KOMPLEKS DÜZLEMDE BERNSTEIN – WALSH EŞİTSİZLİKLERİ

CEVAHİR DOĞANAY GÜN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

MERSİN
TEMMUZ – 2014

KOMPLEKS DÜZLEMDE BERNSTEIN – WALSH EŞİTSİZLİKLERİ

CEVAHİR DOĞANAY GÜN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

MERSİN
TEMMUZ – 2014

Cevahir Doğanay GÜN tarafından Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV danışmanlığında hazırlanan " Kompleks Düzlemde Bernstein-Walsh Eşitsizlikleri" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

Doç. Dr. Mustafa YILDIRIM

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

Yrd. Doç. Dr. Orkun COŞKUNTUNCEL

Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03/09/2014 tarih ve 2014...19..../.524...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN
Enstitü Müdürü

KOMPLEKS DÜZLEMDE BERNSTEIN – WALSH EŞİTSİZLİKLERİ

Cevahir Doğanay GÜN

ÖZ

$\mathbb{C}$ kompleks düzlem, $G \subset \mathbb{C}$, $L := \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge ve $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$ olsun. $w = \Phi(z)$ ile Ω bölgesinden $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ bölgesine tanımlı, $\Phi(\infty) = \infty$ ve $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\Phi(z)}{z} > 0$ koşullarını sağlayan konform ve yalınkat dönüşüm gösterilsin. $h(z)$, $G' \supseteq G$'de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Her $p > 0$ için $A_p(h,G)$ ile G bölgesinde analitik ve

$$\|f\|_{A_p(h,G)} = \left(\iint_G h(z) |f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı; L kapalı, ölçülebilir eğri olmak üzere, $\mathcal{L}_p(h,L)$ ile L üzerinde integrallenebilen ve

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} := \left(\int_L h(z) |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı gösterilsin.

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\wp_n$ ile derecesi n'yi aşmayan cebirsel polinomların sınıfı gösterilsin. Bu tez'de; $X := C(\overline{G})$; $Y := \mathcal{L}_p(h, \partial G)$ veya $Y := A_p(h,G)$ olmak üzere, her $P_n \in \wp_n$ için aşağıdaki iki problem kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde incelenmiştir:

1. $\|P_n\|_X \le \mu_n(h,G) \|P_n\|_Y$, $\qquad \mu_n(h,G) \to \infty, \; n \to \infty,$
2. $|P_n(z)| \le \dfrac{\eta_n(h,G)}{d(z,L)} \|P_n\|_Y |\Phi(z)|^{n+1}$, $\quad z \in \Omega, \qquad \eta_n(h,G) \to \infty, \; n \to \infty.$

Yani, μ_n ve η_n sayılarının ∞'a gitmesi, h ve G'nin geometrik özelliklerine bağlı olarak incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel Polinomlar, Konform Dönüşüm, Yarı Konform Dönüşüm, Yarı Konform Eğri, Düzgün Eğri, Bernstein-Walsh Eşitsizlikleri

Danışman: Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV, Matematik Ana Bilim Dalı, Mersin Üniversitesi

BERNSTEIN - WALSH INEQUALITIES IN THE COMPLEX PLANE

Cevahir Doganay GUN

ABSTRACT

Let $\mathbb{C}$ be complex plane, $G \subset \mathbb{C}$ be a finite region bounded by a Jordan curve $L := \partial G$ and $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$. Let w=Φ(z) be the univalent conformal mapping of Ω onto the $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ normalized by $\Phi(\infty) = \infty$ and $\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$. Let $h(z)$ be a weight function defined in $G' \supseteq G$. For any $p > 0$, let us denote by $A_p(h,G)$ the class of functions f which are analytic in G and satisfying the condition

$$\| f \|_{A_p(h,G)} = \left(\iint_G h(z) |f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

Let $\mathcal{L}_p(h,L)$ denote the class of functions f which are integrable and satisfying the condition

$$\| f \|_{\mathcal{L}_p(h,L)} := \left(\int_L h(z) |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

when L is rectifiable curve.

Let $\wp_n$ denote the class of arbitrary algebraic polynomials of degree at most $n \in \mathbb{N}$. In this thesis, for any $P_n \in \wp_n$, following two problems have been investigated in various regions of the complex plane:

1. $\|P_n\|_X \le \mu_n(h,G) \|P_n\|_Y$, $\qquad \mu_n(h,G) \to \infty, \ n \to \infty,$
2. $|P_n(z)| \le \dfrac{\eta_n(h,G)}{d(z,L)} \|P_n\|_Y |\Phi(z)|^{n+1}, \quad z \in \Omega, \qquad \eta_n(h,G) \to \infty, \ n \to \infty.$

where $X := C(\overline{G})$; $Y := \mathcal{L}_p(h, \partial G)$, $Y := A_p(h,G)$.

It is shown that μ_n and η_n tends to ∞ depending on geometric properties of h and G.

Key Words: Algebraic Polynomial, Conformal Maping, Quasiconformal Maping, Quasiconformal Curve, Smooth Curve, Bernstein-Walsh Inequalities

Advisor: Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV, Department of Mathematics, University of Mersin

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının yapılmasında bana yol gösteren, bilgi, görüş, önerilerini esirgemeyen danışman hocam Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV'e saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında bana destek veren bütün bölüm hocalarıma ve her zaman yanımda olan çok değerli aileme teşekkür ederim.

Tez çalışmasının yürütülmesi sırasında sağladığı destekten dolayı Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ÖZ i
ABSTRACT ii
TEŞEKKÜR iii
İÇİNDEKİLER iv
SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ v

1. GİRİŞ **1**

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI **4**

3. MATERYAL ve YÖNTEM **6**

3.1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER 6

3.2. KOMPLEKS DÜZLEMDE EĞRİ VE KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ 7

3.3 YARI KONFORM DÖNÜŞÜMLER VE EĞRİLER 14

4. BULGULAR ve TARTIŞMA **31**

4.1. SIFIR AÇI İÇERMEYEN PARÇALI DÜZGÜN EĞRİ İLE SINIRLI OLAN BÖLGELERDE BERNSTEIN-WALSH EŞİTSİZLİKLERİ 31
4.1.1. Temel Sonuçlar 31

4.2. DIŞ SIFIR AÇIYA SAHİP OLAN BÖLGELERDE BERNSTEIN-WALSH EŞİTSİZLİKLERİ 37
4.2.1. Temel Sonuçlar 37

4.3. κ-YARIKONFORM EĞRİYLE SINIRLI BÖLGELERDE BERNSTEIN – WALSH EŞİTSİZLİKLERİ 42
4.3.1. Temel Sonuçlar 42

4.4. TEOREMLERİN İSPATI 44

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER **93**

KAYNAKLAR **95**

ÖZGEÇMİŞ ve ESERLER LİSTESİ **99**

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$:=$	Tanım olarak eşit
$A\Subset G$	A bölgesi kompakt olarak G bölgesine dahildir.
$d\sigma_z$	$dxdy\ \ (z=x+iy)$
∂G	G bölgesinin sınırı
$\overline{G}$	G bölgesinin kapanışı
CG	G bölgesinin tümleyeni
$\overline{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
$mes\gamma$	γ eğrisinin bir boyutlu Lebesgue ölçüsü
$mesD$	D kümesinin iki boyutlu Lebesgue ölçüsü
$\operatorname{int} L$	L eğrisinin içi
$\mathrm{ext}L$	L eğrisinin dışı
$dist(z,B)$	z noktasının B kümesine uzaklığı
$B(z_0,r)$	$\{z:\lvert z-z_0\rvert<r\}$
Ω	$ext\overline{G}$
$\Omega(z,\delta)$	$\Omega\cap B(z,\delta),\quad z\in\Omega$
Δ	$\mathrm{ext}\{w:\lvert w\rvert>1\}$
$\Delta(z,\delta)$	$\mathrm{ext}B(z,\delta)$
$a\prec b$	$a\le cb,\ c$, a ve b 'ye bağlı olmayan pozitif bir sabit
$a\asymp b$	$a\prec b$ ve $b\prec a$
$A(G)$	G bölgesinde analitik olan fonksiyonların kümesi
$A(\overline{G})$	G bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ 'da sürekli olan fonksiyonların kümesi

1. GİRİŞ

XX yüzyılın başlarından itibaren, reel ve kompleks değişkenli cebirsel polinomlarla ilgili bir çok problem (sıfır yerlerinin dağılımı, ekstremallik özellikleri, modülce artışları vs.) bir çok matematikçinin ilgi odağı olmuştur. Bu tür problemler, yaklaşım teorisinin düz ve ters problemlerinde sıkça karşılaşıldığı gibi, araştırma konuları da olmuştur. Bu problemlerden birisi de, cebirsel polinomların verilmiş kümedeki her hangi bir normunun (söz konusu uzayda), küme genişlerken nasıl değiştiğinin takip edilebilmesidir. Başka bir deyişle, $M, M_1 \subset \mathbb{C}$, $M \subset M_1$ kümeler ve P_n herhangi bir polinom olmak üzere $\sup_{z \in M_1} |P_n(z)|$ sayısının $\sup_{z \in M} |P_n(z)| =: L$ sayısına nazaran nasıl değiştiğinin ve değişmenin n'ye göre nasıl artış göstereceğinin incelenmesidir. Bu problemle ilgili ilk çalışma, M kümesinin doğru parçası olması durumunda, 1912 yılında Bernstein S.N. [1] tarafından ele alınmıştır. Daha sonra 1922 yılında Faber G. [2], M kümesinin sonlu sayıda eğrilerle sınırlı olması durumunda, 1926 yılında ise Walsh J.L.[3], genel halde problemi çözmüşlerdir. 1937 yılında Hille, E., Szegö, G., Tamarkin, J.D. [4] benzeri problemi, M kümesi ölçülebilir kapalı Jordan eğrisi olması halinde eğrisel integral normuna göre incelemişlerdir. Benzeri problem, alan üzere integral normuna göre bazı ek koşullara sahip Jordan bölgeleri için 1985 ve daha sonraki yıllarda F.G. Abdullayev [6, 7] tarafından incelenmiştir.

Walsh J.L. ([3, s.119-127]) tarafından, verilmiş kümede polinomların eğrisel veya alan üzere normların bilinmesiyle, buna göre kümenin genişlemesi ile bu polinomların mödülce artışının incelenmesi problemi ele alınmıştır.

Bu çalışmadaki esas amaç; a) kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde, yukarıda ifade edilen problemin çözümünün incelenmesi; b) polinomların bakılan sonlu bölgede artışlarının elde edilmesi ve c) sonsuz ve sonlu bölgelerde elde edilen her iki sonucu birleştirerek polinomun modülce artışının bölge ve diğer verilenlere (ağırlık fonksiyonu, uzayın parametreleri vs.) nasıl bağlı olduğunun ortaya konulmasıdır.

Esas problemin ifade edilmesi için önce bazı tanım ve işaretlemeler verilecektir. Bu tezde, G kompleks düzlemde $L := \partial G$ Jordan eğrisiyle sınırlı sonlu bir bölge ve genelliği kaybetmeden $0 \in G$ kabul edilmiştir. $\Omega := extL$ olsun. $w = \Phi(z)$ ile Ω bölgesini $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ bölgesine konform ve yalınkat resmeden ve $\Phi(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\Phi(z)}{z} > 0$ koşullarını sağlayan dönüşüm gösterilsin. Her $R > 1$ sayısı için $L_R := \{z : |\Phi(z)| = R\}$ olmak üzere $G_R := \operatorname{int} L_R$, $\Omega_R := extL_R$ olsun.

$h(z)$, herhangi bir tespit edilmiş $R > 1$ için G_R bölgesinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun. Her $p > 0$ için $A_p(h,G)$ ile, G bölgesinde analitik ve

$$\iint_G h(z)\left|f(z)\right|^p d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı işaret edilsin, burada σ ile G üzerinde tanımlı iki boyutlu Lebesgue ölçüsü gösterilmektedir. $A_p(1,G) =: A_p(G)$. Bu uzayda yarınorm ($p \geq 1$ için norm, $0 < p < 1$ için p -norm)

$$\| f \|_{A_p(h,G)} := \left(\iint_G h(z)\left|f(z)\right|^p d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}}$$

olarak tanımlansın.

Benzeri şekilde, $L := \partial G$ ölçülebilir Jordan eğrisi olmakla $f : L \to \mathbb{C}$ ölçülebilir ve

$$\int_L h(z)\left|f(z)\right|^p |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{L}_p(h,L)$ ile gösterilsin ve

$$\| f \|_{\mathcal{L}_p(h,L)} := \left(\int_L h(z)\left|f(z)\right|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}}$$

olsun.

$M \subset \mathbb{C}$ sonlu kümesinde sürekli fonksiyonlar sınıfı $C(M)$ ile gösterilsin ve $f \in C(M)$ için

$$\| f \|_{C(M)} := \sup\{|f(z)| : z \in M\}$$

olarak ele alınsın.

$\wp_n$ ile derecesi n ’yi aşmayan cebirsel polinomlar sınıfı gösterilsin.

Verilen bir $P_n \in \wp_n$ polinomunun ele alınan küme üzerinde herhangi bir uzaydaki ($C(\overline{G})$, $\mathcal{L}_p(h,L)$, $A_p(h,G)$ vs.) yarınormunun, bu kümenin genişlemesine bağlı olarak artışının bulunması ile ilgili aşağıdaki şekilde verilen eşitsizlikler Berstein-Walsh eşitsizliği [3, s.77] olarak bilinmektedir:

$$\|P_n\|_{G'} \leq A(n,G,G')\|P_n\|_G,\ G \subset G'. \tag{1.1}$$

Eğer ele alınan küme G bölgesi ve norm olarak düzgün norm ele alınırsa, bilindiği gibi, klasik Bernstein-Walsh Lemması (G bölgesi için tasarlanmış haliyle)

$$|P_n(z)| \leq |\Phi(z)|^{n+1}\|P_n\|_{C(\overline{G})}\ ,\quad z \in \Omega \tag{1.2}$$

eşitsizliğini vermektedir [3, s.77]. Buradan, özel halde

$$\|P_n\|_{C(\overline{G}_R)} \leq R^{n+1}\|P_n\|_{C(\overline{G})} \tag{1.3}$$

bulunur. Yani, G bölgesi G_R bölgesine kadar genişletildiğinde $\|P_n\|_{C(\overline{G}_R)}$ sayısı en fazla $\|P_n\|_{C(\overline{G})}$ sayısının R^{n+1} katı kadar artacaktır.

Bu tezde; ilk önce (1.1) eşitsizliği, kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde ve çeşitli normlarda incelendi. Elde edilen sonuçlarda, polinomun normunun bölgenin geometrik özelliklerine ve uzayın parametrelerine göre nasıl değiştiği gösterildi. Daha sonra, $X := C(\overline{G})$ ve $Y := \mathcal{L}_p(h,L)$ ve $Y := A_p(h,G)$ uzaylarından birisi ve P_n, keyfi polinom olmak üzere,

$$\|P_n\|_X \leq B(n,h,G)\|P_n\|_Y \tag{1.4}$$

şeklindeki eşitsizliklerin bulunması problemi incelendi. Burada $B(n,h,G)$ genelde n,h ve G'ye bağlı bir sabittir. Son olarak, (1.2) ve (1.4) değerlendirmeleri birleştirilerek, verilmiş polinomun modülce artışını tüm $\mathbb{C}$ de değerlendirmesi elde edildi.

Bu tezin, Materyal ve Yöntem kısmında esas teoremlerin ifade ve ispatları için gerekli tanım ve kavramların yanısıra yardımcı lemmalar ve yardımcı teoremler verilecektir. Bulgular ve Tartışma kısmında esas teoremler ve sonuçlar verilecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Bernstein S.N. 1912 yılında [1], $M=\left[-1,1\right]$ olması durumunda $P_n(x)$ polinomun $\left\|P_n\right\|_{C([-1,1])}:=\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|P_n(x)\right|$ normu ile,

$$w=J(z)=\frac{1}{2}\left(z+\frac{1}{z}\right):\left\{z:|z|>1\right\}\to\overline{\mathbb{C}}_w-\left[-1,1\right]$$

ve

$$G_R:=\left\{z:z=J^{-1}(w):|w|=R>1\right\}$$

olmak üzere, $\left\|P_n\right\|_{C(\overline{G}_R)}:=\max\limits_{z\in\overline{G}_R}\left|P_n(z)\right|$ normu arasındaki bağlantıyı vermiştir. Göstermiştir ki, $\left\|P_n\right\|:=\max\limits_{x\in[-1,1]}\left|P_n(x)\right|$ normu G_R kümesinde en fazla R^n defa artar, yani

$$\left\|P_n\right\|_{C(\overline{G}_R)}\le R^n\left\|P_n\right\|_{C([-1,1])}\;. \tag{2.1}$$

Faber G. [2], M kümesi sonlu sayıda eğri ile sınırlı olduğu durumda, Walsh J.L. [3, s.77-78] ise, M kümesi, tümleyeni ∞- u içeren keyfi K kontinuumu olduğu durumda (2.1) in benzerini

$$\left|P_n(z)\right|\le R^n\left\|P_n\right\|_{C(K)},\; z\in\overline{\mathbb{C}}\setminus K \tag{2.2}$$

bulmuşlardır.

Daha sonra Walsh J.L. [3, s.92-101] tarafından (2.2) şeklinde eşitsizliklerin, sağ tarafta farklı yarınormlar ele almakla, eğriler ve bölgeler için incelenmesi devam ettirilmiştir.

Hille, E., Szegö, G., Tamarkin, J.D. [4], (2.1) şeklindeki eşitsizliği, her hangi bir kapalı ölçülebilir Jordan eğrisi için elde etmişler. L kapalı ölçülebilir Jordan eğrisi, $G=\operatorname{int}L$, $L_R:=\left\{z:\left|\Phi(z)\right|=R\right\}$ G bölgesinin dış seviye eğrisi ve $G_R:=\operatorname{int}L_R$, $\Omega_R:=\operatorname{ext}L_R$ olsun. Hille, E., Szegö, G., Tamarkin, J.D. [4] de, her $p>0$ için

$$\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(L_R)}\le n^{n+\frac{1}{p}}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(L)}$$

sağlandığını göstermişlerdir.

1986-2004 yıllarında Abdullayev F.G. [5, 6, 7] tarafından her $p > 0$ için

$$\|P_n\|_{A_p(h,G_R)} \le R_1^{n+\frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h,G)}, \; R_1 - 1 \asymp R - 1 \tag{2.3}$$

sağlanacak şekilde n ve R den bağımsız bir $c = c(G) > 0$ sabitinin olduğu gösterilmiştir.

2009 yılında Stylianopoulos N. [8] Ankara'daki sempozyumda ve daha sonra [9], L-nin ölçülebilir yarıkonform eğri olması halinde

$$|P_n(z)| \le \frac{c}{d(z,L)}\sqrt{n}\, \|P_n\|_{A_2(G)} |\Phi(z)|^{n+1}, \; z \in \Omega, \tag{2.4}$$

eşitsizliğinin bir $c = c(G) > 0$ sabiti için sağlandığını göstermiştir. Böylece, keyfi cebirsel polinomun tüm $\mathbb{C}$ da artışını incelenmesi için zemin yaratmıştır.

2010-2011 yıllarında Abdullayev F.G., Aral N.D. ve Özkartepe P. [10, 11] (2.4) şeklinde değerlendirmeleri incelemiş ve bazı yarıkonform ve daha geniş bölgeler için benzeri sonuçlar elde etmişlerdir.

Bu çalışmada araştırılan 2. problem

$$\|P_n\|_{C(\overline{G})} \le \mu(n,h,G)\|P_n\|_{A_p(h,G)} \tag{2.5}$$

şeklinde değerlendirmelerdir, burada $\mu(n,h,G) \to \infty, \; n \to \infty$. Bu kapsamda ilk sonuç Jackson D.'a [12] aittir. Daha sonra Szegö G. ve Zigmund A. [13], Suetin P.K. [14,15], Mamedhanov D.L. [16,17], Nikol'skii S.M. [18], Pritsker I. [19], Abdullayev F. G. [6, 7, 20], Andrievskii V.V. [21] vb. (daha fazla referans için bkz: Milovanovic G.V. [22]) tek ve çok değişkenli polinomlar için benzeri sonuçları elde etmişlerdir.

Böylece, (2.4) ve (2.5) şeklinde eşitsizlikleri birleştirmekle polinomların bütün kompleks düzlemde modülce artışları takip edilebilmektedir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bulgular kısmında kullanılacak bazı tanımlar ve temel teoremler verilecektir.

3.1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 3.1.1. $G \subset \mathbb{C}$ kümesi için

i) G bir açık kümedir,

ii) Her $\zeta_1, \zeta_2 \in G$ için bu noktaları birleştiren, $\gamma \subset G$ olacak şekilde en az bir $\gamma := \gamma(\zeta_1, \zeta_2)$ yayı vardır,

koşulları sağlanıyor ise G kümesine kompleks düzlemde bir *bölge* denir [23].

Kapalı ve bağlantılı bir kümeye *Kontinuum* adı verilir.

Tanım.3.1.2. f fonksiyonu bir z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir. Bu limit değeri $f^{'}(z_0)$ ile gösterilir ve $f^{'}(z_0)$ sayısına f 'nin z_0 noktasındaki türevi denir. Yani $f^{'}(z_0)$ değeri

$$f^{'}(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olarak tanımlanır [23].

Tanım 3.1.3. f fonksiyonu tanımlı olduğu z_0 noktasının belli bir $B(z_0, r) := \{ z : |z - z_0| < r \}$ komşuluğundaki tüm noktalarda türevlenebiliyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *analitiktir* denir [23].

Eğer G 'de tanımlı f fonksiyonu, her bir $z \in G$ noktasında analitik ise f fonksiyonuna G 'de analitiktir denir. G 'de analitik tüm fonksiyonların kümesi $A(G)$ ile, G 'de analitik ve $\overline{G}$ 'da sürekli olan fonksiyonların kümesi $A\left(\overline{G}\right)$ ile gösterilir.

3.2. KOMPLEKS DÜZLEMDE EĞRİ VE KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

Tanım 3.2.1. $a,\ b \in \mathbb{R}$ ve $a < b$ olsun. $z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna kompleks düzlemde bir *eğri* denir ve γ ile işaretlenir. $z(a)$ noktasına γ eğrisinin başlangıç noktası, $z(b)$ noktasına ise bitiş noktası denir.

i) $z(a) = z(b)$ ise γ eğrisine *kapalı eğri* denir.

ii) Her $t_1, t_2 \in [a,b]$ için $t_1 \neq t_2$ olduğunda $z(t_1) \neq z(t_2)$ ise γ eğrisine *Jordan yayı,* eğer sadece uç noktalarında $z(a) = z(b)$ ise γ eğrisine *Jordan eğrisi* denir.

iii) $\forall t \in [a,b]$ için $z'(t)$ var ve sürekli ise γ eğrisine diferansiyellenebilir eğri denir. Buna ek olarak $\forall t \in [a,b]$ için $z'(t) \neq 0$ ise γ eğrisine *düzgün eğri* denir.

iv) $[a,b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç γ eğrisi diferansiyellenebiliyorsa, bu söz konusu noktalarda γ' 'nün sağ ve sol türevleri var ve bu türevler γ 'nın bu noktalardaki sağ ve sol limitlerine eşitse γ *parçalı diferansiyellenebilir* eğridir denir [24].

v) γ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer γ eğrisinin diferansiyellenebildiği her $t \in [a,b]$ için $\gamma'(t) \neq 0$ ise γ, *parçalı düzgün* eğridir denir.

vi) Her $z_1, z_2 \in \gamma$ çifti için $s(z_1, z_2)$, z_1 'i z_2 'ye birleştiren, eğri üzerindeki en küçük yay uzunluğu olmak üzere bir $c_{31} := c_{31}(\gamma) > 1$ sabiti vardır öyleki $s(z_1, z_2) \leq c_{31}|z_1 - z_2|$ ise γ 'ye *yarı düzgün* bir eğri denir.

Tanım 3.2.2. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere G bölgesinden alınan her bir kapalı γ eğrisi için $\operatorname{int}\gamma \subset G$ oluyor ise G bölgesine *basit bağlantılı bölge* denir.

Teorem 3.2.1. (**Jordan Eğri Teoremi**) γ, $\overline{\mathbb{C}}$'da kapalı bir Jordan eğrisi olsun. Bu takdirde γ eğrisi kompleks düzlemi ortak sınırları γ olan biri sonlu, diğeri sonsuz iki ayrık bölgeye ayırır. Bu bölgelerin her biri basit bağlantılıdır [24].

$\left[a,b\right]$ aralığının $P=\left\{t_0,t_1,...,t_n\right\}$ şeklindeki tüm parçalanışlarının ailesi $\mathbb{P}$ ile gösterilsin ve $\ell_n(P):=\sum_{k=1}^{n}\left|z(t_k)-z(t_{k-1})\right|$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\sup\left\{\ell_n(P):P\in\mathbb{P}\right\}<\infty$$

ise γ eğrisine *ölçülebilir eğri* denir.

Teorem 3.2.2. Eğer γ parçalı düzgün eğri ise bu eğri ölçülebilirdir ve

$$mes\left(\gamma\right)=\int_a^b\left|z'(t)\right|dt$$

dır [24].

Tanım 3.2.3. γ eğrisinin doğal denklemi $z=z\left(s\right),\ 0\le s\le \ell,\ \ell:=mes\gamma$, olsun. Eğer, γ eğrisine her bir $z\left(s\right)$ noktasında çizilen teğetin OX ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı $\theta\left(s\right):=\theta\left(z\left(s\right)\right)$ s'nin sürekli fonksiyonu ise bu eğriye *sürekli değişken teğete sahip eğri* denir ve bu özelliğe sahip eğrilerin sınıfı C_θ ile gösterilir.

Tanım 3.2.4. G bölgesi L Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge olsun ve $\left\{z_j\right\}_{j=1}^{m}$ noktaları L eğrisi üzerinde yerleşsin. Eğer L eğrisi $\left\{z_j\right\}_{j=1}^{m}$ köşe noktalarında kesişen ($\overline{G}$'a göre) ve bu noktalarda $\lambda_j\pi,\ 0<\lambda_j<2$ dış açılarını oluşturan sonlu sayıda $L_j\in C_\theta,\ j=1,2,...,m$ yaylarının birleşiminden oluşuyorsa L

eğrisine *parçalı düzgün (sürekli değişken teğete sahip) eğri* denir ve bu özelliğe sahip eğrilerin sınıfı $C_\theta\left(\lambda_1,...,\lambda_m\right)$ ile gösterilir.

Eğer $L \in C_\theta\left(\lambda_1,...,\lambda_m\right)$ ise $G \in C_\theta\left(\lambda_1,...,\lambda_m\right)$ yazılır. Eğer $m=1$ ise $G \in C_\theta\left(\lambda\right)$, 0<$\lambda$<2, yazılır.

Tanım 3.2.5. a, b, c, d, e ve f birer reel sayı olmak üzere kompleks düzlemde $G := \{z = x+iy \,:\, a<x<b,\ d<y<f\} \cup \{z = x+iy : a<x<c,\ d<y<e\}$ şeklinde tanımlanan bölgeye $L-$*şekilli bölge* denir.

Tanım 3.2.6. $S \subset \mathbb{C}$ bir küme ve $f : S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $0<\alpha\le 1$ olmak üzere $\exists A>0$ öyle ki $\forall z_1, z_2 \in S$ için,

$$\left|f\left(z_1\right)-f\left(z_2\right)\right| \le A\left|z_1-z_2\right|^\alpha$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna α *mertebeden Hölder koşulunu sağlıyor* denir ve $f \in H^\alpha\left(S\right)$ veya $f \in Lip\alpha$ ile gösterilir. $H^1\left(S\right) := H\left(S\right)$ olsun.

Aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) $f \in H\left(S\right) \Rightarrow f \in C\left(S\right)$

2) $\beta \le \alpha$ olmak üzere $f \in H^\alpha\left(S\right) \Rightarrow f \in H^\beta\left(S\right)$ dir.

Yani $H^\alpha\left(S\right) \subseteq H^\beta\left(S\right)$ dır.

3) $f \in H\left(S\right), g \in H\left(S\right)$ olmak üzere,

$$f+g \in H\left(S\right),\quad f.g \in H\left(S\right),\ \frac{f}{g} \in H\left(S\right)\left(g \ne 0\right)$$

dir [25].

Tanım 3.2.7. f 'nin teğet dönüşümünün z_0 noktasında yönü değişmiyor ve

a) açıları değişmiyor,

b) kareyi kareye resmediyor,

c) çemberi çembere resmediyor,

koşullarından herhangi birini sağlıyorsa $z_0 \in \mathbb{C}$ noktasında $\mathbb{R}^2$ diferansiyellenebilir f dönüşümüne bu noktada *konform* denir.

Eğer $f : D \to \mathbb{C}$ birebir, örten ve D'nin her bir noktasında konform ise f fonksiyonuna D bölgesinde konform dönüşüm denir [26].

Aşağıda verilen teorem konform dönüşüm teorisinin en önemli teoremlerinden biri olan Riemann Dönüşüm Teoremi'nin bir sonucudur.

Teorem 3.2.3. $G \subset \mathbb{C}$ sınırında en az iki tane nokta içeren basit bağlantılı bir bölge olsun. Bu durumda G bölgesini $B(0,1) := \{w : |w| < 1\}$ dairesine resmeden ve $\varphi(0) = 0$, $\varphi'(0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır [24].

Teorem 3.2.4. $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$ ve $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ olmak üzere

$$\Phi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

olacak şekilde bir tek $\Phi : \Omega \to \Delta$ konform dönüşümü vardır.

Tanım 3.2.8. $0 < r < 1$ ve $R > 1$ olsun. Bu durumda,

$$L_r := \{z \in G : |\varphi(z)| = r < 1\},\ L_R := \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = R > 1\},$$

eğrilerine sırasıyla *iç* ve *dış seviye eğrileri* denir. Açık olarak $L_1 \equiv L$ dir.

Tanım 3.2.9. γ, denklemi $z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ olan düzgün eğri ve f fonksiyonu γ eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon ise,

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt,$$

integraline f nin γ eğrisi üzerindeki *integrali* denir.

Teorem 3.2.5. (Cauchy İntegral Formülü) $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $f \in A(G)$ olsun. γ, $\overline{int\,\gamma} \subset G$ koşulunu sağlayan ölçülebilir Jordan eğrisi ise her $z \in int\,\gamma$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

dır [27].

Teorem 3.2.6. (Sonsuz Bölgeler için Cauchy İntegral Formülü) G bir bölge, $L := \partial G$, negatif yönlü, kapalı, ölçülebilir bir Jordan eğrisi olsun. $f(z) \in A\left(\overline{\Omega} \setminus G\right)$ ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(\infty) - f(z) \ , \ z \in \overline{\Omega} \setminus \overline{G}$$

dır [28].

Teorem 3.2.7. (Maksimum-Modulus Prensibi) $G \subset \mathbb{C}$ Jordan eğrisi ile sınırlı, sonlu bir bölge olsun. Eğer, $f \in A\left(\overline{G}\right)$ ve f sabitten farklı ise $|f|$ maksimum değerini ∂G 'de alır [27].

$G \subset \mathbb{C}$, $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge; $h(z) \geq 0$, G 'de tanımlı integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$0 < \iint_{G} h(z)\, d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlarsa h 'a, G üzerinde tanımlı *ağırlık fonksiyonu* denir.

Tanım 3.2.10. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $h(z)$ G 'de tanımlı bir ağırlık fonksiyonu ve $p > 0$ olsun. G bölgesinde tanımlı, ölçülebilir ve

$$\iint_{G} h(z) \left| f(z) \right|^p d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı $L_p(h, G)$ ile gösterilir. Eğer $h(z) \equiv 1$ ise $L_p(1, G) \equiv L_p(G)$ dir.

Tanım 3.2.11. $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $h(z)$, G 'de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. $p > 0$ olmak üzere G 'de analitik ve

$$\|f\|_{A_p(h,G)} = \left(\iint_G h(z) \left| f(z) \right|^p d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı $A_p(h,G)$ ile gösterilir. Bu sınıf

$$A_p(h,G) := \left\{ f : f \in A(G) \cap L_p(h,G) \right\}$$

ile de gösterilir. Özel halde $h(z) \equiv 1$ alınırsa, $A_p(G) := A_p(1,G)$ olarak gösterilir.

$\|f\|_{A_p(h,G)}$, $p \geq 1$ için norm ve $0 < p < 1$ için yarı normdur.

Teorem 3.2.8. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $p \geq 1$, $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p(G)$, $g \in L_q(G)$ ise,

$$\left| \iint_G f(z) g(z) d\sigma_z \right| \leq \left(\iint_G |f(z)|^p d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_G |g(z)|^q d\sigma_z \right)^{\frac{1}{q}},$$

$f, g \in L_p(G)$ ise

$$\left(\iint_G |f(z) + g(z)|^p d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\iint_G |f(z)|^p d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\iint_G |g(z)|^p d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Bu eşitsizliklere, sırasıyla, *Hölder Eşitsizliği* ve *Minkowski Eşitsizliği* adı verilir [29].

Özel halde $p = q = 2$ durumunda

$$\left| \iint_G f(z) g(z) d\sigma_z \right| \leq \left(\iint_G |f(z)|^2 d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_G |g(z)|^2 d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe *Shwarz Eşitsizliği* denir.

Tanım 3.2.12. $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $L := \partial G$ kapalı, ölçülebilir eğri ve $h(z)$, G'de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. $p > 0$ olmak üzere L üzerinde integrallenebilen ve

$$\int_L h(z)|f(z)|^p |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{L}_p(h, L)$ ile gösterilir. Özel halde $h(z) \equiv 1$ alınırsa, $\mathcal{L}_p(1, L) \equiv \mathcal{L}_p(L)$ olarak gösterilir. $p \geq 1$ olmak üzere $\mathcal{L}_p(h, L)$ uzayında norm

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} := \left(\int_L h(z)|f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumda da $0 < p < 1$ için $\|f\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}$, yarı normdur.

Tanım 3.2.13. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $p \geq 1$ olsun.

i) $f \in ACL(G)$,

ii) $\forall B \Subset G$ kompakt kümesi için $f_x,\ f_y \in L_p(B)$

koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna G bölgesinde $L_p -$ *türevlenebilirdir* denir.

Teorem 3.2.9. (Green Formülü) $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$, $L_1 -$türevlenebilir bir fonksiyon ise $D \subset G$ ölçülebilir sınırlı Jordan bölgesi için

$$\int_{\partial G} f(\xi)\, d\xi = 2i \iint_G f_{\bar{\xi}}(\xi)\, d\sigma_{\xi}$$

dır [30].

3.3. YARIKONFORM DÖNÜŞÜM VE EĞRİLER

Tanım 3.3.1. $G, H \subset \mathbb{C}$ herhangi iki bölge; $f : G \to H$ ise $\forall z \in G$ için $J_f(z) := |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 > 0$ koşulunu sağlayan ve C^1 sınıfından olan bir homeomorfizm olsun. Eğer,

$$\sup_{z \in G} \frac{|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2}{|f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2} \le K < \infty \tag{3.1}$$

ise f fonksiyonuna G bölgesi üzerinde tanımlı bir $K-$*yarıkonform dönüşüm*, $K \ge 1$ sayısına da f dönüşümünün *yarıkonformluk katsayısı* denir [31].

Tanımdan görülür ki f fonksiyonu G bölgesinde $K-$yarıkonform dönüşüm ve $k := \dfrac{K-1}{K+1}$ ise her $z \in G$ için $\left|\dfrac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}\right| \le k < 1$ dir.

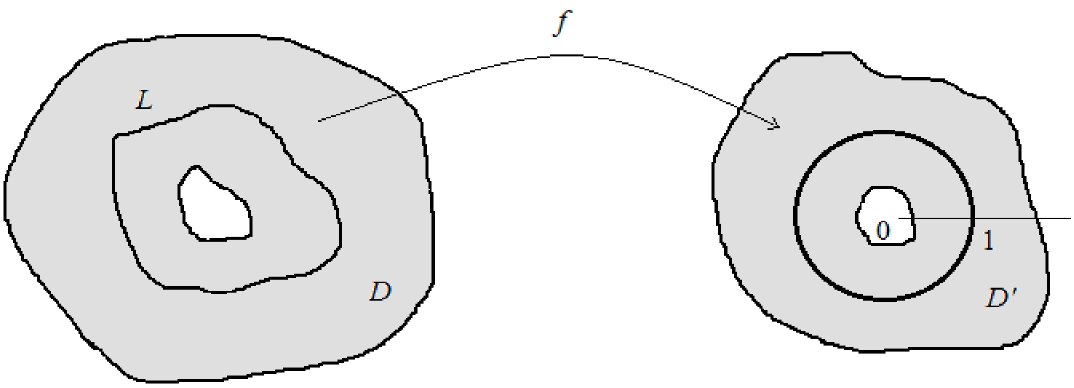
Yarıkonform dönüşümün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir [31].

i) 1-yarı konform dönüşüm konformdur.

ii) f_1, K_1-yarı konform ve f_2, K_2-yarıkonform dönüşümleri verilsin. $f_1 \circ f_2$ bileşke dönüşümü $K_1 \cdot K_2-$yarıkonformdur.

iii) f dönüşümü $K-$yarı konform ise f^{-1}de $K-$yarıkonformdur.

Tanım 3.3.2. Kapalı bir L Jordan eğrisi (yayı) verisin. $f : D \supset L \to D'$, $K-$yarıkonform dönüşümü olmak üzere $f(L)$ çember (doğru parçası) ise L eğrisine (yayına) $K-$*yarıkonform eğri* (veya $K-$*yarıkonform yay*) denir [31]. (bkn. Şekil-1)



Şekil-1

$F(L)$, L’yi çembere (aralığa) resmeden $f: D \supset L \to D'$ tüm homeomorfizmaların kümesi ve

$$K_L := \inf_{f \in F(L)} \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

olsun.

Eğer $K_L < \infty$ ise, L eğrisine *yarıkonform eğri* denir. Eğer L, $K-$yarıkonform eğri ise

$$K_L \leq K \tag{3.2}$$

dır [32], [33].

L eğrisi herhangi bir $K \geq 1$ sayısı için K-yarıkonform eğri ise, o halde L ye *yarıkonform eğri* denir.

Tanım 3.3.2’de $D = \overline{\mathbb{C}}$ veya $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

i) $D = \overline{\mathbb{C}}$ durumunda Tanım 3.3.2’ye $K-$yarıkonform eğrinin ‘‘*global*’’ *tanımı* denir ve yarıkonformluk katsayısı (3.1) yardımıyla hesaplanır.

ii) $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ durumunda Tanım 3.3.2’ye $K-$yarıkonform eğrinin ‘‘*lokal*’’ *tanımı* denir ve yarıkonformluk katsayısı (3.2) yardımıyla hesaplanır.

Teorem 3.3.1. L bir Jordan eğrisi, $z_1, z_2 \in L$, $z_1 \neq z_2$ keyfi noktalar ve $\ell(z_1, z_2) \subset L$, z_1 ile z_2 noktasına birleştiren küçük çaplı yay olsun. L eğrisinin yarıkonform eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in L, \\ z_3 \in \ell(z_1, z_2)}} \frac{|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2|} < \infty$$

olmasıdır [30].

Uyarı 3.3.1. Yarıkonform eğriler sıfır açı içermez.

Uyarı 3.3.2. Yarıkonform eğriler lokal ölçülebilir olmayabilir.

Teorem 3.3.2. L analitik yay veya eğri ise $1-$yarıkonformdur [7].

Sonuç 3.3.1. $G \in C_\theta$ ise $\partial G := L$ eğrisi $\forall \varepsilon > 0$ için $(1+\varepsilon)-$yarıkonformdur.

Tanım 3.3.3. $L \subset \mathbb{C}$ bir Jordan eğrisi; $y : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü altında $y(intL) = extL$, $y(extL) = intL$ ve $\forall z \in L$ için $y(z) = z$ olsun. Eğer $\overline{y} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yarıkonform ise y dönüşümüne L eğrisine göre *yarıkonform yansıma* denir [31].

Teorem 3.3.3. $L \subset \mathbb{C}$ bir Jordan eğrisi olsun. L eğrisine göre yarıkonform yansımanın olması için gerek ve yeter şart L eğrisinin yarıkonform eğri olmasıdır [31].

Uyarı 3.3.3. "$a \prec b$" ve"$a \asymp b$" sembolleriyle c, c_1, c_2 pozitif sabitler olmak üzere sırasıyla $a \le c.b$ ve $c_1.a \le b \le c_2.a$ gösterilir. Burada c, c_1, c_2 sabitleri a ve b sayılarından bağımsızdır.

Teorem 3.3.4. L eğrisi K-yarıkonform eğri olsun. O zaman L eğrisinin belli bir komşuluğunda sınırlı kısmi türevlere sahip olan bir yarıkonform yansıma vardır [31].

Özel olarak, L eğrisinin belli bir komşuluğundaki her bir z için

$$|y(z) - z'| \approx |z - z'| \ , \ z' \in L \tag{3.3}$$

sağlanır [31].

Sonuç 3.3.2. L eğrisi K-yarıkonform eğri, $\infty \notin L$, $G = int\,L$ ve $\Omega = ext\,L$ olsun. Bu durumda, L’ye göre $c_1(K)-$yarıkonform $y(z)$ yansıması vardır ve bu yansıma;

i) $a \in G$ sabit bir nokta öyle ki, $a = y(\infty)$ olmak üzere; $y(z)$yansıması $\overline{\mathbb{C}} \setminus (L \cup \{a\})$ bölgesinde sürekli türevlenebilir.

ii) Yeterince küçük $\delta > 0$ sayısı ve $B(a,\delta)$ için $\widetilde{B}(a,\delta) := y\left(B(a,\delta)\right)$ olsun.

$$\overline{\mathbb{C}}_{\delta} := \overline{\mathbb{C}} \backslash \left(\overline{B(a,\delta)} \cup \overline{\widetilde{B}(a,\delta)} \right),$$

bölgesinde (3.3) sağlanır,

iii) Her $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus L$ için $|y_z| \le c(K,\delta)$, $c(K,\delta)^{-1} \le |y_{\bar{z}}| \le c(K,\delta)$ ve $z \notin \overline{\mathbb{C}} \setminus L$ için

$$|y_z| \prec \begin{cases} |y(z)|^2 , & z \in B(a,\delta) \\ |z-a|^{-2} , & z \in \widetilde{B}(a,\delta) \end{cases}$$

ve

$$|y_{\bar{z}}| \approx \begin{cases} |y(z)|^2 , & z \in B(a,\delta) \\ |z-a|^{-2} , & z \in \widetilde{B}(a,\delta) \end{cases}$$

özelliklerine sahiptir [31].

Tanım 3.3.4. Eğer, her $\psi : \{ w : |w| < 1 \} \to G$ konform ve yalınkat dönüşümü $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$'a K-yarıkonform $\left(K = \dfrac{1+\kappa}{1-\kappa} \right)$ dönüşümüne kadar genişletilebilirse G bölgesine $\kappa -$yarıdaire $\left(0 \le \kappa < 1 \right)$ denir.

Eğer, herhangi bir $0 \le \kappa < 1$ için G bölgesi (L eğrisi) $\kappa -$yarıdaire ($\kappa -$yarıçember) ise G bölgesine (L eğrisine) yarıdaire (yarıçember) denir.

Bu sınıf $Q(\kappa)$, $\left(0 \le \kappa < 1 \right)$ ile gösterilecektir ve eğer $G \in Q(\kappa)$ ise $L := \partial G \in Q(\kappa)$, $\left(0 \le \kappa < 1 \right)$ yazılır. Eğer herhangi bir $0 \le \kappa < 1$ için $G \in Q(\kappa)$ ($L \in Q(\kappa)$) ise G bölgesi (L eğrisi) Q sınıfındandır denir ve $G \in Q$ ($L \in Q$) şeklinde gösterilir.

Tanım 3.3.5. Eğer $G \in Q(\kappa)$, $\left(0 \le \kappa < 1 \right)$ ve $L := \partial G$ eğrisi ölçülebilir ise G bölgesi $\widetilde{Q}(\kappa)$, $\left(0 \le \kappa < 1 \right)$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.3.6. ℓ bir Jordan yayı olsun. Eğer ℓ yayı $\exists\, 0 \le \kappa < 1$ için bir $\kappa-$ yarı çemberinin bir parçası ise ℓ yayına yarıkonform yay denir.

$R > 1$ için $L^* := y(L_R)$, $G^* := intL^*, \Omega^* := extL^*$ olsun. $\Phi_R : \Omega^* \to \Delta$ konform bir dönüşüm olsun ($\Phi_R(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$). Bu durumda $|z - t| = d(z, L_R)$ olacak şekilde $z \in L^*$ ve $t \in L$ için

$$d(z, L) \asymp d(t, L_R) \asymp d(z, L_R^*)$$

$$|\Phi_R(z)| \le |\Phi_R(t)| \le 1 + c(R-1) \tag{3.4}$$

dir. Burada $L_R^* := \{\varsigma : |\Phi(\varsigma)| = R,\ R > 1\}$ ve c, R 'den bağımsız bir sabittir [7].

Lemma 3.3.1. L, $K-$yarıkonform eğri $z_1 \in L$ ve $z_2,\ z_3 \in G \cap \{z : |z - z_1| \le\ cd(z_1, L_{R_0})\}$ $w_j = F(z_j),\ j = 1,2,3$ $\left(z_2, z_3 \in \Omega \cap \{z : |z - z_1| \le cd(z_1, L_{r_0})\},\ w_j = \Phi(z_j),\quad j = 1,2,3\right)$ olsun.

Eğer $|z_1 - z_2| \prec |z_1 - z_3|$ ise

i) $|w_1 - w_2| \prec |w_1 - w_3|$,

ii) $\left|\dfrac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^{-2}} \prec \left|\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right| \prec \left|\dfrac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^2}$,

sağlanır [34], burada $R_0 > 1$ tespit edilmiştir ve $r_0 = R_0^{-1}$ dir.

Sonuç 3.3.3. Lemma 3.3.1'de $z_3 \in L_{r_0}$ $\left(z_3 \in L_{R_0}\right)$ ise

$$|w_1 - w_2|^{K^2} \prec |z_1 - z_2| \prec |w_1 - w_2|^{K^{-2}}$$

dir.

Lemma 3.3.2. G bölgesi $\exists\, 0 \le \kappa < 1$ için bir $\kappa -$yarıdaire olsun. Bu durumda, $\forall\, w_1, w_2 \in \overline{\Omega}$ için

$$\left|\Psi\left(w_1\right) - \Psi\left(w_2\right)\right| \succ \left|w_1 - w_2\right|^{1+\kappa}$$

dir [31].

Sonuç 3.3.4. Eğer $G \in C_\theta$ ise $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\left|w_1 - w_2\right|^{1+\varepsilon} \prec \left|z_1 - z_2\right| \prec \left|w_1 - w_3\right|^{1-\varepsilon}$$

eşitsizliği sağlanır.

Lemma 3.3.3. $G \in C_\theta\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right)$, $0 < \lambda_j < 2$, $j = 1, 2, ..., m$ olsun. Bu durumda,

i) Her bir $w \in \Delta_j$ için $\left|w - w_j\right|^{\lambda_j + \varepsilon} \prec \left|\Psi(w) - \Psi(w_j)\right| \prec \left|w - w_j\right|^{\lambda_j - \varepsilon}$ ve $\left|w - w_j\right|^{\lambda_j - 1 + \varepsilon} \prec \left|\Psi'\left(w\right)\right| \prec \left|w - w_j\right|^{\lambda_j - 1 - \varepsilon}$,

ii) Her bir $w \in \overline{\Delta} - \Delta_j$ için $\left|\left|w\right| - 1\right|^{1+\varepsilon} \prec d\left(\Psi\left(w\right), L\right) \prec \left|\left|w\right| - 1\right|^{1-\varepsilon}$ ve $\left|\left|w\right| - 1\right|^{\varepsilon} \prec \left|\Psi'\left(w\right)\right| \prec \left|\left|w\right| - 1\right|^{-\varepsilon}$

sağlanır.

Sonuç 3.3.5. (3.4)’ün sol tarafı keyfi continuum için

$$d\left(z_1, L\right) \succ \left(R - 1\right)^2$$

biçimindedir [31].

G kümesi $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge, $\left\{z_j\right\}_{j=1}^{m} \in L$ olsun. Tespit edilmiş $R_0 > 1$ sayısı için genelleşmiş Jacobi ağırlık fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$h(z) := \prod_{j=1}^{m} \left|z - z_j\right|^{\gamma_j}, \quad z \in G_R \tag{3.5}$$

burada her $j = 1, 2, ..., m$ için $\gamma_j > -2$ dir.

Lemma 3.3.4. L bir $K-$yarıkonform eğri, $h(z)$, (3.5)'teki gibi tanımlı ağırlık fonksiyonu ve $R=1+\frac{c}{n}$ olsun. Bu durumda her $\varepsilon\in(0,1)$ için bir $L_{1+\varepsilon(R-1)}$ seviye eğrisi vardır öyle ki her bir $P_n(z)\in\wp_n$ polinomu, $n\in\mathbb{N}$ için aşağıdaki ifade sağlanır:

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}_p\left(\frac{h}{\Phi'},L_{1+\varepsilon(R-1)}\right)}\prec n^{\frac{1}{p}}\|P_n\|_{A_p(h,G)},\ p>0$$

[35].

Lemma 3.3.5. L bir $K-$yarıkonform eğri ve $h(z)$, (3.5)'deki gibi tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her bir $P_n(z)\in\wp_n$ polinomu, $R>1$ ve $n\in\mathbb{N}$ için aşağıdaki sağlanır:

$$\|P_n\|_{A_p(h,G_R)}\prec\tilde{R}^{n+\frac{1}{p}}\|P_n\|_{A_p(h,G)},\ p>0,$$

burada $\tilde{R}=1+c(R-1)$ ve c, n ve R'den bağımsız bir sabittir [5].

f, $|z|<1$'de analitik bir fonksiyon ve $0<r<1$ olmak üzere

$$M_p(r,f)=\left\{\frac{1}{2\pi}\int_0^{2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|d\theta\right\}^{\frac{1}{p}},\quad 0<p<\infty$$
$$M_\infty(r,f)=\max_{0\le\theta\le2\pi}\left|f\left(re^{i\theta}\right)\right|$$

olsun.

Tanım 3.3.7. f, $|z|<1$'de analitik olan bir fonksiyon olsun. Eğer $r\to1$ iken $M_p(r,f)$, $(0<p\le\infty)$ sınırlı ise f fonksiyonuna $H^p\ (0<p\le\infty)$ sınıfına aittir denir [36, s.1,2].

Teorem 3.3.5. (Hardy Konvekslik Teoremi). $f(z)$, $|z|<1$'de analitik ve $0<p\leq\infty$ olsun. Bu durumda

i) $M_p(r,f)$, r'nin azalmayan bir fonksiyonudur.

ii) $\log M_p(r,f)$, $\log r$'nin konveks bir fonksiyondur [36, s.9].

Lemma 3.3.6. L ölçülebilir Jordan eğrisi, $h(z)$, (3.5)'deki gibi tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda keyfi $P_n(z)\in\wp_n$, her $R>1$ and $n\in\mathbb{N}$ için

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L_R)}\leq R^{n+\frac{1+\gamma^*}{p}}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)},\ p>0 \tag{3.6}$$

sağlanır, burada $\gamma^*:=\max\{\gamma_j : j=1,2,...,m\}$ dir.

İspat: $f_n(t):=\prod_{j=1}^{m}\left[t\Psi\left(\frac{1}{t}\right)-\Psi(w_j)\right]^{\frac{\gamma_j}{p}}t^nP_n\left(\Psi\left(\frac{1}{t}\right)\right)\cdot\left(\Psi'\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$ olsun. f_n, B'de analitik ve L ölçülebilir olduğundan f_n fonksiyonu H^p sınıfına aittir. Bu durumda Teorem 3.3.5'e göre

$$\int_{|t|=\frac{1}{R}}|f_n(t)|^p\frac{|dt|}{|t|}\leq\int_{|t|=1}|f_n(t)|^p|dt|$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}\int_{L_R}h(z)|P_n(z)|^p|dz| &= \int_{|w|=R}\prod_{j=1}^{m}|\Psi(w)-\Psi(w_j)|^{\gamma_j}\left|P_n(\Psi(w))(\Psi'(w))^{\frac{1}{p}}\right|^p|dw| \\ &= \int_{|t|=\frac{1}{R}}\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi\left(\frac{1}{t}\right)-\Psi(w_j)\right|^{\gamma_j}\left|P_n\left(\Psi\left(\frac{1}{t}\right)\right)\left(\Psi'\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p|dt| \\ &\leq R^{np+1+\gamma_j}\int_{|t|=1}\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi\left(\frac{1}{t}\right)-\Psi(w_j)\right|^{\gamma_j}\left|P_n\left(\Psi\left(\frac{1}{t}\right)\right)\left(\Psi'\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p|dt| \\ &= R^{np+1+\gamma_j}\int_{L}h(z)|P_n(z)|^p|dz|\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

Lemma 3.3.7. L yarıkonform bir eğri olsun. Bu durumda her bir $P_n(z) \in \wp_n$ polinomu, $n \in \mathbb{N}$ ve $R = 1 + \frac{c}{n}$ için

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \prec \|P_n\|_{C(\bar{G}^*)}$$

sağlanır.[7].

Lemma 3.3.8. $p > 0$ olmak üzere f fonksiyonu $|z| > 1$ de analitik ve sonsuzlukta en fazla n'inci dereceden kutup yerine sahip olsun. O halde $1 < R_1 < R_2$ koşulunu sağlayan R_1 ve R_2 için

$$\|f\|_{A_p(R_1<|z|<R_2)} \leq \left(2\frac{R_2 - R_1}{R_1 - 1} \right)^{1/p} R_2^{\,n+\frac{2}{p}} \|f\|_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

elde edilir.

İspat: Teorem 3.3.5'e göre, $R_1 \leq \rho < R_2$, $1 < s \leq R_1$ koşullarını sağlayan her ρ ve s için,

$$\int\limits_{|z|=\rho} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1/p}} \right|^p |dz| \leq \int\limits_{|z|=R_1} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1/p}} \right|^p |dz| \tag{3.7}$$

ve

$$\int\limits_{|z|=R_1} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1/p}} \right|^p |dz| \leq \int\limits_{|z|=s} \left| \frac{f(z)}{z^{n+1/p}} \right|^p |dz| \tag{3.8}$$

yazılır.

(3.7) ρ'ya göre R_1'den R_2'ye ve (3.8) de s'ye göre 1'den R_1'e integrallenirse,

$$\iint\limits_{R_1<|z|<R_2} |f(z)|^p \, d\sigma_z \leq \frac{R_2^{np+2} - R_1^{np+2}}{R_1^{np+2} - 1} \iint\limits_{1<|z|<R_1} |f(z)|^p \, d\sigma_z \tag{3.9}$$

elde edilir.

$$S := \frac{R_2^{np+2} - R_1^{np+2}}{R_1^{np+2} - 1} \tag{3.10}$$

seçelim.

Kesrin pay ve paydasına Lagrange teoremi [37] uygulanırsa, bazı $r_1,\ 1<r_1<R_1$ ve $r_2,\ R_1<r_2<R_2$ için,

$$S=\frac{(np+2)\,r_2^{np+2}\,(R_2-R_1)}{(np+2)\,r_1^{np+2}\,(R_1-1)}$$

elde edilir. Buradan, $\frac{1}{r_1}<1$ ve $r_2<R_2$ olmasından,

$$S<\frac{R_2-R_1}{R_1-1}R_2^{np+1} \tag{3.11}$$

dir. (3.10) ve (3.11) kullanılarak

$$\|f\|^p_{A_p(R_1<|z|<R_2)}=\iint\limits_{R_1<|z|<R_2}|f(z)|^p\,d\sigma_z\le S\iint\limits_{1<|z|<R_1}|f(z)|^p\,d\sigma_z=S\|f\|^p_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

$$\left(\|f\|^p_{A_p(R_1<|z|<R_2)}\right)^{1/p}\le\left(\frac{R_2-R_1}{R_1-1}\right)^{1/p}\left(R_2^{np+1}\right)^{1/p}\left(\iint\limits_{1<|z|<R_1}|f(z)|^p\,d\sigma_z\right)^{1/p}$$

$$\|f\|^p_{A_p(R_1<|z|<R_2)}\le\left(\frac{R_2-R_1}{R_1-1}\right)^{1/p}R_2^{n+1/p}\,\|f\|_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.3.9. L bir K-yarıkonform eğri, $h(z)$ ise (3.9) daki gibi tanımlanmış olsun. O halde, keyfi $P_n(z)\in\wp_n$, herhangi $R>1$ ve $n=1,2,...$ için

$$\|P_n\|_{A_p\left(h,G_{1+c(R-1)}\right)}\le c_1R^{n+\frac{1}{p}}\|P_n\|_{A_p(h,G)}\ ,\quad p>0 \tag{3.12}$$

dir. Burada c,c_1 , n ve R den bağımsız sabitlerdir.

İspat: İspat birkaç adımda verilecektir. İlk olarak bazı $c>0$ için

$$\|P_n\|_{A_p(h,G_R\setminus G)}\prec\left[1+c(R-1)\right]^{n+\frac{2}{p}}\|P_n\|_{A_p\left(h,G\setminus G^*\right)} \tag{3.13}$$

değerlendirilmesi gösterilecekitr. Gösterelim ki $\rho_1<\rho_2$ olacak şekilde ρ_1,ρ_2 sayıları öyle seçelebilir ki

$$G^*_{\rho_1}\subset G \tag{3.14}$$

$$G_R\subset G^*_{\rho_2} \tag{3.15}$$

$$\rho_1 \asymp R-1 \tag{3.16}$$

$$\rho_2 \asymp R-1 \tag{3.17}$$

sağlansın. Gerçekten, $z \in L^*$, $\tilde{z} = y(z)$ olmak üzere, ρ_1, ρ_2 (3.16) ve (3.17)'i sağlayan keyfi sayılar olsun. Sırasıyla

$$d\left(z, L^*_{\rho_1}\right) = |z - z_1|; \ \ d(z, L) = |z - z_2| \ \text{ve} \ d\left(z, L^*_{\rho_2}\right) = |z - z_3|$$

formüllerine göre $z_1 \in L^*_{\rho_1}$, $z_2 \in L$ ve $z_3 \in L^*_{\rho_2}$ noktaları tanımlansın. Her $z \in L^*$ ve $t \in L$ için $|z - t| = d(z, L_R)$ olmak üzere

$$d(z, L) \asymp d(t, L_R) \asymp d\left(z, L^*_R\right)$$

bağıntısından,

$$c_3 d(z_2, L_R) \le d(z, L) \le c_4 d\left(z_2, L^*_R\right) \tag{3.18}$$

olacak şekilde z ve R den bağımsız c_3 ve c_4 sayıları vardır.

L^* bir yarıçember olduğu için Φ_R fonksiyonuna Lemma 3.3.1 uygulanarak

$$\left|\frac{z - z_2}{z - z_1}\right| \ge c_5 \left|\frac{\Phi_R(z) - \Phi_R(z_2)}{\Phi_R(z) - \Phi_R(z_1)}\right|^{\varepsilon_1} \ge c_6 \left(\frac{|\Phi_R(z) - \Phi_R(z_2)|}{\rho_1 - 1}\right)^{\varepsilon_1}$$

elde edilir. Buradan

$$|z - z_1| \ge c_6^{-1} \left(\frac{\rho_1 - 1}{|\Phi_R(z) - \Phi_R(z_2)|}\right)^{\varepsilon_1} |z - z_2| \tag{3.19}$$

bulunur.

$y_R(z)$ için D-özelliğine [38] sahip olduğundan,

$$|z - z_2| \ge c_3 d(z_2, L_R) \ge c_7 \left|\tilde{z} - z_2\right|$$

elde edilir ve Lemma 3.3.1. e göre

$$|\Phi_R(z) - \Phi_R(z_2)| \ge c_8 \left|\Phi_R\left(\tilde{z}\right) - \Phi_R(z_2)\right| \ge c_8 (R - 1)$$

bulunur. (3.19) dan

$$|z - z_1| \le c_6^{-1} \left(\frac{\rho_1 - 1}{c_8 (R - 1)}\right)^{\varepsilon_1} |z - z_2|$$

elde edilir. Böylece $c_9 = \dfrac{1}{2} c_8 . c_6^{-\varepsilon_1}$ olmak üzere, (3.14) ve (3.16)'ya uygun olarak,

$$\rho_1 = 1 + c_9 \left(R-1\right) \tag{3.20}$$

yazılabilir.

Şimdi ρ_2 yi tanımlayalım. Φ_R ye Lemma 3.3.1. uygulanmasıyla

$$\left|\frac{z-\tilde{z}}{z-z_3}\right| \le c_{10} \left|\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})}{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_3)}\right|^c$$

elde edilir. $\left|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_3)\right| \succeq \rho_2 - 1$ olmasından,

$$\left|z-z_3\right| \ge c_{11} \left(\frac{\rho_2 - 1}{\left|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})\right|}\right)^c \left|z-\tilde{z}\right| \tag{3.21}$$

elde edilir.

$$\left|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})\right| \le c_{12} \left|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)\right|$$

olmak üzere,

$$\begin{aligned}\left|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})\right| &\le \left|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)\right| + \left|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)\right| \\ &\le c_{12}+1\left|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)\right| \le c_{13}\left(R-1\right)\end{aligned}$$

bulunur ve (3.19) dan

$$\left|z-z_3\right| \ge c_{11} \left(\frac{\rho_2 - 1}{c_{13}\left(R-1\right)}\right)^c \left|z-\tilde{z}\right|$$

elde edilir. $c_{14} = c_8 . c_6^{-\varepsilon_1} + c_{13} . c_{11}^{c^{-1}}$ olmak üzere,

$$\rho_2 = 1 + c_{14}\left(R-1\right) \tag{3.22}$$

seçerek (3.15) ve (3.17) koşulunu sağlayan ρ_2 elde edilmiş olur.

Şimdi (3.13) gösterilecektir. Bunun için $h(z)$ ağırlık fonksiyonunun singüler noktalarına göre aşağıdaki şekilde Blashke fonksiyonunu oluşturulsun.

$$B_R(z) = \prod_{i=1}^{m} B_R^i(z) := \prod_{i=1}^{m} \frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{1-\overline{\Phi_R(z_i)}\Phi_R(z)} \quad , \quad z \in \Omega^* \tag{3.23}$$

$B_R(z_i) = 0$ ve $\left|B_R(z)\right| \equiv 1,\ z \in L^*$ olduğu kolayca görülür.

Her $p > 0$ ve $R > 1$ için

$$f_R(w):=h_0(\Psi_R(w))\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\Psi_R(w)-\Psi_R(w_i)}{wB_R^i(\Psi_R(w))}\right]^{\frac{\gamma_i}{p}}P_n(\Psi_R(w))\left[\Psi_R'(w)\right]^{\frac{2}{p}}\ ,\ w=\Phi_R(z)$$

fonksiyonu tanımlansın. f_R fonksiyonu Δ de analitik ve $w=\infty$ da en fazla n inci mertebeden kutup yerine sahiptir. Lemma 3.3.8'e göre

$$\|f_R\|_{A_p(\rho_1<|w|<\rho_2)}\leq\left(2\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\right)^{1/p}\rho_2^{n+\frac{2}{p}}\|f_R\|_{A_p(1<|w|<\rho_1)},$$

veya

$$\iint_{G_R\setminus G}h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}|P_n(z)|^p\,d\sigma_z$$

$$\leq\iint_{G_{\rho_2}^*\setminus G_{\rho_1}^*}h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}|P_n(z)|^p\,d\sigma_z$$

$$\leq 2\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\rho_2^{pn+2}\iint_{G_{\rho_1}^*\setminus G^*}h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}|P_n(z)|^p\,d\sigma_z$$

$$\leq 2\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\rho_2^{pn+2}\iint_{G\setminus G^*}h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}|P_n(z)|^p\,d\sigma_z$$

elde edilir. (3.20) ve (3.22) ile

$$\iint_{G_R\setminus G}h(z)|P_n(z)|^p\,d\sigma_z \tag{3.24}$$

$$\preceq\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\max_{z\in\overline{G_R\setminus G}}\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right|}{\min_{z\in\overline{G\setminus G^*}}\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right|}\right]^{\gamma_i}\rho_2^{pn+2}\iint_{G\setminus G^*}h(z)|P_n(z)|^p\,d\sigma_z$$

elde edilir.

$$\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right|=\left|\Phi_R(z)\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{\overline{\left(\frac{1}{\Phi_R(z_i)}\right)}-\Phi_R(z)}\cdot\frac{1}{\overline{\Phi_R(z_i)}}\right|$$

$$=\left|\frac{\Phi_R(z)}{\overline{\Phi_R(z_i)}}\right|\cdot\left|\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{\Phi_R(z_i)-\Phi_R(z)}\right|=\left|\frac{\Phi_R(z)}{\overline{\Phi_R(z)}}\right|$$

olduğu için ve (3.24) den

$$\iint\limits_{G_R \setminus G} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

$$\prec \prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\max_{z\in \overline{G_R \setminus G}}\left|\Phi_R(z)\right|}{\min_{z\in \overline{G\setminus G^*}}\left|\Phi_R(z)\right|}\right]^{\gamma_i} \rho_2^{pn+2} \iint\limits_{G\setminus G^*} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

$$\prec \rho_2^{pn+2} \iint\limits_{G\setminus G^*} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

elde edilir. ρ_2 ve R simetrik olduğundan ispat tamamlanır.

Bölgenin genişlemesine bağlı olarak polinomun artışının bulunması ile ilgili aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.3.10. (Bernstein-Walsh Lemması) G, basit bağlantılı bir bölge ve L_R, G 'nin dış seviye eğrisi olsun. Bu durumda her $P_n(z)\in \wp_n$ ve $M>0$ sabiti için

$$\max_{z\in \overline{G}}\left|P_n(z)\right| \le M$$

sağlanıyorsa, her $R>1$ ve $\forall z \in \overline{G}_R$ için

$$\left|P_n(z)\right| \le MR^n$$

eşitsizliği sağlanır [3, s.77].

Lemma 3.3.11. L yarıkonform ve ölçülebilir bir eğri olsun. O halde, herhangi bir $P_n \in \wp_n$ için,

$$\left|P_n(z)\right| \le \frac{c(L)}{d(z,L)}\sqrt{n}\left\|P_n\right\|_{A_2(G)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1} \ , \ z\in\Omega \qquad (3.26)$$

dir.

İspat: $P_n \in \wp_n$ ve $z\in\Omega$ sabit bir nokta olsun. O halde $\frac{P_n}{\Phi^{n+1}}$ fonksiyonu Ω da analitik, $L=\partial G$ de sürekli ve $z=\infty$ da sıfırdır. Böylece sonsuz bölgeler için

Cauchy teoreminden ve $y(z)$'nin $\forall z \in L$ için $y(z) = z$ ve $\forall z \in \mathbb{C}$ için $y(y(z)) = z$ özelliğinden, $g(\zeta) := \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - z)}$ olmak üzere

$$\frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)} = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)}d\zeta = -\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{g(\zeta)}{(\Phi^{n+1}\circ y)(\zeta)}d\zeta$$

elde edilir. $\frac{1}{\Phi^{n+1}\circ y}$ fonksiyonu $\overline{G}$ da sürekli ve G de L^2-türevlere sahiptir. O halde Green formülüyle,

$$\frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)} = -\frac{1}{\pi}\iint_G \left[\frac{g(\zeta)}{\Phi^{n+1}\circ y(\zeta)}\right]_{\overline{\zeta}} d\sigma_\zeta$$

$$= \frac{n+1}{\pi}\iint_G g(\zeta)\frac{\Phi'(y(\zeta))}{(\Phi^{n+2}\circ y)(\zeta)}y_{\overline{\zeta}}d\sigma_\zeta \tag{3.27}$$

elde edilir. Lemma 3.3.1 kullanılarak

$$\iint_G \frac{|\Phi'(y(\zeta))||y_{\overline{\zeta}}|}{|(\Phi^{n+2}\circ y)(\zeta)|^2}d\sigma_\zeta \le -\frac{1}{1-k^2}\iint_G \frac{|\Phi'(y(\zeta))|^2 |J(y(\zeta))|^2}{|(\Phi^{n+2}\circ y)(\zeta)|^2}d\sigma_\zeta$$

$$= -\frac{1}{1-k^2}\iint_\Omega \frac{|\Phi'(t)|^2}{|\Phi^{n+2}(\zeta)|^2}d\sigma_t$$

$$= -\frac{1}{1-k^2}\iint_\Delta \frac{d\sigma_w}{|w^{n+2}|^2} = -\frac{1}{1-k^2}\frac{\pi}{(n+1)}$$

elde edilir. Buradan,

$$\iint_G |g(\zeta)|^2 d\sigma_\zeta \le \frac{\|P_n\|^2_{L_2(G)}}{(dist(z,L))^2}$$

ve (3.27)'ye Cauchy Schwarz eşitsizliğinin uygulanmasıyla ispat tamamlanır.

Her bir $j = 1, 2, ...$ ve yeterince küçük $\varepsilon_1 > 0$ için $f_j : [0, \varepsilon_1] \to \mathbb{R}$ ile ikinci mertebeye kadar diferansiyellenebilen , $f_j(0) = 0$ ve $k = 0,1,2$ için $f_j^{(k)}(x) > 0$ koşullarını sağlayan fonksiyonlar gösterilsin.

Tanım 3.3.8. $G \subset \mathbb{C}$ bir Jordan bölgesi ve $f_j = f_j(x)$, $j = \overline{m_1+1, m}$ olsun. Eğer $L = \partial G$ eğrisi $\{z_i\}_{i=0}^{m} \in L$ noktalarında kesişen sonlu sayıda C_θ sınıfından $\{L_i\}_{i=0}^{m}$ yaylarının birleşmesiyle oluşuyor öyle ki $z_0 \in L \setminus \{z_i\}_{i=0}^{m}$ noktasında lokal düzgün ve

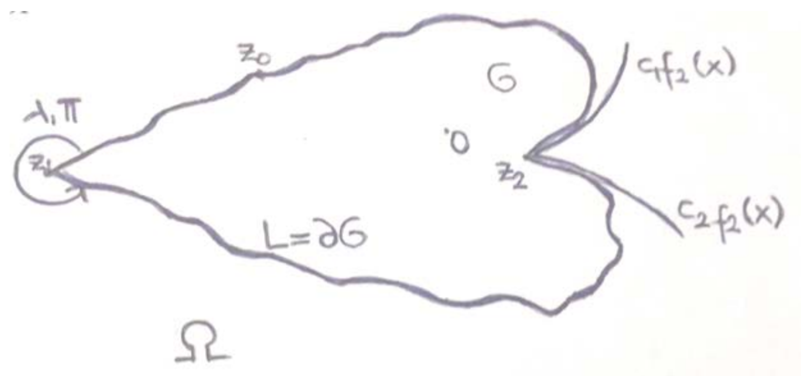
a) Her $z_i \in L$, $i = \overline{1, m_1}$, $m_1 \le m$ için G bölgesi ($\overline{G}$'a göre) z_i köşe noktasında $\lambda_i \pi$, $0 < \lambda_i < 2$, dış açısına sahip;

b) Her $z_j \in L$, $j = \overline{m_1+1, m}$ için z_j merkezli (x, y) lokal koordinat sisteminde $-\infty < c_1 < c_2 < +\infty$, $0 < \varepsilon_i < 1$, $i = 1, 2$ sabitleri için aşağıdaki koşulları sağlanır:

$$\left\{z = x + iy : |z| < \varepsilon_1, c_1 f_j(x) \le y \le c_2 f_j(x), 0 \le x \le \varepsilon_1\right\} \subset \overline{\Omega};$$

$$\left\{z = x + iy : |z| < \varepsilon_1, |y| \ge \varepsilon_2 x, 0 \le x \le \varepsilon_1\right\} \subset \overline{G};$$

koşulları sağlanıyorsa G bölgesine *parçalı düzgün (sürekli teğete sahip) dış sıfır açı içeren bölge* denir (bkn. Şekil-2). Bu özelliğe sahip bölgelerin sınıfı $C_\theta(\lambda_i; f_j)$ ile gösterilir ve eğer $G \in C_\theta(\lambda_i; f_j)$ ise $L \in C_\theta(\lambda_i; f_j)$ yazılır.



Şekil-2

Aşağıda teoremlerin ifade ve ispatlarında kullanılan notasyonlar verilmiştir:

$0<\delta_j<\delta_0:=\frac{1}{4}\min\left\{\left|z_i-z_j\right|: i,\, j=1,2,...,m,\, i\neq j\right\}$ olmak üzere $\Omega(z_j,\delta_j):=\Omega\cap\left\{z:\left|z-z_j\right|\leq\delta_j\right\}$; $\delta:=\min\limits_{1\leq j\leq m}\delta_j$, $\Omega(\delta):=\bigcup\limits_{j=1}^{m}\Omega(z_j,\delta)$, $\hat{\Omega}:=\Omega\setminus\Omega(\delta)$ ve $\Delta_j:=\Phi(\Omega(z_j,\delta))$, $\Delta(\delta):=\bigcup\limits_{j=1}^{m}\Phi(\Omega(z_j,\delta))$, $\widehat{\Delta}(\delta):=\Delta\setminus\Delta(\delta)$ olsun. $w_j:=\Phi(z_j)$ ve $\varphi_j:=\arg w_j$, $j=1,2,...,m$, için $\Delta_j^{'}:=\left\{t=Re^{i\theta}:R>1,\ \frac{\varphi_{j-1}+\varphi_j}{2}\leq\theta<\frac{\varphi_{\mathrm{j}}+\varphi_{\mathrm{j+1}}}{2}\right\}$, $\varphi_0\equiv\varphi_m$, $\varphi_1\equiv\varphi_{m+1}$; $\Omega_j:=\Psi(\Delta_j^{'})$, $L_{R_1}^j:=L_{R_1}\cap\Omega_j$ olsun. Açık olarak $\Omega=\bigcup\limits_{j=1}^{m}\Omega_j$ dır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

4.1. SIFIR AÇI İÇERMEYEN PARÇALI DÜZGÜN EĞRİ İLE SINIRLI OLAN BÖLGELERDE BERNSTEIN-WALSH EŞİTSİZLİKLERİ

Bu kısımda (1.2) eşitsizliğine benzer eşitsizlikler G bölgesinin $C_\theta\left(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m\right)$ sınıfından olması durumunda $A_p\left(h, G\right)$ uzayında incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

4.1.1. Temel Sonuçlar

Aşağıda teoremlerin ifade ve ispatlarında kullanılan notasyonlar verilmiştir:

$\left\{z_j\right\}_{j=1}^{m}$ noktaları L eğrisi üzerinde yerleşsin. $k \le m$ olmak üzere $\lambda_k^* := \max\left\{\lambda_j : j = 1, 2, ..., k\right\}$, $\lambda_{k*} := \min \;:= \left\{\lambda_j : j = 1, 2, ..., k\right\}$, $\lambda^* := \lambda_m^*$, $\lambda_* := \lambda_{m*}$,
$\widetilde{\lambda} := \begin{cases} \lambda_*, & p \ge 2, \\ \lambda^*, & p < 2, \end{cases}$, $\widetilde{\lambda_k} := \begin{cases} \lambda_{k*}, & p \ge 2, \\ \lambda_k^*, & p < 2, \end{cases}$ olsun. Her bir $j = 1, 2, \ldots, m$ için

$\mu_j := \dfrac{1}{\lambda_j} + (p-2)$, $\eta_j := \dfrac{1}{\lambda_j} - (2-p)$, $\omega_j := \dfrac{p-1}{\lambda_j}$, $\gamma_k^* := \max\left\{\gamma_j,\ j = 1, 2, ..., k\right\}$,

$\gamma^* := \gamma_m^*$, $\Gamma := \left\{\gamma_j,\ j = 1, 2, ..., m\right\}$, $\Gamma_{j,k} := \left\{\gamma_j \in \Gamma : \gamma_j \le \mu_k,\ k, j = 1, 2, ..., m\right\}$,

$\widetilde{\Gamma}_{j,k} := \Gamma \setminus \Gamma_{j,k}$ ve $w_j := \Phi(z_j)$ olsun.

Teorem 4.1.1.1. G, $K-$yarı konform eğrisiyle sınırlı bir bölge ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her bir $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, ve her $z_j \in L$, $j = 1, 2, \ldots, m$, noktaları için

$$\left|P_n\left(z_j\right)\right| \le c_1 n^{\frac{\left(2+\gamma_j\right)s}{p}} \left\|P_n\right\|_{A_p\left(h,G\right)} \tag{4.1}$$

ve sonuç olarak

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \le c_1 n^{\frac{(2+\tilde{\gamma})s}{p}} \|P_n\|_{A_p(h,G)} \tag{4.2}$$

sağlanır, burada $c_1 = c_1(G,p) > 0$, $s := \min\{2, K^2\}$, $\tilde{\gamma} := \max\{0, \gamma_j, j = 1,2,...,m\}$ dir.

Böylece, eğer $G \in C_\theta(\lambda)$ ise Sonuç 3.3.1 ile her $\varepsilon > 0$ için $K = 1+\varepsilon$ olduğundan $K^2 = (1+\varepsilon)^2 \asymp 1+\varepsilon$ ve $s := \min\{2,\ 1+\varepsilon\} = 1+\varepsilon$ olur, bu durumda her $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, $p > 0$ ve keyfi küçük $\varepsilon > 0$ için

$$|P_n(z)| \le c_1 n^{\frac{2}{p}+\varepsilon} \|P_n\|_{A_p(G)}, \quad z \in \bar{G}, \tag{4.3}$$

elde edilir. Sonuç olarak (3.26) ve (4.3)'ü birleştirerek

$$|P_n(z)| \le c_2 \|P_n\|_{A_2(G)} \begin{cases} n^{1+\varepsilon}, & z \in \bar{G}, \\ \dfrac{\sqrt{n}}{d(z,L)} |\Phi(z)|^{n+1}, & z \in \Omega, \end{cases} \tag{4.4}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.1.2. $p > 1$, $G \in C_\theta(\lambda)$, $0 < \lambda < 2$ ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her bir $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$ ve $R_1 = 1 + \dfrac{1}{n}$ için

$$|P_n(z)| \le c_3 \frac{G_{n,1}}{d(z, L_{R_1})} \|P_n\|_{A_p(h,G)} |\Phi(z)|^{n+1}, \quad z \in \Omega_{R_1} \tag{4.5}$$

dir, burada $c_3 = c_3(G,p,\varepsilon) > 0$,

$$G_{n,1} = \begin{cases} & p \geq 2,\ 0 < \lambda < 2,\ -2 < \gamma < \frac{1}{\lambda} + (p-2), \\ n^{\frac{1}{p}+\varepsilon_p}, & p < 2,\ 1 \leq \lambda < 2,\ -2 < \gamma < \frac{1}{\lambda} - (2-p), \\ & p < 2,\ 0 < \lambda < 1,\ -2 < \gamma < \frac{p-1}{\lambda}; \\ & p \geq 2,\ 0 < \lambda < 2,\ \gamma \geq \frac{1}{\lambda} + (p-2), \\ n^{\frac{\gamma\lambda}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\lambda+\varepsilon}, & p < 2,\ 1 \leq \lambda < 2,\ \gamma \geq \frac{1}{\lambda} - (2-p); \\ n^{\frac{\gamma\lambda}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)+\varepsilon}, & p < 2,\ 0 < \lambda < 1,\ \gamma \geq \frac{p-1}{\lambda}, \end{cases} \tag{4.6}$$

ve $p \neq 2$ ise $\varepsilon_p = \varepsilon$, $p = 2$ ise $\varepsilon_p = 0$ dır. Özel olarak $p = 2$ durumunda aşağıdaki sonuç alınır:

Sonuç 4.1.1.1. $p = 2$, $G \in C_\theta(\lambda)$, $0 < \lambda < 2$ ve $h(z)$, $m = 1$ için (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n \in \wp$, $n \in \mathbb{N}$ ve $R_1 = 1 + \frac{1}{n}$ için

$$|P_n(z)| \leq c_4 \frac{G_{n,2}}{d(z, L_{R_1})} \|P_n\|_{A_2(h,G)} |\Phi(z)|^{n+1}, \quad z \in \Omega_{R_1}, \tag{4.7}$$

sağlanır, burada $c_4 = c_4(G) > 0$ ve

$$G_{n,2} = \begin{cases} n^{\frac{1}{2}}, & -2 < \gamma < \frac{1}{\lambda}, \quad 0 < \lambda < 2, \\ n^{\frac{\gamma\lambda}{2}+\varepsilon}, & \gamma \geq \frac{1}{\lambda}, \quad 0 < \lambda < 2, \end{cases} \tag{4.8}$$

dır.

Şimdi (4.3)'e benzer sonuçlar $G \in C_\theta(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, $0 < \lambda_j < 2$, $j = 1, 2, ..., m$, $m \geq 2$ için $A_p(h, G)$ normunda verilecektir.

Teorem 4.1.1.3. $p>1,\ G\in C_\theta\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right)$, $0<\lambda_j<2$, $j=1,2,...,m$ ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp$, $n\in\mathbb{N}$ için

$$\left|P_n\left(z_j\right)\right|\leq c_{45}n^{\frac{\left(2+\gamma_j\right)\lambda_j}{p}+\varepsilon}\left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)} \tag{4.9}$$

her $\varepsilon>0$ için sağlanır, burada $c_5=c_5\left(G,p,\lambda_j,\varepsilon\right)>0$ dır.

(4.5) ve (4.9) sonuçları birleştirerek aşağıdaki sonuç alınır:

Sonuç 4.1.1.2. $p>1, G\in C_\theta\left(\lambda\right)$, $0<\lambda<2$ ve $h(z)$, $m=1$ için (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp$, $n\in\mathbb{N}$ ve $R_1=1+\frac{1}{n}$ için

$$\left|P_n\left(z\right)\right|\leq c_6\left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)}\begin{cases} n^{\frac{(2+\tilde{\gamma})\tilde{\lambda}}{p}+\varepsilon}, \ \forall\varepsilon>0, & z\in\overline{G}_{R_1}, \\ \dfrac{G_{n;1}}{d(z,L_{R_1})}\left|\Phi\left(z\right)\right|^{n+1}, & z\in\Omega_{R_1}, \end{cases} \tag{4.10}$$

sağlanır, burada $c_6=c_6\left(G,p,\lambda,\varepsilon\right)>0$, $\hat{\gamma}:=\max\{0,\gamma\}$, $\hat{\lambda}:=\begin{cases}\lambda, & z\in\Omega\left(z_1,\delta_1\right), \\ 1, & z\in\Omega\backslash\Omega\left(z_1,\delta_1\right),\end{cases}$ ve $G_{n;1}$, (4.6)'daki gibi tanımlıdır.

Sonuç 4.1.1.3. $p=2$, $G\in C_\theta\left(\lambda\right)$, $0<\lambda<2$ ve $h(z)$, $m=1$ için (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp$, $n\in\mathbb{N}$ ve $R_1=1+\frac{1}{n}$ için

$$\left|P_n\left(z\right)\right|\leq c_7\left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)}\begin{cases} n^{\left(1+\frac{\tilde{\gamma}}{2}\right)\tilde{\lambda}+\varepsilon}, \ \forall\varepsilon>0, & z\in\overline{G}_{R_1}, \\ \dfrac{G_{n;2}}{d(z,L_{R_1})}\left|\Phi\left(z\right)\right|^{n+1}, & z\in\Omega_{R_1}, \end{cases} \tag{4.11}$$

sağlanır, $c_7=c_7\left(G,\lambda,\varepsilon\right)>0$, $\hat{\gamma}:=\max\{0,\gamma\}$, $\hat{\lambda}:=\begin{cases}\lambda, & z\in\Omega\left(z_1,\delta_1\right), \\ 1, & z\in\Omega\backslash\Omega\left(z_1,\delta_1\right),\end{cases}$ ve $G_{n;2}$, (4.8)'deki gibi tanımlıdır.

Şimdi genel durum, yani $m \geq 2$ durumu için elde edilen sonuçlar verilecektir.

Teorem 4.1.1.4. $p > 1$, $G \in C_\theta(\lambda_1, \lambda_2, ..., \lambda_m)$, $0 < \lambda_j < 2$, $j = 1, 2, ..., m$ ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n \in \wp$, $n \in \mathbb{N}$, $R_1 = 1 + \frac{1}{n}$ ve yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$|P_n(z)| \leq c_8 \frac{D_{n;1}}{d(z, L_{R_1})} \|P_n\|_{A_2(h,G)} |\Phi(z)|^{n+1}, \quad z \in \Omega_{R_1}, \tag{4.12}$$

sağlanır, burada $c_8 = c_8(G, p) > 0$

$$D_{n;1} := \begin{cases} n^{\frac{1}{p}+\varepsilon_p}, & \begin{array}{c} \forall\, j = 1, 2, ..., m \text{ için}, \\ p \geq 2,\, 0 < \lambda_j < 2,\, -2 < \gamma_j < \frac{1}{\lambda_j} + (p-2), \\ \text{veya } p < 2,\, 1 \leq \lambda_j < 2,\, -2 < \gamma_j < \frac{1}{\lambda_j} - (2-p), \\ \text{veya } p < 2,\, 0 < \lambda_j < 1,\, -2 < \gamma_j < \frac{p-1}{\lambda_j}; \end{array} \\ \sum_{j=1}^{m} n^{\frac{\gamma_j \lambda_j}{p} + (\frac{2}{p} - 1)\lambda_j + \varepsilon}, & \begin{array}{c} \forall\, j = 1, 2, ..., m \text{ için}, \\ p \geq 2,\, 0 < \lambda_j < 2,\, \gamma_j \geq \frac{1}{\lambda_j} + (p-2), \\ \text{veya } p < 2,\, 1 \leq \lambda_j < 2,\, \gamma_j \geq \frac{1}{\lambda_j} - (2-p); \end{array} \\ \sum_{j=1}^{m} n^{\frac{\gamma_j \lambda_j}{p} + (\frac{2}{p} - 1) + \varepsilon}, & \begin{array}{c} \forall\, j = 1, 2, ..., m \text{ için}, \\ p < 2,\, 0 < \lambda_j < 1,\, \gamma_j \geq \frac{p-1}{\lambda_j}; \end{array} \end{cases} \tag{4.13}$$

ve $p \neq 2$ ise $\varepsilon_p = \varepsilon$, $p = 2$ ise $\varepsilon_p = 0$ dır.

Teorem 4.1.1.5. $p>1$, $G\in C_\theta\left(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m\right)$, $0<\lambda_j<2$, $j=1,2,...,m$ ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp$, $n\in\mathbb{N}$, $R_1=1+\frac{1}{n}$ ve yeterince küçük $\varepsilon>0$ için

$$\left|P_n(z)\right|\le c_9\,\frac{D_{n;2}}{d\left(z,L_{R_1}\right)}\left\|P_n\right\|_{A_2(h,G)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1},\qquad z\in\Omega_{R_1}, \tag{4.14}$$

sağlanır, burada $c_9=c_9\left(G,p,m\right)>0$,

$$D_{n;2}:=\begin{cases} n^{\frac{1}{p}+\varepsilon_p}, & \begin{array}{c}\forall\, j=1,2,...,m \text{ için},\\ p\ge 2,\ 0<\lambda_j<2,\ -2<\gamma_j<\mu_1,\\ \text{veya } p<2,\ 1\le\lambda_j<2,\ -2<\gamma_j<\eta_1,\\ \text{veya } p<2,\ 0<\lambda_j<1,\ -2<\gamma_j<\omega_1;\end{array}\\ n^{\frac{\gamma^*\lambda^*}{p}+(\frac{2}{p}-1)\tilde{\lambda}+\varepsilon}, & \begin{array}{c}\forall\, j=1,2,...,m \text{ için},\\ p\ge 2,\ 0<\lambda_j<2,\ \gamma_j\ge\mu_m,\\ \text{veya } p<2,\ 1\le\lambda_j<2,\ \gamma_j\ge\eta_m;\end{array}\\ n^{\frac{\gamma_k^*\lambda_k^*}{p}+(\frac{2}{p}-1)\tilde{\lambda}_k+\varepsilon}, & \begin{array}{c}\forall\, k=1,2,...,m\text{-}1 \text{ ve } j=1,2,...,m \text{ için},\\ p\ge 2,\ 0<\lambda_j<2,\ \mu_k\le\gamma_j<\mu_{k+1},\\ \text{veya } p<2,\ 1\le\lambda_j<2,\ \eta_k\le\gamma_j<\eta_{k+1};\end{array}\\ n^{\frac{\gamma^*\lambda^*}{p}+(\frac{2}{p}-1)+\varepsilon}, & \begin{array}{c}\forall\, j=1,2,...,m \text{ için},\\ p<2,\ 0<\lambda_j<1,\ <\gamma_j\ge\omega_m;\end{array}\\ n^{\frac{\gamma_k^*\lambda_k^*}{p}+(\frac{2}{p}-1)+\varepsilon}, & \begin{array}{c}\forall\, k=1,2,...,m\text{-}1 \text{ ve } j=1,2,...,m \text{ için},\\ p<2,\ 0<\lambda_j<1,\ \omega_k<\gamma_j<\omega_{k+1};\end{array}\end{cases} \tag{4.15}$$

ve $p\ne 2$ ise $\varepsilon_p=\varepsilon$, $p=2$ ise $\varepsilon_p=0$ dır.

Bu değerlendirmelerin kesinliği aşağıda verilen uyarıdan görülebilir:

Uyarı 4.1.1.1.

a) Her $n\in\mathbb{N}$ için bir $Q_n^*\in\wp_n$ polinomu, bir $G_1^*\subset\mathbb{C}$ bölgesi ve $c_{10}=c_{10}\left(G_1^*,\varepsilon\right)>0$ sabiti vardır öyle ki

$$\left\|Q_n^*\right\|_{C(\bar{G})}\ge c_{10}n\left\|P_n^*\right\|_{A_2\left(G_1^*\right)},$$

sağlanır.

b) Her $n\in\mathbb{N}$ için bir $P_n^*\in\wp_n$ polinomu, bir $G_2^*\subset\mathbb{C}$ bölgesi, kompakt $F\Subset C\overline{G}_2^*$ kümesi ve $c_{11}=c_{11}\left(G_2^*,F^*\right)>0$ sabiti vardır öyle ki

$$\left|P_n^*(z)\right|\geq c_{11}\frac{\sqrt{n}}{d(z,L)}\left\|P_n^*\right\|_{A_2\left(G_2^*\right)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1},\qquad z\in F\Subset C\overline{G}_2^*,$$

sağlanır.

4.2. DIŞ SIFIR AÇIYA SAHİP OLAN BÖLGELERDE BERNSTEIN-WALSH EŞİTSİZLİKLERİ

Bu kısımda (1.2) eşitsizliğine benzer eşitsizlikler G bölgesinin dış sıfır açıya sahip olması durumunda $\mathcal{L}_p(h,L)$ uzayında incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

4.2.1. Temel Sonuçlar

Aşağıda teoremlerin ifade ve ispatlarında kullanılan notasyonlar verilmiştir:

$\Gamma:=\Gamma_{1,m_1}\cup\Gamma_{2,m}$, $\Gamma_{1,k}:=\left\{\gamma_j,\ j=\overline{1,k},\ k\leq m_1\right\}$,

$\Gamma_{2,k}:=\left\{\gamma_j,\ j=\overline{m_1+1,\ m_1+k},1\leq k\leq m-m_1\right\}$; $\Gamma_{1,k}^{(1)}:=\left\{\gamma_k\in\Gamma_{1,m_1}:\gamma_k>p-1,\ k\leq m_1\right\}$,

$\Gamma_{1,k}^{(2)}:=\left\{\gamma_k\in\Gamma_{1,m_1}:\gamma_k=p-1,\ k\leq m_1\right\}$, $\Gamma_{1,k}^{(3)}:=\left\{\gamma_k\in\Gamma_{1,m_1}:\gamma_k<p-1,\ k\leq m_1\right\}$;

$\Gamma_{2,k}^{(1)}:=\left\{\gamma_k\in\Gamma_{2,m}:\gamma_k>p-1,\ m_1+1\leq k\leq m\right\}$,

$\Gamma_{2,k}^{(2)}:=\left\{\gamma_k\in\Gamma_{2,m}:\gamma_k=p-1,\ m_1+1\leq k\leq m\right\}$,

$\Gamma_{2,k}^{(3)}:=\left\{\gamma_k\in\Gamma_{2,m}:\gamma_k<p-1,\ m_1+1\leq k\leq m\right\}$; $\gamma_k^1=\max\left\{\gamma_k:\gamma_k\in\Gamma_{1,k},\ k\leq m_1\right\}$,

$\gamma^1:=\gamma_{m_1}^1$; $\widetilde{\gamma}_k^1=\max\left\{0;\gamma_k:\gamma_k\in\Gamma_{1,k},\ k\leq m_1\right\}$, $\widetilde{\gamma}^1:=\widetilde{\gamma}_{m_1}^1$;

$\gamma_j^2=\max\left\{\gamma_j:\gamma_j\in\Gamma_{2,k},\ \mathrm{m}_1+1\leq \mathrm{j}\leq \mathrm{m}_1+\mathrm{k},\ 1\leq \mathrm{k}\leq \mathrm{m}-\mathrm{m}_1\right\}$,

$\gamma^2:=\gamma_m^2$; $\widetilde{\gamma}_k^2=\max\left\{0;\gamma_k:\gamma_k\in\Gamma_{2,k},\ k\leq m\right\}$, $\widetilde{\gamma}^2:=\widetilde{\gamma}_m^2$; $\gamma_k^*=\max\left\{\gamma_k:\gamma_k\in\Gamma,\ k\leq m\right\}$,

$\gamma^*:=\gamma_m^*$; $\widetilde{\gamma}_k^*=\max\left\{0;\gamma_k:\gamma_k\in\Gamma,\ k\leq m\right\}$, $\widetilde{\gamma}^*:=\gamma_m^*$.

$\tilde{\gamma}^{2}_{*,k} := \begin{Bmatrix} 0, & -1<\gamma_k \le 0 \\ \min \gamma_k, & \gamma_k > 0 \end{Bmatrix}, \gamma_k \in \Gamma_{2,k}, k \le m \Big\}; \ \tilde{\gamma}^{2}_{*,} := \tilde{\gamma}^{2}_{*,m}.$

$\tilde{\lambda}_k = \max\{\lambda_j ;1 : j = \overline{1,k}, k \le m_1\}$, $\tilde{\lambda} := \tilde{\lambda}_{m_1}$; $\alpha_* := \min\left\{\alpha_j, \ j = \overline{m_1+1, m}\right\}$,

$\alpha^* := \max\left\{\alpha_j, \ j = \overline{m_1+1, m}\right\}$,

$$\left|\Psi'(\tau)\right| \asymp \frac{d(\Psi(\tau), L)}{|\tau|-1}. \text{ [31, Teorem 2.8]} \qquad (*)$$

Teorem 4.2.1.1. $p>1$; $G \in C_\theta\left(\lambda_i, f_j\right)$, $0<\lambda_i<2$, $i=\overline{1,m_1}$ ve $f_j(x) = cx^{1+\alpha_j}$, $\alpha_j > 0$, $j = \overline{m_1+1, m}$; $h(z)$, (3.5) ile tanımlı $(\gamma_j > -1)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her $P_n \in \wp$, $n \in \mathbb{N}$ ve keyfi küçük $\varepsilon > 0$ için

$$\left|P_n(z)\right| \le c_{12} \frac{B_{n;1}}{d(z,L)} \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \begin{cases} \left|\Phi(z)\right|^{n+1}, & z \in \Omega, \\ 1 & z \in G, \end{cases} \qquad (4.16)$$

sağlanır, burada $c_{12} = c_{12}(G, p, \varepsilon) > 0$, p ve n’den bağımsız bir sabit ve

$$B_{n;1} := \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=1}^{m_1} n^{\frac{(\gamma_i+1-p)\tilde{\lambda}_i}{p}+\varepsilon} & \gamma_i \in \Gamma^{(1)}_{1,k}, i=\overline{1,k}, 1\le k \le m_1, \\ \displaystyle + \sum_{j=m_1+1}^{m} n^{\frac{\gamma_j+1-p}{p(1+\alpha_j)}+\varepsilon}, & \gamma_j \in \Gamma^{(1)}_{2,k}, j = \overline{m_1+1, k}, m_1+1 \le k \le m; \\ (\ln n)^{1-\frac{1}{p}}, & \gamma_i \in \Gamma^{(2)}_{1,m_1}, j = \overline{1, m_1}, \\ & \gamma_j \in \Gamma^{(2)}_{2,m}, j = \overline{m_1+1, m}; \\ 1, & \gamma_j \in \Gamma^{(3)}_{1,m_1}, j = \overline{1, m_1}, \\ & \gamma_j \in \Gamma^{(3)}_{2,m}, j = \overline{m_1+1, m}. \end{cases} \qquad (4.17)$$

dir.

Teorem 4.2.1.2. $p>1$; $G \in C_\theta\left(\lambda_i, f_j\right), 0<\lambda_i<2$, $i=\overline{1,m_1}$ ve $f_j(x) = cx^{1+\alpha_j}$, $\alpha_j > 0$, $j = \overline{m_1+1, m}$; $h(z)$, (3.5) ile tanımlı $(\gamma_j > -1)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her $P_n \in \wp$, $n \in \mathbb{N}$ ve keyfi yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$\left|P_n(z)\right| \le c_{13}\frac{B_{n;2}}{d(z,L)}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\begin{cases}\left|\Phi(z)\right|^{n+1}, & z\in\Omega,\\ 1 & z\in G,\end{cases} \tag{4.18}$$

sağlanır, burada $c_{13}=c_{13}(G,p,\varepsilon)>0$, p ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$B_{n;2}:=\begin{cases} n^{\frac{\left(\gamma^1+1-p\right)\tilde{\lambda}}{p}+\varepsilon} + n^{\frac{\gamma^2+1-p}{p(1+\alpha_*)}+\varepsilon}, & \begin{array}{c}\exists\ i=\overline{1,k},\ 1\le k\le m_1,\ \text{için}\\ \text{en azından bir } \gamma_i\in\Gamma^{(1)}_{1,k}\\ \text{ve } \exists\ j=\overline{m_1+1,k},\ m_1+1\le k\le m,\ \text{için}\\ \text{en azından bir } \gamma_j\in\Gamma^{(1)}_{2,k};\end{array}\\ \left(\ln n\right)^{1-\frac{1}{p}}, & \begin{array}{c}\exists\ j=\overline{1,m},\ k\le m,\ \text{için}\\ \text{en azından bir } \gamma_j\in\left(\Gamma^{(2)}_{1,k}\cup\Gamma^{(2)}_{2,k}\right)\setminus\left(\Gamma^{(1)}_{1,m_1}\cup\Gamma^{(1)}_{2,m}\right);\end{array}\\ 1, & \begin{array}{c}\forall\ j=\overline{1,m}\ \text{için}\\ \gamma_j\in\left(\Gamma^{(3)}_{1,k}\cup\Gamma^{(3)}_{2,k}\right).\end{array}\end{cases} \tag{4.19}$$

L eğrisinin iki tane singüler noktaya $z_1\in L, z_2\in L$ (yani $m_1=1,\ m=2$) sahip olması durumunda aşağıdaki sonuç alınır:

Sonuç 4.2.1.1. $p>1$; $G\in C_\theta\left(\lambda_1;cx^{1+\alpha_2}\right)$, $0<\lambda_1<2$, $\alpha_2>0$ ve $h(z)$, $j=2$ için (3.5) ile tanımlı $\left(\gamma_j>-1\right)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her $P_n\in\wp, n\in\mathbb{N}$ ve keyfi yeterince küçük $\varepsilon>0$ için

$$\left|P_n(z)\right| \le c_{14}\frac{B_{n;3}}{d(z,L)}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\begin{cases}\left|\Phi(z)\right|^{n+1}, & z\in\Omega,\\ 1 & z\in G,\end{cases} \tag{4.20}$$

sağlanır, burada $c_{14}=c_{14}(G,p,\varepsilon)>0$, p ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$B_{n;3}:=\begin{cases} n^{\frac{(\gamma_1+1-p)\tilde{\lambda}_1}{p}+\varepsilon}+n^{\frac{\gamma_2+1-p}{p(1+\alpha_2)}+\varepsilon}, & \gamma_1,\gamma_2>p-1;\\ \left(\ln n\right)^{1-\frac{1}{p}}, & \begin{array}{c}\gamma_1=p-1, -1<\gamma_2\le p-1\\ \text{veya } -1<\gamma_1\le p-1, \gamma_2=p-1;\end{array}\\ 1, & -1<\gamma_1,\gamma_2<p-1.\end{cases} \tag{4.21}$$

Sonuç 4.2.1.2. $p>1$; $G\in C_\theta\left(\lambda_1;cx^{1+\alpha_2}\right)$, $0<\lambda_1<2$, $\alpha_2>0$ ve $h(z)$, $j=2$ için (3.5) ile tanımlı $\left(\gamma_j>-1\right)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her $P_n\in\wp, n\in\mathbb{N}$ ve keyfi yeterince küçük $\varepsilon>0$ için

$$\left|P_n(z)\right|\le c_{15}\frac{B_{n;4}}{d(z,L)}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\begin{cases}\left|\Phi(z)\right|^{n+1}, & z\in\Omega,\\ 1 & z\in G,\end{cases}\tag{4.22}$$

sağlanır, burada $c_{15}=c_{15}(G,p,\varepsilon)>0$, p ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$B_{n;4}:=\begin{cases}n^{\frac{(\gamma_1+1-p)\tilde{\lambda}_1}{p}+\varepsilon} & \alpha_2=0,\gamma_1>p-1;\\ n^{\frac{\gamma_2+1-p}{p(1+\alpha_2)}+\varepsilon} & \lambda_1=1,\alpha_2>0,\gamma_2>p-1;\\ \left(\ln n\right)^{1-\frac{1}{p}}, & \alpha_2=0,\gamma_1=p-1,\\ & \text{veya } \lambda_1=1,\alpha_2>0,\gamma_2=p-1;\\ 1, & \alpha_2=0,-1<\gamma_1<p-1\\ & \text{veya } \lambda_1=1,\alpha_2>0,-1<\gamma_2<p-1.\end{cases}\tag{4.23}$$

Teorem 4.2.1.3. $p>1$; $G\in C_\theta(\lambda_i;f_j)$, $0<\lambda_i<2$, $i=\overline{1,m_1}$ ve $f_j(x)=cx^{1+\alpha_j}$, $\alpha_j>0$, $j=\overline{m_1+1,m}$; $h(z)$, (3.5) ile tanımlı $\left(\gamma_j>-1\right)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her $P_n\in\wp$, $n\in\mathbb{N}$ ve keyfi yeterince küçük $\varepsilon>0$ için,

$$\left\|P_n\right\|_{C(\bar{G})}\le c_{16}\left(\sum_{i=1}^{m_1}n^{\frac{(\tilde{\gamma}_i+1)\tilde{\lambda}_i}{p}+\varepsilon}+\sum_{i=m_1+1}^{m}D_{n,m}^i\right)\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\tag{4.24}$$

sağlanır. Burada $c_{16}=c_{16}(G,p,\lambda_i,\alpha_j,\varepsilon)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n,m}^i:=\begin{cases}n^{\frac{\tilde{\gamma}_i+1}{p(1+\alpha_i)}+\frac{\alpha_i}{1+\alpha_i}+\varepsilon}, & 1<p<2+\dfrac{\tilde{\gamma}_i^2}{1+\alpha_i},\\ n^{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p\ge 2+\dfrac{\tilde{\gamma}_i^2}{1+\alpha_i},\end{cases}\quad , \quad i=\overline{m_1+1,m}$$

dir.

Sonuç 4.2.1.3. Teorem 4.2.1.3'ün koşulları altında

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \le c_{17}\left(D_{n,m_1} + D_{n,m}\right)\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}, \tag{4.25}$$

dir, burada $c_{17} = c_{17}(G, p, \lambda_i, \alpha_j, \varepsilon) > 0$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n,m_1} := n^{\frac{(\tilde{\gamma}^1+1)\tilde{\lambda}^*}{p}+\varepsilon};\ D_{n,m} \begin{cases} n^{\frac{\tilde{\gamma}^2+1}{p(1+\alpha_*)}+\frac{\alpha_*}{1+\alpha_*}+\varepsilon}, & 1 < p < 2 + \dfrac{\tilde{\gamma}_*^2}{1+\alpha^*}, \\ n^{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p \ge 2 + \dfrac{\tilde{\gamma}_*^2}{1+\alpha_*}, \end{cases}$$

dir.

Eğer bölge sınırındaki z_1 noktasında tek bir $\lambda_1\pi, 0 < \lambda_1 < 2$ dış açısına ve z_2 noktasında $z^{1+\alpha_2}$, $\alpha_2 > 0$ dış sıfır açısına sahip ise Teorem 4.2.1.3'den aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.1.4. $p > 1$; $G \in C_\theta(\lambda_1; f_2)$, $0 < \lambda_1 < 2$ ve $f_2(x) = cx^{1+\alpha_2}$, $\alpha_2 > 0$ ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı $(\gamma_j > -1)$ ağırlık fonksiyonu olsun.. Bu durumda her $P_n \in \wp$, $n \in \mathbb{N}$ ve keyfi yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \le c_{18}\left(D_{n,1} + D_{n,2}\right)\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \tag{4.26}$$

sağlanır. Burada $c_{18} = c_{18}(G, p, \lambda_1, \alpha_2, \varepsilon) > 0$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n,1} := n^{\frac{(\tilde{\gamma}_1+1)\tilde{\lambda}}{p}+\varepsilon};\ D_{n,2} := \begin{cases} n^{\frac{\tilde{\gamma}_2+1}{p(1+\alpha_2)}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}+\varepsilon}, & 1 < p < 2 + \dfrac{\tilde{\gamma}_2}{1+\alpha_2}, \\ n^{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p \ge 2 + \dfrac{\tilde{\gamma}_2}{1+\alpha_2}, \end{cases}$$

dır.

Sonuç 4.2.1.2 ve Sonuç 4.2.1.4 birleştirilerek $|P_n(z)|$'nin tüm kompleks düzlemdeki değerlendirmesi alınır (basitlik için $m_1 = 1, m = 2$ kabul edilsin):

Sonuç 4.2.1.5. $p>1;\quad G\in C_\theta(\lambda_1;f_2),\quad 0<\lambda_1<2$ ve $f_2(x)=cx^{1+\alpha_2},\ \alpha_2>0;$ $h(z)$, (3.5) ile tanımlı $(\gamma_j>-1)$ ağırlık fonksiyonu olsun.Bu durumda her bir $P_n\in\wp,\ n\in\mathbb{N}$ ve yeterince küçük $\varepsilon>0$ için

$$|P_n(z)|\le c_{19}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\begin{cases}\dfrac{B_{n,4}}{d(z,L)}|\Phi(z)|^{n+1}, & z\in\Omega,\\ D_{n,1}+D_{n,2}, & z\in\overline{G},\end{cases}\tag{4.27}$$

sağlanır, burada $c_{19}=c_{19}(G,p,\varepsilon)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit, $B_{n;4}$ ve $D_{n,1}$, $D_{n,2}$ sırasıyla (4.23) ve Sonuç 4.2.1.4'teki gibi tanımlıdır.

Yukarıdaki değerlendirmelerin kesinliği aşağıda verilen uyarıda görülebilir:

Uyarı 4.2.1.1. Herhangi bir $n\in\mathbb{N}$ ve $i=1,2$ için $P_n^{(i)}\in\wp_n$ polinomları, $G^i\subset\mathbb{C}$ bölgeleri ve $c_{20}=c_{20}(G^1)>0,\ c_{21}=c_{21}(G^2)>0,$ sabitleri vardır öyle ki

$$\left\|P_n^{(1)}\right\|_{C(\overline{G^1})}\ge c_{20}n^{\frac{1}{p}}\left\|P_n^{(1)}\right\|_{\mathcal{L}_p(\partial G^1)}$$

ve

$$\left|P_n^{(2)}(z)\right|\ge c_{21}|\Phi(z)|^{n+1}\left\|P_n^{(2)}\right\|_{\mathcal{L}_p(\partial G^2)},\ \forall z\in F\Subset\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G^2}$$

sağlanır.

4.3. κ-YARIKONFORM EĞRİYLE SINIRLI BÖLGELERDE BERNSTEIN-WALSH EŞİTSİZLİKLERİ

Bu kısımda (1.2) eşitsizliğine benzer eşitsizlikler G bölgesinin κ-yarıçember ölçülebilir eğri ile sınırlı bir bölge olması durumunda $\mathcal{L}_p(h,L)$ uzayında incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

4.3.1. Temel Sonuçlar

Aşağıda teoremlerin ifade ve ispatlarında kullanılan notasyonlar verilmiştir:

$\{z_j\}_{j=1}^{m} \in L$ ve $h(z)$, (3.5)'teki gibi tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun.

Her $j=\overline{1,m}$ için $\gamma_j > -1$ olsun. $k \le m,\ \ p>1$ ve $\kappa \in [0,1)$ için

$\Gamma_k := \{\gamma_j,\ j=\overline{1,k}\}$, $\tilde{\Gamma}_k^{(1)} := \left\{\gamma_k \in \Gamma_m : \gamma_k > \dfrac{p-1}{1+\kappa}\right\}$,

$\tilde{\Gamma}_k^{(2)} := \left\{\gamma_k \in \Gamma_m : \gamma_k = \dfrac{p-1}{1+\kappa}\right\}$, $\tilde{\Gamma}_k^{(3)} := \left\{\gamma_k \in \Gamma_m : -1 < \gamma_k < \dfrac{p-1}{1+\kappa}\right\}$,

$\gamma_k^* = \max\{\gamma_k : \gamma_k \in \Gamma_k^{(1)}\}$, $\gamma^* := \gamma_m^*$, $\tilde{\gamma}_k^* = \max\{0; \gamma_k : \gamma_k \in \Gamma_k^{(1)}\}$, $\tilde{\gamma}^* := \gamma_m^*$.

Teorem 4.3.1.1. $G \in \tilde{Q}(\kappa), 0 \le \kappa < 1;$ $P_n \in \wp$, $n \in \mathbb{N}$; yeterince küçük $\varepsilon_1 > 0$ için $R_1 := 1 + \frac{\varepsilon_1}{n}$ ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı $(\gamma_j > -1)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $p > 1$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$|P_n(z)| \le c_{22} \frac{D_{n;1}}{d(z,L)} |\Phi(z)|^{n+1} \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}, \quad z \in \Omega_{R_1}, \tag{4.28}$$

burada $c_{22} = c_{22}(G,p) > 0$, *z* ve *n*'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n;1} := \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} n^{\frac{\gamma_i(1+\kappa)}{p} - (1-\frac{1}{p})(1-\kappa)}, & \gamma_i \in \tilde{\Gamma}_m^{(1)}, \quad \text{her } i = 1,2,\ldots,m \text{ için}, \\ \left(n^{\kappa} \ln n\right)^{1-\frac{1}{p}}, & \gamma_i \in \tilde{\Gamma}_m^{(2)}, \quad \text{her } i = 1,2,\ldots,m \text{ için}, \\ n^{\kappa\left(1-\frac{1}{p}\right)}, & \gamma_i \in \tilde{\Gamma}_m^{(3)} \quad \text{her } i = 1,2,\ldots,m \text{ için}, \end{cases} \quad z \in \Omega_{R_1}, \tag{4.29}$$

dır.

Teorem 4.3.1.2. $G \in \tilde{Q}(\kappa)$, $0 \le \kappa < 1;$ $P_n \in \wp$, $n \in \mathbb{N}$; yeterince küçük $\varepsilon_1 > 0$ için $R_1 := 1 + \frac{\varepsilon_1}{n}$ ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı $(\gamma_j > -1)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $p > 1$ için aşağıdaki eşitsizlik doğrudur:

$$\left|P_n(z)\right| \le c_{23}\frac{D_{n;2}}{d(z,L)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}, \quad z\in\Omega_{R_1}, \tag{4.30}$$

burada $c_{23}=c_{23}(G,p)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n;2}:=\begin{cases} n^{\frac{\gamma_k^*(1+\kappa)}{p}-(1-\frac{1}{p})(1-\kappa)}, & \exists i=1,2,...,k, k\le m \text{ için, en azından bir } \gamma_i\in\tilde{\Gamma}_m^{(1)}, \\ \left(n^{\kappa}\ln n\right)^{1-\frac{1}{p}}, & \exists i=1,2,...,k, k\le m \text{ için, en azından bir } \gamma_i\in\tilde{\Gamma}_k^{(2)}\setminus\tilde{\Gamma}_m^{(1)}, \quad z\in\Omega_{R_1}. \\ n^{\kappa\left(1-\frac{1}{p}\right)}, & \forall\ i=1,2,...,m \text{ için, } \gamma_i\in\tilde{\Gamma}_m^{(3)}, \end{cases} \tag{4.31}$$

Teorem 4.3.1.3. $G\in\tilde{Q}(\kappa)$, $0\le\kappa<1$, $h(z)$, (3.5) ile tanımlı $(\gamma_j>-1)$ ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda her $p>1$ için z ve n'den bağımsız bir $c_{24}=c_{24}(G,p)>0$ sabiti vardır öyle ki her $P_n\in\wp$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$\left\|P_n\right\|_{C(\bar{G})}\le c_{24}n^{\frac{(\eta+1)(1+\kappa)}{p}+2\kappa(1-\frac{1}{p})}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \tag{4.32}$$

sağlanır, burada $\eta:=\max\{0;\gamma_k, k=1,2,...,m\}$.

Sonuç 4.3.1. $G\in\tilde{Q}(\kappa)$, $0\le\kappa<1$ olsun. Bu durumda her $p>1$ için z ve n'den bağımsız bir $c_{25}=c_{25}(G,p)>0$ sabiti vardır öyle ki her $P_n\in\wp$ ve $n\in\mathbb{N}$ için

$$\left|P_n(z)\right|\le c_{25}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\begin{cases} n^{\frac{(\eta+1)(1+\kappa)}{p}+2\kappa(1-\frac{1}{p})}, & z\in\bar{G}_{R_1}, \\ \frac{\left|\Phi(z)\right|^{n+1}}{d(z,L)}D_{n;2} & z\in\Omega_{R_1}, \end{cases} \tag{4.33}$$

sağlanır, burada $D_{n;3}$ Teorem 4.3.1.2'deki ile aynıdır.

Bu değerlendirmelerin kesinliği Uyarı 4.2.1.1'den görülebilir.

4.4. TEOREMLERİN İSPATI

Teorem 4.1.1.2, Teorem 4.1.1.4 ve Teorem 4.1.15'in ispatı:

Her $z \in \Omega$ için $T_n\left(z\right)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$T_n\left(z\right) := \frac{P_n\left(z\right)}{\Phi^{n+1}\left(z\right)} \tag{4.34}$$

Her bir $R > 1$ ve $R_1 := 1 + \frac{R-1}{2}$ için Ω_{R_1} bölgesinde Cauchy integral formülü yardımıyla

$$T_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int\limits_{L_{R_1}} T_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega_{R_1}$$

yazılabilir. $\zeta \in L_{R_1}$ için $\left|\Phi\left(\zeta\right)\right| > 1$ve $d\left(z, L_{R_1}\right) \le \left|\zeta - z\right|$ olduğundan

$$\left|P_n\left(z\right)\right| \le \frac{\left|\Phi\left(z\right)\right|^{n+1}}{2\pi} \int\limits_{L_{R_1}} \frac{\left|P_n\left(\zeta\right)\right|}{\left|\Phi\left(\zeta\right)\right|^{n+1}} \frac{d\zeta}{\left|\zeta - z\right|} \le \frac{\left|\Phi\left(z\right)\right|^{n+1}}{2\pi d\left(z, L_{R_1}\right)} \int\limits_{L_{R_1}} \left|P_n\left(\zeta\right)\right| \left|d\zeta\right| \tag{4.35}$$

yazılabilir.

$$\begin{aligned} A_n &:= \int\limits_{L_{R_1}} \left|P_n\left(\zeta\right)\right| \left|d\zeta\right| = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{L_{R_1}^i} \left|P_n\left(\zeta\right)\right| \left|d\zeta\right| \\ &= \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{F_{R_1}^i} \left|P_n\left(\Psi(\tau)\right)\right| \left|\Psi'(\tau)\right| \left|d\tau\right| \end{aligned} \tag{4.36}$$

olsun. Önce $\zeta = \Phi\left(\tau\right)$ değişken değişimi yapılıp ardından integral altı ifade $\left|\Psi\left(\tau\right) - \Psi\left(w\right)\right|^{\gamma}$ ile çarpılıp bölünerek ve sonrasında da Hölder eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$A_n = \sum_{i=1}^{m} \int\limits_{F_{R_1}^i} \frac{\prod\limits_{j=1}^{m} \left|\Psi(\tau) - \Psi(w_j)\right|^{\frac{\gamma_j}{p}} \left| P_n\left(\Psi(\tau)\right) \left(\Psi'(\tau)\right)^{\frac{2}{p}} \right| \left|\Psi'(\tau)\right|^{1-\frac{2}{p}}}{\prod\limits_{j=1}^{m} \left|\Psi(\tau) - \Psi(w_j)\right|^{\frac{\gamma_j}{p}}} \left|d\tau\right| \tag{4.37}$$

$$\leq \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{F_{R_1}^i}\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)\right|^{\gamma_j}\left|P_n\left(\Psi(\tau)\right)\right|^{p}\left|\Psi'(\tau)\right|^{2}\left|d\tau\right|\right)^{\frac{1}{p}}$$

$$\times\left(\int_{F_{R_1}^i}\left(\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|^{1-\frac{2}{p}}}{\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)\right|^{\frac{\gamma_j}{p}}}\right)^{q}\left|d\tau\right|\right)^{\frac{1}{q}}\leq\sum_{i=1}^{m}A_n^i$$

burada

$$A_n^i:=\left(\int_{F_{R_1}^i}\left|f_{n,p}(\tau)\right|^{p}\left|d\tau\right|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{F_{R_1}^i}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|^{2-q}}{\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)\right|^{\gamma_j(q-1)}}\left|d\tau\right|\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=: J_{n,1}^i\cdot J_{n,2}^i,$$

ve

$$f_{n,p}(\tau):=\prod_{j=1}^{m}\left(\Psi(\tau)-\Psi(w_j)\right)^{\frac{\gamma_j}{p}}P_n\left(\Psi(\tau)\right)\left(\Psi'(\tau)\right)^{\frac{2}{p}},\ \left|\tau\right|=R_1$$

dir. $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$ olduğundan $\left(1-\dfrac{2}{p}\right)q=2-q$ ve $\dfrac{\gamma q}{p}=\gamma\left(q-1\right)$ olur.

Lemma 3.3.6'dan yaralanarak

$$J_{n,1}^i\prec n^{\frac{1}{p}}\left\|P_n\right\|_{A_p(h,\,G)},\ i=1,2,...,m \tag{4.38}$$

elde edilir.

$J_{n,2}^i$ integralinin değerlendirilmesinde ilk olarak $w_j:=\Phi(z_j)$ noktaları ayrık olduğundan

$$\left(J_{n,2}^i\right)^{q}:=\int_{F_{R_1}^i}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|^{2-q}}{\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)\right|^{\gamma_j(q-1)}}\left|d\tau\right| \tag{4.39}$$

$$\asymp\int_{F_{R_1}^i}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|^{2-q}}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)\right|^{\gamma_i(q-1)}}\left|d\tau\right|$$

elde edilir. Basitlik için $i=1,\ J_{n,1}^i=:J_1;\ J_{n,2}^1=:J_2$ alınır. $w_1:=\Phi(z_1)$ olsun.

$$E_{R_1}^{11} := \left\{ \tau : \tau \in F_{R_1}^1,\ \left| \tau - w \right| < c_1 \left(R_1 - 1 \right) \right\},$$
$$E_{R_1}^{12} := \left\{ \tau : \tau \in F_{R_1}^1,\ c_1 \left(R_1 - 1 \right) \le \left| \tau - w \right| < c \right\},$$
$$E_{R_1}^{13} := \left\{ \tau : \tau \in F_{R_1}^1,\ \left| \tau - w \right| \ge c_1 \right\}.$$

$F_{R_1}^1 = \bigcup_{k=1}^{3} E_{R_1}^{1k}$ olduğundan (4.39),

$$J_{n,2} = J_{n,2}\left(E_{R_1}^{11}\right) + J_{n,2}\left(E_{R_1}^{12}\right) + J_{n,2}\left(E_{R_1}^{13}\right) =: J_2^1 + J_2^2 + J_2^3 \tag{4.40}$$

şeklinde yazılabilir ve sonuç olarak

$$A_n^1 =: J_1\left(J_2^1 + J_2^2 + J_2^3\right) =: A_{n,1}^1 + A_{n,2}^1 + A_{n,3}^1 \tag{4.41}$$

yazılabilir, burada

$$A_{n,k}^1 := n^{\frac{1}{p}} \left\| P_n \right\|_{A_p(h,\,G)} \int_{E_{R_1}^k} \frac{\left| \left(\Psi'(\tau) \right) \right|^{2-q}}{\left| \Psi(\tau) - \Psi(w_1) \right|^{\gamma(q-1)}} \left| d\tau \right|, \quad k = 1,2,3 \tag{4.42}$$

dır.

$q > 2$ ve $1 < q < 2$, $0 < \lambda < 1$ ve $1 \le \lambda < 2$, $-2 < \gamma < 0$ ve $\gamma \ge 0$ durumları için $A_{n,k}^1$ integrallari ayrı ayrı değerlendirilir, $k = 1,2,3.$

1. Durum. $1 < q < 2$ $\left(p > 2\right)$ olsun. Bu durumda

$$\left(J_2^k\right)^q = \int_{E_{R_1}^k} \frac{\left| \left(\Psi'(\tau) \right) \right|^{2-q}}{\left| \Psi(\tau) - \Psi(w) \right|^{\gamma(q-1)}} \left| d\tau \right|, \quad k = 1,2,3$$

dır.

1.1. $1 \le \lambda < 2$ olsun.

1.1.1. Eğer $\gamma \ge 0$ ise Lemma 3.3.3'ü (4.42)'ye uygulayarak

$$\begin{aligned}\left(J_2^1\right)^q &\prec \int_{E_{R_1}^{11}} \frac{|\tau-w_1|^{(\lambda_1-1-\varepsilon)(2-q)}}{|\tau-w_1|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}}|d\tau| \\ &\prec \left(\frac{1}{n}\right)^{(\lambda_1-1-\varepsilon)(2-q)} \int_{E_{R_1}^{11}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}} \\ &\prec n^{\gamma_1\lambda_1(q-1)-(\lambda_1-1)(2-q)-1+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon>0, \quad \gamma_1\lambda_1(q-1)\geq 1\end{aligned}$$

ve böylece

$$J_2^1 \prec n^{\frac{\gamma_1\lambda_1(q-1)-(\lambda_1-1)(2-q)-1}{q}+\varepsilon}, \ \forall\varepsilon>0, \ \gamma_1\lambda_1(q-1)\geq 1$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\left(J_2^2\right)^q &\prec \int_{E_{R_1}^{12}} \frac{|\tau-w_1|^{(\lambda_1-1-\varepsilon)(2-q)}}{|\tau-w_1|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}}|d\tau| \\ &\prec \left(\frac{1}{n}\right)^{(\lambda_1-1-\varepsilon)(2-q)} \int_{E_{R_1}^{12}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}} \\ &\prec n^{\gamma_1\lambda_1(q-1)-(\lambda_1-1)(2-q)-1+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon>0, \quad \gamma_1\lambda_1(q-1)\geq 1\end{aligned}$$

ve böylece

$$J_2^2 \prec n^{\frac{\gamma_1\lambda_1(q-1)-(\lambda_1-1)(2-q)-1}{q}+\varepsilon}, \ \forall\varepsilon>0, \ \gamma_1\lambda_1(q-1)\geq 1$$

elde edilir.

$\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olduğundan $\frac{q-1}{q}=\frac{1}{p}$, $\frac{2-q}{q}=\frac{2}{p}-1$, $\frac{1}{q}=1-\frac{1}{p}$ olur ve $\forall\varepsilon>0$ için $\frac{1}{p}+\frac{\gamma_1\lambda_1(q-1)-(\lambda_1-1)(2-q)-1}{q}+\varepsilon=\left(\frac{2+\gamma_1}{p}-1\right)\lambda_1+\varepsilon$ bulunur. Böylece (4.40) ve (4.41)'den eğer $\gamma\lambda(q-1)\geq 1$ ise $\forall\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}A_{n,1}^1 &\prec n^{\left(\frac{2+\gamma}{p}-1\right)\lambda+\varepsilon}\|P_n\|_{A_p(h,G)}, \\ A_{n,2}^1 &\prec n^{\left(\frac{2+\gamma}{p}-1\right)\lambda+\varepsilon}\|P_n\|_{A_p(h,G)},\end{aligned} \tag{4.43}$$

elde edilir.

1.1.2. Eğer $-2<\gamma<0$ ise benzer şekilde

$$\left(J_2^k\right)^q=\int_{E_{R_1}^{1k}}\left|\left(\Psi'(\tau)\right)\right|^{2-q}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}|d\tau|,\quad k=1,2$$

dir. Bu durumda

$$\begin{aligned}\left(J_2^1\right)^q&\prec\int_{E_{R_1}^{11}}|\tau-w_1|^{(\lambda_1-1-\varepsilon)(2-q)}|\tau-w_1|^{(-\gamma_1)(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}|d\tau|\\&\prec\int_{E_{R_1}^{11}}\left(|\tau|-1\right)^{(\lambda_1-1-\varepsilon)(2-q)+(-\gamma_1)(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}|d\tau|\\&\prec\left(\frac{1}{n}\right)^{(\lambda_1-1-\varepsilon)(2-q)+(-\gamma_1)(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}\operatorname{mes}E_{R_1}^{11},\end{aligned}$$

ve böylece

$$J_2^1\prec n^{\frac{\gamma_1\lambda_1(q-1)-(\lambda_1-1)(2-q)-1}{q}+\varepsilon},\ \forall\varepsilon>0$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\left(J_2^2\right)^q&\prec\int_{E_{R_1}^{12}}|\tau-w_1|^{(\lambda_1-1-\varepsilon)(2-q)}|\tau-w_1|^{(-\gamma_1)(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}|d\tau|\\&\prec\int_{E_{R_1}^{1}}|d\tau|\prec1\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $\forall\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned}A_{n,1}^1&\prec n^{\left(\frac{2+\gamma_1}{p}-1\right)\lambda_1+\varepsilon}\|P_n\|_{A_p(h,G)},\\A_{n,1}^2&\prec n^{\frac{1}{p}}\|P_n\|_{A_p(h,G)}\end{aligned}\tag{4.44}$$

elde edilir.

1.2. $1\le\lambda_1<2$ olsun.

1.2.1. Eğer $\gamma_1\ge0$ ise Lemma 3.3.3'ü (4.42)'ye uygulayarak

$$\begin{aligned}\left(J_2^1\right)^q &\prec \int_{E_{R_1}^{11}} \frac{\left|\tau - w_1\right|^{(\lambda_1 - 1 - \varepsilon)(2-q)}}{\left|\tau - w_1\right|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}} \left|d\tau\right| \\ &\prec \int_{E_{R_1}^{11}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau - w_1\right|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)+(1-\lambda_1+\varepsilon)(2-q)}} \\ &\prec n^{\gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(2-q)-1+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(2-q) \geq 1\end{aligned}$$

$$J_2^1 \prec n^{\frac{\gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(2-q)-1}{q}+\varepsilon}, \ \forall\varepsilon > 0, \quad \gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(2-q) \geq 1$$

elde edilir.

$$\begin{aligned}\left(J_2^2\right)^q &\prec \int_{E_{R_1}^{12}} \frac{\left|\tau - w_1\right|^{(\lambda_1 - 1 - \varepsilon)(2-q)}}{\left|\tau - w_1\right|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}} \left|d\tau\right| \\ &\prec \int_{E_{R_1}^{12}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau - w_1\right|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)+(1-\lambda_1+\varepsilon)(2-q)}} \\ &\prec n^{\gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(2-q)-1+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(2-q) \geq 1\end{aligned}$$

$$J_2^2 \prec n^{\frac{\gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(2-q)-1}{q}+\varepsilon}, \ \forall\varepsilon > 0, \quad \gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(2-q) \geq 1$$

elde edilir.

$\forall\varepsilon > 0$ için $\dfrac{1}{p} + \dfrac{\gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(2-q)-1}{q} + \varepsilon = \left(\dfrac{2+\gamma_1}{p} - 1\right)\lambda_1 + \varepsilon$ dır. Böylece eğer $\gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(2-q) \geq 1$ ise $\forall\varepsilon > 0$ için

$$\begin{aligned}A_{n,1}^1 &\prec n^{\left(\frac{2+\gamma_1}{p}-1\right)\lambda_1+\varepsilon} \left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)}, \\ A_{n,2}^1 &\prec n^{\left(\frac{2+\gamma_1}{p}-1\right)\lambda_1+\varepsilon} \left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)}\end{aligned} \tag{4.45}$$

bulunur.

1.2.2. Eğer $-2<\gamma<0$ ise

$$\left(J_2^k\right)^q=\int\limits_{E_{R_1}^{1k}}\left|\left(\Psi'(\tau)\right)\right|^{2-q}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}|d\tau|,\quad k=1,2$$

olacağından, benzer şeklide

$$\begin{aligned}\left(J_2^1\right)^q&\prec\int\limits_{E_{R_1}^{11}}\frac{|\tau-w_1|^{(-\gamma_1)(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}}{|\tau-w_1|^{(1-\lambda_1+\varepsilon)(2-q)}}|d\tau|\\&\prec\int\limits_{E_{R_1}^{11}}|\tau-w_1|^{(\lambda_1-1-\varepsilon)(2-q)+(-\gamma_1)(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}|d\tau|\\&\prec\left(\frac{1}{n}\right)^{(-\gamma_1)(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}\int\limits_{E_{R_1}^{11}}\frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{(1-\lambda_1+\varepsilon)(2-q)}}\prec 1\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left(J_2^2\right)^q&\prec\int\limits_{E_{R_1}^{12}}\frac{|\tau-w_1|^{(-\gamma_1)(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}}{|\tau-w_1|^{(1-\lambda_1+\varepsilon)(2-q)}}|d\tau|\\&\prec\left(\frac{1}{n}\right)^{(-\gamma_1)(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}\int\limits_{E_{R_1}^{12}}\frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{(1-\lambda_1+\varepsilon)(2-q)}}\prec 1\end{aligned}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$\begin{aligned}A_{n,1}^1&\prec n^{\frac{1}{p}}\|P_n\|_{A_p(h,G)},\\A_{n,2}^1&\prec n^{\frac{1}{p}}\|P_n\|_{A_p(h,G)},\end{aligned}\qquad(4.46)$$

elde edilir.

2. Durum $q>2$ $(p<2)$ olsun. Bu durumda $2-q<0$ olur, böylece

$$\left(J_2^k\right)^q=\int\limits_{E_{R_1}^{1k}}\frac{|d\tau|}{\left|\left(\Psi'(\tau)\right)\right|^{q-2}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)}},\quad k=1,2,3\qquad(4.42)$$

2.1. $1\le\lambda_1<2$ olsun.

2.1.1. Eğer $\gamma_1 \geq 0$ ise Lemma 3.3.3'ü (4.42)'ye uygulayarak

$$\begin{aligned}
\left(J_2^1\right)^q &\prec \int_{E_{R_1}^{11}} \frac{|d\tau|}{|\tau - w_1|^{(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)} |\tau - w_1|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}} \\
&\prec \int_{E_{R_1}^{11}} \frac{|d\tau|}{|\tau - w_1|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)+(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)}} \\
&\prec n^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)+(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)-1}, \quad \forall\varepsilon > 0, \ \ \gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(q-2) \geq 1
\end{aligned}$$

$$J_2^1 \prec n^{\frac{\gamma_1\lambda_1(q-1)+(\lambda_1-1)(q-2)-1}{q}+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon > 0, \ \ \gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(q-2) \geq 1$$

ve

$$\begin{aligned}
\left(J_2^2\right)^q &\prec \int_{E_{R_1}^{2}} \frac{|d\tau|}{|\tau - w_1|^{(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)} |\tau - w|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}} \\
&\prec \int_{E_{R_1}^{2}} \frac{|d\tau|}{\min\left\{|\tau - w_1|;|\tau - w|\right\}^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)+(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)}} \\
&\prec n^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)+(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)-1}, \quad \forall\varepsilon > 0, \ \ \gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(q-2) \geq 1
\end{aligned}$$

$$J_2^2 \prec n^{\frac{\gamma_1\lambda_1(q-1)+(\lambda_1-1)(q-2)-1}{q}+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon > 0, \ \ \gamma_1\lambda_1(q-1)+(1-\lambda_1)(q-2) \geq 1$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}
A_{n,1}^1 &\prec n^{\left(\frac{2+\gamma_1}{p}-1\right)\lambda_1+\varepsilon} \|P_n\|_{A_p(h,G)}, \\
A_{n,2}^1 &\prec n^{\left(\frac{2+\gamma_1}{p}-1\right)\lambda_1+\varepsilon} \|P_n\|_{A_p(h,G)},
\end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir.

2.1.2. Eğer $-2 < \gamma < 0$ ise

$$\left(J_2^k\right)^q = \int_{E_{R_1}^k} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}}{\left|\left(\Psi'(\tau)\right)\right|^{q-2}}\left|d\tau\right|, \quad k=1,2,3$$

dır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\left(J_2^1\right)^q &\prec \int_{E_{R_1}^{11}} \frac{\left|\tau-w_1\right|^{(-\gamma_1)(\lambda_1-\varepsilon)(q-1)}}{\left|\tau-w_1\right|^{(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)}}\left|d\tau\right| \\ &\prec \left(\frac{1}{n}\right)^{(-\gamma_1)(\lambda_1-\varepsilon)(q-1)} \int_{E_{R_1}^{11}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w_1\right|^{(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)}} \\ &\prec n^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)+(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)-1}, \quad \forall\varepsilon>0, \quad (\lambda_1-1)(q-2)\geq 1\end{aligned}$$

$$J_2^1 \prec n^{\frac{\gamma_1\lambda_1(q-1)+(\lambda_1-1)(q-2)-1}{q}+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon>0, \quad (\lambda_1-1)(q-2)\geq 1$$

ve

$$\begin{aligned}\left(J_2^2\right)^q &\prec \int_{E_{R_1}^{12}} \frac{\left|\tau-w_1\right|^{(-\gamma_1)(\lambda_1-\varepsilon)(q-1)}}{\left|\tau-w_1\right|^{(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)}}\left|d\tau\right| \\ &\prec \int_{E_{R_1}^{12}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left(\left|\tau\right|-1\right)^{(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)}} \\ &\prec n^{(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)-1}, \quad \forall\varepsilon>0, \quad (\lambda_1-1)(q-2)\geq 1\end{aligned}$$

$$J_2^1 \prec n^{\frac{(\lambda_1-1)(q-2)-1}{q}+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon>0, \quad (\lambda_1-1)(q-2)\geq 1$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned}A_{n,1}^1 &\prec n^{\left(\frac{2+\gamma_1}{p}-1\right)\lambda_1+\varepsilon}\left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)}, \\ A_{n,2}^1 &\prec n^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\lambda_1+\varepsilon}\left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)},\end{aligned} \tag{4.48}$$

elde edilir.

2.2. $0<\lambda_1<1$ olsun.

2.2.1. Eğer $\gamma_1 \geq 0$ ise Lemma 3.3.3'ü (4.42)'ye uygulayarak

$$\left(J_2^1\right)^q \prec \int\limits_{E_{R_1}^{11}} \frac{\left|\tau - w_1\right|^{(1-\lambda_1-\varepsilon)(q-2)}}{\left|\tau - w_1\right|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}}\left|d\tau\right|$$

$$\prec \left(\frac{1}{n}\right)^{(1-\lambda_1-\varepsilon)(q-2)} \int\limits_{E_{R_1}^{11}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau - w_1\right|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}}$$

$$\prec n^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)-(1-\lambda_1-\varepsilon)(q-2)-1}, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \gamma_1\lambda_1\left(q-1\right) \geq 1$$

$$J_2^1 \prec n^{\frac{\gamma_1\lambda_1(q-1)-(1-\lambda_1)(q-2)-1}{q}+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \gamma_1\lambda_1\left(q-1\right) \geq 1$$

ve

$$\left(J_2^2\right)^q \prec \int\limits_{E_{R_1}^{12}} \frac{\left|\tau - w_1\right|^{(1-\lambda_1-\varepsilon)(q-2)}}{\left|\tau - w_1\right|^{\gamma(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}}\left|d\tau\right|$$

$$\prec \int\limits_{E_{R_1}^{12}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau - w_1\right|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)}}$$

$$\prec n^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)(q-1)-1}, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \gamma_1\lambda_1\left(q-1\right) \geq 1$$

$$J_2^2 \prec n^{\frac{\gamma_1\lambda_1(q-1)-1}{q}+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad \gamma_1\lambda_1\left(q-1\right) \geq 1$$

elde edilir. Bu durumda

$$\begin{aligned} A_{n,1}^1 &\prec n^{\left(\frac{2+\gamma_1}{p}-1\right)\lambda_1+\varepsilon}\left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)}, \\ A_{n,2}^1 &\prec n^{\left(\frac{2}{p}-1\right)+\frac{\gamma_1\lambda_1}{p}+\varepsilon}\left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)}, \end{aligned} \tag{4.49}$$

elde edilir.

2.2.2. Eğer $-2 < \gamma < 0$ ise

$$\left(J_2^k\right)^q = \int\limits_{E_{R_1}^{1k}} \frac{\left|\Psi(\tau) - \Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}}{\left|\left(\Psi'(\tau)\right)\right|^{q-2}}\left|d\tau\right|, \quad k = 1,2,3$$

dir. Buna göre,

$$\left(J_2^1\right)^q \prec \int\limits_{E_{R_1}^{11}} |\tau - w_1|^{(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)} |\tau - w_1|^{(-\gamma_1)(\lambda_1-\varepsilon)(q-1)} |d\tau|$$
$$\prec \left(\frac{1}{n}\right)^{(1-\lambda_1-\varepsilon)(q-2)+(-\gamma_1)(\lambda_1-\varepsilon)(q-1)} \operatorname{mes} E_{R_1}^{11} \prec 1$$

$$J_2^1 \prec n^{\frac{\gamma\lambda(q-1)+(\lambda-1)(q-2)-1}{q}+\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad (\lambda-1)(q-2) \geq 1$$

ve

$$\left(J_2^2\right)^q \prec \int\limits_{E_{R_1}^{12}} |\tau - w_1|^{(\lambda_1-1+\varepsilon)(q-2)} |\tau - w_1|^{(-\gamma_1)(\lambda_1-\varepsilon)(q-1)} |d\tau|$$
$$\prec \int\limits_{E_{R_1}^{12}} |d\tau| \prec 1$$

elde edilir.

Bu durumda

$$\begin{aligned} A_{n,1}^1 &\prec n^{\frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h,G)}, \\ A_{n,2}^1 &\prec n^{\frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h,G)}, \end{aligned} \tag{4.50}$$

elde edilir.

$A_{n,3}^1$ integrali, tüm durumlarda her bir $\zeta \in E_{R_1}^3$ için $|\zeta - z| \asymp 1$ olduğundan aşağıdaki şekilde değerlendirilir:

$$\left(J_2^3\right)^q \prec \int\limits_{E_{R_1}^{13}} \frac{|d\tau|}{\left(|\tau|-1\right)^{(2-q)\varepsilon}}$$

ya da

$$J_2^3 \prec n^{\varepsilon}, \quad \forall\varepsilon > 0, \quad p \neq 2,$$
$$J_2^3 \prec 1, \quad p = 2.$$

Sonuç olarak

$$\begin{aligned} &A_{n,3}^{1} \prec n^{\frac{1}{p}+\varepsilon} \left\| P_n \right\|_{A_p(h,G)}, \quad \forall \varepsilon > 0, \quad p \neq 2 \\ &A_{n,3}^{1} \prec n^{\frac{1}{2}} \left\| P_n \right\|_{A_p(h,G)}, \quad p = 2 \end{aligned} \tag{4.51}$$

elde edilir. (4.42) – (4.51) değerlendirmeleri toparlanırsa A_n için

Eğer $\gamma_1 \geq 0$ ise

$$A_n^1 = \sum_{k=1}^{3} A_{n,k}^1 \prec \left\| P_n \right\|_{A_p(h,G)}$$

$$\times \begin{cases} n^{\left(\frac{2+\gamma_j}{p}-1\right)\lambda+\varepsilon} + n^{\left(\frac{2+\gamma_j}{p}-1\right)\lambda+\varepsilon} + n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p>2,\ \lambda \geq 1, \\ & \gamma_j\lambda_j (q-1) \geq 1; \\ n^{\frac{\gamma_j\lambda_j}{p}-\left(1-\frac{2}{p}\right)\lambda_j+\varepsilon} + n^{\frac{\gamma_j\lambda_j}{p}-\left(1-\frac{2}{p}\right)\lambda_j+\varepsilon} + n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p>2,\ \lambda<1, \\ & \gamma_j\lambda_j (q-1) \geq 1- \\ & \left(1-\lambda_j\right)(q-2) \geq 1; \\ n^{\frac{\gamma_j\lambda_j}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\lambda_j+\varepsilon} + n^{\frac{\gamma_j\lambda_j}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\lambda_j+\varepsilon} + n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p<2,\ \lambda \geq 1 \\ & \gamma_j\lambda_j (q-1) \geq 1; \\ n^{\left(\frac{2+\gamma}{p}-1\right)\lambda_j+\varepsilon} + n^{\left(\frac{2}{p}-1\right)+\frac{\gamma_j\lambda_j}{p}+\varepsilon} + n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p<2,\ \lambda<1, \\ & \gamma_j\lambda_j (q-1) \geq 1; \end{cases}$$

ve

eğer $\gamma_1 < 0$ ise

$$A_n^1 = \sum_{k=1}^{3} A_{n,k}^1 \prec \left\| P_n \right\|_{A_p(h,G)}$$

$$\times \begin{cases} n^{\left(\frac{2+\gamma_1}{p}-1\right)\lambda+\varepsilon} + n^{\frac{1}{p}} + n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p>2,\ \lambda_1 \geq 1; \\ n^{\frac{1}{p}} + n^{\frac{1}{p}} + n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p>2,\ \lambda_1<1; \\ n^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\lambda_1+\frac{\gamma_1\lambda_1}{p}+\varepsilon} + n^{\left(\frac{2}{p}-1\right)\lambda_1+\varepsilon} + n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p<2,\ \lambda_1 \geq 1 \\ & (\lambda_1-1)(q-2) \geq 1; \\ n^{\left(\frac{2}{p}-1\right)+\frac{\gamma_1\lambda_1}{p}+\varepsilon} + n^{\frac{1}{p}} + n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p<2,\ \lambda_1<1, \end{cases}$$

elde edilir. Böylece eğer $\gamma_1 \geq 0$ ise

$$A_n^1 = \sum_{k=1}^{3} A_{n,k}^1 \prec \|P_n\|_{A_p(h,G)}$$

$$\times\begin{cases} n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p>2, \quad \lambda_1 \geq 1, \quad 0 \leq \gamma_1\lambda_1 < 1+\lambda_1(p-2), \\ n^{\frac{\gamma_1\lambda_1}{p}-\left(1-\frac{2}{p}\right)\lambda_1+\varepsilon}, & p>2, \quad \lambda_1 \geq 1, \quad \gamma_1\lambda_1 \geq 1+\lambda_1(p-2), \\ n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p>2, \quad \lambda_1 < 1, \quad 0 \leq \gamma_1\lambda_1 < 1+\lambda_1(p-2), \\ n^{\frac{\gamma_1\lambda_1}{p}-\left(1-\frac{2}{p}\right)\lambda_1+\varepsilon}, & p>2, \quad \lambda_1 < 1, \quad \gamma_1\lambda_1 \geq 1+\lambda_1(p-2), \\ n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p<2, \quad \lambda_1 \geq 1, \quad 0 \leq \gamma_1\lambda_1 < 1-\lambda_1(2-p), \\ n^{\frac{\gamma_1\lambda_1}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)\lambda_1+\varepsilon}, & p<2, \quad \lambda_1 \geq 1, \quad \gamma_1\lambda_1 \geq 1-\lambda_1(2-p), \\ n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p<2, \quad \lambda_1 < 1, \quad 0 \leq \gamma_1\lambda_1 < p-1, \\ n^{\frac{\gamma_1\lambda_1}{p}+\left(\frac{2}{p}-1\right)+\varepsilon} & p<2, \quad \lambda_1 < 1, \quad \gamma_1\lambda_1 \geq p-1, \end{cases} \tag{4.52}$$

ve

$\gamma_1 < 0$ ise

$$A_n^1 = \sum_{k=1}^{3} A_{n,k}^1 \prec \|P_n\|_{A_p(h,G)} \times \begin{cases} n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p>2, \quad \lambda_1 \geq 1, \quad \gamma_1 < 0, \\ n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p>2, \quad \lambda_1 < 1, \quad \gamma_1 < 0, \\ n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p<2, \quad \lambda_1 \geq 1, \quad \gamma_1 < 0, \\ n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p<2, \quad \lambda_1 < 1, \quad \gamma_1 < 0. \end{cases} \tag{4.53}$$

$p=2$ durumunu da göz önüne alıp, $j=1,2,\ldots,m$ için toplama geçilirse yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$A_n \leq \sum_{i=1}^{m} A_{n,\mathrm{i}}^{1} \prec \left\| P_n \right\|_{A_p(h,G)}$$

$$\times \begin{cases} n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p \geq 2, \quad 0 < \lambda_j < 2, \quad -2 < \gamma_j < \dfrac{1}{\lambda_j} + (p-2), \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} n^{\frac{\gamma_j \lambda_j}{p} - \left(1-\frac{2}{p}\right)\lambda_j + \varepsilon_p} & p \geq 2, \quad 0 < \lambda_j < 2, \quad \gamma_j \geq \dfrac{1}{\lambda_j} + (p-2), \\ n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p < 2, \quad 1 \leq \lambda_j < 2, \quad -2 < \gamma_j < \dfrac{1}{\lambda_j} - (2-p), \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} n^{\frac{\gamma_j \lambda_j}{p} + \left(\frac{2}{p}-1\right)\lambda_j + \varepsilon} & p < 2, \quad 1 \leq \lambda_j < 2, \quad \gamma_j \geq \dfrac{1}{\lambda_j} - (2-p), \\ n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p < 2, \quad 0 < \lambda_j < 1, \quad -2 < \gamma_j < \dfrac{p-1}{\lambda_j}, \\ \displaystyle\sum_{j=1}^{m} n^{\frac{\gamma_j \lambda_j}{p} + \left(\frac{2}{p}-1\right) + \varepsilon} & p < 2, \quad 0 < \lambda_j < 1, \quad \gamma_j \geq \dfrac{p-1}{\lambda_j}, \end{cases}$$

elde edilir, burada $p \neq 2$ ise $\varepsilon_p = \varepsilon$, $p = 2$ ise $\varepsilon_p = 0$ dır.

Ayrıca yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$A_n \prec \left\| P_n \right\|_{A_p(h,G)}$$

$$\times \begin{cases}
n^{\frac{1}{p}+\varepsilon_p}, & p \geq 2, \quad 0 < \lambda_j < 2, \quad \begin{array}{c} \forall\, j = 1,2,\ldots m \text{ için} \\ -2 < \gamma_j < \dfrac{1}{\lambda_1} + (p-2); \end{array} \\
n^{\frac{\gamma^*\lambda^*}{p}-(1-\frac{2}{p})\lambda_* + \varepsilon}, & p \geq 2, \quad 0 < \lambda_j < 2, \quad \begin{array}{c} \forall\, j = 1,2,\ldots m \text{ için} \\ \gamma_j \geq \dfrac{1}{\lambda_m} + (p-2); \end{array} \\
n^{\frac{\gamma_k^*\lambda_k^*}{p}-(1-\frac{2}{p})\lambda_{k*} + \varepsilon}, & p \geq 2, \quad 0 < \lambda_j < 2, \quad \begin{array}{c} \forall\, \mathrm{k} = 1,2,\ldots m-1 \text{ ve} \\ j = 1,2,\ldots m \text{ için} \\ \mu_k \leq \gamma_j < \mu_{k+1}; \end{array} \\
n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p < 2, \quad 1 \leq \lambda_j < 2, \quad \begin{array}{c} \forall\, j = 1,2,\ldots m \text{ için} \\ -2 < \gamma_j < \dfrac{1}{\lambda_1} - (2-p); \end{array} \\
n^{\frac{\gamma^*\lambda^*}{p}+(\frac{2}{p}-1)\lambda^* + \varepsilon}, & p < 2, \quad 1 \leq \lambda_j < 2, \quad \begin{array}{c} \forall\, j = 1,2,\ldots m \text{ için} \\ \gamma_j \geq \dfrac{1}{\lambda_m} - (2-p); \end{array} \\
n^{\frac{\gamma_k^*\lambda_k^*}{p}+(\frac{2}{p}-1)\lambda_k^* + \varepsilon}, & p < 2, \quad 1 \leq \lambda_j < 2, \quad \begin{array}{c} \forall\, \mathrm{k} = 1,2,\ldots m-1 \text{ ve} \\ j = 1,2,\ldots m \text{ için} \\ \eta_k \leq \gamma_j < \eta_{k+1}; \end{array} \\
n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p < 2, \quad 0 < \lambda_j < 1, \quad \begin{array}{c} \forall\, j = 1,2,\ldots m \text{ için} \\ -2 < \gamma_j < \dfrac{p-1}{\lambda_1}; \end{array} \\
n^{\frac{\gamma^*\lambda^*}{p}+(\frac{2}{p}-1) + \varepsilon}, & p < 2, \quad 0 < \lambda_j < 1, \quad \begin{array}{c} \forall\, j = 1,2,\ldots m \text{ için} \\ \gamma_j \geq \dfrac{p-1}{\lambda_m}; \end{array} \\
n^{\frac{\gamma_k^*\lambda_k^*}{p}+(\frac{2}{p}-1) + \varepsilon}, & p < 2, \quad 0 < \lambda_j < 1, \quad \begin{array}{c} \forall\, \mathrm{k} = 1,2,\ldots m-1 \text{ ve} \\ j = 1,2,\ldots m \text{ için} \\ \omega_k \leq \gamma_j < \omega_{k+1} \end{array}
\end{cases}$$

elde edilir, burada $p \neq 2$ ise $\varepsilon_p = \varepsilon$, $p = 2$ ise $\varepsilon_p = 0$ dır.

Sonuç 4.1.1.3 ün İspatı:

$p=2$, $m=1$ olsun. (4.38), (4.41) ve (4.42) ile $\gamma_1=0$ için

$$A_n \prec n^{\frac{1}{2}} \|P_n\|_{A_2(G)}$$

bulunur.

1. $\gamma_1>0$ olsun. Bu durumda herhangi $0<\lambda_1<2$ için

$$\left(J_2^1\right)^2 \prec \int\limits_{E_{R_1}^1} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)}} \prec n^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)-1}, \forall\varepsilon>0, \gamma_1\lambda_1\geq 1;$$

$$\left(J_2^2\right)^2 \prec \int\limits_{E_{R_1}^2} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)}} \prec n^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)-1}, \forall\varepsilon>0, \gamma_1\lambda_1\geq 1;$$

olur ve böylece

$$\begin{aligned} A_{n,1}^1 &\prec n^{\frac{1}{2}+\frac{\gamma_1\lambda_1-1}{2}+\varepsilon} \|P_n\|_{A_2(h,G)} \\ &\prec \|P_n\|_{A_2(h,G)} \begin{cases} n^{\frac{\gamma_1\lambda_1}{2}+\varepsilon}, & \forall\varepsilon>0,\ \gamma_1\lambda_1\geq 1, \\ n^{\frac{1}{2}}, & \gamma_1\lambda_1<1, \end{cases} \\ A_{n,2}^1 &\prec \|P_n\|_{A_2(h,G)} \begin{cases} n^{\frac{\gamma_1\lambda_1}{2}+\varepsilon}, & \forall\varepsilon>0,\ \gamma_1\lambda_1\geq 1, \\ n^{\frac{1}{2}}, & \gamma_1\lambda_1<1, \end{cases} \end{aligned} \tag{4.54}$$

elde edilir.

2. $-2<\gamma_1<0$ olsun. Bu durumda herhangi $0<\lambda_1<2$ için

$$\left(J_2^1\right)^2 \prec \int\limits_{E_{R_1}^1} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)}} \prec n^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)-1}, \forall\varepsilon>0,\ \gamma_1\lambda_1\geq 1;$$

$$\left(J_2^2\right)^2 \prec \int\limits_{E_{R_1}^2} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)}} \prec n^{\gamma_1(\lambda_1+\varepsilon)-1}, \forall\varepsilon>0,\ \gamma_1\lambda_1\geq 1;$$

bulunur ve böylece

$$\begin{aligned} A_{n,1}^1 &\prec n^{\frac{\gamma_1\lambda_1}{2}+\varepsilon} \|P_n\|_{A_2(h,G)},\ \forall\varepsilon>0, \\ A_{n,2}^1 &\prec n^{\frac{1}{2}} \|P_n\|_{A_2(h,G)}, \end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilir.

$A^1_{n,3}$ integralinin değerlendirilmesi tüm durumlarda her bir $\zeta \in E^3_{R_1}$ için $|\zeta - z| \asymp 1$ olduğundan aşağıdaki şekildedir:

$$A^1_{n,3} \prec n^{\frac{1}{2}} \|P_n\|_{A_2(h,G)}, \tag{4.56}$$

(4.35), (4.38), (4.41) –(4.51) birleştirilerek her bir $0 < \lambda_1 < 2$ için

$$A_n \prec \|P_n\|_{A_2(h,G)} \begin{cases} n^{\frac{1}{2}}, & \gamma_1 \geq \frac{1}{\lambda_1}, \\ n^{\frac{\gamma_1 \lambda_1}{2}+\varepsilon}, & \forall \varepsilon > 0,\ -2 < \gamma_1 < \frac{1}{\lambda_1}, \end{cases}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.1.1.1 in İspatı:

Keyfi $P_n \in \wp_n$ polinomu ve Bergman polinomları (yani bölgede ortonormal olan $K_n(z): \|K_n\|_{A_2(h,G)} = 1$ polinomları) için aşağıdaki teorem [20, Teorem 2.1 ve Teorem 5.1]'de ispatlanmıştır:

Teorem. G bir $k-$yarıdaire olsun, $(0 \leq k < 1)$ ve $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.5)'deki gibi tanımlansın. Bu durumda her bir $P_n \in \wp$, $n \in \mathbb{N}$ ve her $z_j \in L,\ j = 1, 2, ..., m,$ noktası için

$$|P_n(z_j)| \prec n^{\frac{(2+\gamma_j)(1+k)}{p}} \|P_n\|_{A_p(h,G)}$$

sağlanır.

Bu teoremden yola çıkılarak yarı konform sınıra sahip bölgeler için aşağıdaki değerlendirme elde edilir [20]:

$$\left|K_n\left(z_j\right)\right| \prec \left|K_n\left(z_j\right)\right| \prec d^{-\frac{(2+\gamma)}{p}}\left(z_j, L_R\right)$$

Bu formül $P_n(z)$ polinomu için yazılırsa

$$\left|P_n\left(z_j\right)\right| \prec \frac{1}{d^{\frac{(2+\gamma)}{p}}\left(z_j, L_R\right)} \left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)}$$

elde edilir. L yarı konform eğri olduğundan Sonuç 3.3.3 ile $d\left(z_j, L_R\right) \succ (R-1)^s$, $s := \min\left\{2, K^2\right\}$ olur. Böylece Lemma 3.3.3 ile

$$\left|P_n\left(z_j\right)\right| \prec n^{\frac{(2+\gamma)s}{p}} \left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Uyarı 4.1.1.1 in İspatı:

a) $Q_n^*(z) := \sum_{j=0}^{n} (j+1) z^j$, $G_1^* = B$ ve $p = 2$ olsun. Bu durumda

$$\left\|Q_n^*\right\|_{C(\bar{G})} = \frac{(n+1)(n+2)}{2}; \ \left\|Q_n^*\right\|_{A_2(G)} = \sqrt{\frac{\pi(n+1)(n+2)}{2}}$$

yazılabilir. O halde, bu iki eşitlikten

$$\left\|Q_n^*\right\|_{C(\bar{G})} \geq \frac{1}{2\pi} n \left\|Q_n^*\right\|_{A_2(G)}$$

elde edilir.

b) $G_2^* \subset \mathbb{C}$, $L := \partial G_2^* \in C_\theta$ düzgün eğrisiyle sınırlı bir bölge olsun. Üç nokta özelliğine göre L eğrisi yarı konformdur [30, s.100]. $\left\{K_n(z)\right\}$, $\deg K_n = n$, $n = 0,1,2,\ldots$, G bölgesi için Bergman polinomlarını göstersin, yani $K_n(z) := \alpha_n z^n + \alpha_{n-1} z^{n-1} + \ldots + \alpha_0$, $\alpha_n > 0$ şeklinde tanımlı ve

$$\delta_{n,m} := \begin{cases} 1, & n = m, \\ 0, & n \neq m, \end{cases}$$

olmak üzere

$$\iint_G K_n(z) \overline{K_m(z)} d\sigma_z = \delta_{n,m},$$

koşulunu sağlayan polinomlar olsun. $\overline{G_2^*}$, G_2^*'ın konveks kabuğu ve $F := C\overline{G_2^*}$ olsun. $K_n(z)$ Bergman polinomlarının sıfırları $\overline{G_2^*}$'da yerleşir [29, s.245]. [7]'ye göre keyfi yarıdaire için

$$K_n(z) = \alpha_n \rho^{n+1} \Phi^n(z) \Phi'(z) A_n(z), \quad z \in F \Subset \Omega$$

elde edilir, burada $\exists\, c_1 = c_1(G) > 0$ için

$$\sqrt{\frac{n+1}{\pi}} \le \alpha_n \rho^{n+1} \le c_1 \sqrt{\frac{n+1}{\pi}}$$

ve $\exists\, c_i = c_i(G) > 0$, i=2,3 için

$$c_2 \le |A_n(z)| \le 1 + \frac{c_3}{\sqrt{|\Phi(z)| - 1}}$$

dır. Buradan $\|K_n(z)\|_{A_2(G)} = 1$ olduğundan

$$\begin{aligned} |K_n(z)| &\ge c_2 \sqrt{\frac{n+1}{\pi}} |\Phi(z)|^n \frac{|\Phi(z)| - 1}{d(z,L)} \\ &\ge c_3 \frac{\sqrt{n}}{d(z,L)} |\Phi(z)|^{n+1} \left(1 - \frac{1}{|\Phi(z)|} \right) \\ &\ge c_4 \frac{\sqrt{n}}{d(z,L)} |\Phi(z)|^{n+1} \|K_n\|_{A_2(G)} \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1.1 in İspatı:

$G \in C_\theta(\lambda_i, f_j)$, $0 < \lambda_i < 2$, $i = \overline{1, m_1}$ ve $f_j(x) = cx^{1+\alpha_j}$, $\alpha_j > 0$, $j = \overline{m_1 + 1, m}$; $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.5)'deki gibi tanımlı $(\gamma_j > -1)$ olsun. Her bir $z \in \Omega$ için

$$T_n(z) := \frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)} \tag{4.57}$$

olsun. Ω bölgesinde $T_n(z)$ için Cauchy integral formülü yazılırsa

$$T_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_L T_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in \Omega \tag{4.58}$$

olur. $\zeta \in L$ için $\left|\Phi(\zeta)\right| = 1$ ve $d(z,L) \le \left|\zeta - z\right|$ olduğundan

$$\left|P_n(z)\right| \le \frac{\left|\Phi(z)\right|^{n+1}}{2\pi}\int_L \frac{\left|P_n(\zeta)\right|}{\left|\Phi(\zeta)\right|^{n+1}}\frac{d\zeta}{\left|\zeta - z\right|} \le \frac{\left|\Phi(z)\right|^{n+1}}{2\pi d(z,L)}\int_L \left|P_n(\zeta)\right|\left|d\zeta\right| \tag{4.59}$$

yazılabilir.

$$A_n := \int_L \left|P_n(\zeta)\right|\left|d\zeta\right| = \sum_{i=1}^{m}\int_{L^i}\left|P_n(\zeta)\right|\left|d\zeta\right| \tag{4.60}$$

olsun. İntegral altı ifadeyi $\prod_{j=1}^{m}\left|\zeta - z_j\right|^{\frac{\gamma_j}{p}}$ ile çarpıp bölerek ve sonrasında da Hölder eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki eşitsizlik elde edilir:

$$\begin{aligned} A_n &\le \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{L^i}\prod_{j=1}^{m}\left|\zeta - z_j\right|^{\gamma_j}\left|P_n(\zeta)\right|^p\left|d\zeta\right|\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{L^i}\frac{\left|d\zeta\right|}{\prod_{j=1}^{m}\left|\zeta - z_j\right|^{\frac{q\gamma_j}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &=: \sum_{i=1}^{m} A_n^i, \quad \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1 \end{aligned} \tag{4.61}$$

Burada

$$A_n^i := \left(\int_{L^i} h(\zeta)\left|P_n(\zeta)\right|^p\left|d\zeta\right|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{L^i}\frac{\left|d\zeta\right|}{\prod_{j=1}^{m}\left|\zeta - z_j\right|^{\frac{q\gamma_j}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} =: J_{n,1}^i \cdot J_{n,2}^i$$

dir.

$J_{n,1}^i$ integrali için Lemma 3.3.6'ya göre

$$J_{n,1}^i \prec \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}, \quad i = \overline{1,m} \tag{4.62}$$

elde edilir. Bu durumda (4.61) ve (4.62) ile

$$A_n \prec \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\sum_{i=1}^{m}\left(J_{n,2}^i\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir.

L üzerinde $\{z_j\}_{j=1}^{m}$ noktaları ayrık olduğundan $J_{n,2}^{i}$ integrali için

$$J_{n,2}^{i} := \int_{L^i} \frac{|d\zeta|}{\prod_{j=1}^{m} |\zeta - z_j|^{\frac{q\gamma_j}{p}}} \asymp \int_{L^i} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_i|^{\gamma_i(q-1)}} \tag{4.63}$$

yazılabilir. Basitlik için $m_1 = 1$, $m = 2$, $z_1 = -1$, $z_2 = 1$; $(-1,1) \subset G$ ve Tanım 3.3.8'deki lokal koordinat sisteminin OX ve OY eksenlerine paralel olduğu kabul edilsin. $L^+ := \{z \in L : \, Imz \geq 0\}$, $L^- := \{z \in L : \, Imz < 0\}$, $L = L^+ \cup L^-$;

$w^{\pm} := \left\{ w = e^{i\theta} : \theta = \frac{\varphi_1 \pm \varphi_2}{2} \right\}$, $z^{\pm} \in \Psi(w^{\pm})$ olsun. $l_i^{\pm}(z_i, z^{\pm})$ sırasıyla z_i ile $z^{\pm}$ noktalarını birleştiren yayları göstersin; $|l_i^{\pm}| := mes\, l_i^{\pm}(z_i, z^{\pm})$, $i = 1,2$. L^+(ya da seçilen yöne göre L^-) üzerinde keyfi bir z_0 noktası alınsın. Bu durumda (4.63) ile

$$A_n \prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{2} \left(J_{n,2}^{i} \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.64}$$

yazılabilir. Burada

$$J_{n,2}^{1} = \int_{L^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)}} \; ; \; J_{n,2}^{2} = \int_{L^2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_2|^{\gamma_2(q-1)}} \tag{4.65}$$

dir. Bu integrallarin değerlendirilmesi için aşağıdaki notasyonlar verilir:

$R = 1 + \frac{1}{n}$,

$d_{i,R} := d(z_i, L_R)$; $E_1^{1,\pm} := \{\zeta \in L^1 : \, |\zeta - z_1| < c_1 d_{1,R}\}$,

$E_2^{1,\pm} := \{\zeta \in L^1 : \, c_1 d_{1,R} \leq |\zeta - z_1| \leq |l_1^{\pm}|\}$, $E_1^{2,\pm} := \{\zeta \in L^2 : \, |\zeta - z_2| < c_2 d_{2,R}\}$,

$E_2^{2,\pm} := \{\zeta \in L^2 : \, c_2 d_{2,R} \leq |\zeta - z_2| \leq |l_2^{\pm}|\}$, $I_{n,k}^{i,\pm} := I_{n,k}^{i}(E_k^{i,\pm}) := \int_{E_k^{i,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_i|^{\gamma_i(q-1)}}$, $i, k = 1,2$.

Bu notasyonlarla birlikte (4.64) aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$
\begin{aligned}
A_n &\prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{2} \left(J_{n,2}^{i}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&=: \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{2} \left[I_{n,1}^{i}(E_1^{i,\pm}) + I_{n,2}^{i}(E_2^{i,\pm}) \right]^{\frac{1}{q}} \\
&=: \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{2} \left[I_{n,1}^{i,\pm} + I_{n,2}^{i,\pm} \right]^{\frac{1}{q}}, \; i=1,2.
\end{aligned}
\tag{4.66}
$$

(4.59) ve (4.60)'a göre, $I_{n,\mathrm{k}}^{i,\pm}$, $i=1,2$ ve $k=1,2,3$ integrallerini değerlendirmek yeterlidir. (4.65) ve (4.66) 'ya göre $J_{n,2}^{1}$ integrali değerlendirerek başlansın:

$$
\begin{aligned}
J_{n,2}^{1} &\prec \int_{L^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)}} \\
&:= \left(\sum_{k=1}^{2} \int_{E_k^{1,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_i|^{\gamma_1(q-1)}} \right)^{\frac{1}{q}} =: \left[I_{n,1}^{1,\pm} + I_{n,2}^{1,\pm} \right]^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
\tag{4.67}
$$

$\gamma_i \; (-1 < \gamma_i < 0, \gamma_i \geq 0, i=1,2)$ değerleri için $J_{n,2}^{1}$ integrali ayrı ayrı değerlendirilecektir.

1. $\gamma_1 \geq 0$ ve $\gamma_2 \geq 0$ olsun. Bu durumda $J_{n,2}^{1}$ için

$$
\begin{aligned}
I_{n,1}^{1,\pm} &\prec \int_{E_1^{1,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)}} \\
&\prec \int_{0}^{c_1 d_{1,R}} \frac{ds}{s^{\gamma_1(q-1)}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \int_{\varepsilon}^{c_1 d_{1,R}} \frac{ds}{s^{\gamma_1(q-1)}} = \lim_{\varepsilon \to 0} \left. \frac{s^{1-\gamma_1(q-1)}}{1-\gamma_1(q-1)} \right|_{\varepsilon}^{c_1 d_{1,R}} \\
&\prec \begin{cases} d_{1,R}^{1-\gamma_1(q-1)}, & \gamma_1 > p-1, \\ 1, & \gamma_1 \leq p-1, \end{cases} \\
I_{n,2}^{1,\pm} &\prec \int_{E_2^{1,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)}} \\
&\prec \int_{c_1 d_{1,R}}^{|l_1^{\pm}|} \frac{ds}{s^{\gamma_1(q-1)}} = \left. \frac{s^{1-\gamma_1(q-1)}}{1-\gamma_1(q-1)} \right|_{c_1 d_{1,R}}^{|l_1^{\pm}|} \prec \begin{cases} d_{1,R}^{1-\gamma_1(q-1)}, & \gamma_1 > p-1, \\ \ln \dfrac{1}{d_{1,R}}, & \gamma_1 = p-1, \\ 1 & \gamma_1 < p-1, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.68}
$$

elde edilir. Benzer şekilde $J_{n,2}^{2}$ integralinin değerlendirmesi aşağıdaki gibidir:

$$
\begin{aligned}
I_{n,1}^{2,\pm} &\prec \int\limits_{E_1^{2,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_2|^{\gamma_2(q-1)}} \\
&\prec \int\limits_{0}^{c_2 d_{2,R}} \frac{ds}{s^{\gamma_2(q-1)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int\limits_{\varepsilon}^{c_2 d_{2,R}} \frac{ds}{s^{\gamma_2(q-1)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \frac{s^{1-\gamma_2(q-1)}}{1-\gamma_2(q-1)}\Bigg|_{\varepsilon}^{c_2 d_{2,R}} \\
&\prec \begin{cases} d_{2,R}^{1-\gamma_2(q-1)}, & \gamma_2 > p-1, \\ 1, & \gamma_2 \le p-1, \end{cases} \\
I_{n,2}^{2,\pm} &\prec \int\limits_{E_2^{2,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_2|^{\gamma_2(q-1)}} \\
&\prec \int\limits_{c_2 d_{2,R}}^{|l_2^{\pm}|} \frac{ds}{s^{\gamma_2(q-1)}} = \frac{s^{1-\gamma_2(q-1)}}{1-\gamma_2(q-1)}\Bigg|_{c_1 d_{1,R}}^{|l_2^{\pm}|} \prec \begin{cases} d_{2,R}^{1-\gamma_2(q-1)}, & \gamma_2 > p-1, \\ \ln\dfrac{1}{d_{2,R}}, & \gamma_2 = p-1, \\ 1 & \gamma_2 < p-1. \end{cases}
\end{aligned} \tag{4.69}
$$

2. $\gamma_1 < 0$ ve $\gamma_2 < 0$ olsun. (4.68) ve (4.69)'a benzer olarak

$$
\begin{aligned}
I_{n,1}^{1} &\prec \int\limits_{E_1^1} |\zeta - z_1|^{(-\gamma_1)(q-1)} |d\zeta| \prec d_{1,n}^{(-\gamma_1)(q-1)} mesE_1^1 \prec 1, \\
I_{n,2}^{1} &\prec \int\limits_{E_2^1} |\zeta - z_1|^{(-\gamma_1)(q-1)} |d\zeta| \prec \left| l_1^{\pm} \right|^{(-\gamma_1)(q-1)+1} \prec 1,
\end{aligned} \tag{4.70}
$$

ve

$$
\begin{aligned}
I_{n,1}^{2,\pm} &\prec \int\limits_{E_1^{2,\pm}} |\zeta - z_2|^{(-\gamma_2)(q-1)} |d\zeta| \prec d_{2,R}^{(-\gamma_2)(q-1)} mesE_1^{2,\pm} \prec 1, \\
I_{n,2}^{2,\pm} &\prec \int\limits_{E_2^{2,\pm}} |\zeta - z_2|^{(-\gamma_2)(q-1)} |d\zeta| \prec \left| l_2^{\pm} \right|^{(-\gamma_2)(q-1)+1} \prec 1
\end{aligned} \tag{4.71}
$$

elde edilir. Buradan (4.66) – (4.69) ile

$$
A_n \prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \begin{cases} d_{1,R}^{\frac{1-\gamma_1(q-1)}{q}} + d_{2,R}^{\frac{1-\gamma_2(q-1)}{q}}, & \gamma_1, \gamma_2 > p-1, \\ \left(\ln\dfrac{1}{d_{1,R}}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\ln\dfrac{1}{d_{2,R}}\right)^{\frac{1}{q}}, & \gamma_1 = \gamma_2 = p-1, \\ 1, & \gamma_1, \gamma_2 < p-1, \end{cases} \tag{4.72}
$$

değerlendirmesi alınır. (4.59), (4.60) ve (4.72) karşılaştırılarak

$$\left|P_n(z)\right| \le c\frac{B_{n,1}^0}{d(z,L)}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1} \tag{4.73}$$

elde edilir, burada $c = c\left(G, p, \gamma_i\right)$, $i = \overline{1,m}$, n ve z'den bağımsız bir sabit ve

$$B_{n,1}^0 := \begin{cases} d_{1,R}^{1-\gamma_1(q-1)} + d_{2,R}^{1-\gamma_2(q-1)}, & \gamma_1,\gamma_2 > p-1, \\ \ln\dfrac{1}{d_{1,R}} + \ln\dfrac{1}{d_{2,R}}, & \gamma_1 = \gamma_2 = p-1, \\ 1, & \gamma_1,\gamma_2 < p-1, \end{cases} \tag{4.74}$$

dir. Lemma 3.3.3'e göre z_1 noktası için

$$d_{1,R} \succ n^{-\tilde{\lambda}_1-\varepsilon} \tag{4.75}$$

dir, yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için.

Şimdi $d_{2,R}$ 'nin değerlendirmesi verilecektir. $z_R \in L_R$ ve $\zeta^{\pm} \in L^{\pm}$ alalım öyle ki $d_{2,R} = \left|z_2 - z_R\right|$ ve $d(z_R, L^2 \cap L^{\pm}) := d(z_R, L^{+})$ olsun, $z_2^{\pm} := \zeta \in L^2 : \left|\zeta - z_2\right| = c_2 d_{2,R}$. Bu notasyonlar altında Lemma 3.3.1'den

$$d_R^{\pm} := d(z_R, L^2 \cap L^{\pm}) \asymp \left|z_R - z_2^{\pm}\right| \asymp d_{2,R}^{1+\alpha_2} \tag{4.76}$$

dir. Bu durumda $d_{2,R} = \left(d_R^{\pm}\right)^{\frac{1}{1+\alpha_2}}$. Diğer taraftan Lemma 3.3.3 ve [41, Sonuç 2] ile $d_R^{\pm} \succ n^{-1-\varepsilon}$ bulunur. Bu nedenle yeterince küçük $\varepsilon > 0$ için

$$d_{2,R} \succ n^{\frac{\varepsilon-1}{1+\alpha_2}} \tag{4.77}$$

elde edilir. (4.73)- (4.77) karşılaştırılarak

$$\left|P_n(z)\right| \prec \frac{B_{n,1}^0}{d(z,L)}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1} \tag{4.78}$$

alınır, burada

$$B_{n,1}^0 \prec \begin{cases} n^{\frac{(\gamma_1(q-1)-1)\tilde{\lambda}_1}{q}+\varepsilon} + n^{\frac{\gamma_2(q-1)-1}{q(1+\alpha_2)}+\varepsilon} & \gamma_1,\gamma_2 > p-1, \\ \left(\ln n\right)^{\frac{1}{q}}, & \gamma_1 = \gamma_2 = p-1, \\ 1, & \prec \gamma_1,\gamma_2 < p-1, \end{cases} \tag{4.79}$$

dir. Her bir $\{z_j\}$, $j=\overline{1,m}$ noktası için ilgili değerlendirmeler karşılaştırarak ve yukarıdaki değerlendirme dikkate alınarak $z\in\Omega$ noktaları için ispat tamamlanır.

Şimdi $z\in G$ olsun. G bölgesinde $P_n(z)$ için Cauchy integral formülü yardımıyla

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L P_n(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in G, \tag{4.80}$$

yazılır. Bu durumda

$$\begin{aligned}|P_n(z)| &\le \frac{1}{2\pi}\int_L |P_n(\zeta)|\frac{d\zeta}{|\zeta-z|}\\ &\le \frac{1}{2\pi d(z,L)}\int_L |P_n(\zeta)||d\zeta| =: \frac{1}{2\pi d(z,L)}A_n\end{aligned} \tag{4.81}$$

olur, A_n, (4.60)'daki gibi tanımlıdır. (4.72), (4.74) ve (4.80) bağıntıları karşılaştırılarak ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.1.3 ün İspatı:

$G\in C_\theta(\lambda_i, f_j)$, $0<\lambda_i<2$, $i=\overline{1,m_1}$ ve $f_j(x)=cx^{1+\alpha_j}$, $\alpha_j>0$, $j=\overline{m_1+1,m}$; $h(z)$ ağırlık fonksiyonu (3.5)'deki gibi tanımlı $(\gamma_j>-1)$ olsun. Eğer $G\in C_\theta(\lambda_i,0)$, $0<\lambda_i<2$, $i=1,m_1$, yani her bir $j=\overline{m_1+1,m}$ için $\alpha_i=0$ ise Teorem 4.2.1, (4.79) ve (4.80) ile her bir $z\in G$ için

$$|P_n(z)|\prec \frac{B''_{n,1}}{d(z,L)}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)},\ z\in G \tag{4.82}$$

dir, burada

$$B''_{n,1} \prec \begin{cases} n^{\frac{\left(1-p+\tilde{\gamma}^1\right)\tilde{\lambda}}{p}+\varepsilon}, & \exists\, i=\overline{1,k},\ k \le m_1 \text{ için en azından bir tane } \gamma_i \in \Gamma_{1,k}^{(1)} \\ (\ln n)^{1-\frac{1}{p}}, & \exists\, j=\overline{1,k},\ k \le m_1 \text{ için en azından bir tane } \gamma_j \in \Gamma_{1,k}^{(2)} \setminus \Gamma_{1,m_1}^{(1)} \\ 1, & \forall\, j=\overline{1,m} \text{ için } \gamma_i \in \Gamma_{1,k}^{(3)} \end{cases} \quad (4.83)$$

Diğer taraftan üç nokta özelliği [30, s.100] ile $L := \partial G$ eğrisi Q- yarı konformdur, $Q > 1$. $z \in L^*$ keyfi tespit edilmiş nokta ve $R = 1 + \frac{1}{n}$ olsun. Lemma 2.2 ve (2.2) ile yeterince küçük için,

$$d(z,L) \asymp d(t,L_R) \succ n^{-\tilde{\lambda}-\varepsilon} \quad (4.84)$$

$$|P_n(z)| \prec n^{\tilde{\lambda}+\varepsilon} B''_{n,1} \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}, \quad z \in \overline{G}^*$$

elde edilir. (4.81) ve (4.83) karşılaştırarak Lemma 3.3.7 ile ispat tamamlanır.

Genel durum ise aşağıdaki şekilde verilir:

$\exists\, j = \overline{m_1+1, m}$ için $\alpha_j > 0$ olsun. G_R bölgesinde Cauchy integral formülü

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L P_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G_R$$

eşitliğini verir.

Önce $\zeta = \Phi(\tau)$ değişken değişimi yapıp ardından integral altı ifade $\prod_{i=1}^{m} \left|\Psi(\tau) - \Psi(w)\right|^{\frac{\gamma_i}{p}} \left|\Psi'(\tau)\right|^{\frac{1}{p}}$ ile çarpılıp bölünerek ve sonrasında da Hölder şeşitsizliğini uygulanarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$
\begin{aligned}
|P_n(z)| &= \frac{1}{2\pi}\int_L |P_n(\zeta)| \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=R} \frac{|P_n(\Psi(\tau))||\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w)|}|d\tau| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|\tau|=R}\prod_{j=1}^{m}|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)|^{\gamma_j}|P_n(\Psi(\tau))|^p|\Psi'(\tau)||d\tau|\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\int_{|\tau|=R}\frac{|\Psi'(\tau)|^{\left(1-\frac{1}{p}\right)q}}{\prod_{j=1}^{m}|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)|^{\frac{q\gamma_j}{p}}\|\Psi(\tau)-\Psi(w)\|^q}|d\tau|\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{L_R} h(\zeta)|P_n(\zeta)|^p|d\tau|\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\int_{|\tau|=R}\frac{|\Psi'(\tau)|}{\prod_{j=1}^{m}|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)|^{\gamma_j(q-1)}\|\Psi(\tau)-\Psi(w)\|^q}|d\tau|\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.85)\\
&=: \frac{1}{2\pi}J_{n,1}\times J_{n,2},
\end{aligned}
$$

burada

$$J_{n,1} := \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)},$$

$$J_{n,2} := \times\left(\int_{|\tau|=R}\frac{|\Psi'(\tau)|^{\left(1-\frac{1}{p}\right)q}}{\prod_{j=1}^{m}|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)|^{\frac{q\gamma_j}{p}}\|\Psi(\tau)-\Psi(w)\|^q}|d\tau|\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır.Bu durumda Lemma 3.3.6 ile

$$|P_n(z)| \prec J_{n,1}\cdot J_{n,2} \prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\cdot J_{n,2},\ z\in L,\ w=\Phi(z) \qquad (4.86)$$

olur. $J_{n,2}$ integralini değerlendirmek için $|\Psi'|$ için (*) bağıntısıyla

$$J_{n,2} \prec \left(\sum_{i=.}^{m} \int_{F_R^i} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\prod_{j=1}^{m} \left|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)\right|^{\gamma_i(q-1)} \left|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right|^{q}} |d\tau| \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.87}$$

$$=: \left(\sum_{i=1}^{m} J_{n,2}^{i} \right)^{\frac{1}{q}} \leq \sum_{i=1}^{m} \left(J_{n,2}^{i} \right)^{\frac{1}{q}},$$

elde edilir, burada

$$J_{n,2}^{i} := \int_{F_R^i} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\prod_{j=1}^{m} \left|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)\right|^{\gamma_i(q-1)} \left|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right|^{q}} |d\tau|, \ i=\overline{1,m} \tag{4.88}$$

$w_i := \Phi\left(z_i\right)$ noktaları ayrık olgundan yukarıdaki integral

$$\int_{F_R^i} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)\right|^{\gamma_i(q-1)} \left|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right|^{q}} |d\tau| =: J\left(F_R^i\right)$$

integraline denktir. Dolayısıyla geriye $i=\overline{1,m}$ için $J\left(F_R^i\right)$ integrallerini değerlendirmek kalır. Basitlik için

$$i=1,2;\ m_1=1,\ m=2;\ z_1=-1,\ \ z_2=1;\ R=1+\frac{1}{n} \tag{4.89}$$

kabul edilsin. Yukarıdaki notasyonlara ek olarak aşağıdakiler yazılsın:

$$L_R^{+} := \left\{ z \in L_R : \operatorname{Im} z \geq 0 \right\},\ L_R^{-} := \left\{ z \in L_R :\ \operatorname{Im} z < 0 \right\},\ L_R = L_R^{+} \cup L_R^{-};$$

$w_R^{\pm} := \left\{ w = Re^{i\theta} : \theta = \dfrac{\varphi_1 \pm \varphi_2}{2} \right\}$, $z_R^{\pm} \in \Psi(w_R^{\pm})$; $z_{i,R} \in L_R$ ve $\zeta^{\pm} \in L^{\pm}$ noktaları alınsın öyle ki $d_{i,n} = \left|z_i - z_{i,R}\right|$ ve $d(z_{2,R}, L^2 \cap L^{\pm}) := d(z_{2,R}, L^{\pm})$ olsun;

$$z_i^{\pm} := \left\{ \zeta \in L^i : \left|\zeta - z_i\right| = c_i d(z_i, L_R \right\},\ z_{i,R}^{\pm} := \left\{ \zeta \in L_R^i : \left|\zeta - z_{i,R}\right| = c_i d(z_{i,R}, L_R \right\},$$

$w_{i,R}^{\pm} = \Phi(z_{i,R}^{\pm})$; $l_{i,R}^{\pm}(z_{i,R}^{\pm}, z_R^{\pm})$ sırasıyla $z_{i,R}^{\pm}$ ve $z_R^{\pm}$, noktalarını birleştiren yayları göstersin ve $\left| l_{i,R}^{\pm} \right| := mes\, l_{i,R}^{\pm}(z_{i,R}^{\pm}, z_R^{\pm})$, $i=1,2$ olsun; z_0 noktası L^{+} (ya da seçilen yöne göre L^{-}) üzerinde z_1 ve z_2 'den keyfi bir nokta olsun. Basitlik için $z_0 = z_R^{+}$ $(z_0 = z_R^{-})$ kabul edilsin; $E_{1,R}^{1,\pm} := \left\{ \zeta \in L_R : \left|\zeta - z_1\right| < c_1 d_{1,R} \right\}$,

$E_{2,R}^{1,\pm} := \{\zeta \in L_R : c_1 d_{1,R} \le |\zeta - z_1| \le |\, l_{1,R}^{\pm}|\}$, $E_{1,R}^{2,\pm} := \left\{\zeta \in L_R^2 : |\zeta - z_2| < c_2 d_{2,R}\right\}$,

$E_{2,R}^{2,\pm} := \left\{\zeta \in L_R^2 : c_2 d_{2,R} \le |\zeta - z_2| \le |\, l_{2,R}^{\pm}|\right\}$, $F_{j,R}^{i,\pm} := \Phi(E_{j,R}^{i,\pm}),\ i,\ j = 1,2.$

Bu gösterimler dikkate alınarak (4.88)

$$\begin{aligned} J_{n,2}^{i} &\asymp \sum_{i,j=1}^{2} \int_{F_{j,R}^{i,\pm}} \frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)|^{\gamma_i(q-1)}\,|\Psi(\tau)-\Psi(w)|^{q}} |d\tau| \\ &=: \sum_{i,j=1}^{2} J(F_{j,R}^{i,\pm}) \end{aligned} \tag{4.90}$$

şeklinde yazılabilir. Böylece $i,\ j = 1,2$ için $J(F_{j,R}^{i,\pm})$ integralleri değerlendirilmelidir.

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} =: \left|P_n\left(z'\right)\right|,\ z' \in L = L^1 \cup L^2, \tag{4.91}$$

ve $w' = \Phi\left(z'\right)$ olsun. İki durum vardır: $z' \in L^1$ veya $z' \in L^2$.

1) $z' \in L^1$ olsun. Bu durumda Lemma 3.3.1 ve Lemma 3.3.3 ile

1.1) $z' \in E_1^{1,\pm}$ olsun.

Eğer $\gamma_1 \ge 0$ ise

$$J(F_{1,R}^{1,+}) + J(F_{1,R}^{1,-}) \tag{4.92}$$

$$\begin{aligned} &= \int_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}\,|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q}} |d\tau| \\ &\prec \int_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|\tau - w_1|^{\lambda_1-1-\varepsilon}\,|d\tau|}{|\tau - w_1|^{\gamma_1(q-1)\lambda_1+\varepsilon}\,|\tau - w'|^{q\lambda_1+\varepsilon}} \\ &\prec \int_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\tau - w_1|^{\gamma_1(q-1)\lambda_1+\varepsilon-\lambda_1+1-\varepsilon}\,|\tau - w'|^{q\lambda_1+\varepsilon}} \\ &\prec \int_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\min\left\{|\tau - w_1|;|\tau - w'|\right\}^{(\gamma_1(q-1)+q)\lambda_1-\lambda_1+1+\varepsilon}} \\ &\prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1+\varepsilon},\ \forall\varepsilon > 0; \end{aligned}$$

eğer $-1<\gamma_1<0$ ise

$$J(F_{1,R}^{1,+})+J(F_{1,R}^{1,-}) \tag{4.93}$$

$$= \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{(-\gamma_1)(q-1)}|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q}}$$

$$\prec \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|\tau-w_1|^{(-\gamma_1)(q-1)\lambda_1+\lambda_1-1-\varepsilon}|d\tau|}{|\tau-w'|^{q\lambda_1+\varepsilon}}$$

$$\prec \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma_1(q-1)\lambda_1-\lambda_1+1+\varepsilon} \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w'|^{q\lambda_1+\varepsilon}}$$

$$\prec\ n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1+\varepsilon},\ \forall\varepsilon>0$$

elde edilir.

1.2) $z'\in E_2^{1,\pm}$ olsun.

Eğer $\gamma_1>-1$ ise

$$J(F_{1,R}^{1,+})+J(F_{1,R}^{1,-}) \tag{4.94}$$

$$= \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{(-\gamma_1)(q-1)}|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q}}$$

$$\prec \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|\tau-w_1|^{\lambda_1-1-\varepsilon}|d\tau|}{|\tau-w_1|^{\gamma_1(q-1)\lambda_1+\varepsilon}|\tau-w'|^{q\lambda_1+\varepsilon}}$$

$$\prec \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\min\left\{|\tau-w_1|;|\tau-w'|\right\}^{\gamma_1(q-1)\lambda_1+q\lambda_1-\lambda_1+1+\varepsilon}}$$

$$\prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1+\varepsilon},\ \forall\varepsilon>0$$

elde edilir.

1.3) $z' \in E_1^{1,\pm}$ olsun.

Eğer $\gamma_1 \geq 0$ ise

$$J(F_{2,R}^{1,+}) + J(F_{2,R}^{1,-}) \tag{4.95}$$

$$= \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^q}$$

$$\prec \frac{1}{d_{1,R}^{\gamma_1(q-1)+\varepsilon}} \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\tau - w_1|^{\lambda_1 - 1 - \varepsilon}|d\tau|}{|\tau - w'|^{q\lambda_1+\varepsilon}}$$

$$\prec n^{\gamma_1(q-1)+\varepsilon} \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\min\left\{|\tau - w_1|;|\tau - w'|\right\}^{q\lambda_1 - \lambda_1 + 1 + \varepsilon}}$$

$$\prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1+\varepsilon}, \ \forall \varepsilon > 0;$$

eğer $-1 < \gamma_1 < 0$ ise

$$J(F_{2,R}^{1,+}) + J(F_{2,R}^{1,-}) \tag{4.96}$$

$$= \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{(-\gamma_1)(q-1)}|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^q}$$

$$\prec \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\tau - w_1|^{(-\gamma_1)(q-1)+\lambda_1 - 1 - \varepsilon}|d\tau|}{|\tau - w'|^{q\lambda_1+\varepsilon}}$$

$$\prec \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\min\left\{|\tau - w_1|;|\tau - w'|\right\}^{[\gamma_1(q-1)+q]\lambda_1 - \lambda_1 + 1 + \varepsilon}}$$

$$\prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1+\varepsilon}, \ \forall \varepsilon > 0,$$

elde edilir.

1.4) $z' \in E_2^{1,\pm}$ olsun.

Eğer $\gamma_1 \geq 0$ ise

$$J(F_{2,R}^{1,+}) + J(F_{2,R}^{1,-}) \tag{4.97}$$

$$= \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^q}$$

$$\prec \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|}{\left[\min\left\{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|;\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|\right\}\right]^{\gamma_1(q-1)+q-1}}$$

$$\prec \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{\left|\tau-w_1\right|^{\lambda_1-1-\varepsilon}\left|d\tau\right|}{\left[\min\left\{\left|\tau-w_1\right|;\left|\tau-w'\right|\right\}\right]^{\gamma_1(q-1)+q-1+\varepsilon}} \prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1+\varepsilon}, \ \forall\varepsilon>0,$$

eğer $-1<\gamma_1<0$ ise

$$J(F_{2,R}^{1,+})+J(F_{2,R}^{1,-}) \tag{4.98}$$

$$= \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}}$$

$$\prec \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{\left|\tau-w_1\right|^{\lambda_1-1-\varepsilon}\left|d\tau\right|}{\left[\min\left\{\left|\tau-w_1\right|;\left|\tau-w'\right|\right\}\right]^{\gamma_1(q-1)+q-1+\varepsilon}}$$

$$\prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1+\varepsilon}, \ \forall\varepsilon>0$$

elde edilir. (4.92) – (4.98) bağıntıları birleştirilerek her $\gamma_1>-1$, $q>1$ ve $0<\lambda_1<2$ için

$$J(F_{1,R}^{1,+})+J(F_{1,R}^{1,-}) \prec n^{(\tilde{\gamma}_1+1)(q-1)\tilde{\lambda}_1+\varepsilon}, \ \forall\varepsilon>0 \tag{4.99}$$

elde edilir.

2) $z' \in L^2$ olsun. Bu durumda (*)'a göre,

2.1) $z' \in E_1^{2,\pm}$ olsun.

$$J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-}) \tag{4.100}$$

$$= \int_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}}\left|d\tau\right|$$

$$\prec \int_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{d(\Psi(\tau),L)\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}(\left|\tau\right|-1)}$$

$$\prec \int_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2(q-1)-1}\,|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q}\,(|\tau|-1)}$$

$$\prec \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{d_{2,R}^{\gamma_2(q-1)-1}\,|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q}\,(|\tau|-1)}$$

$$+\int_{F_{1,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{d_{2,R}^{\gamma_2(q-1)-1}\,|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q}\,(|\tau|-1)}$$

Son iki integral birbirine denktir, bu nedenle sadece bir tanesini değerlendirmek yeterlidir, birinci ele alınsın. $\tau \in F_{1,R}^{2,+}$ ise $|\Psi(\tau)-\Psi(w')|$ için aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$|\Psi(\tau)-\Psi(w')| \succ \max\left\{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|;\,|\Psi(\tau)-z_2^{+}|\right\}$$

$$=|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)| \succ |\Psi(\tau)-z_2^{+}|^{\frac{1}{1+\beta_2}}$$

Bu durumda $\gamma_2>0$ için

$$J(F_{1,R}^{2,+}) \prec n\int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-z_2^{+}|^{\frac{\gamma_2(q-1)+q-1}{1+\alpha_2}}}$$

$$\prec n\int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-z_2^{+}|^{\frac{(\gamma_2+1)(q-1)}{1+\alpha_2}}} \prec n\int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_2^{+}|^{\frac{(\gamma_2+1)(q-1)}{1+\alpha_2}+\varepsilon}}$$

$$\prec \begin{cases} n^{\frac{(\gamma_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)+\varepsilon}, & \dfrac{(\gamma_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)>1, \\ n^{1+\varepsilon}\ln n, & \dfrac{(\gamma_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)=1, \\ n^{1+\varepsilon}, & \dfrac{(\gamma_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)<1, \end{cases}$$

ve $-1<\gamma_2<0$ için

$$J(F_{1,R}^{2,+}) \prec n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{(-\gamma_2)(q-1)}|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|^{\frac{q-1}{1+\alpha_2}}}$$

$$\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w_2^+\right|^{\frac{q-1}{1+\alpha_2}+\varepsilon}}$$

$$\prec \begin{cases} n^{\frac{q-1}{1+\alpha_2}+\varepsilon}, & \dfrac{q-1}{1+\alpha_2}>1, \\ n^{1+\varepsilon}\ln n, & \dfrac{q-1}{1+\alpha_2}=1, \\ n^{1+\varepsilon}, & \dfrac{q-1}{1+\alpha_2}<1, \end{cases}$$

elde edilir. Böylece

$$J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-}) \prec \begin{cases} n^{\frac{(\tilde{\gamma}_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)+\varepsilon}, & \dfrac{(\tilde{\gamma}_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)>1, \\ n^{1+\varepsilon}\ln n, & \dfrac{(\tilde{\gamma}_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)=1, \quad \forall\varepsilon>0 \\ n^{1+\varepsilon}, & \dfrac{(\tilde{\gamma}_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)<1, \end{cases} \qquad (4.101)$$

elde edilir.

2.2) $z' \in E_2^{2,\pm}$ olsun.

$\gamma_2>-1$ için

$$J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-}) = \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{d(\Psi(\tau),L)|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}(|\tau|-1)}$$

$$\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q-1}}$$

dir.

$\tau\in F_{1,R}^{2,+}$ ise $\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|$ için aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right| \succeq \left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|$$

Bu durumda, önceki duruma benzer olarak eğer $\gamma_2 > 0$ ise

$$J(F_{1,R}^{2,+}) \prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2(q-1)} |\Psi(\tau)-z_2^+|^{q-1}}$$

$$\prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-z_2^+|^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1}}$$

$$\prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_2^+|^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1+\varepsilon}}$$

$$\prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1+\varepsilon}, & \frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1>1, \\ n^{1+\varepsilon}\ln n, & \frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1=1, \\ n^{1+\varepsilon}, & \frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1<1, \end{cases}$$

eğer $-1<\gamma_2 \le 0$ ise

$$J(F_{1,R}^{2,+}) \prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{(-\gamma_2)(q-1)}|d\tau|}{|\Psi(\tau)-z_2^+|^{q-1}}$$

$$\prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-z_2^+|^{q-1}}$$

$$\prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_2^+|^{q-1}}$$

$$\prec \begin{cases} n^{q-1}, & q>2, \\ n^{1+\varepsilon}\ln n, & q=2, \\ n^{1+\varepsilon}, & q<2, \end{cases}$$

elde edilir. Böylece

$$J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-}) \prec\prec \begin{cases} n^{\frac{\tilde{\gamma}_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1+\varepsilon}, & \frac{\tilde{\gamma}_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1>1, \\ n^{1+\varepsilon}\ln n, & \frac{\tilde{\gamma}_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1=1, \quad \forall \varepsilon>0 \\ n^{1+\varepsilon}, & \frac{\tilde{\gamma}_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1<1, \end{cases} \qquad (4.102)$$

elde edilir.

2.3) $z^{'} \in E_1^{2,\pm}$ olsun.

Her $\gamma_2 > 0$ için

$$J(F_{2,R}^{2,+}) + J(F_{2,R}^{2,-}) \tag{4.103}$$

$$= \int_{F_{2,R}^{2,+} \cup F_{2,R}^{2,-}} \frac{\left|\Psi^{'}(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w^{'})\right|^{q}}\left|d\tau\right|$$

$$\prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w^{'})\right|^{q}}$$

$$+n \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w^{'})\right|^{q}}$$

dır. Son iki integral birbirine denktir, bu nedenle sadece bir tanesini değerlendirmek yeterlidir, birinci ele alınsın. $\tau \in F_{2,R}^{2,+}$ ve $z^{'} \in E_1^{2,\pm}$ için

$$\left|\Psi(\tau)-\Psi(w^{'})\right| \succ \left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|;$$

$$\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right| \succ d_{2,R} \succ \left|z_{2,R}-z_2^{+}\right|^{\frac{1}{1+\alpha_2}} \succ \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1+\varepsilon}{1+\alpha_2}}$$

elde edilir. Bu durumda

$$J(F_{2,R}^{2,+}) \prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{\gamma_2(q-1)+q-1}}$$

$$\prec n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1+\varepsilon} \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w_2^{+}\right|^{q-1+\varepsilon}}$$

$$\prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1+\varepsilon}, & q>2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1+\varepsilon}\ln n, & q=2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1+\varepsilon}, & q<2, \end{cases}$$

ve böylece $\gamma_2 > 0$ için

$$J(F_{2,R}^{2,+})+J(F_{2,R}^{2,-})\prec\begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1+\varepsilon}, & q>2,\\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1+\varepsilon}\ln n, & q=2,\\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1+\varepsilon}, & q<2,\end{cases}$$

elde edilir.

Eğer $-1<\gamma_2<0$ ise

$$J(F_{2,R}^{2,+})+J(F_{2,R}^{2,-}) \tag{4.104}$$

$$=\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}\cup F_{2,R}^{2,-}}\frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{(-\gamma_2)(q-1)}\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}}\prec n\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q-1}}$$

$$\prec n\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{q-1}}\prec n\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w_2^{+}\right|^{q-1+\varepsilon}}\prec\begin{cases} n^{q+\varepsilon}, & q>2,\\ n^{1+\varepsilon}\ln n, & q=2,\\ n^{1+\varepsilon}, & q<2,\end{cases}$$

elde edilir.

2.4) $z'\in E_2^{2,+}$ olsun.

Her $\gamma_2>0$ için

$$J(F_{2,R}^{2,+}) \tag{4.105}$$

$$=\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}}\prec\frac{n}{d_{2,R}^{\gamma_2(q-1)}}\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q-1}}$$

$$\prec n^{1+\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+\varepsilon}\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w'\right|^{q-1}}\prec\begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1+\varepsilon}, & q>2,\\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1+\varepsilon}\ln n, & q=2,\\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1+\varepsilon}, & q<2,\end{cases}$$

ve

$$J(F_{2,R}^{2,-}) \tag{4.106}$$

$$= \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2(q-1)}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^q} \prec \frac{n}{d_{2,R}^{\gamma_2(q-1)}} \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q-1}}$$

$$\prec n^{1+\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+\varepsilon} \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q-1}} \prec n^{1+\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+\varepsilon} \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w'|^{q-1}} \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1+\varepsilon}, & q>2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1+\varepsilon}\ln n, & q=2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1+\varepsilon}, & q<2, \end{cases}$$

elde edilir.

$z' \in E_2^{2,-}$ durumu $z' \in E_2^{2,+}$ durumunun tamamen aynısıdır.

Eğer $-1<\gamma_2<0$ ise

$$J(F_{2,R}^{2,+}) = \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{(-\gamma_2)(q-1)}|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^q}$$

$$\prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q-1}} \prec \begin{cases} n^{q-1}, & q>2, \\ n^{1+\varepsilon}\ln n, & q=2, \\ n^{1+\varepsilon}, & q<2, \end{cases} \tag{4.107}$$

ve

$$J(F_{2,R}^{2,-}) = \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{(-\gamma_2)(q-1)}|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^q}$$

$$\prec n \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q-1}} \prec \begin{cases} n^{q-1}, & q>2, \\ n^{1+\varepsilon}\ln n, & q=2, \\ n^{1+\varepsilon}, & q<2, \end{cases} \tag{4.108}$$

elde edilir.

(4.101) – (4.108) değerlendirmeleri birleştirilerek her $-1<\gamma_2<0$ için

$$\left(J_{n,2}^2\right)^{\frac{1}{q}} \prec \begin{cases} n^{\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p<2, \\ n^{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p\geq 2, \end{cases} \tag{4.109}$$

ve her $\gamma_2>0$ için

$$\left(J_{n,2}^{2}\right)^{\frac{1}{q}} \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2}{p(1+\alpha_2)}+\frac{1}{p}+\varepsilon}, & 1<p<2+\dfrac{\gamma_2}{1+\alpha_2}, \\ n^{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p\geq 2+\dfrac{\gamma_2}{1+\alpha_2}, \end{cases} \tag{4.110}$$

elde edilir.

(4.88), (4.99), (4.109), (4.110) birleştirilerek (4.90)'dan $i=1,2;\, m_1=1,\, m_2=2$ için

$$J_{n,2} \prec n^{\frac{(\tilde{\gamma}_1+1)\tilde{\lambda}_1}{p}+\varepsilon} + \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2}{p(1+\alpha_2)}+\frac{1}{p}+\varepsilon}, & 1<p<2+\dfrac{\gamma_2}{1+\alpha_2}, \\ n^{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p\geq 2+\dfrac{\gamma_2}{1+\alpha_2}, \end{cases} \quad \forall\varepsilon>0$$

elde edilir.

(4.86), (4.87) ve (4.88)'den (4.89) ve (4.90)'a göre her $i=\overline{m_1+1,m}$ ve $\forall\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned} \|P_n\|_{C(\bar{G})} &\prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\cdot J_{n,2} \\ &\prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{m}\left(J_{n,2}^{i}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}.\left(J(F_{j,R}^{i,\pm})\right)^{\frac{1}{q}} \\ &\prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \left(\sum_{i=1}^{m_1} n^{\frac{(\tilde{\gamma}_i+1)\tilde{\lambda}_i}{p}+\varepsilon} + \begin{cases} \displaystyle\sum_{i=m_1+1}^{m} n^{\frac{\tilde{\gamma}_i+1}{p(1+\alpha_i)}+\frac{\alpha_i}{p(1+\alpha_i)}+\varepsilon}, & 1<p<2+\dfrac{\tilde{\gamma}_i}{1+\alpha_i}, \\ n^{1-\frac{1}{p}+\varepsilon}, & p\geq 2+\dfrac{\tilde{\gamma}_i}{1+\alpha_i}, \end{cases} \right) \end{aligned}$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.1.1 in İspatı:

$0<\delta<\delta_0 := \frac{1}{4}\min\left\{\left|z_i - z_j\right| : i,\, j=\overline{1,m},\, i\neq j\right\}$ için

$\Omega(z_j,\delta) := \Omega\cap\left\{z:\left|z-z_j\right|\leq\delta\right\}$, $\Omega(\delta) := \bigcup_{j=1}^{m}\Omega(z_j,\delta)$; $\Delta_j := \Phi(\Omega(z_j,\delta))$ olsun.

$w_j := \Phi(z_j)$ ve $\varphi_j := \arg w_j$, $j=\overline{1,m}$, için

$\Delta_j' := \left\{t = Re^{i\theta} : R>1,\ \frac{\varphi_{j-1}+\varphi_j}{2}\leq\theta<\frac{\varphi_j+\varphi_{j+1}}{2}\right\}$ olsun, burada $\varphi_0\equiv\varphi_m$, $\varphi_1\equiv\varphi_{m+1}$ dir,

$\Omega^j := \Psi(\Delta_j'),\ L_R^j := L_R\cap\bar{\Omega}^j.\quad \Omega=\bigcup_{j=1}^{m}\Omega^j$ olduğu

açıktır. $F^i := \Phi(L^i) = \overline{\Delta_i'}\cap\left\{\tau:\left|\tau\right|=1\right\}$, $F_R^i := \Phi(L_R^i) = \overline{\Delta_j'}\cap\left\{\tau:\left|\tau\right|=R\right\}$, $i=\overline{1,m}.$

Yeterince küçük $\varepsilon_1>0$ için $R_1 := 1+\frac{\varepsilon_1}{n}$ olsun. Herbir $z\in\Omega_{R_1}$ için:

$$G_n(z) := \frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)} \tag{4.111}$$

ele alınsın. Cauchy integral gösterimi ile

$$G_n(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_{R_1}} G_n(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z},\ z\in\Omega_{R_1}$$

dir. Bu durumda

$$\left|G_n(z)\right|\leq\frac{1}{2\pi}\int_{L_{R_1}}\left|G_n(\zeta)\right|\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta - z\right|}\leq\frac{1}{2\pi d(z,L_{R_1})}\int_{L_{R_1}}\left|P_n(\zeta)\right|\left|d\zeta\right|$$

olur. $\tau=\Phi(\zeta)$ değişken değişimi yapıp integral altı ifadeyi $\prod_{i=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)\right|^{\frac{\gamma_i}{p}}\left|\Psi'(\tau)\right|^{\frac{1}{p}}$ ile çarparak ve ardından Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$
\begin{aligned}
\left|G_n(z)\right| &\le \frac{1}{2\pi d(z,L_{R_1})} \int\limits_{|\tau|=R_1} \left|P_n\left(\Psi(\tau)\right)\right|\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right| \\
&\le \frac{1}{2\pi d(z,L_{R_1})}\left(\int\limits_{|\tau|=R_1}\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)\right|^{\gamma_j}\left|P_n\left(\Psi(\tau)\right)\right|^{p}\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\int\limits_{|\tau|=R_1}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)\right|^{\frac{q\gamma_j}{p}}}\left|d\tau\right|\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.112)\\
&=: \frac{1}{2\pi d(z,L_{R_1})} A_{n,p}\times B_{n,q}, \ \frac{1}{\mathrm{p}}+\frac{1}{\mathrm{q}}=1
\end{aligned}
$$

elde edilir. Lemma 3.3.6 ile

$$
A_{n,p} \prec \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \qquad (4.113)
$$

dir.

$$
\begin{aligned}
B_{n,q} &= \left(\sum_{i=1}^{m}\int\limits_{F_{R_1}^{i}}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\prod_{i=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)\right|^{\gamma_j(q-1)}}\left|d\tau\right|\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.114)\\
&=: \left(\sum_{i=1}^{m}B_{n,q}^{i}\right)^{\frac{1}{q}} \le \sum_{i=1}^{m}\left(B_{n,q}^{i}\right)^{\frac{1}{q}}
\end{aligned}
$$

dir, burada

$$
B_{n,q}^{i} := \int\limits_{F_{R_1}^{i}}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\prod_{i=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)\right|^{\gamma_j(q-1)}}\left|d\tau\right|, \ i=\overline{1,m}
$$

dir. $w_i := \Phi\left(z_i\right)$ noktaları ayrık olduğundan

$$
B_{n,q}^{i} \asymp \int\limits_{F_{R_1}^{i}}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)\right|^{\gamma_i(q-1)}}\left|d\tau\right| := J(F_{R_1}^{i}) \qquad (4.115)
$$

yazabiliriz. Basitlik için $i=1$ ve $F_{R_1}^{1}=F_{R_1}^{11}\cup F_{R_1}^{12}$ alalım,

$$F_{R_1}^{11} := \left\{ \tau : \tau \in F_{R_1}^{1}, \left| \tau - w_1 \right| < c_1 n^{-1} \right\},$$
$$F_{R_1}^{12} := \left\{ \tau : \tau \in F_{R_1}^{1}, c_1 n^{-1} \le \left| \tau - w_1 \right| < c_2 \right\}.$$

Bu gösterimleri dikkate alarak (4.115) aşağıdaki şekilde yazılır:

$$\begin{aligned} J(F_{R_1}^{1}) &= \int_{F_{R_1}^{1}} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)}} \left|d\tau\right| \\ &= \int_{F_{R_1}^{11}} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)}} \left|d\tau\right| + \int_{F_{R_1}^{12}} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)}} \left|d\tau\right| \\ &=: J(F_{R_1}^{11}) + J(F_{R_1}^{12}). \end{aligned} \tag{4.116}$$

Bu integralleri $-1 < \gamma_1 \le 0$ ve $\gamma_1 > 0$ için ayrı ayrı değerlendireceğiz. Öncelikle Lemma 3.3.1 ve Lemma 3.3.2’den

$$\begin{aligned} \left|\Psi'(\tau)\right| &\prec \frac{1}{\left(\left|\tau\right|-1\right)^{\kappa}}, \\ d(\Psi(\tau),L) \prec \left(\left|\tau\right|-1\right)^{1-\kappa}, &\quad \left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right| \succeq \left|\tau - w'\right|^{1+\kappa} \end{aligned} \tag{4.117}$$

değerlendirmeleri elde edilir.

$\gamma_1 > 0$ olsun. $G \in Q(\kappa)$, olduğundan keyfi $z^* \in L$ öyle ki $d(\Psi(\tau),L) = \left|\Psi(\tau) - z^*\right|$ ve $w^* := \Phi(z^*)$ için

$$d(\Psi(\tau),L) = \left|\Psi(\tau) - z^*\right| \prec \left|\tau - w^*\right|^{1-\kappa}$$

olur. (4.117)’ye göre

$$
\begin{aligned}
J(F_{R_1}^{1k}) &= \int_{F_{R_1}^{1k}} \frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}}|d\tau| \\
&\prec \int_{F_{R_1}^{1k}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{\gamma_1(q-1)(1+\kappa)}\left(|\tau|-1\right)^{\kappa}} \\
&\prec n^{\kappa} \int_{|\tau|=R_1} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{\gamma_1(q-1)(1+\kappa)}} \\
&\prec \begin{cases} n^{\gamma_1(q-1)(1+\kappa)+\kappa-1}, & \gamma_1(q-1)(1+\kappa)>1, \\ n^{\kappa}\ln n, & \gamma_1(q-1)(1+\kappa)=1, \quad k=1,2, \\ n^{\kappa}, & \gamma_1(q-1)(1+\kappa)<1, \end{cases}
\end{aligned}
$$

elde edilir.

Yeterince küçük $\varepsilon_1>0$ için $R_1:=1+\frac{\varepsilon_1}{n}$ olduğundan Lemma 3.3.1 ile

$$
(B_{n,q}^1)^q \prec \begin{cases} n^{\gamma_1(q-1)(1+\kappa)+\kappa-1}, & \gamma_1(q-1)(1+\kappa)>1, \\ n^{\kappa}\ln n, & \gamma_1(q-1)(1+\kappa)=1, \\ n^{\kappa}, & \gamma_1(q-1)(1+\kappa)<1, \end{cases} \tag{4.118}
$$

elde edilir.

$-1<\gamma_1\le 0$ olsun. $d(\Psi_R(\tau),L):=|\tilde{z}-z^*|,\ \tilde{z}\in L_{R_1}$ ve $\tilde{w}:=\Phi(\tilde{z}),\ w^*:=\Phi(z^*)$ alalım. $G\in Q(\kappa)$ olduğundan

(4.117)'ye göre $|\tilde{z}-z^*|\prec|\tilde{w}-w^*|^{1-\kappa}$ olur ve bu durumda (4.117) aşağıdaki ifadeleri verir.

$$
\begin{aligned}
J(F_{R_1}^{11}) &= \int_{F_{R_1}^{11}} \frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}}|d\tau| \\
&\asymp \int_{F_{R_1}^{11}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{(-\gamma_1)(q-1)}}{\left(|\tau|-1\right)^{\kappa}}|d\tau| \\
&\prec n^{\kappa} \int_{F_{R_1}^{11}} |\tau-w_1|^{(-\gamma_1)(q-1)(1-\kappa)}|d\tau| \\
&\prec n^{\gamma_1(q-1)(1-\kappa)+\kappa}\cdot mesF_{R_1}^{11} \\
&\prec n^{\gamma_1(q-1)(1-\kappa)+\kappa-1} \prec 1,
\end{aligned} \tag{4.119}
$$

ve

$$J(F_{R_1}^{12}) \asymp \int_{F_{R_1}^{12}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}}{\left(|\tau|-1\right)^{\kappa}}|d\tau| \qquad (4.120)$$
$$\prec n^{\kappa}\cdot mesF_{R_1}^{12} \prec n^{\kappa}.$$

Buradan

$$(B_{n,q}^{1})^{q} \prec n^{\kappa} \qquad (4.121)$$

elde edilir. (4.111) – (4.121) birleştirilerek

$$\left|P_n(z)\right| \prec \frac{\left|\Phi(z)\right|^{n+1}}{d(z,L_{R_1})}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}$$

$$\times\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} n^{\frac{\gamma_i(1+\kappa)}{p}-p-(1-\frac{1}{p})(1-\kappa)}, & \text{her } i=\overline{1,m} \text{ için } \gamma_i > \frac{1}{1+\kappa}(p-1), \\ \left(n^{\kappa}\ln n\right)^{1-\frac{1}{p}}, & \text{her } i=\overline{1,m} \text{ için } \gamma_i = \frac{1}{1+\kappa}(p-1), \quad z\in\Omega_{R_1}, \\ n^{\kappa(1-\frac{1}{p})}, & \text{her } i=\overline{1,m} \text{ için } -1<\gamma_i<\frac{1}{1+\kappa}(p-1), \end{cases}$$

elde edilir ve ispat biter.

Teorem 4.3.2.1 in İspatı:

$R=1+\frac{c_1}{n}$ olsun. $\left\|P_n\right\|_{C(\overline{G})}=\left|P_n(z')\right|$, $z'\in L$ ve $w':=\Phi(z')$ olsun. Bu durumdabir $z_{i_0}\in\{z_i\}_{i=1}^{m}$ vardır öyle ki $\exists\delta>0$ ve $i=1,2,..i_0-1,i_0+1,...,m$ için $\left|z'-z_{i_0}\right|\le\delta\le\left|z'-z_i\right|$. Basitlik için $i_0=1, w_1=\Phi(z_1)$ alınsın. G_R bölgesi için Cauchy integral gösterimi ile

$$P_n(z')=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} P_n(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z}, \quad z\in G_R$$

dir.

$\tau = \Phi(\zeta)$ değişken değişimi yapıp integal altı ifadeyi $\prod_{i=1}^{m} \left|\Psi(\tau) - \Psi(w_i)\right|^{\frac{\gamma_i}{p}} \left|\Psi'(\tau)\right|^{\frac{1}{p}}$ ile çarparak ve ardından Hölder eşitsizliğini uygulayarak

$$\begin{aligned}
\left|P_n\left(z'\right)\right| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{L_R} \left|P_n\left(\zeta\right)\right| \frac{|d\zeta|}{\left|\zeta - z'\right|} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=R} \frac{\left|P_n\left(\Psi\left(\tau\right)\right)\right| \left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi\left(\tau\right) - \Psi\left(w'\right)\right|} |d\tau| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|\tau|=R} \prod_{j=1}^{m} \left|\Psi(\tau) - \Psi(w_j)\right|^{\gamma_j} \left|P_n\left(\Psi(\tau)\right)\right|^p \left|\Psi'(\tau)\right| |d\tau| \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\int_{|\tau|=R} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|^{\left(1-\frac{1}{p}\right)q}}{\prod_{j=1}^{m} \left|\Psi(\tau) - \Psi(w_j)\right|^{\frac{q\gamma_j}{p}} \left|\Psi\left(\tau\right) - \Psi\left(w'\right)\right|^q} |d\tau| \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|\tau|=R} h\left(\zeta\right) \left|P_n\left(\zeta\right)\right|^p |d\zeta| \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\int_{|\tau|=R} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\prod_{j=1}^{m} \left|\Psi(\tau) - \Psi(w_j)\right|^{\gamma_j(q-1)} \left|\Psi\left(\tau\right) - \Psi\left(w'\right)\right|^q} |d\tau| \right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.122) \\
&=: \frac{1}{2\pi} J_{n,1} \times J_{n,2}, \quad \frac{1}{\mathrm{p}} + \frac{1}{\mathrm{q}} = 1
\end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$J_{n,1} := \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}$$

$$\left(J_{n,2}\right)^q := \int_{|\tau|=R} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\prod_{j=1}^{m} \left|\Psi(\tau) - \Psi(w_j)\right|^{\gamma_j(q-1)} \left|\Psi\left(\tau\right) - \Psi\left(w'\right)\right|^q} |d\tau|$$

dır. Bu durumda Lemma 3.3.6'dan

$$\left|P_n\left(z'\right)\right| \prec J_{n,1} \cdot J_{n,2} \prec \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \cdot J_{n,2}. \qquad (4.123)$$

a) $\gamma_1 > 0$ için

$$\begin{aligned}
\left(J_{n,2}\right)^q &\prec \int\limits_{|\tau|=R} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)}\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}\left(|\tau|-1\right)^{\kappa}} \\
&\prec \int\limits_{F^{11}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)}\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}\left(|\tau|-1\right)^{\kappa}} \\
&+ \int\limits_{F^{12}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)}\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}\left(|\tau|-1\right)^{\kappa}} \\
&\prec n^{\kappa} \int\limits_{F^{11}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w_1\right|^{\gamma_1(q-1)(1+\kappa)}\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}} + n^{\kappa} \int\limits_{F^{12}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}} \\
&\le n^{\kappa}\left\{ \int\limits_{F^{11}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w_1\right|^{\gamma_1(q-1)(1+\kappa)+q(1+\kappa)}} + \int\limits_{F^{12}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{\gamma_1(q-1)(1+\kappa)+q(1+\kappa)}} \right\} \\
&+ n^{\kappa} \int\limits_{F^{12}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}} \\
&\prec n^{\gamma_1(q-1)(1+\kappa)+q(1+\kappa)+\kappa-1} + n^{q(1+\kappa)+\kappa-1} \\
&= n^{(\gamma_1+1)(q-1)(1+\kappa)+2\kappa}
\end{aligned} \tag{4.124}$$

ve böylece

$$J_{n,2} \prec n^{\frac{(\gamma_1+1)(q-1)(1+\kappa)}{q}+\frac{2\kappa}{q}} = n^{\frac{(\gamma_1+1)(1+\kappa)}{p}+2\kappa\left(1-\frac{1}{p}\right)} \tag{4.124}$$

elde edilir.

b) $\gamma_1 < 0$ için

$$\begin{aligned}
\left(J_{n,2}\right)^q &= \int\limits_{|\tau|=R} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}\left(|\tau|-1\right)^{\kappa}} \\
&= \left(\int\limits_{F^{11}} + \int\limits_{F2} \right) \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}\left(|\tau|-1\right)^{\kappa}} \\
&=: \left(J^1_{n,2}\right)^q + \left(J^2_{n,2}\right)^q
\end{aligned} \tag{4.125}$$

dır. Buradan

$$
\begin{aligned}
\left(J_{n,2}^{1}\right)^{q} &= \int_{F^{11}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}\left(|\tau|-1\right)^{\kappa}} \\
&\prec n^{\kappa} \int_{F^{11}} \frac{\left|\tau-w_1\right|^{(-\gamma_1)(q-1)(1-\kappa)}|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}} \\
&\prec n^{\kappa}\left(\int_{F_1^{11}}+\int_{F_2^{11}}\right) \frac{\left|\tau-w_1\right|^{(-\gamma_1)(q-1)(1-\kappa)}|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}}
\end{aligned}
\tag{4.126}
$$

elde edilir, burada

$$
\begin{aligned}
F_1^{11} &:= \left\{\tau : \tau\in F^{11},\ \left|\tau-w_1\right| < c_1 n^{-1}\right\} \\
F_2^{11} &:= \left\{\tau : \tau\in F^{11},\ c_1 n^{-1} \le \left|\tau-w_1\right| < c_2\right\}
\end{aligned}
$$

dır. Her $q>1,\ 0\le\kappa<1,$ için

$$
\begin{aligned}
\int_{F_1^{11}} \frac{\left|\tau-w_1\right|^{(-\gamma_1)(q-1)(1-\kappa)}|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}} &\prec n^{\gamma_1(q-1)(1-\kappa)} \int_{F_1^{11}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}} \\
&\prec n^{\gamma_1(q-1)(1-\kappa)+q(1+\kappa)-1}
\end{aligned}
\tag{4.127}
$$

$$
\int_{F_2^{11}} \frac{\left|\tau-w_1\right|^{(-\gamma_1)(q-1)(1-\kappa)}|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}} \prec \int_{F_2^{11}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}} \prec n^{q(1+\kappa)-1}
\tag{4.128}
$$

ve benzer şekilde

$$
\left(J_{n,2}^{2}\right)^{q} \prec n^{\kappa} \int_{F^{12}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w'\right|^{q(1+\kappa)}} \prec n^{q(1+\kappa)+\kappa-1}
\tag{4.129}
$$

Bu durumda her bir $q>1,\ \ 0\le\kappa<1,$ için

$$
J_{n,2} \prec n^{\frac{q(1+\kappa)+\kappa-1}{q}}
\tag{4.130}
$$

elde edilir. (4.123) ve (4.130)'den,

$$\left|P_n\left(z'\right)\right| \prec \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \begin{cases} n^{\frac{(\gamma_1+1)(1+\kappa)}{p}+2\kappa\left(1-\frac{1}{p}\right)}, & \gamma_1 \geq 0, \\ n^{\frac{(1+\kappa)}{p}+2\kappa\left(1-\frac{1}{p}\right)}, & \gamma_1 < 0, \end{cases} \tag{4.131}$$

(4.131)'den

$$\left|P_n\left(z'\right)\right| \prec n^{\frac{(\eta+1)(1+\kappa)}{p}+2\kappa\left(1-\frac{1}{p}\right)} \cdot \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}$$

bulunur, burada $\eta := \max\{0; \gamma_k,\ k=\overline{1,m}\}$ dir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde öncelikle bu tez çalışmasında ele alınan sonuçlar özetlenecek daha sonra bu konu ile ilgili başka nelerin yapılabileceği ile ilgili öneriler verilecektir.

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde, (1.2) problemi, $A_p(h,G)$ normunda, G bölgesinin $C_\theta(\lambda_1,\lambda_2,...,\lambda_m)$ sınıfından; $\mathcal{L}_p(h,L)$ normunda ise G bölgesinin $C_\theta(\lambda_i, f_j)$ sınıfından veya κ- yarı konform eğriyle sınırlı bir bölge olması durumunda ele alınarak incelenmiş, elde edilen sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde; 4.1.1. Temel Sonuçlar, 4.2.1. Temel Sonuçlar ve 4.3.1. Temel Sonuçlar başlıkları altında verilmiştir.

4.1.1. Temel Sonuçlar, 4.2.1. Temel Sonuçlar ve 4.3.1. Temel Sonuçlar bölümlerindeki teoremlerin ispatları için gerekli Lemmalar ve Yardımcı Sonuçlar Materyal ve Yöntem başlığı altında verilmiştir.

Teorem 4.1.1.1'den Sonuç 4.3.1.1'e kadar olan teoremlerin hepsinde kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde; (1.2) problemine bakılarak (3.26)'ya göre daha iyi sonuçlar elde edilmeye çalışılmıştır.

5.2.ÖNERİLER

4.1.1. Temel Sonuçlar bölümündeki teoremlerde (1.2) problemi $A_p(h,G)$ normunda sıfır açı içermeyen parçalı düzgün eğri ile sınırlı olan bölgelerde ele alınarak incelenmiştir, 4.2.1 Temel Sonuçlar bölümündeki teoremlerde ise (1.2) problemi dış dıfır açı içeren bölgelerde $\mathcal{L}_p(h,L)$ normunda incelenmiştir. Acaba, (1.2) problemi $A_p(h,G)$ normunda dış sıfır açı ve iç sıfır açı içeren bölgelerde ele alındığında polinomun değerlendirilmesi nasıl olacaktır? Daha sonra, bu sonucların düzgün olmayan (örneğin, yarıdüzgün) eğrilere ve bu tür eğrilerle sınırlı bölgelere taşınabilir mi? Doktora sonrası dönemlerde bu tür problemlerin ele alınması önerilmektedir.

KAYNAKLAR

[1] Bernstein S., "Sur l'ordre de la meilleure approximation desfonetions continues par despolynomes de degree donne'', M em. Acad.Roy. Belgique, (2), vol. 4. pp. 1-104.

[2] Faber. G., "Über nach Polynomen fortschreitende Reihen'', Münchner Berichte, pp. 157-178.

[3] Walsh J. L., "Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain'', AMS, Colloquium Publications, Vol.20, 1960.

[4] Hille, E., Szegö, G., Tamarkin, J.D. "On Some Genarelizations of A Theorem of A. Markoff", Duve Math.,Vol.3**,** s.729-739, (1937).

[5] Abdullayev F. G., "On the some properties of the orthogonal polynomials over the region of the complex plane (Part III)'', Ukr. Math.J., 2001, Vol.53, No:12, pp.1934-1948.

[6] Abdullayev F. G., "The properties of the orthogonal polynomials with weight having singulerity on the boundary contour'', J. of Comp. Anal. and Appl., 2004, Vol. 6, No: 1, pp. 43-59.

[7] Abdullayev F. G., "Dissertation (Ph.D.)'', Donetsk, 1986, 120 p.

[8] Stylianopoulos N., "Fine asymptotics for Bergman orthogonal polynomials over domains with corners'', CMFT 2009, Ankara, June 2009.

[9] Stylianopoulos N., "Strong asymptotics for Bergman polynomials over domains with corners and applications'', Const. Approx. 2013. 38. P.59 100.

[10] Abdullayev F. G., Aral N. D., On the Bernsteın-Walsh Type Lemma's in Regıons of the Complex Plane, Ukr. Math. J., Vol. 63, No:3, (2011), pp.337-350.

[11] Abdullayev F. G., Aral N. D., Özkartepe P., Bernstein-Walsh type estimations for the unbounded regions of complex plane, Proc. AS of Bulgarian "Math. Anal. Dif . Equ. and Appl.", (2011), pp: 101-112.

[12] Jackson D., Certain problems on closest approximations, Bull. Amer. Math. Soc., 39 , (1933), pp.889-906.

[13] Szegö G. and Zigmund A., On certain mean values of polynomials, J.Anal. Math., 3, (1954), pp.225-244.

[14] Suetin P. K., Poryadkovoe sravnenie razlichnix norm mnogochlenov kompleksnoy oblasti (The ordinally comparison of various norms of polynomials in the complex domain), Matematicheskie zapiski Uralskogo Gos. Universiteta, Vol.5 Tet. 4, (1966), (in Russian).

[15] Suetin P. K., Nekotorie otsenki ortogonalnix po konturu mnogochlenov pri osobennosti besa i kontura (On some estimates of the orthogonal polynomials with singularities weight and contour), Sibirskiy Mat. Zhurnal, Vol. VIII, No:3, (1967), pp.1070-1078 (in Russian).

[16] Mamedhanov D. I., Inequalities of S.M.Nikolskii type for polynomials in the complex variable on curves, Soviet Math.Dokl., 15, (1974), pp.34-37.

[17] Mamedhanov D. I., On Nikolskii-type inequalities with new characteristics, Doklady Mathematics, 82, (2010), pp.882-883.

[18] Nikolskii S. M., Approximation of Function of Several Variable and Imbeding Theorems, Springer-Verlag, New-York, 1975.

[19] Pritsker I., Comparing Norms of Polynomials in One and Several Variables, J. of Math. Anal. and Appl., 216, (1997), pp.685-695.

[20] Abdullayev F. G., Deger U., On the orthogonal polynomials with weight having singularity on the boundary of regions of the complex plane , Bull. Belg. Math. Soc.,209, Vol 16, No:2, pp.235-250.

[21] Andrievskii V. V., Weighted Polynomial Inequalities in the Complex Plane, Journal of Approximation Theory, Vol. 164 Issue 9, (2012), pp. 1165-1183.

[22] Milovanovic G. V., Mitrinovic D.S., and Rassias Th.M., Topics in Polynomials:Extremal Problems, Inequalities, Zeros, World Scientifc, Singapore, 1994.

[23] Başkan, T. "Kompleks Fonksiyonlar Teorisi", 3.Baskı Vipaş, 360 s., (1998)

[24] Depree, J. D., Oehring, C. C., "Elements of Complex Analysis", Addison Wesley Publishing Company, USA, 390 s., (1969).

[25] Rudin, W. "Real and Complex Analysis", Mc Graw-Hill, 452 s., (1974).

[26] Pommerenke, C., "Boundary Behaviour of Conformal Maps", Springer-Verlag, Berlin, 300 s., (1992)

[27] Saff, E. B., Snider, A. D., "Fundamentals of Complex Analysis", Prentice Hall,Upper saddle River, New Jersey, 528 s., (1993)

[28] Markushevich, A. I. "Theory of Functions of a Complex Variable", Chelsea Publishing Company.,New York, Three volumes in one, 1231 s., (1985)

[29] Davis, P. J., "İnterpolation and Approximation", Blaisdell Publishing Company, New York 393 s., (1963)

[30] Ahlfors, L. V., "Complex Analysis", McGraw-Hill, Inc., USA, 331 s., (1969).

[31] Andrievskii, V. V., Belyi, V. I., Dzyadyk, V. K. "Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Plane" Atlanta World Federation Publ.Com., 199 s. (1995)

[32] Letho, O., Virtanen, K. I. "Quasiconformal mappings in the plane", Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York, 258 s., (1973).

[33] Rickman, S. "Characterization of quasiconformal arcs", Ann. Acad. Sci. Feen. Ser. A. Mathematica, 395 s., (1966).

[34] Abdullayev, F. G., Andrievskii, V.V., "On Orthogonal polynomials in the domains with $K-$quasiconformal boundary", Izv. Akad. Nauk. Azerb. SSR, Ser F.T.M., 1: 3-7, (1983).

[35] Abdullayev F. G., Özkartepe P., "On the Behavior of the Algebraic Polynomial in Unbounded Regions of Complex Plane'', Ukr.Math.Zhur. Vol. 66, No:5: 579-597, (2014).

[36] Duren P. L. "Theory of H^p Spaces'', Vol.38. Pure and Applied Mathematics (1970).

[37] Halilov, H., Hasanoğlu, A., Can, M. "YM1, Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi", 1. Baskı, Alemdar O., Literatür, 470 s., (1999)

[38] Belinskii, P. P. ,General Properties of Quasiconformal Mappings [in Russian], Nauka, Novosibirsk (1968)

[39] Andrievskii V. V., On the uniform convergence of the Bieberbach polynomials in the regions with piecewise quasiconformal boundary, In: Theory of Mappings and approximation functions, "Naukovo Dumka", Kyiv 1983, pp.3-18. (in Russian)

ÖZGEÇMİŞ ve ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Cevahir Doğanay GÜN

Doğum Tarihi: 01/03/1980

Öğrenim Durumu

Derece	Bölüm/Program	Lise/Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	Cemile Hamdi Ongun Lisesi	1994-1998
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2000-2004
Yüksek Lisans	Matematik	Hacettepe Üniversitesi	2005-2008

ESERLER

1. F.G. Abdullayev, C.D. Gün, "On the Behavior of the Algebraic Polynomials in Regions with Piecewise Smooth Boundary Without Cusps'', Ann. Polon. Math. 111 (2014), 39-58, DOI:10.4064/ap111-1-4. (SCI-Expanded). Uluslararası 2014

2. F.G. Abdullayev, C.D. Gün, N.P. Özkartepe, "Inequalities for Algebraic Polynomials in Regions with Exterior Cusps'', Journal of Nonlinear Functional Analysis, (accepted). Uluslararası 2014

3. F.G. Abdullayev, N.P. Özkartepe, C.D. Gün, "Uniform and pointwise polynomial inequalities in regions without cusps in the weighted Lebesgue space'', Bulletin of Tbilisi ICMC, June, (accepted). Uluslararası 2014

4. F.G.Abdullayev, C.D. Gün, N.P. Özkartepe, "Bernstein-Walsh Type Estimates for the Various Regions of the Complex Plane'',International Conference Mathematical Analysis Differential Equations and their Applications (MADEA 2012)", 04-09 September 2012, Mersin, Turkey, p: 13.

5. F.G.Abdullayev, C.D.Gün, "On the behavior of the algebric polynomials on whole complex plane'', Int. Math. Conf. Bogolyubov Readings DIF-201: "Differential Equarions., Theory of Functions and their Applications", 23-30 June 2013, Sevastopol, Ukraine, p. 201.

6. F.G.Abdullayev, C.D.Gün ,"Parçalı düzgün sınırlı sonsuz bölgelerde cebirsel polinomların farklı normları arasındaki bağıntılar üzerine'', 26. Ulusal Matematik Sempozyumu, 04-07 Eylül 2013, Dicle Üniversitesi, Diyarbakır, 2013.

7. F.G.Abdullayev, C.D.Gün, N.P. Özkartepe, **"**On the behavior of the algebric polynomials in unbounded regions with piecewise-smooth boundary without cusps", Int.Math.Conf. 12-15 September 2013, Istanbul.

8. F.G.Abdullayev, N.P. Özkartepe, C.D.Gün, **"**On the growth of modules of algebraic polynomials in unbounded regions of complex plane'' International Conference dedicated to the 80th anniversary of Levan Zhizhiashvili, Fourier Analysis and Approximation Theory, Bazaleti, Georgia 23-28 October 2013.

9. F.G. Abdullayev, C.D. Gün, "On an analogue of Bernstein-Walsh type inequalities in the weighted Bergman space'' XVIIth Conference on Analytic Functions and Related Topics, June 29 – July 2, 2014 Chełm (Poland).