ve çarpım yapılar örnek olarak verilebilir. Böylece bir çarpım yapı bir $(3,1)-f-yapı$ dır ve bir Riemann manifoldunu distribüsyonlara ayırarak incelemek için oldukça elverişli bir yapıdır.

Eğer $(\tilde{M},\tilde{g})$ üzerinde $F^2=I$ şartını sağlayan bir $(1,1)$ tipinde tensör alanı ise $\tilde{M}$ ye bir hemen hemen Riemann çarpım manifoldu denir. Eğer F, Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel ise $\tilde{M}$ ye çarpım manifoldu denir. Bu durumda $\tilde{M}=M_1\times M_2$ şeklinde yazılır, burada M_1 ve M_2, F yardımıyla elde edilen distribüsyonlara karşılık gelen integral altmanifoldlarıdır. Bir çarpım yapı, F ye karşılık gelen altmanifoldların tamamen jeodezik olması ile karakterize edilir. Yani $(\tilde{M},F)$, bir çarpım manifoldu ise $\tilde{M}=M_1\times M_2$ olacak şekilde $\tilde{M}$ nın M_1 ve M_2 tamamen jeodezik altmanifoldları vardır. Çarpım manifoldlarının altmanifoldlarıda oldukça ilginçtir. Bunların başlıcaları invaryant, anti-invaryant, semi-invaryant, semi-anti-invaryant, slant, semi-slant, bi slant vs. şeklindeki altmanifoldlardır. Bu altmanifoldlar birçok geometricinin ilgi alanı olmuş ve son zamanlarda çalışılan popüler konulardan biri haline gelmiştir [5, 15, 17, 24, 26, 30].

Çapraşık çarpım manifoldları çarpım manifoldunun bir genelleştirmesi olarak ortaya çıkmıştır. Bir çapraşık çarpım manifoldu $\tilde{M}$, biri tamamen jeodezik diğeri tamamen umbilik olan iki altmanifold ile karakterize edilir. Bu durumda $\tilde{M} = M_1 \times_f M_2$ ile gösterilir ve burada f, M_1 üzerinde bir reel değerli diferensiyellenebilir pozitif fonksiyondur ve bu fonksiyona çarpım (warping) fonksiyonu denir. f, bir sabit fonksiyon olduğunda çarpım manifoldu elde edilir. Böylece çapraşık çarpım manifoldları bunların altmanifoldları da diferensiyel geometrinin önemli çalışma alanlarından birisidir [5, 6, 9, 13, 14, 15, 16, 17, 21, 22, 23, 24, 25, 26, 27, 28, 29, 30, 31, 32, 33, 34, 35, 36, 37, 38, 39, 40].

Her bir Riemann metrik doğal olarak Levi-Civita konneksiyonu doğurur. Riemann manifold üzerindeki konneksiyon bir Levi-Civita konneksiyon olmadığı zaman manifoldun geometrisinde ne tür değişiklikler olur? Bu sorunun cevabını aramak için Levi-Civita konneksiyonundan yararlanarak oldukça farklı konneksiyonlar tanımlanmıştır. Bunların başlıcaları metrik olmayan konneksiyonlar (non-metric connections), simetrik olmayan konneksiyonlar (non-symmetric connections), metrik olmayan simetrik konneksiyonlar (non-metric symmetric connections), metrik olan fakat simetrik olmayan konneksiyonlar (metrik non-symmetric connections), non-metrik quarter simetrik, metrik quarter simetrik vs. olarak adlandırılan konneksiyonlardır. Bunların tamamı onyedi tanedir ve M.M. Tripathi tarafından [20] deki makalesinde sınıflandırılmıştır.

Yüksek lisans tezi olarak hazırlanan bu çalışmada ‘Bir semi-simetrik konneksiyonuna sahip çapraşık çarpım manifoldunun geometrisi nasıl olur?’ sorusunun cevabı araştırılmıştır. Riemann çapraşık çarpım manifoldunun semi-simetrik konneksiyona göre altmanifoldları incelenmiştir. Levi-Civita konneksiyonuna sahip Riemann çapraşık çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldunun geometrisi ile semi-simetrik metrik konneksiyona sahip Riemann çapraşık çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldunun geometrisi arasındaki ilişki araştırılmıştır. Semi-simetrik metrik konneksiyona sahip Riemann çapraşık çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldunun Riemann çapraşık çarpım manifoldu olmadığı gösterildi. Bunun yanında semi-simetrik metrik konneksiyona sahip invaryant altmanifold üzerindeki integral manifoldlardan bir tanesinin eğrilik invaryant altmanifoldu olduğu fakat diğerinin eğrilik invaryant altmanifoldu olmadığı elde edildi. Ayrıca Levi-Civita konneksiyonuna sahip Riemann çarpım manifoldunun semi-invaryant altmanifoldlarının geometrisi ile quarter-simetrik

metrik konneksiyonuna sahip Riemann çarpım manifoldunun semi-invaryant altmanifoldlarının geometrisi incelendi. Quarter-simetrik metrik konneksiyonuna sahip Riemann çarpım manifoldunun semi-invaryant altmanifoldlarının D ve $D^{\perp}$ distribüsyonlarının integrallenebilirliği ve quarter-simetrik metrik konneksiyon için karma geodeziklik gibi temel özellikler elde edildi.

2.KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Riemann manifoldunun her altmanifoldu bir Riemann manifoldudur. Çünkü Riemann manifoldu üzerindeki Riemann metriği , her zaman altmanifold üzerindeki bir Riemann metriği olarak indirgenebilir. Bunlarla ilgili ilk çalışmalar 19. Yüzyılın ilk yıllarına dayanmaktadır.

Diferensiyellenebilir manifold üzerindeki semi-simetrik lineer konneksiyonların gösterimi ilk defa 1924 yılında Friedmann ve Schouten tarafından verildi [11]. Daha sonra Hayden Riemann manifold üzerindeki semi-simetrik metrik konneksiyonun tanımını yaptı [13]. 1970 yılında, Yano semi-simetrik metrik konneksiyonu göz önüne alarak hiperyüzeyin bazı özelliklerini çalıştı [7]. Imai semi-simetrik metrik konneksiyonuna sahip Riemann manifoldunun hiperyüzeyinin temel bazı özelliklerini ve Gauss–Codazzinin konformal denklemlerini elde etti [12].

Çapraşık çarpım manifoldu ilk defa Bishop ve ONeill tarafından tanımlandı [14]. Daha sonra çapraşık çarpım manifoldları bir çok yazar tarafından çalışıldı [1], [13], [15] ve [16]. Bu çalışmalarda çapraşık çarpım manifold $\tilde{M} = M_1 \times_f M_2$ nin tümleme Riemann manifold olması için gerek ve yeter şartın M_1 ve M_2 manifollarının her ikisininde tümleme Riemann manifold olması gerektigi ispatlandı. ONeill, çapraşık çarpım manifoldu $\tilde{M} = M_1 \times_f M_2$ nin kovaryant türevini ve eğrilik formüllerini verdi[14]. Eğer (M, g), $(M_1 \times M_2, g_1 \otimes g_2)$ Riemann çarpım manifoldunun invariant altmanifoldu ise (M, g) nin de (M_a, g_a) ve (M_b, g_b) Riemann manifoldlarının lokal çarpım manifold olduğu K. Matsumoto tarafından ispatlandı [17]. Xu Senlin ve Ni Yilong , eğer $(\tilde{M}, \tilde{g})$, $(\tilde{M}, \tilde{g}) = (M_1 \times M_2, g_1 \times g_2)$ nin umbilik altmanifoldu ise (M_a, g_a) ve (M_b, g_b) nin de sırasıyla, (M_1, g_1) ve (M_2, g_2) nin umbilik altmanifdu olduğunu ispatladı[9]. Şahin ve Atçeken Riemann çarpım manifoldunun altmanifoldlarının geometrisini çalıştılar [41]. Atçeken, Şahin ve Kılıç Riemann çapraşık çarpım manifoldunun invariant altmanifoldunun bazı özelliklerini araştırdı [5]. Bunların yanında Özgür and Sular semi-simetrik metrik konneksiyonlu çapraşık çarpım manifoldunu göz önüne alarak Levi-Civita konneksiyonu ve semi-simetrik konneksiyon arasındaki ilişkiyi elde ettiler [6].

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1.TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 3.1.1. V bir reel vektör uzayı olsun.

$$g \ : \ V \times V \to \mathbb{R}$$

dönüşümü $\forall a,b \in \mathbb{R}$ ve $\forall u,v,w \in V$ için

(i) $\mathrm{g}(\mathrm{u},\mathrm{v}) = \mathrm{g}(\mathrm{v},\mathrm{u})$

(ii) $\mathrm{g}(\mathrm{au}+\mathrm{bv},\mathrm{w}) = \mathrm{ag}(\mathrm{u},\mathrm{w}) + \mathrm{bg}(\mathrm{v},\mathrm{w})$

$$\mathrm{g}(\mathrm{u},\mathrm{av}+\mathrm{bw}) = \mathrm{ag}(\mathrm{u},\mathrm{v}) + \mathrm{bg}(\mathrm{u},\mathrm{w})$$

özelliklerine sahip ise g dönüşümüne V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form denir [1].

Tanım 3.1.2. V reel vektör uzayı üzerinde bir simetrik bilineer form g olsun.

(i) $\forall v \in V$ ve $\mathrm{v} \neq 0$ için $g(v,v) > 0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif tanımlı,

(ii) $\forall v \in V$ ve $\mathrm{v} \neq 0$ için $g(v,v) < 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif tanımlı,

(iii) $\forall v \in V$ için $g(v,v) \geq 0$ ise g simetrik bilineer formuna pozitif yarı-tanımlı,

(iv) $\forall v \in V$ için $g(v,v) \leq 0$ ise g simetrik bilineer formuna negatif yarı-tanımlı

denir [1].

Tanım 3.1.3. V bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde simetrik bilineer form olsun. $\forall v \in V$ için

$$g(\xi,v) = 0$$

olacak şekilde bir $0 \neq \xi \in V$ vektörü var ise g simetrik bilineer formuna V uzerinde dejeneredir denir. Aksi durumda g ye

non-dejeneredir denir. Buradan görülür ki, g nin non-dejenere olması için gerek ve yeter şart $\forall u \in V$ için

$$g(u,v)=0 \text{ iken } v=0$$

olmasıdır [2].

Tanım 3.1.4. V bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde simetrik bilineer form olsun. V nin

$$RadV = \{\xi \in V : \mathrm{g}(\xi, v) = 0, \forall v \in V\}$$

şeklinde tanımlı altuzayına, g simetrik bilineer formuna göre V uzayının radikal (veya null) uzayı denir [2].

Tanım 3.1.5. V bir reel vektör uzayı ve g, V üzerinde simetrik bilineer form olsun.

$$g|_w : W \times W \to \mathbb{R}$$

negatif tanımlı olacak şekildeki en büyük boyutlu W altuzayının boyutuna g simetrik bilineer formun indeksi denir ve v ile gösterilir [1].

Teorem 3.1.1. V bir reel vektör uzayı ve V üzerinde simetrik bilineer form g olsun. Bu durumda,

(i) $g(\alpha_i, \alpha_j) = 0, \quad i \neq j$,

(ii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = 1, \quad 1 \leq i \leq \gamma$,

(iii) $g(\alpha_i, \alpha_i) = -1, \quad \gamma + 1 \leq i \leq \gamma + v$,

(iv) $g(\alpha_i, \alpha_i) = 0, \quad \gamma + v + 1 \leq i \leq n = \gamma + v + \mu$, olacak şekilde V nin $\{\alpha_1,...,\alpha_n\}$ bazı vardır [2].

Tanım 3.1.6. V reel vektör uzayı üzerinde non-dejenere simetrik bilineer forma V reel vektör uzayı üzerinde bir skalar çarpım denir. V üzerindeki bir skalar çarpım g ise (V,g) ikilisine de skalar çarpım uzayı denir.

Eğer g pozitif tanımlı ise o zaman g bir iç çarpım olur. Eğer g nin indeksi $v=1$ ise g ye Lorentz (Minkowski) metriği ve (V,g) yede Lorentz (Minkowski) uzayı denir. Eğer g dejenere ise o zaman V vektör uzayına g ye göre lightlike (dejenere) vektör uzayı denir [2].

Teorem 3.1.2. V, $v-indeksli$ bir skaler çarpım uzayı ve W, V nin bir altuzayı olsun. O zaman,

$$RadW = RadW^{\perp} = W \cap W^{\perp}$$

dir [2].

Tanım 3.1.7. V bir skaler çarpım uzayı olsun. Bu uzayın;

$$g(f_i, f_j) = g(f_i^*, f_j^*) = 0,\; g(f_i, f_j^*) = \delta_j^i,\; i, j \in \{1,2,...,\mu\}$$

$$g(u_\alpha, f_i) = g(u_\alpha, f_i^*) = 0,\; g(u_\alpha, u_\beta) = \varepsilon_\alpha \delta_{\alpha\beta},\; \alpha, \beta \in \{1,2,...,t\}, \varepsilon_\alpha = \pm 1$$

olacak şekildeki $\{f_1,...., f_\mu, f_1^*,...., f_\mu^*, u_1,...., u_t\}$ bazına skaler çarpım uzayın quasi-ortanormal bazı denir [2].

3.2. RİEMANN MANİFOLDLARI

Tanım 3.2.1. A bir küme ve τ, A kümesinin alt kümelerinin bir ailesi olsun. Eğer

(i) $\emptyset \in \tau$ ve $A \in \tau$,

(ii) τ ailesinin keyfi sayıda birleşimi τ ailesine aittir. Yani $\{B_i\}_{i\in I}, B_i \in \tau$ ise $\bigcup_i B_i \in \tau$

(iii) τ ya ait sonlu sayıdaki kümelerin kesişimi τ ailesine aittir. Yani $\{B_i\}_{i\in J}$, J sonlu sayıda indis için, $B_i \in \tau$ ise $\bigcap_i B_i \in \tau$,

şartları sağlanır ise τ ya A üzerinde topoloji ve (A,τ) ikilisine topolojik uzay denir [3].

Tanım 3.2.2. (A,τ) topolojik uzay olmak üzere farklı her $x, y \in A$ için bu noktaların ayrık birer komşuluğu varsa, topolojik uzaya Hausdorff uzay denir [3].

Tanım 3.2.3. (A,τ) ve (A',τ') iki topolojik uzay, $f \ : \ A \ \to \ A'$ bir fonksiyon ve $x_0 \in A$ olsun. $f(x_0) \in A'$ noktasının her N' komşuluğu için $f(N) \subset N'$ olacak şekilde $x_0 \in A$ noktasının bir N komşuluğu varsa f fonksiyonuna x_0 noktasında süreklidir denir. Eğer $f \ : \ A \ \to \ A'$ fonksiyonu her $x_0 \in A$ için sağlanıyorsa f fonksiyonuna süreklidir denir. Eğer f fonksiyonu birebir, örten, sürekli ve terside sürekli ise f fonksiyonuna homeomorfizma denir. Bu durumda (A,τ) topolojik uzayı (A',τ') uzayına homeomorfiktir denir [3].

Tanım 3.2.4. M bir Hausdorff uzay olsun. Eğer $p \in M$ için, $\mathbb{R}^m$ deki bir açık kümeye homeomorfik olacak şekilde p noktasının bir açık komşuluğu U varsa M Hausdorff uzayına bir topolojik manifold veya kısaca manifold denir. Bu durumda $boy(\mathbb{R}^m) = m$ olduğundan manifold da $m-boyutlu$ dur [3].

Tanım 3.2.5. Tanım 3.2.4 te verilen homeomorfizma $\varphi : \varphi(U) \subset \mathbb{R}^m$ ise, (U,φ) ikilisine bir harita veya bir koordinat komşuluğu denir [3].

Tanım 3.2.6. M, $m-boyutlu$ manifold olsun. Eğer M üzerinde haritaların bir ailesi olan $A=\{(U_i,\Psi_i)\}_{i\in I}$ kümesi için aşağıdaki şartlar sağlanıyorsa A koleksiyonuna M üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir yapı veya atlas adı verilir.

(i) $\{U_i\}_{i\in I}$ açık kümelerinin koleksiyonu M manifoldunun bir açık örtüsüdür.

(ii) A daki herhangi iki harita r. mertebeden uyumludur.

(iii) A maksimaldir, yani bir $(\tilde{\varphi},\tilde{U})$ haritası A daki bütün koordinat atlasları ile uyumlu ise bu durumda $(\tilde{\varphi},\tilde{U})\in A$ dır [3].

Tanım 3.2.7. Eğer bir M manifoldu üzerinde r. mertebeden diferensiyellenebilir bir atlas varsa M manifolduna r. mertebeden diferensiyellenebilir manifold denir.

Diferensiyellenebilir yapının her bir haritasına M manifoldunun uyumlu haritası adı verilir. Eğer atlas her mertebeden diferensiyellenebiliyorsa M manifolduna $C^{\infty}-manifold$ (veya kısaca diferensiyellenebilir manifold) adı verilir [3].

Tanım 3.2.8. M diferensiyellenebilir bir manifold olsun ve manifold üzerindeki diferensiyellenebilir vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda

$$g:\chi(M)\times\chi(M)\rightarrow C^{\infty}(M)$$

ile tanımlı g bilineer formu simetrik ve pozitif tanımlı ise, yani $\forall X,Y\in\chi(M)$ için

(a) $g(X,Y)=g(Y,X)$

(b) $g(X,X)\geq 0$ ve $\forall X$ için $g(X,X)=0 \Leftrightarrow X=0$

şartları sağlanıyorsa g bilineer formuna Riemann metriği veya metrik tensör adı verilir. Böylece (M,g) ikilisine Riemann manifoldu denir [3].

Tanım 3.2.9. M, Riemann manifoldu üzerinde g metrik tensörünün indeksine Riemann manifoldunun indeksi denir ve $indM$ ile gösterilir. Eğer indeks v ise $0\leq v\leq boyM$ dir. Yani $v=0$ ise manifold Riemann manifoldudur. Özel olarak $v=1$ ve boyutu $n\geq 2$ ise, o zaman M ye Lorentz manifoldu ve g ye de Lorentz metriği, $v\geq 2$ ve boyutu $n\geq 2$ ise M ye semi-Riemann manifoldu ve g ye de semi-

Riemann metriği denir.

Tanım 3.2.10. M diferensiyellenebilir m boyutlu manifold ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olmak üzere, M üzerinde

$$D : M \to \bigcup T_pM$$

$$p \to D_p \subset T_pM, \ boy(D_p) = r$$

şeklinde tanımlı D dönüşümüne $r-boyutlu$ distribüsyon denir. $X \in \chi(M)$ için $X_p \in D_p$ ise X vektör alanına da D ye aittir denir. Eğer her $p \in M$ noktası için D_p de r tane diferensiyellenebilir lineer bağımsız vektör alanı var ise D distribüsyonuna diferensiyellenebilirdir denir [3].

Tanım 3.2.11. M bir diferensiyellenebilir manifold, M manifoldunda bir U açık kümesi üzerinde vektör alanları X ve Y olmak üzere, $f \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ fonksiyonu için

$$\begin{aligned} [,] : \chi(M)\times\chi(M) &\to \chi(M) \\ (X,Y) &\to [X,Y] : C^\infty(M,\mathbb{R}) \to C^\infty(M,\mathbb{R}) \\ f &\to [X,Y]\,f = X(Yf) - Y(Xf) \end{aligned}$$

ile tanımlanan dönüşüme X ve Y vektör alanlarının Lie(parantez) operatörü denir. Burada $X(f)$, f fonksiyonunun X vektör alanına göre yöne göre türevidir[3].

Lemma 3.2.1. M bir diferensiyellenebilir manifold, M manifoldunda bir U açık kümesi üzerinde vektör alanları X ve Y olmak üzere, $f,g \in C^\infty(U,\mathbb{R})$ fonksiyonları ve $\lambda \in \mathbb{R}$ için Lie parantez operatörü aşağıdaki özelliklere sahiptir.

[1] $[X,Y](f+g) = [X,Y](f) + [X,Y](g)$,

[2] $[X,Y](\lambda f) = \lambda[X,Y](f)$,

[3] $[X,Y](fg) = [X,Y](f)g + [X,Y](g)f$,

[4] $[X,[Y,Z]] + [Y,[Z,X]] + [Z,[X,Y]] = 0$

dır [3].

Tanım 3.2.12. M , $n-boyutlu$ bir manifold ve

$$\varphi : \mathbb{R}\times M \to M$$

$$(t, p) \to \varphi_t(p) = \varphi(t, p)$$

diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Eğer

(i) $\varphi_0(p) = p$

(ii) $s,t \in \mathbb{R}$ için $\varphi_s \circ \varphi_t(p) = \varphi_{s+t}(p)$

ise $\mathbb{R}$, M üzerinde diferensiyellenebilir olarak etki eder denir. Bu durumda φ_t ye M manifoldu üzerindeki $1-parametreli$ dönüşüm grubu denir. Burada $\mathbb{R}$ yerine bir aralık alınırsa dönüşüm yerel $1-parametreli$ dönüşüm grubu adını alır. Bu durumda bir dönüşüm grubu M üzerinde bir vektör alanı üretir. Bunun terside doğrudur, yani $p \in M$ olmak üzere X_p bir φ_t yerel $1-parametreli$ dönüşüm grubu tanımlar [3].

Tanım 3.2.13. M diferensiyellenebilir bir manifold, X , M üzerinde herhangi bir vektör alanı ve φ_t de $1-parametreli$ dönüşüm grubu olsun. Bu durumda Φ, M üzerinde bir tensör alanı olmak üzere, Φ tensörünün X vektör alanına göre Lie türevi

$$(L_X\Phi)_p = \lim_{x\to 0}\frac{1}{t}(\Phi_p - (\tilde{\varphi}_t\Phi)_p), \quad p \in M$$

ile tanımlanır, burada $\tilde{\varphi}$, $T(\varphi^{-1}(p))$ tensör cebirinden $T(p)$ tensör cebirine bir izomorfizmadır ve

$$(\tilde{\varphi}\Phi)_p = \tilde{\varphi}\Phi_{\varphi^{-1}(p)}$$

ile tanımlanır [3].

Lemma 3.2.2. M diferensiyellenebilir bir manifold ve L_X de manifold üzerinde tanımlı Lie türevi olsun. O zaman $\forall Y,Z \in \chi(M)$ ve $f \in C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ için

(i) $L_X f = X(f)$,

(ii) $L_x Y = [X, Y]$,

(iii) Ψ , M üzerinde $(0,2)$ tipinde bir tensor alanı olmak üzere

$$(L_X \Psi)(Y,Z) = X(\Psi(Y,Z)) - \Psi([X,Y],Z) - \Psi(Y,[X,Z]),$$

dir [2].

Tanım 3.2.14. $\{u_1,....,u_n\}$, $\mathbb{R}_v^n$ üzerinde doğal koordinatlar olsun. $V = \sum V_i \partial_i$ ve $W = \sum W_i \partial_i$, $\mathbb{R}_v^n$ üzerinde vektör alanları iseler

$$\nabla_V W = \sum V(W_i)\partial_i$$

vektör alanına W nin V ye göre kovaryant türevi denir [1].

Tanım 3.2.15. M bir manifold ve manifold üzerinde vektör alanlarının kümesi $\chi(M)$ olsun. Bu durumda $X,Y,Z \in \chi(M)$ vektör alanları ve $f \in C^\infty(M,\mathbb{R})$ için

$$\nabla : \chi(M) \rightarrow \chi(M)$$

ile tanımlı ve

(1) $\nabla_{X+Y} Z = \nabla_X Z + \nabla_Y Z$,

(2) $\nabla_X (Y+Z) = \nabla_X Y + \nabla_X Z$,

(3) $\nabla_{fX} Z = f \nabla_X Z$,

(4) $\nabla_X fY = X(f)Y + f\nabla_X Y$,

şartlarını sağlayan ∇ dönüşümüne afin veya lineer konneksiyon adı verilir. Bir afin konneksiyon M üzerinde ki bir vektör alanını yine bir vektör alanına taşıyan dönüşümdür [3].

Teorem 3.2.1. M Riemann manifoldu üzerinde $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

(i) $[X,Y] = \nabla_X Y - \nabla_Y X$

(ii) $Xg(Y,Z) = g(\nabla_X Y, Z) + g(Y, \nabla_X Z)$

olacak şekilde M nin tek bir Levi-Civita konneksiyonu vardır ve bu konneksiyon

$$2g(Y,\nabla_X Z) = Xg(Y,Z) + Yg(Z,X) + Zg(X,Y) - g(X,[Y,Z])$$
$$- g(Y,[Z,X]) - g(Z,[X,Y])$$

Kozsul formülü ile karakterize edilir [1].

Tanım 3.2.16. M , Levi-Civita konneksiyonu ∇ olan bir Riemann manifoldu olsun. $\forall X,Y,Z \in \chi(M)$ için

$$R : \chi(M)\times\chi(M)\times\chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X,Y,Z) \to R(X,Y)Z = \nabla_X\nabla_Y Z - \nabla_Y\nabla_X Z - \nabla_{[X,Y]}Z$$

biçiminde tanımlanan M üzerinde $(1,3)$ tipindeki R fonksiyonuna M nin Riemann eğrilik tensörü denir [1].

Teorem 3.2.2. M bir Riemann manifoldu ve R , M nin Riemann eğrilik tensörü olsun. O zaman $\forall X,Y,Z,W \in \chi(M)$ için

(i) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(Y,X)Z,W)$,
(ii) $g(R(X,Y)Z,W) = -g(R(X,Y)W,Z)$,
(iii) $R(X,Y)Z + R(Y,Z)X + R(Z,X)Y = 0$,
(iv) $g(R(X,Y)Z,W) = g(R(Z,W)X,Y)$

dir [1].

Tanım 3.2.17. M bir manifold ve ∇ manifold üzerinde lineer konneksiyon olsun. Bu durumda

$$T : \chi(M)\times\chi(M) \to \chi(M)$$

$$(X,Y) \to T(X,Y) = \nabla_X Y - \nabla_Y X - [X,Y]$$

ile tanımlı tensör alanına ∇ lineer konneksiyonunun torsiyon tensörü denir. Açıktır ki T , $(2,1)-$*mertebeli* tensör alanıdır. $T = 0$ olması durumunda ∇ lineer konneksiyonu torsiyonsuzdur denir [3].

Tanım 3.2.18. (M,g), $n-boyutlu$ bir Riemann manifoldu ve M üzerinde lokal ortanormal vektör alanları $e_1, e_2, ..., e_n$ olsun. Bu durumda $X, Y \in \chi(M)$ için

$$S \;:\; \chi(M)\times\chi(M) \;\to\; C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

$$(X,Y) \;\to\; S(X,Y) = izR(.,X)Y$$

dönüşümü ile tanımlı $(2,0)-mertebeli$

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i, X)Y, e_i)$$

tensör alanına (M,g) manifoldunun Ricci tensörü adı verilir. M manifoldunun Ricci operatörü ise,

$$g(RicX,Y) = S(X,Y)$$

ile tanımlanır. Ricci tensörü simetriktir, yani

$$S(X,Y) = \sum_{i=1}^{n} g(R(Y,e_i)e_i, X) = \sum_{i=1}^{n} g(R(e_i,Y)X, e_i) = S(Y,X)$$

dir [3].

Tanım 3.2.19. (M,g), $n-boyutlu$ bir Riemann manifoldu ve M manifoldunun bir p noktasındaki tanjant uzayı T_pM olsun. T_pM uzayının $2-boyutlu$ bir altuzayı P olsun. P düzlemini geren birim vektörler x ve y olmak üzere

$$K(P) = K(x,y) = \frac{g(R(x,y)y,x)}{g(x,x)g(y,y)-g(x,y)^2}$$

değerine M manifoldunun P düzlemine göre kesit eğriliği denir. Kolayca görülür ki kesit eğriliği P düzlemi için seçilen bazlardan bağımsızdır [3].

Teorem 3.2.3. Eğer M manifoldu $\forall p \in M$ noktasında bir sabit c eğriliğine sahipse M nin eğrilik tensörü $\forall X, Y, Z \in \chi(M)$ için

$$R(X,Y)Z = c(g(Y,Z)X - g(X,Z)Y)$$

olarak ifade edilir. Bu durumda M ye sabit eğrilikli uzay veya uzay formu denir [2].

Tanım 3.2.20. (M,g), $n-boyutlu$ bir Riemann manifoldu ve $p \in M$ noktasındaki tanjant uzay T_pM olsun. T_pM uzayının $2-boyutlu$ bir altuzaylarına göre kesit eğriliklerinin toplamına M manifoldunun skaler eğriliği denir ve r ile gösterilir. Buna göre T_pM uzayının ortanormal bazı $\{e_1, e_2, ..., e_n\}$ olmak üzere

$$r = \sum_{i=1}^{n} S(e_i, e_i)$$

dır. Diğer taraftan manifoldun X doğrultusundaki Ricci eğriliği $k(X)$

$$k(X) = \frac{S(X,X)}{g(X,X)}$$

ile tanımlanır [3].

Tanım 3.2.21. M bir Riemann manifold olsun. Eğer $\lambda \in \mathbb{R}$ için

$$Ric(X_P, X_P) = \lambda g(X_P, X_P)$$

ise M ye Einstein manifoldu denir [18].

Tanım 3.2.22. M bir Riemann manifold ve R de M nin eğrilik tensörü olsun.

Eğer, $R = 0$ ise M ye lokal flat ve $\nabla R = 0$ ise M ye lokal simetrik uzay denir [18].

Tanım 3.2.23. M ve N sırası ile m ve $n-boyutlu$ diferensiyellenebilir manifoldlar ve $F : M \to N$ diferensiyellenebilir dönüşüm olsun. Bu durumda F dönüşümünün $p \in M$ noktasındaki rankı, F_* dönüşümünün p noktasındaki rankı olarak tanımlanır. Eğer her p noktasında F dönüşümünün rankı m ise, (yani $rank(F_{*p}) = m$), F dönüşümüne dolgulama veya immersiyon(immersion) adı verilir. Eğer F birebir ise bu durumda F dönüşümü N ile $\tilde{N} = F(M)$ arasında birebir eşleşme kurar. Bu eşleşme ile birlikte $\tilde{N}$ üzerinde topoloji ve diferensiyellenebilir bir yapı tanımlanırsa $\tilde{N}$ kümesine N manifoldunun alt manifoldu denir. Bu durumda, eğer F, M manifoldundan $F(M)$ ye bir homeomorfizma ve $F(M)$ altuzay topolojisine sahip ise F dönüşümüne yerleştirme(imbedding) denir [3].

Tanım 3.2.24. $\tilde{M}$, diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\tilde{M}$ üzerinde $n-boyutlu$ bir distribüsyon olsun. Eğer $X,Y\in\Gamma(D)$ için $[X,Y]\in\Gamma(D)$ ise D distribüsyonuna involutive dir denir [3].

Tanım 3.2.25. $\tilde{M}$ diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\tilde{M}$ üzerinde $n-boyutlu$ bir distribüsyon olsun. M , $\tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olmak üzere, eğer M nin her p noktasında M manifoldunun tanjant uzayı ile D_p aynı ise M ye D distribüsyonunun integral manifoldu denir. Yani

$$f : M \to \tilde{M}$$

bir imbeding olmak üzere $\forall p\in M$ için

$$f_*(T_M(p)) = D_p$$

dır [3].

Tanım 3.2.26. Eğer D distribüsyonunun M altmanifoldunu kapsayan başka bir integral manifoldu yoksa bu manifolda distribüsyonun maksimal integral manifoldu denir [3].

Tanım 3.2.27. $\tilde{M}$, diferensiyellenebilir bir manifold ve M , $\tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer $\forall p\in M$ için D distribüsyonunun p noktasını kapsayan bir maksimal integral manifoldu varsa D distribüsyonununa integrallenebilirdir denir [3].

Teorem 3.2.4.(Frobenius Teoremi) $\tilde{M}$, diferensiyellenebilir bir manifold ve D, $\tilde{M}$ üzerinde $n-boyutlu$ bir distribüsyon olsun. Bu durumda her involutive distribüsyon integrallenebilirdir. Üstelik D distribüsyonunun $\forall p\in M$ noktasından geçen bir tek maksimal integral manifoldu vardır ve p noktasını ihtiva eden diğer tüm integral manifoldlar bu maksimalın bir açık altmanifoldudur [3].

Tanım 3.2.28. (M,g) Riemann manifoldu ve $f:(M,g)\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$h_f : \chi(M) \to \chi(M)$$

$$X \to h_f(X) = \nabla_X \nabla f$$

lineer dönüşümüne (M,g) üzerinde f fonksiyonunun Hessian tensörü denir. Hessian tensörü simetriktir [3].

Tanım 3.2.29. (M,g) Riemann manifoldu ve $f:(M,g)\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda

$$H_f : \chi(M)\times\chi(M) \to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$$

$$(X,Y) \to H_f(X,Y) = g(h_f(X),Y)$$

tensörüne (M,g) üzerinde f fonksiyonunun Hessian formu denir. Hessian formu (M,g) üzerinde simetriktir [3].

Tanım 3.2.30. (M,g) bir Riemann manifoldu ve $f:(M,g)\to C^{\infty}(M,\mathbb{R})$ fonksiyon olsun. (M,g) üzerinde f fonksiyonunun Laplasyanı Δf,

$$\Delta f = -div\nabla f$$

olarak tanımlanır [3].

Tanım 3.2.31. M ve N sırasıyla m ve $n-boyutlu$ $(n<m)$ manifoldlar ve $F:M\to N$ örten dönüşüm olsun. Eğer $p\in M$ noktasında $F_*:T_pM\to T_{F(p)}N$ dönüşümünün rankı n ise F dönüşümüne sığdırma veya submersiyon (submersion) adı verilir. Eğer F bir sığdırma ise $\forall q\in N$ için $F^{-1}(q)=F_q$ kümesi M

manifoldunun bir altmanifoldudur ve $F^{-1}(q)$ altmanifolduna sığdırmanın lifi adı verilir. M manifoldunun, $q \in N$ için F_q lifine teğet olan tanjant vektörüne sığdırmanın dikey vektörü adı verilir [3].

Tanım 3.2.32. E, B, F, $C^{\infty}-$*manifoldlar* ve $\pi : E \to B$ bir $C^{\infty}-$*dönüşüm* olsun ve bu dönüşüm lokal çarpım özelliğine sahip olsun (böylece bu dönüşüm örten ve açık bir dönüşümdür). Bu durumda $\zeta = (E, \pi, B, F)$ dörtlüsüne bir differensiyellenebilir lif demeti adı verilir [3].

Tanım 3.2.33. $\pi : E \to B$ bir lif demeti olsun. $\forall x \in B$ için

$$\pi^{-1}(x) = F_x = \{u \in E \,|\, \pi(u) = x\}$$

kümesine x üzerinde lif denir. Tüm F_x liflerinin ayrık bileşimi E total uzayını verir. Yani

$$E = \bigcup_{x \in B} F_x$$

dır [3].

Tanım 3.2.34. M, $\tilde{M}$ nin bir Riemann altmanifoldu olsun. $\forall p \in M$ için

$T_pM^{\perp}$ uzayının boyutuna M nin dik tümleyeninin boyutu (eş boyutu), $T_pM^{\perp}$ in

indeksine de M nin dik tümleyenin indeksi denir [1].

$(\tilde{M}, \tilde{g})$, $(m+n)-$*boyutlu* Riemann manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın içine gömülmüş $m-$*boyutlu* bir Riemann manifoldu olsun. $\tilde{M}$ üzerindeki $\tilde{g}$ dan M ye indirgenmiş Riemann metrik tensörünü g ile gösterelim. n ekboyutuna (codimension) sahip M için, n, $T_pM^{\perp}$ normal uzayının boyutudur. $\tilde{M}$ üzerinde $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ dan M üzerine indirgenmiş Levi-Civita konneksiyonunu $\overset{\circ}{\nabla}$ ile gösterelim. Böylece $\forall X, Y \in \Gamma(TM)$ için $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ ya göre Gausss ve Weingarten denklemleri sırasıyla

$$\tilde{\overset{\circ}{\nabla}}_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \overset{\circ}{h}(X,Y), \quad X,Y \in \Gamma(TM) \tag{3.2.1}$$

ve

$$\tilde{\overset{\circ}{\nabla}}_X \xi = \overset{\circ}{A}_\xi X + \overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}_X \xi, \quad \xi \in \Gamma(TM^{\perp}) \tag{3.2.2}$$

dır, burada $\overset{\circ}{h}$, M üzerinde ikinci temel formdur [1,4], $\overset{\circ}{\nabla}{}^{\perp}$, $\Gamma(TM^{\perp})$ normal vektör demetinde normal konneksiyon ve $\overset{\circ}{A}_\xi$ ise M üzerinde

$$g(\overset{\circ}{h}(X,Y),\xi) = g(\overset{\circ}{A}_\xi X, Y) \tag{3.2.3}$$

şeklinde tanımlanan $(1,1)$ tipinde tensördür (diğer bir deyişle şekil operatörüdür).

Tanım 3.2.35. M bir Riemann manifoldu olsun. Eğer $\alpha : I \to M$ eğrisinin teğet vektör alanı α boyunca paralel ise jeodeziktir denir. Öklidyen uzayın jeodezikleri doğrulardır. Keyfi bir manifoldda jeodezik kavramı doğruya karşılık gelen geometrik nesneler olarak düşünülebilir [3].

Tanım 3.2.36.

$$h : \chi(M) \times \chi(M) \to \chi(M)^{\perp}$$

ile tanımlı h dönüşümüne ikinci temel form denir [3].

Tanım 3.2.37. $(\tilde{M}, g)$ bir Riemann manifoldu ve M, $\tilde{M}$ manifoldunun bir altmanifoldu olsun. Eğer h ikinci temel form sıfır ise altmanifolda tamamen jeodeziktir (totally geodesic) denir [3].

Tanım 3.2.38.

$$A_V : \chi(M) \to \chi(M)$$

ile tanımlı operatöre Weingarten temel tensörü denir [3].

Tanım 3.2.39. $V \in \chi(M)^{\perp}$ ve $\lambda \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ olmak üzere $A_V = \lambda I$ ise M

altmanifoldu V vektör alanına göre umbiliktir denir [3].

Tanım 3.2.40. Eğer M altmanifoldu her normal vektör alanına göre umbilik ise M altmanifolduna tamamen (totally) umbilik altmanifold denir [3].

Tamamen jeodezik ve tamamen umbilik şöyle de tanımlanabilir.

Tanım 3.2.41. $M \subset \tilde{M}$ altmanifoldu için H ortalama eğrilik vektör alanı

$$H = \frac{1}{m}\sum_{i=1}^{m} \overset{\circ}{h}(e_i, e_i),$$

formülü ile tanımlanır. Burada $\{e_i\}$, $\chi(M)$ de yerel ortanormal tabandır. $M \subset \tilde{M}$ bir altmanifoldu her $X, Y \in \chi(M)$ ve $\lambda \in C^{\infty}(M, \mathbb{R})$ için $\overset{\circ}{h} = 0$ ise tamamen jeodezik, $\overset{\circ}{h} = \lambda g$ ise tamamen umbilik ve $H = 0$ ise minimaldır denir[4].

$\forall X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ ve $\overset{\circ}{\nabla}$ konneksiyonlarına göre $\tilde{M}$ ve M nın eğrilik tensörleri sırasıyla

$$\overset{\circ}{\tilde{R}}(X,Y)Z = \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_X \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_Y Z - \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_Y \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_X Z - \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{[X,Y]} Z$$

ve

$$\overset{\circ}{R}(X,Y)Z = \overset{\circ}{\nabla}_X \overset{\circ}{\nabla}_Y Z - \overset{\circ}{\nabla}_Y \overset{\circ}{\nabla}_X Z - \overset{\circ}{\nabla}_{[X,Y]} Z$$

ile tanımlansın. Böylece $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ ve $\overset{\circ}{\nabla}$ ya göre Gausss, Codazzi-Mainardi ve Ricci denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\tilde{R}}(X,Y,Z,W) &= \overset{\circ}{R}(X,Y,Z,W) \\ &\quad + \{\overset{\circ}{h}(X,Z)\overset{\circ}{h}(Y,W) - \overset{\circ}{h}(Y,Z)\overset{\circ}{h}(X,W)\}\end{aligned}, \tag{3.2.4}$$

ve

$$\overset{\circ}{\tilde{R}}(X,Y,Z)^{\perp} = \{(\overset{\circ}{\nabla}_X \overset{\circ}{h})(Y,Z) - (\overset{\circ}{\nabla}_Y \overset{\circ}{h})(X,Z)\}, \tag{3.2.5}$$

$$\tilde{R}(X,Y,\xi,\eta) = R^N(X,Y,\xi,\eta) - g([A_\xi, A_\eta]X,Y)\,, \tag{3.2.6}$$

dir, burada X,Y,Z,W M ye teğet ve ξ,η vektör alanları M ye ortagonaldir [1,4].

$\tilde{M}(c)$, c sabit kesit eğrilikli uzayı ise, Gausss, Codazzi denklemleri sırasıyla

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{\tilde{K}}(X,Y,Z,W) &= c\{g(X,W)g(Y,Z) - g(X,Z)g(Y,W)\} \\ &\quad + \overset{\circ}{h}(X,W)\overset{\circ}{h}(Y,Z) - \overset{\circ}{h}(X,Z)\overset{\circ}{h}(Y,W),\end{aligned} \tag{3.2.7}$$

$$(\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_X \overset{\circ}{h})(Y,Z) = (\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_Y \overset{\circ}{h})(X,Z) \tag{3.2.8}$$

ve

$$\overset{\circ}{\tilde{K}}(X,Y,Z,W) = g([A_\xi, A_\eta]X,Y), \tag{3.2.9}$$

denklemleri elde edilir, burada K, M nin Riemann Christoffel tensörüdür [1,5].

3.3. ÇARPIM MANİFOLDLARI

$\tilde{M}$ bir $(m+n)-boyutlu$ bir diferensiyellenebilir manifold ve F de $\tilde{M}$ üzerinde $(1,1)$ tipinde tensör alanı olsun ve $F^2 = I$ şartını sağlasın. Bu durumda F ye bir hemen hemen çarpım yapısı ve $\tilde{M}$ ye de bir hemen hemen çarpım manifoldu denir. Eğer

$$\pi = \frac{1}{2}(I+F), \quad \sigma = \frac{1}{2}(I-F) \tag{3.3.1}$$

denilirse, bu durumda

$$\pi + \sigma = I, \ \ \pi^2 = \pi, \ \sigma^2 = \sigma, \ \pi\sigma = \sigma\pi = 0$$

ve

$$F = \pi - \sigma \tag{3.3.2}$$

elde edilir. $F^2 = I$ olduğundan kolayca görülebilirki F nin özdeğerleri $+1$ ve -1 dir. Böylece $+1$ ve -1 değerlerine birbirinin tümleyeni olan P ve Q distribüsyonları karşılık gelir, yani

$$T\tilde{M} = P \oplus Q \tag{3.3.3}$$

olarak yazılır, burada P nin boyutu m ve Q nun boyutu n dir. Tersine olarak, eğer $\tilde{M}$ de birbirinin tümleyeni olan P ve Q gibi iki distribüsyon var ve

$$\pi : TM \to P, \qquad \sigma : TM \to Q$$

projeksiyonlar olmak üzere $F = \pi - \sigma$ ile $\tilde{M}$ üzerinde bir hemen hemen çarpım yapısı tanımlanabilir.

Eğer bir hemen hemen çarpım manifoldu $\tilde{M}$ üzerinde bir $\tilde{g}$ Riemann metriği var ve $\tilde{M}$ üzerindeki X,Y vektör alanları için

$$\tilde{g}(FX, FY) = g(X,Y) \tag{3.3.4}$$

sağlanıyor ise $\tilde{M}$ ye bir hemen hemen Riemann çarpım manifoldu denir. Eğer P distribüsyonunun maksimal integral altmanifoldu M_1 ve Q distribüsyonunun maksimal integral altmanifoldu M_2 ise $\tilde{M} = M_1 \times M_2$ olarak yazılır. Eğer hemen hemen Riemann çarpım manifoldunda hemen hemen çarpım yapı F paralel ise yani $X, Y \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$(\mathring{\tilde{\nabla}}_X F)Y = 0 \qquad (3.3.5)$$

ise F ye $\tilde{M}$ üzerinde bir çarpım yapı $(\tilde{M}, \tilde{g}, F)$ ye de bir Riemann çarpım manifoldu denir [19].

3.4. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYON

$(\tilde{M},\tilde{g})$ bir Riemann manifold ve $\tilde{\nabla}$ de $\tilde{M}$ üzerinde bir lineer konneksiyon olsun. Eğer $\tilde{\nabla}$ nın torsion tensörü $\tilde{M}$ üzerinde her X,Y vektör alanı için

$$\tilde{T}(\tilde{X},\tilde{Y})=\tilde{\pi}(\tilde{Y})\tilde{X}-\tilde{\pi}(\tilde{X})\tilde{Y}$$

olarak ifade ediliyor ise $\tilde{\nabla}$ lineer konneksiyonuna semi-simetrik konneksiyon denir, burada $\tilde{\pi}$, $\tilde{M}$ üzerinde $1-form$ dur. Eğer $\tilde{\pi}$ $1-form$ una karşılık gelen vektör alanı $\tilde{Q}$ ile gösterilirse, $\tilde{\pi}$

$$\tilde{\pi}(\tilde{X})=g(\tilde{X},\tilde{Q})$$

şeklinde verilir.

Eğer

$$\tilde{\nabla}\tilde{g}=0$$

ise $\tilde{\nabla}$ ya, semi-simetrik metrik konneksiyon adı verilir.

$(\tilde{M},\tilde{g})$ Riemann manifoldunun Levi-Civita konneksiyonu $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ olmak üzere $\forall X,Y\in\Gamma(TM)$ için

$$\tilde{\nabla}_{\tilde{X}}\tilde{Y}=\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{\tilde{X}}\tilde{Y}+\tilde{\pi}(\tilde{Y})\tilde{X}-\tilde{g}(\tilde{X},\tilde{Y})\tilde{Q} \qquad (3.4.1)$$

olarak tanımlanan lineer konneksiyon $\tilde{M}$ üzerinde bir semi-simetrik metrik konneksiyondur. Bundan sonra semi-simetrik metrik konneksiyon denildiğinde (3.4.1) ile tanımlanan konneksiyonu kastedeceğiz [6,7].

$(\tilde{M},\tilde{g})$, $\tilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyona sahip bir Riemann manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\tilde{\nabla}$ ye göre Gauss formülü

$$\tilde{\nabla}_X Y=\nabla_X Y+h(X,Y),\ X,Y\in\Gamma(TM) \qquad (3.4.2)$$

ile verilir, burada $\nabla_X Y \in \Gamma(TM)$, $h(X,Y) \in \Gamma(TM^{\perp})$ olup ∇, $\tilde{\nabla}$ dan M üzerine indirgenen konneksiyon ve h da M nin $\tilde{\nabla}$ ya göre ikinci temel formudur. Burada h, $(0,2)$ tipinde tensör olup

$$h(X,Y) = h_1(X,Y) + h_2(X,Y)$$

şeklinde tanımlanır. (3.4.1) denkleminde (3.2.1) ve (3.4.2) denklemleri yerine yazılırsa

$$\nabla_X Y + h(X,Y) = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \overset{\circ}{h}(X,Y) + \tilde{\pi}(Y)X - g(X,Y)\tilde{Q} \qquad (3.4.3)$$

denklemi bulunur, burada $\pi(Y) = g(Y,Q)$, $\tilde{\pi}$ $1-form$ una karşılık gelen vektör alanı $\tilde{Q} = Q + \xi$ şeklinde teğet ve normal bileşenlerine ayrılırsa ve bu (3.4.3) de gözönüne alınırsa

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \pi(Y)X - g(X,Y)Q \qquad (3.4.4)$$

ve

$$h(X,Y) = \overset{\circ}{h}(X,Y) - g(X,Y)\xi$$

elde edilir.

(3.4.4) denkleminden şöyle bir sonuç verilebilir.

Sonuç 3.4.1 $(\tilde{M},\tilde{g})$, (3.4.1) ile verilen semi-simetrik metrik konneksiyona sahip bir Riemann manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nin bir altmanifoldu olsun. Bu durumda $\tilde{\nabla}$ dan M üzerine indirgenen ∇ konneksiyonu M üzerinde bir semi-simetrik metrik konneksiyondur.

İspat (3.4.4) den kolayca görülürki

$T(X,Y) = \pi(Y)X - \pi(X)Y$ ve $\nabla g = 0$ dır.

$X \in \Gamma(TM)$ ve $N \in \Gamma(TM^{\perp})$ için semi-simetrik metrik konneksiyon $\tilde{\nabla}$ ya göre Weingarten formülü

$$\tilde{\nabla}_X N = -\tilde{A}_N X + \tilde{\nabla}_X^{\perp} N \tag{3.4.5}$$

olarak ifade edilir, burada $\tilde{A}_N X \in \Gamma(TM)$ ve $\tilde{\nabla}_X^{\perp} N \in \Gamma(TM^{\perp})$ dir. Ayrıca $\tilde{A}_N$ ye $\tilde{\nabla}$ nın Weingarten dönüşümü veya şekil operatörü ve $\tilde{\nabla}^{\perp}$ e de $\tilde{\nabla}$ nın normal demet üzerine indirgenen normal konneksiyonu denir. (3.4.1) den

$$\tilde{\nabla}_X N = \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_X N + \tilde{\pi}(N)X - \tilde{g}(X,N)\tilde{Q} \tag{3.4.6}$$

olur. Levi-Civita konneksiyonunun Weingarten formülü kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_X N = -A_N X - \tilde{\pi}(N)X + \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}{}_X^{\perp} N \tag{3.4.7}$$

olur. (3.4.5) ve (3.4.7) karşılaştırılırsa

$$\tilde{A}_N X = A_N X - \tilde{\pi}(N)X, \quad \tilde{\nabla}_X^{\perp} N = \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}{}_X^{\perp} N \tag{3.4.8}$$

olarak elde edilir.

Sonuç 3.4.2 Eğer $\tilde{\pi}$ $1-form$ una karşılık gelen vektör alanı $\tilde{Q} \in \Gamma(TM)$ ise bu durumda $N \in \Gamma(TM^{\perp})$ için $\tilde{A}_N = A_N$ dir.

$\tilde{R}$ ve $\overset{\circ}{\tilde{R}}$, $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun sırasıyla $\tilde{\nabla}$ ve $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ ya göre eğrilik tensörleri olsunlar. Böylece $X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)Z = {} & \overset{\circ}{\tilde{R}}(X,Y)Z + \tilde{g}(Z,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_X \tilde{Q})Y - \tilde{g}(Z,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_Y \tilde{Q})X \\
& + \tilde{g}(X,Z)\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_Y \tilde{Q} - \tilde{g}(Y,Z)\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_X \tilde{Q} \\
& + \tilde{\pi}(\tilde{Q})[\tilde{g}(X,Z)Y - \tilde{g}(Y,Z)X] \\
& + [\tilde{g}(Y,Z)\tilde{\pi}(X) - \tilde{g}(X,Z)\tilde{\pi}(Y)]\tilde{Q} \\
& + \tilde{\pi}(Z)[\tilde{\pi}(Y)X - \tilde{\pi}(X)Y]
\end{aligned} \tag{3.4.9}$$

dır [7].

3.5. İNVARYANT ALTMANİFOLDLAR

$(\tilde{M} = M_1 \times M_2, \tilde{g})$ bir Riemann çarpım manifoldu olsun. π ve σ, sırasıyla $\Gamma(T(M_1 \times_f M_2))$den $\Gamma(TM_1)$ ve $\Gamma(TM_2)$ ye projeksiyonlar olsun. Bu durumda

$$\pi^2 = \pi, \quad \sigma^2 = \sigma, \quad \pi\sigma = \sigma\pi = 0, \quad \pi + \sigma = I$$

eşitlikleri vardır, burada I, $\Gamma(T(M_1 \times M_2))$ nin birim dönüşümüdür. Eğer $F = \pi - \sigma$ dersek $F^2 = I$ olur ve F, $\tilde{M}$ üzerinde bir çarpım yapıdır. Buradan her $X, Y \in \Gamma(T(M_1 \times_f M_2))$ için

$$\tilde{g}(FX, Y) = \tilde{g}(X, FY) \text{ veya } \tilde{g}(FX, FY) = \tilde{g}(X, Y)$$

olduğu görülür [5]. M, $M_1 \times M_2$ nin altmanifoldu ve B de $M_1 \times M_2$ nin içinde M nin i gömmesinin diferansiyeli, $B = i_*$ olsun. X, M nin teğet vektör alanı için $(FBX)^T = BSX \in \Gamma(TM)$, $(FBX)^\perp = \xi \in \Gamma(TM)^\perp$ ve $S \; : \; \Gamma(TM) \to \Gamma(TM)$ lineer dönüşüm ise FBX,

$$FBX = (FBX)^T + (FBX)^\perp = BSX + \xi$$

dir. Eğer $FBX = BSX$ eşitliği sağlanır ise M ye $M_1 \times M_2$ nin invaryant altmanifoldu denir. M bir invaryant olsun. Bu durumda $S^2 = I$ dır [5]. Böylece $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$g(X, Y) = i^* \tilde{g}(X, Y) = \tilde{g}(FBX, FBY) = \tilde{g}(BSX, BSY) = \tilde{g}(SX, SY)$$

eşitliği elde edilir, burada g, $\tilde{g}$ Riemann çarpım metrik tensörü tarafından M üzerine indirgenmiş metrik tensödür [5].

3.6. RİEMANN ÇARPIM MANİFOLDUNUN SEMİ-İNVARYANT ALTMANİFOLDLARI

Bu bölümde $(\tilde{M}_1 \times \tilde{M}_2, \tilde{g}_1 \times \tilde{g}_2)$ Riemann çarpım manifoldunu $(\tilde{M}, \tilde{g})$ ile ifade edeğiz.

Tanım 3.6.1. M , $\tilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun bir altmanifoldu olsun. D ve $D^{\perp}$, M nin iki distribüsyonu ve $TM = D \oplus D^{\perp}$ olsun. Eğer $F(D) = D$ ve $F(D^{\perp}) \subset TM^{\perp}$ ise D ve $D^{\perp}$ ye sırasıyla invaryant ve anti-invaryant distribüsyon adı verilir. Böylece M ye de $\tilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun semi-invaryant altmanifoldu denir [41].

Bundan sonra M yi $\tilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun semi-invaryant altmanifoldu olarak kabul edeceğiz. $TM^{\perp}$ deki $F(D^{\perp})$ nin ortagonal tümleyenini V ile gösterilirse

$$TM^{\perp} = F(D^{\perp}) \oplus V \tag{3.6.1}$$

ayrışımına sahip oluruz, burada V , F ye göre $TM^{\perp}$ de invaryant distribüsyondur. P ve Q ile TM nin D ve $D^{\perp}$ e projeksiyon dönüşümlerini ifade edelim. Bununla birlikte M ye teğet her X için, FX

$$FX = fX + \omega X \tag{3.6.2}$$

dir. Burada $fX = FPX$, FX in teğetsel kısmı, $\omega X = FQX$ ise FX in normal kısmıdır. Ayrıca M ye normal her ξ vektör alanı için $F\xi$

$$F\xi = B\xi + C\xi \tag{3.6.3}$$

şeklinde yazılabilir, burada $B\xi$ ve $C\xi$ sırasıyla $F\xi$ in teğetsel ve normal kısımlarıdır [13].

D invaryant ve $D^{\perp}$ anti-invaryant distribüsyonlarının boyutu sırasıyla p ve q olsun. Eğer $q = 0$ $(p = 0)$ ise M semi-invaryant altmanifolduna invaryant altmanifold (anti-invaryant altmanifold) denir.

Örnek 3.6.1. $(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)$, R^6 nın standart koordinat sistemi olsun. Bu durumda $F(x_1,x_2,x_3,x_4,x_5,x_6)=(x_1,x_2,x_3,-x_4,-x_5,-x_6)$ olarak tanımlanan F , R^6 üzerinde bir çarpım yapıdır. Bu durumda

$$x_1 = x_6 + \frac{1}{2}(x_3+x_4)^2, x_2 = x_5$$

İle tanımlanan M altmanifoldunu gözönüne alalım. Böylece M altmanifoldunun $R^6 = R^3 \times R^3$ nın semi-invaryant altmanifoldu olduğu kolayca görülür. Doğrudan hesaplama ile

$$TM = Span\{U_1 = \frac{\partial}{\partial X_2} + \frac{\partial}{\partial X_5}, U_2 = (X_3+X_4)\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_3},$$
$$U_3 = (X_3+X_4)\frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_4}, U_4 = \frac{\partial}{\partial X_1} + \frac{\partial}{\partial X_6}\}$$

ve

$$TM^{\perp} = Span\{\xi_1 = -\frac{\partial}{\partial X_1} + (X_3+X_4)\frac{\partial}{\partial X_3} + (X_3+X_4)\frac{\partial}{\partial X_4} + \frac{\partial}{\partial X_6},$$
$$\xi_2 = \frac{\partial}{\partial X_2} - \frac{\partial}{\partial X_5}\}$$

dir, burada $D = Span\{U_2,U_3,U_4\}$ ve $D^{\perp} = Span\{U_1\}$ dir [41].

Tanım 3.6.2. $\tilde{M}$, Riemann çarpım manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın semi-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $X \in \Gamma(D)$ ve $Y \in \Gamma(D^{\perp})$ için $h(X,Y)=0$ ise M ye karma-jeodezik semi-invaryant altmanifold denir [41].

Önerme 3.6.1. $\tilde{M}$, Riemann çarpım manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın semi-invaryant altmanifoldu olsun. $Z,W \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$A_{FZ}W = -A_{FW}Z \tag{3.6.4}$$

dir [41].

Lemma 3.6.1. $\tilde{M}$, Riemann çarpım manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın semi-invaryant altmanifoldu olsun. Böylece $X \in \Gamma(D)$ ve $\xi \in \Gamma(V)$ için

$$A_{\xi} FX = A_{F\xi} X \tag{3.6.5}$$

dir [41].

Lemma 3.6.2. $\tilde{M}$, Riemann çarpım manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın semi-invaryant altmanifoldu olsun. Böylece $Z, W \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$\nabla^{\perp}_{Z} FW - \nabla^{\perp}_{W} FZ \in \Gamma(D)$$

dir[41].

Teorem 3.6.1. $\tilde{M}$, Riemann çarpım manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın semi-invaryant altmanifoldu olsun. $D^{\perp}$ nin integrallenebilir olması için gerek ve yeterli şart $X \in \Gamma(D)$ ve $W \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$\mathrm{h(X,W)} \in \Gamma(\mathrm{V}) \tag{3.6.7}$$

olmasıdır [41].

Teorem 3.6.2. $\tilde{M}$, Riemann çarpım manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın semi-invaryant altmanifoldu olsun. D nin integrallenebilir olması için gerek ve yeterli şart $X, Y \in \Gamma(D)$ için

$$\mathrm{h(X,FY)} = \mathrm{h(Y,FX)} \tag{3.6.8}$$

olmasıdır [41].

Lemma 3.6.3. $\tilde{M}$, Riemann çarpım manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın semi-invaryant altmanifoldu olsun. $X \in \Gamma(D)$ ve $\xi \in \Gamma(V)$ için

$$A_{F\xi} X = FA_{\xi} X \tag{3.6.9}$$

dir [41].

Teorem 3.6.3. $\tilde{M}$, Riemann çarpım manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın semi-invaryant altmanifoldu olsun. M nin yerel Riemann çarpım manifoldu olması için gerek ve yeterli şart $X \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için $A_{FZ}X = 0$ olmasıdır [41].

Önerme 3.6.2. Riemann çarpım manifoldunun pseudo umbilik proper semi-invaryant altmanifoldu karma-jeodezik altmanifoldtur [41].

Teorem 3.6.4. $\tilde{M}$, Riemann çarpım manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın semi-invaryant altmanifoldu olsun. M nin yerel Riemann çarpım manifoldu olması için gerek ve yeterli şart $\nabla f = 0$ olmasıdır [41].

Teorem 3.6.5. $\tilde{M}$, Riemann çarpım manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın semi-invaryant altmanifoldu olsun. M nin yerel Riemann çarpım manifoldu olması için gerek ve yeterli şart $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için $\mathrm{Bh(X,Y)} = 0$ olmasıdır [41].

Teorem 3.6.6. $\tilde{M}$, Riemann çarpım manifoldu ve M de $\tilde{M}$ nın semi-invaryant altmanifoldu olsun yani $F(D^{\perp}) = TM^{\perp}$. M nin yerel Riemann çarpım manifoldu olması için gerek ve yeterli şart $X \in \Gamma(TM)$ ve $Y \in \Gamma(D)$ için $\mathrm{h(X,Y)} = 0$ olmasıdır [41].

Teorem 3.6.7. M, Riemann çarpım manifoldu $\tilde{M}$ nın tamamen umbilik proper semi-invaryant altmanifoldu olsun. Böylece

(i) $\dim D^{\perp} = 1$,

(ii) M tamamen jeodezik altmanifolddur,

koşulları sağlanır [41].

Teorem 3.6.8. Riemann çarpım manifoldu $\tilde{M}$ nın pozitif veya negatif eğrilikli tamamen umbilik proper semi-invaryant altmanifoldu yoktur [41].

3.7. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONLU ÇAPRAŞIK ÇARPIM MANİFOLDLARI

(M_1, g_{M_1}) ve (M_2, g_{M_2}) Riemann manifoldları ve f, M_1 de bir pozitif diferansiyellenebilir fonksiyon olsun. $\pi : M_1 \times M_2 \to M_1$ ve $\sigma : M_1 \times M_2 \to M_2$ projeksiyonlarına sahip $M_1 \times M_2$ çarpım manifoldunu göz önüne alalım. $M_1 \times_f M_2$ çapraşık çarpımının (warped product) Riemann metriği , M deki X, Y vektörleri için

$$\tilde{g}(X,Y) = g_1(\pi_* X, \pi_* Y) + f^2(\pi(p)) g_2(\sigma_* X, \sigma_* Y)$$

şeklinde ifade edilir. Böylece

$$\tilde{g} = g_{M_1} + f^2 g_{M_2} \tag{3.7.1}$$

eşitliği vardır, burada f bir çarpım(warping) fonksiyonudur [1].

Daha sonra kullanmak için aşağıdaki üç lemmaya ihtiyacımız olacak:

Lemma 3.7.1. $M = M_1 \times_f M$ olmak üzere ∇, $\overset{M_1}{\nabla}$ ve $\overset{M_2}{\nabla}$ ile sırasıyla M , M_1 ve M_2 deki Riemann konneksiyonlarını ifade etsin. Eğer $X, Y \in M_1$ ve $V, W \in M_2$ vektör alanları ise

(i) $\nabla_X Y = \overset{M_1}{\nabla}_X Y$ dir.

(ii) $\nabla_X V = \nabla_V X = (Xf / f)V$ dir.

(iii) $nor(\nabla_V W) = -fg_2(X_2, Y_2) gradf$ dir.

(iv) $\tan(\nabla_V W) = \overset{M_2}{\nabla}_V W$ dir [6].

Lemma 3.7.2. $M = M_1 \times_f M$, $\overset{M}{R}$ Riemann eğriliğine sahip çapraşık çarpım manifoldu olsun. $X, Y, Z \in M_1$ ve $U, V, W \in M_2$ vektör alanları için

(i) $R(X,Y)Z = \overset{M_1}{R}(X,Y)Z$,

(ii) $\overset{M}{R}(V,X)Y = -(H_f(X,Y)/f)V$, burada H_f, f nin Hessianıdır,

(iii) $\overset{M}{R}(X,Y)V = \overset{M}{R}(V,W)X$,

(iv) $\overset{M}{R}(X,V)W = -(g(V,W)/f)\nabla_X(gradf)$,

(v) $\overset{M}{R}(V,W)U = \overset{M_2}{R}(V,W)U + \|gradf\|^2 / f^2\{g(V,U)W - g(W,U)V\}$,

olur [6].

Lemma 3.7.3. $M = M_1 \times_f M$, çapraşık çarpım manifoldu ve $\overset{M}{S}$ de M nin Ricci tensörü olsun. Bu durumda $X,Y \in TM_1$ ve $V,W \in TM_2$ için

(i) $\overset{M}{S}(X,Y) = \overset{M_1}{S}(X,Y) - \dfrac{d}{f}H_f(X,Y)$, burada $d = boyM_2$ dir.

(ii) $\overset{M}{S}(X,V) = 0$ dır.

(iii) $\overset{M}{S}(V,W) = \overset{M_2}{S}(V,W) - g(V,W)[\dfrac{\Delta f}{f} + \dfrac{d-1}{f}\|gradf\|^2]$, burada Δf, M_1 de f nin Laplasyanıdır.

Ayrıca, M nin skaler eğriliği $\overset{M}{r}$

$$\overset{M}{r} = \overset{M_1}{r} + \frac{\overset{M_2}{r}}{f^2} - \frac{2d}{f}\Delta f - \frac{d(d-1)}{f^2\|gradf\|^2}$$

olarak ifade edilir, burada $\overset{M_1}{r}$ ve $\overset{M_2}{r}$ sırasıyla M_1 ve M_2 nin skaler eğriliğidir [6].

3.7.1. Semi-Simetrik Metrik Konneksiyonlu Çapraşık Çarpım Manifoldları

Bu kısımda semi-simetrik metrik konneksiyonlu çapraşık çarpım manifoldu üzerinde eğrilik tensörü, Ricci tensörü ve skaler eğrilikle ilgili bazı sonuçlar verildi [6].

Lemma 3.7.1.1. $M = M_1 \times_f M$ göz önüne alınır ve $\overset{\circ}{\nabla}$ ile M deki semi-simetrik metrik konneksiyonu, ${}^{M_1}\overset{\circ}{\nabla}$ ve ${}^{M_2}\overset{\circ}{\nabla}$ ile de sırasıyla M_1 ve M_2 deki konneksiyonları ifade edilsin. Eğer $X, Y \in \chi(M_1)$, $V, W \in \chi(M_2)$ ve $Q \in \chi(M_1)$ için

(i) $nor(\nabla_V W) = {}^{M_1}\nabla_V W$,

(ii) $\overset{\circ}{\nabla}_X V = (Xf / f)V$ ve $\overset{\circ}{\nabla}_V X = [(Xf / f) + \pi(X)]V$,

(iii) $nor(\overset{\circ}{\nabla}_V W) = [g(V,W)/f]gradf - g(V,W)Q$,

(iv) $\tan(\overset{\circ}{\nabla}_V W) = {}^{M_2}\overset{\circ}{\nabla}_V W$ dir [6].

Lemma 3.7.1.2. $M = M_1 \times_f M$ göz önüne alınır ve $\overset{\circ}{\nabla}$ ile M deki semi-simetrik metrik konneksiyonu, ${}^{M_1}\overset{\circ}{\nabla}$ ve ${}^{M_2}\overset{\circ}{\nabla}$ ile de sırasıyla M_1 ve M_2 deki konneksiyonları ifade edilsin. Eğer $X, Y \in \chi(M_1)$, $V, W \in \chi(M_2)$ ve $Q \in \chi(M_2)$ için

(i) $nor(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) = {}^{M_1}\overset{\circ}{\nabla}_X Y$,

(ii) $\tan(\overset{\circ}{\nabla}_X Y) = -g(X,Y)Q$,

(iii) $\tan(\overset{\circ}{\nabla}_X V) = (Xf / f)V$ ve $nor(\overset{\circ}{\nabla}_X V) = \pi(V)X$,

(iv) $\overset{\circ}{\nabla}_V X = (Xf / f)V$,

(v) $nor(\overset{\circ}{\nabla}_V W) = [g(V,W)/f]gradf$,

(vi) $\tan(\overset{\circ}{\nabla}_V W) = {}^{M_2}\overset{\circ}{\nabla}_V W$ dir [6].

Lemma 3.7.1.3. $M = M_1 \times_f M$ çapraşık çarpım manifoldu olsun. R ve $\overset{\circ}{R}$, sırasıyla M nin Levi-Civita konneksiyonuna ve semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörlerini göstersin. $X, Y, Z \in \chi(M_1)$, $U, V, W \in \chi(M_2)$ ve $Q \in \chi(M_1)$ için

(i) $\overset{\circ}{R}(X,Y)Z \in \chi(M_1)$, M_1 de ${}^{M_1}\overset{\circ}{R}(X,Y)Z$ nin liftidir.

(ii) $R(V,X)Y = [H_f(X,Y)/f] + (Qf/f)g(X,Y) + \pi(Q)g(X,Y)$

$$+ g(Y,\nabla_X Q) - \pi(X)\pi(Y)]V \,,$$

(iii) $\overset{\circ}{R}(X,V)Y = 0$,

(iv) $\overset{\circ}{R}(V,W)X = 0$,

(v) $R(X,V)W = g(V,W)[(\nabla_X gradf)/f - (Qf/f)X - \nabla_X Q - \pi(Q)X + \pi(X)Q$,

(vi) $\overset{\circ}{R}(U,V)W = {}^{M_2}\overset{\circ}{R}(U,V)W - \{\|gradf\|^2/f^2 + 2(Qf/f)$

$$+\pi(Q)\}[g(V,W)U - g(U,W)V]$$

dir [6].

Lemma 3.7.1.4. $M = M_1 \times_f M$ çapraşık çarpım manifoldu olsun. R ve $\overset{\circ}{R}$, sırasıyla M nin Levi-Civita konneksiyonuna ve semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre Riemann eğrilik tensörlerini göstersin. Eğer $X,Y,Z \in \chi(M_1)$, $U,V,W \in \chi(M_2)$ ve $Q \in \chi(M_2)$ için aşağıdaki ifadeler elde edilir.

(i) ${}^{M_1}\overset{\circ}{R}(X,Y)Z = {}^{M_1}R(X,Y)Z + \pi(Q)[g(X,Z)Y - g(Y,Z)X]$,

(ii) ${}^{M_2}\overset{\circ}{R}(X,Y)Z = [g(X,Z)(Yf/f) - g(Y,Z)(Xf/f)]Q$,

(iii) ${}^{M_1}\overset{\circ}{R}(V,X)Y = -g((\pi(V)/f)gradf, Y)X + g(X,Y)[\pi(V)/f]gradf$,

(iv) ${}^{M_2}\overset{\circ}{R}(V,X)Y = [H_f(X,Y)/f]V - g(X,Y)(\tan(\nabla_V Q))$

$$-\pi(Q)g(X,Y)V + \pi(V)g(X,Y)Q$$

(v) $\overset{\circ}{R}(X,Y)V = \pi(V)[(Xf/f)Y - (Yf/f)X]$,

(vi) $\overset{\circ}{R}(V,W)X = (Xf/f)[\pi(W)V - \pi(V)W]$,

(vii) ${}^{M_1}\overset{\circ}{R}(X,V)W = -g(V,W)[(\nabla_X gradf)/f + \pi(Q)X]$

$$-g(W,\nabla_V Q)X + \pi(V)\pi(W)X \,,$$

(viii) $\overset{M_2}{}\overset{\circ}{R}(X,V)W = (Xf/f)[\pi(W)V - g(V,W)Q]$,

(ix) $$\overset{\circ}{R}(U,V)W = {}^{M_2}\overset{\circ}{R}(U,V)W - [\|gradf\|^2/f^2]\{g(V,W)U - g(U,W)V\}$$
$$+ g(W,\nabla_U Q)V - g(W,\nabla_V Q)U + g(U,W)\nabla_V Q$$
$$- g(V,W)\nabla_U Q - \pi(Q)[g(U,W)V - g(V,W)U]$$
$$+[g(V,W)\pi(U) - [g(U,W)\pi(V)]Q + \pi(W)[\pi(V)U - \pi(U)V]$$

dir [6].

Lemma 3.7.1.3 ve Lemma 3.7.1.4 den, semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre çarpım manifoldunun Ricci tensörünü elde ederiz.

Sonuç 3.7.1.1. $M = M_1 \times_f M$ çapraşık çarpım manifoldu olsun. S ve $\overset{\circ}{S}$, sırasıyla Levi-Civita konneksiyonu ve semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre M nin Ricci tensörleri, $boyM_2 = n_1$ ve $boyM_2 = n_2$ olsun. Eğer $X,Y \in \chi(M_1)$, $V,W \in \chi(M_2)$ ve $Q \in \chi(M_1)$ için

(i) $$\overset{\circ}{S}(X,Y) = {}^{M_1}\overset{\circ}{S}(X,Y) - n_2[H_f(X,Y)/f + (Qf/f)g(X,Y)$$
$$+\pi(Q)g(X,Y) + g(Y,\nabla_X Q) - \pi(X)\pi(Y)],$$

(ii) $\overset{\circ}{S}(X,V) = \overset{\circ}{S}(V,X) = 0$,

(iii) $$\overset{\circ}{S}(V,W) = {}^{M_2}\overset{\circ}{S}(V,W) - \sum_{i=1}^{n_1} g(\nabla_{e_i}Q, e_i)g(V,W)$$
$$-[(n_2-1)\|gradf\|^2/f^2 + (n_1+2n_2-2)(Qf/f)$$
$$+(n-2)\pi(Q) + \frac{\Delta f}{f}]g(V,W),$$

dir [6].

Sonuç 3.7.1.2. $M = M_1 \times_f M$ çapraşık çarpım manifoldu olsun. S ve $\overset{\circ}{S}$, sırasıyla Levi-Civita konneksiyonuna ve semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre M nin

Ricci tensörleri, $boyM_1 = n_1$ ve $boyM_2 = n_2$ olsun. $X, Y \in \chi(M_1)$, $V, W \in \chi(M_2)$ ve $Q \in \chi(M_2)$ için

$$\text{(i)}\quad \overset{\circ}{S}(X,Y) = {}^{M_1}\overset{\circ}{S}(X,Y) - (n-2)\pi(Q)g(X,Y) - n_2[H_f(X,Y)/f] - \sum_{i=n_1+1}^{n} g(\nabla_{e_i}Q, e_i)g(X,Y),$$

$$\text{(ii)}\quad \overset{\circ}{S}(X,V) = (2-n)\pi(V)(Xf/f) \text{ ve } \overset{\circ}{S}(V,X) = (n-2)\pi(V)(Xf/f),$$

$$\begin{aligned}\text{(iii)}\quad \overset{\circ}{S}(V,W) = {}& {}^{M_2}\overset{\circ}{S}(V,W) + \sum_{i=n_1+1}^{n} \{g(W, \nabla_{e_i}Q)g(V, e_i) - g(\nabla_{e_i}Q, e_i)g(V,W)\} \\ & -[(n_2-1)\|gradf\|^2/f^2 + \frac{\Delta f}{f} + (n-2)\pi(Q)]g(V,W) \\ & -(n-1)g(W, \nabla_V Q) + (n-2)\pi(V)\pi(W)\end{aligned}$$

olur. Sonuç 3.7.1.1 ve Sonuç 3.7.1.2 den semi-simetrik metrik konneksiyona göre çapraşık çarpımın skaler eğriliğini elde ederiz [6].

Sonuç 3.7.1.3. $M = M_1 \times_f M$ çarpım manifoldu olsun. r ve $\overset{\circ}{r}$, sırasıyla M nin Levi-Civita konneksiyonuna ve semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre skaler eğriliğini ve $Q \in \chi(M_1)$ olsun. Buradan

$$\begin{aligned}\overset{\circ}{r} = {}& {}^{M_1}\overset{\circ}{r} + n_2(n_2-1)\|gradf\|^2/f^2 - 2n_2(n-1)(Qf/f) \\ & -2n_2\frac{\Delta f}{f} - n_2[2n_1 + n_2 - 3] - 2n_2\sum_{i=1}^{n_1} g(\nabla_{e_i}Q, e_i)\end{aligned}$$

eşitliği elde edilir [6].

Sonuç 3.7.1.4. $M = M_1 \times_f M$ çarpım manifoldu olsun. r ve $\overset{\circ}{r}$, sırasıyla M nin Levi-Civita konneksiyonuna ve semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre skaler eğriliğini ve $Q \in \chi(M_2)$ olsun. Buradan

$$\overset{\circ}{r} = {}^{M_1}\overset{\circ}{r} + \frac{{}^{M_2}\overset{\circ}{r}}{f^2} - \sum_{i=n_1+1}^{n_2} 2(n-1)g(\nabla_{e_i}Q, e_i)$$
$$-(n-1)(n-2)\pi(Q) - n_2[(n_2-1)\|gradf\|^2 / f^2 + 2n_2\frac{\Delta f}{f}]$$

eşitliği elde edilir [6].

3.7.2. Semi-simetrik Metrik Konneksiyonlu Einstein Çapraşık Çarpım Manifoldları

Bu alt bölümde semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein çapraşık çarpım manifoldlarını inceleyeceğiz.

Teorem 3.7.2.1. (M,g) manifoldu, $I\times_f M$ nin çapraşık çarpım manifoldu olsun. Burada $boyI=1$ ve $boyM_2=n-1(n\geq 3)$ tür. Böylece (M,g) manifoldunun semi-simetrik metrik konneksiyonlu Einstein çapraşık çarpım manifoldu olması için gerek ve yeter şart $Q\in\chi(M_1)$ için M_2 nin için Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein manifoldu olmasıdır veya $Q\in\chi(M_2)$ için çarpım fonksiyonu olan f nin I da sabit olmasıdır [6].

Teorem 3.7.2.2. $boyI=1$ ve $boyM_2=n-1(n\geq 3)$ olmak üzere (M,g), $I\times_f M$ çapraşık çarpım manifoldu olsun. Bu durumda

(i) Eğer (M,g) semi-simetrik metrik konneksiyona göre Einstein manifoldu, $Q\in\chi(M_1)$, M_1 üzerindeki Levi-Civita konneksiyonuna göre paralel ve f, M_1 üzerinde sabit ise bu durumda

$${}^{M_1}\overset{\circ}{r} = -(n-2)^2\pi(Q)$$

dır.

(ii) (M,g), $Q\in\chi(M_2)$ için semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre Einstein manifoldu ise f M_1 üzerinde sabittir.

(iii)Eğer f M_1 üzerinde sabitse ve M_1 $Q \in \chi(M_2)$ için Levi-Civita konneksiyonuna göre Einstein manifoldu ise bu durumda M semi-simetrik metrik konneksiyona göre Einstein manifoldudur [6.]

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. SEMİ-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONA SAHİP RİEMANN ÇAPRAŞIK ÇARPIM MANİFOLDUNUN ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ

İlk önce ilerde ispatlarda kullanacağımız aşağıdaki lemmaları verelim.

Lemma 4.1.1. $\tilde{M} = M_1 \times_f M_2$ çapraşık çarpım manifoldu olsun. Her $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$ ve $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$ için

1) $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{X_1} Y_1 = \overset{\circ}{\nabla}{}^1_{X_1} Y_1 \in \Gamma(TM_1)$,

2) $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{X_1} X_2 = \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{X_2} X_1 = (X_1(f)/f)X_2$,

3) $nor(\nabla_{X_2} Y_2) = -fg_2(X_2, Y_2)gradf$

4) $\tan(\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{X_2} Y_2) = \overset{\circ}{\nabla}{}^2_{X_2} Y_2$

olur[1].

Lemma 4.1.2. $\tilde{M} = M_1 \times_f M_2$, $\tilde{R}$ Riemann eğrilik tensörlü çapraşık çarpım manifoldu olsun. Böylece

1) $\overset{\circ}{\tilde{R}}(X_1, Y_1)Z_1 = \overset{\circ}{R}{}_1(X_1, Y_1)Z_1$,

2) $\overset{\circ}{\tilde{R}}(X_2, Y_1)Z_1 = \dfrac{H_f(Y_1, Z_1)}{f} X_2$,

3) $\overset{\circ}{\tilde{R}}(X_1, Y_1)Z_2 = \overset{\circ}{\tilde{R}}(X_2, Y_2)Z_1 = 0$,

4) $\overset{\circ}{\tilde{R}}(X_1, Y_2)Z_2 = fg_2(Y_2, Z_2)\overset{\circ}{\nabla}{}^1_{X_1}(gradf)$

5) $\overset{\circ}{\tilde{R}}(X_2, Y_2)Z_2 = \overset{\circ}{\tilde{R}}_2(X_2, Y_2)Z_2 - \dfrac{\tilde{g}(gradf, gradf)}{f^2}\{\tilde{g}(X_2, Z_2)Y_2 - \tilde{g}(Y_2, Z_2)X_2\}$

olur[1]. Burada $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_1)$ ve $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_2)$ dir. Ayrıca H_f, f fonksiyonunun hessianıdır. $\overset{\circ}{R}_1$ ve $\overset{\circ}{R}_2$ sırasıyla M_1 ve M_2 nin Riemann eğrilik tensörleridir.

M, $\tilde{g}$ Riemann metrikli $(n+m+2)$ boyutlu $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun içine izometrik olarak gömülü $(n+m)$ boyutlu -Riemann manifoldu olsun. g_1 ve g_2 ile $\tilde{M}$ üzerindeki $\tilde{g}$ den M_1 ve M_2 üzerine indirgenmiş Riemann metrik tensörünü ifade edelim. 1 ekboyutlu M_1 ve M_2 için, ξ_a ve ξ_b dik kesitlerini seçebiliriz. ξ_a, M_a nın $TM_a^{\perp}$ normal demetinin ve ξ_b de M_b nin $TM_b^{\perp}$ normal demetinin elemanıdır. M_a ve M_b, $\tilde{M}$ nın elemanıdır ayrıca ξ_a, M_a nın, ξ_b de M_b nin her noktasında ortanormaldir.

Önerme 4.1.1. M, semi-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M} = M_1 \times_f M_2$ Riemann çarpaşık çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu ve f çarpım fonsiyonu olsun. Bunların yanında M_a ve M_b, M nin dikey ve yatay dağılımının integral manifoldu olarak ifade edilsin. Bu durumdan

(i) Eğer $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_2)$ ise semi-simetrik metrik konneksiyona M_a ve M_b nin her ikiside tamamen umbiliktir.

(ii) Eğer $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_1)$ ise semi-simetrik metrik konneksiyona M_a ve M_b sırasıyla tamamen jeodezik ve tamamen umbiliktir.

İspat. i) $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_2)$ olsun. $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_a)$ için (3.4.1) denklemi kullanılırsa

$$\tilde{\nabla}_{X_1} Y_1 = \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{X_1} Y_1 + \pi(Y_1) X_1 - g(X_1, Y_1) \tilde{Q} \tag{4.1.1}$$

yazılır, burada $\tilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyon, $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ ise Levi-Civita konneksiyonudur. (3.2.1) ve (3.4.2) denklemleri (4.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\overset{a}{\nabla}_{X_1} Y_1 + h_a(X_1, Y_1) = \overset{\circ}{\nabla}{}^{a}_{X_1} Y_1 + \overset{\circ}{h}_a(X_1, Y_1) + \pi(Y_1) X_1 - g(X_1, Y_1) \tilde{Q}$$

eşitliğini elde edilir, burada h_a ve $\overset{\circ}{h}_a$, M_a nın semi-simetrik metrikkonneksiyona ve Levi-Civita konneksiyona göre ikinci temel formlarıdır.

Böylece yukarıdaki denkleminden $Z_2 \in \Gamma(TM_b)$ için

$$g(h_a(X_1,Y_1),Z_2) = g(\overset{\circ}{h}_a(X_1,Y_1),Z_2) - g(X_1,Y_1)g(\tilde{Q},Z_2)$$

eşitliği elde edilir [5]. Buradan $\overset{\circ}{h}_a(X_1,Y_1)=0$ olduğu için

$$g(h_a(X_1,Y_1),Z_2) = -g(X_1,Y_1)g(\tilde{Q},Z_2)$$

dir. Buradan $h_a(X_1,Y_1) = -g_1(X_1,Y_1)\tilde{Q}$ sonucuna ulaşılır. Bu ise semi-simetrik metrik konneksiyonlu M_a nın tamamen umbilik olduğunu gösterir.

Aynı metodu kullanılırsa, (3.4.1) denkleminden

$$\tilde{\nabla}_{X_2}Y_2 = \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{X_2}Y_2 + \pi(Y_2)X_2 - g(X_2,Y_2)\tilde{Q}$$

yazılır, burada $\tilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyon, $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ ise Levi-Civita konneksiyonudur. Böylece yukarıdaki denklemden , $Z_1 \in \Gamma(TM_a)$ için

$$g(h_b(X_2,Y_2),Z_1) = g(\overset{\circ}{h}_b(X_2,Y_2),Z_1)$$

bulunur. Yani

$$h_b(X_2,Y_2) = \overset{\circ}{h}_b(X_2,Y_2)$$

olur. $\overset{\circ}{h}_b(X_2,Y_2) = -fg_2(X_2,Y_2)gradf$ olduğu için

$$h_b(X_2,Y_2) = \overset{\circ}{h}_b(X_2,Y_2) = -fg_2(X_2,Y_2)gradf$$

elde edilir. Bu ise semi-simetrik metrik konneksiyonlu M_b nin tamamen umbilik olduğunu gösterir.

ii) Buradaki ispatta (i) deki metod uygulanacaktır. [5] den biliyoruz ki M_a ve M_b sırasıyla M_1 ve M_2 nin altmanifoldudur. $\tilde{M}$ semi-simetrik metrik konneksiyonlu çapraşık çarpım manifoldu göz önüne alınır ve (3.2.1), (3.4.1) ve (3.4.2) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned}\nabla_{X_1}Y_1 + h(X_1,Y_1) + \nabla_{X_2}Y_2 + h(X_2,Y_2) = \overset{\circ}{\nabla}_{X_1} Y_1 + \overset{\circ}{h}(X_1,Y_1) + \overset{\circ}{\nabla}_{X_2} Y_2 \\ + \overset{\circ}{h}(X_2,Y_2) + \tilde{\pi}(Y_1)X_1 + \tilde{\pi}(Y_2)X_2 \\ -g(X_1,Y_1)\tilde{Q} - g(X_2,Y_2)\tilde{Q}\end{aligned} \tag{4.1.2}$$

eşitliği elde edilir.

(4.1.2) denklemi ve [5] göz önüne alınırsa, $Q \in \Gamma(TM_1)$ ve $Q \in \Gamma(TM_2)$ için

$$\begin{aligned}&\nabla_{X_1}Y_1 = \overset{\circ}{\nabla}_{X_1} Y_1 + \tilde{\pi}(Y_1)X_1 - g(X_1,Y_1)Q \\ &\nabla_{X_2}Y_2 = \overset{\circ}{\nabla}_{X_2} Y_2 = \overset{\circ}{\nabla}{}^2_{X_2} Y_2 \\ &h_1(X_1,Y_1) = \overset{\circ}{h}_1(X_1,Y_1) - g(X_1,Y_1)\xi_1 \\ &h_2(X_2,Y_2) = \overset{\circ}{h}_2(X_2,Y_2) - fg_2(X_2,Y_2)\,gradf\end{aligned},$$

ve

$$\begin{aligned}&\nabla_{X_1}Y_1 = \overset{\circ}{\nabla}{}^1_{X_1} Y_1 \\ &\nabla_{X_2}Y_2 = \overset{\circ}{\nabla}{}^2_{X_2} Y_2 + \tilde{\pi}(Y_2)X_2 - g(X_2,Y_2)Q \\ &h_1(X_1,Y_1) = \overset{\circ}{h}_1(X_1,Y_1) \\ &h_2(X_2,Y_2) = \overset{\circ}{h}_2(X_2,Y_2) - g(X_2,Y_2)\xi_2 - fg_2(X_2,Y_2)\,gradf\end{aligned}$$

elde edilir, burada $X_1, Y_1 \in \Gamma(TM_a)$ ve $X_2, Y_2 \in \Gamma(TM_b)$ dir. Ayrıca h_1, h_2 semi-simetrik metrik konneksiyona göre M_1 ve M_2 nin ikinci temel formları ve $\overset{\circ}{h}_1, \overset{\circ}{h}_2$ ise Levi-Civita konneksiyona göre M_1 ve M_2 nin ikinci temel formlarıdır.

Önerme 4.1.2. M, semi-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M} = M_1 \times_f M_2$ Riemann çapraşık çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu ve f çarpım fonksiyonu olsun. Ayrıca M_a ve M_b, sırasıyla M nin dikey ve yatay dağılımının integral altmanifoldu olsun.

(i) Eğer $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_2)$ ise M_a ve M_b, semi-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ nın eğrilik invaryant altmanifoldları değildir.

(ii) Eğer $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_1)$ ise M_a ve M_b, semi-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ nın eğrilik invaryant altmanifoldları değildir.

İspat. (i) $\tilde{R}$ semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre $\tilde{M}$ nin Riemann eğrilik tensörü, $\overset{\circ}{\tilde{R}}$ ise Levi-Civita konneksiyonuna göre $\tilde{M}$ nın Riemann eğrilik tensörü olsun. [6] daki Lemma 4.4, ayrıca buradaki Lemma 4.1.2 ve Önerme 4.1.1 kullanılırsa, $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TM_b)$ ve $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_2)$ için

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X_2,Y_2)Z_2 = {} & \overset{\circ}{\tilde{R}}_b(X_2,Y_2)Z_2 - [\frac{g_2(gradf, gradf)}{f^2}]\{g(Y_2,Z_2)X_2 - g(X_2,Z_2)Y_2\} \\
& + g(Z_2, \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{X_2} \tilde{Q})Y_2 - g(Z_2, \overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{Y_2} \tilde{Q})X_2 \\
& + g(X_2,Z_2)\{\overset{\circ}{\nabla}{}^2_{Y_2} \tilde{Q} - fg_2(Y_2,\tilde{Q})gradf\} \\
& - g(Y_2,Z_2)\{\overset{\circ}{\nabla}{}^2_{X_2} \tilde{Q} - fg_2(X_2,\tilde{Q})gradf\} \\
& + \pi(\tilde{Q})[g(X_2,Z_2)Y_2 - g(Y_2,Z_2)X_2] \\
& + [g(Y_2,Z_2)\pi(X_2) - g(X_2,Z_2)\pi(Y_2)]\tilde{Q} \\
& + \pi(Z_2)[\pi(Y_2)X_2 - \pi(X_2)Y_2]
\end{aligned} \tag{4.1.3}$$

bulunur. (3.4.2) denkleminden

$$\begin{aligned}
\tilde{R}(X_2,Y_2)Z_2 = {} & \tilde{R}_b(X_2,Y_2)Z_2 - A_{h_b(Y_2,Z_2)}X_2 + A_{h_b(Y_2,Z_2)}X_2 \\
& + (\tilde{\nabla}_{X_2} h_b)(Y_2,Z_2) - (\tilde{\nabla}_{Y_2} h_b)(X_2,Z_2)
\end{aligned} \tag{4.1.4}$$

dir. Böylece (4.1.3) denkleminde (4.1.4) eşitliği yerine yazılırsa

$$\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_{X_2} h_b)(Y_2,Z_2) - (\tilde{\nabla}_{Y_2} h_b)(X_2,Z_2) = {} & - fg(X_2,Z_2)g_2(Y_2,\tilde{Q})gradf \\
& + fg(Y_2,Z_2)g_2(X_2,\tilde{Q})gradf
\end{aligned} \tag{4.1.5}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{R}_b(X_2,Y_2)Z_2 = {} & A_{h_b(Y_2,Z_2)}X_2 - A_{h_b(Y_2,Z_2)}X_2 \\ & -[\frac{g_2(gradf,gradf)}{f^2}]\{g(Y_2,Z_2)X_2 - g(X_2,Z_2)Y_2\} \\ & + g(Z_2,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{X_2}\tilde{Q})Y_2 - g(Z_2,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{Y_2}\tilde{Q})X_2 \\ & + g(X_2,Z_2)\overset{\circ}{\nabla}{}^2_{Y_2}\tilde{Q} - g(Y_2,Z_2)\overset{\circ}{\nabla}{}^2_{X_2}\tilde{Q} \\ & + \pi(\tilde{Q})[g(X_2,Z_2)Y_2 - g(Y_2,Z_2)X_2] \\ & + [g(Y_2,Z_2)\pi(X_2) - g(X_2,Z_2)\pi(Y_2)]\tilde{Q} \\ & + \pi(Z_2)[\pi(Y_2)X_2 - \pi(X_2)Y_2]\end{aligned} \tag{4.1.6}$$

denklemleri elde edilir. Bu denklemlerden de görülür ki M_b, semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre $\tilde{M}$ nın eğrilik invaryant altmanifoldu değildir. Aynı metodu kullanarak M_a nın semi-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ nın invaryant eğrilik invaryant altmanifoldu olmadığını kolayca gösterilebilir.

(ii) M_a nın semi-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ nın tamamen jeodezik altmanifodu olduğu için ve semi-simetrik metrik konneksiyonuna sahip $\tilde{M}$ nın içinde M_a nın eğrilik invaryant altmanifoldu olduğu açıktır.

(i) deki aynı metot izlenecektir. $\tilde{R}$ ve $\tilde{R}_b$, semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre $\tilde{M}$ ve M_b nin Riemann eğrilik tensörleri, $\overset{\circ}{\tilde{R}}$ ve $\overset{\circ}{\tilde{R}}_b$ ise Levi-Civita konneksiyonuna göre $\tilde{M}$ ve M_b nin Riemann eğrilik tensörleri olsunlar. [6] daki Lemma 4.3 ve Lemma 4.1.2 ve Önerme 4.1.1 kullanılırsa $X_2,Y_2,Z_2 \in \Gamma(TM_b)$ ve $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_1)$ için

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X_2,Y_2)Z_2 = {} & \overset{\circ}{\tilde{R}}_b(X_2,Y_2)Z_2 - \{\frac{g(gradf,gradf)}{f^2} + 2\frac{\tilde{Q}f}{f}\} \\ & +\pi(\tilde{Q})\{g(Y_2,Z_2)X_2 - g(X_2,Z_2)Y_2\}\end{aligned} \tag{4.1.7}$$

dir. (3.4.2) denkleminden

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X_2,Y_2)Z_2 = {} & \tilde{R}_b(X_2,Y_2)Z_2 - A_{h_b(Y_2,Z_2)}X_2 + A_{h_b(X_2,Z_2)}Y_2 \\ & + (\tilde{\nabla}_{X_2}h_b)(Y_2,Z_2) - (\tilde{\nabla}_{Y_2}h_b)(X_2,Z_2)\end{aligned} \tag{4.1.8}$$

dir.

(4.1.7) ve (4.1.8) denklemlerinden

$$(\tilde{\nabla}_{X_2} h_b)(Y_2, Z_2) - (\tilde{\nabla}_{Y_2} h_b)(X_2, Z_2) = 0 \tag{4.1.9}$$

ve

$$\begin{aligned}\tilde{R}_b(X_2,Y_2)Z_2 = \mathring{\tilde{R}}_b(X_2,Y_2)Z_2 - \{\frac{g(gradf, gradf)}{f^2} + 2\frac{\tilde{Q}f}{f}\} \\ + \pi(\tilde{Q})\{g(Y_2,Z_2)X_2 - g(X_2,Z_2)Y_2\} \\ - A_{h_b(Y_2,Z_2)}X_2 + A_{h_b(Y_2,Z_2)}X_2\end{aligned} \tag{4.1.10}$$

bulunur. Böylece önermenin ispatı tamamlanmış olur.

Önerme 4.1.3. M, semi-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M} = M_1 \times_f M_2$ Riemann çapraşık çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu ve f çarpım fonsiyonu olsun. M_a ve M_b, sırasıyla M nin dikey ve yatay dağılımının integral manifoldu olarak ifade edilsin. $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_2)$ ve M, semi-simetrik metrik konneksiyonlu $M_1 \times_f M_2$ nin eğrilik invaryant altmanifoldu ise semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre M_a, M_1 in eğrilik invaryant altmanifoldudur ama M_b, M_2 nin bir eğrilik invaryant altmanifoldu değildir.

İspat. R, R_1 ve R_2 sırasıyla $M_1 \times_f M_2$, M_1 ve M_2 Riemann manifoldlarının Riemann eğrilik tensör alanları olsun. $X, Y, Z \in \Gamma(TM)$ için (3.4.1) ve (3.4.2) denklemlerinden

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z = \mathring{\tilde{R}}(X,Y)Z + \tilde{g}(Z, \mathring{\tilde{\nabla}}_X \tilde{Q})Y - \tilde{g}(Z, \mathring{\tilde{\nabla}}_Y \tilde{Q})X \\ + \tilde{g}(X,Z)\mathring{\tilde{\nabla}}_Y \tilde{Q} - \tilde{g}(Y,Z)\mathring{\tilde{\nabla}}_X \tilde{Q} \\ + \tilde{\pi}(\tilde{Q})[\tilde{g}(X,Z)Y - \tilde{g}(Y,Z)X] \\ + [\tilde{g}(Y,Z)\tilde{\pi}(X) - \tilde{g}(X,Z)\tilde{\pi}(Y)]\tilde{Q} \\ + \tilde{\pi}(Z)[\tilde{\pi}(Y)X - \tilde{\pi}(X)Y]\end{aligned}$$

dir. $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(TM_a)$, $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TM_b)$ ve $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_2)$ için Teorem 3.8 [5] ve Lemma 4.1.2 yi kullanılırsa

$$
\begin{aligned}
\tilde{R}(X,Y)Z = {}& \overset{\circ}{\tilde{R}}_1(X_1,Y_1)Z_1 + \overset{\circ}{\tilde{R}}_2(X_2,Y_2)Z_2 - g_1(gradf, gradf)\{g_2(X_2,Z_2)Y_2 \\
& - g_2(Y_2,Z_2)X_2\} - \frac{1}{f}H_f(Z_1,X_1)Y_2 + \frac{1}{f}H_f(Y_1,Z_1)X_2 \\
& + fg_2(Y_2,Z_2)\overset{a}{\nabla}_{X_1} gradf - fg_2(X_2,Z_2)h_1(Y_1,gradf) \\
& + \tilde{g}_1(X_1,Z_1)\frac{Y_1(f)}{f}\tilde{Q} - \tilde{g}_1(Y_1,Z_1)\frac{X_1(f)}{f}\tilde{Q} \\
& + \tilde{\pi}(\tilde{Q})[\tilde{g}_1(X_1,Z_1)Y_1 - \tilde{g}_1(Y_1,Z_1)X_1] + \tilde{g}_2(Z_2,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}{}^{2}_{X_2}\tilde{Q})Y_2 \\
& - \tilde{g}_2(Z_2,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}{}^{2}_{Y_2}\tilde{Q})X_2 + \tilde{g}_2(X_2,Z_2)\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}{}^{2}_{Y_2}\tilde{Q} - \tilde{g}_2(Y_2,Z_2)\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}{}^{2}_{X_2}\tilde{Q} \\
& + \tilde{\pi}(\tilde{Q})\tilde{g}_2(X_2,Z_2)Y_2 - \tilde{g}_2(Y_2,Z_2)X_2] + [\tilde{g}_2(Y_2,Z_2)\tilde{\pi}(X_2) \\
& - \tilde{g}_2(X_2,Z_2)\tilde{\pi}(Y_2)]\tilde{Q} + \tilde{\pi}(Z_2)[\tilde{\pi}(Y_2)X_2 - \tilde{\pi}(X_2)Y_2] \\
& - \tilde{g}_1(Y_1,Z_1)\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}{}^{2}_{X_2}\tilde{Q} - \tilde{\pi}(\tilde{Q})\tilde{g}_1(Y_1,Z_1)X_2] + \tilde{g}_1(Y_1,Z_1)\tilde{\pi}(X_2)\tilde{Q} \\
& - \tilde{g}_1(X_1,Z_1)\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}{}^{2}_{Y_2}\tilde{Q} - \tilde{\pi}(\tilde{Q})\tilde{g}_1(X_1,Z_1)Y_2 + \tilde{g}_1(X_1,Z_1)\tilde{\pi}(Y_2)\tilde{Q} \\
& + \frac{X_1(f)}{f}\tilde{g}_2(Z_2,\tilde{Q})Y_2 - \tilde{g}_2(Z_2,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}{}^{2}_{Y_2}\tilde{Q})X_1 - \tilde{g}_2(Y_2,Z_2)\frac{X_1(f)}{f}\tilde{Q} \\
& - \tilde{\pi}(\tilde{Q})\tilde{g}_2(Y_2,Z_2)X_1] + \tilde{\pi}(Z_2)\tilde{\pi}(Y_2)X_2 + \frac{Y_1(f)}{f}\tilde{g}_2(Z_2,\tilde{Q})X_2 \\
& - \tilde{g}_2(Z_2,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}{}^{2}_{X_2}\tilde{Q})Y_1 - \tilde{g}_2(X_2,Z_2)\frac{Y_1(f)}{f}\tilde{Q} - \tilde{\pi}(\tilde{Q})\tilde{g}_2(X_2,Z_2)Y_1 \\
& + \tilde{\pi}(Z_2)\tilde{\pi}(X_2)Y_1
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$\forall X,Y,Z \in \Gamma(TM)$ için Gausss denklemini göz önüne alınırsa

$$\tilde{R}(X,Y)Z = R(X,Y)Z + (\nabla_X h)(Y,Z) - (\nabla_Y h)(X,Z) + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X$$

bulunur, burada $\tilde{R}$, $\tilde{\nabla}$ semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre R de ∇ indirgenmiş konneksiyonuna göre eğrilik tensörleridir.

Aynı zamanda $\tilde{M}$ nin Codazzi denkleminden

$$
\begin{aligned}
(\tilde{\nabla}_X h)(Y,Z)-(\tilde{\nabla}_Y h)(X,Z) = {} & (\tilde{\nabla}_{X_1} h_1)(Y_1,Z_1)-(\tilde{\nabla}_{Y_1} h_1)(X_1,Z_1) \\
& +(\overset{2}{\tilde{\nabla}}_{X_2} h_2)(Y_2,Z_2)-(\overset{2}{\tilde{\nabla}}_{Y_2} h_2)(X_2,Z_2) \\
& + fg_2(Y_2,Z_2)h_1(X_1,gradf) \\
& - fg_2(X_2,Z_2)h_1(Y_1,gradf) \\
& +\tilde{g}_1(X_1,Z_1)\frac{Y_1(f)}{f}\xi_2-\tilde{g}_1(Y_1,Z_1)\frac{X_1(f)}{f}\xi_2 \\
& [\tilde{g}(Y_2,Z_2)\tilde{\pi}(X_2)-\tilde{g}(X_2,Z_2)\tilde{\pi}(Y_2)]\xi_2 \\
& +\tilde{g}_1(Y_1,Z_1)\tilde{\pi}(X_2)\xi_2+\tilde{g}_1(X_1,Z_1)\tilde{\pi}(Y_2)\xi_2 \\
& -\tilde{g}(Y_2,Z_2)\frac{X_1(f)}{f}\xi_2-\tilde{g}(X_2,Z_2)\frac{Y_1(f)}{f}\xi_2
\end{aligned}
\tag{4.1.11}
$$

elde edilir, burada $\overset{2}{\tilde{\nabla}}$ ve $\tilde{\nabla}$ sırasıyla M_2 ve $M_1 \times_f M_2$ üzerlerinde semi-simetrik metrik konneksiyondur.

M semi-simetrik metrik konneksiyona göre $M_1 \times_f M_2$ Riemann çarpım manifoldunun eğrilik invaryant altmanifoldu olsun. Buradan (4.1.11) denklemini kullanılırsa

$$(\tilde{\nabla}_X h)(Y,Z)-(\tilde{\nabla}_Y h)(X,Z)=0,$$

$$
\begin{aligned}
&(\tilde{\nabla}_{X_1} h_1)(Y_1,Z_1)-(\tilde{\nabla}_{Y_1} h_1)(X_1,Z_1)+fg_2(Y_2,Z_2)h_1(X_1,gradf) \\
&-fg_2(X_2,Z_2)h_1(Y_1,gradf)=0
\end{aligned}
\tag{4.1.12}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
&(\overset{2}{\tilde{\nabla}}_{X_2} h_2)(Y_2,Z_2)-(\overset{2}{\tilde{\nabla}}_{Y_2} h_2)(X_2,Z_2)+\tilde{g}_1(X_1,Z_1)\frac{Y_1(f)}{f}\xi_2 \\
&-\tilde{g}_1(Y_1,Z_1)\frac{X_1(f)}{f}\xi_2+[\tilde{g}(Y_2,Z_2)\tilde{\pi}(X_2)-\tilde{g}(X_2,Z_2)\tilde{\pi}(Y_2)]\xi_2 \\
&+\tilde{g}_1(Y_1,Z_1)\tilde{\pi}(X_2)\xi_2+\tilde{g}_1(X_1,Z_1)\tilde{\pi}(Y_2)\xi_2 \\
&-\tilde{g}(Y_2,Z_2)\frac{X_1(f)}{f}\xi_2-\tilde{g}(X_2,Z_2)\frac{Y_1(f)}{f}\xi_2=0
\end{aligned}
\tag{4.1.13}
$$

eşitlikleri elde edilir. $h_1 = \overset{\circ}{h}$ ve $(\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{X_1} \overset{\circ}{h}_1)(Y_1, Z_1) - (\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{Y_1} \overset{\circ}{h}_1)(X_1, Z_1) = 0$ [5] olduğu göz önüne alınırsa

$$(\tilde{\nabla}_{X_1} h_1)(Y_1, Z_1) - (\tilde{\nabla}_{Y_1} h_1)(X_1, Z_1) = 0$$

ve

$$(\overset{2}{\tilde{\nabla}}_{X_2} h_2)(Y_2, Z_2) - (\overset{2}{\tilde{\nabla}}_{Y_2} h_2)(X_2, Z_2) \neq 0 .$$

elde edilir. Bu ise önermenin ispatını tamamlar.

Önerme 4.1.4. M, semi-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M} = M_1 \times_f M_2$ Riemann çapraşık çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_2)$ ve $M_1 \times_f M_2$, Levi-Civita konneksiyonuna göre c sabit kesit eğriliğine sahip ise semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre, M_1 in kesit eğriliği $[c - \tilde{\pi}(\tilde{Q})]$ dir fakat M_2 kesit eğrilikli değildir.

İspat. $M_1 \times_f M_2$, Levi-Civita konneksiyonuna göre c sabit kesit eğriliğe sahip ve $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_2)$ olduğunu varsayalım. Her $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(TM_1)$ ve $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TM_2)$ vektör alanları için Lemma 4.4 [6] kullanılırsa

$$R_1(X_1, Y_1)Z_1 = \overset{\circ}{R}_1(X_1, Y_1)Z_1 + \tilde{\pi}(\tilde{Q})[g(X_1, Z_1)Y_1 - g(Y_1, Z_1)X_1] \qquad (4.1.14)$$

ve

$$
\begin{aligned}
R_2(X_2,Y_2)Z_2 = {} & \overset{\circ}{R}_2(X_2,Y_2)Z_2 \\
& -[\frac{g_2(gradf\,,gradf\,)}{f^2}]\{g(Y_2,Z_2)X_2 - g(X_2,Z_2)Y_2\} \\
& + g(Z_2,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{X_2}\tilde{Q})Y_2 - g(Z_2,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{Y_2}\tilde{Q})X_2 \\
& + g(X_2,Z_2)\{\overset{\circ}{\nabla}{}^2_{Y_2}\tilde{Q} - fg_2(Y_2,\tilde{Q})gradf\,\} \\
& - g(Y_2,Z_2)\{\overset{\circ}{\nabla}{}^2_{X_2}\tilde{Q} - fg_2(X_2,\tilde{Q})gradf\,\} \\
& + \pi(\tilde{Q})[g(X_2,Z_2)Y_2 - g(Y_2,Z_2)X_2] \\
& + [g(Y_2,Z_2)\pi(X_2) - g(X_2,Z_2)\pi(Y_2)]\tilde{Q} \\
& + \pi(Z_2)[\pi(Y_2)X_2 - \pi(X_2)Y_2],
\end{aligned}
\tag{4.1.15}
$$

denklemleri bulunur, burada R_1 ve R_2 semi-simetrik metrik konneksiyona göre sırasıyla M_1 ve M_2 nin Riemann eğrilik tensörü, $\overset{\circ}{R}_1$ ve $\overset{\circ}{R}_2$ ise Levi-Civita konneksiyonuna göre sırasıyla M_1 ve M_2 nin Riemann eğrilik tensörüdür.

$M_1 \times_f M_2$, Levi-Civita konneksiyonuna göre c sabit kesit eğriliğine sahip olduğu için M_1 ve M_2 de sırasıyla c sabit kesit eğriliğine ve $c + \frac{\|gradf\|^2}{f^2}$ kesit eğriliğine sahiptir [5].

(4.1.14) ve (4.1.15) denklemlerinden

$$R_1(X_1,Y_1)Z_1 = [c - \tilde{\pi}(\tilde{Q})][g(Y_1,Z_1)X_1 - g(X_1,Z_1)Y_1]$$

ve

$$
\begin{aligned}
R_2(X_2,Y_2)Z_2 = \{c-\tilde{\pi}(\tilde{Q}) - \frac{\|gradf\|^2}{f^2}\}&[g(Y_2,Z_2)X_2 - g(X_2,Z_2)Y_2] \\
&+g(Z_2,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{X_2}\tilde{Q})Y_2 - g(Z_2,\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_{Y_2}\tilde{Q})X_2 \\
&+g(X_2,Z_2)\{\overset{\circ}{\nabla}{}^2_{Y_2}\tilde{Q} - fg_2(Y_2,\tilde{Q})gradf\} \\
&-g(Y_2,Z_2)\{\overset{\circ}{\nabla}{}^2_{X_2}\tilde{Q} - fg_2(X_2,\tilde{Q})gradf\} \\
&+[g(Y_2,Z_2)\pi(X_2) - g(X_2,Z_2)\pi(Y_2)]\tilde{Q} \\
&+\pi(Z_2)[\pi(Y_2)X_2 - \pi(X_2)Y_2]
\end{aligned}
$$

elde edilir. Bu ise önermenin ispatı tamamlar.

Önerme 4.1.5. M, semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre $\tilde{M} = M_1 \times_f M_2$ Riemann çapraşık çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldu olsun. $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_1)$ ve $M_1 \times_f M_2$, Levi-Civita konneksiyonuna göre c sabit kesit eğriliğine sahip ise semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre M_1 ve M_2 sırasıyla c sabit kesit eğriliğine ve $[c - \frac{\|gradf\|^2}{f^2} - 2(\frac{\tilde{Q}f}{f}) - \tilde{\pi}(\tilde{Q})]$ kesit eğriliğine sahiptir.

İspat. Burada Önerme 4.1.4 ün ispatına benzer bir yöntem kullanılacak. $M_1 \times_f M_2$, Levi-Civita konneksiyonuna göre sabit kesit eğriliğe sahip olduğunu ve $\tilde{Q} \in \Gamma(TM_2)$ olduğunu varsayalım. Sonra M_1 ve M_2 sırasıyla c sabit kesit eğriliğine ve $c + \frac{\|gradf\|^2}{f^2}$ kesit eğriliğine sahiptir [5]. Lemma 4.3 [6] kullanılırsa

$$
R_1(X_1,Y_1)Z_1 = \overset{\circ}{R}_1(X_1,Y_1)Z_1
$$

ve

$$
\begin{aligned}
R_2(X_2,Y_2)Z_2 = \overset{\circ}{R}_2(X_2,Y_2)Z_2& \\
&-[\frac{\|gradf\|^2}{f^2} + 2(\frac{\tilde{Q}f}{f}) + \tilde{\pi}(\tilde{Q})][g(Y_2,Z_2)X_2 - g(X_2,Z_2)Y_2]
\end{aligned}
$$

denklemleri bulunur. $X_1, Y_1, Z_1 \in \Gamma(TM_1)$ ve $X_2, Y_2, Z_2 \in \Gamma(TM_2)$ için $M_1 \times_f M_2$, Levi-Civita konneksiyonuna göre sabit kesit eğriliğe sahip olduğu için

$$R_1(X_1, Y_1)Z_1 = c[g(Y_1, Z_1)X_1 - g(X_1, Z_1)Y_1]$$

ve

$$R_2(X_2, Y_2)Z_2 = c - [\frac{\|gradf\|^2}{f^2} + 2(\frac{\tilde{Q}f}{f}) + \tilde{\pi}(\tilde{Q})][g(Y_2, Z_2)X_2 - g(X_2, Z_2)Y_2]$$

dir, burada R_1 ve R_2 semi-simetrik metrik konneksiyonuna göre sırasıyla M_1 ve M_2 nin Riemann eğrilik tensörüdür. Bu ise önermenin ispatını tamamlar.

4.2. QUARTER-SİMETRİK METRİK KONNEKSİYONA SAHİP RİEMANN ÇARPIM MANİFOLDUNUN ALTMANİFOLDLARININ GEOMETRİSİ

4.2.1. Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyon

$(\tilde{M}, \tilde{g}, F)$, Rieman çarpım manifoldu ve $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$, $\tilde{M}$ üzerinde Levi-Civita konneksiyonu olsun. Eğer $X, Y \in \Gamma(T\tilde{M})$ için

$$\tilde{T}(X,Y) = \tilde{\pi}(Y)FX - \tilde{\pi}(X)FY \qquad (4.2.1.1)$$

ve

$$(\tilde{\nabla}_X \tilde{g})(Y,Z) = 0 \qquad (4.2.1.2)$$

şartları sağlanıyor ise $\tilde{\nabla}$ ya $\tilde{M}$ üzerinde quarter-simetrik metrik konneksiyon denir [8], burada $\tilde{\pi}$,

$$\tilde{\pi}(X) = \tilde{g}(X,Q).$$

şeklinde tanımlanan $\tilde{M}$ üzerinde Q vektör alanı bağlantılı 1-formdur.

(3.3.5) ve (4.2.1.1) denklemlerini kullanılırsa

$$(\tilde{\nabla}_X F)Y = \tilde{\pi}(FY)FX - \tilde{\pi}(Y)X + \tilde{g}(FX,Y)FQ - \tilde{g}(X,Y)Q \qquad (4.2.1.3)$$

bulunur. Burada (4.2.1.3) denkleminden ise

$$(\tilde{\nabla}_X F)Y + (\tilde{\nabla}_{FX} F)FY = 2\{\tilde{g}(FX,Y)FQ - \tilde{g}(X,Y)Q\} \qquad (4.2.1.4)$$

eşitliği elde edilir.

M üzerindeki ∇, $\tilde{M}$ üzerindeki $\tilde{\nabla}$ quarter-simetrik metrik konneksiyonundan indirgenmiş konneksiyon olsun. Böylece $X, Y \in \Gamma(TM)$ için

$$\tilde{\nabla}_X Y = \nabla_X Y + h(X,Y) \qquad (4.2.1.5)$$

denklemine $\tilde{\nabla}$ ya göre Gausss denklemi denir, burada h, $(0,2)$ tipinde tensördür.

(3.2.1) ve (4.2.1.5) denklemleri (4.2.1.1) denkleminde yerine yazılırsa

$$\nabla_X Y + h(X,Y) = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \overset{\circ}{h}(X,Y) + \tilde{\pi}(Y)FX - \tilde{g}(FX,Y)Q \qquad (4.2.1.6)$$

bulunur. Buradan da

$$\nabla_X Y = \overset{\circ}{\nabla}_X Y + \tilde{\pi}(Y)FX - \tilde{g}(FX,Y)Q \qquad (4.2.1.7)$$

elde edilir.

$\tilde{R}$ ve $\overset{\circ}{\tilde{R}}$ sırasıyla $\tilde{\nabla}$ ve $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ ya sahip $\tilde{M}$ Riemann manifoldunun eğrilik tensörleri olsun. Böylece her $X,Y,Z \in \chi(M)$ için (4.2.1.1) denkleminden

$$\begin{aligned}\tilde{R}(X,Y)Z = {} & \overset{\circ}{\tilde{R}}(X,Y)Z + 2d\tilde{\pi}(X,Y)FZ + \tilde{\pi}(X)\tilde{g}(Y,Z)Q \\ & -\tilde{\pi}(Y)\tilde{g}(X,Z)Q + \{\tilde{\pi}(Y)X - \tilde{\pi}(X)Y\}\tilde{\pi}(Z)\end{aligned} \qquad (4.2.1.8)$$

elde edilir [8].

4.2.2. Quarter-Simetrik Metrik Konneksiyonlu Riemann Çarpım Manifoldunun Altmanifoldları

Önerme 4.2.2.1. M, quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun proper semi-invaryant altmanifoldu olsun. O halde

$$-A_{FW}Z + A_{FZ}W = \tilde{\pi}(Z)W - \tilde{\pi}(W)Z$$

denklemi sağlanır ise $Q \in \Gamma(D^{\perp})$ için anti-invaryant distribüsyon $D^{\perp}$ integrallenebilirdir.

İspat. M, quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun semi-invaryant altmanifoldu olsun. Buradan

$$\tilde{\nabla}_Z FW = (\tilde{\nabla}_Z F)W + F(\tilde{\nabla}_Z W)$$

dir. Burada her $Z,W,Q \in \Gamma(D^{\perp})$ için (3.2.1), (3.2.2), (3.3.5), (4.2.1.1), (3.6.2), ve (3.6.3) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} -A_{FW}Z + \nabla^{\perp}_{Z}FW = {} & f\nabla_{Z}W + \omega\nabla_{Z}W + Bh(Z,W) + Ch(Z,W) \\ & -\tilde{\pi}(W)Z - \tilde{g}(Z,W)Q \end{aligned} \tag{4.2.2.1}$$

bulunur, burada h, quarter-simetrik metrik konneksiyonuna göre M nin ikinci temel formudur. (4.2.2.1) denkleminden

$$-A_{FW}Z = f\nabla_{Z}W + Bh(Z,W) - \tilde{\pi}(W)Z - \tilde{g}(Z,W)Q \tag{4.2.2.2}$$

ve

$$\nabla^{\perp}_{Z}FW = \omega\nabla_{Z}W + Ch(Z,W) \tag{4.2.2.3}$$

eşitlikleri elde edilir. (4.2.2.2) denkleminde Z ve W vektör alanlarının rolleri değiştirilirse, eşitlik

$$-A_{FZ}W = f\nabla_{W}Z + Bh(W,Z) - \tilde{\pi}(Z)W - \tilde{g}(W,Z)Q \tag{4.2.2.4}$$

şeklinde olur. Böylece h nin M de $(0,2)$ tipinde simetrik tensör olduğunu ve (4.2.2.2), (4.2.2.4) denklemlerini dikkate alırsak

$$f[Z,W] = -A_{FW}Z + A_{FZ}W - \tilde{\pi}(Z)W + \tilde{\pi}(W)Z$$

denklemi bulunur. Buradan $[Z,W] \in \Gamma(D^{\perp})$ için ancak ve ancak

$$-A_{FW}Z + A_{FZ}W - \tilde{\pi}(Z)W + \tilde{\pi}(W)Z = 0$$

olur. Bu ise önermenin ispatını tamamlar.

Önerme 4.2.2.2. M, quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun proper semi-invaryant altmanifoldu olsun. O halde $Q \in \Gamma(D^{\perp})$ için invaryant distribüsyonu D integrallenebilir ve D nin integral manifoldu M de tamamen jeodezik olabilmesi için gerek ve yeter şart $X,Y \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$\tilde{g}(h(X,Y),FZ) + \tilde{\pi}(Z)\tilde{g}(X,Y) = 0$$

olmasıdır.

İspat. D invaryant distribüsyonu integrallenebilirdir ve D nin integral manifoldu M de tamamen jeodezik olduğunu varsayalım. O halde her $X,Y \in \Gamma(D)$ için

$$\nabla_X Y \in \Gamma(D) \tag{4.2.2.5}$$

(3.2.1), (3.2.2), (4.2.1.1), (4.2.1.3) ve (3.6.2) denklemleri kullanılırsa, $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$\begin{aligned} \tilde{g}(h(X,Y),FZ) &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X Y, FZ) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X FY - (\tilde{\nabla}_X F)Y, Z) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X fY, Z) - \tilde{g}(X,Y)\tilde{g}(Q,Z) \\ &= \tilde{g}(\tilde{\nabla}_X fY, Z) - \tilde{\pi}(Z)\tilde{g}(X,Y) \end{aligned} \tag{4.2.2.6}$$

bulunur. (4.2.2.5) ve (4.2.2.6) denklemlerinden

$$\tilde{g}(h(X,Y),FZ) + \tilde{\pi}(Z)\tilde{g}(X,Y) = 0$$

elde edilir. Diğer yandan $\tilde{g}(h(X,Y),FZ) + \tilde{\pi}(Z)\tilde{g}(X,Y) = 0$ olduğu için her $X,Y \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için

$$\tilde{g}(\nabla_X fY, Z) = 0$$

bulunur. Buda $\nabla_X fY \in \Gamma(D)$ olduğunu gösterir.

Önerme 4.2.2.3. M, quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ flat Riemann çarpım manifoldunun proper semi-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $Q \in \Gamma(D^{\perp})$ ve

$$(\mathring{\tilde{\nabla}}_X \mathring{h})(Y,Z) - (\mathring{\tilde{\nabla}}_Y \mathring{h})(X,Z) = 2d\tilde{\pi}(X,Y)FZ$$

ise Levi-Civita konneksiyonlu proper semi-invaryant altmanifoldlar bulunur. Bunlar quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ flat Riemann çarpım manifoldunun içinde eğrilik invaryant altmanifoldudur.

İspat. $\tilde{R}$, quarter-simetrik metrik konneksiyonu $\tilde{\nabla}$ göre $\tilde{M}$ nın eğrilik tensörünü, $\overset{\circ}{\tilde{R}}$ ise Levi-Civita konneksiyonunu $\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}$ göre eğrilik invaryantını ifade etsinler. O halde her $X,Y \in \Gamma(TM^{\perp})$ için (4.2.1.8) denklemi kullanılırsa

$$\begin{aligned} \tilde{R}(X,Y)Z = \overset{\circ}{\tilde{R}}(X,Y)Z - 2d\tilde{\pi}(X,Y)FZ - \tilde{\pi}(X)g(Y,Z)Q \\ -\tilde{\pi}(Y)g(X,Z)Q + \{\tilde{\pi}(Y)X - \tilde{\pi}(X)Y\}\tilde{\pi}(Z) \end{aligned}$$

bulunur. Her $X,Y \in \Gamma(TM^{\perp})$ için quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ nın $\tilde{R}$ eğrilik invaryantı flat olduğu için denklem (3.2.1) ve doğrudan hesaplama ile

$$\begin{aligned} 0 = R(X,Y)Z + A_{h(X,Z)}Y - A_{h(Y,Z)}X + (\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_X \overset{\circ}{h})(Y,Z) \\ -(\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_Y \overset{\circ}{h})(X,Z) - 2d\tilde{\pi}(X,Y)FZ - \tilde{\pi}(X)g(Y,Z)Q \\ -\tilde{\pi}(Y)g(X,Z)Q + \{\tilde{\pi}(Y)X - \tilde{\pi}(X)Y\}\tilde{\pi}(Z) \end{aligned} \tag{4.2.2.7}$$

denklemi elde edilir, burada $\overset{\circ}{h}$, M nin ikinci temel formudur. (4.2.2.7) denkleminde $X,Y \in \Gamma(TM^{\perp})$ ve $Q,Z \in \Gamma(D^{\perp})$ alınırsa

$$(\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_X \overset{\circ}{h})(Y,Z) - (\overset{\circ}{\tilde{\nabla}}_Y \overset{\circ}{h})(X,Z) = 2d\tilde{\pi}(X,Y)FZ$$

bulunur, burada, M_1, D distribüsyonunun, M_2 ise $D^{\perp}$ distribüsyonunun integral manifoldudur. Bu ise ispatı tamamlar,.

Önerme 4.2.2.4. M, quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun proper semi-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $Q \in \Gamma(D)$ ve

$$h(FY,X) \in \Gamma(V)$$

ise her $X,Y \in \Gamma(D)$ ve $Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için M_1, M de tamamen jeodeziktir.

İspat. her $X,Y \in \Gamma(TM^{\perp})$ ve $Q,Z \in \Gamma(D^{\perp})$ için (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.3.4), (3.3.5), ve (4.2.1.5) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\nabla_X Y, Z) &= g(\tilde{\nabla}_X Y, Z) = g(\tilde{\nabla}_X FY - (\tilde{\nabla}_X F)Y, FZ) \\ &= g(h(FX,Y), FZ) + g(FX,Y)g(FQ,FZ) - g(X,Y)g(Q,FZ) \end{aligned} \tag{4.2.2.8}$$

bulunur. Böylece (4.2.2.8) denkleminden, $\nabla_X Y \in \Gamma(D)$ olması için gerek ve yeter şart $Q \in \Gamma(D)$ ve $h(FY, X) \in \Gamma(V)$ olmasıdır.

Böylece (4.2.2.4) önermesinden aşağıdaki sonucu yazılabilir.

Sonuç 4.2.2.1. M, quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun proper semi-invaryant altmanifoldu olsun. O halde M_1, M de tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart $Q \in \Gamma(D)$ ve M, $D-$ *jeodezik* olmasıdır.

Önerme 4.2.2.5. M, quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun proper semi-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $Q \in \Gamma(D^{\perp})$ (veya $Q \in \Gamma(V)$) ve

$$h(FX, Z) \in \Gamma(V)$$

ise $Z, W \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $X \in \Gamma(D)$ için M_2 tamamen jeodeziktir.

İspat. $Q \in \Gamma(D^{\perp})$ (veya $Q \in \Gamma(V)$) ve $h(FX, Z) \in \Gamma(V)$ olduğunu varsayalım. $Z, W \in \Gamma(D^{\perp})$ ve $X \in \Gamma(D)$ için (3.2.1), (3.2.2), (3.2.3), (3.3.4), (3.3.5), ve (4.2.1.5) denklemleri kullanılırsa

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_Z W, X) &= g(\tilde{\nabla}_Z W, X) = -g(\tilde{\nabla}_Z X, W) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_Z FX - (\tilde{\nabla}_Z F)X, FW) \\ &= g(h(Z, FX), FW) + \tilde{\pi}(FX)g(FZ, FW) \end{aligned} \tag{4.2.2.9}$$

elde edilir. $Q \in \Gamma(D^{\perp})$ (veya $Q \in \Gamma(V)$) ve $h(FX, Z) \in \Gamma(V)$ olduğu için

$$g(\nabla_Z W, X) = 0$$

olur. Yani $\nabla_Z W \in \Gamma(D^{\perp})$, bu ise önermemizin ispatını tamamlar.

Sonuç 4.2.2.2. M, quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun proper semi-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer $Q \in \Gamma(D^{\perp})$ (veya $Q \in \Gamma(V)$) ve M, $\tilde{M}$ de karma-jeodezik altmanifold ise, $D^{\perp}$ in integral manifoldu M de tamamen jeodeziktir.

Önerme 4.2.2.6. M, quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ Riemann çarpım manifoldunun proper semi-invaryant altmanifoldu olsun. Eğer

$$Q \in \Gamma(V)$$

$$h(Z,U) \in \Gamma(V), \quad Z \in \Gamma(D^{\perp}), U \in \Gamma(TM)$$

ve

$$\tilde{\nabla}_Z^{\perp} FW \in \Gamma(F(D^{\perp})),\ Z,W \in \Gamma(D^{\perp})$$

ise, M_2, $\tilde{M}$ nın tamamen jeodezik altmanifoldudur.

İspat. (4.2.2.10) ve (4.2.2.11) denklemlerinin doğru olduğunu varsayalım. O halde her $Z,W,U \in \Gamma(D^{\perp})$, $X \in \Gamma(D)$ ve $V \in \Gamma(V)$ için, (3.2.1), (3.2.2), (3.3.4), (3.3.5), (4.2.1.3) ve (4.2.1.5) denklemlerinden

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_Z W, X) &= -g(\tilde{\nabla}_Z X, W) = -g(\tilde{\nabla}_Z FX - (\tilde{\nabla}_Z F)X, FW) \\ &= -g(\tilde{\nabla}_Z FX, FW) + g((\tilde{\nabla}_Z F)X, FW) \\ &= g(h(Z,FX), FW) + \tilde{\pi}(FX)g(FZ,FW) - \tilde{\pi}(X)g(Z,W) \\ &= \tilde{\pi}(FX)g(FZ,FW) - \tilde{\pi}(X)g(Z,W) \end{aligned} \tag{4.2.2.10}$$

$$g(\tilde{\nabla}_Z W, X) = g(h(Z,W), FU) = 0 \tag{4.2.2.11}$$

ve

$$\begin{aligned} g(\tilde{\nabla}_Z W, V) &= g(F(\tilde{\nabla}_Z W), FV) = g(\tilde{\nabla}_Z FW - (\tilde{\nabla}_Z F)W, FV) \\ &= g(\tilde{\nabla}_Z FW, FV) - g((\tilde{\nabla}_Z F)W, FV) \\ &= g(\tilde{\nabla}_Z^{\perp} FW, FV) - g(Z,W)g(Q,V) \\ &= g(Z,W)g(Q,V). \end{aligned} \tag{4.2.2.12}$$

dir. Şimdi (4.2.2.10), (4.2.2.11), (4.2.2.12) denklemlerinden ve $Q \in \Gamma(V)$ alınırsa

$$g(\tilde{\nabla}_Z W, X) = 0,$$
$$g(\tilde{\nabla}_Z W, Q) = 0,$$
$$g(\tilde{\nabla}_Z W, V) = 0$$

denklemlerini elde edilir. Yani $\tilde{\nabla}_Z W \in \Gamma(D^{\perp})$ tir Böylece önermenin ispatı tamamlar.

5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

1- Semi-simetrik metrik konneksiyona sahip Riemann çapraşık çarpım manifoldunun invaryant altmanifoldunun Riemann çapraşık çarpım manifoldu olmadığı gösterildi.

2- Semi-simetrik metrik konneksiyona sahip invaryant altmanifold üzerindeki integral manifoldlardan bir tanesinin eğrilik invaryant altmanifold olmadığı elde edildi.

3- M, quarter-simetrik metrik konneksiyonlu $\tilde{M}$ Riemann çapraşık çarpım manifoldunun semi-invaryant altmanifoldu olsun. O halde M_1, M de tamamen jeodezik olması için gerek ve yeter şart $Q \in \Gamma(D)$ ve M, $D-jeodezik$ olması gerektiği gösterildi.

5.2 Öneriler

Riemann çapraşık çarpım manifoldunun farklı konneksiyonları ve altmanifoldlarının geometrisi incelenerek literatüre katkıda bulunulabilir.

KAYNAKLAR

[1] O.Neill, B., Semi-Riemannian Geometry with Applications to Relativity, Academic Press, London (1983).

[2] Duggal, Krishan L.and Bejancu, A., Lightlike Submanifolds of Semi-Riemannian Manifolds and Applications, Kluwer Academic Publisher, Netherlands (1996)

[3] Şahin, B., *Diferansiyel Manifoldların Geometrisi*, Nobel Yayınları, Ankara (2012.)

[4] Chen, B. Y., *Total Mean Curvature and Submanifold of finite Type*, World Scientific Publishing. Co. Pte. Ltd. (1984).

[5] Atçeken, M., Şahin, B. and Kılıç, E., *On Invariant Submanifolds of Riemannian Warped Product Manifold*, Turk J. Math. 27 (2003),407-423.

[6] Sular, S. and Özgür, C., *Warped Product with a semi-Symmetric Metric connection*, Taiwanise Journal of Mathematics, Vol 15, No:4 pp 1701- 1719, (2011).

[7] Yano, K., *Semi-Symmetric Metric Connection*, Rev. Roum. Math. Pures EtAppl., 15 (1970), 1579-1586.

[8] Mishra, R. S. and Pandey, S. N. , On quarter symmetric metric F- connections, Tensor (N.S.) 34 (1980), no. 1; 1 - 7.

[9] Senlin, X., and Yilong, N., *Submanifold of product Riemannian Manifold.* Mathematica Scientia 2000, 20 (B) 213-218

[10] Atçeken, M., *Çarpım Manifoldunun Altmanifoldlarının Geometrisi*, Doktora Tezi, İnönü Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü, (2002).

[11] Friedmann, A., and Schouten, J.A., Über die Geometrie der halbsymmetrischen Übertragungen, Math. Z. 21(1924),211-223.

[12] Imai, T., *Hypersurfaces of a Riemannian Manifold with Semi-Symmetric Metric Connection*, Tensor, N.S., Vol. 23(1972), 300-306.

[13] Hayden, H. A., *Subspaces of a Space with Torsion*, Proc. London Math. Soc. II. Ser., 34(1932), 27-50.

[14] Bishop, R.L., and ONeill, B., *Manifolds of negative curvature*, Trans, Amer. Math. Soc. 145, (1969),1-49.

[15] Bejancu, A., *Invariant Submanifolds of Locally product Riemannian Manifolds*, An. Univ. Timişoara Ser. Ştiint. Mat.22(1984) 3-11.

[16] Katsuno, K., *Null Hypersurfaces in Lorentzian Manifolds* I, Math. Proc. Camb. Phil. Soc. 88(1980), 175-182.

[17] Matsumoto, K., *On Submanifolds of Locally Product Riemannian Manifolds*, TRU Mathematics 18-2(1982),145-157.

[18] Hacısalioğlu, H. H., 2003, Tensör, Geometri, AÜ Fen Fakültesi, Ankara.

[19] Yano, K., Kon, M., *Structure on Manifolds*, World Scientific Publishing. Co. Pte. Ltd. (1984).

[20] Tripathi M.M., *A New Connection in a Riemaniann Manifold*, Int. Electron. J. Geom. 1(1) (2008)

[21] Chen, B., *Geometry of warped product submanifolds*, J. Adv. Math. Stud. 6 (2013).

[22] Djaa, N.H., Mustapha, D., *Generalized warped product manifolds and critical Riemannian metric*, Acta Math. Acad. Paedagog. Nyházi. (N.S.) 28 (2012)

[23] Shaikh, A.A.; Kundu, H., *On weakly symmetric and weakly Ricci symmetric warped product manifolds*,. Publ. Math. Debrecen 81 (2012).

[24] Al-Solamy, F.R.; Khan, M.A., *Semi-invariant warped product submanifolds of almost contact manifolds*, J. Inequal. Appl. 2012

[25] Zhang, Z., *Notes on submanifolds in warped products*, J. Math. Anal. Appl. 388 (2012)

[26] Atçeken, M., *Warped product semi-invariant submanifolds in locally decomposable Riemannian manifolds,* Hacet. J. Math. Stat. 40 (2011)

[27] De, U.C.; Murathan, C.; Özgür, C., *Pseudo symmetric and pseudo Ricci symmetric warped product manifolds*. Commun. Korean Math. Soc. 25 (2010)

[28] Lee, H., *Riemannian manifolds referred to warped product models*, Tsukuba J. Math. 31 (2007)

[29] Haesen, S., *Some characterizations of totally umbilical surfaces in three-dimensional warped product spaces*, Monatsh. Math. 152 (2007)

[30] Sahin, B., *Warped product semi-invariant submanifolds of a locally product Riemannian manifold*, Bull. Math. Soc. Sci. Math. Roumanie *(N.S.)* 49(97) (2006)

[31] Mustafa, M. T., *Warped products of constant curvature,* Differ. Geom. Dyn. Syst. 8 (2006)

[32] Şentürk, Z., *On warped product manifolds*, Differential geometry and its applications, 109–117, *Matfyzpress, Prague,* 2005

[33] Chen, B., *Geometry of warped products as Riemannian submanifolds and related problems,* Soochow J. Math. 28 (2002)

[34] Bertola, M.; Gouthier, D., *Warped products with special Riemannian curvature*. Bol. Soc. Brasil. Mat. (N.S.) 32 (2001)

[35] Jelonek, W., *Killing tensors and warped products*. Ann. Polon. Math. 75 (2000)

[36] Sakai, T., *Warped products and Riemannian manifolds admitting a function whose gradient is of constant norm*, Math. J. Okayama Univ. 39 (1997)

[37] Kim, I.; Kim, B.H., *Warped products with critical Riemannian metrics,* Kyungpook Math. J. 35 (1996)

[38] Defever, F.; Deszcz, R.; Prvanovic', M., On *warped product manifolds satisfying some curvature condition of pseudosymmetric type*, Bull. Greek Math. Soc. 36 (1994)

[39] Pak, J.S.; Kang, T., *Some remarks on the Riemannian metrics on warped products*, Geom. Dedicata 37 (1991)

[40] Deszcz, R.; Grycak, W., *On some class of warped product manifolds,* Bull. Inst. Math. Acad. Sinica 15 (1987)

[41] Şahin, B., Atçeken, M., *Semi-Invariant Submanifolds of Riemannian Product Manifold. Balkan Journal of Geometry and Its Application*. Vol. 8, No.1, pp.91-100, 2003

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Ali Yakar

Doğum Tarihi: 02/11/1986

Öğrenim Durumu:

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lise	Fen-Matematik	Erdemli Anadolu Lisesi	2001–2005
Lisans	Matematik	Abant İzzet Baysal Üniversitesi	2006–2011
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2012–2014

(Varsa) Görevler:

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. Yaşar, E. and Yakar, A., *On invariant Submanifolds of a Riemannian Warped Product Manifold with a Semi-Symmetric Metric Connection.* International Journal of Physical and Mathematical Sciences, Vol 4, No 1, 416-426, (2013).

2. Erol Yaşar, Ali Yakar, *Submanifolds of a Riemannian Product Manifold admitting a Quarter-Symmetric Metric Connection*. International Journal of Mathematics and Computation, Vol. 23; Issue # 2, 2014.