GENELLEŞTİRİLMİŞ HÖLDER METRİĞİNDE TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM

HİLAL BAYINDIR

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
TEMMUZ - 2015

GENELLEŞTİRİLMİŞ HÖLDER METRİĞİNDE TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM

HİLAL BAYINDIR

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

DANIŞMAN
Yrd. Doç. Dr. Uğur DEĞER

MERSİN
TEMMUZ 2015

Hilal BAYINDIR tarafından Yrd. Doç. Dr. Uğur DEĞER danışmanlığında hazırlanan "Genelleştirilmiş Hölder Metriğinde Trigonometrik Polinomlar ile Yaklaşım" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV	....
Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ	....
Yrd. Doç. Dr. Uğur DEĞER	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 31/07/2015 tarih ve 2015-20/808 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Enstitü Müdürü

"GENELLEŞTİRİLMİŞ HÖLDER METRİĞİNDE TRİGONOMETRİK POLİNOMLAR İLE YAKLAŞIM

HİLAL BAYINDIR

ÖZ

Hölder metriğinde Prösdorff'un elde etmiş olduğu sonuç aşağıdaki şekildedir. $0 \le \beta < \alpha \le 1$ için $f \in H_\alpha$ ise

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\beta = \begin{cases} n^{\beta-\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \\ n^{\beta-1} \ln n, & \alpha = 1 \end{cases}$$

sağlanır. Burada $\sigma_n(f)$, f 'in Fourier serisinin Cesáro ortalamasıdır. Das ve arkadaşları tarafından tanımlanan genelleştirilmiş Hölder Metriğinde, Leindler Cesáro ortalamasından daha genel olan Woronoi-Nörlund ve Riesz ortalamalarını kullanarak Prösdorff'un ele almış olduğu problemin bir benzerini incelemiştir. Bu tez çalışmasında da daha geniş dizi sınıfları üzerinde daha genel ortalamalar ile Leindler tarafından elde edilen sonuçlar genişletilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Trigonometrik polinomlar, Hölder metriği, Cesáro alt metodu

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Uğur DEĞER, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

Bayındır, H. 2015. Approximation by Trigonometric Polynomials in Generalized Hölder Metric. M. Sc. Thesis, University of Mersin.

APPROXIMATION BY TRIGONOMETRIC POLYNOMIALS IN GENERALIZED HÖLDER METRIC

Hilal BAYINDIR

ABSTRACT

The classic result of Prösdorff in Hölder Metric states that if $f \in H_\alpha \ (0 \le \beta < \alpha \le 1)$, then

$$\|\sigma_n(f) - f\|_\beta = \begin{cases} n^{\beta-\alpha}, & 0 < \alpha < 1 \\ n^{\beta-1}\ln n, & \alpha = 1 \end{cases}$$

where $\sigma_n(f)$ is Cesáro means of the Fourier series of f. Leindler has studied a smilar problem by Woronoi-Nörlund and Riesz means that is more general than Cesáro means in generalized Hölder Metric given by Das at all. We extend this result by using a more general method of means on the large classes of sequences.

Key Words: Trigonometric polynomials, Hölder metric, Cesáro submethod

Advisor: Assist. Prof. Dr. Uğur DEĞER, Mersin University, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Lisansa başladığım andan itibaren beni her zaman motive edip, desteğini hiç esirgemeyen insani ve ahlaki değerleri ile de örnek edindiğim danışmanım Yrd. Doç. Dr. Uğur DEĞER' e teşekkür ederim.

Lisans ve yüksek lisans eğitimim süresince bilgi ve tecrübelerinden faydalandığım Mersin Üniversitesi Matematik Bölümündeki hocalarıma teşekkür ederim.

Bugünlere gelmemde büyük emeği olan maddi ve manevi desteğini hiçbir zaman esirgemeyen babam Ahmet BAYINDIR, annem Tülin BAYINDIR ve bana her zaman örnek ve destek olan abim Hakan BAYINDIR'a minnettarım.

Tez yazım aşamasında bilgisayarla ilgili teknik desteklerinden dolayı Utku Bulut ŞİMŞEK'e teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\forall$	Her
Δ	Simetrik fark
$:=$	Tanım olarak eşittir.
$\ll$	Sabit bir katsayı ile küçük eşit
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi.
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\sim$	$f(x)\sim\phi(x) \Leftrightarrow f(x)/\phi(x)\to 1 \ (x\to\infty)$
O	$f(x)=O\{\phi(x)\} \Leftrightarrow \lvert f(x)/\phi(x)\rvert$ sınırlı $(x\to\infty)$
o	$f(x)=o\{\phi(x)\} \Leftrightarrow f(x)/\phi(x)\to 0 \ (x\to\infty)$
$\omega(f,u)$	f nin birinci mertebeden süreklilik modülü
$\omega(u)$	Süreklilik modülü tipi fonksiyon
$(C,1)$	Cesáro metodu
C_λ	Cesáro alt metodu
N_n	Woronoi-Nörlund metodu
R_n	Riesz metodu
N_n^λ	Woronoi-Nörlund alt metodu
R_n^λ	Riesz alt metodu
AMDS	Hemen hemen azalan dizilerin sınıfı
AMIS	Hemen hemen artan dizilerin sınıfı
AMDMS	Ortalaması hemen hemen azalan dizilerin sınıfı
AMIMS	Ortalaması hemen hemen artan dizilerin sınıfı
AMDUMS	Hemen hemen orta anlamda üsttsel azalan dizi
AMIUMS	Hemen hemen orta anlamda üsttsel artan dizi
AMDUSMS	Hemen hemen orta anlamda ikinci üsttsel azalan dizi
AMIUSMS	Hemen hemen orta anlamda ikinci üsttsel artan dizi

1. GİRİŞ

Yaklaşım teorisinin temel problemlerinden biri, verilen bir X uzayında, bu uzayın bir ϕ alt kümesindeki basit olmayan bir φ fonksiyonuna yeteri derecede yakın olan basit bir f fonksiyonunun bulunması oluşturur. Bu problemin çözümünde dikkat edilmesi gereken üç durum söz konusudur. Birincisi, X uzayı genellikle (C, L_p ya da fonksiyonların diğer Banach uzayları gibi) bir normlu uzay olarak alınır. İkincisi ise, ele alınan bu normlu X uzayında φ den f ye olan uzaklık $\|f-\varphi\|_X$ normu ile ölçülür. Son olarak buradaki yaklaşımı mümkün kılan, ϕ ile gösterilen özel fonksiyon sınıflarının belirlenmesidir. Bu anlamda aşağıda bahsedeceğimiz üç sınıf yaklaşım teorisindeki temel sınıfları oluşturur [Devore ve Lorentz, 1993].

1) $\wp_n$, derecesi n yi aşmayan

$$P(x):=P_n\left(x\right)=\sum_{k=0}^{n}a_k x^k$$

biçiminde bütün cebirsel P polinomlarının uzayı olmak üzere, kompakt bir $\left[a,b\right]$ aralığındaki fonksiyonlara yaklaşımda $\phi=\wp_n$ olarak seçilebilir.

2) $\mathcal{T}_n$, derecesi n yi aşmayan

$$T(x):=T_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

biçiminde bütün trigonometrik T polinomlarının sınıfı olmak üzere, $\mathbb{T}$ çemberi üzerinde tanımlı fonksiyonlar için $\phi=\mathcal{T}_n$ olarak alınabilir. Bu tez çalışmasında özellikle bu sınıf önemli bir yere sahiptir.

3) ϕ, Spline denilen parçalı polinomların oluşturduğu sınıf olarak alınabilir.

Bu sınıfları göz önünde tutarak yaklaşım teorisinde iyi bilinen Weierstrass'ın iki temel teoremi aşağıdaki gibidir [Devore ve Lorentz, 1993]:

Teorem 1.1 (Weierstrass, 1885)

$\left[a,b\right]$ aralığında tanımlı reel değerli sürekli her f fonksiyona cebirsel polinomlar ile düzgün olarak yaklaşılabilir. Yani, her $\varepsilon>0$ için bir $P\in\wp_n$ cebirsel polinomu vardır öyle ki

$$\left|f\left(x\right)-P\left(x\right)\right|<\varepsilon, \qquad a\le x\le b.$$

dir.

Teorem 1.2 (Weierstrass, 1885)

Her bir $f \in C(\mathbb{T})$ ve her $\varepsilon > 0$ için bir $T \in \mathcal{T}_n$ vardır öyle ki

$$|f(x) - T(x)| < \varepsilon, \qquad x \in \mathbb{T}$$

olur. Burada $C(\mathbb{T})$, $\mathbb{T}$ üzerindeki sürekli fonksiyonların uzayıdır.

Yukarıdaki iki teorem yaklaşımın hızıyla ilgili bilgi içermez. Bu teoremler yaklaşımın varlığını ortaya koyması açısından önemlidir. Burada yaklaşımın nasıl geliştirilebileceği ile ilgili bir soru ortaya çıkar. Eğer yaklaşımın hızı ile ilgili bir değerlendirme elde edilebilirse, bu durumda yaklaşımın derecesinden söz edilebilir.

X reel veya kompleks skaler ile bir Banach uzayı ve Y, X in bir kapalı lineer alt uzayı olsun. Her bir $f \in X$ ' in Y deki elemanlar ile yaklaşım hatası

$$E(f) := E(f,Y)_X := \inf_{P \in Y} \|f - P\| \tag{1.1.1}$$

ile gösterilir. $E(f)$, f nin sürekli bir fonksiyonudur. (1.1.1) ifadesindeki infumum bir $P = P^*$ için elde edilirse, Y den olan bu P^* 'a, f ye en iyi yaklaşım denir. X_n, X in sonlu boyutlu alt uzayını göstermek üzere, $E(f)$ nin n ye bağımlılığını ortaya koymak istediğimiz zaman $E(f)$ yerine $E_n(f)$ yazılır [Devore ve Lorentz, 1993].

Bir tek f fonksiyonu verildiğinde, onun yaklaşım hatası için kesin bir formül elde etmek genellikle mümkün değildir. Bundan dolayı yukarıda bahsedilen fonksiyon sınıfları öne çıkmaktadır. Örneğin, K, $\mathbb{T}$ üzerinde tanımlı fonksiyonlardan oluşan X Banach uzayının bir alt kümesi olsun. $E_n(f)$, trigonometrik polinomlar ile $f \in X$ nin yaklaşımının hatası ise, $\mathcal{T}_n$ sınıfındaki fonksiyonlar ile K nın yaklaşım hatası

$$E_n(K)_X := \sup_{f \in K} E_n(f)$$

formülü ile tanımlanır.

X uzayı C ve L_p gibi Banach uzayları olabileceği gibi bu tez çalışması için önemli olan aşağıda verilen Banach uzaylarından biri olarakta alınabilir. 1975 yılında Prösdorff tarafından 2π periyotlu sürekli fonksiyonların bir alt uzayı ele alınmıştır. Buna göre, $0 < \alpha \le 1$ ve K pozitif bir sabit olmak üzere

$$H_\alpha := \left\{ f \in C_{2\pi} : \left| f(x) - f(y) \right| \le K \left| x - y \right|^\alpha \right\}$$

ile tanımlanan fonsiyon sınıfına Hölder(Lipschitz) α sınıfı denir. Burada $C_{2\pi}$ ile $[0, 2\pi]$ üzerinde tanımlı bütün 2π periyotlu sürekli fonksiyonların uzayıdır. H_α uzayı

$$\Delta^\alpha f(x,y) = \frac{\left| f(x) - f(y) \right|}{\left| x - y \right|^\alpha}, \quad (x \ne y),\ \Delta^0 f(x,y) = 0,$$

ve $\| f \|_C = \sup\limits_{x \in [-\pi, \pi]} \left| f(x) \right|$ olmak üzere

$$\| f \|_\alpha = \| f \|_C + \sup_{x \ne y} \Delta^\alpha f(x,y) \tag{1.1.2}$$

biçiminde tanımlı $\| \cdot \|_\alpha$ normu ile bir Banach uzayıdır [Prössdorf, 1975]. (1.1.2) normu ile üretilen metriğe Hölder metriği denir. Açıktır ki, $0 \le \beta < \alpha \le 1$ için

$$\| f \|_\beta \le (2\pi)^{\alpha - \beta} \| f \|_\alpha$$

olduğundan $H_\alpha \subseteq H_\beta$ dır.

Daha sonraki yıllarda Hölder metriğinin bazı genelleştirmeleri verilmiştir. 1979 yılında Leindler tarafından Prössdorf'ün vermiş olduğu teoremlerin bir genelleştirilmesi yapılmıştır [Leindler, 1979]. 2002 yılında Das ve diğerleri tarafından bir başka genelleştirme ele alınmıştır.

Bu tez çalışmasında özellikle Das ve diğerleri tarafından verilen genelleştirilmiş Hölder metriği ele alınacaktır [Das vd., 2002]. Bu metrik ile ilgili kavramlar aşağıdaki gibidir. f, 2π periyotlu sürekli bir fonksiyon olsun. f nin süreklilik modülü

$$\omega(f, \delta) := \sup_{|h| \le \delta} \left| f(x+h) - f(x) \right|$$

ile tanımlanır. Ayrıca $L_p(0, 2\pi)$ uzayı x'e göre

$$\| f \|_p = \left(\int_0^{2\pi} \left| f(x) \right|^p dx \right)^{1/p} < \infty \tag{1.1.3}$$

koşulunu sağlayan bütün ölçülebilir 2π periyodlu f fonksiyonlarından meydana gelir. $f \in L_p := L_p(0, 2\pi)$, $p \ge 1$ ve $\omega(\delta)$ bir süreklilik modülü olmak üzere

$$A(f,\omega) := \sup_{t\neq 0} \frac{\| f(.+t) - f(.)\|_p}{\omega(|t|)} < \infty$$

koşulunu sağlayan fonksiyonların uzayı $H_P^{(\omega)}$ ile gösterilir. Bu uzay

$$\| f\|_p^{(\omega)} := \| f\|_p + A(f,\omega)$$

ile tanımlanan norm ile bir Banach uzayıdır.

Yaklaşım teorisinde ele alınan problemlerin bakış açısı altında, bu tez çalışmasında $X = H_P^{(\omega)}$ uzayı ve ϕ' yi Materyal ve Metot kısmının 3.3. alt bölümünde verilen trigonometrik polinomların sınıfı olarak alıp, $\|\cdot\|_p^{(\omega)}$ normu altında $H_P^{(\omega)}$ sınıfından olan fonksiyonlara trigonometrik polinomlar ile yaklaşım hızının değerlendirilmesini içeren sonuçlar verilecektir.

Bu değerlendirme yapılırken 3.2 alt bölümünde verilen dizi sınıfları göz önünde tutulacaktır.

Bunun dışında, Materyal ve Metot bölümünde öncelikle yaklaşım teorisi ile ilgili temel kavramlar ve gösterimler verilecek, daha sonra bazı dizi sınıfları ve toplanabilme metotları ele alınacaktır.

Bulgular ve Tartışma kısmında tez çalışmasında elde edilen yardımcı ve temel sonuçlar ispatları ile birlikte verilecektir.

Sonuçlar ve Öneriler bölümünde ise ilk olarak bu tez çalışmasında elde edilmiş olan sonuçlar literatürdeki sonuçlar ile karşılaştırılarak özet halinde sunulacak, daha sonra ele alınabilecek bazı problemlerden bahsedilecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Farklı uzaylarda trigonometrik polinomlar ile yaklaşımın derecesi birçok matematikçi tarafından ele alınmıştır. 1910 yılında Lebesgue Lipschitz sınıfından olan fonksiyonlara onların Fourier serilerinin kısmi toplamlar dizisi ile yaklaşımını aşağıdaki şekilde ele almıştır.

Teorem 2.1. [Lebesque, 1910] $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere $f\in Lip\alpha$ ise

$$\left|s_n(x)-f(x)\right|=O\left(\frac{\log n}{n^{\alpha}}\right)$$

x de düzgündür. Burada s_n f nin Fourier serisinin $n.$ kısmi toplamıdır.

Salem ve Zygmund $f\in Lip\alpha$ nın üzerine f e monotonluk şartı eklenerek $\log n$ çarpanının kaldırılabileceğini aşağıdaki teoremde göstermiştir. Bu teoremi vermeden önce monoton tipte fonksiyon tanımını verelim. Bir $f(x)$ fonksiyonu verildiğinde bir C sabiti vardır öyle ki $f(x)+Cx$ fonksiyonu $(-\infty,\infty)$ aralığında ya azalmayan ya da artmayan ise $f(x)$ fonksiyonuna monoton tipte bir fonksiyon denir.

Teorem 2.2. [Salem ve Zygmund, 1946] $0<\alpha<1$ olmak üzere $f\in Lip\alpha$ ve monoton tipte bir fonksiyon ise

$$\left|s_n(x)-f(x)\right|=O\left(\frac{1}{n^{\alpha}}\right)$$

x de düzgündür. Mazhar , [Mazhar, 1991] çalışmasında Teorem 2.2'i genelleştirmiştir.

Teorem 2.3. [Mazhar, 1991] $f\in C_{2\pi}$ monoton tipte ise

$$s_n(x)-f(x)=O\left\{\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}\omega(1/k)\right\}$$

x de düzgündür ve burada $\omega(\delta)=\omega(\delta,f)$ f 'in süreklilik modülüdür.

Biliyoruz ki, Lebesgue uzayı olarakta bilinen L_p uzayı $p\geq 1$ için (1.1.3) normu ile bir Banach uzayıdır. L_p uzayında da yukarıdaki teoremlere benzer olarak bazı temel sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlardan önce bazı gösterimler aşağıdaki gibidir. Bunu göz önünde tutarak

$$s_n(f;x)=\frac{1}{2}a_0+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)\equiv\sum_{k=1}^{n}U_k(f;x)$$

ile bir x noktasında $f \in L_p$ nin Fourier serisinin kısmi toplamı gösterilir.

$$\omega_p(\delta, f) = \sup_{|t| \le \delta} \| f(.+t) - f(.) \|_p$$

f 'nin integral süreklilik modülü olmak üzere $0 < \alpha \le 1$ ve $p \ge 1$ için

$$\omega_p(\delta, f) = O(\delta^\alpha)$$

eşitsizliği sağlanırsa ‘‘ f fonksiyonu $Lip(\alpha, p)$ sınıfına aittir ’’ denir.

1937 yılında E.S. Quade, L_p normunda $Lip(\alpha, p)$ $(0 < \alpha \le 1, p \ge 1)$ sınıfından olan fonksiyonlara trigonometrik polinomlarla yaklaşımın derecesi üzerine aşağıdaki teoremi ispatlamıştır.

Teorem 2.2. [Quade, 1937] $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $f \in Lip(\alpha, p)$ ise

$$(i)\ \| f - s_n \|_p = O\left(\frac{1}{n^\alpha}\right), \qquad p > 1$$

$$(ii)\ \| f - s_n \|_p = O\left(\frac{\log n}{n^\alpha}\right), \quad p = 1$$

sağlanır.

1975 yılında S. Prösdorff

$$H_\alpha := \left\{ f \in C_{2\pi},\ 0 < \alpha \le 1 : |f(x) - f(y)| \le A|x-y|^\alpha \right\}$$

uzayını tanımlamıştır. Burada $A > 0$ bir sabittir. S. Prösdorff H_α fonksiyon uzayında bazı trigonometrik polinomlar için yaklaşımın derecesini incelemiş ve aşağıdaki teoremleri ispatlamıştır.

Teorem 2.3.[Prössdorf, 1975] $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $f \in H_\alpha$ ve $0 \le \beta < \alpha$ ise

$$\| s_n - f \|_\beta = O\left(n^{\beta - \alpha} \log n\right).$$

Teorem 2.4.[Prössdorf, 1975] $f \in H_\alpha\ (0 < \alpha \le 1)$ ve $0 \le \beta < \alpha \le 1$olsun. Bu durumda $\sigma_n(f)$, f nin Fourier serisinin Cesáro ortalaması olmak üzere

$$\| \sigma_n(f) - f \|_\beta = O(1) \begin{cases} n^{\beta - \alpha}, & 0 < \alpha < 1 \\ n^{\beta - 1} \ln n, & \alpha = 1 \end{cases}$$

sağlanır.

Teorem 2.4'ün $\beta = 0$ durumu G. Alexists tarafından incelenmiştir [Alexists, 1961].

Leindler, 1979 yılında Prösdorff tarafından verilen Hölder metriğinin bir genelleştirmesini vermiştir.

Teorem 2.5.[Leindler, 1979] $0 \le \beta < \alpha \le 1$ olmak üzere $\omega_\beta(\delta)$ ve $\omega_\alpha(\delta)$ sırasıyla Ω_β ve Ω_α sınıflarına ait olsunlar. $f \in H^{\omega_\alpha}$ ise

$$\|s_n - f\|_{\omega_\beta} = O\left\{\frac{\omega_\alpha(1/n)}{\omega_\beta(1/n)}\log n\right\}$$

dir.

$\omega_\alpha(t) = t^\alpha$ ve $\omega_\beta(t) = t^\beta$ şeklinde alınırsa bu özel durum H_α uzayında Prösdorf'ün ispatlamış olduğu Teorem 2.3'ü verir. Burada Ω_α ile herhangi bir $\mu \in \mathbb{N}$ için $n > N(\mu)$ olacak şekilde bir $N(\mu) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $2^{\mu\alpha}\omega_\alpha\left(2^{-n-\mu}\right) \le 2\omega_\alpha\left(2^{-n}\right)$ koşulunu sağlayan $\omega_\alpha(\delta)$ süreklilik modüllerinin sınıfı gösterilir.

Chandra, Teorem 2.4'ün genelleşmesini [Chandra, 1982]'de Woronoi-Nörlund dönüşümünü göz önünde tutarak yapmıştır. Sonrasında, Mohapatra ve Chandra [Mohapatra ve Chandra, 1983]'de $f \in H_\alpha$' nin Fourier serisinin matris ortalamasına göre benzer yaklaşımları incelemiştir.

G. Das, T. Ghosh ve B. K. Ray tarafından Hölder metriğinin bir başka genelleştirilmesi [Das vd., 1996]' da verilmiştir. Buna göre $0 < \alpha \le 1$ için

$$H(\alpha, p) := \left\{ f \in L_p,\ 0 < p \le \infty : \| f(x+h) - f(x)\|_p = O\left(|h|^\alpha\right)\right\}$$

ile verilen fonksiyon uzayı $p \ge 1$ için

$$\|f\|_{(\alpha,p)} = \|f\|_p + \sup_{h \ne 0}\frac{\|f(x+h) - f(x)\|_p}{|h|^\alpha}$$

$$\|f\|_{(0,p)} = \|f\|_p$$

normu ile bir Banach uzayıdır. $p = \infty$ durumunda $H(\alpha, \infty)$ uzayı [Prössdorf, 1975]'de Prösdorf tarafından verilen H_α uzayı ile çakışır.

Daha sonra 2002 yılında, Das, Nath ve Ray tarafından süreklilik modülü göz önünde tutularak Hölder metriğinin yeni bir genelleştirilmesi verilmiştir. Bu genelleştirme aşağıdaki gibidir:

Teorem 2.6.[Das vd., 2002] v ve ω süreklilik modülü olmak üzere $\dfrac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan olsun. Eğer $f \in H_p^{(\omega)}, p \geq 1$ ise o zaman

$$\|s_n - f\|_p^{(v)} = O\left(\frac{\omega(\pi/n)}{v(\pi/n)} \log n\right) + O(1)\frac{1}{n}\int_{\pi/n}^{\pi} \frac{\omega(t)}{t^2 v(t)} dt$$

dir.

Daha sonra Leindler 2009 yılında, [Das vd., 2002] çalışmasını göz önünde tutarak, $H_p^{(\omega)}$ uzayında yaklaşımın derecesini metodu genişleterek vermiştir. Leindler [Leindler, 2009]'da Teorem 2.6'yı genelleştirerek aşağıdaki sonucu elde etmiştir.

Teorem 2.7.[Leindler, 2009] v ve ω süreklilik modülü olmak üzere $\dfrac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan olsun. Ayrıca bir $0 < \varepsilon \leq 1$ için

$$\gamma(t) := \gamma(v, \omega, \varepsilon; t) := t^{-\varepsilon}\, \omega(t)/v(t)$$

artmayan olsun. Eğer $f \in H_p^{(\omega)}, p \geq 1$ ise bu durumda

$$\|s_n - f\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/n)}{v(1/n)} \log n \ , \forall n \geq 2 \tag{2.1.1}$$

dir. Burada "$L \ll R$" ("$L \gg R$") sembolü ile L ve R' den bağımsız $\exists K > 0 \ni L \leq KR$ ($\exists K > 0 \ni KL \geq R$) gösterilecektir

Teorem 2.7' e göre Leindler; $t^{-\varepsilon}\, \omega(t)/v(t)$ ifadesini artmayan yapacak şekilde bir $\varepsilon > 0$ sayısı varsa Teorem 2.6' nın ikinci teriminin atılabileceğini göstermiştir. Leindler' in bu çalışmasında aynı zamanda $f \in H_p^{(\omega)}$ fonksiyonuna Woronoi-Nörlund ve Riesz ortalamalarıyla yaklaşımın derecesi ile ilgili değerlendirmeler elde edilmiştir. Bu değerlendirmeler bazı dizi sınıfları göz önünde tutularak yapılmıştır.

Teorem 2.8.[Leindler, 2009] v ve ω süreklilik modülü olmak üzere $\dfrac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan olsun. $0<\varepsilon<1$ olmak üzere

$$(i)\{p_n\}\in AMDS$$
$$(ii)\{p_n\}\in AMIS \ ve \ np_n \ll P_n$$
$$(iii)\sum_{m=1}^{n-1} m\left|\Delta p_m\right| \ll P_n$$

koşullarından biri sağlanırsa

$$\left\|N_n-f\right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/n)}{v(1/n)}\log n \ , \ \forall n\geq 2$$

dir. Burada $\Delta p_m = p_m - p_{m+1}$ dir.

Teorem 2.9.[Leindler, 2009] v ve ω süreklilik modülü olmak üzere $\dfrac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan olsun. $0<\varepsilon<1$ olmak üzere

$$np_n \ll P_n \ ve \ \sum_{m=0}^{n-1} m^{1-\varepsilon}\left|\Delta p_m\right| \ll P_n n^{-\varepsilon}$$

ise bu durumda $\forall n\geq 2$ için

$$\left\|R_n-f\right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/n)}{v(1/n)}\log n.$$

3.MATERYAL ve YÖNTEM

3.1.TEMEL KAVRAMLAR VE GÖSTERİMLER

3.1.1.Fourier Serisi ve Bazı Özellikleri

Fourier serisinin tanımı verilmeden önce birkaç temel tanım aşağıda verilecektir.

Reel değerli bir f fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki sağ ve sol limitleri, $\varepsilon > 0$ olmak üzere sırasıyla

$$f\left(x_0^+\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} f\left(x_0 + \varepsilon\right),$$

$$f\left(x_0^-\right) = \lim_{\varepsilon \to 0} f\left(x_0 - \varepsilon\right)$$

eşitlikleri ile tanımlanır.

Tanım 3.1.1.1 .Bir f fonksiyonunun bir x_0 noktasındaki sağ ve sol limitleri sonlu değerler olup bu iki değer birbirinden farklı ise, x_0 noktasına f fonksiyonunun bir süreksizlik noktası denir. Eğer f fonksiyonu x_0 noktasında sürekli ise,

$$f\left(x_0^+\right) = f\left(x_0^-\right) = f\left(x_0\right)$$

dır.

Tanım 3.1.1.2 Bir $[a,b]$ aralığında sonlu sayıda düzgün süreksizlik noktası dışında sürekli olan bir fonksiyona o aralıkta parçalı sürekli denir.

Örnek 3.1.1.1

$$f\left(x\right) = x^2 + \frac{|x|}{x} \quad \text{ve} \quad g\left(x\right) = \begin{cases} x \quad , & -2 \le x < 1 \\ x^2 - 1 \,, & 1 < x \le 3 \end{cases}$$

fonksiyonlarının her ikiside $[-2,3]$ aralığında parçalı süreklidir. f fonksiyonu $x_0 = 0 \in [-2,3]$ ve g fonksiyonu ise $x_0 = 1 \in [-2,3]$ noktalarında düzgün süreksizliklere sahiptir.

Örnek 3.1.1.2

$$f\left(x\right) = \frac{1}{x-2} \quad \text{ve} \quad g\left(x\right) = \sin\left(\frac{1}{x-2}\right)$$

fonksiyonları $[2,4]$ aralığında parçalı sürekli olamazlar. Çünkü her iki fonksiyon içinde $f\left(2^+\right)$ ve $g\left(2^+\right)$ limitleri sonlu olarak tanımlanamaz.

Tanım 3.1.1.3 [Tolstov, 1962] f, $[a,b]$ aralığında parçalı sürekli bir fonksiyon olsun. $\forall x \in \mathbb{R}$ için $f(x+p) = f(x)$ olacak şekilde sıfırdan farklı bir $p \in \mathbb{R}$ varsa f 'ye periyodik veya $p-$periyotlu fonksiyon denir.

Periyodik fonksiyon ile ilgili bazı özellikler aşağıda verilmiştir.

p, $f(x)$ fonksiyonunun periyodu ise o zaman $2p, 3p, 4p, \ldots$ sayıları da periyot olur. Yani,

$$f(x+p) = f(x)$$
$$f(x+2p) = f[(x+p)+p] = f(x+p) = f(x)$$
$$f(x+3p) = f[(x+2p)+p] = f(x+2p) = f(x)$$
$$\vdots$$
$$f(x+np) = f[(x+(n-1)p)+p] = f(x+(n-1)p) = f(x).$$

Buradan görülüyor ki, n herhangi bir tamsayı olmak üzere $f(x+np) = f(x)$ dir. Bu demektir ki p, f 'nin bir periyodu ise, p nin tüm katları da f nin bir periyodudur.

$f_1, f_2, \ldots, f_k$ ların her biri p periyotlu periyodik fonksiyon iseler o taktirde $c_1, \ldots, c_k$ lar herhangi reel sabitler olmak üzere

$$f = c_1 f_1 + c_2 f_2 + \ldots + c_k f_k$$

fonksiyonu da p periyotlu periyodik bir fonksiyondur.

$f(x)$ periyodik bir fonksiyon ise aynı uzunluktaki bütün aralıklarda integraller birbirine eşittir. Yani,

$$\int_a^{a+T} f(x)dx = \int_b^{b+T} f(x)dx$$

şeklinde ifade edilir.

Temel tanımlar sonrasında aşağıdaki şekilde Fourier serisinin tanımı verilir.

f, 2π periyotlu bir fonksiyon ve aşağıdaki seri açılımına sahip olsun

$$f = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{\infty} (a_k \cos kx + b_k \sin kx) \tag{3.1.1}$$

(3.1.1) serisinin terim terime integrallaenebilir olduğunu varsayalım. Yani bu serinin integrallerinin toplamının , toplamlarının integraline eşit olduğunu varsayalım. (3.1.1) serisini $-\pi$ den π e integralini alırsak

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} dx + \sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx\,dx \right)$$

şeklinde olur. Buradan

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)dx = \pi a_0 \tag{3.1.2}$$

elde edilir. (3.1.1)'in her iki tarafını $\cos nx$ ile çarpıp $-\pi$ den π e integralini aldığımızda

$$\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx = \frac{a_0}{2}\int_{-\pi}^{\pi} \cos nx\,dx +$$
$$+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k \int_{-\pi}^{\pi} \cos kx \cos nx\,dx + b_k \int_{-\pi}^{\pi} \sin kx \cos nx\,dx \right)$$

olur. Buradan da

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos nx\,dx = \pi a_n \tag{3.1.3}$$

elde edilir. Benzer biçimde $\sin nx$ ile aynı işlem uygulanırsa

$$\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nx\,dx = \pi b_n \tag{3.1.4}$$

elde edilir. Böylece (3.1.2) - (3.1.4)' den

$$\begin{aligned} a_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\cos nx\,dx \quad \left(n = 0,1,2,...\right) \\ b_n &= \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f\left(x\right)\sin nx\,dx \quad \left(n = 1,2,...\right) \end{aligned} \tag{3.1.5}$$

yazılır. (3.1.5) ifadesindeki a_n ve b_n katsayıları $f\left(x\right)$'in Fourier katsayıları olarak adlandırılır ve bu katsayılara sahip (3.1.1) serisine $f\left(x\right)$'in Fourier serisi denir.

$f\left(x\right)$'in Fourier serisinin ilk $\left(n+1\right)$ teriminin toplamı

$$S_n\left(f;x\right) = \frac{a_0}{2} + \sum_{k=1}^{n}\left(a_k \cos kx + b_k \sin kx\right)$$

şeklinde gösterilir.

Aşağıdaki teoremler f'in hangi durumlarda f'in Fourier serisine yakınsadığını gösterir.

2π periyotlu $f\left(x\right)$ fonksiyonuna yakınsayan bir trigonometrik serinin bulunması için $f\left(x\right)$ in Dirichlet koşulları olarak bilinen aşağıdaki koşulları gerçeklemesi yeterlidir.

1. $f\left(x\right)$ fonksiyonu 2π periyotlu periyodik bir fonksiyon olsun.

2. $f\left(x\right),\left[-\pi,\pi\right]$ aralığında parçalı sürekli olsun.

3. $f\left(x\right),\left[-\pi,\pi\right]$ aralığında sonlu sayıda ektremuma sahip olsun.

Bu takdirde $f\left(x\right)$ fonksiyonu x in her değeri için yakınsak olan ve toplamı;

a. x bir süreklilik noktası ise $f\left(x\right)$ e

b. x bir düzgün süreksizlik noktası ise $\dfrac{f\left(x^{+}\right)+f\left(x^{-}\right)}{2}$ ye

c. Aralığın uç noktalarında $f\left(-\pi\right)=f\left(\pi\right)=\dfrac{f\left(-\pi^{+}\right)+f\left(\pi^{-}\right)}{2}$ ye

eşit olan bir Fourier serisine açılabilir. Belirtelim ki, herhangi bir trigonometrik seri yakınsak ya da ıraksak olabilir. Yakınsak olan her trigonometrik serinin bir Fourier serisi olması gerekmez.

$f\left(x\right)$'in mutlak integrallenebilir olması durumunda yakınsama durumu aşağıdaki teoremlerle verilmiştir.

Teorem 3.1.1.1 [Tolstov, 1962] 2π periyotlu, sürekli ve mutlak integrallenebilen türeve sahip (belli noktalarda sahip olmayabilir) fonksiyonun Fourier serisi x in her değeri için $f\left(x\right)$'e düzgün yakınsar.

Teorem 3.1.1.2 [Tolstov, 1962] $f\left(x\right)$ 2π periyotlu, sürekli ve belirli bir $\left[a,b\right]$ aralığında mutlak integrallenebilen türeve sahip (belli noktalarda türeve sahip olmayabilir) olduğunda $f\left(x\right)$ fonksiyonun Fourier serisi her $\delta>0$ için $\left[a+\delta,b-\delta\right]$ aralığında $f\left(x\right)$'e düzgün yakınsar.

3.1.2. Süreklilik Modülü

$[a,b]$ aralığında sürekli bir f fonksiyonu için birinci mertebeden süreklilik modülü veya basit olarak süreklilik modülü $u \in [0,b-a]$ olmak üzere

$$\omega(u)=\omega(u;f;[a,b])=\sup_{\substack{a\le x\le b-h\\ 0\le h\le u}}\left|f(x+h)-f(x)\right|=\sup_{\substack{|x_2-x_1|\le u\\ x_1,x_2\in[a,b]}}\left|f(x_1)-f(x_2)\right|$$

eşitliği ile tanımlanır.

Bu tanıma göre, sabit her bir $u\in[0,b-a]$ için bir f fonksiyonunun $\omega(u;f;[a,b])$ süreklilik modülü, $[a,b]$ aralığında olan u uzunluğundaki keyfi bir parçada fonksiyonun maksimal salınımının genişliğini gösterir.

Bu tanım fonksiyon $(-\infty,\infty)$ aralığında düzgün sürekli ise yine geçerlidir. Bununla ilgili bazı örnekler aşağıdaki gibidir.

Örnek 3.1.2.1. $x\in(-\infty,\infty)$ için $f(x)=Ax+B$ olsun. Bu durumda, herhangi bir $u\ge 0$ için,

$$\omega(u)=\sup_{\substack{-\infty<x<\infty\\ 0\le h\le u}}\left|A(x+h)+B-Ax-B\right|=\sup_{0\le h\le u}|Ah|=|A|u.$$

Süreklilik modülünün özellikleri aşağıdaki gibidir:

- $\omega(0)=0$
- $\omega(u)$, $[0,b-a]$ üzerinde azalmayan bir fonksiyondur
- $\omega(u)$, $[0,b-a]$ üzerinde sürekli bir fonksiyondur
- $\omega(u)$ yarı toplamsal bir fonksiyondur. Yani herhangi bir $u_1\ge 0$ ve $u_2\ge 0$ için

$$\omega(u_1+u_2)\le\omega(u_1)+\omega(u_2)$$

özellikleri sağlanır.

Bir f fonksiyonu $[0,b-a]$ aralığı üzerinde bu dört özelliğe sahipse, f fonksiyonunun $\omega(u;f,[0,b-a])$ süreklilik modülü $f(u)$ ile çakışır ve buna süreklilik modülü tipi fonksiyon denir. Yani

$$\omega(u;f,[0,b-a])=f(u)$$

olacaktır.

$\omega(u)$ süreklilik modülünün yarı toplamsallık özelliğinden herhangi bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\omega(nu) \le n\omega(u),$$

ve keyfi $\lambda > 0$, $(\lambda+1)u \in [0, b-a]$ için

$$\omega(\lambda u) \le (\lambda+1)\omega(u)$$

olduğu kolayca elde edilir. Bununla ilgili bilinen bazı örnekler aşağıda verilmiştir [Stepanets, 2005].

Örnek 3.1.2.2. $K > 0$ sabit bir sayı ve $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere $t \ge 0$ için Kt^{α} formundaki bütün fonksiyonlar süreklilik modülüdür.

Lipschitz α sınıfının süreklilik modülü ile gösterimi aşağıdaki şekildedir. $f \in Lip\alpha$ olması için gerek ve yeter koşul $\exists M > 0$ sayısı vardır öyle ki

$$\omega(f;\delta) \le M\delta^{\alpha}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

3.1.3 Abel Dönüşümü

(u_k) ve (v_k) negatif olmayan iki dizi olsun. $k \ge 0$ bir tamsayı, $U_{-1} = 0$ ve $U_k = u_0 + u_1 + ... + u_k$ olmak üzere $0 \le m \le n$ için

$$\sum_{k=m}^{n} u_k v_k = \sum_{k=m}^{n-1} U_k (v_k - v_{k+1}) - U_{m-1} v_m + U_n v_n$$

eşitliğine (u_k) ve (v_k) dizilerinin Abel dönüşümü adı verilir [A. Zygmund, 1959].

3.1.4. Notasyonlar

$x \to \infty$ iken bilinen bir $\phi(x)$ fonksiyonuna göre araştırılan bir $f(x)$ fonksiyonunun davranışını anlatmak için Bachmann ve Landau'ya göre bilinen $\sim, o$ ve O sembolleri kullanılır. İlk olarak x in reel bir değer olduğunu kabul edelim. $x \to \infty$ iken $\phi(x)$ fonksiyonu sıfıra, sonsuza veya diğer davranışlara sahip olabilir [Wong, 2001]. Buna göre,

$x \to \infty$ iken $f(x)/\phi(x) \to 1$ ise,

$$f(x) \sim \phi(x)$$

ya da kısacası belirsizlik olmadığında $f \sim \phi$ ile gösterilir ve " f , ϕ ye asimptotiktir" veya "ϕ, f 'ye bir asimptotik denktir" şeklinde okunur.

$x \to \infty$ iken $f(x)/\phi(x) \to 0$ ise,

$$f(x) = o\{\phi(x)\}$$

ya da kısacası $f = o(\phi)$ ile gösterilir ve " f , ϕ 'den daha küçük mertebedendir" şeklinde okunur.

$x \to \infty$ iken $|f(x)/\phi(x)|$ sınırlı ise,

$$f(x) = O\{\phi(x)\}$$

ya da $f = O(\phi)$ ile gösterilir ve " f , ϕ 'yi aşmayan mertebedendir" şeklinde okunur.

Bu tanımların özel durumları olan $f = o(1)\ (x \to \infty)$; $x \to \infty$ iken f nin sıfıra yaklaştığı anlamında ve $f = O(1)\ (x \to \infty)$ ise, $x \to \infty$ iken $|f|$ nin sınırlı olduğu anlamındadır.

$\phi(x)$ fonksiyonunun reel ve pozitif olmadığı durumda, bazı yazarlar tanımı verirken modül işaretini kullanır. Bu durumda tanımlar $f(x) = o(|\phi(x)|)$ ve $f(x) = O(|\phi(x)|)$ şeklinde verilir. Yukarıda verilen kavramlara örnek olarak aşağıdakiler verilebilir: $x \to \infty$ olmak üzere

$$(x+1)^2 \sim x^2, \qquad \frac{1}{x^2} = o\left(\frac{1}{x}\right), \qquad \sinh x = O\left(e^x\right).$$

3.2. DİZİ SINIFLARI

Bu bölümde ele alınan problemde öne çıkan dizi sınıfları ve bunların bazıları arasındaki içermeler verilecektir. $c := (c_n)$ pozitif terimli dizi olsun.

$\forall n \geq m$ için $c_n \leq K c_m$ olacak şekilde bir $K := K(c)$ sabiti varsa (c_n) dizisine hemen hemen monoton azalan dizi denir ve $c \in AMDS$ ile gösterilir.

$\forall n \geq m$ için $K c_n \geq c_m$ olacak şekilde bir $K := K(c)$ sabiti varsa (c_n) dizisine hemen hemen monoton artan dizi denir ve $c \in AMIS$ ile gösterilir.

$$C := (C_n) = \frac{1}{n+1}\sum_{m=0}^{n} c_m$$

olmak üzere $C \in AMDS$ ise (c_m) dizisine hemen hemen orta anlamda monoton azalan dizi denir ve $(c_m) \in AMDMS$ ile gösterilir. $C \in AMIS$ ise (c_m) dizisine hemen hemen orta anlamda monoton artan dizi denir ve $(c_m) \in AMIMS$ ile gösterilir.

Ayrıca Szal'ın çalışmasında tanımlamış olduğu dizi sınıfı aşağıdaki şekildedir [Szal, 2009].

$$A_{n,k} := \frac{1}{(k+1)}\sum_{i=n-k}^{n} a_{n,i}$$

olmak üzere $(A_{n,k}) \in AMDS$ ise $(a_{n,k})$ pozitif dizisine hemen hemen orta anlamda üsttsel azalan dizi denir ve $(a_{n,k}) \in AMDUMS$ ile gösterilir. $(A_{n,k}) \in AMIS$ ise $(a_{n,k})$ pozitif dizisine hemen hemen orta anlamda üsttsel artan dizi denir ve $(a_{n,k}) \in AMIUMS$ ile gösterlir.

Sonrasında Krasniqi çalışmasında

$$A_{n,k}^{(2)} := \frac{2}{(k+1)(k+2)}\sum_{i=n-k}^{n} a_{n,i}$$

olmak üzere $A_{n,k}^{(2)} \in AMDS$ ise $(a_{n,k})$ pozitif dizisine hemen hemen orta anlamda ikinci üsttsel azalan dizi denir ve $(a_{n,k}) \in AMDUSMS$ ile gösterilir [Krasniqi, 2014]. $(A_{n,k}^{(2)}) \in AMIS$ ise $(a_{n,k})$ pozitif dizisine hemen hemen orta anlamda ikinci üsttsel artan dizi denir ve $(a_{n,k}) \in AMIUSMS$ ile gösterilir.

3.3.TOPLANABİLME METODLARI

$A := (a_{nk})$ $k, n = 1, 2, 3, ...$ sonsuz bir matris olmak üzere, verilen $x := (x_n)$ dizisi için " A-dönüşüm dizisi" $Ax := ((Ax)_n)$ ile gösterilir ve

$$(Ax)_n := \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\forall n$ için seri yakınsak kabul edilmektedir. Ayrıca $\lim_{n\to\infty}(Ax)_n = L$ ise x dizisi L değerine A-toplanabilirdir denir.

X ile Y reel ya da kompleks terimli dizilerden oluşan iki dizi uzayı ve $A:=(a_{nk})$ sonsuz bir matris olmak üzere eğer her $x \in X$ için $\left((Ax)_n\right)$ dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in Y$ ise , $A:=(a_{nk})$ matrisi X uzayının Y uzayı içine bir matris dönüşümü tanımlar denir ve X uzayından Y uzayı içine tanımlı tüm matrislerin sınıfı (X,Y) ile gösterilir. Eğer A, X uzayından Y uzayı içine bir matris dönüşümü ise $A \in (X,Y)$ şeklinde yazılır. $(X,Y;p)$ ile toplam ya da limiti koruyan matrislerin sınıfı gösterilecektir. Örneğin $A \in (c,c;p)$ olması, $x_n \to L$ olduğunda $(Ax)_n \to L$ olması demektir. Böyle matrislere "regüler matris" adı verilir [Boos, 2000].

Toplanabilme teorisinde $C_1 := (a_{nk})$ matrisi

$$a_{nk} = \begin{cases} \dfrac{1}{n}; & 1 \le k \le n \\ 0\ ; & k > n \end{cases}$$

ile verilir ve " (birinci mertebeden) Cesáro matrisi" olarak adlandırılır. Örneğin C_1 Cesáro matrisi regülerdir. Bir $A:=(a_{nk})$ matrisinin regüler olması Silverman-Toeplitz koşulları olarak da bilinen aşağıdaki teorem ile karakterize edilmektedir.

Teorem 3.3.1 (Silverman-Toeplitz). Bir $A:=(a_{nk})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

i. $\|A\| = \sup\limits_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} |a_{nk}| < \infty$

ii. Her k için $\lim\limits_n a_{nk} = 0$

iii. $\lim\limits_n \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1$

koşullarının sağlanmasıdır [Wilansky, 1984].

3.3.1. Woronoi-Nörlund ve Riesz Ortalamaları

Bu ortalamalar matrislerle bağlantılıdır. Her iki ortalamada aşağıda özelliği verilen $\{p_n\}$ dizisi kullanılacaktır.

$\{p_n\}$, pozitif terimli bir sayı dizisi olmak üzere

$$P_n = p_1 + ... + p_n \quad (n = 1, 2, ...)$$

olsun.

Tanım 3.3.1.1. Aşağıdaki dönüşüm

$$t_m = \frac{p_m s_1 + ... + p_1 s_m}{P_m}$$

(N, p_n) Woronoi-Nörlund ortalaması ya da (N, p_n) ortalaması olarak adlandırılır. (N, p_n) ortalamasının matris gösterimi aşağıdaki şekildedir:

$$a_{mn} = \begin{cases} p_{m-n+1}/P_m & (n \le m) \\ 0 & (n > m) \end{cases}$$

Teorem 3.3.1.1 [Petersen, 1966] (N, p_n) Woronoi-Nörlund ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter koşul $n \to \infty$ iken $p_n/P_n \to 0$ olmasıdır.

Tanım 3.3.1.2. Aşağıdaki dönüşüm

$$t_m = \frac{p_1 s_1 + ... + p_m s_m}{P_m}$$

(R, p_n) Riesz ortalaması ya da (R, p_n) ortalaması olarak adlandırılır. (R, p_n) ortalamasının matris gösterimi aşağıdaki şekildedir:

$$a_{mn} = \begin{cases} p_n/P_m & (n \le m) \\ 0 & (n > m) \end{cases}$$

Teorem 3.3.1.2 [Petersen, 1966] (R, p_n) Riesz ortalamasının regüler olması için gerek ve yeter koşul $m \to \infty$ iken $P_m \to \infty$ olmasıdır.

3.3.2. Alt Metodlar

1989 yılında D.H.Armittage ve I.J.Maddox tarafından Cesáro matrisinden satırların bir kümesini silerek C_λ -metodu olarak adlandırılan alt metod verilmiştir. Sonrasında bu genişletme baz alınarak [Değer vd, 2012] çalışmasında Woronoi-Nörlund ve Riesz ortalamalarının alt metodları tanımlanmıştır. Bu metodlar ve onların bazı özellikleri aşağıdaki gibidir.

F , doğal sayılar kümesinin sonsuz bir alt kümesi ve pozitif tamsayıların kesin artan bir dizisinin görüntüsü olarak $F = \{\lambda(n)\}_{n=1}^{\infty}$ olsun. $\{x_k\}$ reel ya da kompleks sayıların bir dizisi olmak üzere C_λ -Cesáro alt metodu

$$\left(C_{\lambda}x\right)_{n}=\frac{1}{\lambda(n)}\sum_{k=1}^{\lambda(n)}x_{k},\quad (n=1,2,\ldots)$$

ile tanımlanır. C_{λ}, Cesáro matrisinden satırların bir kümesini silerek elde edilir. C_{λ} metodu $(C,1)$ Cesáro metodu'nun bir alt dizisi olur ve dolayısıyla herhangi bir λ için regülerdir. C_{λ} metodu ile ilgili olarak sonuçlar [Armitage ve Maddox, 1989] ve çalışmasında verilmiştir.

Teorem 3.3.2.1[Armitage ve Maddox, 1989]

$E=\{\lambda(n)\}$ ve $F=\{\mu(n)\}$, $\mathbb{N}$ 'nin sonsuz alt kümesi olsun.

i) $C_{\lambda}\subseteq C_{\mu}$ olması için gerek ve yeter koşul $F\setminus E$ sonlu olmasıdır

ii) C_{λ} 'nın C_{μ} 'e denk olması için gerek ve yeter koşul $E\Delta F$ simetrik farkının sonlu olmasıdır.

Yukarıdaki teoreme örnek olarak aşağıdaki matris verilmiştir.

Örnek 3.3.2.1 B regüler matrisi aşağıdaki şekilde verilsin.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 1 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ 0 & 1 & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \ldots & \ldots & \ldots & \ldots & \ldots \end{pmatrix}$$

$\lambda(n)=2n+1$, $\mu(n)=2n$, $n=0,1,2,\ldots$ olsun. $F=\{\mu(n)\}$ ve $E=\{\lambda(n)\}$ seçilirse $F\setminus E=\varnothing$ olur. Dolayısıyla Teorem 3.3.2.1' den $F\setminus E$ sonlu olduğundan $B_{\lambda}\subseteq B_{\mu}$ olur. B_{λ} ve B_{μ} alt matrisleri aşağıdaki şekildedir.

$$B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ 0 & 1 & & & \\ 0 & 0 & 1 & & \\ 0 & 0 & 0 & 1 & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = I \quad \text{ve} \quad B_\mu = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \frac{1}{2} & \frac{1}{2} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & \\ \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \frac{1}{4} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix} = C_1$$

Örnek 3.3.2.2 $A = C_1$ ve B matrisi aşağıdaki şekilde verilsin.

$$B = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

B matrisi C_1 'in alt satır matrisi olduğundan Teorem 3.3.2.1 ile $A \subseteq B$ olduğu açıktır. Eğer $\lambda(n) = 2n$ alınırsa A_λ ve B_λ alt matrisleri aşağıdaki şekildedir.

$$A_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}, \quad B_\lambda = \begin{pmatrix} 1 & & & & \\ \frac{1}{5} & \dots & \frac{1}{5} & & \\ \frac{1}{9} & \frac{1}{9} & \dots & \frac{1}{9} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

A_λ ve B_λ matrisi C_1 'in alt satır matrisi olduğundan Teorem 3.3.2.1 ile $A_\lambda \subseteq B_\lambda$ elde edilir.

Örnek 3.3.2.3 $A = C_1$ ve B matrisi aşağıdaki şekilde verilsin.

$$B=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$\lambda(n)=2n$ alındığında A_λ ve B_λ alt matrisleri aşağıdaki şekildedir.

$$A_\lambda=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix},\quad B_\lambda=\begin{pmatrix} 1 & & & & & \\ \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & \frac{1}{3} & & & \\ \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \frac{1}{5} & \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$B \sim B_\lambda$ olduğu açıktır. Teorem 3.3.2.1 ile $A \subseteq B$ olduğu açıktır.Ancak, $A_\lambda = B_\lambda$ dir.

Bu tez çalışmasında kullanılacak toplanabilme metodu U.Değer, İ.Dağadur ve M. Küçükaslan tarafından [Değer vd., 2012] çalışmasında aşağıdaki şekilde verilmiştir.

$$N_n^\lambda(f;x):=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m}s_m(f;x)$$

$$R_n^\lambda(f;x):=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m s_m(f;x)$$

Burada;

$$P_{\lambda(n)}=p_0+p_1+\dots+p_{\lambda(n)}\neq 0\ (n\geq 0)\ \ ve\ \ p_{-1}=P_{-1}=0$$

dir.

Özel olarak: $\forall n \geq 0$ *için* $p_n = 1$ durumunda $N_n^{\lambda}(f;x)$ ya da $R_n^{\lambda}(f;x)$' den

$$\sigma_n^{\lambda}(f;x) = \frac{1}{\lambda(n)+1} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} s_m(f;x)$$

elde edilir. $\sigma_n^{\lambda}(f;x)$ ifadesinde özel olarak $\lambda(n) = n$ alırsak Cesáro ortalaması elde edilir.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1 YARDIMCI BULGULAR ve İSPATI

Bu bölümde, teoremleri ispat etmemize yardımcı olan eşitsizlikler ve lemmalar ispatlarıyla birlikte verilecektir. Bir $0<\varepsilon<1$ için

$$\gamma(t):=\gamma(v,\omega;t):=t^{-\varepsilon}\frac{\omega(t)}{v(t)}$$

artmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\gamma_{\lambda(n)}:=\gamma(1/\lambda(n))=\lambda(n)^{\varepsilon}\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}$$

azalmayan bir fonksiyondur ve tanımı gereği $\gamma_{\lambda(n)}\geq\gamma_1$ dir. Buradan kolaylıkla

$$\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\gg\lambda(n)^{-\varepsilon}\geq\frac{1}{\lambda(n)} \tag{4.1.1}$$

elde edilir.

$\lambda(n):=\left[\!\left[\frac{\lambda(n)}{2}\right]\!\right]$ ile $\frac{\lambda(n)}{2}$ nin tam kısmı gösterilsin. Bu durumda $\frac{1}{\lambda(n)}>\frac{1}{\lambda(n)}$ dir. Ayrıca $\frac{\omega(t)}{v(t)}$'nin azalmayan bir fonksiyon olduğu göz önünde tutulursa

$$\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\ll\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \tag{4.1.2}$$

elde edilir. Yukarıda gösterilen eşitsizlikler teorem ispatlarında kullanılacaktır. Şimdi lemma ve ispatlarına geçelim.

Lemma 4.1.1 v ve ω süreklilik modülü olmak üzere $\frac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan bir fonksiyon ve $0<\varepsilon\leq 1$ için

$$\gamma(t):=\gamma(v,\omega;t):=t^{-\varepsilon}\frac{\omega(t)}{v(t)}$$

artmayan bir fonksiyon olsun. $p\geq 1$ için $f\in H_P^{(\omega)}$ ise

$$\left\|s_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}\ll\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n) \tag{4.1.3}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: Teorem[Das vd., 2002]'den kolayca

$$\left\|s_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}=O\left(\frac{\omega(\pi/\lambda(n))}{v(\pi/\lambda(n))}\log\lambda(n)\right)+O(1)\frac{1}{\lambda(n)}\int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2v(t)}dt$$

elde edilir. Bu değerlendirmenin sağ tarafındaki integralli ifade $0<\varepsilon\le 1$ için

$$\gamma(t):=\gamma(v,\omega;t):=t^{-\varepsilon}\frac{\omega(t)}{v(t)}$$

fonksiyonunun artmayan olmasını göz önünde tutarak atılabilir. Buna göre

$$\begin{aligned}\int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2v(t)}dt&=\int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi}\frac{t^{-\varepsilon}\omega(t)}{v(t)}\frac{t^{\varepsilon}}{t^2}dt=\int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi}\gamma(t)t^{\varepsilon-2}dt\\&\ll\gamma\left(\frac{\pi}{\lambda(n)}\right)\int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi}t^{\varepsilon-2}dt\ll\gamma\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)\int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi}t^{\varepsilon-2}dt\\&\ll\gamma\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)\begin{cases}\log\lambda(n), & \varepsilon=1\\ \lambda(n)^{1-\varepsilon}, & 0<\varepsilon<1\end{cases}\end{aligned}$$

değerlendirilmesi elde edilir. Böylece, yukarıdaki integralli ifade

$$\frac{1}{\lambda(n)}\int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2v(t)}dt\ll\frac{1}{\lambda(n)}\gamma\left(\frac{1}{\lambda(n)}\right)\begin{cases}\log\lambda(n), & \varepsilon=1\\ \lambda(n)^{1-\varepsilon}, & 0<\varepsilon<1\end{cases}$$

biçiminde olacaktır. Buradan da

$$\frac{1}{\lambda(n)}\int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2v(t)}dt\ll\frac{1}{\lambda(n)}\lambda(n)^{\varepsilon}\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\max\left(\log\lambda(n),\lambda(n)^{1-\varepsilon}\right)$$

yazılır ve böylece

$$\frac{1}{\lambda(n)}\int_{\pi/\lambda(n)}^{\pi}\frac{\omega(t)}{t^2v(t)}dt\ll\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$$

elde edilir.

Lemma 4.1.2. $0<\varepsilon<1$ için Lemma 4.1.1'in koşulları sağlanırsa bu durumda $\lambda(n)\ge n\ge 2$ için

$$\left\|\sigma_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}\ll\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\tag{4.1.4}$$

ve

$$\left\|\sigma_n^{\lambda}(f)-s_n^{\lambda}(f)\right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n) \tag{4.1.5}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat: [Leindler, 2009**]** çalışmasındakine benzer teknik kullanılarak ispat yapılacaktır.

$$\sigma_n^{\lambda}(f)=\frac{1}{\lambda(n)+1}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} s_m(f;x) \quad ve \qquad f=\frac{1}{\lambda(n)+1}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} f$$

olmak üzere

$$\begin{aligned}
\left\|\sigma_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)} &\le \frac{1}{\lambda(n)+1}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}\left\|s_m(f)-f\right\|_p^{(v)} \\
&= \frac{1}{\lambda(n)+1}\left(\left\|s_0-f\right\|_p^{(v)}+\left\|s_1-f\right\|_p^{(v)}+\sum_{m=2}^{\lambda(n)}\left\|s_m-f\right\|_p^{(v)}\right) \\
&\ll \frac{1}{\lambda(n)}\left(1+\sum_{m=2}^{\lambda(n)}\left\|s_m-f\right\|_p^{(v)}\right)=\frac{1}{\lambda(n)}\left(1+\sum_{m=2}^{\lambda(n)} m^{\varepsilon}\left\|s_m-f\right\|_p^{(v)} m^{-\varepsilon}\right) \\
&\ll \frac{1}{\lambda(n)}\left(1+\lambda(n)^{\varepsilon}\,\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)\sum_{m=1}^{\lambda(n)} m^{-\varepsilon}\right) \\
&\ll \frac{1}{\lambda(n)}\left(1+\lambda(n)^{\varepsilon}\,\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)\left\{\lambda(n)\right\}^{-\varepsilon+1}\right) \\
&= \frac{1}{\lambda(n)}+\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)
\end{aligned}$$

Son eşitsizlikte (4.1.1) kullanılırsa

$$\ll \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}+\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n) \ll \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)$$

elde edilir. Böylece (4.1.4) ispatlanmış olur. Lemma 4.1.2 nin ikinci kısmının ispatına geçelim. Buna göre

$$\begin{aligned}
\left\|\sigma_n^{\lambda}(f)-s_n^{\lambda}(f)\right\|_p^{(v)} &= \left\|\sigma_n^{\lambda}(f)-f+f-s_n^{\lambda}(f)\right\|_p^{(v)} \le \\
&\le \left\|\sigma_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}+\left\|s_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}
\end{aligned}$$

eşitsizliğini ve (4.1.4) kullanılırsa,

$$\ll \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)+\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n) \ll \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)$$

değerlendirmesi elde edilir. Böylece (4.1.5)'in ispatı da tamamlanmış olur.

(4.1.4) ifadesinde $\lambda(n)=n$ alınırsa Leindler'in [Leindler, 2009] çalışmasındaki sonucu verir. Yani $n\geq 2$ için

$$\left\|\sigma_n(f)-f\right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega\left(1/n\right)}{v\left(1/n\right)}\log n \tag{4.1.6}$$

elde edilir.

Lemma 4.1.3 [Değer ve Kaya, 2015**]** Aşağıdaki eşitsizlikler sağlanır.

$$A_n^{\lambda} := \sum_{m=1}^{\lambda(n)}\left|\Delta_m\left\{m^{-1}\left(P_{\lambda(n)}-P_{\lambda(n)-m}\right)\right\}\right| \ll \sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta p_m\right| \tag{4.1.7}$$

dir. Ayrıca

$$\sum_{m=1}^{\lambda(n)-1} m\left|\Delta p_m\right| \ll P_{\lambda(n)}$$

sağlanırsa bu durumda

$$A_n^{\lambda} \ll P_{\lambda(n)}\big/\lambda(n) \tag{4.1.8}$$

elde edilir

Lemma 4.1.4 $0<\varepsilon<1$ için Lemma 4.1.1'in koşulları altında

$$\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1} k\left|\Delta p_k\right| \ll P_{\lambda(n)}$$

sağlanırsa bu durumda $\lambda(n)\geq n\geq 2$ için

$$\left\|N_n^{\lambda}(f)-s_n^{\lambda}(f)\right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n) \tag{4.1.9}$$

elde edilir.

İspat:

$$N_n^{\lambda}(f;x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m}s_m(f;x) \quad ; \qquad s_n(f;x)=\sum_{m=0}^{n}A_m(f;x)$$

tanımlarından yola çıkarak Woronoi-Nörlund-λ ortalaması aşağıdaki şekilde de yazılabilir.

$$N_n^\lambda(f;x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left[p_{\lambda(n)}s_0(f;x)+p_{\lambda(n)-1}s_1(f;x)+\ldots+p_1s_{\lambda(n)-1}(f;x)+p_0s_{\lambda(n)}(f;x)\right]$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left[p_{\lambda(n)}A_0+p_{\lambda(n)-1}(A_0+A_1)+p_{\lambda(n)-2}(A_0+A_1+A_2)+\ldots\right.$$

$$\left.+p_1(A_0+A_1+\ldots+A_{\lambda(n)-1})+p_0(A_0+A_1+\ldots+A_{\lambda(n)})\right]$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left[A_0\left(p_0+p_1+\ldots+p_{\lambda(n)}\right)+A_1\left(p_0+p_1+\ldots+p_{\lambda(n)-1}\right)+\ldots\right.$$

$$\left.+A_{\lambda(n)-1}(p_0+p_1)+A_{\lambda(n)}p_0\right]$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left[A_0P_{\lambda(n)}+A_1P_{\lambda(n)-1}+\ldots+A_{\lambda(n)-1}P_1+A_{\lambda(n)}P_0\right]$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}P_{\lambda(n)-m}A_m(f;x)$$

Böylece bu son eşitliği kullanarak

$$s_n^\lambda(f;x)-N_n^\lambda(f;x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=1}^{\lambda(n)}\left(P_{\lambda(n)}-P_{\lambda(n)-m}\right)A_m(f;x)$$

olduğu elde edilir. Abel dönüşümü uygulanırsa

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=1}^{\lambda(n)}\Delta_m\left(m^{-1}(P_{\lambda(n)}-P_{\lambda(n)-m})\right)\sum_{k=1}^{m}kA_k(f;x)+\left(\lambda(n)+1\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\lambda(n)}kA_k(f;x)$$

bulunur. Buradan da norma geçilirse

$$\left\|s_n^\lambda(f)-N_n^\lambda(f)\right\|_p^{(v)}\le\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=1}^{\lambda(n)}\left|\Delta_m\left(m^{-1}(P_{\lambda(n)}-P_{\lambda(n)-m})\right)\right|\left\|\sum_{k=1}^{m}kA_k\right\|_p^{(v)}+$$

$$+\left(\lambda(n)+1\right)^{-1}\left\|\sum_{k=1}^{\lambda(n)}kA_k\right\|_p^{(v)}$$

olur.

$$\sigma_n^\lambda(f;x)-s_n^\lambda(f;x)=\left(\lambda(n)+1\right)^{-1}\sum_{k=1}^{\lambda(n)}kA_k(f;x)$$

olduğundan ve (4.1.5) ile

$$\left\|\sum_{k=1}^{\lambda(n)}kA_k\right\|_p^{(v)}=\left(\lambda\left(n\right)+1\right)\left\|\sigma_n^\lambda(f)-s_n^\lambda\left(f\right)\right\|_p^{(v)}\ll\lambda\left(n\right)\frac{\omega\left(1/\lambda\left(n\right)\right)}{v\left(1/\lambda\left(n\right)\right)}\log\lambda(n)$$

elde edilir. Böylece

$$\left\| s_n^{\lambda}(f) - N_n^{\lambda}(f) \right\|_p^{(v)} \ll$$

$$\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \lambda(n) \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n) \sum_{m=1}^{\lambda(n)} \left| \Delta_m \left(m^{-1}(P_{\lambda(n)} - P_{\lambda(n)-m}) \right) \right| +$$

$$+ \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n).$$

Son eşitsizlikte Lemma 4.1.3 uygulanırsa (4.1.9) elde edilir.

Lemma 4.1.5 [Değer ve Kaya, 2015**]** $\left(p_n\right) \in AMDMS$ veya $\left(p_n\right) \in AMIMS$ ve $\left(\lambda(n)+1\right) p_{\lambda(n)} = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ sağlanırsa, bu durumda $0 < \alpha < 1$ için,

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)} (m+1)^{-\alpha} p_{\lambda(n)-m} = \mathrm{O}\left(\left(\lambda(n)+1\right)^{-\alpha} P_{\lambda(n)} \right)$$

elde edilir.

Lemma 4.1.6 [Değer ve Kaya, 2015**]** $\left(p_n\right) \in AMIMS$ veya $\left(p_n\right) \in AMDMS$ ve $\left(\lambda(n)+1\right) = \mathrm{O}\left(P_{\lambda(n)}\right)$ sağlanırsa, bu durumda $0 < \alpha < 1$ için,

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)} (m+1)^{-\alpha} p_m = \mathrm{O}\left(\left(\lambda(n)+1\right)^{-\alpha} P_{\lambda(n)} \right)$$

elde edilir.

Lemma 4.1.7 (p_n) pozitif dizi olsun.

(i) $(p_n) \in AMDUSMS$ *ya da*

(ii) $(p_n) \in AMIUSMS$ *ve* $\left(\lambda(n)+1\right)^2 p_{\lambda(n)} = O(P_{\lambda(n)})$

sağlanırsa $0 < \alpha < 1$ için

$$\Sigma := \sum_{k=0}^{\lambda(n)} \frac{p_{\lambda(n)-k}}{(k+1)^{\alpha}} = O\left(\frac{P_{\lambda(n)}}{\left(\lambda(n)+1\right)^{\alpha}} \right) \tag{4.1.10}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: [Krasniqi, 2014**]** çalışmasındakine benzer teknik kullanılarak ispat yapılacaktır.

$r=\left[\lambda(n)/2\right]$ ile $\lambda(n)/2$ nin tam kısmı gösterilsin. $A_{\lambda(n),k}^{(N,2)}=\dfrac{2}{(k+1)(k+2)P_{\lambda(n)}}\sum\limits_{i=\lambda(n)-k}^{\lambda(n)}p_i$ olmak üzere lemmanın koşulları altında Σ toplamına Lagrange ortalama değer teoremi uygulanırsa

$$\Sigma\le\sum_{k=0}^{r}\frac{p_{\lambda(n)-k}}{(k+1)^{\alpha}}+\frac{1}{(r+1)^{\alpha}}\sum_{k=r+1}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-k}$$

$$=\sum_{k=0}^{r-1}\left[\frac{1}{(k+1)^{\alpha}}-\frac{1}{(k+2)^{\alpha}}\right]\sum_{i=0}^{k}p_{\lambda(n)-i}+\frac{1}{(r+1)^{\alpha}}\sum_{k=0}^{r}p_{\lambda(n)-k}+\frac{P_{\lambda(n)}}{(r+1)^{\alpha}}$$

$$\le\frac{\alpha P_{\lambda(n)}}{2}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{(k+1)^{\alpha-1}}{\left[(k+1)(k+2)\right]^{\alpha-1}}A_{\lambda(n),k}^{(N,2)}+\frac{P_r}{(r+1)^{\alpha}}+\frac{P_{\lambda(n)}}{(r+1)^{\alpha}}$$

$$=P_{\lambda(n)}\left[\frac{\alpha}{2}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{A_{\lambda(n),k}^{(N,2)}}{(k+2)^{\alpha-1}}+\frac{2}{(r+1)^{\alpha}}\right]$$

$(p_n)\in AMDUSMS$ olduğunda

$$\Sigma\le P_{\lambda(n)}\left[\frac{\alpha}{2}A_{\lambda(n),r}^{(N,2)}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{(k+2)^{\alpha-1}}+\frac{2}{(r+1)^{\alpha}}\right]$$

$$\ll P_{\lambda(n)}\left[\frac{1}{(r+1)(r+2)P_{\lambda(n)}}\sum_{i=\lambda(n)-r}^{\lambda(n)}p_i\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{(k+2)^{\alpha-1}}+\frac{1}{(r+1)^{\alpha}}\right]$$

$$\ll P_{\lambda(n)}\left[\frac{1}{(r+1)(r+2)}(r+1)^{1-(\alpha-1)}+\frac{1}{(r+1)^{\alpha}}\right]$$

$$\ll\frac{P_{\lambda(n)}}{(r+1)^{\alpha}}\ll\frac{P_{\lambda(n)}}{(\lambda(n)+1)^{\alpha}}$$

$(p_n)\in AMIUSMS$ *ve* $(\lambda(n)+1)^2p_{\lambda(n)}=O(P_{\lambda(n)})$ olduğunda

$$\Sigma\le P_{\lambda(n)}\left[\frac{\alpha}{2}A_{\lambda(n),0}^{(N,2)}\sum_{k=0}^{r-1}\frac{1}{(k+2)^{\alpha-1}}+\frac{2}{(r+1)^{\alpha}}\right]$$

$$\ll P_{\lambda(n)}\left[\frac{p_{\lambda(n)}}{P_{\lambda(n)}}\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1}\frac{1}{(k+2)^{\alpha-1}}+\frac{1}{(r+1)^{\alpha}}\right]$$

$$\ll P_{\lambda(n)}\left[\frac{p_{\lambda(n)}}{P_{\lambda(n)}}(\lambda(n)+1)^{2-\alpha}+\frac{1}{(r+1)^{\alpha}}\right]\ll\frac{P_{\lambda(n)}}{(\lambda(n)+1)^{\alpha}}$$

Lemma 4.1.8 (p_n) pozitif dizi olsun

(i) $(p_n) \in AMIUSMS$ *ya da*

(ii) $(p_n) \in AMDUSMS$ *ve* $\left(\lambda(n)+1\right)^2 = O(P_{\lambda(n)})$

sağlanırsa $0<\alpha<1$ için

$$\sum_{k=0}^{\lambda(n)} \frac{p_k}{\left(k+1\right)^{\alpha}} = O\left(\frac{P_{\lambda(n)}}{\left(\lambda(n)+1\right)^{\alpha}}\right) \tag{4.1.11}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Lemma 4.1.7 ile benzer şekildedir.

Bir sonraki bölümde, Cesáro alt metoduyla $f \in H_P^{(\omega)}$ fonksiyonuna yaklaşımın derecesinin belirlendiği sonuçlar ve ispatları verilecektir.

4.2 ANA BULGULAR ve İSPATLARI

Teorem 4.2.1

v ve ω süreklilik modülü olmak üzere $\dfrac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan bir fonksiyon ve $0<\varepsilon\le 1$ için

$$\gamma(t):=\gamma(v,\omega;t):=t^{-\varepsilon}\frac{\omega(t)}{v(t)}$$

artmayan bir fonksiyon olsun. $p\ge 1$ için $f\in H_P^{(\omega)}$ ve aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa

$$(i)\,(p_n)\in AMDMS$$
$$(ii)(p_n)\in AMIMS \ ve\ \lambda(n)p_{\lambda(n)}\ll P_{\lambda(n)}$$

bu durumda $\lambda(n)\ge n\ge 2$ için

$$\left\|N_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}\ll\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n) \qquad (4.1.12)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.1' de $\lambda(n)=n$ alınırsa ve

$$AMDS\subset AMDMS \text{ ve } AMIS\subset AMIMS$$

içerilmesi göz önünde tutulursa Teorem 2.8'in (i) ve (ii) durumları elde edilir. Ayrıca Teorem 4.1' de $p_n=1$ alınması durumunda $N_n^{\lambda}(f,x)$, $\sigma_n^{\lambda}(f,x)$'i verir. Böylece $\lambda(n)\ge n\ge 2$ için

$$\left\|\sigma_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}\ll\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$$

elde edilir.

Teorem 4.2.1'in ispatı:

İlk olarak (i) durumunu göz önünde tutalım. $N_n^{\lambda}\left(f;x\right)$ tanımını kullanarak,

$$N_n^{\lambda}\left(f,x\right)-f\left(x\right)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left(s_m\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right)$$

yazılır. Bu eşitliğe göre

$$\left\|N_n^{\lambda}\left(f\right)-f\right\|_p^{(v)}\le\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left\|s_m\left(f\right)-f\right\|_p^{(v)}$$

elde edilir. Leindler'in [Leindler, 2009] çalışmasındaki Teorem 2.8'in $\lambda(n) \geq n \geq 2$ şartı ve hipotez göz önüne alındığında eşitsizliğin sağ tarafının dört parçaya ayrılması gerektiği görülür Buna göre

$$\frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} \left\| s_m(f) - f \right\|_p^{(v)} =$$

$$= \frac{1}{P_{\lambda(n)}} p_{\lambda(n)} \left\| s_0(f) - f \right\|_p^{(v)} + \frac{1}{P_{\lambda(n)}} p_{\lambda(n)-1} \left\| s_1(f) - f \right\|_p^{(v)} +$$

$$+ \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} \left\| s_m(f) - f \right\|_p^{(v)} + \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} \left\| s_m(f) - f \right\|_p^{(v)}$$

$$:= I_1 + I_2 + I_3 + I_4$$

olur. Öncelikle I_1 ve I_2 ifadelerini inceleyelim. $(p_n) \in AMDMS$ olduğundan tanım gereği $(C_{\lambda(n)}) \in AMDS$ dir. Burada

$$C_{\lambda(n)} = \frac{1}{\lambda(n)+1} \sum_{k=0}^{\lambda(n)} p_k$$

dir ve buradan

$$C_{\lambda(n)} \ll C_{\lambda(n)-1} \ll C_{\lambda(n)-2}$$

yazılır. Bu eşitsizlikten

$$p_{\lambda(n)} < \frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)} \qquad ve \qquad p_{\lambda(n)-1} < \frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)-1}$$

elde edilir ve böylece

$$I_1 \ll \frac{1}{\lambda(n)} \qquad ve \qquad I_2 \ll \frac{1}{\lambda(n)-1}$$

yazılır. (4.1.1) göz önüne alınarak

$$I_1 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \quad ve \quad I_2 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$$

elde edilir. Şimdi I_3 'ü değerlendirelim:

$$I_3 = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} \left\| s_m(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} \frac{(m+1)^{\varepsilon}}{(m+1)^{\varepsilon}} \frac{\omega(1/m)}{v(1/m)} \log m$$

$(m+1)^{\varepsilon} \dfrac{\omega(1/m)}{v(1/m)} \log m$ fonksiyonu azalmayan olduğundan

$$\ll \frac{\left(\lambda(n)+1\right)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}}\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\sum_{m=2}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left(m+1\right)^{-\varepsilon}$$

şeklinde yazılır ve (4.1.2) uygulanırsa

$$\ll \frac{\left(\lambda(n)+1\right)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}}\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\sum_{m=2}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left(m+1\right)^{-\varepsilon}$$

elde edilir. Lemma 4.1.5 göz önüne alınırsa

$$\ll \frac{\left(\lambda(n)+1\right)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}}\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\left(\lambda(n)+1\right)^{-\varepsilon}P_{\lambda(n)}$$

dir. Böylece

$$I_3 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$$

elde edilir. Son olarak I_4'ü değerlendirelim:

$$I_4 = \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left\|s_m(f)-f\right\|_p^{(v)}$$

$$\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\frac{\omega(1/m)}{v(1/m)}\log m$$

$$\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}$$

şeklinde yazılır ve (4.1.2) uygulanırsa

$$\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m} = \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)P_{\lambda(n)}$$

dir. Böylece

$$I_4 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$$

elde edilir. Tüm değerlendirmeler bir araya getirildiğinde (4.1.12) elde edilir. Böylece (i) durumu için ispat tamamlanmış olur ve (ii) durumu için de ispat benzer şekilde yapılır.

Teorem 4.2.2.

$0<\varepsilon<1$ için Teorem 4.2.1'in koşulları sağlansın

$$\sum_{m=1}^{\lambda(n)-1} m\left|\Delta p_m\right| \ll P_{\lambda(n)}$$

koşulu sağlanırsa bu durumda $\lambda(n)\geq n\geq 2$ için

$$\left\|N_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.2.2'nin ispatı:

(4.1.3) ve (4.1.9) göz önüne alınırsa teoremin ispatı aşağıdaki şekilde elde edilir:

$$\left\|N_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)} \leq \left\|N_n^{\lambda}(f)-s_n^{\lambda}(f)\right\|_p^{(v)} + \left\|s_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}$$

$$\ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n) + \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n) \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$$

Teorem 4.2.3.

$0<\varepsilon<1$ için Teorem 4.2.1'in koşulları sağlansın. Ayrıca $\lambda(n)\geq n\geq 2$ için

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta_m\left(\frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}(p_{\lambda(n)-k})\right)\right| \ll \frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)} \tag{4.1.13}$$

koşulu sağlanırsa bu durumda

$$\left\|N_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n) \tag{4.1.14}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.2.3'ün ispatı:

$$N_n^{\lambda}(f,x)-f(x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m}\left(s_m(f;x)-f(x)\right)$$

toplamına Abel dönüşümü uygulanırsa

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left[\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}\left\{\sum_{k=0}^{m} p_{\lambda(n)-k}\left(s_m(f;x)-s_{m+1}(f;x)\right)\right\}+\sum_{k=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-k}\left(s_n^{\lambda}(f;x)-f(x)\right)\right]$$

$$=\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}\left(s_m(f;x)-s_{m+1}(f;x)\right)\sum_{k=0}^{m}\frac{p_{\lambda(n)-k}}{P_{\lambda(n)}}+\left(s_n^{\lambda}(f;x)-f(x)\right)$$

$$=\left(s_n^{\lambda}(f;x)-f(x)\right)+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}\left(s_m(f;x)-s_{m+1}(f;x)\right)\sum_{k=0}^{m} p_{\lambda(n)-k}$$

elde edilir.

$$B_{\lambda(n),m} := \frac{1}{m+1}\sum_{k=0}^{m} p_{\lambda(n)-k} \quad ; \quad s_n(f;x) = \sum_{k=1}^{n} A_k(f;x)$$

işaretlemesini göz önünde tutarak

$$= \left(s_n^\lambda(f;x) - f(x)\right) - \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}(m+1)A_{m+1}(f;x)\,B_{\lambda(n),m}$$

eşitliğin sağındaki toplama Abel eşitsizliği uygulanırsa

$$\begin{aligned} N_n^\lambda(f;x) - f(x) &= \left(s_n^\lambda(f;x) - f(x)\right) - \\ &- \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)-2}\left(B_{\lambda(n),m} - B_{\lambda(n),m+1}\right)\sum_{k=0}^{m}(k+1)A_{k+1}(f;x) + \\ &+ \left(\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}(m+1)A_{m+1}(f;x)\right)\frac{1}{\lambda(n)}\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1}\frac{p_{\lambda(n)-k}}{P_{\lambda(n)}} \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan norma geçilirse,

$$\left\|N_n^\lambda(f) - f\right\|_p^{(v)} \le \left\|s_n^\lambda(f;.) - f(.)\right\|_p^{(v)} +$$

$$+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)-2}\left|\Delta_m\left(B_{\lambda(n),m}\right)\right|\left\|\sum_{k=1}^{m+1}kA_k(f;.)\right\|_p^{(v)} + \frac{1}{\lambda(n)}\left\|\sum_{m=1}^{\lambda(n)}mA_m(f;.)\right\|_p^{(v)}$$

$$\begin{aligned} &\ll \left\|s_n^\lambda(f;.) - f(.)\right\|_p^{(v)} + \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left\{\left|B_{\lambda(n),0} - B_{\lambda(n),1}\right| + \left|B_{\lambda(n),1} - B_{\lambda(n),2}\right|\right\} + \\ &+ \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=2}^{\lambda(n)-2}\left|\Delta_m\left(B_{\lambda(n),m}\right)\right|\left\|\sum_{k=1}^{m+1}kA_k(f;.)\right\|_p^{(v)} + \frac{1}{\lambda(n)}\left\|\sum_{m=1}^{\lambda(n)}mA_m(f;.)\right\|_p^{(v)} \end{aligned} \tag{4.1.15}$$

olur.

$$s_n^\lambda(f;x) - \sigma_n^\lambda(f;x) = \frac{1}{\lambda(n)+1}\sum_{k=1}^{\lambda(n)}kA_k(f;x)$$

olduğundan ve (4.1.5) göz önüne alındığında

$$\left\|\sum_{k=1}^{\lambda(n)}kA_k\right\|_p^{(v)} \ll \lambda(n)\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n) \tag{4.1.16}$$

elde edilir. Böylece (4.1.15), (4.1.16) ve (4.1.3) ifadelerinden

$$\ll \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n) + \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left\{\left|B_{\lambda(n),0} - B_{\lambda(n),1}\right| + \left|B_{\lambda(n),1} - B_{\lambda(n),2}\right|\right\} +$$

$$+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=2}^{\lambda(n)-2}\left|\Delta_m\left(B_{\lambda(n),m}\right)\right|\lambda(n)\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)+\frac{1}{\lambda(n)}\lambda(n)\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)$$

$$\ll\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}\left|\Delta_m\left(B_{\lambda(n),m}\right)\right|+$$

$$+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=2}^{\lambda(n)-2}\left|\Delta_m\left(B_{\lambda(n),m}\right)\right|\lambda(n)\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)+\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)$$

elde edilir ve son eşitsizlikte (4.1.13) kullanılırsa

$$\ll\frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}\log\lambda(n)+\frac{1}{\lambda(n)}$$

olur. Son eşitsizlikte (4.1.1) göz önüne alınırsa (4.1.14) elde edilir.

Teorem 4.2.4.

$0<\varepsilon<1$ için Teorem 4.2.1'in koşulları ve aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa

$(i)(p_n)\in AMIMS$

$(ii)(p_n)\in AMDMS\ ve\ (\lambda(n)+1)=O(P_{\lambda(n)})$

bu durumda $\lambda(n)\geq n\geq 2$ için

$$\left\|R_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}\ll\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n) \tag{4.1.17}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.2.4'ün ispatı:

İlk olarak (i) durumunu göz önünde tutalım. $R_n^{\lambda}\left(f;x\right)$ tanımından,

$$R_n^{\lambda}\left(f,x\right)-f\left(x\right)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_m\left(s_m\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right)$$

dir ve bu eşitliğe göre

$$\left\|R_n^{\lambda}\left(f\right)-f\right\|_p^{(v)}\leq\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_m\left\|s_m\left(f\right)-f\right\|_p^{(v)}$$

elde edilir.

$$\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m \left\| s_m(f)-f \right\|_p^{(v)} =$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}} p_0 \left\| s_0(f)-f \right\|_p^{(v)} + \frac{1}{P_{\lambda(n)}} p_1 \left\| s_1(f)-f \right\|_p^{(v)} +$$

$$+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_m \left\| s_m(f)-f \right\|_p^{(v)} + \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)} p_m \left\| s_m(f)-f \right\|_p^{(v)}$$

$$:= J_1 + J_2 + J_3 + J_4$$

Öncelikle J_1 ve J_2 ifadelerini inceleyelim. $(p_n) \in AMIMS$ olduğundan tanım gereği $(C_{\lambda(n)}) \in AMIS$ dir. Burada

$$C_{\lambda(n)} = \frac{1}{\lambda(n)+1}\sum_{k=0}^{\lambda(n)} p_k$$

olmak üzere

$$C_0 \ll C_{\lambda(n)} \quad ve \quad C_1 \ll C_{\lambda(n)}$$

yazılır. Bu eşitsizlikten

$$p_0 \ll \frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)+1} \qquad ve \qquad p_1 \ll \frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)+1}$$

elde edilir. Böylece

$$J_1 \ll \frac{1}{\lambda(n)} \qquad ve \qquad J_2 \ll \frac{1}{\lambda(n)}$$

dir. (4.1.1) göz önüne alınarak

$$J_1 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n) \quad ve \quad J_2 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$$

elde edilir. Şimdi J_3 'ü değerlendirelim

$$J_3 = \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_m \left\| s_m(f)-f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_m \frac{(m+1)^{\varepsilon}}{(m+1)^{\varepsilon}} \frac{\omega(1/m)}{v(1/m)}\log m$$

$(m+1)^{\varepsilon} \dfrac{\omega(1/m)}{v(1/m)}\log m$ fonksiyonu azalmayan olduğundan

$$\ll \frac{(\lambda(n)+1)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_m (m+1)^{-\varepsilon}$$

dir ve (4.1.2) uygulanırsa

$$\ll \frac{\left(\lambda(n)+1\right)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m \left(m+1\right)^{-\varepsilon}$$

elde edilir. Lemma 4.1.6 göz önüne alınırsa

$$\ll \frac{\left(\lambda(n)+1\right)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \left(\lambda(n)+1\right)^{-\varepsilon} P_{\lambda(n)}$$

dir ve buradan

$$J_3 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$$

olur. Son olarak J_4'ü değerlendirelim:

$$\begin{aligned} J_4 &= \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)} p_m \left\| s_m(f) - f \right\|_p^{(v)} \\ &\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)} p_m \frac{\omega(1/m)}{v(1/m)} \log m \\ &\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)} p_m \end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve (4.1.2) uygulanırsa

$$\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) P_{\lambda(n)}$$

dir ve böylece

$$J_4 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$$

elde edilir. Tüm değerlendirmeler bir araya getirildiğinde (4.1.17) elde edilir. Böylece (i) durumu için ispat tamamlanmış olur ve (ii) durumu için de ispat benzer şekildedir.

Teorem 4.2.5.

$0 < \varepsilon < 1$ için Teorem 4.2.1'in koşulları sağlansın. Ayrıca

$$(\lambda(n)+1) p_{\lambda(n)} \ll P_{\lambda(n)} \ ve \ \sum_{m=0}^{\lambda(n)-1} m^{1-\varepsilon} \left|\Delta p_m\right| \ll P_{\lambda(n)} \lambda(n)^{-\varepsilon} \tag{4.1.18}$$

koşulları sağlanırsa bu durumda $\lambda(n) \geq n \geq 2$ için

$$\left\| R_n^{\lambda}(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \tag{4.1.19}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.2.5'in ispatı:

$R_n^\lambda(f;x)$ ve $P_{\lambda(n)}$ tanımından

$$R_n^\lambda(f,x)-f(x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_m\left(s_m(f;x)-f(x)\right)$$

yazılır ve Abel eşitsizliği uygulanırsa

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left(\sum_{k=0}^{\lambda(n)-1}\left(\left(\sum_{m=0}^{k}(s_m-f)\right)(p_k-p_{k+1})\right)+\left(\sum_{k=0}^{\lambda(n)}(s_k-f)\right)p_{\lambda(n)}\right)$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left(\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}\Delta p_m\frac{m+1}{m+1}\sum_{k=0}^{m}(s_k-f)+\frac{\lambda(n)+1}{\lambda(n)+1}p_{\lambda(n)}\sum_{k=0}^{\lambda(n)}(s_k-f)\right)$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left(\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}(m+1)\Delta p_m(\sigma_m-f)+(\lambda(n)+1)p_{\lambda(n)}(\sigma_n^\lambda-f)\right)$$

elde edilir. (4.1.4) ve (4.1.6) göz önüne alınarak norma geçilirse

$$\left\|R_n^\lambda(f)-f\right\|_p^{(\nu)}\le$$

$$\le\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left(\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}(m+1)|\Delta p_m|\left\|\sigma_m-f\right\|_p^{(\nu)}+(\lambda(n)+1)p_{\lambda(n)}\left\|\sigma_n^\lambda-f\right\|_p^{(\nu)}\right)$$

$$\ll\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left(p_0\left\|\sigma_0-f\right\|_p^{(\nu)}+2|p_1-p_0|\left\|\sigma_1-f\right\|_p^{(\nu)}\right)+$$

$$+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left(\sum_{m=2}^{\lambda(n)-1}(m+1)|\Delta p_m|\frac{\omega(1/m)}{\nu(1/m)}\log m+(\lambda(n)+1)p_{\lambda(n)}\frac{\omega(1/\lambda(n))}{\nu(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\right)$$

$$\ll\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\left(p_{\lambda(n)}+\sum_{m=2}^{\lambda(n)-1}m|\Delta p_m|\frac{\omega(1/m)}{\nu(1/m)}\log m+\lambda(n)p_{\lambda(n)}\frac{\omega(1/\lambda(n))}{\nu(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\right)$$

elde edilir. $\gamma(t)$ artmayan bir fonksiyon olduğundan

$$\sum_{m=2}^{\lambda(n)-1}m|\Delta p_m|\frac{\omega(1/m)}{\nu(1/m)}\log m\ll\sum_{m=2}^{\lambda(n)-1}m^{1-\varepsilon}|\Delta p_m|m^{\varepsilon}\frac{\omega(1/m)}{\nu(1/m)}\log m$$

$$\ll\lambda(n)^{\varepsilon}\frac{\omega(1/\lambda(n))}{\nu(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1}m^{1-\varepsilon}|\Delta p_m|$$

elde edilir ve (4.1.18) uygulanırsa

$$\ll P_{\lambda(n)} \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n) .$$

Son değerlendirme göz önüne alınarak eşitsizlikte yerine yazılırsa

$$\left\| R_n^{\lambda}(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \left(p_{\lambda(n)} + \left(P_{\lambda(n)} + \lambda(n)\, p_{\lambda(n)} \right) \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n) \right)$$

$$\ll \frac{p_{\lambda(n)}}{P_{\lambda(n)}} + \frac{\left(P_{\lambda(n)} + \lambda(n)\, p_{\lambda(n)} \right)}{P_{\lambda(n)}} \left(\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n) \right)$$

ortaya çıkar. Buna (4.1.18) ve (4.1.1) uygulanırsa

$$\ll \frac{1}{\lambda(n)+1} + \left(1 + \frac{\lambda(n)}{\lambda(n)+1} \right) \left(\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n) \right)$$

$$\ll \frac{1}{\lambda(n)} + 2 \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n)$$

$$\ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v\left(1/\lambda(n)\right)} + 2 \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n)$$

$$\ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n) + 2 \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n)$$

elde edilir. Böylece (4.1.19) ispatlanmış olur.

Teorem 4.2.6.

$0 < \varepsilon < 1$ için Teorem 4.2.1'in koşulları ile

$$\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1} \left| \Delta_m \left(\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} p_k \right) \right| \ll \frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)}$$

koşulu sağlanırsa bu durumda $\lambda(n) \geq n \geq 2$ için

$$\left\| R_n^{\lambda}(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.2.6'nın ispatı:

Teorem 4.2.3 ile benzer şekildedir.

Teorem 4.2.7.

$0<\varepsilon<1$ için Teorem 4.2.1'in koşulları ile aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa

(i) $(p_n)\in AMDUSMS$

(ii) $(p_n)\in AMIUSMS$ $\quad ve\quad$ $\left(\lambda(n)+1\right)^2 p_{\lambda(n)}=O(P_{\lambda(n)})$

$\lambda(n)\geq n\geq 2$ için

$$\left\|N_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}\ll\frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n) \tag{4.1.20}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.7'nin ispatı:

(i) durumunu göz önünde tutalım. $N_n^{\lambda}\left(f;x\right)$ tanımı kullanılarak,

$$N_n^{\lambda}\left(f,x\right)-f\left(x\right)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left(s_m\left(f;x\right)-f\left(x\right)\right)$$

yazılır. Buradan da

$$\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left\|s_m\left(f\right)-f\right\|_p^{(v)}=$$

$$=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}p_{\lambda(n)}\left\|s_0\left(f\right)-f\right\|_p^{(v)}+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}p_{\lambda(n)-1}\left\|s_1\left(f\right)-f\right\|_p^{(v)}+$$

$$+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=2}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left\|s_m\left(f\right)-f\right\|_p^{(v)}+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)}p_{\lambda(n)-m}\left\|s_m\left(f\right)-f\right\|_p^{(v)}$$

$$:=K_1+K_2+K_3+K_4$$

elde edilir. Öncelikle K_1 ifadesini inceleyelim. $(p_n)\in AMDUSMS$ olduğundan $A_{\lambda(n),k}^{(2)}\in AMDS$ dir ve buradan

$$A_{\lambda(n),k+1}^{(2)}\ll A_{\lambda(n),k}^{(2)}$$

yazmak mümkündür. Buna göre

$$\frac{2}{\left(k+2\right)\left(k+3\right)}\sum_{i=n-(k+1)}^{n}p_{n-i}\leq\frac{2}{\left(k+1\right)\left(k+2\right)}\sum_{i=n-k}^{n}p_{n-i}$$

$$\frac{(p_{k+1}+P_k)}{(k+3)}\ll\frac{\left(P_k\right)}{\left(k+1\right)}$$

$$\frac{p_{k+1}}{P_k} \ll \frac{2}{k+1} \tag{4.1.21}$$

elde edilir. (4.1.21) yardımıyla aşağıdaki eşitsizliği yazmak mümkündür.

$$\frac{p_{k+1}}{P_{k+1}} \ll \frac{p_{k+1}}{P_k} \ll \frac{2}{k+1}$$

Böylece

$$K_1 = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} p_{\lambda(n)} \left\| s_0(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{p_{\lambda(n)}}{P_{\lambda(n)}} \ll \frac{1}{\lambda(n)}$$

elde edilir ve (4.1.1) uygulanırsa

$$K_1 \ll \frac{1}{\lambda(n)} \ll \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \ll \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n)$$

olur. Şimdi K_2 ifadesini inceleyelim. (4.1.21) yardımıyla

$$\frac{p_{\lambda(n)-1}}{P_{\lambda(n)}} \ll \frac{p_{\lambda(n)-1}}{P_{\lambda(n)-1}} \ll \frac{1}{\lambda(n)-1}$$

dir ve böylece

$$K_2 = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} p_{\lambda(n)-1} \left\| s_1(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{p_{\lambda(n)-1}}{P_{\lambda(n)}} \ll \frac{1}{\lambda(n)-1}$$

eşitsizliği doğrudur. $\lambda(n) \geq 2$ olduğundan $\lambda(n)-1 \geq 1$ dir ve buradan (4.1.1) ve (4.1.2) yardımıyla

$$\frac{1}{\lambda(n)-1} \ll \frac{\omega\left(1/(\lambda(n)-1)\right)}{v\left(1/(\lambda(n)-1)\right)} \ll \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)}$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$K_2 \ll \frac{1}{\lambda(n)-1} \ll \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \ll \frac{\omega\left(1/\lambda(n)\right)}{v\left(1/\lambda(n)\right)} \log \lambda(n)$$

olacaktır.

K_3 toplamını inceleyelim:

$$K_3 = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} \left\| s_m(f) - f \right\|_p^{(v)}$$

olmak üzere (2.1.1) kullanılırsa

$$\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} \frac{(m+1)^{\varepsilon}}{(m+1)^{\varepsilon}} \frac{\omega(1/m)}{v(1/m)} \log m$$

ortaya çıkar. $(m+1)^{\varepsilon} \dfrac{\omega(1/m)}{v(1/m)} \log m$ fonksiyonu azalmayan olduğundan

$$\ll \frac{(\lambda(n)+1)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} (m+1)^{-\varepsilon}$$

şeklinde yazılır ve (4.1.2) uygulanırsa

$$\ll \frac{(\lambda(n)+1)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} (m+1)^{-\varepsilon}$$

elde edilir (4.1.10) göz önüne alınırsa

$$\ll \frac{(\lambda(n)+1)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) (\lambda(n)+1)^{-\varepsilon} P_{\lambda(n)}$$

dir ve böylece istenen sonuç olan

$$K_3 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$$

elde edilir. Son olarak K_4'ü değerlendirelim:

$$K_4 = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} \left\| s_m(f) - f \right\|_p^{(v)}$$

$$\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} \frac{\omega(1/m)}{v(1/m)} \log m$$

$$\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m}$$

şeklinde yazılır ve (4.1.2) uygulanırsa

$$\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-m} = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) P_{\lambda(n)}$$

dir ve böylece

$$K_4 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$$

olur. K_1-K_4 değerlendirmeleri bir araya getirildiğinde (4.1.20) elde edilir. Böylece (i) durumu için ispat tamamlanmış olur ve (ii) durumu için de ispat benzer şekildedir.

Teorem 4.2.8.

$0<\varepsilon<1$ için Teorem 4.2.1'in koşulları ile aşağıdaki koşullardan biri sağlanırsa

$(i)\ (p_n)\in AMIUSMS$

$(ii)\ (p_n)\in AMDUSMS \quad ve \quad (\lambda(n)+1)^2=O(P_{\lambda(n)})$

$\lambda(n)\geq n\geq 2$ için

$$\left\|R_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n) \tag{4.1.22}$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 4.2.8'İn ispatı:

İlk olarak (i) durumunu göz önünde tutalım. $R_n^{\lambda}(f;x)$ tanımından,

$$R_n^{\lambda}(f,x)-f(x)=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_m\left(s_m(f;x)-f(x)\right)$$

dir ve bu eşitliğe göre

$$\left\|R_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}\leq\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_m\left\|s_m(f)-f\right\|_p^{(v)}$$

elde edilir. Buradan

$$\begin{aligned}
&\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=0}^{\lambda(n)}p_m\left\|s_m(f)-f\right\|_p^{(v)}=\\
&=\frac{1}{P_{\lambda(n)}}p_0\left\|s_0(f)-f\right\|_p^{(v)}+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}p_1\left\|s_1(f)-f\right\|_p^{(v)}+\\
&+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=2}^{\lambda(n)}p_m\left\|s_m(f)-f\right\|_p^{(v)}+\frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)}p_m\left\|s_m(f)-f\right\|_p^{(v)}\\
&:=L_1+L_2+L_3+L_4
\end{aligned}$$

ortaya çıkar. Öncelikle L_1 ifadesini inceleyelim. $(p_n)\in AMIUSMS$ olduğundan $A_{\lambda(n),k}^{(2)}\in AMIS$ dir ve buradan

$$A_{\lambda(n),0}^{(2)}\ll A_{\lambda(n),\lambda(n)}^{(2)}$$

yazmak mümkündür.

$$\frac{2}{1.2}\sum_{i=\lambda(n)-0}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-i} \ll \frac{2}{(\lambda(n)+1)(\lambda(n)+2)}\sum_{i=\lambda(n)-\lambda(n)}^{\lambda(n)} p_{\lambda(n)-i}$$

$$p_0 \ll \frac{2}{(\lambda(n)+1)(\lambda(n)+2)} P_{\lambda(n)}$$

$$\frac{p_0}{P_{\lambda(n)}} \ll \frac{1}{(\lambda(n)+1)(\lambda(n)+2)} \ll \frac{1}{(\lambda(n)+1)}$$

$$L_1 = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} p_0 \left\| s_0(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{p_0}{P_{\lambda(n)}} \ll \frac{1}{\lambda(n)}$$

elde edilir ve (4.1.1) uygulanırsa

$$L_1 \ll \frac{1}{\lambda(n)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$$

L_2 de benzer şekilde değerlendirilir ve aşağıdaki eşitsizliği yazmak mümkündür.

$$L_2 \ll \frac{1}{\lambda(n)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$$

Şimdi L_3 ’ü değerlendirelim

$$L_3 = \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_m \left\| s_m(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}}\sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_m \frac{(m+1)^{\varepsilon}}{(m+1)^{\varepsilon}} \frac{\omega(1/m)}{v(1/m)}\log m$$

$(m+1)^{\varepsilon}\dfrac{\omega(1/m)}{v(1/m)}\log m$ fonksiyonu azalmayan olduğundan

$$\ll \frac{(\lambda(n)+1)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\sum_{m=2}^{\lambda(n)} p_m (m+1)^{-\varepsilon}$$

dir ve (4.1.2) uygulanırsa

$$\ll \frac{(\lambda(n)+1)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)\sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m (m+1)^{-\varepsilon}$$

elde edilir ve Lemma 4.1.8 göz önüne alınırsa

$$\ll \frac{(\lambda(n)+1)^{\varepsilon}}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)(\lambda(n)+1)^{-\varepsilon} P_{\lambda(n)}$$

dir ve böylece

$$L_3 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$$

elde edilir. Son olarak L_4'ü değerlendirelim:

$$\begin{aligned} L_4 &= \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)} p_m \left\| s_m(f) - f \right\|_p^{(v)} \\ &\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)} p_m \frac{\omega(1/m)}{v(1/m)} \log m \\ &\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \sum_{m=\lambda(n)+1}^{\lambda(n)} p_m \end{aligned}$$

şeklinde yazılır ve (4.1.2) uygulanırsa

$$\ll \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) \sum_{m=0}^{\lambda(n)} p_m = \frac{1}{P_{\lambda(n)}} \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n) P_{\lambda(n)}$$

dir ve böylece

$$L_4 \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$$

elde edilir. Tüm değerlendirmeler bir araya getirildiğinde (4.1.22) elde edilir. Böylece (i) durumu için ispat tamamlanmış olur ve (ii) durumu için de ispat benzer şekildedir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

S. Prösdorff tarafından ele alınan Hölder metriğinde bazı trigonometrik polinomlar ile yaklaşım hızının değerlendirilmesi daha sonra bazı matematikçiler tarafından Hölder metriğinin genelleştirilmesi yapılarak tekrar ele alınmıştır. Bu tez çalışmasında ise genelleştirmeleri dikkate alarak, Das ve arkadaşlarının tanımlamış olduğu genelleştirilmiş Hölder metriğinde, Cesáro alt metodlarını kullanarak $H_p^{(\omega)}$ sınıfına ait fonksiyonlara daha genel dizi sınıfları göz önünde tutularak elde edilen yaklaşımın hızı ile ilgili ortaya çıkan sonuçlar elde edilmiştir. Bu sonuçlar ile ilgili değerlendirmeler ve açık kalan problemler ile ilgili öneriler aşağıda verilmiştir.

5.1. SONUÇLAR

1. $\frac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere $0<\varepsilon\le 1$ için $\gamma(t):=t^{-\varepsilon}\frac{\omega(t)}{v(t)}$ artmayan bir fonksiyon olsun. $p\ge 1$ için $f\in H_P^{(\omega)}$ olsun $(p_n)\in AMDMS$ iken $\lambda(n)\ge n\ge 2$ için $\left\|N_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$ değerlendirmesi elde edilmiştir. $AMDS\subset AMDMS$ içerilmesi göz önüne alınırsa elde edilen bu sonucun Leindler'in yapmış olduğu çalışmadan daha genel olduğu görülür.

2. $\frac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere $0<\varepsilon\le 1$ için $\gamma(t):=t^{-\varepsilon}\frac{\omega(t)}{v(t)}$ artmayan bir fonksiyon olsun. $p\ge 1$ için $f\in H_P^{(\omega)}$ olsun $(p_n)\in AMIMS$ *ve* $\lambda(n)p_{\lambda(n)}\ll P_{\lambda(n)}$ iken $\lambda(n)\ge n\ge 2$ için $\left\|N_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$ elde edilmiştir. $AMIS\subset AMIMS$ içerilmesi göz önüne alınırsa elde edilen bu sonucun Leindler'in yapmış olduğu çalışmadan daha genel olduğu görülür.

3. $p\ge 1$ için $f\in H_P^{(\omega)}$ olsun ve $\sum_{m=1}^{\lambda(n)-1} m\left|\Delta p_m\right| \ll P_{\lambda(n)}$ koşulu altında $\lambda(n)\ge n\ge 2$ için $\left\|N_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$ elde edilmiştir.Böylece dizi sınıfları üzerine şart koymaksızın sadece yukarıdaki eşitlik sağlatılarak yine aynı değerlendirme elde edilmiştir. Burada $\lambda(n)=n$ alındığında Leindler'in sonucu elde edilir.

4. $p \geq 1$ için $f \in H_P^{(\omega)}$ olsun ve $\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1} \left| \Delta_m \left(\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} (p_{\lambda(n)-k}) \right) \right| \ll \frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)}$ koşulu altında $\lambda(n) \geq n \geq 2$ için $\left\| N_n^{\lambda}(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$ elde edilmiştir. Benzer şekilde burada dizi sınıfları üzerine şart koymaksızın sadece yukarıdaki eşitlik sağlatılarak yine aynı değerlendirme elde edilmiştir.Burada $\lambda(n)=n$ alındığında Leindler'in sonucu elde edilir.

5. $\frac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere $0 < \varepsilon \leq 1$ için $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \frac{\omega(t)}{v(t)}$ artmayan bir fonksiyon olsun. $p \geq 1$ için $f \in H_P^{(\omega)}$ olsun $(p_n) \in AMDMS$ *ve* $(\lambda(n)+1) = O(P_{\lambda(n)})$ iken $\lambda(n) \geq n \geq 2$ için $\left\| R_n^{\lambda}(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$ değerlendirmesi elde edilmiştir. $AMDS \subset AMDMS$ içerilmesi göz önüne alınırsa elde edilen bu sonucun Leindler'in yapmış olduğu çalışmadan daha genel olduğu görülür.

6. $\frac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere $0 < \varepsilon \leq 1$ için $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \frac{\omega(t)}{v(t)}$ artmayan bir fonksiyon olsun. $p \geq 1$ için $f \in H_P^{(\omega)}$ olsun $(p_n) \in AMIMS$ iken $\lambda(n) \geq n \geq 2$ için $\left\| R_n^{\lambda}(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$ elde edilmiştir. $AMIS \subset AMIMS$ içerilmesi göz önüne alınırsa elde edilen bu sonucun Leindler'in yapmış olduğu çalışmadan daha genel olduğu görülür.

7. $p \geq 1$ için $f \in H_P^{(\omega)}$ olsun ve $(\lambda(n)+1) p_{\lambda(n)} \ll P_{\lambda(n)}$ ve $\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1} m^{1-\varepsilon} \left| \Delta p_m \right| \ll P_{\lambda(n)} \lambda(n)^{-\varepsilon}$ koşulu altında $\lambda(n) \geq n \geq 2$ için $\left\| R_n^{\lambda}(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$ elde edilmiştir. Böylece dizi sınıfları üzerine şart koymaksızın sadece yukarıdaki eşitlik sağlatılarak yine aynı değerlendirme elde edilmiştir. Burada $\lambda(n) = n$ alındığında Leindler'in sonucu elde edilir.

8. $p \geq 1$ için $f \in H_P^{(\omega)}$ olsun ve $\sum_{m=0}^{\lambda(n)-1} \left| \Delta_m \left(\frac{1}{m+1} \sum_{k=0}^{m} p_k \right) \right| \ll \frac{P_{\lambda(n)}}{\lambda(n)}$ $\lambda(n) \geq n \geq 2$ için $\left\| R_n^\lambda(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$ elde edilmiştir.Böylece dizi sınıfları üzerine şart koymaksızın sadece yukarıdaki eşitlik sağlatılarak yine aynı değerlendirme elde edilmiştir. Burada $\lambda(n) = n$ alındığında Leindler'in sonucu elde edilir.

Ayrıca Krasniqi'nin tanımlamış olduğu AMDUSMS ve AMIUSMS dizi sınıflarıyla yaklaşımın derecesi aşağıdaki şekilde incelenmiştir.

9. $\frac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere $0 < \varepsilon \leq 1$ için $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \frac{\omega(t)}{v(t)}$ artmayan bir fonksiyon olsun. $p \geq 1$ için $f \in H_P^{(\omega)}$ olsun $(p_n) \in AMDUSMS$ iken $\lambda(n) \geq n \geq 2$ için $\left\| N_n^\lambda(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$ değerlendirmesi elde edilmiştir.

10. $\frac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere $0 < \varepsilon \leq 1$ için $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \frac{\omega(t)}{v(t)}$ artmayan bir fonksiyon olsun. $p \geq 1$ için $f \in H_P^{(\omega)}$ olsun $(p_n) \in AMIUSMS$ ve $\left(\lambda(n)+1\right)^2 p_{\lambda(n)} = O(P_{\lambda(n)})$ iken $\lambda(n) \geq n \geq 2$ için $\left\| N_n^\lambda(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$ değerlendirmesi elde edilmiştir.

11. $\frac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere $0 < \varepsilon \leq 1$ için $\gamma(t) := t^{-\varepsilon} \frac{\omega(t)}{v(t)}$ artmayan bir fonksiyon olsun. $p \geq 1$ için $f \in H_P^{(\omega)}$ olsun $(p_n) \in AMIUSMS$ iken $\lambda(n) \geq n \geq 2$ için $\left\| R_n^\lambda(f) - f \right\|_p^{(v)} \ll \frac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))} \log \lambda(n)$ değerlendirmesi elde edilmiştir.

12. $\dfrac{\omega(t)}{v(t)}$ azalmayan bir fonksiyon olmak üzere $0<\varepsilon\le 1$ için $\gamma(t):=t^{-\varepsilon}\dfrac{\omega(t)}{v(t)}$ artmayan bir fonksiyon olsun. $p\ge 1$ için $f\in H_P^{(\omega)}$ olsun $(p_n)\in AMDUSMS$ *ve* $\left(\lambda(n)+1\right)^2=O(P_{\lambda(n)})$ iken $\lambda(n)\ge n\ge 2$ için $\left\|R_n^{\lambda}(f)-f\right\|_p^{(v)}\ll\dfrac{\omega(1/\lambda(n))}{v(1/\lambda(n))}\log\lambda(n)$ değerlendirmesi elde edilmiştir.

5.2. ÖNERİLER

Bu çalışmada ele alınan dizi sınıfları yerine daha genel dizi sınıfları göz önünde tutularak ve farklı toplanabilme metodları ile yukarıdaki problemler yeniden incelenebilir. Ayrıca fonksiyon sınıfları ve bu sınıflar üzerinde ele alınan normlara göre yaklaşımın derecesinin belirlenmesi ile ilgili problemler ele alınabilir.

KAYNAKLAR

Alexists, G. “Convergence problems of orthogonal series”, Pergamon Press, New York, (1961).

Armittage, D. H. and Maddox, I. J. “A new type of Cesáro mean”, Analysis, 9: 195-204, (1989).

Boos, J., “Classical and modern methods in summability”, Oxford University Pres, Oxford, 600 s., (2000).

Chandra, P. “On the generalized Fejer means in the metric of the Hölder space”, Math.Nachr., 109: 39-45, (1982).

Devore, R. A. and Lorentz, G. G., “Constructive Approximation”, Springer-Verlag, (1993).

Das, G., Ghosh, T. and Ray, B. K. “Degree of approximation of functions by their series in the generalized Hölder metric”, Proc. Indian Acad. Sci. (Math. Sci.), 106(2): 139-153, (1996).

Das, G., Nath, A. and Ray, B. K. “An estimate of the rate of convergence of Fourier series in generalized Hölder metric”, Analysis and Applications, (*Ujjain, 1999*), Narosa (New Delhi, 2002), 43–60.

Deger, U., Dagadur, I. and Kucukaslan, M. “Approximation by trigonometric polynomials to functions in L_p norm”, Proc. Jangjeon Math. Soc. 15(2): 203-213, (2012).

Deger, U. and Kaya, M. “On the approximation by Cesáro submethod”, Palestine Journal of Mathematics, 4(1): 44-56, (2015).

Krasniqi, X. Z. “On trigonometric approximation in the space $L^{p(x)}$”, TWMS J. App. Eng. Math., 4(2): 147-154, (2014).

Lebesque, H. “Sur la representation trigonometrique approachee des fonctions satisfaisant a une condition deLipschitz”, Bull. Soc. Math. France,38: 184-210, (1910).

Leindler, L., “Generalization of Prössdorf’s theorems”, Studia Sci. Math. Hungar., 14: 431–439, (1979).

Leindler, L. “A relaxed estimate of the degree of approximation by Fourier series in generalized Hölder metric”, Analysis Mathematica, 35:51-60, (2009).

Mazhar, S. M. “Approximation by the partial sums of Fourier series”, Analysis,11:149-154, (1991).

Mohapatra, R. N. and Chandra, P. “Degree of approximation of functions in the Hölder metric”, Acta Math. Hung, 41(1-2): 67-76, (1983).

Petersen, G. M. “Regular Matrix Transformations ”, Mc Graw Hill, London, New York, Toronto, Sydney, (1966).

Prössdorf, S. “Zur Konvergenz der Fourier reihen Hölder stetiger Funktionen”, Math.Nachr., 69: , (1975).

Salem, R. and Zygmund, A., “The approximation by partial sums of a Fourier series”, Trans. Amer. Math. Soc., 59: 14-22, (1946)

Stepanets, A. I., “Methods of Aproximation Theory”, VSP, Boston, (2005).

Szal, B. “Trigonometric approximation by Nörlund type means in L^{p}-norm ”, Comment. Math. Univ. Carolin., 50(4): 575-589, (2009)

Tolstov, G. P., “Fourier Series”, Prentice-Hall, Inc, 336 s., (1962).

Wilansky, A., “Summability through Functional Analysis”, Elsevier Science Publishers B. V., North-Holland, 318 s., (1984).

Zygmund, A., “Trigonometric Series”, Vol I-II,Cambridge at the University Press, (1959).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Hilal BAYINDIR

Doğum Tarihi: 01/06/1990

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	M. Adnan Özçelik Anadolu Lisesi	2004-2008
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2008-2012
Pedogojik Formasyon	Eğitim Bilimleri	Mersin Üniversitesi	2011-2012
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2012-2015

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. H. BAYINDIR, U. DEĞER, Approximation by Cesáro Submethod in Generalized Hölder Metric, V International Conference of The Georgian Mathematical Union, s:68, Batum-Gürcistan, 08-12 Eylül 2014.

2. H. BAYINDIR, U. DEĞER, Approximation by Generalized Deferred Cesáro Means in the $H_p^{(\omega)}$, The Eighth Congress of Romanian Mathematicians, s:66, Iasi-Romanya, 26 Haziran-1 Temmuz 2015

3. U. DEĞER, H. BAYINDIR Approximation by Cesáro Submethod in Generalized Hölder Metric, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, (Submitted) 2015.