KOMPLEKS DÜZLEMDE CEBİRSEL POLİNOMLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

N.PELİN ÖZKARTEPE

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV

MERSİN
TEMMUZ– 2015

N.Pelin ÖZKARTEPE tarafından Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV danışmanlığında hazırlanan "Kompleks Düzlemde Cebirsel Polinomların Değerlendirilmesi" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV	....
Prof. Dr. İlham ALİYEV	....
Prof. Dr. Nazım KERİMOV	....
Doç.Dr. Melih ERYİĞİT	....
Doç.Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 07/09/2015 tarih ve 2015-22/536 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Enstitü Müdürü

KOMPLEKS DÜZLEMDE CEBİRSEL POLİNOMLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

N.Pelin ÖZKARTEPE

ÖZ

$G\subset\mathbb{C}$, $L:=\partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge ve $\Omega:=extL$ olsun. $w=\Phi(z)$ ile $\Phi:\Omega\to\{w:|w|>1\}$ konform ve yalınkat resmeden, $\Phi(\infty)=\infty$, $\lim\limits_{z\to\infty}\dfrac{\Phi(z)}{z}>0$ koşullarını sağlayan dönüşüm gösterilsin.

$h(z)$ bir ağırlık fonksiyonu olmak üzere, her $p>0$ için $A_p(h,G)$ ile G bölgesinde analitik ve

$$\|f\|^p_{A_p(h,G)}:=\iint_G h(z)\left|f(z)\right|^p d\sigma_z<\infty$$

koşulunu sağlayan; L doğrultulabilir (ölçülebilir) eğri olduğu durumda, $\mathcal{L}_p(h,L)$ ile L üzerinde integrallenebilen ve

$$\|f\|^p_{\mathcal{L}_p(h,L)}:=\int_L h(z)\left|f(z)\right|^p|dz|<+\infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı işaret edilsin.

Bu tez çalışmasında; kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde, cebirsel polinomların verilmiş uzayda modülce artışları ile ilgili aşağıdaki üç problem incelendi:

a) $|P_n(z)|\le\alpha_n\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,\Gamma)}|\Phi(z)|^{n+1},\ z\in\Omega;$ b) $|P_n(z)|\le\beta_n\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,\Gamma)},\ z\in\overline{G};$

c) $\|P_n\|_{A_p(G_R)}\le cR^{n+\frac{2}{p}}\|P_n\|_{A_p(G_{R_1})},\ R_1=1+\frac{1}{n},\ R>R_1,$

eşitsizliklerini sağlayacak şekilde bir $\alpha_n:=\alpha_n(G,h,z)>0$, $\beta_n:=\beta_n(G,h)>0$ ve $c=c(G)>0$ sabitlerinin bulunması.

Anahtar Kelimeler: Cebirsel Polinomlar, Konform Dönüşüm, Yarıkonform Dönüşüm, Parçalı Yarıkonform Eğri, Parçalı Dini-Düzgün Eğri, Bernstein-Walsh Lemması

Danışman: Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV, Matematik Ana Bilim Dalı, Mersin Üniversitesi

ESTIMATION OF ALGEBRAIC POLYNOMIALS IN THE COMPLEX PLANE

N.Pelin OZKARTEPE

ABSTRACT

Let $\mathbb{C}$ be complex plane, $G \subset \mathbb{C}$ be a finite region bounded by a Jordan curve $L := \partial G$ and $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$. Let w=Φ(z) be the univalent conformal mapping of Ω onto the $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ normalized by $\Phi(\infty) = \infty$ and $\lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$. Let $h(z)$ be a weight function. For any $p > 0$, let us denote by $A_p(h, G)$ the class of functions f which are analytic in G and satisfying the condition

$$\| f \|_{A_p(h,G)} = \left(\iint_G h(z) |f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

Let $\mathcal{L}_p(h, L)$ denote the class of functions f which are integrable and satisfying the condition

$$\|f\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} := \left(\int_L h(z) |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty,$$

when L is rectifiable curve.

In this thesis, following three problems have been investigated about the estimation modulus of algebraic polynomials in various regions of the complex plane:

a) $|P_n(z)| \le \alpha_n \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,\Gamma)} |\Phi(z)|^{n+1}, \ z \in \Omega$; b) $|P_n(z)| \le \beta_n \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,\Gamma)}, \ z \in \overline{G}$;

c) $\|P_n\|_{A_p(G_R)} \le cR^{n+\frac{2}{p}} \|P_n\|_{A_p(G_{R_1})}, \ R_1 = 1 + \frac{1}{n}, \ R > R_1,$

That is, $\beta_n := \beta_n(G, h) > 0$, $\alpha_n := \alpha_n(G, h, z) > 0$ and $c = c(G) > 0$ have been found in this study.

Key Words: Algebraic Polynomial, Conformal Mapping, Quasiconformal Mapping, Piecewise Quasiconformal Curve, Piecewise Dini-smooth Curve, Bernstein-Walsh Lemma

Advisor: Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV, Department of Mathematics, University of Mersin

TEŞEKKÜR

Akademik hayatımın ve umutlarımın mimarı olan, bu yolda bana tekrar inanan ve bu tez çalışmasının her aşamasında bilgileriyle, görüşleriyle bana ışık tutan çok değerli danışman hocam Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV'e sonsuz saygılarımı ve teşekkürlerimi sunarım.

Çalışmalarım sırasında bana destek veren bütün bölüm hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Eğitim hayatım boyunca maddi ve manevi olarak daima bana destek olan sevgili anneme, ablama ve manevi olarak yanımda olan rahmetli babama çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\overline{\mathbb{C}}$	$\mathbb{C}\cup\{\infty\}$
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$:=$	Tanım olarak eşit
$A\Subset G$	A bölgesi kompakt olarak G bölgesine dahildir.
$d\sigma_z$	$dxdy \ \left(z=x+iy\right)$
∂G	G bölgesinin sınırı
$\overline{G}$	G bölgesinin kapanışı
CG	G bölgesinin tümleyeni
$\overline{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
mes γ	γ eğrisinin bir boyutlu Lebesgue ölçüsü
mes D	D kümesinin iki boyutlu Lebesgue ölçüsü
int L	L eğrisinin içi
ext L	L eğrisinin dışı
$dist\left(z,B\right)$	z noktasının B kümesine uzaklığı
$B(z_0,r)$	$\left\{z:\lvert z-z_0\rvert<r\right\}$
Ω	$ext\overline{G}$
$\Omega\left(z,\delta\right)$	$\Omega\cap B\left(z,\delta\right), \quad z\in\Omega$
Δ	$\left\{w:\lvert w\rvert>1\right\}$
$\Delta\left(z,\delta\right)$	$\left\{\zeta:\lvert\zeta-z\rvert>\delta\right\}$
$a\prec b$	$a\le cb,\ c$, a ve b ’ye bağlı olmayan pozitif bir sabit
$a\asymp b$	$a\prec b$ ve $b\prec a$
$A\left(G\right)$	G bölgesinde analitik olan fonksiyonların kümesi
$A\left(\overline{G}\right)$	G bölgesinde analitik ve $\overline{G}$ ’da sürekli olan fonksiyonların kümesi

1. GİRİŞ

Cebirsel, trigonometrik ve rasyonel polinomların, kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde artışlarının (modülce!) irdelenmesi problemi hem yaklaşım teorisinde, hem de analizin diğer alanlarında çok önemli problemlerden birisidir. Bu tür problemler içerisinde ise, bir cebirsel polinomun verilmiş kapalı kümede ve bu küme dışındaki noktalardaki artışlarının, bu polinomun bakılan küme üzerinde herhangi bir normu ve diğer parametrelere dayalı olarak değerlendirilmesi önemli yer tutmaktadır. Bu tür problemler son yüzyılda araştırmacıların ilgi alanı olmuş ve ilgi odağı olarak da devam etmektedir. Araştırmalarda esas amaç, verilmiş bir polinomun (cebirsel, trigonometrik veya rasyonel) herhangi bir uzayda, bu uzaya özgü artışının değerlendirilmesinde, verilmiş bölgenin kendi geometrik özelliklerinin ve varsa ağırlık fonksiyonun özelliklerinin nasıl etkin olduklarını tespit etmektir.

Başlangıcı 1912 yılında Bernstein S.N. [1] tarafından konulan bu tür çalışmalar daha sonraki yıllarda Faber G.[2] (1922), Walsh J.L.[3] (1926), Hille E., Szegö G., Tamarkin J.D. [4] (1937), Sewell W.E. [5] (1937), Western D. W. [6] (1946), Suetin P.K. [7], [8] (1966-1967), Mamedkhanov J.İ. [9], [10] (1974, 2010), Nikol'skii S.M. [11] (1975), Dzyadyk V.K. [12] (1977), Pritsker I. [13] (1997), Abdullayev F.G. [14], [15], [16], [17], [18], [19], [20] (1984-2014), Andrievskii V.V. [21] (2012) ve bir çok matematikçiler tarafından devam ettirilmiş ve halen de devam ettirilmektedir (daha geniş referanslar, bu çalışmaların kaynakçalarında, ve [Milutanoviç ve MR] de de bulunabilir).

Bu çalışmada, kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde benzeri problem ele alınır. Problemin açık ve net şekilde ifade edilmesi amacıyla, önce gerekli tanım ve işaretlemeler verilsin.

$\mathbb{C}$-kompleks düzlem, $\overline{\mathbb{C}}:=\mathbb{C}\cup\{\infty\}$, olmak üzere $G\subset\mathbb{C}$, $L:=\partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge olsun; $\Omega:=extL:=\overline{\mathbb{C}}\setminus\overline{G}$. $w=\Phi(z)$ ile Ω bölgesini $\Delta:=\{w:|w|>1\}$ bölgesine konform ve yalınkat resmeden,

$$\Phi(\infty)=\infty,\ \lim_{z\to\infty}\frac{\Phi(z)}{z}>0$$

koşullarını sağlayan dönüşüm gösterilsin. Her $R>1$ sayısı için

$$L_R := \{z : |\Phi(z)| = R\}$$

olmak üzere $G_R := \operatorname{int} L_R$, $\Omega_R := extL_R$ olsun.

$h(z)$, G_R, $1<R<R_0<\infty$, bölgesinde tanımlı bir ağırlık fonksiyonu olsun.

Her $p>0$ için $A_p(h,G)$ ile G bölgesinde analitik ve

$$\|f\|^p_{A_p(h,G)} := \iint_G h(z)|f(z)|^p \, d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlar sınıfı işaret edilsin. Burada σ ile G üzerinde tanımlı iki boyutlu Lebesgue ölçüsü gösterilmektedir. $A_p(1,G) =: A_p(G)$.

Eğer L eğrisi doğrultulabilir (ölçülebilir) kapalı eğri ise $\mathcal{L}_p(h,\mathrm{L})$ ile L üzerinde tanımlı fonksiyonların ağırlıklı Lebesgue uzayı gösterilsin. Yani, $f \in \mathcal{L}_p(h,\mathrm{L})$ ise, f fonksiyonu L eğrisi üzerinde ölçülebilirdir ve aşağıdaki yarı norm ($1 \le p \le \infty$ ise norm, $0<p<1$ ise $p-$norm) sonludur:

$$\|f\|_p := \|f\|_{\mathcal{L}_p(h,\mathrm{L})} := \left(\int_L h(z)|f(z)|^p |dz| \right)^{1/p} < +\infty, \quad 0<p<\infty,$$

$$\|f\|_\infty := \|f\|_{\mathcal{L}_\infty(1,\mathrm{L})} := \operatorname*{ess\,sup}_{z\in L} |f(z)|, \quad p=\infty.$$

$\mathcal{L}_p(1,\mathrm{L}) =: \mathcal{L}_p(L)$.

Verilmiş bir $M \subset \mathbb{C}$ kümesinde sürekli fonksiyonlar sınıfı $C(M)$ ile gösterilsin ve $f \in C(M)$ için

$$\|f\|_{C(M)} := \sup\{|f(z)| : z \in M\}$$

olsun.

$\wp_n$ ile derecesi n'i aşmayan cebirsel polinomlar sınıfı gösterilsin.

$M_1, M_2 \subset \mathbb{C}$ (*veya* $\mathbb{R}$), $M_1 \subset M_2$ kapalı kümeler olmak üzere verilmiş bir $P_n \in \wp_n$ polinomunun ele alınan M_1 kümesi üzerinde herhangi bir uzaydaki ($C(M_1)$, $\mathcal{L}_p(h, \partial M_1)$, $A_p(h, M_1)$ vs.) yarı normunun ($p \geq 1$ için norm, $0 < p < 1$ için $p-$norm), bu kümenin "genişlemesine" bağlı olarak artışının bulunması ile ilgili aşağıdaki şekilde verilen eşitsizlikler literatürde Bernstein-Walsh eşitsizliği [1] olarak bilinmektedir:

$$\|P_n\|_{M_2} \leq A(n, h, M_1, M_2)\|P_n\|_{M_1}. \tag{1.1}$$

Eğer ele alınan M_1 kümesi olarak, tümleyeni ($\overline{\mathbb{C}}$ ye nazaran) basit bağlantılı olan $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bölgesi ve norm olarak düzgün norm ele alınırsa, bilindiği gibi, klasik Bernstein-Walsh Lemması (G bölgesi için tasarlanmış haliyle)

$$|P_n(z)| \leq |\Phi(z)|^n \|P_n\|_{C(\overline{G})}, \quad z \in \Omega, \tag{1.2}$$

eşitsizliğini vermektedir [1]. Buradan, özel halde

$$\|P_n\|_{C(\overline{G}_R)} \leq R^n \|P_n\|_{C(\overline{G})}, \quad R > 1, \tag{1.3}$$

bulunur. Yani, G bölgesi G_R bölgesine kadar genişletildiğinde $\|P_n\|_{C(\overline{G}_R)}$ sayısı en fazla $\|P_n\|_{C(\overline{G})}$ sayısının R^n katı kadar artacaktır.

(1.3) eşitsizliğinin benzeri, L kapalı ve doğrultulabilir (ölçülebilir) bir Jordan eğrisi olmak üzere $\mathcal{L}_p(\mathrm{L})$ uzayında Hille E., Szegö G., Tamarkin J.D. [4] tarafından aşağıdaki şekilde elde edilmiştir:

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(\mathrm{L}_R)} \leq R^{n+\frac{1}{p}} \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(\mathrm{L})}, \quad p > 0, \tag{1.4}$$

eşitsizliği yazılabilir.

Verilen bölgenin üzerine bazı koşullar koyarak, yani L eğrisi K-yarıkonform olması durumunda (1.4)'deki değerlendirme $A_p(h, G)$ uzayına aşağıdaki şekilde taşınabilir [15] :

$$\left\|P_n\right\|_{A_p(h,G_R)} \le c_1\left[1+c_2(R-1)\right]^{n+\frac{1}{p}}\left\|P_n\right\|_{A_p(h,G)}, \quad p>0, \tag{1.5}$$

burada $c_2>0$ ve $c_1=c_1(c_2,G)>0$ sabiti n ve R den bağımsızdır.

2009 yılında N. Stylianopoulos [22], yarıkonform ve doğrultulabilir (ölçülebilir) bir eğriyle sınırlı bölgede keyfi $P_n\in\wp_n$ polinomunun modülünün artışını bütün Ω'da değerlendirirken, (1.2)'nin sağ tarafındaki $\left\|P_n\right\|_{C(\overline{G})}$ yerine $\left\|P_n\right\|_{A_2(G)}$ normunu kullanarak aşağıdaki sonucu elde etmiştir:

$$\left|P_n(z)\right| \le \frac{c(L)}{d(z,L)}\sqrt{n}\left\|P_n\right\|_{A_2(G)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1}, \quad z\in\Omega, \tag{1.6}$$

burada, $c=c(L)>0$, n ve z den bağımsız bir sabit, $d(z,L):=dist(z,L)$ ise z noktasının L eğrisine olan uzaklığıdır.

Her $1<R<R_0<\infty$, $z\in G_R$ ve biri-biriyle kesişmeyen, tespit edilmiş $\{z_j\}\in L$, $j=1,2,...,m$, noktalar sistemi için $h(z)$ ağırlık fonksiyonu

$$h(z)=\prod_{j=1}^{m}\left|z-z_j\right|^{\gamma_j}, \quad \gamma_j>-1, \tag{1.7}$$

olarak tanımlansın.

Bu tez çalışmasında; (1.7) ağırlık fonksiyonu ele alınarak, kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde aşağıdaki üç problem incelendi:

1) Her $z\in\Omega$ ve $P_n\in\wp_n$ için

$$\left|P_n(z)\right| \le \alpha_n\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1}, \tag{1.8}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\alpha_n:=\alpha_n(G,h,z)>0$ sabitinin bulunması;

2) Her $z\in\overline{G}$ ve $P_n\in\wp_n$ için

$$\left|P_n(z)\right| \le \beta_n\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \tag{1.9}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\beta_n := \beta_n(G,h) > 0$ sabitinin bulunması.

3) $h(z) \equiv 1$ olmak üzere, her $P_n \in \wp_n$, $R_1 = 1 + \frac{1}{n}$ ve keyfi tespit edilmiş R, $R > R_1$ için

$$\left\| P_n \right\|_{A_p(G_R)} \le cR^{n+\frac{2}{p}} \left\| P_n \right\|_{A_p(G_{R_1})}, \tag{1.10}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $c = c(G) > 0$ sabitinin bulunması.

Burada, genel olarak $\alpha_n, \beta_n \to \infty$, $n \to \infty$, ve bu değerlendirmelerde α_n ve β_n sabitlerinin verilmiş bölgenin ve ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlı olarak değişimi tespit edilecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

$M_1 := [-1,1]$ olsun. $w = J(z)$ ile $\{z : |z| > 1\}$ bölgesini $\overline{\mathbb{C}} \setminus M_1$ bölgesine konform ve yalınkat resmeden dönüşüm ve $z = J^{-1}(w)$ ise onun ters dönüşümü gösterilsin. Bilindiği gibi, bu dönüşümü gerçekleştiren fonksiyon, kaynaklarda iyi bilinen Joukowskii fonksiyonudur:

$$w = J(z) = \frac{1}{2}\left(z + \frac{1}{z}\right).$$

Her $R > 1$ için

$$E_R := \left\{w = J^{-1}(z) : |z| = R\right\}$$

olsun. Aşikârdır ki, E_R, odak noktaları ± 1 olan ve $[-1,1]$ aralığını kapsayan bir elipstir. Bernstein S.N. [1] göstermiştir ki bu durumda her $R > 1$ ve $P_n \in \wp_n$ polinomunu için

$$\|P_n\|_{C(\overline{E}_R)} \le R^n \|P_n\|_{C(M_1)} \tag{2.1}$$

sağlanır. Yani, $[-1,1]$ aralığı E_R elipsine kadar genişlediği zaman $\|P_n\|_{C(M_1)}$ sayısı en fazla R^n defa artar. Eğer $R = 1 + \frac{1}{n}$ olarak seçilirse, görülür ki, $\|P_n\|_{C(M_1)}$ sayısı M_1 kümesi E_R elipsine kadar genişlediği zaman en fazla sabit (e-sayısı) kadar artıyor. Polinomların normları ile ilgili bu özelliğin yaklaşım teorisinde çok önem taşıdığı bilinmektedir.

$[-1,1]$ aralığından farklı kümeler için (2.1) şeklinde değerlendirmenin benzerleri Faber G. [2] (sonlu sayıda eğrilerle sınırlı kümeler için) ve Walsh J.L. [3, s.77-78](tümleyeni ∞ -u içeren keyfi kontinuum için) tarafından elde edilmiştir. Bununla birlikte, Walsh J.L [3, s.92-101], çeşitli kümeler için, sağ tarafta farklı yarı normlar ele alarak (2.1)-e benzeri değerlendirmeler elde etmiştir.

$G \subset \mathbb{C}$, $L := \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge olsun; $\Omega := extL$. $w = \Phi(z)$ ile Ω bölgesini Δ bölgesine konform ve yalınkat resmeden,

$$\Phi(\infty) = \infty, \quad \lim_{z\to\infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

koşullarını sağlayan dönüşüm gösterilsin. Her $R>1$ sayısı için $L_R := \{z : |\Phi(z)| = R\}$ olmak üzere $G_R := \operatorname{int} L_R$, $\Omega_R := extL_R$ olsun.

Giriş bölümünde vurgulandığı gibi, $G \subset \mathbb{C}$, tümleyeni basit bağlantılı bir bölge ve düzgün norm ele alınırsa, Bernstein-Walsh Lemmasına göre [1]:

$$|P_n(z)| \le |\Phi(z)|^n \|P_n\|_{C(\overline{G})} \ , \ z \in \Omega, \tag{2.2}$$

Özel halde, L_R seviye eğrisi üzerinde ve içinde

$$\|P_n\|_{C(\overline{G}_R)} \le R^n \|P_n\|_{C(\overline{G})} \tag{2.2'}$$

sağlandığı görülmektedir.

(2.2') eşitsizliğinin benzeri, L kapalı ve doğrultulabilir (ölçülebilir) bir Jordan eğrisi olmak üzere $\mathcal{L}_p(L)$ uzayında Hille E., Szegö G., Tamarkin J.D. [4] tarafından (1.4) şeklinde verilmiştir.

L eğrisi K-yarıkonform olması durumunda, (2.2') ve (1.4) değerlendirmelerinin benzerleri $A_p(h,G)$ uzayında Abdullayev F.G. [15] tarafından (1.5) şeklinde elde edilmiştir.

Stylianopoulos N. [22], doğrultulabilir (ölçülebilir) yarıkonform eğriyle sınırlı bölgede benzeri problemi incelemiş ve (1.6) gibi sonuç elde etmiştir. Onun sonucunda dikkat çeken iki husus vardır: a) (2.2) sağ tarafında $\|P_n\|_{C(\overline{G})}$ yerine $\|P_n\|_{A_2(G)}$ normu dahil edilmiş; b) sağ taraftaki ifadenin paydasında, modülün değerlendirileceği noktadan sınıra kadar uzaklık da ($d(z,L)$) iştirak ediyor. Bu ise, değerlendirmelerde, noktanın sınıra nazaran uzak veya yakın olmasının etkilerini ortaya koymaktadır.

Stylianopoulos N. [22] çalışmasından hareket ederek, Bernstein-Walsh eşitsizliği (2.2) ve onun $\mathcal{L}_p(L)$, $A_p(h,G)$ uzaylarındaki benzerleri olan (1.4) ve (1.5) eşitsizlikleri yeni ve farklı bir formatta aşağıdaki gibi problem halinde inceleme konusu olmaya başladı: Tümleyeni basit bağlantılı ve ∞-u içeren sonlu G Jordan bölgesi ve her $P_n \in \wp_n$ polinomu için

$$|P_n(z)| \le \mu_n \|P_n\|_Y |\Phi(z)|^{n+1}, \ z \in \Omega, \tag{2.6}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde bir $\mu_n := \mu_n(G,h,z) > 0$ sabitinin bulunması. Burada $\|P_n\|_Y$, $P_n(z)$ polinomunun $Y = \mathcal{L}_p(h,L)$ ve $Y = A_p(h,G)$ uzaylardaki yarınormudur. (2.6) şeklinde değerlendirmeler elde edilirken, $\mu_n := \mu_n(G,h,z)$ sabitinin gerek n, gerekse de $z \in \Omega$ parametrelerine göre açık şekilde ifade edilmesi ve G bölgesi ile $h(z)$ ağırlık fonksiyonun özelliklerine bağlı olarak bulunması çok önemlidir.

Kompleks düzlemin çeşitli özelliklere sahip Jordan bölgeleri için (2.6) şeklinde değerlendirmeler $Y = A_p(h,G)$ durumunda Abdullayev F.G., Aral N.D. [18], Abdullayev F.G., Aral N.D., Özkartepe N.P. [19], Abdullayev F.G., Gün C.D. [20] vs. tarafından incelenmiştir.

(1.9) problemi ile ilgili ilk sonuç, bilindiği kadarıyla, Jackson N. [23] tarafından 1933 yılında aşağıdaki gibi elde edilmiştir:

Her $p > 0$ ve $P_n \in \wp_n$ polinomu için

$$\max_{|z|=1} |P_n(z)| \le 2n^{1/p} \left(\int_0^{2\pi} |P_n(e^{it})|^p \, dt \right)^{1/p} \tag{2.7}$$

doğrudur. Daha sonra Szegö G., Zigmund A. [24] ve Suetin P.K. [7] (2.7) değerlendirmesini, çeşitli düzgünlük koşullarını sağlayan $L := \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu $G \subset \mathbb{C}$ bölgelerine taşıyarak aşağıdaki şekilde değerlendirmeler elde etmişler:

$Y = A_p(h,G)$ veya $Y = \mathcal{L}_p(h,L)$ olmak üzere her $z \in \overline{G}$ için

$$|P_n(z)| \le \eta_n \|P_n\|_Y, \tag{2.8}$$

sağlaniyor, burada $\eta_n := \eta_n(G,h) \to \infty,\ n \to \infty$, ve bu artış G bölgesi ile $h(z)$ ağırlık fonksiyonu özelliklerine bağlı olarak gerçekleşiyor.

Daha sonra, (2.8) tipindeki değerlendirmeler ilgili sonuçlar, $Y = \mathcal{L}_p(L)$ durumunda Mamedhanov D.İ. tarafından ölçülebilir Jordan eğrisi ile sınırlı bölgelerde elde edilmiştir. Nikol'skii S.M. [11] ($Y = \mathcal{L}_p(L)$ ve çok değişkenli polinomlar için), Pritsker I. [13] ($Y = A_p(G)$, $Y = \mathcal{L}_p(L)$ durumlarında tek ve çok değişkenli polinomlar için), Abdullayev F.

G. [15], [16], Abdullayev F.G., Değer U. [17], Abdullayev F.G., Aral D. [18] ($Y = A_p(h,G)$, durumunda tek değişkenli polinomlar için), Abdullayev F.G., Gün C.D., Özkartepe N.P. [25] ($Y = \mathcal{L}_p\left(h, L\right)$ durumunda tek değişkenli polinomlar için), Andrievskii V.V. [21] ($Y = \mathcal{L}_p\left(h, L\right)$ durumunda tek değişkenli polinomlar için) vb. (daha fazla referans için bkz: Milovanovic G.V. [26] ve adı geçen referanslardaki kaynaklar) tek ve çok değişkenli polinomlar için benzeri sonuçları elde etmişlerdir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bulgular ve tartışmalar kısmında kullanılacak bazı tanımlar ve temel teoremler verilecektir.

3.1. TEMEL TANIMLAR VE TEOREMLER

Tanım 3.1.1 [27]. $G \subset \mathbb{C}\left(\overline{\mathbb{C}}\right)$ kümesi verilsin

i) G bir açık kümedir,

ii) $\forall \varsigma_1, \varsigma_2 \in G$ için bu noktaları birleştiren, $\gamma \subset G$ olacak şekilde en az bir $\gamma := \gamma\left(\varsigma_1, \varsigma_2\right)$ yayı vardır,

bu iki koşul sağlanıyor ise G kümesine kompleks düzlemde bir *bölge* denir.

Kapalı ve bağlantılı bir kümeye *Kontinuum* adı verilir.

Tanım.3.1.2 [27]. f fonksiyonu bir z_0 noktasının bir komşuluğunda tanımlı olsun. Eğer,

$$\lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

varsa, f fonksiyonu z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir denir. Bu limit değeri $f'(z_0)$ ile gösterilir ve $f'(z_0)$ sayısına f 'nin z_0 noktasındaki türevi denir. Yani

$f'(z_0)$ değeri

$$f'(z_0) = \lim_{z \to z_0} \frac{f(z) - f(z_0)}{z - z_0}$$

olarak tanımlanır.

Tanım 3.1.3 [27]. f fonksiyonu tanımlı olduğu z_0 noktasının belli bir $B(z_0,r):=\{z:|z-z_0|<r\}$ komşuluğundaki tüm noktalarda türevlenebiliyorsa f fonksiyonuna z_0 noktasında *analitiktir* denir.

Eğer G 'de tanımlı f fonksiyonu, her bir $z\in G$ noktasında analitik ise f fonksiyonuna G 'de analitiktir denir. G 'de analitik tüm fonksiyonların kümesi $A(G)$ ile, G 'de analitik ve $\overline{G}$ 'da sürekli olan fonksiyonların kümesi $A(\overline{G})$ ile gösterilir.

3.2. KOMPLEKS DÜZLEMDE EĞRİ VE KOMPLEKS DEĞİŞKENLİ FONKSİYONLARIN İNTEGRALİ

Tanım 3.2.1 [28]. $a,\ b\in\mathbb{R}$ ve $a<b$ olsun. $z=z(t):[a,b]\to\mathbb{C}$ sürekli fonksiyonuna kompleks düzlemde bir *eğri* denir ve γ ile işaretlenir. $z(a)$ noktasına γ eğrisinin başlangıç noktası, $z(b)$ noktasına ise bitiş noktası denir.

i) $z(a)=z(b)$ ise γ eğrisine *kapalı eğri* denir.

ii) Her $t_1,t_2\in[a,b]$ için $t_1\neq t_2$ olduğunda $z(t_1)\neq z(t_2)$ ise γ eğrisine *Jordan yayı,* eğer sadece uç noktalarında $z(a)=z(b)$ ise γ eğrisine kapalı *Jordan eğrisi* denir.

iii) $\forall t\in[a,b]$ için $z'(t)$ var ve sürekli ise γ eğrisine diferansiyellenebilir eğri denir. Buna ek olarak $\forall t\in[a,b]$ için $z'(t)\neq 0$ ise γ eğrisine *düzgün eğri* denir.

iv) γ, sürekli bir eğri olup, $[a,b]$ aralığının sonlu tane noktası hariç diferansiyellenebiliyorsa, bu söz konusu noktalarda γ 'nın sağ ve sol türevleri var ise eşitse γ *parçalı diferansiyellenebilir* eğridir denir.

v) γ parçalı diferansiyellenebilir eğri olsun. Eğer γ eğrisinin diferansiyellenebildiği her $t\in[a,b]$ için $\gamma'(t)\neq 0$ ise γ, *düzgün* eğridir denir.

vi) Her $z_1, z_2 \in \gamma$ çifti için $s(z_1, z_2)$, z_1 ve z_2 noktalarını birleştiren, eğri üzerindeki en küçük yay uzunluğu olmak üzere $s(z_1, z_2) \le c|z_1 - z_2|$ eşitsizliği sağlanacak şekilde $c := c(\gamma) > 1$ sabiti varsa γ eğrisine bir *yarı düzgün* eğri denir.

Tanım 3.2.2. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere G bölgesinden alınan her bir kapalı γ eğrisi için $\operatorname{int}\gamma \subset G$ ise G bölgesine *basit bağlantılı bölge* denir.

Teorem 3.2.1. [28] (Jordan Eğri Teoremi) γ, $\overline{\mathbb{C}}$'da kapalı bir Jordan eğrisi olsun. Bu takdirde γ eğrisi kompleks düzlemi ortak sınırları γ olan biri sonlu, diğeri sonsuz iki ayrık bölgeye ayırır. Bu bölgelerin her biri basit bağlantılıdır.

$[a,b]$ aralığının $P = \{t_0, t_1, ..., t_n\}$ şeklindeki tüm parçalanışlarının ailesi $\mathbb{P}$ ile gösterilsin ve $\ell_n(P) := \sum_{k=1}^{n} |z(t_k) - z(t_{k-1})|$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty} \sup\{\ell_n(P) : P \in \mathbb{P}\} < \infty$$

ise γ eğrisine *ölçülebilir eğri* denir.

Teorem 3.2.2 [28]. Eğer γ parçalı düzgün eğri ise bu eğri ölçülebilirdir ve

$$mes(\gamma) = \int_a^b |z'(t)|\, dt$$

dır.

Tanım 3.2.3. γ eğrisinin doğal denklemi $z = z(s)$, $0 \le s \le \ell$, $\ell := mes\gamma$, olsun. Eğer, γ eğrisine her bir $z(s)$ noktasında çizilen teğetin OX ekseni ile pozitif yönde yaptığı açı $\theta(s) := \theta(z(s))$ s'nin sürekli fonksiyonu ise bu eğriye *sürekli değişken teğete sahip eğri* denir ve bu özelliğe sahip eğrilerin sınıfı C_θ ile gösterilir.

Tanım 3.2.4. G bölgesi L Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge olsun ve $\{z_j\}_{j=1}^{m}$ noktaları L eğrisi üzerinde yerleşsin. Eğer L eğrisi $\{z_j\}_{j=1}^{m}$ köşe noktalarında kesişen ($\overline{G}$'a göre) ve bu noktalarda $\lambda_j \pi,\ 0<\lambda_j<2$ dış açılarını oluşturan sonlu sayıda $L_j \in C_\theta,\ j=1,2,...,m$ yaylarının birleşiminden oluşuyorsa L eğrisine *parçalı düzgün (sürekli değişken teğete sahip) eğri* denir ve bu özelliğe sahip eğrilerin sınıfı $C_\theta(\lambda_1,...,\lambda_m)$ ile gösterilir.

Eğer $L \in C_\theta(\lambda_1,...,\lambda_m)$ ise $G \in C_\theta(\lambda_1,...,\lambda_m)$ yazılır. Eğer $m=1$ ise $G \in C_\theta(\lambda)$, $0<\lambda<2$, yazılır.

Tanım 3.2.5 [25]. $S \subset \mathbb{C}$ bir küme ve $f: S \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. $0<\alpha\le 1$ olmak üzere $\exists A>0$ öyle ki $\forall z_1, z_2 \in S$ için,

$$\left|f(z_1)-f(z_2)\right| \le A\left|z_1-z_2\right|^\alpha$$

sağlanıyorsa f fonksiyonuna α. *mertebeden Hölder koşulunu sağlıyor* denir ve $f \in H^\alpha(S)$ veya $f \in Lip\alpha$ ile gösterilir. $H^1(S) := H(S)$ olsun.

Aşağıdaki özellikler sağlanır:

1) $f \in H(S) \Rightarrow f \in C(S)$

2) $\beta \le \alpha$ olmak üzere $f \in H^\alpha(S) \Rightarrow f \in H^\beta(S)$ dir.

Yani $H^\alpha(S) \subseteq H^\beta(S)$ dır.

3) $f \in H(S), g \in H(S)$ olmak üzere,

$$f+g \in H(S),\quad f.g \in H(S),\ \frac{f}{g} \in H(S)\ (g \ne 0)$$

dir.

Tanım 3.2.6 [27]. $D \subset \mathbb{C}$ bir bölge olmak üzere $f: D \to \mathbb{C}$ sürekli dönüşümü verilsin. Eğer bir $z_0 \in D$ noktasından geçen ve aralarında α açısı yapan herhangi iki düzgün γ_1 ve γ_2 eğrilerinin $f(\gamma_1)$ ve $f(\gamma_2)$ resim eğrileri de

$w_0 := f(z_0)$ noktasında aralarında yön ve büyüklük bakımından α açısı yapıyorsa f fonksiyonuna $z_0 \in D$ noktasında *konform dönüşüm* denir.

Eğer $f : D \to \mathbb{C}$ birebir, örten ve D'nin her bir noktasında konform ise f fonksiyonuna D bölgesinde konform dönüşüm denir.

Aşağıda verilen teorem konform dönüşüm teorisinin en önemli teoremlerinden biri olan Riemann Dönüşüm Teoremi'nin bir sonucudur.

Teorem 3.2.3 [28]. $G \subset \mathbb{C},\ 0 \in G$, sınırında en az iki tane nokta içeren basit bağlantılı bir bölge olsun. Bu durumda G bölgesini $B(0,1) := \{w : |w| < 1\}$ dairesine resmeden ve $\varphi(0) = 0,\ \varphi'(0) > 0$ koşullarını sağlayan bir tek $w = \varphi(z)$ konform dönüşümü vardır.

Teorem 3.2.4. $\Omega := \overline{\mathbb{C}} \setminus \overline{G}$ ve $\Delta := \{w : |w| > 1\}$ olmak üzere

$$\Phi(\infty) = \infty \quad \text{ve} \quad \lim_{z \to \infty} \frac{\Phi(z)}{z} > 0$$

olacak şekilde bir tek $\Phi : \Omega \to \Delta$ konform dönüşümü vardır.

Tanım 3.2.7. $0 < r < 1$ ve $R > 1$ olsun. Bu durumda,

$$L_r := \{z \in G : |\varphi(z)| = r < 1\},\ L_R := \{z \in \Omega : |\Phi(z)| = R > 1\},$$

eğrilerine sırasıyla *iç* ve *dış seviye eğrileri* denir. Açık olarak $L_1 \equiv L$ dir.

Tanım 3.2.8. γ, denklemi $z = z(t) : [a,b] \to \mathbb{C}$ olan düzgün eğri ve f fonksiyonu γ eğrisi üzerinde sürekli bir fonksiyon ise,

$$\int_\gamma f(z)dz := \int_a^b f(z(t))\, z'(t)\, dt,$$

integraline f nin γ eğrisi üzerindeki *integrali* denir.

Teorem 3.2.5 [30]. (**Cauchy İntegral Formülü**) $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $f \in A(G)$ olsun. γ, $\overline{int\ \gamma} \subset G$ koşulunu sağlayan ölçülebilir Jordan eğrisi ise her $z \in int\,\gamma$ için

$$f(z) = \frac{1}{2\pi i}\int_{\gamma} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi$$

dır.

Teorem 3.2.6 [31]. (Sonsuz Bölgeler için Cauchy İntegral Formülü) G bir bölge, $L := \partial G$, negatif yönlü, kapalı, ölçülebilir bir Jordan eğrisi olsun. $f(z) \in A\left(\overline{\Omega} \setminus \mathrm{G}\right)$ ise

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{L} \frac{f(\xi)}{\xi - z} d\xi = f(\infty) - f(z) \ , \ z \in \overline{\Omega} \setminus \overline{G}$$

dır.

Teorem 3.2.7 [30]. (Maksimum-Modulus Prensibi) $G \subset \mathbb{C}$ Jordan eğrisi ile sınırlı, sonlu bir bölge olsun. Eğer, $f \in A\left(\overline{G}\right)$ ve f sabitten farklı ise $|f|$ maksimum değerini ∂G 'de alır.

$G \subset \mathbb{C}$, $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı sonlu bir bölge; $h(z) \geq 0$, G 'de tanımlı integrallenebilir bir fonksiyon olmak üzere

$$0 < \iint_{G} h(z)\, d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlarsa h'a, G üzerinde tanımlı bir *ağırlık fonksiyonu* denir.

Tanım 3.2.9. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $h(z)$ G 'de tanımlı bir ağırlık fonksiyonu ve $p > 0$ olsun. G bölgesinde tanımlı, ölçülebilir ve

$$\iint_{G} h(z) \left| f(z) \right|^p d\sigma_z < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı $L_p(h, G)$ ile gösterilir. Eğer $h(z) \equiv 1$ ise $L_p(1, G) \equiv L_p(G)$ dir.

Tanım 3.2.10. $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge ve $h(z)$ ise G 'de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. $p > 0$ olmak üzere G 'de analitik ve

$$\| f \|_{A_p(h,G)} = \left(\iint_G h(z) \left| f(z) \right|^p d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı $A_p(h,G)$ ile gösterilir. Başka bir ifadeyle

$$A_p(h,G) := \left\{ f : f \in A(G) \cap L_p(h,G) \right\}.$$

Özel halde $h(z) \equiv 1$ alınırsa, $A_p(G) := A_p(1,G)$ olarak gösterilir.

$\| f \|_{A_p(h,G)}$, $p \geq 1$ için norm ve $0 < p < 1$ için yarı normdur.

Teorem 3.2.8 [32]. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge olsun. $p \geq 1$, $\dfrac{1}{p} + \dfrac{1}{q} = 1$ olmak üzere $f \in L_p(G)$, $g \in L_q(G)$ ise,

$$\left| \iint_G f(z) g(z) d\sigma_z \right| \leq \left(\iint_G | f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \left(\iint_G |g(z)|^q \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{q}},$$

$f, g \in L_p(G)$ ise

$$\left(\iint_G | f(z) + g(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} \leq \left(\iint_G | f(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}} + \left(\iint_G |g(z)|^p \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{p}}$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Bu eşitsizliklere, sırasıyla *Hölder Eşitsizliği* ve *Minkowski Eşitsizliği* adı verilir.

Özel halde $p = q = 2$ durumunda

$$\left| \iint_G f(z) g(z) d\sigma_z \right| \leq \left(\iint_G | f(z)|^2 \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}} \left(\iint_G |g(z)|^2 \, d\sigma_z \right)^{\frac{1}{2}}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu eşitsizliğe *Schwarz Eşitsizliği* denir.

Tanım 3.2.11. $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $L := \partial G$ kapalı, ölçülebilir eğri ve $h(z)$, G'de tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. $p > 0$ olmak üzere L üzerinde integrallenebilir ve

$$\int_L h(z) |f(z)|^p |dz| < \infty$$

koşulunu sağlayan f fonksiyonlarının sınıfı $\mathcal{L}_p(h, L)$ ile gösterilir. Özel halde $h(z) \equiv 1$ alınırsa, $\mathcal{L}_p(1, L) \equiv \mathcal{L}_p(L)$ olarak gösterilir. $p \geq 1$ olmak üzere $\mathcal{L}_p(h, L)$ uzayında norm

$$\| f \|_{\mathcal{L}_p(h,L)} := \left(\int_L h(z) |f(z)|^p |dz| \right)^{\frac{1}{p}} < \infty$$

biçiminde tanımlanır. Bu durumda da $0 < p < 1$ için $\| f \|_{\mathcal{L}_p(h,L)}$, yarı normdur.

Tanım 3.2.12. $G \subset \mathbb{C}$ bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon ve $p \geq 1$ olsun.

i) $f \in ACL(G)$, burada $ACL(G)$ ile G bölgesinde mutlak sürekli fonksiyonların sınıfı gösterilir.

ii) $\forall B \Subset G$ kompakt kümesi için $f_x,\ f_y \in L_p(B)$

koşulları sağlanıyorsa f fonksiyonuna G bölgesinde $L_p -$ *türevlenebilirdir* denir.

Teorem 3.2.9 [33]. (Green Formülü) $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir bölge, $f : G \to \mathbb{C}$, $L_1 -$türevlenebilir bir fonksiyon ise, her $D \subset G$ sınırı ölçülebilir Jordan bölgesi olan bölge için

$$\int_{\partial D} f(\xi)\, d\xi = 2i \iint_D f_{\bar{\xi}}(\xi)\, d\sigma_\xi$$

dır.

3.3. YARIKONFORM DÖNÜŞÜM VE EĞRİLER

Tanım 3.3.1 [34]. $G, H \subset \mathbb{C}$ herhangi iki bölge; $f : G \to H$ ise $\forall z \in G$ için $J_f(z) := |f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2 > 0$ koşulunu sağlayan ve C^1 sınıfından olan bir homeomorfizm olsun. Eğer,

$$\sup_{z\in G} \frac{|f_z(z)|^2 + |f_{\bar{z}}(z)|^2}{|f_z(z)|^2 - |f_{\bar{z}}(z)|^2} \le K < \infty \tag{3.1}$$

ise f fonksiyonuna G bölgesi üzerinde tanımlı bir $K-$*yarıkonform dönüşüm*, $K \ge 1$ sayısına da f dönüşümünün *yarıkonformluk katsayısı* denir.

Tanımdan görülür ki f fonksiyonu G bölgesinde $K-$yarıkonform dönüşüm ve $k := \frac{K-1}{K+1}$ ise her $z \in G$ için $\left|\frac{f_{\bar{z}}(z)}{f_z(z)}\right| \le k < 1$ dir.

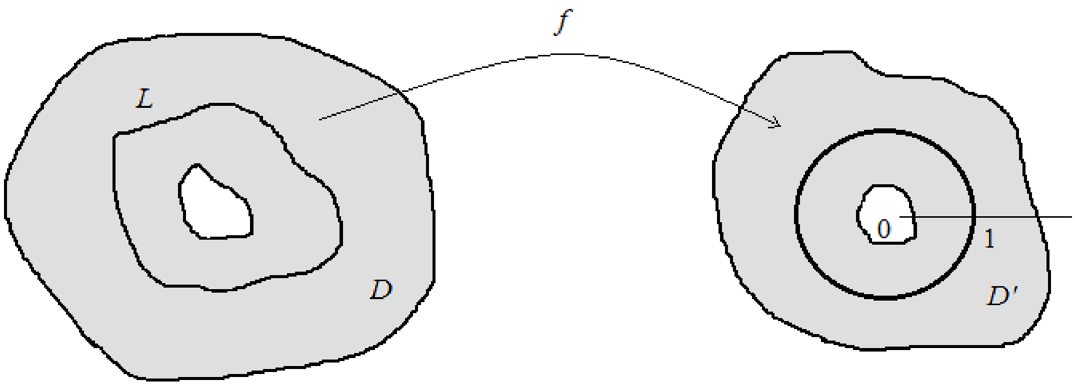
Yarıkonform dönüşümün bazı özellikleri aşağıdaki gibidir [31].

i) 1-yarıkonform dönüşüm konformdur.

ii) f_1, K_1-yarıkonform ve f_2, K_2-yarıkonform dönüşümleri verilsin. $f_1 \circ f_2$ bileşke dönüşümü $K_1 \cdot K_2-$yarıkonformdur.

iii) f dönüşümü $K-$yarıkonform ise f^{-1}de $K-$yarıkonformdur.

Tanım 3.3.2 [34], [35], [36]. Kapalı bir L Jordan eğrisi (yayı) ve $L \subset D$ olacak şekilde $D \subset \mathbb{C}$ bölgesi verisin. $f : D \to D'$, $K-$yarıkonform dönüşümü olmak üzere $f(L)$ çember (doğru parçası) ise L eğrisine (yayına) $K-$*yarıkonform eğri* ($K-$*yarıkonform yay*) denir. (bkn. Şekil-1)



Şekil-1

$F(L)$, L ’yi çembere (aralığa) resmeden $f : D \to D'$ tüm homeomorfizmaların kümesi ve

$$K_L := \inf_{f \in F(L)} \frac{|f_z| + |f_{\bar{z}}|}{|f_z| - |f_{\bar{z}}|}$$

olsun.

Eğer $K_L < \infty$ ise, L eğrisine *yarıkonform eğri* denir. Eğer L, $K-$ yarıkonform eğri ise

$$K_L \le K \tag{3.2}$$

dır.

L eğrisi herhangi bir $K \ge 1$ sayısı için K *-yarıkonform eğri* ise, o halde L ye *yarıkonform eğri* denir.

Tanım 3.3.2’de $D = \overline{\mathbb{C}}$ veya $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ olmak üzere iki durum söz konusudur:

i) $D = \overline{\mathbb{C}}$ durumunda Tanım 3.3.2’ye $K-$yarıkonform eğrinin ‘‘*global*’’ *tanımı* denir ve yarıkonformluk katsayısı (3.1) yardımıyla hesaplanır.

ii) $D \subset \overline{\mathbb{C}}$ durumunda Tanım 3.3.2’ye $K-$yarıkonform eğrinin ‘‘*lokal*’’ *tanımı* denir ve yarıkonformluk katsayısı (3.2) yardımıyla hesaplanır.

Teorem 3.3.1 [33]. L bir Jordan eğrisi, $z_1, z_2 \in L$, $z_1 \ne z_2$ keyfi noktalar ve $\ell(z_1, z_2) \subset L$, z_1 ile z_2 noktasını birleştiren küçük çaplı yay olsun. L eğrisinin yarıkonform eğri olması için gerek ve yeter koşul

$$\sup_{\substack{z_1, z_2 \in L, \\ z_3 \in \ell(z_1, z_2)}} \frac{|z_1 - z_3| + |z_2 - z_3|}{|z_1 - z_2|} < \infty$$

olmasıdır.

Uyarı 3.3.1. Yarıkonform eğriler sıfır açı içermez.

Uyarı 3.3.2. Yarıkonform eğriler lokal ölçülebilir olmayabilir.

Sonuç 3.3.1 [14] . L analitik yay veya eğri ise $1-$yarıkonformdur.

Sonuç 3.3.2. $G \in C_\theta$ ise $\partial G := L$ eğrisi $\forall \varepsilon > 0$ için $(1+\varepsilon)-$ yarıkonformdur.

Tanım 3.3.3 [34]. $L \subset \mathbb{C}$ bir Jordan eğrisi; $y : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ dönüşümü altında $y(intL) = extL,\ \ y(extL) = intL$ ve $\forall z \in L$ için $y(z) = z$ olsun. Eğer $\bar{y} : \mathbb{C} \to \mathbb{C}$ yarıkonform ise y dönüşümüne L eğrisine göre *yarıkonform yansıma* denir.

Teorem 3.3.3 [34]. $L \subset \mathbb{C}$ bir Jordan eğrisi olsun. L eğrisine göre yarıkonform yansımanın olması için gerek ve yeter şart L eğrisinin yarıkonform eğri olmasıdır.

Uyarı 3.3.3."$a \prec b$" ve"$a \asymp b$" sembolleriyle c, c_1, c_2 pozitif sabitler olmak üzere sırasıyla $a \le c.b$ ve $c_1.a \le b \le c_2.a$ gösterilir. Burada c, c_1, c_2 sabitleri a ve b sayılarından bağımsızdır.

Teorem 3.3.4 [34]. L eğrisi K-yarıkonform eğri olsun. O zaman L eğrisinin belli bir komşuluğunda sınırlı kısmi türevlere sahip olan bir yarıkonform yansıma vardır.

Özel olarak, L eğrisinin belli bir komşuluğundaki her bir z için

$$|y(z) - z'| \asymp |z - z'| \ ,\ z' \in L \tag{3.3}$$

sağlanır.

Sonuç 3.3.3 [34]. L eğrisi K-yarıkonform eğri, $\infty \notin L$, $G = int\,L$ ve $\Omega = ext\,L$ olsun. Bu durumda, L'ye göre $c_1(K)-$yarıkonform $y(z)$ yansıması vardır ve bu yansıma;

i) $a \in G$ sabit bir nokta öyle ki, $a = y(\infty)$ olmak üzere; $y(z)$ yansıması $\overline{\mathbb{C}} \setminus (L \cup \{a\})$ bölgesinde sürekli türevlenebilirdir.

ii) Yeterince küçük $\delta > 0$ sayısı ve $B(a,\delta)$ için $B(a,\delta) := y(B(a,\delta))$ olsun. Bu durumda,

$$\overline{\mathbb{C}}_\delta := \overline{\mathbb{C}} \setminus \left(\overline{B(a,\delta)} \cup \overline{B(a,\delta)} \right),$$

bölgesinde (3.3) sağlanır,

iii) Her $z \in \overline{\mathbb{C}} \setminus L$ için $|y_z| \le c(K,\delta)$, $c(K,\delta)^{-1} \le |y_{\bar{z}}| \le c(K,\delta)$ ve $z \notin \overline{\mathbb{C}} \setminus L$ için

$$|y_z| \prec \begin{cases} |y(z)|^2, & z \in B(a,\delta) \\ |z-a|^{-2}, & z \in B(a,\delta) \end{cases}$$

ve

$$|y_{\bar{z}}| \approx \begin{cases} |y(z)|^2, & z \in B(a,\delta) \\ |z-a|^{-2}, & z \in B(a,\delta) \end{cases}$$

özelliklerine sahiptir.

Tanım 3.3.4. Eğer, her $\psi : \{w : |w| < 1\} \to G$ konform ve yalınkat dönüşümü $\overline{\mathbb{C}} \to \overline{\mathbb{C}}$'a K-yarıkonform $\left(K = \dfrac{1+\kappa}{1-\kappa} \right)$ dönüşümüne kadar genişletilebilirse G bölgesine $\kappa-$yarıdaire $(0 \le \kappa < 1)$ denir.

Eğer, herhangi bir $0 \le \kappa < 1$ için G bölgesi (L eğrisi) $\kappa-$yarıdaire ($\kappa-$ yarıçember) ise G bölgesine (L eğrisine) yarıdaire (yarıçember) denir.

Bu sınıf $Q(\kappa)$, $(0 \le \kappa < 1)$ ile gösterilecek ve eğer $G \in Q(\kappa)$ ise $L := \partial G \in Q(\kappa)$, $(0 \le \kappa < 1)$ yazılır. Eğer herhangi bir $0 \le \kappa < 1$ için $G \in Q(\kappa)$ (

$L \in Q(\kappa))$ ise G bölgesi (L eğrisi) Q sınıfındandır denir ve $G \in Q$ ($L \in Q$) şeklinde gösterilir.

Tanım 3.3.5. Eğer $G \in Q(\kappa)$, $(0 \le \kappa < 1)$ ve $L := \partial G$ eğrisi ölçülebilir ise G bölgesi $Q(\kappa)$, $(0 \le \kappa < 1)$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.3.6 [14]. ℓ bir Jordan yayı olsun. Eğer ℓ yayı $\exists\, 0 \le \kappa < 1$ için bir $\kappa-$yarıçemberinin bir parçası ise ℓ yayına yarıkonform yay denir.

$R > 1$ için $L^* := y(L_R)$, $G^* := intL^*$, $\Omega^* := extL^*$ olsun. $\Phi_R : \Omega^* \to \Delta$ konform bir dönüşüm olsun ($\Phi_R(\infty) = \infty$, $\lim\limits_{z\to\infty} \dfrac{\Phi(z)}{z} > 0$). Bu durumda $|z-t| = d(z,L)$ olacak şekilde $z \in L^*$ ve $t \in L$ için

$$d(z,L) \asymp d(t,L_R) \asymp d(z,L_R^*)$$

$$|\Phi_R(z)| \le |\Phi_R(t)| \le 1 + c(R-1) \tag{3.4}$$

dir. Burada $L_R^* := \{\zeta : |\Phi(\zeta)| = R,\ R > 1\}$ ve c, R 'den bağımsız bir sabittir .

Lemma 3.3.1 [37]. L, $K-$yarıkonform eğri $z_1 \in L$ ve $z_2, z_3 \in G \cap \{z : |z - z_1| \le\ cd(z_1, L_{R_0})\}$ $w_j = F(z_j),\ j = 1,2,3$

$\left(z_2, z_3 \in \Omega \cap \{z : |z - z_1| \le cd(z_1, L_{r_0})\},\ w_j = \Phi(z_j),\quad j = 1,2,3\right)$ olsun.

Eğer $|z_1 - z_2| \prec |z_1 - z_3|$ ise

i) $|w_1 - w_2| \prec |w_1 - w_3|$,

ii) $\left|\dfrac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^{-2}} \prec \left|\dfrac{z_1 - z_3}{z_1 - z_2}\right| \prec \left|\dfrac{w_1 - w_3}{w_1 - w_2}\right|^{K^2}$,

sağlanır , burada $R_0 > 1$ tespit edilmiştir ve $r_0 = R_0^{-1}$ dir.

Sonuç 3.3.4. Lemma 3.3.1'de $z_3 \in L_{r_0}\left(z_3 \in L_{R_0}\right)$ ise

$$|w_1 - w_2|^{K^2} \prec |z_1 - z_2| \prec |w_1 - w_2|^{K^{-2}}$$

dir.

Lemma 3.3.2 [34]. G bölgesi $\exists\ 0 \le \kappa < 1$ için bir $\kappa-$yarıdaire olsun. Bu durumda, $\forall w_1, w_2 \in \bar{\Omega}$ için

$$\left|\Psi(w_1) - \Psi(w_2)\right| \succ |w_1 - w_2|^{1+\kappa}$$

dir.

Sonuç 3.3.5 [34]. (3.4)'ün sol tarafı keyfi kontinuum için

$$d(z_1, L) \succ (R-1)^2$$

biçimindedir.

G kümesi $L = \partial G$ Jordan eğrisi ile sınırlı bir bölge, $\left\{z_j\right\}_{j=1}^{m} \in L$ olsun. Tespit edilmiş bir $R_0 > 1$ sayısı için genelleşmiş Jacobi ağırlık fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlıdır:

$$h(z) := \prod_{j=1}^{m} \left|z - z_j\right|^{\gamma_j}, \quad z \in G_{R_0} \tag{3.5}$$

burada her $j = 1, 2, ..., m$ için $\gamma_j > -1$ dir.

Lemma 3.3.3 [38]. L bir $K-$yarıkonform eğri, $h(z)$, (3.5)'teki gibi tanımlı ağırlık fonksiyonu ve $R = 1 + \dfrac{c}{n}$ olsun. Bu durumda, $\forall \varepsilon \in (0,1)$ için bir $L_{1+\varepsilon(R-1)}$ seviye eğrisi ve her $n \in \mathbb{N}$ için $P_n(z) \in \wp_n$ polinomu vardır öyle ki aşağıdaki sağlanır:

$$\|P_n\|_{\mathcal{L}_p\left(\frac{h}{|\Phi'|}, L_{1+\varepsilon(R-1)}\right)} \prec n^{\frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h,G)}, \; p > 0. \tag{3.6}$$

İspat: Genelliği kaybekmesizin $\varepsilon = \frac{1}{2}$ alalım. Böylece, $R_1 := 1 + \frac{R-1}{2}$ olur.

$$A_n := \int_{L_{R_1}} h(z)|P_n(z)|^p \frac{|dz|}{|\Phi'(z)|}$$

$$= \int_{|w|=R_1} \prod_{j=1}^{m} |\Psi(w) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j} \left| P_n(\Psi(w))(\Psi'(w))^{\frac{2}{p}} \right|^p |dw|$$

$$= \int_{|w|=R_1} |f_{n,p}(w)|^p |dw|, \tag{3.7}$$

burada

$$f_{n,p}(w) := \prod_{j=1}^{m} (\Psi(w) - \Psi(w_j))^{\frac{\gamma_j}{p}} P_n(\Psi(w))(\Psi'(w))^{\frac{2}{p}}, \; w \in \Delta.$$

Şimdi, $|t| = R_1$ çemberi n eşit parçaya bölünsün ve her parça δ_n ile işaret edilsin. $mes\,\delta_n = \frac{2\pi R_1}{n}$ olur. Daha sonra, orta değer teoremini kullanılarak A_n integrali aşağıdaki şekilde değerlendirilir:

$$A_n = \int_{|t|=R_1} |f_{n,p}(w)|^p |dw| = \sum_{k=1}^{n} \int_{\delta_k} |f_{n,p}(w)|^p |dw|$$

$$= \sum_{k=1}^{n} \left| f_{n,p}\left(t_k'\right) \right|^p mes\delta_k, \; t_k' \in \delta_k.$$

Diğer yandan, ortalama değerlendirme ile:

$$\left| f_{n,p}\left(t_k'\right) \right|^p \leq \frac{1}{\pi\left(\left|t_k'\right| - 1\right)^2} \iint_{\left|\xi - t_k'\right| < \left|t_k'\right| - 1} |f_{n,p}(\xi)|^p d\sigma_\xi,$$

böylece

$$A_n \preceq \sum_{k=1}^{n} \frac{mes\,\delta_k}{\pi\left(\left|t_k'\right| - 1\right)^2} \iint_{\left|w - t_k'\right| < \left|t_k'\right| - 1} |f_{n,p}(w)|^p d\sigma_w, \quad t_k' \in \delta_k.$$

elde edilir.

En fazla iki noktada kesişen ve merkezleri t_k' olan diskler dikkate alınarak:

$$
\begin{aligned}
A_n &\preceq \frac{mes\delta_1}{\left(\left|t_1'\right|-1\right)^2} \iint\limits_{1<|w|<R} |f_{n,p}(w)|^p d\sigma_w \preceq n \cdot \iint\limits_{1<|w|<R} |f_{n,p}(w)|^p d\sigma_w \\
&= n \cdot \iint\limits_{1<|w|<R} \prod_{j=1}^{m} |\Psi(w)-\Psi(w_j)|^{\gamma_j} |P_n(\Psi(w))|^p |\Psi'(w)|^2 d\sigma_w \\
&\leq n \cdot \iint\limits_{1<|w|<R} \prod_{j=1}^{m} |\Psi(w)-\Psi(w_j)|^{\gamma_j} |P_n(\Psi(w))|^p |\Psi'(w)|^2 d\sigma_w \\
&\preceq n \cdot \iint_{G_R\setminus G} h(z)|P_n(z)|^p d\sigma_z .
\end{aligned}
$$

Lemma 3.3.16.' ya göre (bknz. s.27):

$$
A_n \preceq n \cdot \iint_{G_R\setminus G} h(z)|P_n(z)|^p d\sigma_z \preceq n \cdot \|P_n\|^p_{A_p(h,G)} . \tag{3.8}
$$

elde edilir.

(3.7)-(3.8) birleştirilirse ispat tamamlanır.

Lemma 3.3.4 [14]. L yarıkonform bir eğri olsun. Bu durumda her bir $P_n(z) \in \wp_n$ polinomu, $n \in \mathbb{N}$ ve $R = 1 + \frac{c}{n}$ için

$$
\|P_n\|_{\mathcal{C}(\bar{G})} \prec \|P_n\|_{\mathcal{C}(\bar{G}^*)}
$$

sağlanır .

Lemma 3.3.5 [16]. $p > 0$ olmak üzere f fonksiyonu $|z| > 1$ de analitik ve sonsuzlukta en fazla n'inci dereceden kutup yerine sahip olsun. O halde $1 < R_1 < R_2$ koşulunu sağlayan R_1 ve R_2 için

$$
\|f\|_{A_p(R_1<|z|<R_2)} \leq \left(2\frac{R_2-R_1}{R_1-1}\right)^{1/p} R_2^{n+\frac{2}{p}} \|f\|_{A_p(1<|z|<R_1)}
$$

elde edilir.

İspat: Hardy Konvekslik teoremine göre [40], $R_1 \leq \rho < R_2, 1 \leq s < R_1$ koşullarını sağlayan her ρ ve s için,

$$
\int\limits_{|z|=\rho} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \leq \int\limits_{|z|=R_1} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \tag{3.9}
$$

ve

$$\int_{|z|=R_1} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \le \int_{|z|=s} \left|\frac{f(z)}{z^{n+1/p}}\right|^p |dz| \tag{3.10}$$

yazılır.

(3.7) ρ'ya göre R_1'den R_2'ye ve (3.8) de s'ye göre 1'den R_1'e integrallenirse,

$$\iint_{R_1<|z|<R_2} |f(z)|^p \, d\sigma_z \le \frac{R_2^{np+2} - R_1^{np+2}}{R_1^{np+2} - 1} \iint_{1<|z|<R_1} |f(z)|^p \, d\sigma_z \tag{3.11}$$

elde edilir.

$$S := \frac{R_2^{np+2} - R_1^{np+2}}{R_1^{np+2} - 1} \tag{3.12}$$

seçelim.

Kesrin pay ve paydasına Lagrange teoremi [41] uygulanırsa, bazı $r_1,\ 1 < r_1 < R_1$ ve $r_2,\ R_1 < r_2 < R_2$ için,

$$S = \frac{(np+2)\, r_2^{np+2} (R_2 - R_1)}{(np+2)\, r_1^{np+2} (R_1 - 1)}$$

elde edilir. Buradan, $\dfrac{1}{r_1} < 1$ ve $r_2 < R_2$ olmasından,

$$S < \frac{R_2 - R_1}{R_1 - 1} R_2^{np+1} \tag{3.13}$$

dir. (3.12) ve (3.13) kullanılarak

$$\|f\|^p_{A_p(R_1<|z|<R_2)} = \iint_{R_1<|z|<R_2} |f(z)|^p \, d\sigma_z \le S \iint_{1<|z|<R_1} |f(z)|^p \, d\sigma_z = S \|f\|^p_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

$$\left(\|f\|^p_{A_p(R_1<|z|<R_2)}\right)^{1/p} \le \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 - 1}\right)^{1/p} \left(R_2^{np+1}\right)^{1/p} \left(\iint_{1<|z|<R_1} |f(z)|^p \, d\sigma_z\right)^{1/p}$$

$$\|f\|^p_{A_p(R_1<|z|<R_2)} \le \left(\frac{R_2 - R_1}{R_1 - 1}\right)^{1/p} R_2^{n+1/p} \|f\|_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

Lemma 3.3.6 [16]. L bir K-yarıkonform eğri, $h(z)$ ise (3.5) deki gibi tanımlanmış olsun. O halde, her $R>1$, $n=1,2,...$ ve keyfi $P_n(z)\in\wp_n$ için

$$\|P_n\|_{A_p\left(h,G_{1+c(R-1)}\right)} \le c_1 R^{n+\frac{1}{p}} \|P_n\|_{A_p(h,G)} \ , \ p>0 \tag{3.14}$$

dir. Burada keyfi c bir sabit, keyfi $c_1=c_1(L,\mathrm{c})>0$ ise n ve R den bağımsız sabittir.

İspat: İspat birkaç adımda verilecektir. İlk olarak bazı $c>0$ için

$$\|P_n\|_{A_p(h,G_R\setminus G)} \prec \left[1+c(R-1)\right]^{n+\frac{2}{p}} \|P_n\|_{A_p\left(h,G\setminus G^*\right)} \tag{3.15}$$

değerlendirilmesi gösterilecekitr. Gösterelim ki keyfi $\rho_1<\rho_2$ olacak şekilde keyfi ρ_1,ρ_2 sayıları öyle seçilebilinir ki

$$G^*_{\rho_1}\subset G \tag{3.16}$$

$$G_R\subset G^*_{\rho_2} \tag{3.17}$$

$$\rho_1 \asymp R-1 \tag{3.18}$$

$$\rho_2 \asymp R-1 \tag{3.19}$$

sağlansın. Gerçekten, $z\in L^*$, $\tilde{z}=y(z)$ olmak üzere, ρ_1,ρ_2 (3.17) ve (3.18)'i sağlayan keyfi sayılar olsun. Sırasıyla

$$d\left(z,L^*_{\rho_1}\right)=|z-z_1|;\ \ d(z,L)=|z-z_2| \text{ ve } d\left(z,L^*_{\rho_2}\right)=|z-z_3|$$

eşitliklerini verecek $z_1\in L^*_{\rho_1}$, $z_2\in L$ ve $z_3\in L^*_{\rho_2}$ noktaları seçilsin. Her $z\in L^*$ ve $t\in L$ için $|z-t|=d(z,L_R)$ olmak üzere

$$d(z,L)\asymp d(t,L_R)\asymp d\left(z,L^*_R\right)$$

bağıntısından,

$$c_3 d(z_2,L_R)\le d(z,L)\le c_4 d\left(z_2,L^*_R\right) \tag{3.20}$$

olacak şekilde z ve R den bağımsız c_3 ve c_4 sayıları vardır.

L^* bir yarıçember olduğu için Φ_R fonksiyonuna Lemma 3.3.1 uygulanarak

$$\left|\frac{z-z_2}{z-z_1}\right| \geq c_5 \left|\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)}{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_1)}\right|^{\varepsilon_1} \geq c_6 \left(\frac{|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)|}{\rho_1-1}\right)^{\varepsilon_1}$$

elde edilir. Buradan

$$|z-z_1| \geq c_6^{-1}\left(\frac{\rho_1-1}{|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)|}\right)^{\varepsilon_1}|z-z_2| \tag{3.21}$$

bulunur.

$y_R(z)$ için D-özelliğine [39] sahip olduğundan,

$$|z-z_2| \geq c_3 d(z_2, L_R) \geq c_7 |\tilde{z}-z_2|$$

elde edilir ve Lemma 3.3.1.' e göre

$$|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)| \geq c_8 |\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)| \geq c_8(R-1)$$

bulunur. (3.21) ' den

$$|z-z_1| \leq c_6^{-1}\left(\frac{\rho_1-1}{c_8(R-1)}\right)^{\varepsilon_1}|z-z_2|$$

elde edilir. Böylece $c_9 = \frac{1}{2}c_8.c_6^{-\varepsilon_1}$ olmak üzere, (3.16) ve (3.18)'e uygun olarak,

$$\rho_1 = 1 + c_9(R-1) \tag{3.22}$$

yazılabilir.

Şimdi ρ_2 ' yi tanımlayalım. Φ_R ' ye Lemma 3.3.1. uygulanmasıyla

$$\left|\frac{z-\tilde{z}}{z-z_3}\right| \leq c_{10}\left|\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})}{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_3)}\right|^{c}$$

elde edilir. $|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_3)| \succeq \rho_2-1$ olduğundan,

$$|z-z_3| \geq c_{11}\left(\frac{\rho_2-1}{|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})|}\right)^{c}|z-\tilde{z}| \tag{3.23}$$

elde edilir.

$$|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})| \leq c_{12}|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)|$$

olmak üzere,

$$\left|\Phi_R(z)-\Phi_R(\tilde{z})\right| \leq \left|\Phi_R(z)-\Phi_R(z_2)\right| + \left|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)\right|$$
$$\leq c_{12}+1\left|\Phi_R(\tilde{z})-\Phi_R(z_2)\right| \leq c_{13}(R-1)$$

bulunur ve (3.21) ‘den

$$|z-z_3| \geq c_{11}\left(\frac{\rho_2-1}{c_{13}(R-1)}\right)^c |z-\tilde{z}|$$

elde edilir. $c_{14}=c_8.c_6^{-\varepsilon_1}+c_{13}.c_{11}^{c^{-1}}$ olmak üzere,

$$\rho_2 = 1 + c_{14}(R-1) \tag{3.24}$$

seçerek (3.19) ve (3.21) koşulunu sağlayan ρ_2 elde edilmiş olur.

Şimdi (3.15) gösterilecektir. Bunun için $h(z)$ ağırlık fonksiyonunun singüler noktalarına göre aşağıdaki şekilde Blashke fonksiyonunu oluşturulsun.

$$B_R(z)=\prod_{i=1}^m B_R^i(z) := \prod_{i=1}^m \frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{1-\overline{\Phi_R(z_i)}\Phi_R(z)} \quad , \quad z\in\Omega^* \tag{3.25}$$

$B_R(z_i)=0$ ve $|B_R(z)|\equiv 1,\ z\in L^*$ olduğu kolayca görülür.

Her $p>0$ ve $R>1$ için

$$f_R(w) := h_0(\Psi_R(w))\prod_{i=1}^m \left[\frac{\Psi_R(w)-\Psi_R(w_i)}{wB_R^i(\Psi_R(w))}\right]^{\frac{\gamma_i}{p}} P_n(\Psi_R(w))\left[\Psi_R'(w)\right]^{\frac{2}{p}} \ ,\ w=\Phi_R(z)$$

fonksiyonu tanımlansın. f_R fonksiyonu Δ de analitik ve $w=\infty$ da en fazla n. mertebeden kutup yerine sahiptir. Lemma 3.3.8’e göre

$$\|f_R\|_{A_p(\rho_1<|w|<\rho_2)} \leq \left(2\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\right)^{1/p} \rho_2^{\,n+\frac{2}{p}} \|f_R\|_{A_p(1<|w|<\rho_1)},$$

veya

$$\iint_{G_R\setminus G} h_0(z)\prod_{i=1}^m \left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i} |P_n(z)|^p\, d\sigma_z$$
$$\leq \iint_{G^*_{\rho_2}\setminus G^*_{\rho_1}} h_0(z)\prod_{i=1}^m \left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i} |P_n(z)|^p\, d\sigma_z$$

$$\leq 2\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\rho_2^{pn+2}\iint\limits_{G^*_{\rho_1}\setminus G^*} h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

$$\leq 2\frac{\rho_2-\rho_1}{\rho_1-1}\rho_2^{pn+2}\iint\limits_{G\setminus G^*} h_0(z)\prod_{i=1}^{m}\left|\frac{z-z_i}{\Phi_R(z)B_R^i(z)}\right|^{\gamma_i}\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

elde edilir. (3.22) ve (3.24) ile

$$\iint\limits_{G_R\setminus G} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z \tag{3.26}$$

$$\prec\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\max_{z\in\overline{G_R\setminus G}}\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right|}{\min_{z\in\overline{G\setminus G^*}}\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right|}\right]^{\gamma_i}\rho_2^{pn+2}\iint\limits_{G\setminus G^*} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

elde edilir.

$$\left|\Phi_R(z)B_R^i(z)\right| = \left|\Phi_R(z)\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{\left(\frac{1}{\overline{\Phi_R(z_i)}}\right)-\Phi_R(z)}\cdot\frac{1}{\overline{\Phi_R(z_i)}}\right|$$

$$=\left|\frac{\Phi_R(z)}{\overline{\Phi_R(z_i)}}\right|\cdot\left|\frac{\Phi_R(z)-\Phi_R(z_i)}{\Phi_R(z_i)-\Phi_R(z)}\right| = \left|\frac{\Phi_R(z)}{\overline{\Phi_R(z)}}\right|$$

olduğu için ve (3.26) dan

$$\iint\limits_{G_R\setminus G} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

$$\prec\prod_{i=1}^{m}\left[\frac{\max_{z\in\overline{G_R\setminus G}}\left|\Phi_R(z)\right|}{\min_{z\in\overline{G\setminus G^*}}\left|\Phi_R(z)\right|}\right]^{\gamma_i}\rho_2^{pn+2}\iint\limits_{G\setminus G^*} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

$$\prec\rho_2^{pn+2}\iint\limits_{G\setminus G^*} h(z)\left|P_n(z)\right|^p d\sigma_z$$

elde edilir. ρ_2 ve R simetrik olduğundan ispat tamamlanır.

Bölgenin genişlemesine bağlı olarak polinomun artışının bulunması ile ilgili aşağıdaki lemma verilebilir.

Lemma 3.3.7 [3, s.77].(Bernstein-Walsh Lemması) G, basit bağlantılı bir bölge ve L_R, G 'nin dış seviye eğrisi olsun. Bu durumda her $P_n(z) \in \wp_n$ ve $M > 0$ sabiti için

$$\max_{z \in G} |P_n(z)| \leq M$$

sağlanıyorsa, her $R > 1$ ve $\forall z \in \overline{G}_R$ için

$$|P_n(z)| \leq MR^n$$

eşitsizliği sağlanır

Lemma 3.3.8 [22]. L yarıkonform ve ölçülebilir bir eğri olsun. O halde, herhangi bir $P_n \in \wp_n$ için,

$$|P_n(z)| \leq \frac{c(L)}{d(z,L)} \sqrt{n} \|P_n\|_{A_2(G)} |\Phi(z)|^{n+1} \quad , \; z \in \Omega \tag{3.27}$$

dir.

İspat: Bir $P_n \in \wp_n$ polinomu ele alınsın. Her $z \in \Omega$ için $\frac{P_n}{\Phi^{n+1}}$ fonksiyonu Ω da analitik, $L = \partial G$ de sürekli ve $z = \infty$ da sıfıra eşittir. Böylece, sonsuz bölgeler için Cauchy teoreminden (Teorem 3.2.6) ve $y(z)$'nin $\forall z \in L$ için $y(z) = z$ ve $\forall z \in \mathbb{C}$ için $y(y(z)) = z$ özelliğinden, $g(\zeta) := \frac{P_n(\zeta)}{(\zeta - z)}$ olmak üzere

$$\frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)} = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\zeta)}{\Phi^{n+1}(\zeta)} d\zeta = -\frac{1}{2\pi i} \int_L \frac{g(\zeta)}{(\Phi^{n+1} \circ y)(\zeta)} d\zeta$$

elde edilir. $\frac{1}{\Phi^{n+1} \circ y}$ fonksiyonu $\overline{G}$ da sürekli ve G de L^2 -türevlere sahiptir. O halde Green formülüyle,

$$\frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)} = -\frac{1}{\pi} \iint_G \left[\frac{g(\zeta)}{\Phi^{n+1} \circ y(\zeta)} \right]_{\bar{\zeta}} d\sigma_\zeta$$

$$= \frac{n+1}{\pi} \iint_G g(\zeta) \frac{\Phi'(y(\zeta))}{(\Phi^{n+2} \circ y)(\zeta)} y_{\bar{\zeta}} d\sigma_\zeta \tag{3.28}$$

elde edilir. Lemma 3.3.1. kullanılarak

$$\iint_G \frac{\left|\Phi'\left(y(\zeta)\right)\right|\left|y_{\bar{\zeta}}\right|}{\left|\left(\Phi^{n+2}\circ y\right)(\zeta)\right|^2} d\sigma_\zeta \leq -\frac{1}{1-k^2}\iint_G \frac{\left|\Phi'\left(y(\zeta)\right)\right|^2 \left|J\left(y(\zeta)\right)\right|^2}{\left|\left(\Phi^{n+2}\circ y\right)(\zeta)\right|^2} d\sigma_\zeta$$

$$= -\frac{1}{1-k^2}\iint_\Omega \frac{\left|\Phi'(t)\right|^2}{\left|\Phi^{n+2}(\zeta)\right|^2} d\sigma_t$$

$$= -\frac{1}{1-k^2}\iint_\Delta \frac{d\sigma_w}{\left|w^{n+2}\right|^2} = -\frac{1}{1-k^2}\frac{\pi}{(n+1)}$$

elde edilir. Buradan, açık olarak

$$\iint_G \left|g(\zeta)\right|^2 d\sigma_\zeta \leq \frac{\left\|P_n\right\|^2_{L_2(G)}}{\left(dist(z,L)\right)^2}$$

ve (3.28)'e Cauchy Schwarz eşitsizliğinin (Teorem 3.2.8.) uygulanmasıyla ispat tamamlanır.

Tanım 3.3.8 [25]. $G\subset\mathbb{C}$ bir Jordan bölgesi ve $0<\alpha\leq 1$ olsun. Eğer $L:=\partial G$ yarıçember ve $\Phi\in H^\alpha\left(\bar{\Omega}\right)$ ise G bölgesine $G\in Q_\alpha$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.3.9 [25]. Eğer $0<\alpha\leq 1$ için $G\in Q_\alpha$ ve $0<\beta\leq 1$ için $\Psi\in H^\beta\left(|w|\geq 1\right)$ sağlanıyorsa G bölgesine $G\in Q_\alpha^\beta$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.3.10 [25]. Eğer $G\in Q_\alpha^\beta$ ve $L:=\partial G$ doğrultulabilirse (ölçülebilirse) G bölgesi $G\in\tilde{Q}_\alpha^\beta$ sınıfındandır denir.

Tanım 3.3.11. L - Jordan eğrisine Dini-düzgün eğri denir, eğer bu eğrinin doğal parametrizasyonu $z=z(s),\ 0\leq s\leq |L|:=mesL$ için $z'(s)\neq 0,\ 0\leq s\leq |L|$ olmak üzere her $s_1<s_2$ için $\left|z'(s_2)-z'(s_1)\right|<g(s_2-s_1)$, sağlansın öyle ki, g artan ve

$$\int_0^{|L|}\frac{g(x)}{x}dx<\infty$$

koşulunu sağlayan bir fonksiyondur.

Tanım 3.3.12. Basit bağlantılı G bölgesine parçalı Dini-düzgün eğri ile sınırlı bölge denir, eğer $L:=\partial G$ eğrisi sonlu sayıda Dini-düzgün $L_j,\ j=1,2,...,m$ yaylarının birleşmesinden oluşsun öyle ki, bu eğriler $z_j,\ j=1,2,...,m$ birleşme noktalarında G bölgesine görekeyfi $\lambda_j\pi, 0<\lambda_j<2$ dış açılara sahip olsun. Bu bölgeler sınıfı $PDS(\lambda_i)$, $0<\lambda_i<2$, ile gösterilsin.

Her bir $j=1,2,...$ ve yeterince küçük keyfi $\varepsilon_1>0$ için $f_j:[0,\varepsilon_1]\to\mathbb{R}$ ile ikinci mertebeye kadar diferansiyellenebilen ve

$$f_j(0)=0,\ f_j^{(k)}(x)>0,\ k=0,1,2,$$

koşullarını sağlayan fonksiyonlar gösterilsin.

Tanım 3.3.13. $G\subset\mathbb{C}$ bir Jordan bölgesi ve $f_j=f_j(x)$, $j=\overline{m_1+1,m}$ olsun. Eğer $L=\partial G$ eğrisi $\{z_i\}_{i=0}^{m}\in L$ noktalarında kesişen sonlu sayıda Dini-düzgün $\{L_i\}_{i=0}^{m}$ yaylarının birleşmesiyle oluşuyor öyle ki $z_0\in L\setminus\{z_i\}_{i=0}^{m}$ noktasında lokal düzgün ve

a) Her $z_i\in L$, $i=\overline{1,m_1}$, $m_1\le m$ için G bölgesi z_i köşe noktasında $\lambda_i\pi$, $0<\lambda_i\le 2$, ($\bar{G}$ 'a göre) dış açısına sahip;

b) Her $z_j\in L$, $j=\overline{m_1+1,m}$ için z_j merkezli (x,y) lokal koordinat sisteminde $-\infty<c_1<c_2<+\infty$, $0<\varepsilon_i<1$, $i=1,2$ sabitleri için :

$$\{z=x+iy:|z|<\varepsilon_1, c_1f_j(x)\le y\le c_2f_j(x), 0\le x\le\varepsilon_1\}\subset\bar{\Omega};$$

$$\{z=x+iy:|z|<\varepsilon_1, |y|\ge\varepsilon_2x, 0\le x\le\varepsilon_1\}\subset\bar{G};$$

koşulları sağlanıyorsa G bölgesine *parçalı Dini-düzgün dış sıfır açı içeren bölge* denir. Bu özelliğe sahip eğrilerin sınıfı $PDS(\lambda_i; f_j)$ ile gösterilir ve eğer $G\in PDS(\lambda_i; f_j)$ ise $L\in PDS(\lambda_i; f_j)$ yazılır. $PDS(\lambda_i;0)\equiv PDS(\lambda_i)$, $0<\lambda_i<2$.

Önerme 3.3.1. [34]. $|\psi|'$ değerlendirilmesi aşağıdaki gibidir:

$$|\psi'(\tau)|\approx\frac{d(\psi(\tau),L)}{|\tau|-1}$$

Lemma 3.3.9 [48]. $G \in PDS(\lambda_j;0)$, $0<\lambda_j \le 2 \quad j=1,2,...,m$ olsun. Bu durumda,

i) Her bir $w \in \Delta_j$ için

$$\left|\Psi(w)-\Psi(w_j)\right| \approx \left|w-w_j\right|^{\lambda_j} \text{ ve } \left|\Psi'(w)\right| \approx \left|w-w_j\right|^{\lambda_j-1},$$

ii) Her bir $w \in \bar{\Delta} \setminus \Delta_j$ için

$$\left|\Psi(w)-\Psi(w_j)\right| \approx \left|w-w_j\right|, \quad \left|\Psi'(w)\right| \approx 1$$

sağlanır.

Tanım 3.3.14. $G \subset \mathbb{C}$ sonlu bir Jordan bölgesi, $f_i = f_i(x)$, $i=\overline{1,m_1}$, $g_i = g_i(x)$, $i=\overline{m_1+1,m}$, ve $0 \le \kappa < 1$ olmak üzere "$G \in PQ(\kappa; f_i, g_i)$" denir, eğer $L=\partial G$ eğrisi, sonlu sayıda $\{L_i\}_{i=0}^m$ κ_i −yarıyaylarının, $0 \le \kappa_i < 1$, $\kappa := \max\{\kappa_i,\ i=0,1,...,m\}$, $\{z_i\}_{i=0}^m \in L$ noktalarında birleşmesiyle oluşsun öyle ki bu eğri, $z_0 \in L \setminus \{z_i\}_{i=1}^m$ noktasında lokal κ_i −yarıyay, diğer $\{z_i\}_{i=1}^m \in L$ noktalarında ise, herhangi $-\infty < c_{11}^i < c_{12}^i < +\infty$, $-\infty < c_{21}^i < c_{22}^i < +\infty$, $\varepsilon_j > 0$, $j=1,2,3,4$, sabitleri için aşağıdaki koşullar sağlansın:

a) Her $z_i \in L$, $i=\overline{1,m_1}$, $m_1 \le m$ için

$$\left\{z=x+iy : |z| \le \varepsilon_1, c_{11}^i f_i(x) \le y \le c_{12}^i f_i(x), 0 \le x \le \varepsilon_1\right\} \subset \bar{G},$$

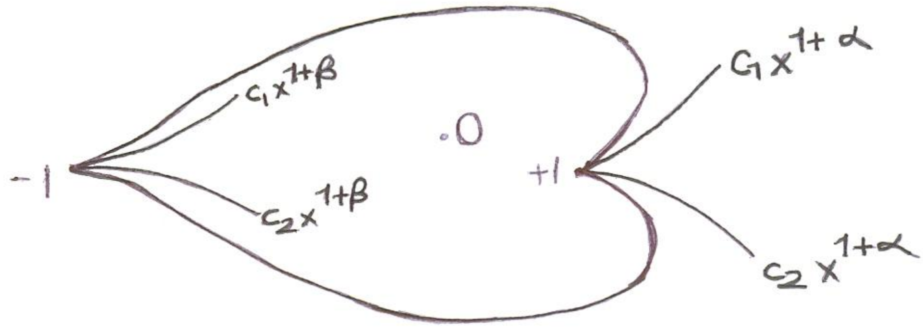
$$\left\{z=x+iy : |z| \le \varepsilon_1, |y| \ge \varepsilon_2 x, 0 \le x \le \varepsilon_1\right\} \subset \bar{\Omega};$$

b) Her $z_i \in L$, $i=\overline{m_1+1,m}$ için

$$\left\{z=x+iy : |z| < \varepsilon_3, c_{21}^i g_i(x) \le y \le c_{22}^i g_i(x), 0 \le x \le \varepsilon_3\right\} \subset \bar{\Omega},$$

$$\left\{z=x+iy : |z| < \varepsilon_3, |y| \ge \varepsilon_4 x, 0 \le x \le \varepsilon_3\right\} \subset \bar{G};$$

Bu durumda, G bölgesine "sonlu sayıda iç ve dış sıfır açılar içeren parçalı yarıkonform eğri ile sınırlı bölge" denir (bkn. Şekil-2).



Şekil-2

Tanım 3.3.15. $G \subset \mathbb{C}$ bir Jordan bölgesi ve $f_i = f_i(x),\ i = \overline{1, m_1}$, $g_i = g_i(x),\ i = \overline{m_1 + 1, m}$, $0 \le \kappa < 1$ olsun. Eğer, $G \in PQ(\kappa; f_i, g_i)$ ve $L := \partial G$ ölçülebilir ise G bölgesi $PQ(\kappa; f_i, g_i)$ sınıfındandır denir.

f , $|z| < 1$'de analitik bir fonksiyon ve $0 < r < 1$ olmak üzere

$$M_p(r, f) = \left\{ \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right| d\theta \right\}^{\frac{1}{p}}, \quad 0 < p < \infty$$

$$M_p(r, f) = \max_{0 \le \theta \le 2\pi} \left| f\left(re^{i\theta}\right) \right|$$

olsun.

Tanım 3.3.7 [40]. B birim dairesinde analitik olan f fonksiyonu her $p > 0$ için $\lim_{r \to 1} M_p(r, f)$ var ve sonlu ise f fonksiyonu H^p $(0 < p \le \infty)$ sınıfına aittir denir.

Teorem 3.3.5 [40, s.9]. (Hardy Konvekslik Teoremi). $f \in H^p\left(|z|<1\right)$ ve $p>0$ olsun. Bu durumda,

i) $M_p\left(r,f\right)$, r 'nin azalmayan bir fonksiyonudur.

ii) $\log M_p\left(r,f\right)$, $\log r$ 'nin konveks bir fonksiyonudur.

Lemma 3.3.10. L ölçülebilir Jordan eğrisi, $h(z)$, (3.5)'deki gibi tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $R,\, 1<R<R_0<+\infty$, $n\in\mathbb{N}$ ve $P_n\left(z\right)\in \wp_n$ için

$$\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L_R)} \le R^{n+\frac{1+\gamma^*}{p}} \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)},\; p>0 \tag{3.29}$$

sağlanır, burada $\gamma^* := \max\left\{\gamma_j : j=1,2,...,m\right\}$ dir.

İspat: $f_n\left(t\right) := \prod_{j=1}^{m}\left[t\Psi\left(\frac{1}{t}\right)-\Psi\left(w_j\right)\right]^{\frac{\gamma_j}{p}} t^n P_n\left(\Psi\left(\frac{1}{t}\right)\right)\cdot\left(\Psi'\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\frac{1}{p}}$ olsun. f_n, B 'de analitik ve L ölçülebilir olduğundan f_n fonksiyonu H^p sınıfına aittir. Bu durumda Teorem 3.3.5'e göre

$$\int_{|t|=\frac{1}{R}} \left|f_n\left(t\right)\right|^p \frac{|dt|}{|t|} \le \int_{|t|=1}\left|f_n\left(t\right)\right|^p |dt|$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
\int_{L_R} h(z)\left|P_n\left(z\right)\right|^p |dz| &= \int_{|w|=R}\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi(w)-\Psi(w_j)\right|^{\gamma_j}\left|P_n\left(\Psi\left(w\right)\right)\left(\Psi'(w)\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p |dw| \\
&= \int_{|t|=\frac{1}{R}}\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi\left(\frac{1}{t}\right)-\Psi(w_j)\right|^{\gamma_j}\left|P_n\left(\Psi\left(\frac{1}{t}\right)\right)\left(\Psi'\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p |dt| \\
&\le R^{np+1+\gamma_j}\int_{|t|=1}\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi\left(\frac{1}{t}\right)-\Psi(w_j)\right|^{\gamma_j}\left|P_n\left(\Psi\left(\frac{1}{t}\right)\right)\left(\Psi'\left(\frac{1}{t}\right)\right)^{\frac{1}{p}}\right|^p |dt| \\
&= R^{np+1+\gamma_j}\int_{L} h(z)\left|P_n\left(z\right)\right|^p |dz|
\end{aligned}$$

bulunur ve ispat tamamlanır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. PARÇALI-DÜZGÜN EĞRİ İLE SINIRLI SONLU VE SONSUZ BÖLGELERDE CEBİRSEL POLİNOMLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

Bu bölümde; parçalı Dini-düzgün eğri ile sınırlı G bölgesinin dış sıfır açıya sahip olması durumunda (1.2)–ye benzeri eşitsizlikler $\mathcal{L}_p(h,L)$ uzayında incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir. Değerlendirmelerde, bölgenin sınırında sıfır açıları belirten parametrelerle birlikte, aynı zamanda sıfır olmayan açıları da belirleyen parametrelerin, polinomların modülce artışlarına etkileri gösterilmiştir.

4.1.1. Temel Sonuçlar

Bu bölümde verilecek olan esas teorem ve sonuçların ifadesi ve ispatlarında kullanılan notasyonların bir kısmı aşağıda verilmiştir:

$$\Gamma := \Gamma_{1,m_1} \cup \Gamma_{2,m},\ \Gamma_{1,k} := \left\{\gamma_j, 1 \le j \le k, k \le m_1\right\},$$

$$\Gamma_{2,k} := \left\{\gamma_j, m_1+1 \le j \le m_1+k, 1 \le k \le m-m_1\right\};\ \Gamma_{1,k}^{(1)} := \left\{\gamma_j \in \Gamma_{1,k} : \gamma_j > p-1, k \le m_1\right\},$$

$$\Gamma_{1,k}^{(2)} := \left\{\gamma_j \in \Gamma_{1,k} : \gamma_j = p-1, k \le m_1\right\},\ \Gamma_{1,k}^{(3)} := \left\{\gamma_j \in \Gamma_{1,k} : \gamma_j < p-1, k \le m_1\right\};$$

$$\Gamma_{2,k}^{(1)} := \left\{\gamma_j \in \Gamma_{2,k} : \gamma_j > p-1,\ m_1+1 \le k \le m\right\}, \Gamma_{2,k}^{(2)} := \left\{\gamma_j \in \Gamma_{2,k} : \gamma_j = p-1,\ m_1+1 \le k \le m\right\},$$

$$\Gamma_{2,k}^{(3)} := \left\{\gamma_j \in \Gamma_{2,k} : \gamma_j < p-1, m_1+1 \le k \le m\right\};\ \gamma_k^1 = \max\left\{\gamma_j : \gamma_j \in \Gamma_{1,k}, 1 \le j \le k,\ k \le m_1\right\},$$

$$\gamma^1 := \gamma_{m_1}^1;\ \overset{1}{\gamma}_k = \max\left\{0; \gamma_j : \gamma_j \in \Gamma_{1,k}, 1 \le \mathrm{j} \le k,\ k \le m_1\right\},\ \overset{1}{\gamma} := \overset{1}{\gamma}_{m_1};$$

$$\gamma_k^2 = \max\left\{\gamma_j : \gamma_j \in \Gamma_{2,k}, m_1+1 \le j \le m_1+k,\ 1 \le k \le m\text{-}m_1\right\},\ \gamma^2 := \gamma_m^2;$$

$$\overset{2}{\gamma}_k = \max\left\{0; \gamma_j : \gamma_j \in \Gamma_{2,k}, m_1+1 \le j \le m_1+k, 1 \le k \le m-m_1\right\},\ \overset{2}{\gamma} := \overset{2}{\gamma}_m;$$

$$\gamma_k^* = \max\left\{\gamma_j : \gamma_j \in \Gamma, 1 \le j \le k,\ k \le m\right\},\ \gamma^* := \gamma_m^*;\quad \overset{*}{\gamma}_k = \max\left\{0; \gamma_j : \gamma_j \in \Gamma, 1 \le \mathrm{j} \le \mathrm{k},\ \ k \le m\right\},$$

$$\overset{*}{\gamma} := \overset{*}{\gamma}_m.\ \ \overset{2}{\gamma}_{*,k} := \left\{\begin{array}{ll} 0, & -1 < \gamma_j \le 0 \\ \min \gamma_j, & \gamma_j > 0 \end{array}, \gamma_j \in \Gamma_{2,k}, m_1 \le k \le m\right\};\ \overset{2}{\gamma}_{*,} := \overset{2}{\gamma}_{*,m}.$$

$\lambda_k = \max\{\lambda_j;1:1 \le j \le k,\, k \le m_1\}$, $\lambda := \tilde{\lambda}_{m_1}$; $\alpha_* := \min\left\{\alpha_j,\, m_1+1 \le j \le m\right\}$,

$\alpha^* := \max\left\{\alpha_j,\, m_1+1 \le j \le m\right\}$.

Genel ve özel durumlarda ifade edilen esas teoremler Teorem 4.1.1.1. – Teorem 4.1.1.3. olarak ve onların sonuçları olan Sonuç 4.1.1.1. – Sonuç 4.1.1.5. olarak aşağıda verilir.

Sınır yaylarının birleştiği noktalar ile ağırlık fonksiyonunun sahip olduğu singüler noktalarının üst üste düştüğü varsayılır.

Önce, sınırın ve ağırlık fonksiyonunun singüler noktalardaki davranışlarını dikkate alan genel durum için değerlendirme verilsin.

Teorem 4.1.1.1. $p>1$; $G \in PDS\left(\lambda_i, f_j\right)$, $0<\lambda_i \le 2$, $j=\overline{1,m_1}$, ve $f_j(x)=cx^{1+\alpha_j}$, $\alpha_j>0$, $j=\overline{m_1+1,m}$, ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, için

$$\left|P_n(z)\right| \le c_1 \frac{B_{n;1}}{d(z,L)} \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \begin{cases} \left|\Phi(z)\right|^{n+1}, & z \in \Omega, \\ 1 & z \in G, \end{cases} \tag{4.1}$$

sağlanır, burada $c_1 = c_1(G,p)$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$B_{n;1} := \begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m_1} n^{\frac{(\gamma_i+1-p)\tilde{\lambda}_i}{p}} + \sum\limits_{j=m_1+1}^{m} n^{\frac{\gamma_j+1-p}{p(1+\alpha_j)}}, & \text{her } i=\overline{1,k}, 1 \le k \le m_1 \text{ için } \gamma_i \in \Gamma_{1,k}^{(1)} \text{ ve} \\ & \text{her } j=\overline{m_1+1,k},\ m_1+1 \le k \le m \text{ için } \gamma_j \in \Gamma_{2,k}^{(1)} \text{ ise;} \\ (\ln n)^{1-\frac{1}{p}}, & \text{her } i=\overline{1,m_1} \text{ için } \gamma_i \in \Gamma_{1,m_1}^{(2)} \text{ ve} \\ & \text{her } j=\overline{m_1+1,m}, \text{ için } \gamma_j \in \Gamma_{2,m}^{(2)} \text{ ise;} \\ 1, & \text{her } i=\overline{1,m_1} \text{ için } \gamma_i \in \Gamma_{1,m_1}^{(3)}, \text{ve} \\ & \text{her } j=\overline{m_1+1,m}, \text{ için } \gamma_j \in \Gamma_{2,m}^{(3)} \text{ ise.} \end{cases} \tag{4.2}$$

Görüldüğü gibi, her $\gamma_i \in \Gamma_{1,k}^{(1)}$, $i=\overline{1,k}$, $1 \le k \le m_1$, ve $\gamma_j \in \Gamma_{2,k}^{(1)}$ $j=\overline{m_1+1,\mathrm{k}}$ $m_1+1 \le k \le m$ için, ağırlık fonksiyonunun ve de sınırın singüler noktalardaki davranışlarını dikkate alan bir değerlendirme elde edilmiştir. Buradan, bütün singüler noktalara ait değerlendirmeler dikkate alınırsa, aşağıdaki global değerlendirme bulunur:

Teorem 4.1.1.2. $p>1$; $G\in PDS(\lambda_i; f_j)$, $0<\lambda_i\le 2$, $j=\overline{1,m_1}$ ve $f_j(x)=cx^{1+\alpha_j}$, $\alpha_j>0$, $j=\overline{m_1+1,m}$ ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$|P_n(z)|\le c_2\frac{B_{n;2}}{d(z,L)}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\begin{cases}|\Phi(z)|^{n+1}, & z\in\Omega,\\ 1 & z\in G,\end{cases} \tag{4.3}$$

sağlanır, burada $c_2=c_2(G,p)$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$B_{n;2}:=\begin{cases} n^{\frac{(\gamma^1+1-p)\tilde{\lambda}}{p}}+n^{\frac{\gamma^2+1-p}{p(1+\alpha_*)}}, & \begin{array}{l}\text{her } i=\overline{1,k},\ 1\le k\le m_1, \text{ için}\\ \quad \text{en azından bir } \gamma_i\in\Gamma_{1,k}^{(1)}\\ \text{ve her } j=\overline{m_1+1,k},\ m_1+1\le k\le m, \text{ için}\\ \quad \text{en azından bir } \gamma_j\in\Gamma_{2,k}^{(1)} \text{ vardır;}\end{array}\\ (\ln n)^{1-\frac{1}{p}}, & \begin{array}{l}\text{her } j=\overline{1,k},\ k\le m, \text{ için}\\ \text{en azından bir}\\ \gamma_j\in\left(\Gamma_{1,k}^{(2)}\cup\Gamma_{2,k}^{(2)}\right)\backslash\left(\Gamma_{1,m_1}^{(1)}\cup\Gamma_{2,m}^{(1)}\right)\text{vardır;}\end{array}\\ 1, & \text{her } j=\overline{1,m} \text{ için } \gamma_j\in\left(\Gamma_{1,k}^{(3)}\cup\Gamma_{2,k}^{(3)}\right) \text{ ise.}\end{cases} \tag{4.4}$$

Özel halde, L eğrisinin iki tane singüler noktaya; $z_1\in L,\ z_2\in L$ (yani $m_1=1$, $m=2$) sahip olması durumunda aşağıdaki iki sonuca varılır:

Sonuç 4.1.1.1. $p>1$; $G\in PDS(\lambda_1; cx^{1+\alpha_2})$, $0<\lambda_1\le 2$, $\alpha_2>0$ ve $h(z)$, $j=2$ için (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n, n\in\mathbb{N}$, için

$$|P_n(z)|\le c_3\frac{B_{n;3}}{d(z,L)}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\begin{cases}|\Phi(z)|^{n+1}, & z\in\Omega,\\ 1 & z\in G,\end{cases} \tag{4.5}$$

sağlanır, burada $c_3=c_3(G,p)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$B_{n;3}:=\begin{cases} n^{\frac{(\gamma_1+1-p)\tilde{\lambda}_1}{p}}+n^{\frac{\gamma_2+1-p}{p(1+\alpha_2)}}, & \gamma_1,\gamma_2>p-1 \text{ ise;}\\ (\ln n)^{1-\frac{1}{p}}, & \begin{array}{l}\gamma_1=p-1, -1<\gamma_2\le p-1\\ \text{veya } -1<\gamma_1\le p-1, \gamma_2=p-1 \text{ ise;}\end{array}\\ 1, & -1<\gamma_1,\gamma_2<p-1 \text{ ise.}\end{cases} \tag{4.6}$$

Sonuç 4.1.1.2. $p>1$; $G\in PDS\left(\lambda_1;cx^{1+\alpha_2}\right)$, $0<\lambda_1\leq 2$, $\alpha_2>0$ ve $h(z)$ ve $j=2$ için (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n, n\in\mathbb{N}$ için

$$\left|P_n(z)\right|\leq c_4\frac{B_{n;4}}{d(z,L)}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\begin{cases}\left|\Phi(z)\right|^{n+1}, & z\in\Omega,\\ 1 & z\in G,\end{cases} \tag{4.7}$$

sağlanır, burada $c_4=c_4(G,p)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$B_{n;4}:=\begin{cases} n^{\frac{(\gamma_1+1-p)\tilde{\lambda}_1}{p}}, & \alpha_2=0,\gamma_1>p-1 \text{ ise;}\\[2ex] n^{\frac{\gamma_2+1-p}{p(1+\alpha_2)}}, & \lambda_1=1,\alpha_2>0,\gamma_2>p-1 \text{ ise;}\\[2ex] (\ln n)^{1-\frac{1}{p}}, & \alpha_2=0,\gamma_1=p-1,\\ & \text{veya } \lambda_1=1,\alpha_2>0,\gamma_2=p-1 \text{ ise;}\\[2ex] 1, & \alpha_2=0,-1<\gamma_1<p-1\\ & \text{veya } \lambda_1=1,\alpha_2>0,-1<\gamma_2<p-1 \text{ ise.}\end{cases} \tag{4.8}$$

Şimdi sonlu bölge için benzeri değerlendirme verilsin:

Teorem 4.1.1.3. $p>1$; $G\in PDS\left(\lambda_i;\mathrm{f}_j\right)$, $0<\lambda_i<2$, $i=\overline{1,m_1}$ ve $f_j(x)=cx^{1+\alpha_j}$, $\alpha_j>0$ $j=\overline{m_1+1,m}$ ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n, n\in\mathbb{N}$ için,

$$\left\|P_n\right\|_{C(\bar{G})}\leq c_5\left(\sum_{i=1}^{m_1}n^{\frac{(\tilde{\gamma}_i+1)\tilde{\lambda}_i}{p}}+\sum_{i=m_1+1}^{m}D_{n,m}^i\right)\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \tag{4.9}$$

sağlanır. Burada $c_5=c_5(G,p)>0$, n'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n;m}^i:=\begin{cases} n^{\frac{\tilde{\gamma}_i+1}{p(1+\alpha_i)}+\frac{\alpha_i}{1+\alpha_i}}, & 1<p<2+\dfrac{\tilde{\gamma}_i}{1+\alpha_i},\\[2ex] (n\ln n)^{1-\frac{1}{p}}, & p=2+\dfrac{\tilde{\gamma}_i}{1+\alpha_i}, \text{ her } i=\overline{m_1+1,m} \text{ için},\\[2ex] n^{1-\frac{1}{p}}, & p\geq 2+\dfrac{\tilde{\gamma}_i}{1+\alpha_i}.\end{cases}$$

Sonuç 4.1.1.3. Teorem 4.1.1.3.'ün koşulları altında

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \le c_6 \left(D_{n;m_1} + D_{n;m} \right) \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}, \tag{4.10}$$

dir, burada $c_6 = c_6(G, p) > 0$, n'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n;m_1} := n^{\frac{(\tilde{\gamma}^1+1)\tilde{\lambda}}{p}};\ D_{n;m} \begin{cases} n^{\frac{\tilde{\gamma}^2+1}{p(1+\alpha_*)}+\frac{\alpha_*}{1+\alpha_*}}, & 1 < p < 2 + \dfrac{\tilde{\gamma}_*^2}{1+\alpha^*}, \\ n^{1-\frac{1}{p}}, & p \ge 2 + \dfrac{\tilde{\gamma}_*^2}{1+\alpha_*}. \end{cases}$$

Eğer bölge $z_1 \in L$ noktasında tek bir $\lambda_1 \pi,\ 0 < \lambda_1 \le 2$ dış açısına ve $z_2 \in L$ noktasında $x^{1+\alpha_2},\ \alpha_2 > 0$ dış sıfır açısına sahip ise Teorem 4.1.1.3.'ten aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.1.1.4. $p > 1$; $G \in PDS(\lambda_1; \mathrm{f}_2)$, $0 < \lambda_1 \le 2$ ve $f_2(x) = cx^{1+\alpha_2}$, $\alpha_2 > 0$ ve $h(z)$ ve $j = 2$ için (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n \in \wp_n, n \in \mathbb{N}$, için

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \le c_7 \left(D_{n;1} + D_{n;2} \right) \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \tag{4.11}$$

sağlanır. Burada $c_7 = c_7(G, p, \lambda_1, \alpha_2) > 0$, n'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n;1} := n^{\frac{(\tilde{\gamma}_1+1)\tilde{\lambda}}{p}};\ D_{n;2} := \begin{cases} n^{\frac{\tilde{\gamma}_2+1}{p(1+\alpha_2)}+\frac{\alpha_2}{1+\alpha_2}}, & 1 < p < 2 + \dfrac{\tilde{\gamma}_2}{1+\alpha_2}, \\ n^{1-\frac{1}{p}}, & p \ge 2 + \dfrac{\tilde{\gamma}_2}{1+\alpha_2}, \end{cases}$$

dir.

Sonuç 4.1.1.2. ve Sonuç 4.1.1.4. birleştirilerek $|P_n(z)|$'nin tüm kompleks düzlemdeki değerlendirmesi alınır (basitlik için $m_1 = 1, m = 2$ kabul edilsin):

Sonuç 4.1.1.5. $p>1$; $G\in PDS(\lambda_1;\mathrm{f}_2)$, $0<\lambda_1\le 2$ ve $f_2(x)=cx^{1+\alpha_2}$, $\alpha_2>0$ ve $h(z)$ ve $j=2$ için (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n, n\in\mathbb{N}$, için

$$|P_n(z)|\le c_8\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\begin{cases}\dfrac{B_{n;4}}{d(z,L)}|\Phi(z)|^{n+1}, & z\in\Omega,\\ D_{n,1}+D_{n,2}, & z\in\bar{G}.\end{cases}\tag{4.12}$$

sağlanır, burada $c_8=c_8(G,p)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit, $B_{n;4}$ ve $D_{n;1}$, $D_{n;2}$ sırasıyla (4.8) ve Sonuç 4.1.1.4.'deki gibi tanımlıdır.

Şimdi, bu bölümde verilmiş esas teoremler ve onların sonuçlarının ispatlarına geçilsin.

Teorem 4.1.1.1. in İspatı:

Herhangi bir $0<\lambda_i\le 2$, $i=\overline{1,m_1}$ ve $f_j(x)=cx^{1+\alpha_j}$, $\alpha_j>0$ $j=\overline{m_1+1,m}$ için $G\in PDS(\lambda_i,f_j)$ ve $\gamma_k>-1$, $k=\overline{1,m}$, için $h(z)$, (3.5)'deki gibi tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Her bir $z\in\Omega$ için

$$T_n(z):=\frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)}\tag{4.13}$$

olsun. Ω bölgesinde $T_n(z)$ için Cauchy integral formülü [30]:

$$T_n(z)=-\frac{1}{2\pi i}\int_L T_n(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in\Omega,\tag{4.14}$$

olarak yazılır. Her $\zeta\in L$ için $|\Phi(\zeta)|=1$ ve $|\zeta-z|\ge d(z,L)$ olduğundan, (4.13) ve (4.14)' den

$$|P_n(z)|\le\frac{|\Phi(z)|^{n+1}}{2\pi}\int_L\frac{|P_n(\zeta)|}{|\Phi(\zeta)|^{n+1}}\frac{|d\zeta|}{|\zeta-z|}\le\frac{|\Phi(z)|^{n+1}}{2\pi d(z,L)}\int_L|P_n(\zeta)||d\zeta|\tag{4.15}$$

yazılabilir. L eğrisi L_j, $j=\overline{1,m}$, yaylarının birleşiminden oluştuğundan,

$$A_n:=\int_L|P_n(\zeta)||d\zeta|=\sum_{i=1}^{m}\int_{L^i}|P_n(\zeta)||d\zeta|\tag{4.16}$$

gibi yazılabilir. İntegral altı ifade $\prod_{j=1}^{m}\left|\zeta - z_j\right|^{\frac{\gamma_j}{p}}$ ile çarpılıp bölünerek ve sonrasında da Hölder eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki elde edilir:

$$A_n \le \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{L^i}\prod_{j=1}^{m}\left|\zeta - z_j\right|^{\gamma_j}\left|P_n(\zeta)\right|^p\left|d\zeta\right|\right)^{\frac{1}{p}} \times \left(\int_{L^i}\frac{\left|d\zeta\right|}{\prod_{j=1}^{m}\left|\zeta - z_j\right|^{\frac{q\gamma_j}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.17}$$

$$=: \sum_{i=1}^{m} A_n^i, \quad \frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1,$$

burada

$$A_n^i := \left(\int_{L^i} h(\zeta)\left|P_n(\zeta)\right|^p\left|d\zeta\right|\right)^{\frac{1}{p}}\left(\int_{L^i}\frac{\left|d\zeta\right|}{\prod_{j=1}^{m}\left|\zeta - z_j\right|^{\frac{q\gamma_j}{p}}}\right)^{\frac{1}{q}} =: J_{n,1}^i \cdot J_{n,2}^i$$

dir. $J_{n,1}^i$ integrali için Lemma 3.3.10.'a göre

$$J_{n,1}^i \prec \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}, \quad i=\overline{1,m}, \tag{4.18}$$

ve, dolayısıyla, (4.17) ve (4.18)' den

$$A_n \prec \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{m}\left(J_{n,2}^i\right)^{\frac{1}{q}}$$

elde edilir. L üzerinde $\left\{z_j\right\}_{j=1}^{m}$ noktaları ayrık olduğundan $J_{n,2}^i$ integrali için

$$J_{n,2}^i := \int_{L^i}\frac{\left|d\zeta\right|}{\prod_{j=1}^{m}\left|\zeta - z_j\right|^{\frac{q\gamma_j}{p}}} \asymp \int_{L^i}\frac{\left|d\zeta\right|}{\left|\zeta - z_i\right|^{\gamma_i(q-1)}} \tag{4.19}$$

elde edilir.

Basitlik için $m_1 = 1$, $m = 2$, $z_1 = -1$, $z_2 = 1$; $(-1,1) \subset G$ ve Tanım 3.3.13'deki lokal koordinat sisteminin eksenlerinin uygun olarak genel koordinat sisteminde OX ve OY eksenlerine paralel olduğu kabul edilsin. $L^+ := \left\{z \in L : Imz \ge 0\right\}$, $L^- := \left\{z \in L : Imz < 0\right\}$, $L = L^+ \cup L^-$; $w^{\pm} := \left\{w = e^{i\theta} : \theta = \frac{\varphi_1 \pm \varphi_2}{2}\right\}$, $z^{\pm} \in \Psi^{\pm}\left(w^{\pm}\right)$ olsun. $l_i^{\pm}\left(z_i, z^{\pm}\right)$ sırasıyla z_i ile $z^{\pm}$

noktalarını birleştiren yayları göstersin; $\left|l_i^{\pm}\right| := mes\, l_i^{\pm}(z_i, z^{\pm})$, $i=1,2$. L^{+} (ya da seçilen yöne göre L^{-}) üzerinde keyfi bir z_0 noktası alınsın. Bu durumda, (4.19) yardımıyla

$$A_n \prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{2} \left(J_{n,2}^{i}\right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.20}$$

yazılabilir. Burada

$$J_{n,2}^{1} = \int_{L^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)}} \; ; \; J_{n,2}^{2} = \int_{L^2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_2|^{\gamma_2(q-1)}} \tag{4.21}$$

dir. Bu integrallarin değerlendirilmesi için aşağıdaki notasyonlar kullanılır:

$R = 1 + \frac{1}{n}$, $d_{i,R} := d(z_i, L_R)$; $E_1^{1,\pm} := \left\{\zeta \in L^1 : \ |\zeta - z_1| < c_1 d_{1,R}\right\}$,

$E_2^{1,\pm} := \left\{\zeta \in L^1 : \ c_1 d_{1,R} \le |\zeta - z_1| \le \left| l_1^{\pm}\right|\right\}$, $E_1^{2,\pm} := \left\{\zeta \in L^2 : \ |\zeta - z_2| < c_2 d_{2,R}\right\}$,

$E_2^{2,\pm} := \left\{\zeta \in L^2 : \ c_2 d_{2,R} \le |\zeta - z_2| \le \left| l_2^{\pm}\right|\right\}$, $I_{n,k}^{i,\pm} := I_{n,k}^{i}(E_k^{i,\pm}) := \int_{E_k^{i,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_i|^{\gamma_i(q-1)}}$, $i, k = 1, 2$.

Bu notasyonlar yardımıyla (4.20) aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

$$\begin{aligned} A_n &\prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{2} \left(J_{n,2}^{i}\right)^{\frac{1}{q}} \\ &=: \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{2} \left[I_{n,1}^{i}(E_1^{i,\pm}) + I_{n,2}^{i}(E_2^{i,\pm})\right]^{\frac{1}{q}} \\ &=: \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{2} \left[I_{n,1}^{i,\pm} + I_{n,2}^{i,\pm}\right]^{\frac{1}{q}}, \ i = 1, 2. \end{aligned} \tag{4.22}$$

(4.15) ve (4.16)'ya göre, $I_{n,\mathrm{k}}^{i,\pm}$, $i=1,2$ ve $k=1,2,3$ integrallerini değerlendirmek yeterlidir. (4.21) ve (4.22) 'e göre $J_{n,2}^{1}$ integrali ile başlanılır:

$$\begin{aligned} J_{n,2}^{1} &\prec \int_{L^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)}} \\ &:= \left(\sum_{k=1}^{2} \int_{E_k^{1,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_i|^{\gamma_1(q-1)}} \right)^{\frac{1}{q}} =: \left[I_{n,1}^{1,\pm} + I_{n,2}^{1,\pm}\right]^{\frac{1}{q}} \end{aligned} \tag{4.23}$$

Her $i=1,2$ için γ_i'nin, $-1 < \gamma_i \le 0$ ve $\gamma_i > 0$ değerleri için $J_{n,2}^{1}$ integrali ayrı ayrı değerlendirilecektir.

1. $\gamma_1 \ge 0$ ve $\gamma_2 \ge 0$ olsun. Bu durumda, $J_{n,2}^{1}$ için

$$I_{n,1}^{1,\pm} \prec \int_{E_1^{1,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)}}$$

$$\prec \int_0^{c_1 d_{1,R}} \frac{ds}{s^{\gamma_1(q-1)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{c_1 d_{1,R}} \frac{ds}{s^{\gamma_1(q-1)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left.\frac{s^{1-\gamma_1(q-1)}}{1-\gamma_1(q-1)}\right|_{\varepsilon}^{c_1 d_{1,R}}$$

$$\prec \begin{cases} d_{1,R}^{1-\gamma_1(q-1)}, & \gamma_1 > p-1, \\ 1, & \gamma_1 \le p-1, \end{cases}$$

$$I_{n,2}^{1,\pm} \prec \int_{E_2^{1,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1(q-1)}}$$

$$\prec \int_{c_1 d_{1,R}}^{|l_1^{\pm}|} \frac{ds}{s^{\gamma_1(q-1)}} = \left.\frac{s^{1-\gamma_1(q-1)}}{1-\gamma_1(q-1)}\right|_{c_1 d_{1,R}}^{|l_1^{\pm}|} \prec \begin{cases} d_{1,R}^{1-\gamma_1(q-1)}, & \gamma_1 > p-1, \\ \ln \dfrac{1}{d_{1,R}}, & \gamma_1 = p-1, \\ 1 & \gamma_1 < p-1, \end{cases} \tag{4.24}$$

elde edilir.

Benzer yolla $J_{n,2}^2$ integrali:

$$I_{n,1}^{2,\pm} \prec \int_{E_1^{2,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_2|^{\gamma_2(q-1)}}$$

$$\prec \int_0^{c_2 d_{2,R}} \frac{ds}{s^{\gamma_2(q-1)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \int_{\varepsilon}^{c_2 d_{2,R}} \frac{ds}{s^{\gamma_2(q-1)}} = \lim_{\varepsilon\to 0} \left.\frac{s^{1-\gamma_2(q-1)}}{1-\gamma_2(q-1)}\right|_{\varepsilon}^{c_2 d_{2,R}}$$

$$\prec \begin{cases} d_{2,R}^{1-\gamma_2(q-1)}, & \gamma_2 > p-1, \\ 1, & \gamma_2 \le p-1, \end{cases};$$

$$I_{n,2}^{2,\pm} \prec \int_{E_2^{2,\pm}} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_2|^{\gamma_2(q-1)}}$$

$$\prec \int_{c_2 d_{2,R}}^{|l_2^{\pm}|} \frac{ds}{s^{\gamma_2(q-1)}} = \left.\frac{s^{1-\gamma_2(q-1)}}{1-\gamma_2(q-1)}\right|_{c_1 d_{1,R}}^{|l_2^{\pm}|} \prec \begin{cases} d_{2,R}^{1-\gamma_2(q-1)}, & \gamma_2 > p-1, \\ \ln \dfrac{1}{d_{2,R}}, & \gamma_2 = p-1, \\ 1 & \gamma_2 < p-1. \end{cases} \tag{4.25}$$

elde edilir.

2. $\gamma_1 < 0$ ve $\gamma_2 < 0$ olsun. (4.24) ve (4.25)'e benzer olarak

$$\begin{aligned} I_{n,1}^{1} &\prec \int_{E_1^1} |\zeta - z_1|^{(-\gamma_1)(q-1)} |d\zeta| \prec d_{1,n}^{(-\gamma_1)(q-1)} mesE_1^1 \prec 1, \\ I_{n,2}^{1} &\prec \int_{E_2^1} |\zeta - z_1|^{(-\gamma_1)(q-1)} |d\zeta| \prec \left| l_1^{\pm} \right|^{(-\gamma_1)(q-1)+1} \prec 1, \end{aligned} \tag{4.26}$$

ve

$$\begin{aligned} I_{n,1}^{2,\pm} &\prec \int\limits_{E_1^{2,\pm}} |\zeta - z_2|^{(-\gamma_2)(q-1)} |d\zeta| \prec d_{2,R}^{(-\gamma_2)(q-1)} mes E_1^{2,\pm} \prec 1, \\ I_{n,2}^{2,\pm} &\prec \int\limits_{E_2^{2,\pm}} |\zeta - z_2|^{(-\gamma_2)(q-1)} |d\zeta| \prec \left| l_2^{\pm} \right|^{(-\gamma_2)(q-1)+1} \prec 1 \end{aligned} \tag{4.27}$$

elde edilir.

Buradan (4.22)–(4.27)' den

$$A_n \prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \begin{cases} d_{1,R}^{\frac{1-\gamma_1(q-1)}{q}} + d_{2,R}^{\frac{1-\gamma_2(q-1)}{q}}, & \gamma_1,\gamma_2 > p-1, \\ \left(\ln \dfrac{1}{d_{1,R}}\right)^{\frac{1}{q}} + \left(\ln \dfrac{1}{d_{2,R}}\right)^{\frac{1}{q}}, & \gamma_1 = \gamma_2 = p-1, \\ 1, & \gamma_1,\gamma_2 < p-1, \end{cases} \tag{4.28}$$

değerlendirmesi alınır.

(4.15), (4.16) ve (4.28) karşılaştırılarak

$$|P_n(z)| \le c_9 \frac{B_{n,1}^0}{d(z,L)} \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} |\Phi(z)|^{n+1} \tag{4.29}$$

elde edilir, burada $c_9 = c_9(G,p,\gamma_i)$, $i = \overline{1,m}$, n ve z'den bağımsız bir sabit ve

$$B_{n,1}^0 := \begin{cases} d_{1,R}^{1-\gamma_1(q-1)} + d_{2,R}^{1-\gamma_2(q-1)}, & \gamma_1,\gamma_2 > p-1, \\ \ln \dfrac{1}{d_{1,R}} + \ln \dfrac{1}{d_{2,R}}, & \gamma_1 = \gamma_2 = p-1, \\ 1, & \gamma_1,\gamma_2 < p-1, \end{cases} \tag{4.30}$$

dir.

Lemma 3.3.9.'a göre:

$$d_{1,R} \succ n^{-\tilde{\lambda}_1} \tag{4.31}$$

dir.

Şimdi $d_{2,R}$'nin değerlendirmesi verilecektir. $z_R \in L_R$ ve $\varsigma^{\pm} \in L^{\pm}$ alınsın öyle ki $d_{2,R} = |z_2 - z_R|$ ve $d(z_R, L^2 \cap L^{\pm}) := \mathrm{d}(z_R, L^{+})$ olsun, $z_2^{\pm} := \zeta \in L^2 : |\zeta - z_2| = c_2 d_{2,R}$. Bu notasyonlar altında Lemma 3.3.1.'den

$$d_R^{\pm} := d(z_R, L^2 \cap L^{\pm}) \asymp |z_R - z_2^{\pm}| \asymp d_{2,R}^{1+\alpha_2} \tag{4.32}$$

dir.

Bu durumda $d_{2,R} \asymp \left(d_R^{\pm}\right)^{\frac{1}{1+\alpha_2}}$. Diğer taraftan, Lemma 3.3.9. ve [42, Sonuç 2] ile $d_R{}^{\pm} \succ n^{-1}$ bulunur. Böylece,

$$d_{2,R} \succ n^{-\frac{1}{1+\alpha_2}} \tag{4.33}$$

elde edilir. (4.29)- (4.33) karşılaştırılarak

$$\left|P_n(z)\right| \prec \frac{B_{n,1}^0}{d(z,L)} \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \left|\Phi(z)\right|^{n+1} \tag{4.34}$$

alınır, burada

$$B_{n,1}^0 \prec \begin{cases} n^{\frac{(\gamma_1(q-1)-1)\tilde{\lambda}_1}{q}} + n^{\frac{\gamma_2(q-1)-1}{q(1+\alpha_2)}} & \gamma_1, \gamma_2 > p-1, \\ (\ln n)^{\frac{1}{q}}, & \gamma_1 = \gamma_2 = p-1, \\ 1, & \prec \gamma_1, \gamma_2 < p-1. \end{cases} \tag{4.35}$$

$z \in \Omega$ olma durumunda, her $\{z_j\}$, $j = \overline{1,m}$ noktası ile ilgili değerlendirmeler ele alınarak ve (4.33), (4.34) kullanılarak ispat tamamlanır.

$z \in G$ olma durumunda ise $P_n(z)$ polinomu için G bölgesi için Cauchy integral formülü ile [30]:

$$P_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_L P_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \quad z \in G, \tag{4.36}$$

integral gösterimi yazılır. Bu durumda,

$$\begin{aligned} \left|P_n(z)\right| &\le \frac{1}{2\pi} \int_L \left|P_n(\zeta)\right| \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \\ &\le \frac{1}{2\pi d(z,L)} \int_L \left|P_n(\zeta)\right| |d\zeta| =: \frac{1}{2\pi d(z,L)} A_n \end{aligned} \tag{4.37}$$

olur, A_n, (4.16)'daki gibidir. Böylece, (4.29), (4.31) ve (4.37) değerlendirmeleri karşılaştırılarak Teorem 4.1.1.1.' in ispatı tamamlanır.

Teorem 4.1.1.2 nin İspatı:

Herhangi bir $0<\lambda_i\le 2$, $i=\overline{1,m_1}$, ve $f_j(x)=cx^{1+\alpha_j}$, $\alpha_j>0$, $j=\overline{m_1+1,m}$ için $G\in PDS(\lambda_i,f_j)$ ve $\gamma_k>-1$, $k=\overline{1,m}$, için $h(z)$, (3.5)'deki gibi tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun.

Eğer $G\in PDS(\lambda_i,0)$, $0<\lambda_i<2$, $i=\overline{1,m_1}$, yani her $j=\overline{m_1+1,m}$ için $\alpha_1=0$ ise, Teorem 4.1.1.1., (4.36) ve (4.37)'den, her $z\in G$ için

$$|P_n(z)|\prec\frac{B''_{n,1}}{d(z,L)}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)},\ z\in G,\tag{4.38}$$

dir, burada

$$B''_{n,1}\prec\begin{cases} n^{\frac{(1-p+\tilde{\gamma}^1)\tilde{\lambda}}{p}}, & \text{her } i=\overline{1,k},\ k\le m_1, \text{ için en azından bir tane } \gamma_i\in\Gamma^{(1)}_{1,k} \text{ vardır;}\\ (\ln n)^{1-\frac{1}{p}}, & \text{her } j=\overline{1,k},\ k\le m_1, \text{ için en azından bir tane } \gamma_j\in\Gamma^{(2)}_{1,k}\setminus\Gamma^{(1)}_{1,m_1} \text{ vardır;}\\ 1, & \text{her } j=\overline{1,m} \text{ için } \gamma_i\in\Gamma^{(3)}_{1,k}\end{cases}\tag{4.39}$$

dir.

Diğer taraftan üç nokta özelliğine [30, s.100] göre $L:=\partial G$ eğrisi herhangi bir $Q>1$ için Q- yarıkonformdur, $z\in L^*$ keyfi tespit edilmiş nokta ve $R=1+\frac{1}{n}$ olsun. Lemma 3.3.9. ve (4.16) ile:

$$d(z,L)\asymp d(t,L_R)\succ n^{-\tilde{\lambda}}\tag{4.40}$$

sağlandığından, (4.38)' den

$$|P_n(z)|\prec n^{\tilde{\lambda}}B''_{n,1}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)},\quad z\in\bar{G}^*$$

elde edilir. Lemma 3.3.9 uygulanırsa, ispat tamamlanır.

Genel durumun ispatı aşağıdaki şekilde verilir.

Herhangi bir $j=\overline{m_1+1,m}$ için $\alpha_j>0$ olsun. G_R bölgesi için Cauchy integral formülü uygulanırsa:

$$P_n(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R}P_n(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z},\quad z\in G_R.$$

Önce $\varsigma = \Phi(\tau)$ değişken değişimi yapılıp, ardından integral altı ifade $\prod_{i=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right|^{\frac{\gamma_i}{p}}\left|\Psi'(\tau)\right|^{\frac{1}{p}}$ ile çarpılıp bölünerek ve sonrasında da Hölder eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$
\begin{aligned}
\left|P_n(z)\right| &= \frac{1}{2\pi}\int_{L_R}\left|P_n(\zeta)\right|\frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \\
&= \frac{1}{2\pi}\int_{|\tau|=R}\frac{\left|P_n(\Psi(\tau))\right|\left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right|}|d\tau| \\
&\leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{|\tau|=R}\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)\right|^{\gamma_j}\left|P_n(\Psi(\tau))\right|^{p}\left|\Psi'(\tau)\right||d\tau|\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\int_{|\tau|=R}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|^{\left(1-\frac{1}{p}\right)q}}{\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)\right|^{\frac{q\gamma_j}{p}}\left\|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right\|^{q}}|d\tau|\right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{2\pi}\left(\int_{L_R}h(\zeta)\left|P_n(\zeta)\right|^{p}|d\zeta|\right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times\left(\int_{|\tau|=R}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)\right|^{\gamma_j(q-1)}\left\|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right\|^{q}}|d\tau|\right)^{\frac{1}{q}} \qquad (4.41)\\
&=: \frac{1}{2\pi}J_{n,1}\times J_{n,2},
\end{aligned}
$$

burada

$$J_{n,1} := \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)},$$

$$J_{n,2} := \left(\int_{|\tau|=R}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|^{\left(1-\frac{1}{p}\right)q}}{\prod_{j=1}^{m}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_j)\right|^{\frac{q\gamma_j}{p}}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right|^{q}}|d\tau|\right)^{\frac{1}{q}}$$

dır. Bu durumda, Lemma 3.3.10. ile

$$\left|P_n(z)\right| \prec J_{n,1}\cdot J_{n,2} \prec \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\cdot J_{n,2},\ z\in L,\ w=\Phi(z) \qquad (4.42)$$

olur. $\left(1-\frac{1}{p}\right)q=1$ olduğu dikkate alınırsa, $J_{n,2}$ integrali için

$$J_{n,2} \prec \left(\sum_{i=.}^{m} \int_{F_R^i} \frac{|\Psi'(\tau)|}{\prod_{j=1}^{m} |\Psi(\tau)-\Psi(w_i)|^{\gamma_i(q-1)} |\Psi(\tau)-\Psi(w)|^q} |d\tau| \right)^{\frac{1}{q}} \tag{4.43}$$
$$=: \left(\sum_{i=1}^{m} J_{n,2}^i \right)^{\frac{1}{q}} \le \sum_{i=1}^{m} \left(J_{n,2}^i\right)^{\frac{1}{q}}$$

değerlendirmesi elde edilir, burada

$$J_{n,2}^i := \int_{F_R^i} \frac{|\Psi'(\tau)|}{\prod_{j=1}^{m} |\Psi(\tau)-\Psi(w_i)|^{\gamma_i(q-1)} |\Psi(\tau)-\Psi(w)|^q} |d\tau|, \ i=\overline{1,m}. \tag{4.44}$$

$w_i := \Phi\left(z_i\right)$ noktaları ayrık olduğundan (4.44)

$$\int_{F_R^i} \frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)|^{\gamma_i(q-1)} |\Psi(\tau)-\Psi(w)|^q} |d\tau| =: J\left(F_R^i\right)$$

integraline denktir. Böylece, $i=\overline{1,m_1}$ için $J\left(F_R{}^i\right)$ integrallerini değerlendirmek yeterlidir. Basitlik için

$$i=1,2;\ m_1=1,\ m=2;\ z_1=-1,\ \ z_2=1;\ R=1+\frac{1}{n} \tag{4.45}$$

kabul edilsin. Bu notasyonlarla beraber aşağıdakiler dahil edilsin:

$$L_R^+ := \left\{z\in L_R : \operatorname{Im} z \ge 0\right\},\ L_R^- := \left\{z\in L_R :\ \operatorname{Im} z < 0\right\},\ L_R = L_R^+ \cup L_R^-;$$

$w_R^{\pm} := \left\{ w = Re^{i\theta} : \theta = \frac{\varphi_1 \pm \varphi_2}{2} \right\}$, $z_R^{\pm} \in \Psi(w_R^{\pm})$; $z_{i,R} \in L_R$ ve $\zeta^{\pm} \in L^{\pm}$ noktaları alınsın öyle ki $d_{i,n} = |z_i - z_{i,R}|$ ve $d(z_{2,R}, L^2 \cap L^{\pm}) := d(z_{2,R}, L^{\pm})$ olsun; $z_i^{\pm} := \left\{\zeta \in L^i : |\zeta - z_i| = c_i d(z_i, L_R\right\}$, $z_{i,R}^{\pm} := \left\{\zeta \in L_R^i : |\zeta - z_{i,R}| = c_i d(z_{i,R}, L_R\right\}$, $w_{i,R}^{\pm} = \Phi(z_{i,R}^{\pm})$; $l_{i,R}^{\pm}(z_{i,R}^{\pm}, z_R^{\pm})$ sırasıyla $z_{i,R}^{\pm}$ ve $z_R^{\pm}$, noktalarını birleştiren yayları göstersin ve $\left| l_{i,R}^{\pm} \right| := mes\, l_{i,R}^{\pm}(z_{i,R}^{\pm}, z_R^{\pm})$, $i=1,2$ olsun; z_0 noktası L^+ (ya da seçilen yöne göre L^-) üzerinde z_1 ve z_2'den farklı keyfi bir nokta olsun. Basitlik için $z_0 = z_R{}^+ (z_0 = z_R{}^-)$ kabul edilsin. Ayrıca,

$E_{1,R}^{1,\pm} := \left\{\zeta \in L_R : |\zeta - z_1| < c_1 d_{1,R}\right\}$, $E_{2,R}^{1,\pm} := \{\zeta \in L_R : c_1 d_{1,R} \le |\zeta - z_1| \le \left| l_{1,R}^{\pm}\right|\}$,

$E_{1,R}^{2,\pm} := \left\{ \zeta \in L_R^2 : \left|\zeta - z_2\right| < c_2 d_{2,R} \right\}$, $E_{2,R}^{2,\pm} := \left\{ \zeta \in L_R^2 : c_2 d_{2,R} \le \left|\zeta - z_2\right| \le \left| l_{2,R}^{\pm} \right| \right\}$,

$F_{j,R}^{i,\pm} := \Phi(E_{j,R}^{i,\pm}), i, j = 1, 2,$ olsun.

Bu notasyonlar kullanılarak, (4.44) ‘den:

$$\begin{aligned} J_{n,2}^{i} &\asymp \sum_{i,j=1}^{2} \int_{F_{j,R}^{i,\pm}} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)\right|^{\gamma_i(q-1)} \left|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right|^{q}} \left|d\tau\right| \\ &=: \sum_{i,j=1}^{2} J(F_{j,R}^{i,\pm}) \end{aligned} \tag{4.46}$$

elde edilir. Buradan görüldüğü gibi $i, j = 1, 2$ için $J(F_{j,R}^{i,\pm})$ integralleri değerlendirilmelidir.

$$\left\|P_n\right\|_{C(\bar{G})} =: \left|P_n(z')\right|, z' \in L = L^1 \cup L^2, \tag{4.47}$$

ve $w' = \Phi(z')$ olsun. İki durum vardır: $z' \in L^1$ veya $z' \in L^2$. $\left|\Psi'(\tau)\right|$ (Önerme 3.3.1.) değerlendirmesi dikkate alınarak aşağıdaki durumlar ayrı ayrı değerlendirilsin.

1) $z' \in L^1$ olsun. Bu durumda, Lemma 3.3.1. ve Lemma 3.3.9. yardımlarıyla aşağıdaki durumlar olabilir:

1.1) $z' \in E_1^{1,\pm}$ olsun.

Eğer $\gamma_1 > 0$ ise

$$\begin{aligned} &J(F_{1,R}^{1,+}) + J(F_{1,R}^{1,-}) \\ &= \int_{F_{1,R}^{1,+} \cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)} \left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}} \left|d\tau\right| \\ &\prec \int_{F_{1,R}^{1,+} \cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{\left|\tau - w_1\right|^{\lambda_1 - 1 - \varepsilon} \left|d\tau\right|}{\left|\tau - w_1\right|^{\gamma_1(q-1)\lambda_1} \left|\tau - w'\right|^{q\lambda_1}} \\ &\prec \int_{F_{1,R}^{1,+} \cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau - w_1\right|^{\gamma_1(q-1)\lambda_1 + \varepsilon - \lambda_1 + 1} \left|\tau - w'\right|^{q\lambda_1}} \\ &\prec \int_{F_{1,R}^{1,+} \cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{\left|d\tau\right|}{\min\left\{\left|\tau - w_1\right|; \left|\tau - w'\right|\right\}^{(\gamma_1(q-1)+q)\lambda_1 - \lambda_1 + 1}} \\ &\prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1}; \end{aligned} \tag{4.48}$$

Eğer $-1 < \gamma_1 \le 0$ ise

$$J(F_{1,R}^{1,+}) + J(F_{1,R}^{1,-})$$

$$
\begin{aligned}
&= \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}} \\
&\prec \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{\left|\tau-w_1\right|^{(-\gamma_1)(q-1)\lambda_1+\lambda_1-1}\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w'\right|^{q\lambda_1}} \\
&\prec \left(\frac{1}{n}\right)^{\gamma_1(q-1)\lambda_1-\lambda_1+1} \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w'\right|^{q\lambda_1}} \\
&\prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1}
\end{aligned}
\tag{4.49}
$$

elde edilir.

1.2) $z' \in E_2^{1,\pm}$ olsun.

Eğer $\gamma_1 > -1$ ise

$$
\begin{aligned}
&J(F_{1,R}^{1,+}) + J(F_{1,R}^{1,-}) \\
&= \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}} \\
&\prec \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{\left|\tau-w_1\right|^{\lambda_1-1}\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w_1\right|^{\gamma_1(q-1)\lambda_1}\left|\tau-w'\right|^{q\lambda_1}} \\
&\prec \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{\left|d\tau\right|}{\min\left\{\left|\tau-w_1\right|;\left|\tau-w'\right|\right\}^{\gamma_1(q-1)\lambda_1+q\lambda_1-\lambda_1+1}} \\
&\prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1}
\end{aligned}
\tag{4.50}
$$

elde edilir.

1.3) $z' \in E_1^{1,\pm}$ olsun.

Eğer $\gamma_1 > 0$ ise

$$
J(F_{2,R}^{1,+}) + J(F_{2,R}^{1,-})
$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q}} \\
&\prec \frac{1}{d_{1,R}^{\gamma_1(q-1)}} \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\tau-w_1|^{\lambda_1-1}|d\tau|}{|\tau-w'|^{q\lambda_1}} \\
&\prec n^{\gamma_1(q-1)} \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\min\left\{|\tau-w_1|;|\tau-w'|\right\}^{q\lambda_1-\lambda_1+1}} \\
&\prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1};
\end{aligned} \tag{4.51}$$

eğer $-1<\gamma_1\leq 0$ ise

$$J(F_{2,R}^{1,+})+J(F_{2,R}^{1,-})$$

$$\begin{aligned}
&= \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{(-\gamma_1)(q-1)}|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q}} \\
&\prec \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\tau-w_1|^{(-\gamma_1)(q-1)+\lambda_1-1}|d\tau|}{|\tau-w'|^{q\lambda_1}} \\
&\prec \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\min\left\{|\tau-w_1|;|\tau-w'|\right\}^{[\gamma_1(q-1)+q]\lambda_1-\lambda_1+1}} \\
&\prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1}
\end{aligned} \tag{4.52}$$

elde edilir.

1.4) $z'\in E_2^{1,\pm}$ olsun.

Eğer $\gamma_1>0$ ise

$$J(F_{2,R}^{1,+})+J(F_{2,R}^{1,-})$$

$$= \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q}}$$

$$\begin{aligned}
&\prec \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{\left[\min\left\{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|;|\Psi(\tau)-\Psi(w')|\right\}\right]^{\gamma_1(q-1)+q-1}} \\
&\prec \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\tau-w_1|^{\lambda_1-1}|d\tau|}{\left[\min\left\{|\tau-w_1|;|\tau-w'|\right\}\right]^{\gamma_1(q-1)+q-1}} \prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1};
\end{aligned} \tag{4.53}$$

eğer $-1<\gamma_1\leq 0$ ise

$$\begin{aligned}
& J(F_{2,R}^{1,+})+J(F_{2,R}^{1,-}) \\
&= \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}} \\
&\prec \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{\left|\tau-w_1\right|^{\lambda_1-1}\left|d\tau\right|}{\left[\min\left\{\left|\tau-w_1\right|;\left|\tau-w'\right|\right\}\right]^{\gamma_1(q-1)+q-1}} \\
&\prec n^{(\gamma_1+1)(q-1)\lambda_1}
\end{aligned} \tag{4.54}$$

elde edilir. (4.48)–(4.54) bağıntıları birleştirilerek her $\gamma_1>-1,\ q>1$ ve $0<\lambda_1<2$ için

$$J(F_{1,R}^{1,+})+J(F_{1,R}^{1,-})\prec n^{(\tilde{\gamma}_1+1)(q-1)\tilde{\lambda}_1}, \tag{4.55}$$

elde edilir.

2) $z'\in L^2$ olsun. Bu durumda, Sonuç 3.3.6.'ya göre,

2.1) $z'\in E_1^{2,\pm}$ olsun.

$$\begin{aligned}
& J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-}) \\
&= \int_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}}\left|d\tau\right| \\
&\prec \int_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{d(\Psi(\tau),L)\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}(\left|\tau\right|-1)} \\
&\prec \int_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)-1}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}(\left|\tau\right|-1)} \\
&\prec \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{\left|d\tau\right|}{d_{2,R}^{\gamma_2(q-1)-1}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}(\left|\tau\right|-1)} \\
&\quad + \int_{F_{1,R}^{2,-}} \frac{\left|d\tau\right|}{d_{2,R}^{\gamma_2(q-1)-1}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}(\left|\tau\right|-1)}.
\end{aligned} \tag{4.56}$$

Son iki integral birbirine denktir, bu nedenle sadece bir tanesini değerlendirmek yeterlidir, ilk olarak birinci ele alınır. $\tau \in F_{1,R}^{2,+}$ ise $\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|$ için aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\begin{aligned}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right| &\succ \max\left\{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|;\left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|\right\}\\ &=\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right| \succ \left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|^{\frac{1}{1+\beta_2}}\end{aligned}$$

Bu durumda,

$\gamma_2>0$ için

$$\begin{aligned}J(F_{1,R}^{2,+}) &\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|^{\frac{\gamma_2(q-1)+q-1}{1+\alpha_2}}}\\ &\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|^{\frac{(\gamma_2+1)(q-1)}{1+\alpha_2}}} \prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{|d\tau|}{\left|\tau-w_2^+\right|^{\frac{(\gamma_2+1)(q-1)}{1+\alpha_2}}}\\ &\prec\begin{cases} n^{\frac{(\gamma_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)}, & \dfrac{(\gamma_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)>1,\\ n\ln n, & \dfrac{(\gamma_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)=1,\\ n, & \dfrac{(\gamma_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)<1,\end{cases}\end{aligned}$$

ve $-1<\gamma_2\le 0$ için

$$\begin{aligned}J(F_{1,R}^{2,+}) &\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{(-\gamma_2)(q-1)}|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|^{\frac{q-1}{1+\alpha_2}}}\\ &\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{|d\tau|}{\left|\tau-w_2^+\right|^{\frac{q-1}{1+\alpha_2}}}\\ &\prec\begin{cases} n^{\frac{q-1}{1+\alpha_2}}, & \dfrac{q-1}{1+\alpha_2}>1,\\ n\ln n, & \dfrac{q-1}{1+\alpha_2}=1,\\ n, & \dfrac{q-1}{1+\alpha_2}<1\end{cases}\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece, $z'\in E_1^{2,\pm}$ ise

$$J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-})\prec\begin{cases} n^{\frac{(\tilde{\gamma}_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)}, & \frac{(\tilde{\gamma}_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)>1, \\ n\ln n, & \frac{(\tilde{\gamma}_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)=1, \\ n, & \frac{(\tilde{\gamma}_2+1)}{1+\alpha_2}(q-1)<1 \end{cases} \tag{4.57}$$

elde edilir.

2.2) $z'\in E_2^{2,\pm}$ olsun.

$\gamma_2>-1$ için

$$J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-})=\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}}\frac{d(\Psi(\tau),L)\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}(\left|\tau\right|-1)}$$
$$\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q-1}}$$

dir.

$\tau\in F_{1,R}^{2,+}$ ise $\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|$ için aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|\succ\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|$$

Bu durumda, önceki duruma benzer olarak

eğer $\gamma_2>0$ ise

$$J(F_{1,R}^{2,+})\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{q-1}}$$
$$\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1}}$$
$$\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w_2^{+}\right|^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1}}$$
$$\prec\begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1}, & \frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1>1, \\ n\ln n, & \frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1=1, \\ n, & \frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1<1, \end{cases}$$

eğer $-1<\gamma_2\leq 0$ ise

$$
\begin{aligned}
J(F_{1,R}^{2,+}) &\prec n\int_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{(-\gamma_2)(q-1)}\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{q-1}}\\
&\prec n\int_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{q-1}}\\
&\prec n\int_{F_{1,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w_2^{+}\right|^{q-1}}\\
&\prec\begin{cases} n^{q-1}, & q>2,\\ n\ln n, & q=2,\\ n, & q<2,\end{cases}
\end{aligned}
$$

elde edilir. Böylece, bu durumda

$$
J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-})\prec\begin{cases} n^{\frac{\tilde{\gamma}_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1}, & \dfrac{\tilde{\gamma}_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1>1,\\ n\ln n, & \dfrac{\tilde{\gamma}_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1=1,\\ n, & \dfrac{\tilde{\gamma}_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1<1,\end{cases} \tag{4.58}
$$

elde edilir.

2.3) $z'\in E_1^{2,\pm}$ olsun.

Her $\gamma_2>0$ için

$$
\begin{aligned}
&J(F_{2,R}^{2,+})+J(F_{2,R}^{2,-}))\\
&=\int_{F_{2,R}^{2,+}\cup F_{2,R}^{2,-}}\frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}}\left|d\tau\right|\\
&\prec n\int_{F_{2,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}}\\
&+n\int_{F_{2,R}^{2,-}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2(q-1)}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}}\quad .
\end{aligned} \tag{4.59}
$$

Son iki integral birbirine denktir, bu nedenle sadece bir tanesini değerlendirmek yeterlidir, ilk olarak birinci ele alınsın. $\tau\in F_{2,R}^{2,+}$ ve $z'\in E_1^{2,\pm}$ için Lemma 3.3.1.'e göre

$$\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right| \succ \left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|;$$

$$\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right| \succ d_{2,R} \succ \left|z_{2,R}-z_2^+\right|^{\frac{1}{1+\alpha_2}} \succ \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1}{1+\alpha_2}}$$

elde edilir. Bu durumda,

$$J(F_{2,R}^{2,+}) \prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|^{\gamma_2(q-1)+q-1}}$$

$$\prec n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}} \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w_2^+\right|^{q-1}}$$

$$\prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1}, & q>2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1}\ln n, & q=2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1}, & q<2, \end{cases}$$

ve böylece $\gamma_2 > 0$ için

$$J(F_{2,R}^{2,+})+J(F_{2,R}^{2,-}) \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1}, & q>2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1}\ln n, & q=2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1}, & q<2, \end{cases}$$

elde edilir.

Eğer $-1<\gamma_2 \le 0$ ise

$$J(F_{2,R}^{2,+})+J(F_{2,R}^{2,-})$$

$$= \int_{F_{2,R}^{2,+}\cup F_{2,R}^{2,-}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{(-\gamma_2)(q-1)}\left|\Psi'(\tau)\right||d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}} \prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q-1}}$$

$$\prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^+\right|^{q-1}} \prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w_2^+\right|^{q-1}} \prec \begin{cases} n^q, & q>2, \\ n\ln n, & q=2, \\ n, & q<2, \end{cases} \tag{4.60}$$

elde edilir.

2.4) $z' \in E_2^{2,\pm}$ olsun.

Her $\gamma_2 > 0$ için

$$J(F_{2,R}^{2,+}) = \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2(q-1)}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q}}$$

$$\prec \frac{n}{d_{2,R}^{\gamma_2(q-1)}} \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q-1}}$$

$$\prec n^{1+\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}} \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w'|^{q-1}} \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1}, & q>2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1}\ln n, & q=2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1}, & q<2, \end{cases} \tag{4.61}$$

ve

$$J(F_{2,R}^{2,-}) = \int\limits_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2(q-1)}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q}}$$

$$\prec \frac{n}{d_{2,R}^{\gamma_2(q-1)}} \int\limits_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q-1}}$$

$$\prec n^{1+\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}} \int\limits_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^{q-1}}$$

$$\prec n^{1+\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}} \int\limits_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w'|^{q-1}} \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+q-1}, & q>2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1}\ln n, & q=2, \\ n^{\frac{\gamma_2(q-1)}{1+\alpha_2}+1}, & q<2, \end{cases} \tag{4.62}$$

elde edilir.

$z' \in E_2^{2,-}$ durumu $z' \in E_2^{2,+}$ durumuna benzer olarak değerlendirilir.

Eğer $-1<\gamma_2\leq 0$ ise

$$J(F_{2,R}^{2,+})=\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}}\frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{(-\gamma_2)(q-1)}\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}}$$
$$\prec n\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q-1}}\prec\begin{cases} n^{q-1}, & q>2,\\ n\ln n, & q=2,\\ n, & q<2,\end{cases}\tag{4.63}$$

ve

$$J(F_{2,R}^{2,-})=\int\limits_{F_{2,R}^{2,-}}\frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{(-\gamma_2)(q-1)}\left|\Psi'(\tau)\right|\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q}}$$
$$\prec n\int\limits_{F_{2,R}^{2,-}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{q-1}}\prec\begin{cases} n^{q-1}, & q>2,\\ n^{1+\varepsilon}\ln n, & q=2,\\ n^{1+\varepsilon}, & q<2,\end{cases}\tag{4.64}$$

elde edilir.

(4.57)–(4.64) değerlendirmeleri birleştirilerek her $-1<\gamma_2\leq 0$ için

$$\left(J_{n,2}^{2}\right)^{\frac{1}{q}}\prec\begin{cases} n^{\frac{1}{p}}, & p<2,\\ n^{1-\frac{1}{p}}, & p\geq 2,\end{cases}\tag{4.65}$$

ve her $\gamma_2>0$ için

$$\left(J_{n,2}^{2}\right)^{\frac{1}{q}}\prec\begin{cases} n^{\frac{\gamma_2}{p(1+\alpha_2)}+\frac{1}{p}}, & 1<p<2+\dfrac{\gamma_2}{1+\alpha_2},\\ n^{1-\frac{1}{p}}, & p\geq 2+\dfrac{\gamma_2}{1+\alpha_2},\end{cases}\tag{4.66}$$

elde edilir.

(4.47), (4.56), (4.65) ve (4.66) birleştirilerek $i=1,2;\ m_1=1,\ m_2=2$ için

$$J_{n,2}\prec^{\frac{(\tilde{\gamma}_1+1)\tilde{\lambda}_1}{p}}+\begin{cases} n^{\frac{\gamma_2}{p(1+\alpha_2)}+\frac{1}{p}}, & 1<p<2+\dfrac{\gamma_2}{1+\alpha_2},\\ n^{1-\frac{1}{p}}, & p\geq 2+\dfrac{\gamma_2}{1+\alpha_2},\end{cases}$$

elde edilir.

(4.37), (4.38), (4.39),(4.40) ve (4.42)'den her $i=\overline{m_1+1,m}$ için

$$\begin{aligned}
\|P_n\|_{C(\bar{G})} &\prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \cdot J_{n,2} \\
&\prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{m} \left(J_{n,2}^{i}\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{2} \left(J(F_{j,R}^{i,\pm})\right)^{\frac{1}{q}} \\
&\prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \left(\sum_{i=1}^{m_1} n^{\frac{(\tilde{\gamma}_i+1)\tilde{\lambda}_i}{p}} + \begin{cases} \sum\limits_{i=m_1+1}^{m} n^{\frac{\tilde{\gamma}_i+1}{p(1+\alpha_i)}+\frac{\alpha_i}{p(1+\alpha_i)}}, & 1<p<2+\dfrac{\tilde{\gamma}_i}{1+\alpha_i}, \\ n^{1-\frac{1}{p}}, & p\geq 2+\dfrac{\tilde{\gamma}_i}{1+\alpha_i}, \end{cases} \right)
\end{aligned}$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanır.

4.2. YARIKONFORM, PARÇALI-YARIKONFORM EĞRİ İLE SINIRLI SONLU VE SONSUZ BÖLGELERDE CEBİRSEL POLİNOMLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

Bu bölümde; (1.2)–ye benzeri değerlendirmeler $\mathcal{L}_p(h,L)$ uzayında aşağıdaki iki durumda incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir: önce çeşitli fonksiyonel koşullarla tanımlanan yarıkonform eğri ile sınırlı, sonlu ve sonsuz bölgelerde cebirsel polinomların değerlendirilmesi ele alınacaktır. Burada, bölgenin özelliklerini taşıyan parametre olarak sınır eğrisinin yarıkonformluk katsayısı değil, söz konusu özellikleri veren fonksiyonel koşullarda belirtilen parametreler olacaktır. Bu parametreler, ayrıca, elde edilmiş sonuçların, çeşitli özelliklerle tanımlanan bir çok bölgeler için elde edilmesine imkan verir.

Daha sonra benzeri sonuçlar iç ve dış sıfır açılara sahip parçalı yarıkonform eğrilerle sınırlı, sonlu ve sonsuz bölgeler için verilmiştir. Bu halde, iç sıfır açıların şeklinin etkisiz, dış sıfır açıların ise etkili olduğu gözlemlenmiştir. Burada, dış sıfır açılar olarak "kuvvet fonksiyonlu dokunmaya sahip" açılar ele alınmıştır ve dokunma mertebesinin (kuvvet fonksiyonu mertebesinin) sonuçlardaki etkisi gösterilmiştir.

4.2.1. Temel Sonuçlar

Bu bölümde verilecek olan esas teorem ve sonuçların ifadesi ve ispatlarında kullanılan notasyonlardan bir kısmı aşağıda verilmiştir:

Her $\alpha,\beta,\ \ 0<\alpha,\beta\le 1;\ p<1;\ \kappa,\ 0\le\kappa<1$ ve $k,\ 1\le k\le m;\ \ j,\ 1\le j\le k$ için aşağıdakiler tanımlansın:

$\left\{z_j\right\}_{j=1}^{m}$ noktaları L eğrisi üzerinde yerleşsin.

$\Gamma_k := \left\{\gamma_j\right\}$,

$\Gamma_k^{(1)} := \left\{\gamma_j \in \Gamma_m \ :\ \gamma_j > \alpha\beta(p-1)\right\}$,

$\Gamma_k^{(2)} := \left\{\gamma_j \in \Gamma_m \ :\ \gamma_j = \alpha\beta(p-1)\right\}$,

$\Gamma_k^{(3)} := \left\{\gamma_j \in \Gamma_m \ :-1< \gamma_j < \alpha\beta(p-1)\right\}$,

$\Gamma_k^{(1)} := \left\{\gamma_j \in \Gamma_m \ :\ \gamma_j > \tfrac{1-\kappa}{1+\kappa}(p-1)\right\}$,

$\Gamma_k^{(2)} := \left\{\gamma_j \in \Gamma_m \ :\ \gamma_j = \tfrac{1-\kappa}{1+\kappa}(p-1)\right\}$,

$\Gamma_k^{(3)} := \left\{\gamma_k \in \Gamma_m \ :-1< \gamma_k < \tfrac{1-\kappa}{1+\kappa}(p-1)\right\}$,

$\gamma_k^* = \max\left\{\gamma_k \ :\ \gamma_k \in \Gamma_k^{(1)}\right\}$, $\gamma^* := \gamma_m^*$; $\ \widehat{\gamma}_k^* = \max\left\{0;\gamma_k \ :\ \gamma_k \in \Gamma_k^{(1)}\right\}$, $\widetilde{\gamma}^* := \widetilde{\gamma}_m^*$.

Bölüm 4.1 de olduğu gibi, bu bölümde de esas teoremler Teorem 4.2.1.1. – Teorem 4.2.1.2. (sonsuz bölgeler için), Teorem 4.2.1.3. (sonlu bölgeler için) olarak ve onların sonuçları olan Sonuç 4.2.1.1. – Sonuç 4.2.1.3. olarak aşağıda verilir. Daha sonra, bu elde edilen sonuçların $p>0$ durumuna taşınabileceği ile ilgili Sonuç 4.2.1.4. olarak bir sonuç verilir.

Önce genel durum için değerlendirme verilsin.

Teorem 4.2.1.1. $p>1$, $G\in\tilde{Q}_{\alpha}^{\beta}$, $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$, ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$\left|P_n(z)\right|\leq c_{10}\frac{D_{n;1}}{d(z,L)}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1},\quad z\in\Omega_{1+\frac{c_1}{n}}, \tag{4.67}$$

sağlanır, burada $c_{10}=c_{10}(G,p)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n;1}:=\begin{cases}\sum\limits_{l=1}^{m} n^{\frac{\gamma_i}{\alpha p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\beta}, & \text{her } i=\overline{1,m} \text{ için } \gamma_i\in\Gamma_m^{(1)} \text{ ise,}\\ \left(n^{1-\beta}\ln n\right)^{1-\frac{1}{p}}, & \text{her } i=\overline{1,m} \text{ için } \gamma_i\in\Gamma_m^{(2)} \text{ ise,}\\ n^{(1-\beta)(1-\frac{1}{p})}, & \text{her } i=\overline{1,m} \text{ için } \gamma_i\in\Gamma_m^{(3)} \text{ ise,}\end{cases} \tag{4.68}$$

dır.

Buradan, ağırlık fonksiyonunun her singüler noktaya ait değerlendirmeleri dikkate alınırsa, aşağıdaki global değerlendirme bulunur:

Teorem 4.2.1.2. $p>1$, $G\in\tilde{Q}_{\alpha}^{\beta}$, $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$, ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$\left|P_n(z)\right|\leq c_{11}\frac{D_{n;2}}{d(z,L)}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\left|\Phi(z)\right|^{n+1},\quad z\in\Omega_{1+\frac{c_1}{n}} \tag{4.69}$$

sağlanır, burada $c_{11}=c_{11}(G,p)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n;2} := \begin{cases} n^{\frac{\gamma_k^*}{\alpha p}-(1-\frac{1}{p})\beta}, & \text{her } i=\overline{1,k},\ k\le m, \text{ için en azından bir } \gamma_i \in \Gamma_k^{(1)} \text{ vardır,} \\ (n^{1-\beta}\ln n)^{1-\frac{1}{p}}, & \text{her } i=\overline{1,k},\ k\le m, \text{ için en azından bir } \gamma_i \in \Gamma_k^{(2)} \setminus \Gamma_m^{(1)} \text{ vardır,} \\ n^{(1-\beta)(1-\frac{1}{p})}, & \text{her } i=\overline{1,m} \text{ için } \gamma_i \in \Gamma_m^{(3)} \end{cases} \tag{4.70}$$

dır.

Özel halde, $h(z)$ ağırlık fonksiyonunun bir tane singüler noktaya sahip olması durumunda aşağıdaki iki sonuca varılır:

Sonuç 4.2.1.1. $p>1$, $G\in\tilde{Q}_\alpha^\beta$, $\frac{1}{2}<\alpha\le1$, $0<\beta\le1$, $h(z)$ ve $m=1$ için (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$|P_n(z)| \le c_{12}\frac{D_{n;3}}{d(z,L)}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}|\Phi(z)|^{n+1}, \quad z\in\Omega_{1+\frac{\varepsilon_1}{n}} \tag{4.71}$$

sağlanır, burada $c_{12}=c_{12}(G,p)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n;3} := \begin{cases} n^{\frac{\gamma_1}{\alpha p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\beta}, & \gamma_1\in\Gamma_1^{(1)} \text{ ise,} \\ \left(n^{1-\beta}\ln n\right)^{1-\frac{1}{p}}, & \gamma_1\in\Gamma_1^{(2)} \text{ ise,} \\ n^{(1-\beta)(1-\frac{1}{p})}, & \gamma_1\in\Gamma_1^{(3)} \text{ ise.} \end{cases} \tag{4.72}$$

Şimdi sonlu bölge için benzeri değerlendirme verilsin:

Teorem 4.2.1.3. $p>1$, $G\in\tilde{Q}_\alpha^\beta$, $\frac{1}{2}<\alpha\le1$, $0<\beta\le1$, ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \le c_{13}n^{\frac{\eta+p}{\alpha p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\beta}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \tag{4.73}$$

sağlanır, burada $c_{13}=c_{13}(G,p)>0$, n'den bağımsız bir sabit ve $\eta:=\max\{0;\gamma_k, k=1,...,m\}$ dır.

Teorem 4.2.1.3. ve Teorem 4.2.1.2 birleştirilerek ve Bernstein-Walsh Lemması [3] dikkate alınırsa, $|P_n(z)|$ 'nin tüm kompleks düzlemdeki değerlendirmesi elde edilir:

Sonuç 4.2.1.2. $p>1, G\in \tilde{Q}_{\alpha}^{\beta}$, $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$, ve $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$|P_n(z)|\leq c_{14}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\begin{cases} n^{\frac{\eta+p}{\alpha p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\beta}, & z\in\overline{G}_{1+\frac{\varepsilon_1}{n}}, \\ \dfrac{D_{n;2}}{d(z,L)}|\Phi(z)|^{n+1}, & z\in\Omega_{1+\frac{\varepsilon_1}{n}}. \end{cases} \tag{4.74}$$

sağlanır, burada $c_{14}=c_{14}(G,p)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit, $\eta:=\max\{0;\gamma_k,k=1,...,m\}$ ve $D_{n;2}$ (4.70)'deki gibi tanımlıdır.

Sonuç 4.2.1.3. $p>1$, $G\in\tilde{Q}_{\alpha}^{\beta}$, $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$, $h(z)$ ve $m=1$ için (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$|P_n(z)|\leq c_{15}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}\begin{cases} n^{\frac{\gamma_1+p}{\alpha p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\beta}, & z\in\overline{G}_{1+\frac{\varepsilon_1}{n}}, \\ \dfrac{D_{n;3}}{d(z,L)}|\Phi(z)|^{n+1}, & z\in\Omega_{1+\frac{\varepsilon_1}{n}}. \end{cases} \tag{4.75}$$

sağlanır, $c_{15}=c_{15}(G,p)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve $D_{n;3}$, (4.73)'deki gibi tanımlıdır.

Elde ettiğimiz tüm sonuçlar $p>0$ için de alınabilir. Sonuç 4.2.1.1.' e benzer olarak $p>0$ için aşağıdaki sonuç verilir.

Sonuç 4.2.1.4. $p>0$, $G\in\tilde{Q}_{\alpha}^{\beta}$, $\frac{1}{2}<\alpha\leq 1$, $0<\beta\leq 1$, $h(z)$ ve $m=1$ için (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$|P_n(z)|\leq c_{16}\frac{D_{n;4}}{d^{\frac{2}{p}}(z,L)}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}|\Phi(z)|^{n+1} \quad , \quad z\in\Omega_{1+\frac{\varepsilon_1}{n}}, \tag{4.76}$$

sağlanır, burada $c_{16}=c_{16}(G,p)>0$, z ve n'den bağımsız bir sabit ve

$$D_{n;4} := \begin{cases} n^{(\frac{\gamma_1}{\alpha}-\beta)\frac{1}{p}}, & \gamma_1 > \alpha, \\ (n^{1-\beta}\ln n)^{\frac{1}{p}}, & \gamma_1 = \alpha, \\ n^{\frac{1-\beta}{p}}, & \gamma_1 < \alpha. \end{cases} \tag{4.77}$$

Q_α^β sınıfı yeterince geniştir. Bu sınıftan olan bazı eğriler için α ve β sayıları açık şekilde yazılabilir.

Sonuç 4.2.1.5.

a) Eğer $L = \partial G \in C_\theta$ ise her $\alpha, \beta < 1$ için $G \in Q_\alpha^\beta$ dır.

b) Eğer G "L-şekilli " bölge ise $\alpha = \frac{2}{3}$ ve $\beta = \frac{1}{2}$ için $G \in Q_\alpha^\beta$.

c) Eğer L yarı düzgün eğri ise $\alpha = \frac{1}{2}(1-\frac{1}{\pi}\arcsin\frac{1}{c})^{-1}$ ve $\beta = \frac{2}{(1+c)^2}$ için $G \in Q_\alpha^\beta$ [44], [45].

d) Eğer L "c -yarı konform" eğri ise $\alpha = \frac{\pi}{2(\pi-\arcsin\frac{1}{c})}$ ve $\beta = \frac{2(\arcsin\frac{1}{c})^2}{\pi(\pi-\arcsin\frac{1}{c})}$ için $G \in Q_\alpha^\beta$ [46].

Bu sonuca dayanarak; her tespit edilmiş α, β için Q_α^β sınıfından olan eğri ile sınırlı bölgeler için yukarıda elde edilmiş Teorem 4.2.1.1. - Teorem 4.2.1.3. ve onların sonuçları olan Sonuç 4.2.1.1. - Sonuç 4.2.1.4. -e benzeri sonuçlar yazılabilir.

Gerek Bölüm 4.1 de, gerek bu bölümde, sonlu ve sonsuz bölgeler için elde edilmiş esas sonuçların kesinliği ile ilgili bir sonuç aşağıda verilir:

Uyarı 4.2.1.1. Her $n \in \mathbb{N}$ için bir T_n , $Q_n \in \wp_n$ polinomları, bir $G^i \subset \mathbb{C}$, $i = 1,2$, bölgeleri ve $c_{17} = c_{17}(G) > 0$, $c_{18} = c_{18}(G) > 0$ sabitleri vardır öyle ki

$$\|T_n\|_{C(\overline{G}^1)} \geq c_{17} n^{\frac{1}{2}} \|T_n\|_{\mathcal{L}_2(\partial G^1)}$$

ve $\forall z \in \Omega \setminus \overline{G}^2$ kapalı kümesi için

$$|Q_n(z)| \geq c_{18} \|Q_n\|_{\mathcal{L}_2(\partial G^2)} \begin{cases} |\Phi(z)|^n, & z,\ \partial G^2\text{- ye "yakin" ise,} \\ \dfrac{|\Phi(z)|^{n+\frac{1}{2}}}{d(z,L)}, & z,\ \partial G^2\text{-den "uzak" ise,} \end{cases}$$

sağlanır.

Esas teoremler ve onların sonuçları verildikten sonra şimdi onların ispatlarına geçilsin.

Teorem 4.2.1.1'in ispatı:

Yeterince küçük $\varepsilon_1 > 0$ için $R_1 := 1 + \frac{\varepsilon_1}{n}$ olsun. Her bir $z \in \Omega_{R_1}$ için $G_n(z)$ fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$G_n(z) := \frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)} \tag{4.78}$$

$G_n(z)$ fonksiyonuna sonsuz bölgeler için Cauchy integral formülü [30] uygulanırsa:

$$G_n(z) = -\frac{1}{2\pi i} \int_{L_{R_1}} G_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \; z \in \Omega_{R_1}.$$

elde edilir. Modüle geçilirse

$$|G_n(z)| \le \frac{1}{2\pi} \int_{L_{R_1}} |G_n(\zeta)| \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \le \frac{1}{2\pi d(z, L_{R_1})} \int_{L_{R_1}} |P_n(\zeta)| |d\zeta|$$

bulunur. Önce $\zeta = \Phi(\tau)$ değişken değişimi yapılıp ardından integral altı ifade $\prod_{i=1}^{m} |\Psi(\tau) - \Psi(w)|^{\frac{\gamma_i}{p}} |\Psi'(\tau)|^{\frac{1}{p}}$ ile çarpılıp bölünerek ve sonrasında da Hölder eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$\begin{aligned}
|G_n(z)| &\le \frac{1}{2\pi d(z, L_{R_1})} \int_{|\tau|=R_1} |P_n(\Psi(\tau))| |\Psi'(\tau)| |d\tau| \\
&\le \frac{1}{2\pi d(z, L_{R_1})} \left(\int_{|\tau|=R_1} \prod_{j=1}^{m} |\Psi(\tau) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j} |P_n(\Psi(\tau))|^p |\Psi'(\tau)| |d\tau| \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\times \left(\int_{|\tau|=R_1} \frac{|\Psi'(\tau)|}{\prod_{j=1}^{m} |\Psi(\tau) - \Psi(w_j)|^{\frac{q\gamma_j}{p}}} |d\tau| \right)^{\frac{1}{q}} \\
&=: \frac{1}{2\pi d(z, L_{R_1})} A_{n,p} \times B_{n,q}, \; \frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1,
\end{aligned} \tag{4.79}$$

İlk olarak, $A_{n,p}$ integrali Lemma 3.3.10. yardımı ile aşağıdaki gibi değerlendirilir:

$$A_{n,p} \prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \tag{4.80}$$

$B_{n,q}$ integralini değerlendirmek için $|\tau| = R_1$ çemberini $F_{R_1}^i$ yaylarının toplamı olarak düşünülerek

$$B_{n,q}=\left(\sum_{i=1}^{m}\int_{F_{R_1}^{i}}\frac{|\Psi'(\tau)|}{\prod_{i=1}^{m}|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)|^{\gamma_j(q-1)}}|d\tau|\right)^{\frac{1}{q}}$$

$$=:\left(\sum_{i=1}^{m}B_{n,q}^{i}\right)^{\frac{1}{q}}\leq\sum_{i=1}^{m}\left(B_{n,q}^{i}\right)^{\frac{1}{q}}, \tag{4.81}$$

bulunur, burada

$$B_{n,q}^{i}\coloneqq\int_{F_{R_1}^{i}}\frac{|\Psi'(\tau)|}{\prod_{i=1}^{m}|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)|^{\gamma_j(q-1)}}|d\tau|,\ i=\overline{1,m}.$$

Şimdi, $B_{n,q}^{i}$ integralinin değerlendirilmesinde, ilk olarak $w_i=\Phi(z_i)$ noktalarının ayrık olmasından

$$B_{n,q}^{i}\asymp\int_{F_{R_1}^{i}}\frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)|^{\gamma_i(q-1)}}|d\tau|\coloneqq J(F_{R_1}^{i}). \tag{4.82}$$

elde edilir.

İleriki hesaplamalarda basitlik için, $i=1$ alınsın. Buna göre,

$$F_{R_1}^{11}\coloneqq\left\{\tau:\tau\in F_{R_1}^{1},\ |\tau-w_1|<c_1n^{-1}\right\},$$
$$F_{R_1}^{12}\coloneqq\left\{\tau:\tau\in F_{R_1}^{1},\ c_1n^{-1}\leq|\tau-w_1|<c_2\right\}.$$

olmak üzere $F_{R_1}^{1}=F_{R_1}^{11}\cup F_{R_1}^{12}$ olarak yazılır ve dolayısıyla, (4.82) aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned}J(F_{R_1}^{1})&=\int_{F_{R_1}^{1}}\frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}}|d\tau|\\&=\int_{F_{R_1}^{11}}\frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}}|d\tau|\\&\quad+\int_{F_{R_1}^{12}}\frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}}|d\tau|\\&=:J(F_{R_1}^{11})+J(F_{R_1}^{12}).\end{aligned} \tag{4.83}$$

Bu integral $-1<\gamma_1\leq 0$ ve $\gamma_1>0$ olma durumlarında ayrı ayrı değerlendirilir.

İlk olarak, $\gamma_1>0$ olsun. $\tau\ :\ |\tau|=R_1>1$ için $\tau^*\ :=\frac{\tau}{R_1}$ tanımlansın. Böylece, $G\in Q_\alpha^\beta$ olduğundan, Lemma 3.3.1.'e göre:

$$d(\Psi(\tau),L)\prec\left|\Psi(\tau)-\Psi(\tau^*)\right|\prec\left|\tau-\tau^*\right|^{\beta}\prec n^{-\beta}.$$

sağlanır. O halde, Lemma 3.3.1. ve (4.81)' den

$$
\begin{aligned}
J(F_{R_1}^{1k}) &= \int_{F_{R_1}^{1k}} \frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}}|d\tau| \\
&\prec \int_{F_{R_1}^{1k}} \frac{d(\Psi(\tau),L)}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}\left(|\tau|-1\right)}|d\tau| \\
&\prec \int_{|\tau|=R_1} \frac{|\tau-\tau^*|^{\beta}}{|\tau-w_1|^{\frac{\gamma_1(q-1)}{\alpha}}\left(|\tau|-1\right)}|d\tau| \\
&\prec n^{1-\beta}\int_{|\tau|=R_1} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{\frac{\gamma_1(q-1)}{\alpha}}} \\
&\prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_1(q-1)}{\alpha}-\beta}, & \gamma_1(q-1)>\alpha, \\ n^{1-\beta}\ln n, & \gamma_1(q-1)=\alpha, \quad k=1,2. \\ n^{1-\beta}, & \gamma_1(q-1)<\alpha, \end{cases}
\end{aligned}
\tag{4.84}
$$

elde edilir.

Yeterince küçük $\varepsilon_1>0$ için $R_1=1+\frac{\varepsilon_1}{n}$ olduğundan ve Lemma 3.3.10.'dan:

$$
(B_{n,q})^q \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_1(q-1)}{\alpha}-\beta}, & \gamma_1(q-1)>\alpha, \\ n^{1-\beta}\ln n, & \gamma_1(q-1)=\alpha, \\ n^{1-\beta}, & \gamma_1(q-1)<\alpha. \end{cases}
\tag{4.85}
$$

elde edilir.

Şimdi $-1<\gamma_1\leq 0$ olsun. Keyfi bir $\tilde{z}\in L_{R_1}$ için $d(\Psi(\tau),L):=\left|\tilde{z}-z^*\right|,\ z^*\in L$ ve $\tilde{w}:=\Phi(\tilde{z}),\ w^*:=\Phi(z^*)$ olsun. $G\in Q_{\alpha}^{\beta}$ olduğundan $\left|\tilde{z}-z^*\right|\prec\left|\tilde{w}-w^*\right|^{\beta}$ dır. Böylece,

$$
\begin{aligned}
J(F_{R_1}^{11}) &= \int_{F_{R_1}^{11}} \frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}}|d\tau| \\
&\prec \int_{F_{R_1}^{11}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{(-\gamma_1)(q-1)}}{\left(|\tau|-1\right)^{1-\beta}}|d\tau| \\
&\prec n^{1-\beta}\int_{F_{R_1}^{11}} |\tau-w_1|^{(-\gamma_1)(q-1)\beta}|d\tau| \\
&\prec n^{1-\beta+\gamma_1(q-1)\beta}\cdot mesF_{R_1}^{11} \prec n^{\gamma_1(q-1)\beta-\beta}\prec 1.
\end{aligned}
$$

ve

$$\begin{aligned} J(F_{R_1}^{12}) &= \int\limits_{F_{R_1}^{12}} \frac{|\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1(q-1)}}|d\tau| \\ &\prec \int\limits_{F_{R_1}^{12}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{(-\gamma_1)(q-1)}}{(|\tau|-1)^{1-\beta}}|d\tau| \\ &\prec n^{1-\beta}\cdot mesF_{R_1}^{12} \prec n^{1-\beta}. \end{aligned} \tag{4.86}$$

Sonuç olarak, bu durumda

$$(B_{n,q}^1)^q \prec 1.$$

sağlanır. (4.78)-(4.86) birleştirilirse, her $z\in\Omega_{R_1}$ için

$$|P_n(z)| \prec \frac{|\Phi(z)|^{n+1}}{d(z,L_{R_1})}\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}$$

$$\times\begin{cases} \sum\limits_{i=1}^{m} n^{\frac{\gamma_i}{\alpha p}-\left(1-\frac{1}{p}\right)\beta}, & \gamma_i > \alpha(p-1), \quad \text{her } i=\overline{1,m} \text{ için}, \\ \left(n^{1-\beta}\ln n\right)^{1-\frac{1}{p}}, & \gamma_i = \alpha(p-1), \quad \text{her } i=\overline{1,m} \text{ için}, \\ n^{(1-\beta)(1-\frac{1}{p})}, & \text{-1}<\gamma_i < \alpha(p-1), \quad \text{her } i=\overline{1,m} \text{ için}. \end{cases}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1.3'ün ispatı:

$R=1+\frac{c_1}{n}$ ve $\|P_n\|_{C(\overline{G})} =: |P_n(z')|$, $z'\in L$; $w' := \Phi(z')$ olsun. Daha sonra, herhangi bir δ, $0<\delta\le\min\{|z'-z_i|, i=\overline{1,m}\}$, için $|z'-z_{i_0}|\le\delta$, sağlanacak şekilde bir $z_{i_0}\in\{z_i\}_{i=1}^m$, $i_0=\overline{1,m}$ ele alınsın. Basitlik için, $i_0=1$, $w_1=\Phi(z_1)$ alınsın. G_R bölgesinde $P_n(z')$ için Cauchy integral gösterimine göre [30]:

$$P_n(z') = \frac{1}{2\pi i}\int\limits_{L_R} P_n(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta-z'}, \; z\in G_R.$$

yazılır.

Önce $\tau = \Phi(\zeta)$ değişken değişimi yapıp ardından integral altı ifade $\prod_{i=1}^{m} \left|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right|^{\frac{\gamma_i}{p}} \left|\Psi'(\tau)\right|^{\frac{1}{p}}$ ile çarpılıp bölünerek ve sonrasında da Hölder eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki ifade elde edilir:

$$
\begin{aligned}
|P_n(z')| &\leq \frac{1}{2\pi} \int_{L_R} |P_n(\zeta)| \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z'|} \\
&= \frac{1}{2\pi} \int_{|\tau|=R} \frac{|P_n(\Psi(\tau))||\Psi'(\tau)|}{|\Psi(\tau) - \Psi(w')|} |d\tau| \\
&\leq \frac{1}{2\pi} \left(\int_{|\tau|=R} \prod_{j=1}^{m} |\Psi(\tau) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j} |P_n(\Psi(\tau))|^p |\Psi'(\tau)| |d\tau| \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_{|\tau|=R} \frac{|\Psi'(\tau)|^{\left(1-\frac{1}{p}\right)q}}{\prod_{j=1}^{m} |\Psi(\tau) - \Psi(w_j)|^{\frac{q\gamma_j}{p}} |\Psi(\tau) - \Psi(w')|^q} |d\tau| \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{2\pi} \left(\int_{L_R} h(\zeta) |P_n(\zeta)|^p |d\zeta| \right)^{\frac{1}{p}} \\
&\quad \times \left(\int_{|\tau|=R} \frac{|\Psi'(\tau)|}{\prod_{j=1}^{m} |\Psi(\tau) - \Psi(w_j)|^{\gamma_j(q-1)} |\Psi(\tau) - \Psi(w')|^q} |d\tau| \right)^{\frac{1}{q}} \\
&= \frac{1}{2\pi} J_{n,1} \times J_{n,2},
\end{aligned} \tag{4.87}
$$

burada,

$$J_{n,1} := \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h, L_R)},$$

$$\left(J_{n,2}\right)^q := \int_{|\tau|=R} \frac{\left|\Psi'(\tau)\right|}{\prod_{j=1}^{m} \left|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)\right|^{\gamma_i(q-1)} \left|\Psi(\tau)-\Psi(w)\right|^q} \left|d\tau\right|.$$

Böylece, Lemma 3.3.10.' dan:

$$|P_n(z)| \prec J_{n,1} \bullet J_{n,2} \prec \| P_n \|_{\mathcal{L}_p(h,\, L)} \bullet J_{n,2},\ z \in L,\ w = \Phi(z). \tag{4.88}$$

Önerme 3.3.1.' den:

$$d(\Psi(\tau), L) \prec \left(|\tau|-1\right)^{\beta}, \quad \left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right| \succ \left(\left|\tau - w'\right|\right)^{\frac{1}{\alpha}} \tag{4.89}$$

elde edilir.

$F^{11} := \left\{\tau \ : \ |\tau| = R, |\tau - w_1| \leq \delta \right\}; F^{12} := \left\{\tau \ : \ |\tau| = R, |\tau - w_1| > \delta \right\}$ kabul edilsin.

$G \in Q_{\alpha}^{\beta}$ ve $w_i := \Phi(z_i)$ noktaları ayrık olduğundan

$$\begin{aligned}
\left(J_{n,2}\right)^q &\prec \int\limits_{|\tau|=R} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)} \left|\tau - w'\right|^{\frac{q}{\alpha}} \left(|\tau|-1\right)^{1-\beta}} \\
&= \int\limits_{F^{11}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)} \left|\tau - w'\right|^{\frac{q}{\alpha}} \left(|\tau|-1\right)^{1-\beta}} \\
&+ \int\limits_{F^{12}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)} \left|\tau - w'\right|^{\frac{q}{\alpha}} \left(|\tau|-1\right)^{1-\beta}} \\
&=: \left(J_{n,2}^1\right)^q + \left(J_{n,2}^2\right)^q
\end{aligned} \tag{4.90}$$

bulunur. Bu integral γ_1 in her iki durumu için ayrı ayrı değerlendirilir.

Durum 1. $\gamma_1 > 0$ olsun.

(4.89) ve (4.90)' dan, her $q > 1,\ 0 < \alpha, \beta \le 1$ için

$$\begin{aligned}
\left(J_{n,2}^1\right)^q &:= \int\limits_{F^{11}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)} \left|\tau - w'\right|^{\frac{q}{\alpha}} \left(|\tau|-1\right)^{1-\beta}} \\
&\prec n^{1-\beta} \int\limits_{F^{11}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau - w_1\right|^{\frac{\gamma_1(q-1)}{\alpha}} \left|\tau - w'\right|^{\frac{q}{\alpha}}}.
\end{aligned} \tag{4.91}$$

ve

$\Upsilon_1^1 := \left\{\tau \in F^{11} \ :\ |\tau - w_1| < |\tau - w'|\right\}$ ve $\Upsilon_2^1 := \left\{\tau \in F^{11} \ :\ |\tau - w_1| \ge |\tau - w'|\right\}$ için

$$\left(J_{n,2}^1\right)^q \prec n^{1-\beta} \int\limits_{\Upsilon_1^1} \frac{|d\tau|}{\left|\tau - w_1\right|^{\frac{\gamma_1(q-1)}{\alpha}+\frac{q}{\alpha}}} + n^{1-\beta} \int\limits_{\Upsilon_2^1} \frac{|d\tau|}{\left|\tau - w'\right|^{\frac{\gamma_1(q-1)}{\alpha}+\frac{q}{\alpha}}} \prec n^{\frac{\gamma_1(q-1)}{\alpha}+\frac{q}{\alpha}-\beta}, \tag{4.92}$$

sağlanır. Böylece, $q > 1,\ 0 < \alpha, \beta \le 1$ ve $\gamma_1 > 0$ için (4.90), (4.91) ve (4.92)' den

$$\begin{aligned}
\left(J_{n,2}^2\right)^q &:= \int\limits_{F^{12}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{\gamma_1(q-1)} \left|\tau - w'\right|^{\frac{q}{\alpha}} \left(|\tau|-1\right)^{1-\beta}} \\
&\prec n^{1-\beta} \int\limits_{F^{12}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau - w'\right|^{\frac{q}{\alpha}}} \prec n^{\frac{q}{\alpha}-\beta}.
\end{aligned} \tag{4.93}$$

$$J_{n,2} \prec n^{\frac{\gamma_1(q-1)+q}{q\alpha}-\frac{\beta}{q}}. \tag{4.94}$$

elde edilir.

Durum 2. $-1<\gamma_1\le 0$ olsun.

$$F_1^{11} := \{\tau \in F^{11} : |\tau - w_1| \le c(|\tau|-1)\},$$
$$F_2^{11} := \{\tau \in F^{11} : |\tau - w_1| > c(|\tau|-1)\}. \tag{4.95}$$

olarak gösterilsin ve Durum 1 deki değerlendirmelere benzer olarak,

$J_{n,2}^{k}$, $k=1,2$, integralleri için aşağıdaki değerlendirmeler elde edilir:

$$\left(J_{n,2}^{1}\right)^q = \int_{F^{11}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)(q-1)}|d\tau|}{|\tau-w'|^{\frac{q}{\alpha}}\left(|\tau|-1\right)^{1-\beta}} \prec n^{1-\beta}\int_{F^{11}}\frac{|d\tau|}{|\tau-w'|^{\frac{q}{\alpha}}} \prec n^{\frac{q}{\alpha}-\beta}, \tag{4.96}$$

ve

$$\left(J_{n,2}^{2}\right)^q \prec \int_{F^{12}} \frac{|d\tau|}{\left(|\tau|-1\right)^{1-\beta}} \prec n^{\frac{q}{\alpha}-\beta}, \tag{4.97}$$

neredeki, her $q>1,\ 0<\alpha,\beta\le 1$ için

dır ve

$$(J_{n,2}^{2})^q \prec \int_{F^{12}} \frac{|d\tau|}{(|\tau|-1)^{1-\beta}} \prec n^{\frac{q}{\alpha}-\beta}. \tag{4.98}$$

Bu durumda, $q>1,\ 0<\alpha,\beta\le 1$ için (4.13), (4.17), (4.18), (4.19) ve (4.20)' den:

$$J_{n,2} \prec n^{\frac{1}{\alpha}-\frac{\beta}{q}} \tag{4.99}$$

elde edilir. (4.93), (4.99) ve (4.88)' den aşağıdaki eşitsizlik bulunur:

$$\left|P_n(z')\right| \prec n^{\frac{\eta+1}{\alpha p}+(1-\frac{1}{p})(\frac{1}{\alpha}-\beta)} \cdot \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)},$$

burada, $\eta := \max\{0;\gamma_k,\ k=\overline{1,m}\}$ ve ispat tamamlanır.

Şimdi ise iç ve dış sıfır açı içeren parçalı-yarıkonform eğri ile sınırlı sonlu ve sonsuz bölgelerde cebirsel polinomların değerlendirilmesi ele alınacaktır.

Bu kısımda (1.2) eşitsizliğine benzer eşitsizlikler ölçülebilir eğri ile sınırlı G bölgesinin $PQ(K; f_i, g_i)$ sınıfından olması durumunda $\mathcal{L}_p(h, L)$ uzayında incelenmiş ve yeni sonuçlar elde edilmiştir.

4.2.2. Temel Sonuçlar

Teorem 4.2.2.1. $p>0$; $G\in PQ(\kappa; f_i, g_i)$, $0<\kappa<1$, $f_i(x)=c_i x^{1+\alpha_i}$, $\alpha_i\geq 0$, $i=\overline{1,m_1}$ ve $g_i(x)=c_i^{1+\beta_i}$, $\beta_i>0$, $i=\overline{m_1+1,m}$; $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$\left\|P_n\right\|_{C(\bar{G})}\leq c_{19}\left(\sum_{i=1}^{m_1} n^{\frac{(\tilde{\gamma}_i+1)(1+\tilde{\kappa})}{p}}+\sum_{i=m_1+1}^{m} n^{\left[\frac{\tilde{\gamma}_i}{1+\beta_j}+1\right]\frac{1+\kappa}{p}}\right)\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \tag{4.100}$$

sağlanır, burada $c_{19}=c_{19}(G,p)>0$, n'den bağımsız bir sabittir.

Bu teorem, daha basit anlaşılabilmesi için, $m=2$ durumunda aşağıdaki gibi verilebilir:

Teorem 4.2.2.2. $p>0$; $G\in PQ(\kappa; f_1, g_2)$, $0<\kappa<1$, $f_1(x)=c_1x^{1+\alpha_1}$, $\alpha_1\geq 0$ ve $g_2(x)=c_2^{1+\beta_2}$, $\beta_2>0$; $h(z)$, $m=2$ için (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$\left\|P_n\right\|_{C(\bar{G})}\leq c_{20}A_n\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \tag{4.101}$$

sağlanır, burada $c_{20}=c_{20}(G,p)>0$, n'den bağımsız bir sabit,

$$A_n:=\begin{cases} n^{\frac{(1+\tilde{\kappa})(\tilde{\gamma}_1+1)}{p}}, & \gamma_1>\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1+\kappa}{1+\tilde{\kappa}}-1,\ \gamma_2>0,\\ n^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1+\kappa}{p}}, & -1<\gamma_1\leq\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1+\kappa}{1+\tilde{\kappa}}-1,\gamma_2>0,\\ n^{\frac{(1+\tilde{\kappa})}{p}}, & -1<\gamma_1,\gamma_2\leq 0.\end{cases}$$

ve

$$\tilde{\kappa} := \begin{cases} \kappa, & \alpha_1 = 0, \\ 1, & \alpha_1 \neq 0. \end{cases}$$

dır.

Eğer $\alpha_1 = 0$ ise, yani bölgede iç sıfır açı yok ise, bu durumda A_n sayısı aşağıdaki gibi elde edilir:

$$A_n := \begin{cases} n^{\frac{(\gamma_1+1)(1+\kappa)}{p}}, & \gamma_1 > \left(\dfrac{\gamma_2}{1+\beta_2}\right),\ \gamma_2 > 0, \\ n^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1+\kappa}{p}}, & \text{-}1 < \gamma_1 \leq \left(\dfrac{\gamma_2}{1+\beta_2}\right),\ \gamma_2 > 0, \\ n^{\frac{(1+\kappa)}{p}}, & -1 < \gamma_1, \gamma_2 \leq 0. \end{cases}$$

Eğer $\alpha_1 = 0$ ile birlikte, ağırlık fonksiyonunun singüler noktaları sadece dış sıfır açıların muhtemel var olduğu noktalarla üst-üste düşüyorsa, bu durumda aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.2.2.1. $p > 0$; $G \in PQ(\kappa; 0, g_i)$, $0 < \kappa < 1$, ve $g_i(x) = c_i^{1+\beta_i}$, $\beta_i > 0$; $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, ve $c_{21} = c_{21}(G, p) > 0$ için aşağıdaki doğrudur:

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \leq c_{21} \left(\sum_{i=1}^{m} n^{\left(\frac{\tilde{\gamma}_i}{1+\beta_i}\right)\frac{1+\kappa}{p}} \right) \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)},$$

veya, sağ tarafı bütün singüler noktalar üzere toplanırsa, aşağıdaki gibi bulunur:

Sonuç 4.2.2.2. Sonuç 4.2.2.1. ' in koşulları altında

$$\|P_n\|_{C(\bar{G})} \leq c_{22} n^{\left(\frac{\tilde{\gamma}^{\max}}{1+\beta_{\min}}+1\right)\frac{1+\kappa}{p}} \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}$$

sağlanır, burada, $\tilde{\gamma}^{\max} := \max\left\{0; \gamma_i : i = \overline{1,m}\right\}$, $\beta_{\min} := \min\left\{\beta_i, i = \overline{1,m}\right\}$.

Eğer $\kappa = 0$ ise, $n^{\left(\frac{\tilde{\gamma}_1}{1+\beta_1}+1\right)\frac{1+\kappa}{p}}$ ifadesi $\left(n^{\frac{\tilde{\gamma}_1}{1+\beta_1}+1} \ln n \right)^{\frac{1}{p}}$ ile yer değiştirir.

Şimdi sonsuz bölge için $|P_n(z)|$ nin değerlendirmesi verilecektir.

Teorem 4.2.2.3. $p>0$; $G\in PQ(\kappa; f_i, g_i)$, $0\le\kappa<1$, $f_i(x)=c_i x^{1+\alpha_i}$, $\alpha_i\ge 0$, $i=\overline{1,m_1}$ ve $g_i(x)=c_i^{1+\beta_i}$, $\beta_i>0$, $i=\overline{m_1+1,m}$; $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$|P_n(z)|\le c_{23}\frac{|\Phi(z)|^{n+1}}{d^{\frac{2}{p}}(z,L_R)}\left(\sum_{i=1}^{m_1}B_{n,1}^i+\sum_{i=m_1+1}^{m}B_{n,2}^i\right)\|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)},\qquad z\in\Omega_{1+\frac{1}{n}}$$

sağlanır, burada $c_{23}=c_{23}(G,p)>0$, z ve n'den bağımsız sabit ve

$$B_{n,1}^i:=\begin{cases} n^{\left[\frac{\gamma_i-1}{p}\right](1+\tilde{\kappa})}, & \gamma_i>\dfrac{2+\tilde{\kappa}}{1+\tilde{\kappa}},\\ (n\ln n)^{\frac{1}{p}}, & \gamma_i=\dfrac{2+\tilde{\kappa}}{1+\tilde{\kappa}},\\ n^{\frac{1}{p}}, & 0<\gamma_i<\dfrac{2+\tilde{\kappa}}{1+\tilde{\kappa}},\\ n^{\frac{\kappa}{p}}, & -1<\gamma_i\le 0.\end{cases}$$

$$B_{n,2}^i:=\begin{cases} n^{\left[\frac{\gamma_i-1}{p(1+\beta_i)}\right](1+\kappa)}, & \gamma_i>\dfrac{(1+\kappa)+(1+\beta_i)}{1+\kappa},\\ (n\ln n)^{\frac{1}{p}}, & \gamma_i=\dfrac{(1+\kappa)+(1+\beta_i)}{1+\kappa},\\ n^{\frac{1}{p}}, & 0<\gamma_i<\dfrac{(1+\kappa)+(1+\beta_i)}{1+\kappa},\\ n^{\frac{\kappa}{p}}, & -1<\gamma_i\le 0.\end{cases}$$

dır.

Bu teorem de, daha basit anlaşılabilmesi için, $m=2$ durumunda verilebilir:

Teorem 4.2.2.4. $p>0$; $G\in PQ(\kappa; f_1, g_2)$, $0\le\kappa<1$, $f_1(x)=c_1x^{1+\alpha_1}$, $\alpha_1\ge 0$ ve $g_2(x)=c_2^{1+\beta_2}$, $\beta_2>0$; $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n\in\wp_n$, $n\in\mathbb{N}$, için

$$\left|P_n(z)\right| \le c_{24} \frac{\left|\Phi(z)\right|^{n+1}}{d^{\frac{2}{p}}(z, L_R)} B_n \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}, \qquad z \in \Omega_{1+\frac{1}{n}}$$

sağlanır, burada , $c_{24} = c_{24}(G, p) > 0$ z ve n'den bağımsız sabit ve

$$B_n := \begin{cases} n^{\left[\frac{\gamma_1 - 1}{p}\right](1+\tilde{\kappa})}, & \gamma_1 > 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{1+\beta_2}\frac{1+\kappa}{1+\tilde{\kappa}}, \quad \gamma_2 > \frac{(1+\kappa)+(1+\beta_2)}{1+\kappa}, \\ n^{\left[\frac{\gamma_1 - 1}{p(1+\beta_2)}\right](1+\kappa)} & \frac{2+\tilde{\kappa}}{1+\tilde{\kappa}} < \gamma_1 \le 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{1+\beta_2}\frac{1+\kappa}{1+\tilde{\kappa}}, \quad \gamma_2 > \frac{(1+\kappa)+(1+\beta_2)}{1+\kappa}, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}}, & 0 < \gamma_1 \le \frac{2+\tilde{\kappa}}{1+\tilde{\kappa}}, \quad \gamma_2 = \frac{(1+\kappa)+(1+\beta_2)}{1+\kappa}, \\ n^{\frac{1}{p}}, & 0 < \gamma_1 < \frac{2+\tilde{\kappa}}{1+\tilde{\kappa}}, \quad 0 < \gamma_2 < \frac{(1+\kappa)+(1+\beta_2)}{1+\kappa}, \\ n^{\frac{\kappa}{p}}, & -1 < \gamma_1 \le 0, \ -1 < \gamma_2 \le 0. \end{cases}$$

Eğer bölgede iç sıfır açı yoksa ($\alpha_1 = 0$) o halde B_n aşağıdaki gibi sadeleşir:

$$B_n := \begin{cases} n^{\left[\frac{\gamma_1 - 1}{p}\right](1+\kappa)}, & \gamma_1 > 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{1+\beta_2}, \quad \gamma_2 > \frac{(1+\kappa)+(1+\beta_2)}{1+\kappa}, \\ n^{\left[\frac{\gamma_1 - 1}{p(1+\beta_2)}\right](1+\kappa)} & \frac{2+\kappa}{1+\kappa} \le \gamma_1 \le 1 + \frac{\gamma_2 - 1}{1+\beta_2}, \quad \gamma_2 > \frac{(1+\kappa)+(1+\beta_2)}{1+\kappa}, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}}, & 0 < \gamma_1 < \frac{2+\kappa}{1+\kappa}, \quad \gamma_2 = \frac{(1+\kappa)+(1+\beta_2)}{1+\kappa}, \\ n^{\frac{1}{p}}, & 0 < \gamma_1 < \frac{2+\kappa}{1+\kappa}, \quad 0 < \gamma_2 < \frac{(1+\kappa)+(1+\beta_2)}{1+\kappa}, \\ n^{\frac{\kappa}{p}}, & -1 < \gamma_1 \le 0, \ -1 < \gamma_2 \le 0. \end{cases}$$

Sonlu ve sonsuz bölgeler için elde edilmiş Teorem 4.2.2.1. ve Teorem 4.2.2.4. birleştirilerek ve Bernstein–Walsh Lemması [3] dikkate alınarak aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.2.2.5. $p > 0$; $G \in PQ(\kappa; f_i, g_i)$, $0 \le \kappa < 1$, $f_i(x) = c_i x^{1+\alpha_i}$, $\alpha_i \ge 0$, $i = \overline{1, m_1}$ ve $g_i(x) = c_i^{1+\beta_i}$, $\beta_i > 0$, $i = \overline{m_1 + 1, m}$; $h(z)$, (3.5) ile tanımlı ağırlık fonksiyonu olsun. Bu durumda, her $P_n \in \wp_n$, $n \in \mathbb{N}$, için

$$\left|P_n(z)\right| \le c_{25}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \begin{cases} \sum_{i=1}^{m_1} n^{\frac{(\tilde{\gamma}_i+1)(1+\tilde{\kappa})}{p}} + \sum_{i=m_1+1}^{m} n^{\left(\frac{\tilde{\gamma}_i}{1+\beta_i}\right)\frac{1+\kappa}{p}}, & z \in \overline{G}_{1+\frac{c}{n}}, \\ \dfrac{\left|\Phi(z)\right|^{n+1}}{d^{\frac{2}{p}}(z, L_R)} \left(\sum_{i=1}^{m_1} B_{n,1}^i + \sum_{i=m_1+1}^{m} B_{n,2}^i \right), & z \in \Omega_{1+\frac{c}{n}}. \end{cases}$$

sağlanır, burada $c_{25} = c_{25}(G, p) > 0$ z ve n'den bağımsız sabit ve $B_{n,1}^i$, $B_{n,2}^i$'ler ise Teorem 4.2.2.3.' deki gibiler.

Ve buradan $m = 2$ durumu için aşağıdaki bulunur:

Sonuç 4.2.2.3. Teorem 4.2.2.5.' in koşulları altında her $P_n \in \wp$, $n \in \mathbb{N}$, için

$$\left|P_n(z)\right| \le c_{26}\left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \begin{cases} A_n, & z \in \overline{G}_{1+\frac{c}{n}}, \\ \dfrac{\left|\Phi(z)\right|^{n+1}}{d^{\frac{2}{p}}(z, L_R)} B_n & z \in \Omega_{1+\frac{c}{n}}. \end{cases} \tag{4.102}$$

sağlanır. burada A_n ve B_n, Teorem 4.2.2.2. ve Teorem 4.2.2.3.'deki ile aynıdır.

Teorem 4.2.2.1 in ispatı:

Keyfi tespit edilmiş κ, $0 \le \kappa < 1$, $f_i(x) = c_i x^{1+\alpha_i}$, $\alpha_i \ge 0$, $i = \overline{1, m_1}$ ve $g_i(x) = c_i x^{1+\beta_i}$, $\beta_i > 0$, $i = \overline{m_1+1, m}$ için $G \in PQ(\kappa; f_i, g_i)$ olsun. $w = \varphi_R(z)$ ile G_R, $R > 1$, bölgesini B bölgesine konform ve yalınkat resmeden, $\varphi_R(0) = 0$, $\varphi_R'(0) > 0$ koşullarını sağlayan dönüşüm gösterilsin ve $\{\zeta_j\}$, $1 \le j \le m \le n$, $P_n(z)$'nin G_R bölgesinde yerleşen sıfırları olsun. Bu sıfırlara göre Blashke fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$B_{m,R}(z) := \prod_{j=1}^{m} B_{j,R}(z) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\varphi_R(z) - \varphi_R(\zeta_j)}{1 - \overline{\varphi_R(\zeta_j)}\varphi_R(z)}.$$

Her $p > 0$ ve $z \in G_R$ için

$$T_n(z) := \left[\frac{P_n(z)}{B_{m,R}(z)} \right]^{p/2} .$$

olsun. $T_n(z)$ fonksiyonu G_R' de analitik, $\overline{G}_R$' de sürekli ve G_R'de sıfırları yoktur.

Böylece, $T_n(z)$ için Cauchy integral formülü yardımıyla [30] :

$$T_n(z) = \frac{1}{2\pi i} \int_{L_R} T_n(\zeta) \frac{d\zeta}{\zeta - z}, \ z \in G_R,$$

elde edilir. Her $\zeta \in L_R$ için $\left|B_{m,R}(\zeta)\right| = 1$ olduğundan yazılabilir:

$$\left|\left[\frac{P_n(z)}{B_{m,R}(z)}\right]^{p/2}\right| \leq \frac{1}{2\pi}\int_{L_R}\left|\frac{P_n(\zeta)}{B_{m,R}(\zeta)}\right|^{p/2}\frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|} \leq \int_{L_R}\left|P_n(\zeta)\right|^{p/2}\frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}, \tag{4.103}$$

Şimdi, $z \in L$ olsun. İntegral altı ifade $h^{1/2}(\zeta)$ ile çarpılıp bölünerek ve sonrasında da Hölder eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki elde edilir:

$$\left|\frac{P_n(z)}{B_{m,R}(z)}\right|^{p/2} \leq \frac{1}{2\pi}\left(\int_{L_R} h(\zeta)\left|P_n(\zeta)\right|^p |d\zeta|\right)^{1/2}$$

$$\times\left(\int_{L_R}\frac{|d\zeta|}{\prod_{j=1}^{m}\left|\zeta - z_j\right|^{\gamma_j}|\zeta - z|^2}\right)^{1/2} =: \frac{1}{2\pi} J_{n,1} \times J_{n,2},$$

burada,

$$J_{n,1} := \left(\int_{L_R} h(\zeta)\left|P_n(\zeta)\right|^p |d\zeta|\right)^{1/2}, \; J_{n,2} := \left(\int_{L_R}\frac{|d\zeta|}{\prod_{j=1}^{m}\left|\zeta - z_j\right|^{\gamma_j}|\zeta - z|^2}\right)^{1/2}.$$

$z \in L$ için $\left|B_{m,R}(z)\right| < 1$ olduğundan Lemma 3.3.10. kullanılarak aşağıdaki değerlendirme yazılabilir:

$$\left|P_n(z)\right| \prec \left(J_{n,1} \cdot J_{n,2}\right)^{2/p} \prec \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \cdot J_{n,2}^{2/p}, \; z \in L. \tag{4.104}$$

$J_{n,2}$ integralini hesaplamak için aşağıdaki işaretlemeler dahil edilsin:

$$w_j := \Phi(z_j), \; \varphi_j := \arg w_j, \; L_R^j := L_R \cap \overline{\Omega}^j, \; j = \overline{1,m},$$

burada, $\Omega^j := \Psi(\Delta_j^{'})$;

$$\Delta_1^{'} := \left\{t = Re^{i\theta} : R > 1, \; \frac{\varphi_m + \varphi_1}{2} \leq \theta < \frac{\varphi_1 + \varphi_2}{2}\right\},$$

$$\Delta_m^{'} := \left\{t = Re^{i\theta} : R > 1, \; \frac{\varphi_{m-1} + \varphi_m}{2} \leq \theta < \frac{\varphi_m + \varphi_1}{2}\right\}.$$

ve $j = \overline{2, m-1}$ için,

$$\Delta_j^{'} := \left\{t = Re^{i\theta} : R > 1, \; \frac{\varphi_{j-1} + \varphi_j}{2} \leq \theta < \frac{\varphi_j + \varphi_{j+1}}{2}\right\}.$$

olsun. $\left\{z_j\right\}_{j=1}^{m} \in L$ noktalarının ayrık oldukları dikkate alınırsa, $J_{n,2}$ için aşağıdaki elde edilir:

$$J_{n,2}^{2} = \sum_{i=1}^{m} \int_{L_R^i} \frac{|d\zeta|}{\prod_{j=1}^{m} |\zeta - z_j|^{\gamma_j} |\zeta - z|^2} \asymp \sum_{i=1}^{m} \int_{L_R^i} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_i|^{\gamma_i} |\zeta - z|^2} =: \sum_{i=1}^{m} J_{n,2}^{i}, \tag{4.105}$$

burada

$$J_{n,2}^{i} := \int_{L_R^i} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_i|^{\gamma_i} |\zeta - z|^2}, \; i = \overline{1,m}. \tag{4.106}$$

Değerlendirmelerdeki basitlik için

$$i = 1,2;\; m_1 = 1,\; m = 2;\; z_1 = -1,\; z_2 = 1;\; (-1,1) \subset G;\; R = 1 + \frac{\varepsilon_0}{n}, \tag{4.107}$$

olarak ele alınsın ve Tanım 3.3.14'deki lokal koordinat sisteminin OX ve OY eksenlerine paralel olduğu kabul edilsin. $L^{+} := \{z \in L : \operatorname{Im} z \ge 0\}$, $L^{-} := \{z \in L : \operatorname{Im} z < 0\}$, $L = L^{+} \cup L^{-}$;

$w^{\pm} := \left\{ w = e^{i\theta} : \theta = \frac{\varphi_1 \pm \varphi_2}{2} \right\}$, $z^{\pm} \in \Psi(w^{\pm})$ ve L^{i} yayları $z^{+}, z_i, z^{-} \in L$; noktalarını birleştiren yaylar olsun. $L^{i,\pm} := L^{i} \cap L^{\pm}$, $i = 1,2$. z_0 noktası L^{+} veya L^{-} de yerleşen keyfi nokta olsun. Genelliği kaybetmeksizin, $z_0 = z^{+}$ $(z_0 = z^{-})$ varsayılsın. Önceki notasyonlara benzer olarak: $L_R = L_R^{+} \cup L_R^{-}$, tanımlansın, burada $L_R^{+} := \{z \in L_R : \operatorname{Im} z \ge 0\}$, $L_R^{-} := \{z \in L_R : \operatorname{Im} z < 0\}$. $w_R^{\pm} := \left\{ w = \mathrm{Re}^{i\theta} : \theta = \frac{\phi_1 \pm \phi_2}{2} \right\}$, $z_R^{\pm} \in \Psi(w_R^{\pm})$ olsun. $z_{i,R} \in L_R$ seçilsin öyle ki $d_{i,R} = |z_i - z_{i,R}|$ ve $\zeta^{\pm} \in L^{\pm}$, $d(z_{2,R}, L^{2} \cap L^{\pm}) := d(z_{2,R}, L^{\pm})$;

$z_i^{\pm} := \{\zeta \in L^{i} : |\zeta - z_i| = c_i d(z_i, L_R)\}$, $z_{i,R}^{\pm} := \{\zeta \in L_R^{i} : |\zeta - z_{i,R}| = c_i d(z_{i,R}, L_R)\}$,

$w_{i,R}^{\pm} = \Phi(z_{i,R}^{\pm})$ sağlansın. L_R^{i}, $i = 1,2$ yayları $z_R^{+}, z_{i,R}, z_R^{-} \in L_R$, $L_R^{i,\pm} := L_R^{i} \cap L_R^{\pm}$ noktalarını birleştiren yaylar olsun ve $l_{i,R}^{\pm}(z_{i,R}^{\pm}, z_R^{\pm})$ yayları da $z_{i,R}^{\pm}$ ile $z_R^{\pm}$ noktalarını birleştirsin sırasıyla ve $|l_{i,R}^{\pm}| := mes\, l_{i,R}^{\pm}(z_{i,R}^{\pm}, z_R^{\pm})$, $i = 1,2$. Böylece aşağıdaki işaretlemeler elde edilebilir:

$$E_{1,R}^{i,\pm} := \{\zeta \in L_R^{i,\pm} : |\zeta - z_i| < c_i d_{i,R}\},$$

$$E_{2,R}^{i,\pm} := \{\zeta \in L_R^{i,\pm} : c_i d_{i,R} \le |\zeta - z_i| \le |l_{i,R}^{\pm}|\},\; F_{j,R}^{i,\pm} := \Phi(E_{j,R}^{i,\pm});$$

$$E_{1}^{i,\pm} := \{\zeta \in L^{i,\pm} : |\zeta - z_i| < c_i d_{i,R}\},$$

$$E_{2}^{i,\pm} := \{\zeta \in L^{i,\pm} : c_i d_{i,R} \le |\zeta - z_i| \le |l_{i,R}^{\pm}|\},\; F_{j}^{i,\pm} := \Phi(E_{j}^{i,\pm}),\; i,j = 1,2.$$

Bu notasyonlar ışığında, $J_{n,2}^{i}, i = \overline{1,m}$, integralinin değerlendirilmesi için önce $\tau = \Phi(\zeta)$ ile değişken değişimi yapılarak Önerme 3.3.1. yardımıyla aşağıdaki değerlendirme bulunur:

$$
\begin{aligned}
J_{n,2}^{i} &\asymp \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{F_{j,R}^{i,+}\cup F_{j,R}^{i,-}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)|^{\gamma_i}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^2} \\
&\asymp \sum_{i,j=1}^{2} \int\limits_{F_{j,R}^{i,+}\cup F_{j,R}^{i,-}} \frac{d(\Psi(\tau),L)|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_i)|^{\gamma_i}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^2(|\tau|-1)} \\
&=: \sum_{i,j=1}^{2}\left[J(F_{j,R}^{i,+}) + J(F_{j,R}^{i,-}) \right].
\end{aligned}
\tag{4.108}
$$

$i, j = 1,2$ için $J(F_{j,R}^{i,+})$ ve $J(F_{j,R}^{i,-})$ integrallerini değerlendirmek gerekir. Bunun için

$$
\|P_n\|_\infty =: |P_n(z')|,\ z' \in L,
\tag{4.109}
$$

kabul edilsin ve $w' = \Phi(z')$ olsun. İki durum söz konusudur: $z' \in L^1$ ve $z' \in L^2$.

1) Önce $z' \in L^1$ olsun. Eğer $z' \in E_i^{1,\pm}$, $i = 1,2$, ise aşikardır ki $w' \in F_i^{1,\pm}$ dır. Her iki alt durum ayrı ayrı ele alınsın:

1.1) Eğer $z' \in E_1^{1,\pm}$ ise, $w' \in F_1^{1,\pm}$ dır ve bu halde $\gamma_1 > 0$ için

$$
J(F_{1,R}^{1,+}) + J(F_{1,R}^{1,-}) = \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{d(\Psi(\tau),L)|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^2(|\tau|-1)}
$$

$$
\begin{aligned}
&\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|} \\
&\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\left[\min\left\{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|;|\Psi(\tau)-\Psi(w')|\right\}\right]^{\gamma_1+1}} \\
&\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\left[\min\left\{|\tau-w_1|;|\tau-w'|\right\}\right]^{(\gamma_1+1)(1+\kappa)}} \prec n^{(\gamma_1+1)(1+\kappa)},
\end{aligned}
\tag{4.110}
$$

ve $-1 < \gamma_1 \le 0$ için de

$$
J(F_{1,R}^{1,+}) + J(F_{1,R}^{1,-}) \prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{(-\gamma_1)}|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|}
\tag{4.111}
$$

$$
\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|} \prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w'|^{1+\kappa}} \prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa \ne 0, \\ n\ln n, & \kappa = 0. \end{cases}
$$

sağlanır.

1.2) Eğer $z' \in E_2^{1,\pm}$ ise $\gamma_1 > 0$ için

$$J(F_{1,R}^{1,+}) + J(F_{1,R}^{1,-}) \prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+} \cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1} |\Psi(\tau)-\Psi(w')|} \tag{4.112}$$

$$\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+} \cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\left[\min\left\{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|;|\Psi(\tau)-\Psi(w')|\right\}\right]^{\gamma_1+1}}$$

$$\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+} \cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\left[\min\left\{|\tau-w_1|;|\tau-w'|\right\}\right]^{(\gamma_1+1)(1+\kappa)}} \prec n^{(\gamma_1+1)(1+\kappa)},$$

ve $-1 < \gamma_1 \le 0$ için de

$$J(F_{1,R}^{1,+}) + J(F_{1,R}^{1,-}) \prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+} \cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{(-\gamma_1)} |d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|} \tag{4.113}$$

$$\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+} \cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|} \prec n \int\limits_{F_{1,R}^{1,+} \cup F_{1,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w'|^{1+\kappa}} \prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa \neq 0, \\ n\ln n, & \kappa = 0, \end{cases}$$

sağlanır.

1.3) Eğer $z' \in E_1^{1,\pm}$ ise $\gamma_1 > 0$ için

$$J(F_{2,R}^{1,+}) + J(F_{2,R}^{1,-}) \prec n \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1} |\Psi(\tau)-\Psi(w')|}$$

$$\begin{aligned} &\prec n \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\min\left\{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|;|\Psi(\tau)-\Psi(w')|\right\}^{\gamma_1+1}} \\ &\prec n \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\min\left\{|\tau-w_1|;|\tau-w'|\right\}^{(\gamma_1+1)(1+\kappa)}} \prec n^{(\gamma_1+1)(1+\kappa)}, \end{aligned} \tag{4.114}$$

ve $-1 < \gamma_1 \le 0$ için de

$$J(F_{2,R}^{1,+}) + J(F_{2,R}^{1,-}) \prec n \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{(-\gamma_1)} |d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|} \tag{4.115}$$

$$\prec n \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|} \prec n \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w'|^{1+\kappa}} \prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa \neq 0, \\ n\ln n, & \kappa = 0, \end{cases}$$

sağlanır.

1.4) Eğer $z' \in E_2^{1,\pm}$ ise $\gamma_1 > 0$ için

$$J(F_{2,R}^{1,+}) + J(F_{2,R}^{1,-}) \prec n \int\limits_{F_{2,R}^{1,+} \cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1} |\Psi(\tau)-\Psi(w')|}$$

$$\begin{aligned} &\prec n \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\left[\min\left\{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|;|\Psi(\tau)-\Psi(w')|\right\}\right]^{\gamma_1+1}} \\ &\prec n \int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{\left[\min\left\{|\tau-w_1|;|\tau-w'|\right\}\right]^{[\gamma_1+1](1+\kappa)}} \prec n^{(\gamma_1+1)(1+\kappa)}, \end{aligned} \tag{4.116}$$

ve $-1<\gamma_1\le 0$ için de

$$J(F_{2,R}^{1,+})+J(F_{2,R}^{1,-})\prec n\int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|}$$

$$\prec n\int_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w'|^{1+\kappa}} \prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa\neq 0, \\ n\ln n, & \kappa=0. \end{cases} \tag{4.117}$$

sağlanır. (4.110)-(4.117) birleştirilirse $\gamma_1>0$ için

$$\sum_{i=1}^{2}\left[J(F_{i,R}^{1,+})+J(F_{i,R}^{1,-})\right]\prec n^{(\gamma_1+1)(1+\kappa)}, \tag{4.118}$$

ve $-1<\gamma_1\le 0$ için de

$$\sum_{i=1}^{2}\left[J(F_{i,R}^{1,+})+J(F_{i,R}^{1,-})\right]\prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa\neq 0, \\ n\ln n, & \kappa=0. \end{cases} \tag{4.119}$$

sağlanır. Böylece, $\gamma_1>-1$ için $z'\in L^1$ olma durumunda (4.108) (4.118) ve (4.119) ‘dan aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$J_{n,2}^{1}\prec \begin{cases} n^{(\hat{\gamma}_1+1)(1+\kappa)}, & \text{if } \gamma_1>-1,\ \kappa\neq 0, \\ n\ln n, & \text{if } -1<\gamma_1\le 0,\ \kappa=0. \end{cases} \tag{4.120}$$

2) Şimdi $z'\in L^2$ olsun. $z'\in E_i^{2,\pm}$, $i=1,2$, aşikârdır ki $w'\in F_i^{2,\pm}$ olur. $J_{n,2}^{i}$ integralini değerlendirmek için yine yukarıda yapılan işlemlere benzer işlemler uygulanır.

2.1) Eğer $z'\in E_1^{2,\pm}$ ise $\gamma_2>-1$ için

$$J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-}) = \int_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2}|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^2}$$

$$\begin{aligned}
&\prec \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{d(\Psi(\tau),L)\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|^{2}(\left|\tau\right|-1)} \\
&\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|} \\
&\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|} \\
&\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{2,-}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|}
\end{aligned} \tag{4.121}$$

sağlanır. Son iki integral aynı şekilde değerlendirileceği için bunlardan ilkini hesaplamak yeterli olur. $\tau\in F_{1,R}^{2,+}$ olduğu zaman

$$\begin{aligned}
&\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right| \succ \max\left\{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|;\ \left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|\right\} \\
&=\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right| \succ \left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{\frac{1}{1+\beta_2}}.
\end{aligned}$$

sağlanır. Buna göre, $\gamma_2>0$ için

$$\begin{aligned}
J(F_{1,R}^{2,+}) &\prec n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{\frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}}} \prec n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w_2^{+}\right|^{\frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}(1+\kappa)}} \\
&\prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}(1+\kappa)}, & \frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}(1+\kappa)>1, \\ n\ln n, & \frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}(1+\kappa)=1, \\ n, & \frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}(1+\kappa)<1. \end{cases}
\end{aligned}$$

ve $-1<\gamma_2\le 0$ için de

$$J(F_{1,R}^{2,+}) \prec n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{(-\gamma_2)}\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-z_2^{+}\right|^{\frac{1}{1+\beta_2}}} \prec n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w_2^{+}\right|^{\frac{1+\kappa}{1+\beta_2}}} \prec n^{\frac{1+\kappa}{1+\beta_2}},$$

sağlanır. Bu durumda, $\gamma_2>0$ için

$$J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-}) \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}(1+\kappa)}, & \frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}(1+\kappa)>1, \\ n\ln n, & \frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}(1+\kappa)=1, \\ n, & \frac{\gamma_2+1}{1+\beta_2}(1+\kappa)<1. \end{cases} \tag{4.122}$$

$-1<\gamma_2\le 0$ için de

$$J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-}) \prec n^{\frac{1+\kappa}{1+\beta_2}},$$

elde edilir.

2.2) Eğer $z'\in E_2^{2,\pm}$ ise

$$J(F_{1,R}^{2,+})+J(F_{1,R}^{2,-}) \prec n \int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}} \frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w')\right|},$$

değerlendirmesi her $\gamma_2 > -1$ için sağlanır. $|\Psi(\tau)-\Psi(w')|$ için $\tau \in F_{1,R}^{2,+}$ ise:

$$|\Psi(\tau)-\Psi(w')| \succ |\Psi(\tau)-z_2^+|$$

ve bir önceki duruma benzer olarak $\gamma_2 > 0$ için:

$$J(F_{1,R}^{2,+}) \prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2} |\Psi(\tau)-z_2^+|}$$

$$\prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-z_2^+|^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1}} \prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\tau - w_2^+|^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)(1+\kappa)}} \prec n^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)(1+\kappa)},$$

$-1 < \gamma_2 \le 0$ için de

$$J(F_{1,R}^{2,+}) \prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{(-\gamma_2)} |d\tau|}{|\Psi(\tau)-z_2^+|} \prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-z_2^+|}$$

$$\prec n \int_{F_{1,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\tau - w_2^+|^{1+\kappa}} \prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa \neq 0, \\ n \ln n, & \kappa = 0. \end{cases}$$

elde edilir. Böylece, $\gamma_2 > 0$ için:

$$J(F_{1,R}^{2,+}) + J(F_{1,R}^{2,-}) \prec n^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)(1+\kappa)}, \tag{4.123}$$

ve $-1 < \gamma_2 \le 0$ için de

$$J(F_{1,R}^{2,+}) + J(F_{1,R}^{2,-}) \prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa \neq 0, \\ n \ln n, & \kappa = 0. \end{cases}$$

sağlanır.

2.3) Eğer $z' \in E_1^{2,\pm}$ ise

$$J(F_{2,R}^{2,+}) + J(F_{2,R}^{2,-}) \prec n \int_{F_{2,R}^{2,+} \cup F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2} |\Psi(\tau)-\Psi(w')|}$$

$$\prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2} |\Psi(\tau)-\Psi(w')|} + n \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2} |\Psi(\tau)-\Psi(w')|}, \tag{4.124}$$

her $\gamma_2 > 0$ için elde edilir. Son iki integral aynı şekilde hesaplanacağı için birinci integrali hesaplamak yeterlidir. $\tau \in F_{2,R}^{2,+}$ ve $z' \in E_1^{2,\pm}$ için

$$|\Psi(\tau)-\Psi(w')| \succ |\Psi(\tau)-z_2^+|;$$

$$|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)| \succ d_{2,R} \succ |z_{2,R}-z_2^+|^{\frac{1}{1+\beta_2}} \succ \left(\frac{1}{n}\right)^{\frac{1+\kappa}{1+\beta_2}}.$$

sağlandığından, $\gamma_2 > 0$ için

$$J(F_{2,R}^{2,+}) \prec n \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-z_2^+|^{\gamma_2} \, |\Psi(\tau)-z_2^+|}$$

$$\prec n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}(1+\kappa)+1} \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_2^+|^{1+\kappa}} \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(1+\kappa)}{1+\beta_2}+(1+\kappa)}, & \kappa \neq 0, \\ n^{\frac{\gamma_2(1+\kappa)}{1+\beta_2}+1} \ln n, & \kappa = 0. \end{cases}$$

sağlanır ve sonuç olarak aşağıdaki elde edilir:

$$J(F_{2,R}^{2,+}) + J(F_{2,R}^{2,-}) \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(1+\kappa)}{1+\beta_2}+(1+\kappa)}, & \kappa \neq 0, \\ n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1} \ln n, & \kappa = 0. \end{cases}$$

Benzeri şekilde $-1 < \gamma_2 \le 0$ için de aşağıdaki değerlendirme elde edilir:

$$J(F_{2,R}^{2,+}) + J(F_{2,R}^{2,-}) = \int\limits_{F_{2,R}^{2,+} \cup F_{2,R}^{2,-}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{(-\gamma_2)} |\Psi'(\tau)| |d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^2}$$

$$\prec n \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|} \prec n \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-z_2^+|}$$

$$\prec n \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w_2^+|^{1+\kappa}} \prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa \neq 0, \\ n \ln n, & \kappa = 0. \end{cases} \tag{4.125}$$

Bu durumda,

$$J(F_{2,R}^{2,+}) + J(F_{2,R}^{2,-}) \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(1+\kappa)}{1+\beta_2}+(1+\kappa)}, & \kappa \neq 0, \\ n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1} \ln n, & \kappa = 0. \end{cases} \tag{4.126}$$

sağlanır.

2.4) Eğer $z' \in E_2^{2,+}$ ise, $\gamma_2 > 0$ için

$$J(F_{2,R}^{2,+}) \prec \frac{n}{d_{2,R}^{\gamma_2}} \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|}$$

$$\prec n^{1+\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}(1+\kappa)} \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w'|^{1+\kappa}} \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(1+\kappa)}{1+\beta_2}+(1+\kappa)}, & \kappa \neq 0, \\ n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1} \ln n, & \kappa = 0. \end{cases} \tag{4.127}$$

ve

$$J(F_{2,R}^{2,-}) \prec \frac{n}{d_{2,R}^{\gamma_2}} \int\limits_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|}$$

$$\prec n^{1+\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}(1+\kappa)} \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|} \prec n^{1+\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}(1+\kappa)} \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\tau-w'|^{1+\kappa}}$$
$$\prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2(1+\kappa)}{1+\beta_2}+(1+\kappa)}, & \kappa \neq 0, \\ n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1}\ln n, & \kappa = 0. \end{cases} \tag{4.128}$$

elde edilir.

$z' \in E_2^{2,-}$ olma durumu $z' \in E_2^{2,+}$ durumuna benzer olarak yapılır. Eğer $-1<\gamma_2 \leq 0$ ise

$$J(F_{2,R}^{2,+}) = \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{(-\gamma_2)}|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^2}$$
$$\prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|} \prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa \neq 0, \\ n\ln n, & \kappa = 0, \end{cases} \tag{4.129}$$

ve

$$J(F_{2,R}^{2,-}) = \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{(-\gamma_2)}|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|^2}$$
$$\prec n \int_{F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w')|} \prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa \neq 0, \\ n\ln n, & \kappa = 0. \end{cases} \tag{4.130}$$

(4.122)- (4.130) birleştirilirse $-1<\gamma_2 \leq 0$ için:

$$J_{n,2}^2 \prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa \neq 0, \\ n\ln n, & \kappa = 0. \end{cases}$$

ve

$$J_{n,2}^2 \prec \begin{cases} n^{(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1)(1+\kappa)}, & \kappa \neq 0, \\ n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1}\ln n, & \kappa = 0. \end{cases} \tag{4.131}$$

$\gamma_2 > 0$ için sağlanır. (4.131) ve (4.120) birleştirilirse , $m_1 = 1,\ m_2 = 1$ ve her $p>0$ için $-1<\gamma_1 \leq 0$ için

$$J_{n,2}^1 + J_{n,2}^2 \prec \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa \neq 0, \\ n\ln n, & \kappa = 0 \end{cases} + \begin{cases} n^{1+\kappa}, & \kappa \neq 0, \\ n\ln n, & \kappa = 0, \end{cases} \tag{4.132}$$

Aynı zamanda, $\gamma_1 > 0,\ \gamma_2 > 0$ için de

$$J_{n,2}^1 + J_{n,2}^2$$
$$\prec \begin{cases} n^{(\gamma_1+1)(1+\kappa)}, & \kappa \neq 0, \\ n\ln n, & \kappa = 0, \end{cases} + \begin{cases} n^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)(1+\kappa)}, & \kappa \neq 0, \\ n^{\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1}\ln n, & \kappa = 0. \end{cases} \tag{4.133}$$

sağlanır, neredeki $\kappa := \begin{cases} \kappa, & \text{if } \alpha_1 = 0, \\ 1, & \text{if } \alpha_1 \neq 0. \end{cases}$. Böylece, (4.103)-(4.108), (4.132) ve (4.133)' den

$$\left|P_n(z)\right| \prec \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \cdot \begin{cases} n^{\frac{(\widehat{\gamma}_1+1)(1+\kappa)}{p}} + n^{\left(\frac{\widehat{\gamma}_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1+\kappa}{p}}, & \kappa \neq 0, \\ (n \ln n)^{\frac{1}{p}} + \left(n^{\frac{\widehat{\gamma}_2}{1+\beta_2}+1} \ln n\right)^{\frac{1}{p}}, & \kappa = 0. \end{cases}$$

$$\preceq \|P_n\|_p \cdot \begin{cases} n^{\frac{2}{p}}, & \kappa \neq 0,\ \alpha_1 \neq 0,\ -1 < \gamma_1, \gamma_2 \leq 0; \\ n^{\frac{1+\kappa}{p}}, & \kappa \neq 0,\ \alpha_1 = 0,\ -1 < \gamma_1, \gamma_2 \leq 0; \\ n^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1+\kappa}{p}}, & \kappa \neq 0,\ \alpha_1 \neq 0,\ 0 < \gamma_1 \leq \left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1+\kappa}{2} - 1,\ \gamma_2 > 0; \\ n^{\frac{2(\gamma_1+1)}{p}}, & \kappa \neq 0,\ \alpha_1 \neq 0,\ \gamma_1 > \left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1+\kappa}{2} - 1,\ \gamma_2 > 0; \\ n^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)\frac{1+\kappa}{p}}, & \kappa \neq 0,\ \alpha_1 = 0,\ 0 < \gamma_1 \leq \frac{\gamma_2}{1+\beta_2},\ \gamma_2 > 0; \\ n^{\frac{(\gamma_1+1)(1+\kappa)}{p}}, & \kappa \neq 0,\ \alpha_1 = 0,\ \gamma_1 > \frac{\gamma_2}{1+\beta_2},\ \gamma_2 > 0; \\ \left(n^{\left(\frac{\gamma_2}{1+\beta_2}+1\right)} \ln n\right)^{\frac{1}{p}}, & \kappa = 0,\ \gamma_1, \gamma_2 > -1; \end{cases} \quad z \in L.$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır.

Teorem 4.2.2.3.'ün ispatı:

Herhangi bir tespit edilmiş κ, $0 \leq \kappa < 1$, $f_i(x) = c_i x^{1+\alpha_i}$, $i = \overline{1, m_1}$, $\alpha_i \geq 0$, ve $g_i(x) = c_i x^{1+\beta_i}$, $\beta_i > 0$, $i = \overline{m_1+1, m}$, için $G \in PQ(\kappa; f_i, g_i)$ olsun; $\{\zeta_j\}$, $1 \leq j \leq m \leq n$ $P_n(z)$ 'nin Ω 'daki sıfırları olsun. Bu sıfırlara göre Blashke fonksiyonu aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$B_m(z) := \prod_{j=1}^{m} B_j(z) = \prod_{j=1}^{m} \frac{\Phi(z) - \Phi(\zeta_j)}{1 - \overline{\Phi(\zeta_j)}\Phi(z)}$$

Her $p > 0$ ve $z \in \Omega$ için

$$G_n(z) := \left[\frac{P_n(z)}{B_m(z)\ \Phi^{n+1}(z)}\right]^{p/2} \tag{4.134}$$

olsun. $G_n(z)$ fonksiyonu için, Ω da Cauchy integral formülü [30] aşağıdaki gibi yazılır:

$$G_n(z) = -\frac{1}{2\pi i}\int_{L_R} G_n(\zeta)\frac{d\zeta}{\zeta - z}\ ,\ z \in \Omega_R. \tag{4.135}$$

Her $\zeta \in L$ için $\left|B_{m,R}(\varsigma)\right| = 1$ olduğundan, keyfi $\varepsilon,\ 0 < \varepsilon < \varepsilon_1$ için $|w| = 1 + \frac{\varepsilon_1}{n}$ çemberi vardır öyle ki $j = \overline{1,m}$ için

$$|B_j(\Psi(w)| > 1 - \varepsilon.$$

sağlanır. O halde, $\varepsilon \le n^{-1}$ için $\left|B_m(\zeta)\right| > (1-\varepsilon)^m \prec 1$ sağlanır. Diğer yandan, $\zeta \in L_R$ için $\left|\Phi(\zeta)\right| = R > 1$'dir. Böylece, $z \in \Omega_R$ için

$$\left|\left[\frac{P_n(z)}{B_m(z)\,\Phi^{n+1}(z)}\right]^{p/2}\right| \le \frac{1}{2\pi}\int_{L_R}\left|\frac{P_n(\zeta)}{B_m(\zeta)\,\Phi^{n+1}(\zeta)}\right|^{p/2}\frac{|d\zeta|}{|\zeta - z|}$$

$$\prec \frac{1}{d(z,L_R)}\int_{L_R}\left|P_n(\zeta)\right|^{p/2}|d\zeta| =: \frac{1}{d(z,L_R)}A_n. \tag{4.136}$$

elde edilir. Bir önceki teoremin ispatına benzer olarak

$$A_n = \sum_{i=1}^{m}\int_{L_R^i}|P_n(\zeta)|^{p/2}|d\zeta|. \tag{4.137}$$

elde edilir. Pay ve payda $h^{\frac{1}{2}}(\zeta)$ ile çarpılıp bölünerek ve sonrasında da Hölder eşitsizliği uygulanarak aşağıdaki elde edilir:

$$A_n \le \sum_{i=1}^{m}\left(\int_{L_R^i} h(\zeta)|P_n(\zeta)|^p|d\zeta|\right)^{1/2} \times \left(\int_{L_R^i}\frac{|d\zeta|}{\prod_{j=1}^{m}|\zeta - z_j|^{\gamma_j}}\right)^{1/2}$$

$$=: \sum_{i=1}^{m}\widetilde{J}_{n,1}^{i}\cdot\widetilde{J}_{n,2}^{i}, \tag{4.138}$$

$\widetilde{J}_{n,1}^{i}$ integrali için Lemma 3.3.10.'a göre

$$J_{n,1}^{i} \prec \left\|P_n\right\|_p^{p/2},\ i = \overline{1,m}. \tag{4.139}$$

O halde, (4.138) ve (4.139)'dan

$$A_n \prec \|P_n\|_p^{p/2} \sum_{i=1}^{m} J^i_{n,2}.$$

bulunur. $\tilde{J}^i_{n,2}$ integrali için $\{z_j\}_{j=1}^m$ noktaları L üzerinde ayrık olduğundan aşağıdaki elde edilir:

$$\left(\tilde{J}^i_{n,2}\right)^2 \coloneqq \int_{L_R^i} \frac{|d\zeta|}{\prod_{j=1}^{m} |\zeta - z_j|^{\gamma_i}} \asymp \int_{L_R^i} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_i|^{\gamma_i}},\ i = 1, 2, \tag{4.140}$$

(4.140)'dan:

$$A_n \prec \|P_n\|_p^{p/2} \sum_{i=1}^{2} J^i_{n,2}, \tag{4.141}$$

bulunur, burada

$$\tilde{J}^1_{n,2} = \int_{L_R^1} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_1|^{\gamma_1}}\ ;\ \tilde{J}^2_{n,2} = \int_{L_R^2} \frac{|d\zeta|}{|\zeta - z_2|^{\gamma_2}}. \tag{4.142}$$

Daha önce kabul edilen notasyonlar göz önünde bulundurularak $\tau = \Phi(\zeta)$ değişken değişimi yapılırsa aşağıdaki elde edilir:

$$\begin{aligned}\tilde{J}^i_{n,2} &\asymp \sum_{i,j=1}^{2} \int_{F_{j,R}^{i,+} \cup F_{j,R}^{i,-}} \frac{|\Psi'(\tau)||d\tau|}{|\Psi(\tau) - \Psi(w_i)|^{\gamma_i}} \\ &\asymp \sum_{i,j=1}^{2} \int_{F_{j,R}^{i,+} \cup F_{j,R}^{i,-}} \frac{d(\Psi(\tau), L)|d\tau|}{|\Psi(\tau) - \Psi(w_2)|^{\gamma_2}(|\tau| - 1)} \\ &=: \sum_{i,j=1}^{2} \left[\tilde{J}(F_{j,R}^{i,+}) + \tilde{J}(F_{j,R}^{i,-}) \right].\end{aligned}$$

ve (4.141)'den:

$$\begin{aligned}A_n &\prec \|P_n\|_p^{p/2} \sum_{i=1}^{2} J^i_{n,2} \\ &=: \|P_n\|_p^{p/2} \sum_{i=1}^{2} \left[I^i_{n,1}(E^{i,+}_{1,R}) + I^i_{n,2}(E^{i,-}_{2,R}) \right] \\ &=: \|P_n\|_p^{p/2} \sum_{i=1}^{2} \left[I^{i,+}_{n,1} + I^{i,-}_{n,2} \right],\ i = 1, 2,\end{aligned} \tag{4.143}$$

burada

$$I^{i,\pm}_{n,k} \coloneqq I^i_{n,k}(E^{i,\pm}_{k,R}) \coloneqq \int_{F^{i,\pm}_{k,R}} \frac{d(\Psi(\tau), L)|d\tau|}{|\Psi(\tau) - \Psi(w_i)|^{\gamma_i}(|\tau| - 1)};\ i,\ k = 1, 2. \tag{4.144}$$

(4.136) ve (4.137)'ye göre $i=1,2$ ve $k=1,2$ için $I_{n,k}^{i,\pm}$ integralini değerlendirmek yeterlidir. γ_i $(-1<\gamma_i\leq 0,\ \gamma_i>0,\ i=1,2)$ değerleri için $I_{n,k}^{i,\pm}$ integrali ayrı ayrı değerlendirilecektir.

1. $i=1$ olsun.

1.1. $I_{n,1}^{1,+}+I_{n,1}^{1,-}$ integrali için $\gamma_1>0$ durumunda:

$$I_{n,1}^{1,+}+I_{n,1}^{1,-}=\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{d(\Psi(\tau),L)|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1}(|\tau|-1)}$$

$$\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1-1}}\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{(\gamma_1-1)(1+\kappa)}}$$

$$\prec\begin{cases} n^{(\gamma_1-1)(1+\kappa)}, & (\gamma_1-1)(1+\kappa)>1,\\ n\ln n, & (\gamma_1-1)(1+\kappa)=1,\\ n, & (\gamma_1-1)(1+\kappa)<1,\end{cases} \tag{4.145}$$

ve $-1<\gamma_1\leq 0$ durumunda ise

$$I_{n,1}^{1,+}+I_{n,1}^{1,-}=\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}\frac{d(\Psi(\tau),L)|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1}(|\tau|-1)}$$

$$\begin{aligned}&\prec nd_{1,R}^{(-\gamma_1)+1}\int\limits_{F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}}|d\tau|\prec n\left(\frac{1}{n}\right)^{[(-\gamma_1)+1](1-\kappa)}\cdot mes\left(F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}\right)\\&\prec n^{[\gamma_1-1](1-\kappa)}\prec 1,\end{aligned} \tag{4.146}$$

elde edilir.

1.2. (4.145) ve (4.146)'ya benzer olarak $I_{n,2}^{1,+}+I_{n,2}^{1,-}$ için $\gamma_1>0$ durumunda:

$$I_{n,2}^{1,+}+I_{n,2}^{1,-}=\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\frac{d(\Psi(\tau),L)|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1}(|\tau|-1)}$$

$$\prec n\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1-1}}\prec n\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\frac{|d\tau|}{|\tau-w_1|^{(\gamma_1-1)(1+\kappa)}}$$

$$\prec\begin{cases} n^{(\gamma_1-1)(1+\kappa)}, & (\gamma_1-1)(1+\kappa)>1,\\ n\ln n, & (\gamma_1-1)(1+\kappa)=1,\\ n, & (\gamma_1-1)(1+\kappa)<1,\end{cases} \tag{4.147}$$

ve $-1<\gamma_1 \leq 0$ durumunda ise

$$I_{n,2}^{1,+}+I_{n,2}^{1,-}=\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\frac{d(\Psi(\tau),L)|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{\gamma_1}(|\tau|-1)}$$

$$\prec n\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\kappa}\int\limits_{F_{2,R}^{1,+}\cup F_{2,R}^{1,-}}\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_1)\right|^{(-\gamma_1)}\left|d\tau\right|\prec n^{\kappa},$$

elde edilir. (4.148)

2. $i=2$ olsun. Bir önceki duruma benzer olarak:

2.1. $\gamma_2>0$ için

$$I_{n,1}^{2,+}+I_{n,1}^{2,-}=\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}}\frac{d(\Psi(\tau),L)|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2}(|\tau|-1)}$$

$$\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)\right|^{\gamma_2-1}}\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2^+)\right|^{\frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}}}$$

$$\prec n\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}}\frac{\left|d\tau\right|}{\left|\tau-w_2^+\right|^{\frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)}}\prec\begin{cases} n^{\frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)}, & \frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)>1,\\ n\ln n, & \frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)=1,\\ n, & \frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)<1,\end{cases} \qquad (4.149)$$

ve $\gamma_2 \leq 0$ için

$$I_{n,1}^{2,+}+I_{n,1}^{2,-}=\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}}\frac{d(\Psi(\tau),L)|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2}(|\tau|-1)}$$

$$\prec nd_{2,R}^{(-\gamma_2)+1}\int\limits_{F_{1,R}^{2,+}\cup F_{1,R}^{2,-}}\left|d\tau\right|\prec n\cdot mes\left(F_{1,R}^{1,+}\cup F_{1,R}^{1,-}\right)\prec 1, \qquad (4.150)$$

elde edilir.

2.2. $\gamma_2>0$ için

$$I_{n,2}^{2,+}+I_{n,2}^{2,-}=\int\limits_{F_{2,R}^{2,+}\cup F_{2,R}^{2,-}}\frac{d(\Psi(\tau),L)|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2}(|\tau|-1)}$$

$$\prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}\cup F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2-1}} \prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}\cup F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{\left|\Psi(\tau)-\Psi(w_2^+)\right|^{\frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)}}$$

$$\prec n \int_{F_{2,R}^{2,+}\cup F_{2,R}^{2,-}} \frac{|d\tau|}{\left|\tau-w_2^+\right|^{\frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)}} \prec \begin{cases} n^{\frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)}, & \frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)>1, \\ n\ln n, & \frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)=1, \\ n, & \frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)<1, \end{cases} \qquad (4.151)$$

ve $-1<\gamma_2\le 0$ için

$$I_{n,2}^{2,+}+I_{n,2}^{2,-} = \int_{F_{2,R}^{2,+}\cup F_{2,R}^{2,-}} \frac{d(\Psi(\tau),L)|d\tau|}{|\Psi(\tau)-\Psi(w_2)|^{\gamma_2}(|\tau|-1)},$$

$$\prec n\left(\frac{1}{n}\right)^{1-\kappa} \int_{F_{2,R}^{2,+}\cup F_{2,R}^{2,-}} |\Psi(\tau)-\Psi(w_1)|^{(-\gamma_2)}|d\tau| \prec n^{\kappa}, \qquad (4.152)$$

bulunur. Böylece, (4.143)-(4.152) ‘den, her $p>0$ için:

$$A_n^{2/p} \prec \|P_n\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \begin{cases} n^{\frac{\gamma_1-1}{p}(1+\kappa)}, & (\gamma_1-1)(1+\kappa)>1, \\ (n\ln n)^{\frac{1}{p}}, & (\gamma_1-1)(1+\kappa)=1, \\ n^{\frac{1}{p}}, & (\gamma_1-1)(1+\kappa)<1, \\ n^{\frac{\kappa}{p}}, & -1<\gamma_1\le 0 \end{cases}$$

$$+\begin{cases} n^{\frac{\gamma_2-1}{p(1+\beta_2)}(1+\kappa)}, & \frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)>1, \\ (n\ln n)^{\frac{1}{p}}, & \frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)=1, \\ n^{\frac{1}{p}}, & \frac{\gamma_2-1}{1+\beta_2}(1+\kappa)<1, \\ n^{\frac{\kappa}{p}}, & -1<\gamma_2\le 0. \end{cases} \qquad (4.153)$$

sağlandığı görülür.

(4.136) ve (4.153) birleştirilerek:

$$|P_n(z)| \prec \left[\frac{A_n}{d(z,L_R)}\right]^{2/p} \left|B_m(z)\,\Phi^{n+1}(z)\right|,$$

elde edilir, burada A_n (4.153)’den alınır. $B_m(z)$ fonksiyonu Ω da analitik, $\overline{\Omega}$ da sürekli ve L üzerinde $|B_m(z)|=1$ dir. Böylece, maksimum modulus prensibine göre:

$$|B_m(z)|<1,\ z\in\Omega_R$$

sağlanır ve ispat tamamlanır.

Uyarı 4.2.1.1'in ispatı:

1) G^1 olarak $G^1 = B$ birim daire, T_n olarak ise $T_n(z) = 1 + z + ... + z^n$ ele alınsın. Bu durumda,

$$|T_n(z)| = |1 + z + ... + z^n| \le 1 + |z| + ... + |z^n| = n + 1 \text{ ve } T_n(1) = n + 1$$

olduğundan

$$\|T_n\|_{C(\overline{B})} = n + 1$$

dir. Öte yandan,

$$\|T_n\|_{\mathcal{L}_2(\partial B)} = \int_{\partial B} |T_n(z)|^2 |dz| = \int_{\partial B} T_n(z) \bullet \overline{T_n(z)} |dz|$$

$$= \int_{\partial B} \left(1 + z + ... + z^n\right) \bullet \left(1 + \overline{z} + ... + \overline{z}^n\right) |dz|$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 + e^{it} + ... + e^{int}\right) \bullet \left(1 + e^{-it} + ... + e^{-int}\right) dt$$

$$= \int_0^{2\pi} \left(1 + e^{it} + ... + e^{int}\right) dt + \int_0^{2\pi} \left(e^{-it} + 1 + ... + e^{i(n-1)t}\right) dt$$

$$+ ... + \int_0^{2\pi} \left(e^{-int} + e^{-i(n-1)t} + ... + 1\right) dt$$

$$= 2\pi + 2\pi + ... + 2\pi = 2\pi(n+1)$$

dir. Dolayısıyla,

$$\|T_n\|_{C(\overline{B})} = n + 1 = \frac{1}{2\pi}(n+1)^{\frac{1}{2}} \bullet 2\pi (n+1)^{\frac{1}{2}}$$

$$= \frac{1}{2\pi}\left(\frac{n+1}{n}\right)^{\frac{1}{2}} n^{\frac{1}{2}} \|T_n\|_{\mathcal{L}_2(\partial B)}$$

$$\ge \frac{1}{2\pi} n^{\frac{1}{2}} \|T_n\|_{\mathcal{L}_2(\partial B)}$$

elde edilir.

2) $\{Q_n(z)\}$, $n = 0,1,...$, ∂G^2 eğrisine göre ortonormal polinomlar sistemi olsun, yani bu sistem için

$$\int_{\partial G^2} Q_n(z) \overline{Q_m(z)} |dz| = \begin{cases} 1, & n = m \ ise, \\ 0, & n \neq m \ ise \end{cases}$$

sağlansın. Aşikârdır ki, $\|Q_n\|_{\mathcal{L}_2(\partial G^2)} = 1.$

Her $z \in \Omega$ için $Q_n(z)$ polinomu aşağıdaki asimptotik gösterime sahiptir [46, s.338, Teorem 2]:

$$Q_n(z) = \sqrt{\frac{|\partial G^2|}{2\pi}} \Phi^n(z) \sqrt{\Phi'(z)} (1+\delta_n), \quad n \to \infty,$$

burada, $\delta_n \to 0$, $n \to \infty$. O halde, her $z \in \Omega \setminus \overline{G^2}$ için

$$|Q_n(z)| \geq c_1 |\Phi(z)|^n \sqrt{|\Phi'(z)|}$$

$$\geq c_2 |\Phi(z)|^n \sqrt{\frac{|\Phi(z)|-1}{d(z,L)}} \geq c_3 \begin{cases} |\Phi(z)|^n, & z,\ \partial G^2\text{- ye "yakin" ise,} \\ \dfrac{|\Phi(z)|^{n+\frac{1}{2}}}{d(z,L)}, & z,\ \partial G^2\text{-den "uzak" ise.} \end{cases} \qquad (*)$$

yazılabilir.

Öte yandan, (4.78) formülü ile tanımlanan

$$G_n(z) := \frac{P_n(z)}{\Phi^{n+1}(z)}$$

fonksiyonu, Ω da analitik, $\overline{\Omega}$ da sürekli ve $z = \infty$da en azından $n + \varepsilon_1, \varepsilon_1 > 0$, mertebeden sıfır yerine sahip olmalıdır. $G_n(z)$ fonksiyonu tam n. mertebeden sıfır yerine sahip olursa, değerlendirmelere $\lim\limits_{z \to \infty} G_n(z)$ sayısı da dahil olacaktır. Bundan kaçınmak ve basitlik için $\varepsilon_1 = 1$olarak ele alınmıştır.

Şimdi, eğer ∂G^2 analitik eğri ise, o yarıkonformdur ve $\partial G^2 \in Q_1^1$' dır. $h(z) \equiv 1$ durumunda, Teorem 4.2.1.1 ve de Sonuç 4.2.1.1 de elde edilmiş değerlendirmelerin (*) ile karşılaştırıldığında, ∂G^2den "uzak" noktalar için $\varepsilon_1 = \dfrac{1}{2}$ ile kesinliği görülmektedir.

JORDAN EĞRİSİ İLE SINIRLI SONSUZ BÖLGELERDE CEBİRSEL POLİNOMLARIN DEĞERLENDİRİLMESİ

Bu bölümde; keyfi Jordan eğrisi ile sınırlı sonsuz bölgelerde cebirsel polinomların $A_p(G)$-normunun artışı incelenmiş ve bu bölgeler için Bernstein-Walsh eşitsizliklerine benzer sonuçlar elde edilmiştir.

Bu bölüme ait esas teorem ve sonuçlar verilmeden önce bazı yardımcı sonuçlar verilecektir.

4.3.1. Yardımcı Sonuçlar

Lemma 1.[16]. $p>0$, f fonksiyonu $|z|>1$ de analitik ve sonsuzlukta en fazla n. mertebeden kutup yerine sahip olsun. O halde, her R_1 ve $R>R_1$ için

$$\|f\|_{A_p(R_1<|z|<R)} \le \left(\frac{R^{np+2}-R_1^{np+2}}{R_1^{np+2}-1}\right)^{\frac{1}{p}} \|f\|_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

sağlanır.

Sonuç 1. Lemma 1.'in koşulları altında $R_1=1+\frac{1}{n}$ için aşağıdaki elde edilir:

$$\|f\|_{A_p(R_1<|z|<R)} \le c_{13} R^{n+\frac{2}{p}} \|f\|_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

burada, $c_{13} := c_{13}(p,n) = \left(\frac{1}{e^p-1}\right)^{\frac{1}{p}}[1+O(\frac{1}{n})],\ n\to\infty$.

Sonuç 4.3.1.1. in ispatı: Her $p>0$ için aşağıdaki tanımlansın:

$$S^p := S^p(R,R_1,n,p) := \frac{R^{np+2}-R_1^{np+2}}{R_1^{np+2}-1} = R^{np+2}\cdot\frac{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^{np+2}}{R_1^{np+2}-1}. \qquad (4.154)$$

Burada $R_1=1+\frac{1}{n}$ alınırsa:

$$S^p = R^{np+2} \bullet \frac{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^{np+2}}{(1+\frac{1}{n})^{np+2}-1} \leq \frac{R^{np+2}}{(1+\frac{1}{n})^{np+2}-1}. \tag{4.155}$$

elde edilir. Bilinen eşitsizliğin [43]

$$\frac{e}{2n+2} < e-\left(1+\frac{1}{n}\right)^n < \frac{e}{2n+1},\ n=1,2,\dots \tag{4.156}$$

sağ tarafı uygulanırsa

$$(1+\frac{1}{n})^{np+2} \geq (1+\frac{1}{n})^{np} \geq \left(e-\frac{e}{2n+1}\right)^p = e^p \bullet \left(1-\frac{1}{2n+1}\right)^p \geq (\varepsilon_n \bullet e)^p,$$

bulunur, burada,

$$\frac{2}{3} \leq \varepsilon_n := 1-\frac{1}{2n+1} \to 1,\ n \to \infty. \tag{4.157}$$

Sonuç olarak,

$$S^p \leq \frac{1}{(\varepsilon_n e)^p - 1} R^{np+2} = R^{np+2}\frac{1}{e^p-1}\left[1+O(\frac{1}{n})\right],\ n \to \infty. \tag{4.158}$$

(4.155) ve (4.158) kullanılarak ispat tamamlanır.

Uyarı 1. $P_n = z^n$, $R_1 = 1+\dfrac{1}{n}$ ve her $R > R_1$ için aşağıdaki elde edilir:

$$\|P_n\|_{A_p(R_1<|z|<R)} \geq c_{14} R^{n+\frac{2}{p}} \|P_n\|_{A_p(1<|z|<R_1)}$$

burada, $c_{14} := c_{14}(p,n) := \left(\frac{1}{e^p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[1-O(\frac{1}{n})\right],\ n \to \infty$.

Uyarı 4.3.1.1. in ispatı:

(4.154) aşağıdaki gibi yazılır:

$$S^p = R^{np+2} \bullet \frac{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^{np+2}}{(1+\frac{1}{n})^{np+2}-1} = R^{np+2} \bullet \frac{1-\delta_n}{(1+\frac{1}{n})^{np+2}-1},$$

burada,

$$\delta_n := \left(\frac{R_1}{R}\right)^{np+2} \to 0,\ n \to \infty.$$

(4.156) eşitsizliğinin sol tarafı uygulanırsa

$$(1+\frac{1}{n})^{np+2} = (1+\frac{1}{n})^{np}(1+\frac{1}{n})^{2}$$
$$\leq e^{p}\cdot\eta_n,$$

elde edilir, burada

$$\eta_n = (1+\frac{1}{n})^{2} \to 1,\ n\to\infty.$$

Böylece,

$$S^{p} \geq R^{np+2}\cdot\frac{1-\delta_n}{\eta_n e^{p}-1}$$

$$= R^{np+2}\cdot\left[\frac{1}{\eta_n e^{p}-1}-\frac{\delta_n}{\eta_n e^{p}-1}\right]$$

$$= R^{np+2}\cdot\left\{\frac{1}{e^{p}-1}\left[1-O(\frac{1}{n})\right]-O(\delta_n)\right\}$$

$$= R^{np+2}\cdot\frac{1}{e^{p}-1}\left[1-O(\frac{1}{n})\right],\quad n\to\infty.$$

sağlanır.

Sonuç 2. $f\equiv P_n$ için aşağıdaki elde edilir:

$$\|P_n\|_{A_p(|z|<R)} \leq c_{15}R^{n+\frac{2}{p}}\|P_n\|_{A_p(|z|<R_1)}$$

burada, $c_{15} := c_{15}(p,n) := \left(\frac{2}{e^{p}-1}\right)^{\frac{1}{p}}[1+O(\frac{1}{n})],\ n\to\infty.$

Sonuç 4.3.1.2. nin ispatı:

Gerçekten de, Sonuç 4.3.1.1. her $f\equiv P_n$ için sağlanır:

$$\|P_n\|^{p}_{A_p(R_1<|z|<R)} \leq S^{p}\cdot\|P_n\|^{p}_{A_p(1<|z|<R_1)}.$$

Eşitsizliğin her iki tarafına $\|P_n\|^{p}_{A_p(|z|<R_1)}$ eklenirse aşağıdaki elde edilir:

$$\|P_n\|^p_{A_p(|z|<R)} \le S^p \cdot \|P_n\|^p_{A_p(1<|z|<R_1)} + \|P_n\|^p_{A_p(|z|<R_1)}$$

$$\le 2S^p \cdot \|P_n\|^p_{A_p(|z|<R_1)}.$$

Buradan, (4.158) dikkate alınırsa, aşağıdaki elde edilir:

$$\|P_n\|^p_{A_p(|z|<R)} \le \frac{2}{e^p-1}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right] \cdot R^{np+2}\|P_n\|^p_{A_p(|z|<R_1)}.$$

4.3.2. Temel Sonuçlar

Teorem 1. $p>0$ ve G Jordan bölgesi olsun. Bu durumda, her bir $P_n \in \wp_n$, $R_1 = 1+\frac{1}{n}$ ve keyfi tespit edilmiş $R, R > R_1$ için aşağıdaki doğrudur:

$$\|P_n\|_{A_p(G_R)} \le c_{16} R^{n+\frac{2}{p}} \|P_n\|_{A_p(G_{R_1})},$$

burada, $c_{16} = \left(\frac{2}{e^p-1}\right)^{\frac{1}{p}}\left[1+O(\frac{1}{n})\right],\ n \to \infty.$

Teorem 4.3.2.1. in ispatı: Bu teoremin ispatı için R ve n ' den bağımsız bir $c_{31} = c_{31}(G,p) > 0$ sabiti için aşağıdaki eşitsizliğin sağlandığını göstermek yeterlidir:

$$\|P_n\|_{A_p(G_R \backslash G_{R_1})} \le c_{31} R^{n+\frac{2}{p}} \|P_n\|_{A_p(G_{R_1}\backslash G)}.$$

Gerçekten, yukarıdaki eşitsizlik doğru ise,

$$\|P_n\|^p_{A_p(G_R \backslash G_{R_1})} \le c_{31}{}^p R^{np+2} \|P_n\|^p_{A_p(G_{R_1}\backslash G)}$$

yazılabilir. Şimdi, bu eşitsizliğin her iki tarafına da $\|P_n\|^p_{A_p(G_{R_1})}$ eklenirse:

$$\|P_n\|^p_{A_p(G_R)} \leq c_{31}{}^p R^{np+2} \|P_n\|^p_{A_p(G_{R_1}\setminus G)} + \|P_n\|^p_{A_p(G_{R_1})}$$

$$\leq \max\left\{1, c_{31}^p\right\} R^{np+2} \|P_n\|^p_{A_p(G_{R_1}\setminus G)} + \max\left\{1, c_{31}^p\right\} R^{np+2} \|P_n\|^p_{A_p(G_{R_1})}$$

$$= 2\max\left\{1, c_{31}^p\right\} R^{np+2} \|P_n\|^p_{A_p(G_{R_1})}.$$

elde edilir. Böylece,

$$\|P_n\|_{A_p(G_R)} \leq 2^{\frac{1}{p}} \max\left\{1, c_{31}\right\} R^{n+\frac{2}{p}} \|P_n\|_{A_p(G_{R_1})}.$$

sağlanır.
Şimdi, ispata tekrar dönülürse, her $p > 0$ için:

$$f_n(w) := P_n(\Psi(w))\left[\Psi'(w)\right]^{\frac{2}{p}},\ w = \Phi(z).$$

şeklinde tanımlansın. f_n fonksiyonu Δ' da analitik ve $z = \infty$ noktasında n. dereceden kutup yerine sahiptir. Böylece, Lemma 4.3.1.1.' e göre aşağıdaki elde edilir:

$$\| f_n\|^p_{A_p(R_1<|w|<R)} \leq S \| f_n\|^p_{A_p(1<|w|<R_1)},$$

burada $S := S\left(\mathrm{R}, \mathrm{R}_1, n, p\right)$ (4.154) ile tanımlıdır ve onun için

$$S^p = R^{np+2} \cdot \frac{1-\left(\frac{R_1}{R}\right)^{np+2}}{R_1^{np+2}-1} \leq \frac{R^{np+2}}{R_1^{np+2}-1}$$

sağlandığından,

$$\iint\limits_{G_R\setminus G_{R_1}} |P_n(z)|^p \, d\sigma_z = \iint\limits_{R_1<|w|<R} |f_n(w)|^p \, d\sigma_w$$

$$\leq S^p \iint\limits_{1<|w|<R_1} |f_n(w)|^p \, d\sigma_w$$

$$\leq \frac{R^{np+2}}{R_1^{np+2}-1} \iint\limits_{G_{R_1}\setminus G} |P_n(z)|^p \, d\sigma_z$$

elde edilir. Sonuç olarak,

$$\iint\limits_{G_R} |P_n(z)|^p \, d\sigma_z \le \frac{2R^{np+2}}{R_1^{np+2}-1} \iint\limits_{G_{R_1}} |P_n(z)|^p \, d\sigma_z \tag{4.159}$$

bulunur.

$R_1 = 1+\dfrac{1}{n}$ alınırsa (4.156) ve (4.158)'den:

$$\frac{1}{R_1^{np+2}-1} = \frac{1}{e^p-1}\left[1+O\left(\frac{1}{n}\right)\right], \; n \to \infty. \tag{4.160}$$

elde edilir. Son olarak da (4.159) ve (4.160) kullanılarak ispat tamamlanır.

Uyarı 2. Her $n = 1, 2, ...$ için bir $P_n^* \in \wp_n$ polinomu, bir $G^* \subset C$ bölgesi ve $R > R_1 = 1+\dfrac{1}{n}$ vardır öyle ki

$$\left\|P_n^*\right\|_{A_p(G_R^*)} \ge \left(\frac{2}{e^p-1}\right)^{\frac{1}{p}} R^{n+\frac{2}{p}} \left\|P_n^*\right\|_{A_p(G_{R_1}^*)}$$

sağlanır.

Uyarı 4.3.2.1.in ispatı: $P_n^* = z^n$, $G^* = B := \{z \,:\, |z| < 1\}$ ve $R \le \frac{8e^p}{e^p-1}$ olsun. O halde,

$$\left\|P_n^*\right\|^p_{A_p(G_R^*)} = \iint\limits_{|z|<R} |z^n|^p \, d\sigma_z$$

$$= R^{np+2}.R_1^{-(np+2)} \left\|P_n^*\right\|^p_{A_p(G_{R_1}^*)}$$

$$= \frac{R}{R_1^2.R_1^{np}} \cdot R^{np+2} \left\|P_n^*\right\|^p_{A_p(G_{R_1}^*)}.$$

$R_1 = 1+\frac{1}{n}$ için (4.156)'dan aşağıdaki elde edilir:

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^{np} \le e^p,$$

$$\left(1+\frac{1}{n}\right)^2 \le 4.$$

Böylece,

$$\frac{R}{R_1^{np+2}} \geq \frac{R}{4e^p},$$

ve, dolayısıyla

$$\left\|P_n^*\right\|_{A_p(G_R^*)}^p \geq \frac{R}{4e^p} \cdot R^{np+2} \left\|P_n^*\right\|_{A_p(G_{R_1}^*)}^p$$

dir. Özel halde, $R = \frac{8e^p}{e^p - 1}$ için

$$\left\|P_n^*\right\|_{A_p(G_R^*)}^p \geq \frac{2}{e^p - 1} \cdot R^{np+2} \left\|P_n^*\right\|_{A_p(G_{R_1}^*)}^p$$

sağlandığı görülür ve bununla da ispat tamamlanır.

Uyarı 3. Teorem 1' de, keyfi G Jordan bölgesi için elde edilen

$$\left\|P_n\right\|_{A_p(G_R)} \leq c_{17} R^{n+\frac{2}{p}} \left\|P_n\right\|_{A_p(G_{R_1})} \quad p > 0,$$

değerlendirilmesi özel durumlarda daha da netleştirilebilir. Örneğin, G bölgesinin sınırı keyfi yarıkonform eğri ise, o halde sağ taraftaki $\left\|P_n\right\|_{A_p(G_{R_1})}$ sayısı $\left\|P_n\right\|_{A_p(G\ )}$ ile değiştirilebilir.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasında;

Bölüm 4.1' de dış sıfır açılara sahip parçalı Dini-düzgün eğri ile sınırlı bölgelerde; Bölüm 4.2' de önce yarıkonform, daha sonra iç ve dış sıfır açılara sahip parçalı yarıkonform eğrilerle sınırlı bölgelerde

a) $\left|P_n(z)\right| \le \alpha_n \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)} \left|\Phi(z)\right|^{n+1}, \quad z \in \Omega,$

b) $\left|P_n(z)\right| \le \beta_n \left\|P_n\right\|_{\mathcal{L}_p(h,L)}, \ z \in \overline{G}$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde $\alpha_n := \alpha_n(G,h,z) > 0$ ve $\beta_n := \beta_n(G,h) > 0$ sabitleri bulundu ve bu sabitlerin, verilmiş bölgenin ve ağırlık fonksiyonunun özelliklerine bağlı olarak değişimi elde edildi.

Bölüm 4.3' de $h(z) \equiv 1$ ve $R_1 = 1 + \frac{1}{n}$ olmak üzere, keyfi tespit edilmiş $R,\ R > R_1$, sayısı ve $c = c(G) > 0$ sabiti için keyfi Jordan bölgesinde

$$\left\|P_n\right\|_{A_p(G_R)} \le cR^{n+\frac{2}{p}} \left\|P_n\right\|_{A_p(G_{R_1})},$$

eşitsizliğini sağlandığı gösterildi.

5.2. ÖNERİLER

Elde edilen sonuçlar doğrultusunda, benzeri sonuçların kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde polinomların türevleri için yazılabilmesi irdelenebilir. $p>1$ için elde edilmiş bazı sonuçların $0<p\leq 1$ değerleri için benzerlerinin bulunması problemi de incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Bernstein S.N., “Sur l’ordre de la meilleure approximation desfonetions continues par despolynomes de degree donne’’, M em. Acad.Roy. Belgique, (2), vol. 4. pp. 1-104.

[2] Faber. G., “Über nach Polynomen fortschreitende Reihen’’, Münchner Berichte, pp. 157-178.

[3] Walsh J. L., “Interpolation and Approximation by Rational Functions in the Complex Domain’’, AMS, Colloquium Publications, Vol.20, 1960

[4] Hille, E., Szegö, G., Tamarkin, J.D., “On Some Genarelizations of A Theorem of A. Markoff”, Duve Math.,Vol.3**,** s.729-739, (1937).

[5] W.E.Sewell, “Generalized derivatives and approximation by polynomials”, Transctions of the American Society, vol.41 (1937), pp.84-123.

[6] Donald W. Western, “Inequalities of the Markoff and Bernstein type for integral norms”, Part of the thesis for Doctor of Philosophy at Brown University, 1946.

[7] Suetin P. K.,”The ordinally comparison of various norms of polynomials in the complex domain” (Poryadkovoe sravnenie razlichnix norm mnogochlenov kompleksnoy oblasti), Matematicheskie zapiski Uralskogo Gos. Universiteta, Vol.5 Tet. 4, (1966), (in Russian).

[8] Suetin P. K.,”On some estimates of the orthogonal polynomials with singularities weight and contour” (Nekotorie otsenki ortogonalnix po konturu mnogochlenov pri osobennosti besa i kontura), Sibirskiy Mat. Zhurnal, Vol. VIII, No:3, (1967), pp.1070-1078 (in Russian).

[9] Mamedhanov D. I., Inequalities of S.M.Nikolskii type for polynomials in the complex variable on curves, Soviet Math.Dokl., 15, (1974), pp.34-37.

[10] Mamedhanov D. I., “On Nikolskii-type inequalities with new characteristics”, Doklady Mathematics, 82, (2010), pp.882-883.

[11] Nikolskii S. M., "Approximation of Function of Several Variable and Imbeding Theorems", Springer-Verlag, New-York, 1975.

[12] Dzjadyk V.K., "Introduction to the theory of approximation of functions by polynomials", Nauka, Moscow, Russia, 1977.

[13] Pritsker I., Comparing Norms of Polynomials in One and Several Variables, J. of Math. Anal. and Appl., 216, (1997), pp.685-695.

[14] Abdullayev F. G., "Dissertation (Ph.D.)'', Donetsk, 1986, 120 p.

[15] Abdullayev F. G., "On the some properties of the orthogonal polynomials over the region of the complex plane (Part III)'', Ukr. Math.J. 2001, Vol.53, No: 12, pp.1934-1948.

[16] Abdullayev F. G., "The properties of the orthogonal polynomials with weight having singulerity on the boundary contour'', J. of Comp. Anal. and Appl., 2004, Vol. 6, No: 1, pp. 43-59.

[17] Abdullayev F. G., Deger U., "On the orthogonal polynomials with weight having singularity on the boundary of regions of the complex plane", Bull. Belg. Math. Soc., 2009, Vol 16, No:2, pp.235-250.

[18] Abdullayev F. G., Aral N. D., "On the Bernstein-Walsh Type Lemma's in Regions of the Complex Plane", Ukr. Math. J., Vol. 63, No: 3, (2011), pp.337-350.

[19] Abdullayev F. G., Aral N. D., Özkartepe P., "Bernstein-Walsh type estimations for the unbounded regions of complex plane", Proc. AS of Bulgarian "Math. Anal. Dif. Equ. and Appl.", (2011), pp: 101-112.

[20] Abdullayev F. G., Gün C.D.," On the behavior of the algebraic polynomials in regions with piecewise smooth boundary without cusps", Ann.Polon.Math. 111 (2014) , 39-58, doi:10.4064/ap111-1-4.

[21] Andrievskii V. V., Weighted Polynomial Inequalities in the Complex Plane, Journal of Approximation Theory, Vol. 164 Issue 9, (2012), pp. 1165-1183.

[22] Stylianopoulos N., “Fine asymptotics for Bergman orthogonal polynomials over domains with corners’’, CMFT 2009, Ankara, June 2009.

[23] Jackson D.,” Certain problems on closest approximations”, Bull. Amer. Math. Soc., 39, (1933), pp.889-906.

[24] Szegö G. and Zigmund A., “On certain mean values of polynomials”, J.Anal. Math., 3, (1954), pp.225-244.

[25] Abdullayev F. G., Gün C.D., Özkartepe N.P.**,** (2015). “ Inequalities for algebraic polynomials in regions without cusps ”, Journal of Nonlinear Func.Anal., 2015:3, pp.1-32.

[26] Milovanovic G. V., Mitrinovic D.S., and Rassias Th.M., Topics in Polynomials: Extremal Problems, Inequalities, Zeros, World Scientifc, Singapore, 1994.

[27] Başkan, T. “Kompleks Fonksiyonlar Teorisi”, 3.Baskı Vipaş, 360 s., (1998)

[28] Depree, J. D., Oehring, C. C., “Elements of Complex Analysis”, Addison Wesley Publishing Company, USA, 390 s., (1969).

[29] Rudin, W. “Real and Complex Analysis”, Mc Graw-Hill, 452 s., (1974).

[30] Saff, E. B., Snider, A. D., “Fundamentals of Complex Analysis”, Prentice Hall,Upper saddle River, New Jersey, 528 s., (1993)

[31] Markushevich, A. I. “Theory of Functions of a Complex Variable”, Chelsea Publishing Company., New York, Three volumes in one, 1231 s., (1985)

[32] Davis, P. J., “Interpolation and Approximation”, Blaisdell Publishing Company, New York 393 s., (1963).

[33] Ahlfors, L. V., “Complex Analysis”, McGraw-Hill, Inc., USA, 331 s., (1969).

[34] Andrievskii, V. V., Belyi, V. I., Dzyadyk, V. K. “Conformal Invariants in Constructive Theory of Functions of Complex Plane” Atlanta World Federation Publ.Com. 199 s. (1995).

[35] Lehto, O., Virtanen, K. I. “Quasiconformal mappings in the plane”, Springer Verlag Berlin Heidelberg, New York, 258 s., (1973).

[36] Rickman, S. “Characterization of quasiconformal arcs”, Ann. Acad. Sci. Feen. Ser. A. Mathematica, 395 s., (1966).

[37] Abdullayev, F. G., Andrievskii, V.V., “On Orthogonal polynomials in the domains with $K-$quasiconformal boundary”, Izv. Akad. Nauk. Azerb. SSR, Ser F.T.M., 1: 3-7, (1983).

[38] Abdullayev, F. G., Özkartepe N.P.” On the Behavior of the Algebraic Polynomial in Unbounded Regions with Piecewise Dini-Smooth Boundary”, Ukranian Mathematical Journal, 66(5),579-597. Doi: DOI 10,1007/s11253-014-0962-3. (2014).

[39] Belinskii, P. P. ,”General Properties of Quasiconformal Mappings “[in Russian], Nauka, Novosibirsk (1968).

[40] Duren P. L. “Theory of H^p Spaces’’, Vol.38. Pure and Applied Mathematics (1970).

[41] Halilov, H., Hasanoğlu, A., Can, M. “YM1, Tek Değişkenli Fonksiyonlar Analizi”, 1. Baskı, Alemdar O., Literatür, 470 s., (1999).

[42] Andrievskii V. V., On the uniform convergence of the Bieberbach polynomials in the regions with piecewise quasiconformal boundary, In: Theory of Mappings and approximation functions, "Naukovo Dumka", Kyiv 1983, pp.3-18. (in Russian)

[43] Polya G., Szegö G.,”Problems and Teorems in Analysis I”, Nauka, Moscow (1978) (Russian edition).

[44] Warschawski S.E., “On differentiability at the boundary in conformal mapping”, Proc.Amer.Soc., 12, 1961, 614-620.

[45] Warschawski S.E., “On Hölder continuity at the boundary in conformal maps”, L. of Math. And Mech. 1968, 18, 423-427.

[46] Lesley F.D., “Hölder continuity of conformal mappings at the boundary via the strip method, Indiana Univ.Math.J., 1982, 31, 341-354.

[47] Smirnov V.I., Lebedev N.A., “Functions of Complex Variable”, 1968, The M.I.T. Press.

[48] Pommerenke C., “Boundary Behavior of Conformal Maps”, Springer-Verlag, Berlin, 300 s.,(1992).

ÖZGEÇMİŞ ve ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: N.Pelin ÖZKARTEPE

Doğum Tarihi: 20/11/1976

Öğrenim Durumu

Derece	**Bölüm/Program**	**Lise/Üniversite**	**Yıl**
Lise	Fen Bilimleri	Dumlupınar Lisesi	1990-1993
Lisans	Matematik	O.D.T.Ü.	1993-1999
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2009-2011

ESERLER

1. ABDULLAYEV F. G., **ÖZKARTEPE N. P.** (2015). Uniform and poitwise polynomial inequalities in regions with cusps in the weighted Lebesgue space. Jaen Journal on Approximation, Vol. 7, No:2.

2. ABDULLAYEV F. G., **ÖZKARTEPE N. P.,** GUN C D (2014). Uniform and pointwise polynomial inequalities in regions without cusps in the weighted Lebesgue space. Bulletin of TICMI, Vol. 18(1), 146-167.

3. ABDULLAYEV F. G., **ÖZKARTEPE N. P.** (2013). An analogue of the Bernstein-Walsh lemma in Jordan regions. Journal of Inequalities and Applications, 242(13), 1186-1200. **(SCI-Exp.)**

4. ABDULLAYEV F. G., **ÖZKARTEPE N. P.** (2015). On the growth of algebraic polynomials in the whole complex plane, *Journal of Korean Math. Soc.52,* 2015, No.4, pp.699-725. **(SCI-Exp.)**

5. ABDULLAYEV F. G., **ÖZKARTEPE N. P.** (2014). Bernstein -Walsh type inequalities on the piecewise smooth regions of complex plane. XVII th Con.on Ana.Func.and Related Topics,Chelm, POLAND, (Sözlü Bildiri).

6. ABDULLAYEV F. G., **ÖZKARTEPE N. P.,** GUN C. D. (2013). On the growth of modules of algebraic polynomials in unbounded regions of complex plane". Dedicated to 80th anniversary of Levan Zhizhıashvılı Fourier Analysis and Approximations theory, Bazaleti, GEORGİA,23-28 October,2013 (Sözlü Bildiri).

7. ABDULLAYEV F. G., GUN C. D., **ÖZKARTEPE N. P.** (2013). On the behavior of the algebraic polynomials in unbounded regions with piecewise-smooth boundary without cusps. The Algerian-Turkish International days on Mathematics, 12-14 September 2013, Fatih University, İstanbul, Turkey (Sözlü Bildiri).

8. ABDULLAYEV F. G., **ÖZKARTEPE N. P.** (2013). On the Behavior of the Algebraic Polynomial in unbounded regions with piecewise dini-smooth boundary. Bogolyubov readings DIF-2013,June 23-30,2013,Sevastopol, UKRAINE (Sözlü Bildiri).

9. ABDULLAYEV F. G., **ÖZKARTEPE N. P.** (2012). Bernstein-Walsh Type Estimates for the Various Regions of the Complex Plane. International Conference “Mathematical. Analysis. Differential Equarions. and their Applications (MADEA 2012, (Sözlü Bildiri).

10. ABDULLAYEV F. G., **ÖZKARTEPE N. P.** (2012). The Two Dimensionel Integral analog of the Lemma Bernstein-Walsh in Jordan Domains. International Conference “Mathematical. Analysis Differential Equarions. and their Applications (MADEA 2012) (Sözlü Bildiri).

11. ABDULLAYEV F. G., **ÖZKARTEPE N. P.** (2012). p-Bieberbach Polynomials and theır Approximatıon Properties. Wavelents, Theory of Approximation of Function and its Applications, Jule 08 – 15,2012, Sankt-Petersburg, Russian (Sözlü Bildiri).

12. ABDULLAYEV F. G., **ÖZKARTEPE N. P**. (2012). On the Approximation Properties of Some Extremal Polynomıals in Regions of Complex Plane. Theory of Approximation of Function and its Applications, May 28 - June 23 2012, Kamianets-Podilsky, Ukraine (Sözlü Bildiri).

13. ABDULLAYEV F. G., ARAL N. D., **ÖZKARTEPE N.P**. (2011). The Growth of the Norm Algebraıc Polynomıals of the Whole Complex

Plane. The 4th Congress of the Turkic World Mathematical Sosiety, Baku, Azerbaycan (Sözlü Bildiri).

14. ABDULLAYEV F. G., ÖZKARTEPE N.P. (2011). p-Bıeberbach Polynomıals and theır Approxımatıon Propertıes in Domaıns wıth Zero Angles. International Conference "In Modern Analysis, 20-23 June 2011, Donetsk, Ukraine, p: 4 (Sözlü Bildiri).

15. ABDULLAYEV F. G., ÖZKARTEPE N.P. (2013). On the Behavior of the Algebraic Polynomial in whole complex plane in the weighty Lebesque space, 26.Ulusal Matematik Sempozyumu, 4-7 Eylül, Diyarbakır.

16. ABDULLAYEV F. G., ÇETİN İ.S., ÖZKARTEPE N.P. (2013). Konform Dönüşümlerin Sayısal Hesaplamaları Üzerine, 26.Ulusal Matematik Sempozyumu, 4-7 Eylül, Diyarbakır.

17. ABDULLAYEV F. G., ÖZKARTEPE N.P. (2011). Kompleks düzlemin çeşitli bölgelerinde p-Bieberbach polinomlarının yakınsaklığı üzerine, XXIV. Ulusal Mat. Sem. , 7-10 Eylül, Bursa.