HOMOJEN OLMAYAN ORTAMDA TİTREŞİM VE DİFÜZYON OLAYI ÜZERİNE

DÖNE KARAHAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2015

HOMOJEN OLMAYAN ORTAMDA TİTREŞİM VE DİFÜZYON OLAYI ÜZERİNE

DÖNE KARAHAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

MERSİN
HAZİRAN – 2015

Döne KARAHAN tarafından Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU danışmanlığında hazırlanan " Homojen Olmayan Ortamda Titreşim ve Difüzyon Olayı Üzerine" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU ....

Doç. Dr. Hamza MENKEN ....

Doç. Dr. Tanfer TANRIVERDİ ....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03/07/2015 tarih ve 2015-18/752 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

HOMOJEN OLMAYAN ORTAMDA TİTREŞİM VE DİFÜZYON OLAYI ÜZERİNE

DÖNE KARAHAN

ÖZ

Bu çalışmada, yoğunlukları ρ_1 ve ρ_2 olan iki $[0,a]$ ve $[a,\pi]$ uzunluklu çubuklardan oluşan $[0,\pi]$ uzunluktaki çubukta ısı iletimi problemi göz önüne alınmıştır. Bu problem, $D=\{x,\ t:0<x<\pi,\ t>0\}$ bölgesinde

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-q(x)u,$$

biçimindeki denklem,

$$u_x(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\ t\geq 0,$$

sınır koşulları ve

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leq x\leq \pi$$

başlangıç koşulu ile verilen sınır değer problemi şeklinde tanımlanmıştır. Burada, $q(x),\ \varphi(x)$ belirli koşulları sağlayan reel değerli fonksiyonlardır ve $\rho(x)$ parçalı sürekli fonksiyondur:

$$\rho(x)=\begin{cases}\rho_1, & 0\leq x\leq a,\\ \rho_2, & a<x\leq \pi.\end{cases}$$

Ele alınan lineer homojen sınır değer problemine değişkenlere ayırma (Fourier) metodu uygulandığında süreksiz katsayılı ikinci mertebeden diferansiyel denklem için özdeğer problemi ile karşılaşılmıştır. Bu problemin spektral özellikleri incelenmiş ve spektral analizin ters probleminin çözümünün tekliği gösterilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Isı problemi, özdeğer problemi, spektral özellik.

Danışman: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı

ON EVENT VIBRATION AND DIFFUSION IN NON-HOMOGENOUS ENVIRONMENT

DÖNE KARAHAN

ABSTRACT

In this study, the problem of heat transmission on $[0,\pi]$ rod which was formed by $[0,a]$ and $[a,\pi]$ rods whose density is ρ_1 and ρ_2 is examined. This problem, in the region $D=\{x,\ t:0<x<\pi,\ t>0\}$, is defined as boundary value problem which is given

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-q(x)u,$$

equation with boundary value conditions

$$u_x(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\ t\geq 0,$$

and initial condition

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\leq x\leq \pi.$$

Here, $q(x)$, $\varphi(x)$ are real valued functions which provide certain conditions, $\rho(x)$ is piecewise continuous function:

$$\rho(x)=\begin{cases}\rho_1, & 0\leq x\leq a,\\ \rho_2, & a<x\leq \pi.\end{cases}$$

When the method of separation of variables (Fourier) method is applied to the examined linear homogenous boundary value problem, eigenvalue problem for second order differential equation with discontinuous coefficient is obtained. The spectral features of this problem are examined and the uniqueness of solution of inverse problem of spectral analysis is shown.

Key words: Heat problem, eigenvalue problem, spectral feature.

Advisor: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin University, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi hazırlamamda, fikirleriyle, bilgisiyle, sabrı ve sevgisiyle her zaman yanımda olan, çok saygı duyduğum kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca desteklerinden dolayı, tüm Mersin Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma, yüksek lisans ve doktora öğrencisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Hiçbir zaman manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

SİMGE VE KISATMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
λ	Spektral parametre
L	Diferansiyel operatör
$D(L)$	L operatörünün tanım kümesi
$\dot{f}(x,\lambda)$	λ ya göre türev
$f'(x,\lambda)$	x e göre türev
R_λ	Rezolvent operatör
$G(x,t;\lambda)$	Green fonksiyonu
$AC[a,b]$	$[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar
$l(y)$	Lineer diferansiyel ifade
$u(x,t)$	Sıcaklık
$\rho(x)$	Yoğunluk

1. GİRİŞ

Farklı yoğunluklara sahip iki parçadan ($[0,a]$ ve $[a,\pi]$ parçalarından) oluşan bir çubukta ısı iletimi problemini göz önüne alalım. Çubuğun bir ucunda sıcaklık sıfır, diğer ucu izole edilmiş olsun. Belirli başlangıç koşulları altında, keyfi t anında, x noktasındaki $u(x,t)$ sıcaklığı aşağıdaki sınır değer probleminin çözümü ile ifade edilir.

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-q(x)u,\ 0<x<\pi,\ t>0, \tag{1.1}$$

$$u_x(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\ t\geq 0, \tag{1.2}$$

burada $q(x)\in L_2(0,\pi)$ reel değerli fonksiyon, $\rho(x)$ ise çubuğun yoğunluğunu ifade eden parçalı sürekli fonksiyondur ve

$$\rho(x)=\begin{cases}1, & 0\leq x\leq a,\\ \alpha^2, & a<x\leq\pi.\end{cases} \tag{1.3}$$

Problem, lineer homojen denklem ve homojen sınır koşulları ile ifade edilir. Bu probleme değişkenlerine ayırma yöntemi uygulanırsa

$$-y''+q(x)y=\lambda^2\rho(x)y,\ 0<x<\pi, \tag{1.4}$$

$$y'(0)=0,\ y(\pi)=0 \tag{1.5}$$

biçiminde spektral problem ile karşılaşılır, burada λ bir kompleks parametredir. Dolayısıyla yukarıdaki (1.1), (1.2) difüzyon probleminin çözümünün bulunması için (1.4), (1.5) spektral problemin incelenmesi gerekir. Benzer spektral problemlerle homojen olmayan ortamda titreşim problemlerinin incelenmesi sırasında da karşılaşılır. (1.4), (1.5) sınır değer problemi klasik Sturm-Liouville probleminden farklı olarak $\rho(x)$ biçiminde süreksiz katsayı içerir.

Genel olarak, (1.1), (1.2) biçimindeki sınır değer problemleri iki farklı ($[0,a]$ ve $[a,\pi]$ gibi) parçada incelenerek çözülür. Bu çalışmada ise, direk tüm çubukta problem ele alınır. Bu nedenle, (1.4), (1.5) sınır değer problemi ona denk olan integral denkleme indirgenir ve böylece problemin özel çözümü için yeni integral gösterim kullanılır.

Tez çalışmasında,

- (1.4), (1.5) sınır değer probleminin özdeğerlerinin reelliği ve basitliği (tek katlılığı) gösterilmiştir.

- Özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller elde edilmiştir.
- $\rho(x)$ ağırlıklı $L_{2,\rho}(0,\pi)$ uzayında rezolvent operatör inşa edilerek, bu uzayda özfonksiyonlar dizisinin tamlığı gösterilmiştir.
- Özfonksiyonlar dizisine göre ayrışım formülü ve buna denk olan Parseval eşitliği bulunmuştur.
- (1.4), (1.5) spektral probleme uygun Weyl fonksiyonu ve Wely çözümü tanımlanmıştır.
- Weyl çözümüne göre ters problemin çözümünün tekliği gösterilmiştir.
- Özdeğer ve normlaştırıcı sayılardan oluşan spektral veriler tanımlanmış ve bunlara göre ters problemin çözümünün tekliği kanıtlanmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Homojen çubukta ısı transferi problemleri karışık sınır problemleri için I. G. Petrovski [1], S. J. Farlow [2], A. N. Tikhonov ve A. A. Samarski [3], B. M. Levitan ve I. S. Sargsjan [4] ve başka matematikçilerin çalışmalarında farklı yöntemlerle incelenmiştir. Adi diferansiyel denklemler için spektral denklemlerin fiziksel uygulamaları L. Collatz [5], E. Kamke [6], A. M. Akhtyamov [7], C. Titchmarsh [8] ve diğer yazarların çalışmalarında ele alınmıştır. Klasik Sturm-Liouville denklemi için spektral analizin düz ve ters problemleri E. C. Titchmarsh [8], B. M. Levitan ve I. S. Sargsjan [9], V. A. Marchenko [10], [11], K. Chadan ve P. C. Sabatier [12], V. A. Yurko [13], G. Freiling ve V. Yurko [14] ve başka matematikçilerin çalışmalarında mevcuttur.

Süreksiz Sturm-Liouville operatörü yarı eksende M. G. Gasymov [15], A. A. Darwish [16], I. M. Guseinov ve R. T. Pashaev [17], Kh. R. Mamedov [18], [19] ve diğer bazı yazarların çalışmalarında farklı koşullar altında incelenmiştir.

Sonlu aralıkta parçalı sürekli katsayılı Sturm-Liouville denklemi için spektral problemler E. N. Akhmedova [20], E. N. Akhmedova ve H. M. Huseynov [21], A. A. Nabiev ve R. K. Amirov [22], D. Karahan ve Kh. R. Mamedov [23] çalışmalarında ve diğer bazı çalışmalarda araştırılmıştır.

Süreksiz katsayılı ikinci mertebeden diferansiyel denklemler için farklı sınır koşulları altında, spektral analizin düz ve ters problemleri Kh. R. Mamedov ve F. A. Çetinkaya'nın [24]-[27] çalışmalarında ele alınmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 TEMEL TANIMLAR VE KAVRAMLAR

Bu bölümde ileride kullanılacak temel tanımlar, kavramlar ve teoremler verilecektir. Bunun için, S. J. Farlow [3], I. G. Petrovski [4], G. Freiling ve V. Yurko [12], L. A. Lusternik ve V. J. Sobolev [28], J. B. Conway [29] ve V. F., Zhdanovich [30] kaynaklarından yararlanılmıştır.

Tanım 3.1.1 $L_2\left[a,b\right]$ uzayı, Hilbert uzayı olup, elemanları $\left[a,b\right]$ aralığında ölçülebilir fonksiyonlardır:

$$L_2\left[a,b\right]=\left\{x(t):\int_a^b\left|x(t)\right|^2 dt<\infty\right\}$$

ve bu uzayda iç çarpım

$$\left\langle f,g\right\rangle=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}dt$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.1.2 H Hilbert uzayı ve A bu uzayda tanımlı operatör olsun. $R_\lambda=\left(A-\lambda I\right)^{-1}$ rezolvent operatörü varsa, $\lambda\in\mathbb{C}$ noktasına *regüler nokta* denir ve bu noktaların oluşturduğu kümeye *rezolvent küme* denir.

Tanım 3.1.3

- Regüler olmayan tüm $\lambda\in\mathbb{C}$ noktalarına A operatörünün *spektrumu* denir.
- $L-\lambda I$ operatörünün uzayın tümünde tanımlı, $\left(L-\lambda I\right)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ değerlerine L operatörünün *özdeğerleri* denir. Bir operatörün özdeğerleri spektrum kümesine dahildir.
- Bütün özdeğerlerin kümesine operatörün *discrete spektrumu* denir.

- $\left(L-\lambda I\right)^{-1}$ tersinin mevcut olduğu ancak tüm uzayda tanımlı olmadığı veya $\left(L-\lambda I\right)^{-1}$ tersinin sınırsız olduğu λ değerlerinin oluşturduğu kümeye operatörün *sürekli spektrumu* denir.

Teorem (Rouche Teoremi) 3.1.4 f ve g fonksiyonları, basit kapalı bir C eğrisinin içinde ve üzerinde analitik ve C üzerinde $|g(z)|<|f(z)|$ ise f ve $f+g$ fonksiyonları C içinde aynı sayıda sıfırlara (köklere) sahiptir.

Teorem (Cauchy Teoremi) 3.1.5 C, R nin sınırı olsun. f**,** R bölgesinin içinde ve sınırında analitik olsun. O halde,

$$\int_C f(z)dz=0.$$

Teorem (Cauchy İntegral Formülü) 3.1.6 R kompleks düzlemin açık bir altkümesi olsun. $f:R\to\mathbb{C}$ analitik bir fonksiyon ve $D=\left\{z:|z-z_0|\le r\right\}$ diski verilsin. C, D nin sınırı olsun. Bu halde, D nin her a iç noktası için

$$f(a)=\frac{1}{2\pi i}\oint_C \frac{f(z)}{z-a}dz$$

ifadesi doğru olur.

Tanım 3.1.7 $P(x)y''+Q(x)y'+R(x)y=0$ diferansiyel denkleminde $P(x)$, $Q(x)$ ve $R(x)$ verilen aralıkta tanımlı analitik fonksiyonlar olsun ve ortak bölenleri olmasın. Eğer bir x_0 noktası için $P(x_0)=0$ ise, x_0 noktasına verilen diferansiyel denklemin bir tekil noktası denir.

$$\lim_{x\to x_0}(x-x_0)\frac{Q(x)}{P(x)},\ \lim_{x\to x_0}(x-x_0)^2\frac{R(x)}{P(x)}$$

limit değerleri sonlu ise bu koşulları sağlayan x_0 noktasına, verilen diferansiyel denklemin regüler tekil noktası denir.

Tanım 3.1.8 Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun ayrık tekil noktası z_0 olsun. Eğer,

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin kutup noktası denir.

Teorem (Rezidü Teoremi) 3.1.9 D bölgesinde ($f(z)$ nin sonlu sayıda ayrık tekil $z_1, z_2, ..., z_n$ noktaları hariç) analitik ve D nin Γ sınırında sürekli $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_\Gamma f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ nin k katlı kutup noktası ise

$$\int_\Gamma f(z)dz = \frac{1}{(k-1)!}\lim_{z\to z_0}\frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}}\left[f(z)(z-z_0)^k\right],$$

z_0 noktası $f(z)$ nin basit kutup noktası olduğunda ise

$$\int_\Gamma f(z)dz = \lim_{z\to z_0}\left[f(z)(z-z_0)\right]$$

dir.

Teorem (Maksimum Prensibi) 3.1.10 f, bir R bölgesinde analitik fonksiyon ve a, R içinde bir nokta olsun. $\forall z \in R$ için $|f(a)| \geq |f(z)|$ ise o halde, f bir sabit fonksiyondur.

Teorem (Liouville Teoremi) 3.1.11 $f(z)$ sınırlı ve tüm kompleks düzlemde analitik fonksiyon ise, o halde $f(z)$ bir sabit fonksiyondur.

Tanım 3.1.12

$$p_0(x)y'' + p_1(x)y' + p_2(x)y = f(x) \tag{3.1.1}$$

denklemi ve

$$\begin{aligned} \alpha_{11}y(a)+\alpha_{12}y'(a)+\beta_{11}y(b)+\beta_{12}y'(b)=0 \\ \alpha_{21}y(a)+\alpha_{22}y'(a)+\beta_{21}y(b)+\beta_{22}y'(b)=0 \end{aligned} \tag{3.1.2}$$

sınır koşulları verilsin.

$D=\{(x,t): a\le x\le b,\ a\le t\le b\}$ dikdörtgeninde aşağıdaki koşulları sağlayan $G(x,t)$ fonksiyonuna (3.1.1), (3.1.2) sınır değer probleminin *Green fonksiyonu* denir.

1. $G(x,t)$ fonksiyonu sabitleştirilmiş $t\in(a,b)$ için (a,t) ve (t,b) aralıklarında x e göre homojen (3.1.1) denklemini sağlar.

2. $G(x,t)$, $[a,b]$ aralığında süreklidir. $\forall x\in(a,b)$ ve $\forall t\in(a,b)$ için x e göre 1. mertebeden türevi $x=t$ noktasında sıçramalı süreksizliğe sahiptir;

$$G_x(t+0,t)-G_x(t-0,t)=\frac{1}{p_0(t)}.$$

3. $G(x,t)$ fonksiyonu (3.1.2) sınır koşullarını sağlar.

Tanım 3.1.13 L, $D(L)$ tanım kümesinde

$$L(y)\equiv -y''+q(x)y=\lambda y$$

$$U_\nu(y)=0,\ \nu=1,2$$

sınır değer problemini sağlayan lineer operatör olsun. Bu durumda, $Ly=\lambda y$ eşitliğini sağlayan $y(x)\ne 0$ fonksiyonu mevcut ise λ sayısına L operatörünün özdeğeri, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonu denir.

Tanım 3.1.14 λ_n değerleri L operatörünün özdeğerleri ve $y(x,\lambda_n)$ ler bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olmak üzere

$$\alpha_n=\int_a^b \left|y(x,\lambda_n)\right|^2 dx$$

sayısına L operatörünün normlaştırıcı sayısı denir.

Tanım 3.1.15 A ve B lineer diferansiyel operatörler ve E_1, E_2 lineer fonksiyon uzayları olmak üzere $X: E_1\to E_2$, E de tanımlı lineer tersinir operatör olsun. Eğer X operatörü aşağıdaki şartları sağlıyorsa X operatörüne *dönüşüm operatörü* denir:

i. X ve onun tersi X^{-1} operatörleri E uzayında süreklidir,

ii. $AX=XB$ yada $A=XBX^{-1}$ operatör denklemi sağlanır.

E, kendisi ve birinci türevi sürekli, kompleks değerli, $f(x)$, $0 \le x < \infty$ fonksiyonlarının bir uzayı olsun. E üzerinde topoloji, her sonlu aralıkta, fonksiyonların ve birinci türevlerinin düzgün yakınsaması ile tanımlansın.

$$A = -\frac{d^2}{dx^2} + q(x), \quad \mathrm{B} = -\frac{d^2}{dx^2} + r(x)$$

olsun, burada, $q(x)$ ve $r(x)$, $0 \le x < \infty$ iki sürekli kompleks değerli fonksiyondur.

E_1, aşağıdaki koşulu sağlayan $f(x)$ ler için E nin bir alt uzayı olsun:

$$f'(0) = h_1 f(0), \tag{3.1.3}$$

burada, h_1 keyfi sonlu kompleks bir sayıdır.

Benzer şekilde, E_2, aşağıdaki koşulu sağlayan $f(x)$ ler için E nin bir alt uzayı olsun:

$$f'(0) = h_2 f(0), \tag{3.1.4}$$

burada, h_2 keyfi sonlu kompleks bir sayıdır.

Teorem 3.1.17 E_1 den E_2 ye tanımlı $X = X_{A,B}$ dönüşüm operatörü aşağıdaki formda yazılabilir:

$$Xf(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t) f(t) dt, \tag{3.1.5}$$

burada, $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu,

$$K_{xx}(x,t) - q(x)K(x,t) = K_{tt}(x,t) - r(x)K(x,t), \tag{3.1.6}$$

$$K(x,x) = h_2 - h_1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left[q(s) - r(s)\right] ds, \tag{3.1.7}$$

$$\left[K_t(x,t) - h_1 K(x,t)\right]_{t=0} = 0. \tag{3.1.8}$$

probleminin çözümüdür.

Tersine, eğer $K(x,t)$ fonksiyonu (3.1.6)-(3.1.8) in çözümü ise, o halde (3.1.5) ile tanımlanan X, A, B operatör çiftleri için dönüşüm operatörüdür ve E_1 den E_2 ye tanımlıdır.

Teorem 3.1.16

$$e^{\alpha_0 \lambda} + a_1 e^{\alpha_1 \lambda} + ... + a_{p-1} e^{\alpha_{p-1}\lambda} + a_p = 0$$

α_s, $(s = 0,1,.., p-1)$ gerçel sayılar, $\alpha_s > \alpha_{s-1} > 0$, a_s, $(s = \overline{1, p})$ kompleks ve $a_p \neq 0$ ise bu denklemin kökleri $\lambda_n = \dfrac{2n\pi i}{\alpha_o} + \psi(n)$, $(n = 0, \pm 1, ...)$ dir. $\psi(n)$ sınırlı kompleks değerli fonksiyon, $\sup_n |\psi(n)| < \infty$ dur.

3.2 İKİNCİ MERTEBEDEN KISMİ TÜREVLİ DENKLEMLERİN SINIFLANDIRILMASI

Tanım 3.2.1 İki bağımsız değişkenli ikinci basamaktan lineer kısmi diferansiyel denklem:

$$A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy} + D(x,y)u_x + E(x,y)u_y + F(x,y)u = G(x,y)$$

biçimindedir. $A(x,y)u_{xx} + B(x,y)u_{xy} + C(x,y)u_{yy}$ terimlerinin toplamına *esas kısım* denir. Denklemin u çözümünün özelliklerini bu kısım belirler. Belirli bir $(x_0, y_0) \in \Omega$ noktası için $\Delta(x_0, y_0) = B^2(x_0, y_0) - 4A(x_0, y_0)C(x_0, y_0)$ diskriminant olmak üzere;

- $\Delta(x_0, y_0) > 0$ ise denklem $(x_0, y_0) \in \Omega$ noktasında hiperbolik,
- $\Delta(x_0, y_0) = 0$ ise denklem $(x_0, y_0) \in \Omega$ noktasında parabolik,
- $\Delta(x_0, y_0) < 0$ ise denklem $(x_0, y_0) \in \Omega$ noktasında eliptiktir.

Şimdi bu tür denklemlerin fiziksel anlamlarını yazalım.

Hiperbolik Denklem 3.2.2

Türdeş olmayan malzemeden oluşan esnek telin titreşiminin matematiksel modeli aşağıdaki sınır değer problemi ile verilir.

$$\rho(x)u_{tt} = (k(x)u_x)_x + F(x,t),\ (x,t) \in \Omega = (0,l) \times (0,+\infty) \subset \mathbb{R}^2,$$

$$u(x,0) = \phi_0(x),\ u_t(x,0) = \phi_1(x),\ x \in (0,l),$$

$$(k(x)u_x - v_0 u)_{x=0} = \mu_0(t),\ (k(x)u_x + v_1 u)_{x=l} = \mu_1(t),\ t > 0.$$

$\rho(x)>0$ ve $k(x)>0$ fonksiyonları sırasıyla malzemenin yoğunluğunu ve sertliğini ifade eder. $\mu_0(t)$ ve $\mu_1(t)$ fonksiyonları, telin, sırasıyla $x=0$ ve $x=l$ uçlarındaki yer değişmesini belirler,buradaki $v_i>0$ sabitleri de telin ucundaki kenetlenmenin sabitliğini ifade eder.

Parabolik Denklem 3.2.3

Türdeş bir çubuktaki ısı yayılımı sürecinin fiziksel modeli aşağıdaki sınır değer problemi ile verilir.

$$u_t=ku_{xx},\ \Omega:=\left\{(x,t)\in\mathbb{R}^2:0<x<l\right\},$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ x\in[0,l],$$

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0,\ t\geq 0.$$

Verilen türdeş sınır koşulları çubuğun uçlarında ısının hep sıfıra eşit olarak tutulmasını gerektirir. O halde başlangıçta $\varphi(x):=u(x,0)$ olarak verilen ısının, belli bir zamandan sonra $\varphi(x)$ den sıfıra doğru azalacağını beklemek doğaldır.

Eliptik Denklem 3.2.4

Dairesel levhada kararlaşmış ısı iletiminin matematiksel modeli aşağıdaki sınır değer problemi ile verilir.

$$\frac{\partial^2 u}{\partial r^2}+\frac{1}{r}\frac{\partial u}{\partial r}+\frac{1}{r^2}\frac{\partial^2 u}{\partial\varphi^2}=0,\ (r,\varphi)\in\Omega,$$

$$u(r,\varphi)=f(\varphi),\ \varphi\in[0,2\pi).$$

Bu problem, $\Omega:=\left\{(r,\varphi)\in\mathbb{R}^2:0<r<r_0,\ \varphi\in[0,2\pi)\right\}$ bölgesinde kutupsal koordinatlarla verilmiş, Laplace operatörü için Dirichlet problemidir.

3.3 SONLU ARALIK ÜZERİNDE STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ

3.3.1 Operatörün Tanımı ve Özellikleri

Aşağıdaki $L=L(q(x),h,H)$ sınır değer problemi ele alınsın:

$$ly:=-y''+q(x)y=\lambda y,\quad 0<x<\pi, \tag{3.3.1.1}$$

$$U(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \quad V(y) := y'(\pi) + Hy(\pi) = 0. \tag{3.3.1.2}$$

Burada λ spektral parametre, $q(x)$, h ve H reel ve $q(x) \in L_2(0,\pi)$ dir. q potansiyel olarak adlandırılır. l operatörü Sturm-Liouville operatörü olarak tanımlanır.

Burada (3.3.1.1), (3.3.1.2) sınır değer probleminin trivial olmayan çözümleri incelenecektir.

$C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$, $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları (3.3.1.1) denkleminin sırasıyla, aşağıdaki koşulları sağlayan çözümleri olsun:

$$C(0,\lambda) = 1, \quad C'(0,\lambda) = 0, \quad \mathrm{S}(0,\lambda) = 0, \quad \mathrm{S}'(0,\lambda) = 1,$$

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \quad \varphi'(0,\lambda) = h, \quad \psi(\pi,\lambda) = 1, \quad \psi'(\pi,\lambda) = -H.$$

Her sabitleştirilmiş x için, $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$, $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları λ nın tam fonksiyonlarıdır. Açıktır ki,

$$U(\varphi) := \varphi'(0,\lambda) - h\varphi(0,\lambda) = 0, \quad V(\psi) := \psi'(\pi,\lambda) + H\psi(\pi,\lambda) = 0. \tag{3.3.1.3}$$

$$\Delta(\lambda) = < \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) > \tag{3.3.1.4}$$

olarak işaretleyelim, burada

$$< y(x), z(x) > := y(x)z'(x) - y'(x)z(x)$$

y ve z nin Wronskienidir. Jakobi-Liouville formülünden dolayı Wronskien x ten bağımsızdır. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu, L nin karakteristik fonksiyonu olarak adlandırılır. (3.3.1.4) formülünde $x = 0$ ve $x = \pi$ yazıldığında

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi)$$

elde edilir. $\Delta(\lambda)$, λ nın tam fonksiyonudur ve $\{\lambda_n\}$ sıfırlarının en fazla sayılabilir bir kümesine sahiptir.

Teorem 3.3.1.1 Karakteristik fonksiyonun $\{\lambda_n\}$ sıfırları ile L sınır değer probleminin özdeğerleri çakışıktır. $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları özfonksiyonlardır ve öyle bir $\{\beta_n\}$ dizisi vardır ki;

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n \varphi(x,\lambda_n), \quad \beta_n \neq 0, \tag{3.3.1.5}$$

eşitliği sağlanır.

$\{\alpha_n\}$ sayıları normlaştırıcı sayılar olarak adlandırılır:

$$\alpha_n := \int_0^{\pi} \left|\varphi(x,\lambda_n)\right|^2 dx, \tag{3.3.1.6}$$

ve $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ sayıları L nin *spektral verileri* olarak adlandırılır.

Lemma 3.3.1.2 $|\rho| \to \infty$ için , $x \in [0,\pi]$ e göre düzgün olarak, aşağıdaki asimptotik formüller sağlanır

$$\left.\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) &= \cos\rho x + O\left(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau| x)\right) = O\left(\exp(|\tau| x)\right), \\ \varphi'(x,\lambda) &= -\rho\sin\rho x + O\left(\exp(|\tau| x)\right) = O\left(|\rho|\exp(|\tau| x)\right), \end{aligned}\right\} \tag{3.3.1.7}$$

$$\left.\begin{aligned} \psi(x,\lambda) &= \cos\rho(\pi - x) + O\left(\frac{1}{|\rho|}\exp(|\tau|(\pi - x))\right) = O\left(\exp(|\tau|(\pi - x))\right), \\ \psi'(x,\lambda) &= \rho\sin\rho(\pi - x) + O\left(\exp(|\tau|(\pi - x))\right) = O\left(|\rho|\exp(|\tau|(\pi - x))\right), \end{aligned}\right\} \tag{3.3.1.8}$$

burada $\lambda = \rho^2, \tau = \operatorname{Im}\rho$.

Teorem 3.3.1.3 L sınır değer problemi sayılabilir $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ özdeğerler kümesine sahiptir. $n \geq 0$ için,

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{\omega}{\pi n} + \frac{K_n}{n}, \quad \{K_n\} \in l_2, \tag{3.3.1.9}$$

burada

$$\omega = h + H + \frac{1}{2}\int_0^{\pi} q(t)dt.$$

3.3.2 Özfonksiyonların Özellikleri

Teorem (Ayrışım Teoremi) 3.3.2.1

i. L sınır değer probleminin $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonlar sistemi $L_2(0,\pi)$ de tamdır.

ii. $f(x),\ x \in [0,\pi]$ mutlak sürekli fonksiyon olsun. O halde,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \varphi(x,\lambda_n), \quad a_n = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi} f(t)\varphi(t,\lambda_n)dt, \tag{3.3.2.1}$$

ve seri $\left[0,\pi\right]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

iii. $f(x)\in L_2\left(0,\pi\right)$ için (3.3.2.1) serisi $L_2(0,\pi)$ de yakınsaktır, ve

$$\int_0^{\pi}\left|f(x)\right|^2 dx=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n\left|a_n\right|^2 \qquad \text{(Parseval eşitliği).} \tag{3.3.2.2}$$

3.3.3 Dönüşüm Operatörleri

Teorem 3.3.3.1 (3.3.1.1) denkleminin $C(0,\lambda)=1,\ C'(0,\lambda)=0$ koşullarını sağlayan çözümü $C\left(x,\lambda\right)$ için aşağıdaki gösterim sağlanır:

$$C\left(x,\lambda\right)=\cos\rho x+\int_0^x K\left(x,t\right)\cos\rho t dt,\quad \lambda=\rho^2, \tag{3.3.3.1}$$

burada $K\left(x,t\right)$ reel sürekli fonksiyon ve

$$K\left(x,x\right)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt. \tag{3.3.3.2}$$

Teorem 3.3.3.2 (3.3.1.1) denkleminin, sırasıyla, $\mathrm{S}(0,\lambda)=0,\ \mathrm{S}'(0,\lambda)=1$ ve $\varphi(0,\lambda)=1,\ \varphi'(0,\lambda)=h$ koşullarını sağlayan $S\left(x,\lambda\right)$ ve $\varphi\left(x,\lambda\right)$ çözümleri için aşağıdaki gösterimler sağlanır:

$$S\left(x,\lambda\right)=\frac{\sin\rho x}{\rho}+\int_0^x P\left(x,t\right)\frac{\sin\rho t}{\rho}dt, \tag{3.3.3.3}$$

$$\varphi\left(x,\lambda\right)=\cos\rho x+\int_0^x G\left(x,t\right)\cos\rho t dt, \tag{3.3.3.4}$$

burada $P\left(x,\lambda\right)$ ve $G\left(x,\lambda\right)$ fonksiyonları $\int_0^x q(t)dt$ ile aynı düzgünlükte reel sürekli fonksiyonlardır ve

$$G\left(x,x\right)=h+\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt, \tag{3.3.3.5}$$

$$P\left(x,x\right)=\frac{1}{2}\int_0^x q(t)dt. \tag{3.3.3.6}$$

3.3.4 Teklik Teoremleri ve Weyl Fonksiyonu

Bu bölümde, Sturm-Liouville operatörleri için spektral analizin ters problemleri ele alınmıştır. Bu ters problemlerin farklı varyasyonları verilmiş ve bunlara karşılık gelen teklik teoremleri ispatlanmıştır. Verilen spektral karakteristiklere göre operatörü tek türlü belirlemek için üç teorem verilmiştir.

Ters Problem 3.3.4.1 Verilen $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ spektral verileri, $q(x)$ potansiyelini ve sınır koşullarının h ve H katsayılarını inşa eder.

Teorem 3.3.4.2 Eğer $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n,\ n \geq 0,$ ise o halde $L = \tilde{L}$. Yani $q(x) = \tilde{q}(x),\ x \in (0, \pi),\ h = \tilde{h},\ H = \tilde{H}$. Böylece, $\{\lambda_n, \alpha_n\}_{n\geq 0}$ spektral verileri, potansiyeli ve sınır koşullarının katsayılarını birebir olarak belirler.

Ters Problem 3.3.4.3 Verilen $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ spektral verileri, $q(x)$ potansiyelini ve sınır koşullarının h ve H katsayılarını inşa eder. (Burada $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$, L sınır değer probleminin $H = 0$ için özdeğerleridir.)

Teorem 3.3.4.4 Eğer $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ve $\mu_n = \tilde{\mu}_n,\ n \geq 0,$ ise o halde $L = \tilde{L}$. Yani $q(x) = \tilde{q}(x),\ x \in (0, \pi),\ h = \tilde{h},\ H = \tilde{H}$. Böylece, $\{\lambda_n, \mu_n\}_{n\geq 0}$ spektral verileri potansiyeli ve sınır koşullarının katsayılarını birebir olarak belirler.

Ters Problem 3.3.4.5 Verilen $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$ spektral verileri $q(x)$ potansiyelini ve sınır koşullarının h ve H katsayılarını inşa eder. (Burada $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$, L sınır değer probleminin $h = 0$ için özdeğerleridir.)

Teorem 3.3.4.6 Eğer $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ve $\lambda_n^0 = \tilde{\lambda}_n^0,\ n \geq 0,$ ise o halde $L = \tilde{L}$. Yani $q(x) = \tilde{q}(x),\ x \in (0, \pi),\ h = \tilde{h},\ H = \tilde{H}$. Böylece, $\{\lambda_n, \lambda_n^0\}_{n\geq 0}$ spektral verileri potansiyeli ve sınır koşullarının katsayılarını birebir olarak belirler.

Weyl Fonksiyonu: $\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.2.1.1) denkleminin $U(\Phi)=1,\ V(\Phi)=0$ koşulları altındaki çözümü olsun. $M(\lambda):=\Phi(0,\lambda)$ olarak işaretlensin. $M(\lambda)$ ve $\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonları L sınır değer problemi için sırasıyla Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu olarak adlandırılır. Weyl fonksiyonu ilk olarak yarı eksen durumunda *H. Weyl* tarafından tanımlanmıştır. Açıktır ki,

$$\Phi(x,\lambda)=-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=S(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda), \tag{3.3.4.1}$$

$$M(\lambda)=-\frac{\Delta^0(\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{3.3.4.2}$$

$$\langle\varphi(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle\equiv 1, \tag{3.3.4.3}$$

burada $\Delta^0(\lambda)$, $h=0$ durumunda (3.3.1.1), (3.3.1.2) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonudur. Böylece, Weyl fonksiyonu $\lambda=\lambda_n,\ n\geq 0$ noktalarında basit kutup noktaları ile meromorfik fonksiyondur.

Teorem 3.3.4.2 Aşağıdaki gösterim doğrudur:

$$M(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}. \tag{3.3.4.4}$$

Teorem 3.3.4.3 Eğer $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise, o halde $L=\tilde{L}$ dir. Böylece, Weyl fonksiyonu, operatörü birebir olarak belirler.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 ISI DENKLEMİ İÇİN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİ

4.1.1 Probleme Giriş

Aşağıdaki ısı denklemi ve sınır koşullarından oluşan difüzyon problemini ele alalım.

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-q(x)u,\ 0<x<\pi,\ t>0, \tag{4.1.1.1}$$

$$u_x(0,t)=0,\ u(\pi,t)=0,\ t\geq 0, \tag{4.1.1.2}$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ 0\le x\le \pi, \tag{4.1.1.3}$$

burada $q(x)\in L_2(0,\pi)$ reel değerli fonksiyon, $\rho(x)$ parçalı sürekli fonksiyon

$$\rho(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le a,\\ \alpha^2, & a<x\le \pi,\end{cases} \tag{4.1.1.4}$$

$u(x,t),\ \varphi(x)$ fonksiyonları $D=\{(x,t):0<x<\pi, t>0\}$ bölgesinde sürekli türevlenebilir fonksiyonlardır.

Tanım 4.1.1.1 Aşağıdaki koşullarını sağlayan çözüme (4.1.1.1)-(4.1.1.4) sınır değer probleminin klasik çözümü denir:

1. $\bar{D}=\{(x,t):0\le x\le \pi, t\ge 0\}$ bölgesinde süreklidir,
2. D bölgesinde x ve t ye göre 2. mertebeden sürekli türevlere sahiptir,
3. (4.1.1.1) denklemi (4.1.1.2) sınır ve (4.1.1.3) başlangıç koşullarını sağlar.

4.1.2 Isı Problemine Fourier Metodunun Uygulanması ve Sturm-Liouville Problemi

(4.1.1.1)-(4.1.1.4) problemini çözmek için Fourier metodu kullanılır. (4.1.1.1) denkleminin (4.1.1.2) ve (4.1.1.3) koşullarını sağlayan çözümü

$$u(x,t)=y(x)g(t) \tag{4.1.2.1}$$

biçiminde aransın. (4.1.2.1) ifadesi (4.1.1.1) denkleminde yerine yazıldığında

$$\frac{y''(x)}{\rho(x)y(x)}-\frac{q(x)}{\rho(x)}=\frac{g'(t)}{g(t)},$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin sağ tarafı sadece t ye sol tarafı ise sadece x e bağlı ve t ile x birbirine bağlı olmayan bağımsız değişkenler olduğundan eşitliğin her iki tarafı *ayrılma sabiti* denilen aynı bir sabite eşittir. O halde,

$$\frac{y''(x)}{\rho(x)y(x)}-\frac{q(x)}{\rho(x)}=\frac{g'(t)}{g(t)}=-\lambda^2$$

olsun. Bu son eşitlikten

$$-y''(x)+q(x)y(x)=\lambda^2\rho(x)y(x), \tag{4.1.2.2}$$

$$g'(t)+\lambda^2 g(t)=0, \tag{4.1.2.3}$$

denklemleri elde edilir. $u(x,t)$ çözümü (4.1.1.2) koşullarını sağlayacağından;

$$y'(0)=y(\pi)=0 \tag{4.1.2.4}$$

elde edilir. Böylece, (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır ve başlangıç koşullarını sağlayan sıfırdan farklı $u(x,t)$ çözümünü bulma problemi (4.1.2.2), (4.1.2.4) Sturm-Liouville probleminin sıfırdan farklı $y(x)$ özfonksiyonlarını bulma problemine indirgenir.

Şimdi, (4.1.2.2), (4.1.2.4) süreksiz katsayılı Sturm-Liouville problemini inceleyelim.

4.2 SÜREKSİZ KATSAYILI STURM-LİOUVİLLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS SPEKTRAL PROBLEM

4.2.1 Probleme Giriş

E. N. Akhmedova [22] da gösterilmiştir ki; tüm λ lar için

$$e(x,\lambda)=e_0(x,\lambda)+\int_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} K(x,t)e^{i\lambda t}dt \tag{4.2.1.1}$$

fonksiyonu (4.1.2.2) denkleminin $e(0,\lambda)=1,\ e'(0,\lambda)=i\lambda$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümüdür. Burada, $\mu^{\pm}(x)=\pm x\sqrt{\rho(x)}+a(1\mp\sqrt{\rho(x)})$, $K(x,.)\in L_1\left(-\mu^+(x),\mu^+(x)\right)$ ve

$$e_0(x,\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^-(x)} \tag{4.2.1.2}$$

fonksiyonu $q(x)\equiv 0$ durumunda (4.1.2.2) denkleminin $e(0,\lambda)=1,\ e'(0,\lambda)=i\lambda$ koşullarını sağlayan çözümüdür. $K(x,.)\in L_1\left(-\mu^+(x),\mu^+(x)\right)$ çekirdek fonksiyonu aşağıdaki özelliği sağlar:

$$\frac{d}{dx}K\left(x,\mu^+(x)\right)=\frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)q(x). \tag{4.2.1.3}$$

(4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin sıfırdan farklı çözümlerine uygun λ^2 sayılarına problemin özdeğerleri, bu özdeğerlere karşılık gelen sıfırdan farklı $y(x,\lambda)$ çözümlerine problemin özfonksiyonları denir.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin, sırasıyla,

$$\varphi(0,\lambda)=1,\ \varphi'(0,\lambda)=0 \tag{4.2.1.4}$$

ve

$$\psi(\pi,\lambda)=0,\ \ \psi'(\pi,\lambda)=1 \tag{4.2.1.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

$$\Delta(\lambda)=\langle\varphi(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\rangle \tag{4.2.1.6}$$

olarak işaretleyelim.

Burada

$$\langle y(x),z(x)\rangle := y(x)z'(x)-y'(x)z(x)$$

y ve z fonksiyonlarının Wronskiyenleridir.

Lemma 4.2.1.1 $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının Wronskiyenleri x e bağlı değildir**.**

İspat: $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları (4.1.2.2) denkleminin çözümleri olduğundan

$$-\varphi''(x,\lambda)+q(x)\varphi(x,\lambda)=\lambda^2\rho(x)\varphi(x,\lambda),$$

$$-\psi''(x,\lambda)+q(x)\psi(x,\lambda)=\lambda^2\rho(x)\psi(x,\lambda)$$

yazabiliriz.

$$\frac{d}{dx}\left\{\langle\varphi(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\rangle\right\}=\varphi(x,\lambda)\psi''(x,\lambda)-\varphi''(x,\lambda)\psi(x,\lambda)=$$

$$=\left[q(x)-\lambda^2\rho(x)\right]\psi(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)-\left[q(x)-\lambda^2\rho(x)\right]\varphi(x,\lambda)\psi(x,\lambda)=0.$$

Böylece Wronskiyenin x e bağlı olmadığı elde edilir. □

$\Delta(\lambda)$, (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin *karakteristik fonksiyonu* olarak adlandırılır. $\Delta(\lambda)$ x ten bağımsız olduğundan (4.2.1.6) formülünde x yerine sırasıyla $x=0$ ve $x=\pi$ yazılırsa

$$\Delta(\lambda)=\varphi(\pi,\lambda)=\psi'(0,\lambda) \tag{4.2.1.7}$$

elde edilir. $\Delta(\lambda)$, λ nın tam fonksiyonudur ve $\{\lambda_n\}$ sıfırlar kümesi sayılabilirden fazla değildir.

4.2.2 (4.1.2.2), (4.1.2.4) Sınır Değer Probleminin Özdeğer ve Özfonksiyonlarının Özellikleri

Lemma 4.2.2.1 $\lambda_1\neq\lambda_2$ farklı özdeğerlere karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $y(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları $L_{2,\rho}(0,\pi)$ de ortogonaldir.

İspat: $y(x,\lambda_1)$ ve $y(x,\lambda_2)$ fonksiyonları (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin özfonksiyonları olduğundan

$$-y''(x,\lambda_1)+q(x)y(x,\lambda_1)=\lambda_1^2\rho(x)y(x,\lambda_1),$$
$$-y''(x,\lambda_2)+q(x)y(x,\lambda_2)=\lambda_2^2\rho(x)y(x,\lambda_2)$$

yazabiliriz. Sırasıyla, bu eşitlikleri $y(x,\lambda_2)$ ve $-y(x,\lambda_1)$ fonksiyonlarıyla çarpar, taraf tarafa toplarsak;

$$\frac{d}{dx}\left\{\left\langle y(x,\lambda_2),y(x,\lambda_1)\right\rangle\right\}=\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\rho(x)y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)$$

elde ederiz. (4.1.2.4) sınır koşullarını göz önüne alarak son eşitliği 0 dan π ye integrallersek

$$\left(\lambda_1^2-\lambda_2^2\right)\int_0^\pi \rho(x)y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx=0$$

buluruz. $\lambda_1\neq\lambda_2$ olduğundan,

$$\int_0^\pi \rho(x)y(x,\lambda_1)y(x,\lambda_2)dx=0.$$

İspat tamamlanır. □

Lemma 4.2.2.2 (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat Aksini kabul edelim. Yani, $(\lambda^0)^2=u+iv,\ v\neq 0$, $y^0(x,\lambda^0)\neq 0$ özfonksiyonuna karşılık gelen bir kompleks özdeğer olsun. $q(x)$ ve $\rho(x)$ reel değerli fonksiyonlar olduğundan $(\bar{\lambda}^0)^2=u-iv$, $\overline{y^0(x,\lambda^0)}$ özfonksiyonuna karşılık gelen özdeğer olacaktır. $(\lambda^0)^2\neq(\bar{\lambda}^0)^2$ olduğundan Lemma 4.2.2.1 den

$$\left\|y^0\right\|_{L_{2,\rho}}^2=\int_0^\pi \rho(x)y^0(x,\lambda^0)\overline{y^0(x,\lambda^0)}dx=0$$

elde edilir. Ancak bu $y^0(x,\lambda^0)\neq 0$ olmasıyla çelişir. O halde kabulümüz yanlıştır. (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir. □

Ayrıca bu özdeğerlere karşılık gelen $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ özfonksiyonları da reeldir.

Lemma 4.2.2.3 $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonun λ_n sıfırlarının karesi ile (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin λ_n^2 özdeğerleri çakışıktır. $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları özfonksiyonlardır ve öyle bir β_n dizisi vardır ki;

$$\psi(x,\lambda_n) = \beta_n \varphi(x,\lambda_n), \ \beta_n \neq 0. \qquad (4.2.2.1)$$

İspat: 1) λ_0, $\Delta(\lambda)$ nın bir sıfırı olsun. O halde (4.2.1.7) den

$$\Delta(\lambda_0) = \begin{vmatrix} \varphi(x,\lambda_0) & \psi(x,\lambda_0) \\ \varphi'(x,\lambda_0) & \psi'(x,\lambda_0) \end{vmatrix} =$$

$$= \varphi(x,\lambda_0)\psi'(x,\lambda_0) - \varphi'(x,\lambda_0)\psi(x,\lambda_0) = 0$$

elde ederiz. Böylece $\varphi(x,\lambda_0)$, $\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır, o halde $\psi(x,\lambda_0) = \beta_0\varphi(x,\lambda_0)$, $\beta_0 \neq 0$ eşitliği sağlanır. $\varphi(x,\lambda_0)$, $\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları (4.1.2.6) sınır koşullarını sağlar. Dolayısıyla, λ_0^2 bir özdeğerdir ve $\varphi(x,\lambda_0)$, $\psi(x,\lambda_0)$, λ_0^2 ye karşılık gelen özfonksiyonlardır.

2) Diğer taraftan, λ_0^2, (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin bir özdeğeri ve $y_0(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0)$ bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. O halde, $y_0(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0)$ fonksiyonları (4.1.2.4) sınır koşullarını sağlayacağından, $y_0'(0,\lambda_0) = y_0(\pi,\lambda_0) = 0$ ve $y_0'(0,-\lambda_0) = y_0(\pi,-\lambda_0) = 0$ dır. Açıktır ki $y_0(0,\lambda_0) \neq 0$ ve $y_0(0,-\lambda_0) \neq 0$ dır (Aksi taktirde $y_0(0,\lambda_0) = 0$, $y_0'(0,\lambda_0) = 0$ olacağından bu $y_0(x,\lambda_0)$ fonksiyonunun özfonksiyon olmasıyla çelişir.) Genelliği bozmadan $y_0(0,\lambda_0) = 1$, $y_0(0,-\lambda_0) = 1$ alalım. Bu durumda $y_0(x,\lambda_0) \equiv \varphi(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0) \equiv \varphi(x,-\lambda_0)$ elde edilir. Böylece, (4.2.1.7) den

$$\Delta(\lambda_0) = \varphi(\pi,\lambda_0) = y_0(\pi,\lambda_0) = 0$$

$$\Delta(-\lambda_0) = \varphi(\pi,-\lambda_0) = y_0(\pi,-\lambda_0) = 0$$

bulunur. Benzer olarak, eğer $y_0(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0)$ fonksiyonları $y_0'(\pi,\lambda_0) = 1$, $y_0'(\pi,-\lambda_0) = 1$ koşullarını sağlıyorsa, $y_0(x,\lambda_0) \equiv \psi(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0) \equiv \psi(x,-\lambda_0)$ elde edilir.

Böylece, (4.2.1.7) den

$$\Delta(\lambda_0) = \psi'(0,\lambda_0) = \psi_0'(0,\lambda_0) = 0$$

$$\Delta(-\lambda_0)=\psi'(0,-\lambda_0)=\psi_0'(0,-\lambda_0)=0$$

bulunur. Bu durumda, biz her bir λ_n^2 özdeğerine sabit çarpan farkıyla yalnızca bir özfonksiyonun karşılık geldiğini ispatlamış oluruz. □

Dolayısıyla, $\{\lambda_n^2\}_{n\geq 1}$ ler (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin özdeğerleri ise, özdeğerler $\varphi(\pi,\lambda)=0$ denkleminin sıfırlarından bulunduğundan ve $\lambda_{-n}=-\lambda_n$ olduğundan

$$\varphi(x,\lambda_{-n})=\varphi(x,\lambda_n)\,,\ \psi(x,\lambda_{-n})=\psi(x,\lambda_n)$$

elde edilir

Tanım 4.2.2.4 (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin normlaştırıcı sayılarını aşağıdaki formda tanımlayalım:

$$\alpha_n:=\int_0^\pi \rho(x)\varphi^2(x,\lambda_n)dx.$$

Bu son eşitlikte $\lambda_{-n}=-\lambda_n$ yazarsak $\alpha_{-n}=\alpha_n$ buluruz.

Lemma 4.2.2.5 (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin özdeğerleri basittir ve

$$\dot{\Delta}(\lambda_n)=2\lambda_n\alpha_n\beta_n. \tag{4.2.2.2}$$

İspat: $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları bu problemin çözümleri olduğundan

$$-\varphi''(x,\lambda_n)+q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n^2\rho(x)\varphi(x,\lambda_n),$$

$$-\psi''(x,\lambda)+q(x)\psi(x,\lambda)=\lambda^2\rho(x)\psi(x,\lambda)$$

yazabiliriz. Bu denklemleri, sırasıyla, $\psi(x,\lambda)$ ve $-\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonlarıyla çarpar ve taraf tarafa toplarsak;

$$\frac{d}{dx}\{\langle\varphi(x,\lambda_n),\psi(x,\lambda)\rangle\}=\left(\lambda_n^2-\lambda^2\right)\rho(x)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)$$

elde ederiz. (4.1.2.4) koşullarını göz önüne alarak son eşitliği 0 dan π ye integrallersek

$$\int_0^\pi \rho(x)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)dx=\frac{\Delta(\lambda_n)-\Delta(\lambda)}{\lambda_n^2-\lambda^2}$$

buluruz. Lemma 4.2.2.3 te (4.2.2.1) eşitliğini kullanırsak, $\lambda\to\lambda_n$ iken

$$\dot{\Delta}(\lambda_n) = 2\lambda_n \alpha_n \beta_n$$

elde edilir. Burada, $\beta_n = \psi(0, \lambda_n)$. Böylece, $\dot{\Delta}(\lambda_n) \neq 0$ dır. □

4.2.3 $q(x) \equiv 0$ iken (4.1.2.2), (4.1.2.4) Sınır Değer Probleminin Özdeğerleri

$\varphi_0(x, \lambda)$, (4.1.2.2) denkleminin $q(x) \equiv 0$ durumunda (4.2.1.4) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Bu durumda $\varphi_0(x, \lambda)$ çözümü aşağıdaki formdadır:

$$\varphi_0(x,\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)\cos\lambda\mu^+(x) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)\cos\lambda\mu^-(x). \tag{4.2.3.1}$$

Lemma 4.2.2.3 te gösterdik ki, $\left(\lambda_n^0\right)^2$, $q(x) \equiv 0$ iken (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin özdeğerleri ise, λ_n^0 lar $\varphi_0(\pi,\lambda)=0$ denkleminin sıfırlarıdır. Yani, $\left(\lambda_n^0\right)^2$ özdeğerlerini bulmak için,

$$\Delta_0(\lambda) = \frac{1}{2}\left(1 + \frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda\mu^+(\pi) + \frac{1}{2}\left(1 - \frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda\mu^-(\pi) = 0,$$

$$\cos\lambda\mu^+(\pi) + \frac{\alpha - 1}{\alpha + 1}\cos\lambda\mu^-(\pi) = 0, \tag{4.2.3.2}$$

denkleminin sıfırlarını inceleyelim.

Teorem 3.1.16 yı kullanarak (4.2.3.2) denkleminin sıfırlarını incelediğimizde

$$\lambda_n^0 = \frac{\pi}{\mu^+(\pi)}\left(n - \frac{1}{2}\right) + h_n, \tag{4.2.3.3}$$

elde ederiz. Burada, $\sup\limits_n |h_n| < \infty$ dur.

Lemma 4.2.3.2 $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun kökleri ayrıktır. Yani,

$$\inf_{n \neq k} \left|\lambda_n^0 - \lambda_k^0\right| = \gamma > 0.$$

İspat Aksini kabul edelim. O halde, $\left\{\lambda_{k,1}^0\right\}$ ve $\left\{\lambda_{k,2}^0\right\}$ dizileri $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının iki dizisi olsun, öyle ki;

$$\lambda_{k,1}^0 \neq \lambda_{k,2}^0,\ \lambda_{k,1}^0 \to \infty,\ \lambda_{k,2}^0 \to \infty,$$

$$\lim_{k\to\infty}\left(\lambda_{k,1}^0 - \lambda_{k,2}^0\right) = 0.$$

Lemma 4.2.2.1 den $\varphi_0\left(x,\lambda_{k,1}^0\right)$ ve $\varphi_0\left(x,\lambda_{k,2}^0\right)$ fonksiyonları ortogonaldir:

$$0=\int_0^{\pi}\rho(x)\varphi_0\left(x,\lambda_{k,1}^0\right)\varphi_0\left(x,\lambda_{k,2}^0\right)dx=$$

$$=\int_0^{\pi}\rho(x)\varphi_0\left(x,\lambda_{k,1}^0\right)\left[\varphi_0\left(x,\lambda_{k,2}^0\right)-\varphi_0\left(x,\lambda_{k,1}^0\right)\right]dx+$$

$$+\int_0^{\pi}\rho(x)\varphi_0^2\left(x,\lambda_{k,1}^0\right)dx=$$

$$=I_k+\int_0^{\pi}\rho(x)\varphi_0^2\left(x,\lambda_{k,1}^0\right)dx\geq I_k+\int_0^{a}\rho(x)\varphi_0^2\left(x,\lambda_{k,1}^0\right)dx=$$

$$=I_k+\int_0^{a}\cos^2\left(\lambda_{k,1}^0x\right)dx=I_k+\frac{a}{2}+\frac{\sin\left(2a\lambda_{k,1}^0\right)}{4\lambda_{k,1}^0},$$

burada,

$$I_k=\int_0^{\pi}\rho(x)\varphi_0\left(x,\lambda_{k,1}^0\right)\left[\varphi_0\left(x,\lambda_{k,2}^0\right)-\varphi_0\left(x,\lambda_{k,1}^0\right)\right]dx$$

dir. Gösterelim ki $\lim\limits_{k\to\infty}I_k=0$ dir.

Gerçekten, (4.2.3.1) eşitliğinden ve

$$\left|\cos\lambda_{k,1}^0x-\cos\lambda_{k,2}^0x\right|\leq C\left|\lambda_{k,1}^0-\lambda_{k,2}^0\right|,\ (C>0),$$

değerlendirmesinden

$$\left|\varphi_0\left(\lambda_{k,1}^0x\right)-\varphi_0\left(\lambda_{k,2}^0x\right)\right|\leq C\left|\lambda_{k,1}^0-\lambda_{k,2}^0\right|,\ (C>0),$$

elde ederiz. Sonuç olarak, $x\in[0,\pi]$ için düzgün olarak $\lim\limits_{k\to\infty}\left(\varphi_0\left(\lambda_{k,1}^0x\right)-\varphi_0\left(\lambda_{k,2}^0x\right)\right)=0$ sağlanır. Şimdi, $0\geq I_k+\frac{a}{2}+\frac{\sin\left(2a\lambda_{k,1}^0\right)}{4\lambda_{k,1}^0}$ eşitsizliğinde $k\to\infty$ iken limite geçersek $0\geq\frac{a}{2}$ buluruz. Bu ise bir çelişkidir. O halde ispat tamamlanır. □

4.2.4 Özfonksiyonlar ve Özdeğerler için Asimptotik Formüller

(4.1.2.2) denkleminin çözümünün (4.2.1.1) gösterimini kullanarak $\varphi(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki integral gösterimi elde edilir:

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^{\mu^+(x)} A(x,t)\cos\lambda t dt, \tag{4.2.4.1}$$

burada, $A(x,t)=K(x,t)-K(x,-t)$, ve $K(x,.)\in L_1(\mu^+(x),-\mu^+(x))$ dir. $A(x,t)$ çekirdek fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $$A(\pi,\mu^+(\pi))=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)q(t)dt,$$

ii. $$A(\pi,\mu^-(\pi)+0)-A(\pi,\mu^-(\pi)-0)=\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)q(t)dt.$$

Lemma 4.2.4.1 $|\lambda|\to\infty$ için, $x\in[0,\pi]$ e göre düzgün olarak aşağıdaki asimptotik formüller sağlanır:

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda)&=\varphi_0(x,\lambda)+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(x)}}{|\lambda|}\right)=O\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(x)}\right),\\ \varphi'(x,\lambda)&=\varphi_0'(x,\lambda)+O\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(x)}\right)=O\left(|\lambda|e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(x)}\right),\end{aligned} \tag{4.2.4.2}$$

$$\begin{aligned}\psi(x,\lambda)&=\psi_0(x,\lambda)+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^+(\pi)-\mu^+(x)\right)}}{|\lambda|^2}\right)=O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^+(\pi)-\mu^+(x)\right)}}{|\lambda|}\right),\\ \psi'(x,\lambda)&=\psi_0'(x,\lambda)+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^+(\pi)-\mu^+(x)\right)}}{|\lambda|}\right)=O\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^+(\pi)-\mu^+(x)\right)}\right).\end{aligned} \tag{4.2.4.3}$$

İspat Keyfi sabitlerin değişimi metodunu kullanarak $\varphi(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki integral denklemi elde edilir:

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^{x} g(x,t;\lambda)q(t)\varphi(t,\lambda)dt, \tag{4.2.4.4}$$

burada,

$$g(x,t;\lambda)=\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}+\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\frac{\sin\lambda(\mu^+(x)-\mu^+(t))}{\lambda}+$$

$$+\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}-\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\frac{\sin\lambda(\mu^-(x)-\mu^-(t))}{\lambda} \tag{4.2.4.5}$$

ve $\varphi_0(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.2.3.1) de verilmiştir.

$$\sigma(\lambda):=\max_{0\le x\le\pi}\left(\left|\varphi(x,\lambda\right|e^{-|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}\right)$$

ile işaretleyelim.

$$\left|\sin\lambda\mu^+(x)\right|\le e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(x)},\ \left|\cos\lambda\mu^+(x)\right|\le e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(x)}$$

ve

$$\left|g(x,t;\lambda)\right|\le\frac{C}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^+(x)-\mu^+(t)\right)},$$

değerlendirmelerini kullanarak (4.2.4.4) denkleminden $|\lambda|\ge 1$ ve $x\in[0,\pi]$ için,

$$\left|\varphi(x,\lambda)\right|e^{-|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}\le C_1+\frac{C_2}{|\lambda|}\sigma(\lambda)\int_0^x\left|q(t)\right|dt,$$

elde ederiz ve sonuç olarak,

$$\sigma(\lambda)\le C_1+\frac{\tilde{C}_2}{|\lambda|}\sigma(\lambda)$$

buluruz. Yeterince büyük $|\lambda|$ lar için $\sigma(\lambda)=O(1)$ dir ve $\varphi(x,\lambda)=O\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(x)}\right)$ olduğu elde edilir. Bu eşitlikten ve $\left|g(x,t;\lambda)\right|\le\frac{C}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^+(x)-\mu^+(t)\right)}$ olmasından (4.2.4.4) denkleminden

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(x)}}{|\lambda|}\right)$$

olduğu hesaplanır. (4.2.4.4) denklemini diferansiyellersek

$$\varphi'(x,\lambda)=\varphi_0'(x,\lambda)+g(x,x;\lambda)q(x)\varphi(x,\lambda)+\int_0^x g_x'(x,t;\lambda)q(t)\varphi(t,\lambda)dt \tag{4.2.4.6}$$

buluruz. (4.2.4.5) eşitliğinde $x=0$ yazarsak $g(x,x;\lambda)=0$ buluruz ve (4.2.4.5) eşitliğininde x e göre türev alırsak

$$g_x'(x,t;\lambda)=\sqrt{\rho(x)}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}+\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\cos\lambda(\mu^+(x)-\mu^+(t))+$$

$$+\sqrt{\rho(x)}\,\frac{1}{2}\left(\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}-\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\cos\lambda(\mu^{-}(x)-\mu^{-}(t)) \qquad (4.2.4.7)$$

elde ederiz. $\varphi(x,\lambda)=O\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^{+}(x)}\right)$ eşitliğini (4.2.4.6) eşitliğinin sağ tarafında yerine yazarsak (4.2.4.2) değerlendirmelerini elde ederiz.

(4.2.4.3) eşitlikleri de benzer şekilde bulunur. □

Teorem 4.2.4.2 (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer problemi sayılabilir $\left\{\lambda_n^2\right\}_{n\geq 1}$ özdeğerler kümesine sahiptir:

$$\lambda_n=\lambda_n^0+\frac{d_n}{\lambda_n^0}+\frac{k_n}{n},\quad (\lambda_n\geq 0), \qquad (4.2.4.8)$$

burada, λ_n^0 lar

$$\Delta_0(\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda\mu^{+}(\pi)+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda\mu^{-}(\pi) \qquad (4.2.4.9)$$

fonksiyonunun sıfırları, $\left\{\lambda_n^0\right\}^2$, $q(x)\equiv 0$ iken (4.1.2.2), (4.1.2.4) probleminin özdeğerleri,

$$d_n=\frac{h^{+}\sin\lambda_n^0\mu^{+}(\pi)+h^{-}\sin\lambda_n^0\mu^{-}(\pi)}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\mu^{+}(\pi)\sin\lambda_n^0\mu^{+}(\pi)-\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\mu^{-}(\pi)\sin\lambda_n^0\mu^{-}(\pi)} \qquad (4.2.4.10)$$

sınırlı bir dizi ve $k_n\in l_2$ dir.

İspat $\Delta(\lambda)=\varphi(\pi,\lambda)$ (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu olduğundan

$$\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+\int_0^{\pi}g(\pi,t;\lambda)q(t)\varphi(t,\lambda)dt \qquad (4.2.4.11)$$

eşitliği sağlanır. (4.2.4.2) değerlendirmelerini bu son eşitlikte kullanırsak

$$\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+h^{+}\frac{\sin\lambda\mu^{+}(\pi)}{\lambda}+h^{-}\frac{\sin\lambda\mu^{-}(\pi)}{\lambda}+K_0(\lambda), \qquad (4.2.4.12)$$

bulunur. Burada,

$$h^{\pm}=\pm\frac{1}{4}\left(1\pm\frac{1}{\alpha}\right)\int_0^{a}q(t)dt+\frac{1}{4}(1\pm\alpha)\int_a^{\pi}q(t)dt \qquad (4.2.4.13)$$

ve

$$K_0(\lambda)=\frac{1}{4\lambda}(1+\alpha)\int_0^a \cos\lambda\left(2\mu^+(t)-\mu^+(\pi)\right)q(t)dt+$$

$$+\frac{1}{4\lambda}(1-\alpha)\int_0^a \cos\lambda\left(2\mu^+(t)-\mu^-(\pi)\right)q(t)dt+$$

$$+\frac{1}{4\lambda}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\int_a^\pi \cos\lambda\left(2\mu^+(t)-\mu^+(\pi)\right)q(t)dt+$$

$$+\frac{1}{4\lambda}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\int_a^\pi \cos\lambda\left(\mu^+(\pi)+\mu^-(t)-\mu^+(t)\right)q(t)dt+$$

$$+O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}}{|\lambda|^2}\right). \tag{4.2.4.14}$$

Şimdi $G_\delta=\left\{\lambda:\left|\lambda-\lambda_n^0\right|\geq\delta\right\}$ bölgesini işaretleyelim, burada $\delta<\frac{\gamma}{2}$ (bakınız Lemma 4.2.3.2) yeterince küçük pozitif sayıdır. Şimdi gösterelim ki;

$$\left|\Delta_0(\lambda)\right|\geq C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)},\ \lambda\in G_\delta,\ C_\delta>0. \tag{4.2.4.15}$$

Biliyoruz ki $\left|\cos\lambda\mu^+(\pi)\right|\geq C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)},\ \lambda\in G_\delta$ (G. Freiling ve V. Yurko [13], s.10) dir. O halde (4.2.4.9) eşitliğini kullanırsak (4.2.4.15) eşitsizliğini elde ederiz. Dahası (4.2.4.12) eşitliğinden

$$\left|\Delta(\lambda)\right|\geq \tilde{C}_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)},\ \lambda\in G_\delta,\ \tilde{C}_\delta>0. \tag{4.2.4.16}$$

buluruz. Diğer taraftan (4.2.4.12) den

$$\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)=O\left(\frac{e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}}{|\lambda|}\right),\ |\lambda|\to\infty \tag{4.2.4.17}$$

farkını elde ederiz. $\Gamma_n=\left\{\lambda:|\lambda|=\left|\lambda_n^0\right|+\frac{\gamma}{2}\right\}$ $(n=1,2,...)$ kontörünü düşünelim. Γ_n kontörleri sonsuz olarak genişlediğinde, yeterince büyük n ler için (4.2.4.15) ve (4.2.4.17) eşitsizliklerinden

$$\left|\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right|\leq\left|\Delta_0(\lambda)\right|,\ \lambda\in\Gamma_n \tag{4.2.4.18}$$

elde ederiz. Şimdi burada Rouche teoremini uygularsak, $\Delta_0(\lambda)$ nın sıfırlarının sayısı $\Delta(\lambda)=\left\{\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right\}+\Delta_0(\lambda)$ nın sıfırlarının sayısı ile çakışıktır. $\gamma_n(\delta)=\left\{\lambda:\left|\lambda-\lambda_n^0\right|\leq\delta\right\}$ çemberinde Rouche teoremini uygularsak, yeterince büyük n

ler için $\gamma_n(\delta)$ içinde $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun yalnızca bir λ_n sıfırı vardır. $\delta > 0$ nın keyfi olmasından

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \varepsilon_n,\ \varepsilon_n = o(1),\ n \to \infty \tag{4.2.4.19}$$

yazarız. (4.2.4.19) ifadesini (4.2.4.12) denkleminde yerine yazalım ve

$$\Delta_0\left(\lambda_n^0\right) = \frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda_n^0\mu^+\left(\pi\right) + \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\cos\lambda_n^0\mu^-\left(\pi\right)=0,$$

$$\sin\varepsilon_n\mu^+(\pi) \sim \varepsilon_n\mu^+(\pi),\ \cos\varepsilon_n\mu^+(\pi) \sim 1,\ n \to \infty$$

değerlendirmelerini kullanırsak

$$\varepsilon_n = \frac{d_n}{\lambda_n^0 + \varepsilon_n} + \frac{\varepsilon_n}{\lambda_n^0 + \varepsilon_n}\tilde{d}_n + \frac{\tilde{k}_n}{\lambda_n^0 + \varepsilon_n}, \tag{4.2.4.20}$$

burada,

$$d_n = \frac{h^+\sin\lambda_n^0\mu^+(\pi) + h^-\sin\lambda_n^0\mu^-(\pi)}{\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\mu^+(\pi)\sin\lambda_n^0\mu^+(\pi) - \frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\mu^-(\pi)\sin\lambda_n^0\mu^-(\pi)},$$

$\tilde{k}_n = k_0(\lambda_n^0 + \varepsilon_n)$ ve

$$\tilde{d}_n = \frac{h^+\mu^+(\pi)\cos\lambda_n^0\mu^+(\pi) + h^-\mu^-(\pi)\cos\lambda_n^0\mu^-(\pi)}{\frac{1}{2}(1+\frac{1}{\alpha})\mu^+(\pi)\sin\lambda_n^0\mu^+(\pi) + \frac{1}{2}(1-\frac{1}{\alpha})\mu^-(\pi)\sin\lambda_n^0\mu^-(\pi)}.$$

$\dfrac{1}{\lambda_n^0 + \varepsilon_n} = O\left(\dfrac{1}{n}\right),\ \dfrac{\varepsilon_n}{\lambda_n^0 + \varepsilon_n} = o\left(\dfrac{1}{n}\right),\ n \to \infty$ olduğundan, d_n ve $\tilde{d}_n$ dizileri sınırlı ve $k_n \in l_2$ dir ve (4.2.4.20) den elde ederiz ki;

$$\varepsilon_n = O\left(\frac{1}{n}\right),\ \ n \to \infty.$$

$n \to \infty$ iken (4.2.4.20) eşitliğini kullanarak daha kesin olarak elde ederiz ki;

$$\varepsilon_n = \frac{d_n}{\lambda_n^0} + \frac{k_n}{n},\ \ k_n \in l_2 \tag{4.2.4.21}$$

burada, $k_n = \dfrac{\mu^+(\pi)}{\pi}\tilde{k}_n + O\left(\dfrac{1}{n}\right),\ n \to \infty$ dir. Böylece ispat tamamlanmış olur. □

4.2.5 Spektral Ayrışım Formülü

Teorem 4.2.5.1

1. (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 1}$ özfonksiyonlar sistemi $L_{2,\rho}(0,\pi)$ uzayında tamdır;

2. Eğer $f(x)$, $[0,\pi]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon ve $f'(0)=f(\pi)=0$ ise, o halde

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(x,\lambda_n), \tag{4.2.5.1}$$

burada,

$$a_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi} f(t)\rho(t)\varphi(t,\lambda_n)dt, \tag{4.2.5.2}$$

ve (4.2.5.1) serisi $[0,\pi]$ de düzgün yakınsaktır;

3. $f(x)\in L_{2,\rho}(0,\pi)$ için (4.2.5.1) serisi $L_{2,\rho}(0,\pi)$ de yakınsaktır ve dahası Parseval eşitliği sağlanır:

$$\int_0^{\pi} |f(x)|^2 \rho(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\alpha_n |a_n|^2. \tag{4.2.5.3}$$

İspat $\psi(x,\lambda)$**,** (4.1.2.2) denkleminin (4.2.1.5) sınır koşullarını sağlayan çözümü olsun.

$$G(x,t;\lambda)=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\psi(x,\lambda)\varphi(t,\lambda), & x\geq t\\ \varphi(x,\lambda)\psi(t,\lambda), & t\geq x\end{cases} \tag{4.2.5.4}$$

fonksiyonunu işaretleyelim ve

$$Y(x,\lambda)=\int_0^{\pi}\rho(t)f(t)G(x,t;\lambda)dt \tag{4.2.5.5}$$

fonksiyonunu düşünelim. $G(x,t;\lambda)$ fonksiyonu (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer problemi için *Green fonksiyonu* olarak adlandırılır. $G(x,t;\lambda)$ ele alınan Sturm-Liouville operatörü için ters operatörün çekirdeğidir. Yani, $Y(x,\lambda)$ fonksiyonu,

$$\begin{gathered}-Y''(x,\lambda)+q(x)Y(x,\lambda)=\lambda^2\rho(x)Y(x,\lambda)-f(x)\rho(x),\\ Y'(0,\lambda)=Y(\pi,\lambda)=0,\end{gathered} \tag{4.2.5.6}$$

sınır değer probleminin çözümüdür.

(4.2.2.2) eşitliğini kullanarak, $Y(x,\lambda)$ fonksiyonun rezidüsünü hesaplayalım:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda) = -\frac{1}{2\alpha_n\lambda_n}\varphi(x,\lambda_n)\int_0^{\pi}\rho(t)f(t)\varphi(t,\lambda_n)dt. \tag{4.2.5.7}$$

$f(x)\in L_{2,\rho}(0,\pi)$ için kabul edelim ki

$$\int_0^{\pi}\rho(t)f(t)\varphi(t,\lambda_n)dt = 0,\quad n=1,2,3,...$$

dir. O halde (4.2.5.7) den $\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} Y(x,\lambda)=0$ dır ve sonuç olarak sabitleştirilmiş $x\in[0,\pi]$ için $Y(x,\lambda)$ fonksiyonu λ nın tam fonksiyonudur. Diğer taraftan, (4.2.5.5) eşitliği içinde (4.2.4.2), (4.2.4.3) ve (4.2.4.16) değerlendirmelerini yerine yazarsak, $\delta>0$ ve yeterince büyük $\lambda^*>0$ için

$$|Y(x,\lambda)|\le\frac{C_\delta}{|\lambda|},\quad \lambda\in G_\delta,\quad |\lambda|\ge\lambda^*$$

elde ederiz. Analitik fonksiyonların modülü için maksimum prensibini ve Liouville teoremini kullanırsak $Y(x,\lambda)\equiv 0$ olduğunu hesaplarız. Bu son eşitliği (4.2.5.5) denkleminde yerine yazarsak $f(x)=0$ buluruz. Böylece teoremin birinci kısmı ispatlanmış olur.

Şimdi $f(x)\in AC[0,\pi]$ olsun. $Y(x,\lambda)$ fonksiyonunu aşağıdaki forma dönüştürelim:

$$Y(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\left(-\varphi''(t,\lambda)+q(t)\varphi(t,\lambda)\right)f(t)dt+\right.$$
$$\left.+\varphi(x,\lambda)\int_x^{\pi}\left(-\psi''(t,\lambda)+q(t)\psi(t,\lambda)\right)f(t)dt\right\}.$$

Son eşitlikte ikinci mertebeden türevlerin olduğu integrallerde kısmi integralleme yapalım ve $f'(0)=f(\pi)=0$ sınır koşullarını göz önüne alırsak;

$$Y(x,\lambda)=\frac{f(x)}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}\left(Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\right), \tag{4.2.5.8}$$

elde ederiz. Burada, $g(t)=f'(t)$ olmak üzere;

$$Z_1(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\psi(x,\lambda)\int_0^x g(t)\varphi'(t,\lambda)dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi g(t)\psi'(t,\lambda)dt\right],$$

$$Z_2(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\psi(x,\lambda)\int_0^x \rho(t)f(t)\varphi(t,\lambda)dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \rho(t)f(t)\psi(t,\lambda)dt\right].$$

Şimdi aşağıdaki kontür integralini düşünelim:

$$I_N(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\lambda Y(x,\lambda)d\lambda,$$

burada, $\Gamma_N=\left\{\lambda:|\lambda|=\left|\lambda_N^0\right|+\frac{\gamma}{2}\right\}$, doğrultusu saat yönünde olan bir kontürdür. Rezidü teoreminden,

$$I_N(x)=2\sum_{n=1}^{N}\underset{\lambda=\lambda_n}{\operatorname{Res}}\lambda Y(x,\lambda)=\sum_{n=1}^{N}a_n\varphi(x,\lambda_n), \qquad (4.2.5.9)$$

elde ederiz. Burada,

$$a_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \rho(t)f(t)\varphi(t,\lambda_n)dt.$$

Diğer taraftan (4.2.5.8) eşitliğini burada kullanırsak;

$$I_N(x)=f(x)-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{1}{\lambda}\left(Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\right)d\lambda \qquad (4.2.5.10)$$

elde ederiz. (4.2.5.9) ve (4.2.5.10) denklemlerini karşılaştırırsak

$$f(x)=\sum_{n=1}^{N}a_n\varphi(x,\lambda_n)+\xi_N(x),$$

buluruz, burada

$$\xi_N(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{1}{\lambda}\left(Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\right)d\lambda.$$

şeklinde tanımlanır.

Şimdi teoremin ikinci kısmının ispatını tamamlamak için

$$\lim_{N\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}\left|\xi_N(x)\right|=0 \qquad (4.2.5.11)$$

olduğunu göstermek yeterlidir.

Bunun için (4.2.4.2), (4.2.4.3) ve (4.2.4.16) asimptotik ifadelerini kullanırsak ve sabit $\delta>0$ ve yeterince büyük $\lambda^*>0$ için,

$$\max_{0\le x\le \pi}\left|Z_2(x,\lambda)\right| \le \frac{C_2}{|\lambda|},\ \ \lambda\in G_\delta,\ \ |\lambda|\ge \lambda^*,\ C_2>0. \tag{4.2.5.12}$$

Gösterelim ki;

$$\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \lambda\in G_\delta}}\max_{0\le x\le\pi}\left|Z_1(x,\lambda)\right| = 0. \tag{4.2.5.13}$$

İlk olarak, $g(t)$ fonksiyonunun $[0,\pi]$ de mutlak sürekli olduğunu kabul edelim. Bu durumda $Z_1(x,\lambda)$ ifadesinde kısmi integralleme yaparsak

$$Z_1(x,\lambda) = -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda)g'(t)dt + \varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi(t,\lambda)g'(t)dt\right]$$

elde ederiz. Buradan, $Z_2(x,\lambda)$ fonksiyonuna benzer olarak

$$\max_{0\le x\le\pi}\left|Z_1(x,\lambda)\right| \le \frac{C_1}{|\lambda|},\ \ \lambda\in G_\delta,\ \ |\lambda|\ge\lambda^*,\ C_1>0$$

buluruz. Şimdi genel durumda sabit $\varepsilon>0$ ve

$$\int_0^\pi \left|g(t)-g_\varepsilon(t)\right|dt < \varepsilon$$

olacak şekilde mutlak sürekli $g_\varepsilon(t)$ fonksiyonunu alalım. O halde, (4.2.4.2), (4.2.4.3) ve (4.2.4.16) asimptotik ifadelerini kullanırsak $\lambda^{**}>0$ bulunabilir öyle ki; $\lambda\in G_\delta,\ \ |\lambda|\ge\lambda^{**}$ için

$$Z_1(x,\lambda) = \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi'(t,\lambda)\big(g(t)-g_\varepsilon(t)\big)dt + \right.$$

$$\left. +\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi'(t,\lambda)\big(g(t)-g_\varepsilon(t)\big)dt\right] +$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi'(t,\lambda)g_\varepsilon(t)dt + \varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi'(t,\lambda)g_\varepsilon(t)dt\right],$$

eşitliğinden;

$$\max_{0\le x\le\pi}\left|Z_1(x,\lambda)\right| \le C\int_0^\pi \left|g(t)-g_\varepsilon(t)\right|dt + \frac{\tilde{C}(\varepsilon)}{|\lambda|} \le C_\varepsilon + \frac{\tilde{C}(\varepsilon)}{|\lambda|},\ \ \lambda\in G_\delta,\ \ |\lambda|\ge\lambda^{**},$$

elde ederiz.

Sonuç olarak;

$$\varlimsup_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \lambda\in G_\delta}} \max_{0\le x\le\pi} |Z_1(x,\lambda)| \le C_\varepsilon$$

buluruz.

ε keyfi pozitif bir sayı olduğundan (4.2.5.12) eşitliğini elde etmiş oluruz. Böylece (4.2.5.12) ve (4.2.5.13) ifadelerini birlikte düşündüğümüz de (4.2.5.11) eşitliğini elde ederiz. Dolayısıyla teoremin ikinci kısmını ispatlamış oluruz. $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\ge1}$ özdeğerler sistemi $L_{2,\rho}(0,\pi)$ uzayında tam ve ortogonaldir. Bunun için, $L_{2,\rho}(0,\pi)$ içinde ortogonal taban formundadır ve (4.2.5.3) Parseval eşitliği sağlanır. □

4.2.6 Weyl Çözümü ve Weyl Fonksiyonu

$\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1.2.2) denkleminin $\Phi'(0,\lambda)=1$, $\Phi(\pi,\lambda)=0$ koşullarını sağlayan çözümü olsun. $C(x,\lambda)$ ile (4.1.2.2) denkleminin $C(0,\lambda)=0$, $C'(0,\lambda)=1$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü işaretleyelim. O halde $\psi(x,\lambda)$ çözümü aşağıdaki gösterime sahiptir:

$$\psi(x,\lambda)=\psi(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)+\Delta(\lambda)C(x,\lambda) \tag{4.2.6.1}$$

ya da

$$\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=C(x,\lambda)+\frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda). \tag{4.2.6.2}$$

Şimdi

$$M(\lambda):=\frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{4.2.6.3}$$

ile işaretleyelim. Açıktır ki;

$$\Phi(x,\lambda)=C(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{4.2.6.4}$$

biçiminde yazabiliriz.

$\Phi(x,\lambda)$ ve $M(\lambda)=\Phi(0,\lambda)$ fonksiyonları sırasıyla, (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu olarak adlandırılır. Weyl fonksiyonu, (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer probleminin λ_n özdeğerler noktalarında basit kutuplara sahip meromorfik bir fonksiyondur. (4.2.6.2) ve (4.2.6.4) eşitliklerinden

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{4.2.6.5}$$

yazarız.

$$\langle \varphi(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle=\varphi(x,\lambda)\Phi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)$$

Wronsikien x ten bağımsız olduğundan

$$\langle \varphi(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle=1 \tag{4.2.6.6}$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6.1 Eğer $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise o halde, $L=\tilde{L}$ dır. Yani; (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer problemi Weyl fonksiyonu tarafından tek olarak belirlenir.

İspat $P(x,\lambda)=\left[P_{ij}(x,\lambda)\right]_{i,j=1,2}$ matrisini aşağıdaki formülle tanımlayalım:

$$P(x,\lambda)\begin{pmatrix}\tilde{\varphi}(x,\lambda) & \tilde{\Phi}(x,\lambda)\\ \tilde{\varphi}'(x,\lambda) & \tilde{\Phi}'(x,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}\varphi(x,\lambda) & \Phi(x,\lambda)\\ \varphi'(x,\lambda) & \Phi'(x,\lambda)\end{pmatrix}. \tag{4.2.6.7}$$

(4.2.6.7) eşitliğinden

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda)&=P_{11}(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)+P_{12}(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda),\\ \Phi(x,\lambda)&=P_{11}(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda)+P_{12}(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda),\end{aligned} \tag{4.2.6.8}$$

ya da

$$\begin{aligned}P_{11}(x,\lambda)&=\varphi(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda)-\Phi(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda),\\ P_{12}(x,\lambda)&=-\varphi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda)+\Phi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda),\end{aligned} \tag{4.2.6.9}$$

elde edilir. (4.2.6.9) denklemlerinde (4.2.6.5) ifadesini yerine yazarsak o halde, biz

$$\begin{aligned}P_{11}(x,\lambda)&=1+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big[\varphi(x,\lambda)\big(\tilde{\psi}'(x,\lambda)-\psi'(x,\lambda)\big)-\\ &\quad-\psi(x,\lambda)\big(\tilde{\varphi}'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\big)\Big],\\ P_{12}(x,\lambda)&=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\big[\psi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda)\big],\end{aligned} \tag{4.2.6.10}$$

denklemlerini elde ederiz.

Şimdi (4.2.4.2), (4.2.4.3) ve (4.2.4.16) asimptotik ifadelerini (4.2.6.10) denklemlerinde kullanırsak,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}\left|P_{11}(x,\lambda)-1\right|=\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}\left|P_{12}(x,\lambda)\right|=0 \qquad (4.2.6.11)$$

limitlerini buluruz. Şimdi de (4.2.6.9) denklemlerinde (4.2.6.4) ifadesini yerine yazalım:

$$P_{11}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)\tilde{C}'(x,\lambda)-C(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda)+\left(\tilde{M}(\lambda)-M(\lambda)\right)\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda),$$
$$P_{12}(x,\lambda)=C(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)-\tilde{C}(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)+\left(M(\lambda)-\tilde{M}(\lambda)\right)\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda).$$

Buradan elde ediyoruz ki, eğer $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise o halde $P_{11}(x,\lambda)$ ve $P_{12}(x,\lambda)$ her sabit x değeri için tam fonksiyonlardır. (4.2.6.11) eşitliklerinden görüyoruz ki, $P_{11}(x,\lambda)\equiv 1$ ve $P_{12}(x,\lambda)\equiv 0$ dır. Bu son eşitlikleri (4.2.6.8) de yerine yazarsak her x ve λ için $\varphi(x,\lambda)\equiv\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ ve $\Phi(x,\lambda)\equiv\tilde{\Phi}(x,\lambda)$ elde ederiz. Böylece, $q(x)\equiv\tilde{q}(x)$ buluruz. Dolayısıyla ispat tamamlanır. □

Teorem 4.2.6.2 Aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$M(\lambda)=\frac{1}{2\lambda_0\alpha_0(\lambda_0-\lambda)}+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n(\lambda_n^2-\lambda^2)}. \qquad (4.2.6.12)$$

İspat (4.2.2.2) ifadesini (4.2.6.3) eşitliğinde yerine yazalım ve rezidü hesaplayalım:

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda)=\frac{\psi(0,\lambda_n)}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}=\frac{\beta_n}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}=\frac{1}{2\lambda_n\alpha_n}. \qquad (4.2.6.13)$$

Aynı zamanda, (4.2.4.3), (4.2.4.16) asimptotik ifadelerini ve (4.2.6.3) eşitliğinde göz önüne alırsak,

$$\left|M(\lambda)\right|\le\frac{C_\delta}{|\lambda|},\quad \lambda\in G_\delta, \qquad (4.2.6.14)$$

eşitsizliğini elde ederiz ve buradan limite geçersek,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left|M(\lambda)\right|=0 \qquad (4.2.6.15)$$

buluruz. Şimdi aşağıdaki kontür integralini düşünelim:

$$J_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{M(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu,\quad \lambda\in Int\Gamma_N,$$

burada, $\Gamma_N=\left\{\mu:|\mu|=\left|\lambda_N^0\right|+\frac{\gamma}{2}\right\}$ saat yönünün tersine bir kontördür. Bu durumda, (4.2.6.15) ifadesinden $\lim_{N\to\infty}\left|J_N(\lambda)\right|=0$ buluruz. Diğer taraftan, rezidü teoreminden, $\lambda_{-n}=-\lambda_n$ olmasından ve (4.2.6.13) ten

$$J_N(\lambda) = M(\lambda) + \sum_{n=-N}^{N} \frac{1}{2\lambda_n \alpha_n (\lambda_n - \lambda)} =$$

$$= M(\lambda) + \frac{1}{2\lambda_0 \alpha_0 (\lambda_0 - \lambda)} + \sum_{n=1}^{N} \frac{1}{\alpha_n (\lambda_n^2 - \lambda^2)}$$

eşitliğini buluruz. Burada, $N \to \infty$ iken limite geçersek (4.2.6.12) eşitliğini elde etmiş oluruz. Böylece ispat tamamlanmış olur.□

Teorem 4.2.6.3 Eğer $\forall n \in Z$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n,\ \alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ ise o halde, $L = \tilde{L}$ dır. Yani, (4.1.2.2), (4.1.2.4) sınır değer problemi spektral verileri tarafından birebir olarak belirlenir

İspat Her $n \in Z$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n,\ \alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ olduğundan ve (4.2.6.12) formülü sağlandığından, $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$ elde ederiz. Dolayısıyla, Teorem 4.2.6.1'i kullandığımızda $L = \tilde{L}$ buluruz. Böylece, ispat biter.□

5 SONUÇ VE ÖNERİLER

5.1 SONUÇLAR

Bu çalışmada, homojen olmayan ortama uygun, ikinci merteben kısmi türevlerden oluşan ısı (ve ya titreşim) denklemi için bir sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu sınır değer problemi için aşağıdaki sonuçlar bulunmuştur.

- Fourier metodu uygulanmıştır ve süreksiz katsayılı Sturm-Liouville problemi elde edilmiştir.
- Bu süreksiz katsayılı Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları incelenmiştir.
- Özdeğerlerinin basitliği (tek katlılığı) ve reelliği, özfonksiyonlarının ortogonalliği özellikleri araştırılmıştır.
- Özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotik formülleri elde edilmiştir.
- Rezolvent operatör inşa edilmiştir.
- Problemin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülü ve denk olarak Parseval eşitliği elde edilmiştir.

- Problemin $q(x) \equiv 0$ durumu ele alınarak yukarıda bahsedilen durumlar daha ayrıntılı olarak incelenmiştir.
- Problemin Weyl fonksiyonu ve Weyl çözümü tanımlanmıştır.
- Weyl fonksiyonu ve spektral verilere göre problemin çözümü için teklik teoremleri verilmiştir.

5.2 ÖNERİLER

- Tezde verilen süreksiz katsayılı Sturm-Liouville denklemi için farklı sınır koşulları altında düz ve ters spektral problemler incelenebilir.
- Ele alınan süreksiz katsayılı Sturm-Liouville denklemi için sınır koşullarında süreksizlik noktası olan veya spektral parametre bulunan durumlar için spektral problem incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] I. G. Petrovski, "Lectures on differential equations" Translated from the Russian by A. Shneister, New York, 1962.

[2] S. J. Farlow, "Partial differential equations for scientists and engineers", John Wiley, 1982.

[3] N. Tikhonov, ve A. A. Samarskii, "Equations of mathematical physics", Dover Books on Physics and Chemistry, Dover, New York, 1990.

[4] B. M. Levitan ve I. S. Sargsjan, "Sturm-Liouville and Dirac operators", Kluwer Academic Publishers Volume 59, 1991.

[5] L. Collatz, "Eigenwertausgaben mit technischen anwendungen", Leipzig: Acad. Verlagsgesellschaft Geest and Porting K.-G., 1963.

[6] E. Kamke, "Differentialgleichungen losungsmethoden und losungen" I, Gewohnliche Differentialgleichungen, B. G. Teubner, Leipzig, 1977.

[7] A. M. Akhtyamov, ve A. V. Mouftakhov, "Identification of boundary conditions using natural frequencies", Inverse Problems in Science and Engineering, 2004, 12(4), 393–408.

[8] E. C. Titchmarsh, "Eigenfunction expansions associated with second-order differential equations", Part I. Second Edition Clarendon Press, Oxford, 1962.

[9] B. M. Levitan ve I. S. Sargsjan, "Introduction to spectral theory: selfadjoint ordinary differential operators", American Mathematical Society, 1975.

[10] V. A. Marchenko, "Spectral theory of Sturm-Liouville operators", Naukova Dumka, Kiev, 1972.

[11] V. A. Marchenko, "Sturm Liouville operators and applications", AMS Chelsea Publishing, 2011.

[12] K. Chadan ve P. C. Sabatier, "Inverse problem in quantum scattering theory", Springer Verlag, Berlin, 1977.

[13] V. A Yurko, "Method of spectral mapping in the inverse problem theory", Utrecht: VSP, 2002.

[14] G. Freiling, ve V. Yurko, "Inverse Sturm-Liouville problems", Nova Science Publishers, Inc., 2008.

[15] M. G. Gasymov, "The direct and inverse problem of spectral analysis for a class of equations with a discontinuous coefficient", (Ed. M. M. Lavrent 'ev), Non-Classical Methods in Geophysics, Nauka (Novasibirsk, Russia), 1977, 37–44.

[16] A. A. Darwish, "On a direct and inverse scattering problem for a boundary value problem with discontinuous coefficient", New Zealand Journal of Mathematics, 1996, 25(1):1-14.

[17] I. M. Guseinov ve R. T. Pashaev, "On an inverse problem for a second order differential operator", In Usp. Math. Nauk., Volume 57, No: 3, 2002, 597-598.

[18] Kh. R. Mamedov, "Uniqueness of solution of the inverse problem of scattering theory with a spectral parameter in the boundary condition", *Math. Notes,* 2003, *74 (1),* 136–140.

[19] Kh. R. Mamedov, "On an inverse scattering problem for a discontinuous Sturm-Liouville equation with a spectral parameter in boundary condition", *Bound. Value Probl.*, 2010, Article ID 171967, 1–17.

[20] E. N. Akhmedova, "On representation of a solution of Sturm-Liouville equation with discontinuous coefficients", *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan*, 2002, *16 (24*), 5–9.

[21] E. N. Akhmedova ve H. M. Huseynov, "On solution of the inverse Sturm-Liouville problem with discontinuous coefficients". Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, Baku, 2007, pp.33-44.

[22] A. A. Nabiev. ve Kh. A. Amirov, "On the boundary value problem for the Sturm-Liouville equation with the discontinuous coefficient", Mathematical Methods in the Applied Sciences, DOI:10.1002/mma. 2714 MOS Subject Classification:34110;34B24.

[23] D. Karahan ve Kh. R. Mamedov. "Uniqueness of the solution of the inverse problem for one class of Sturm-Liouville operator", Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, v. 40, Special Issue, 2014, p. 233-244.

[24] Kh. R. Mamedov, ve F. Ayça Çetinkaya, "A uniqueness theorem for a Sturm-Liouville equation with spectral parameter in boundary conditions", *Appl. Math. Inf. Sci.*, 2015, 9 (2*)*, 981–988.

[25] Kh. R. Mamedov, ve F. Ayça Çetinkaya, "Inverse problem for a class of Sturm-Liouville operator with spectral parameter in boundary condition", Boundary Value Problems 2013, 2013:183, doi:10.1186\1687-2770-2013-183.

[26] Kh. R. Mamedov, ve F. Ayça Çetinkaya, "Eigenparameter dependent inverse boundary value problem for a class of Sturm-Liouville operator", Boundary Value Problems 2014, 2014:194, doi:10.1186\s13661-014-0194-3.

[27] Kh. R. Mamedov, ve F. Ayça Çetinkaya, "On a spectral expansion formula for a class of second order differential equation with discontinuous coefficient", Advances Studies in Contemporary Mathematics, 14(2014), no:4, pp.451-457.

[28] L. A. Lusternik ve V. J. Sobolev, "Elements of functional analysis", Hindustan Publishing Corporation (India), 1974.

[29] J. B. Conway, "Functions of one complex variable", 2nd ed., vol.I, Springer-Verlag, New York, 1995.

[30] V. F., Zhdanovich, "Formulas for the Zeros of Dirichlet Polynomials and Quasipolynomials", Dokl. Akad. Nauk SSSR. 135, No:8, pp. 1046-1049 .

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Döne KARAHAN
Doğum Tarihi: 26.05.1990
Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Matematik-Fen	Sivas Kongre Lisesi	2004-2008
Lisans	Matematik Öğretmenliği	Cumhuriyet Üniversitesi	2008-2013
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2013-2015

Görevler

Görev Ünvanı	Görev Yeri	Yıl
Arş. Görevlisi	Harran Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi	2014-

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. D. Karahan ve Kh. R. Mamedov. "Uniqueness of the solution of the inverse problem for one class of Sturm-Liouville operator", Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, v. 40, Special Issue, 2014, p. 233-244.
2. Kh. R. Mamedov ve D. Karahan. "On an inverse spectral problem for Sturm-Liouville operator with discontinuous coefficient", Ufa Mathematical Journal, 2015(Accepted)
3. D. Karahan ve Kh. R. Mamedov, "Uniqueness of the solution of the inverse problem for one class of Sturm-Liouville operator", Conference "Spectral Theory of Differential Operators" dedicated to the 75th anniversary of M. G. Gasymov, December 8-10, 2014, Baku, Azerbaijan.
4. D. Karahan ve Kh. R. Mamedov, "On an Inverse Problem for Sturm-Liouville Operator with Discontinuous Coefficient", 2nd International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM2015), 3-6 Haziran 2015, Istanbul Commerce University, İstanbul, Türkiye.