KÜME DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

BURCU İNAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
TEMMUZ – 2015

KÜME DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

BURCU İNAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

MERSİN
TEMMUZ – 2015

Burcu İNAN tarafından Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN danışmanlığında hazırlanan "Küme Dizilerinin İdeal Yakınsaklığı" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Kamil DEMİRCİ ………………..

Doç. Dr. İlhan DAĞADUR ………………..

Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN ………………..

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 31/07/2015 tarih ve 2015-20/809 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Enstitü Müdürü

KÜME DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

Burcu İNAN

ÖZ

Son yıllarda küme dizilerinin yakınsaklığının ve küme değerli fonksiyonların bazı özelliklerinin incelenmesi matematiğin önemli konularından biridir.

X boştan farklı bir küme, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ise X ' in alt kümelerinin bir dizisi olsun. Bu durumda,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right),\ \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$$

kümelerine sırasıyla $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin üst limiti ve alt limiti denir. Eğer, bu limitler birbirine eşit ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine yakınsaktır denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} A_n$ biçiminde gösterilir. Ayrıca, bu yakınsaklık klasik yakınsaklık olarak bilinir.

Bu tezde, $\mathcal{I}\subset 2^{\mathbb{N}}$ admissible bir ideal olmak üzere reel yada kompleks terimli diziler için verilen bazı kavramlar küme dizileri için tanımlanacaktır.

Küme dizileri için $\mathcal{I}-$infimum, $\mathcal{I}-$supremum tanımlanarak $\mathcal{I}-$yakınsaklığı ile olan ilişkisi incelenecektir.

Anahtar Kelimeler: Küme dizilerinin yakınsaklığı, İdeal yakınsaklık, İdeal infimum, İdeal supremum

Danışman: Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

IDEAL CONVERGENCE OF SEQUENCE OF SETS

Burcu İNAN

ABSTRACT

In recent years, investigation of convergence of sequence of sets, set valued functions and their some properties is one of the important subject of mathematics.

Let X be a nonempty set and $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ be a sequence of subsets of X. Then,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right), \ \liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$$

these sets are called limit superior and limit inferior respectively. If these limits equal each other, then the sequence of sets is called convergent and it is denoted by $\lim_{n\to\infty} A_n$. Also this convergence is known for classical convergence.

In this thesis, let $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ be an admissible ideal and some concepts which was given for reel or complex valued sequences are defined for sequence of sets.

$\mathcal{I}-$supremum and $\mathcal{I}-$infimum are defined for sequence of sets and their relation between $\mathcal{I}-$convergence are given.

Key Words: Convergence of sequence of sets, Ideal convergence, Ideal infimum, Ideal supremum

Advisor: Assoc. Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Department of Mathematics, University of Mersin

TEŞEKKÜR

Bu çalışmada küme değerli dizilerin yakınsaklığı tanımı yapılırken verdiği katkılardan dolayı Prof. Dr. Oleksiy Dovgoshey'e teşekkür ederim.

Üniversitede eğitim hayatına başladığım günden bugüne dek her konuda yardım ve desteğini esirgemeyen, bilgi ve tecrübeleriyle bana yol gösteren, kendime her zaman örnek aldığım saygı değer hocam sayın Doç. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN'a üzerimdeki emeklerinden dolayı çok teşekkür ederim.

Maddi ve manevi her zaman bana destek olan aileme teşekkür eder bu çalışmayı onlara armağan ederim.

Burcu İNAN

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{P}$	Asal sayılar kümesi
$\delta(A)$	A kümesinin asimptotik yoğunluğu
$\delta_A(K)$	K kümesinin $A-$istatistiksel yoğunluğu
$\delta_{D[p,q]}(A)$	A kümesinin deferred istatistiksel yoğunluğu
$d(A)$	A kümesinin logaritmik yoğunluğu
$\lvert A \rvert$	A kümesinin eleman sayısı
χ_A	A kümesinin karakteristik fonksiyonu
$A=(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$	Küme dizisi
$\mathcal{I}$	ideal
$\mathcal{F}$	filtre
$\mathcal{F}(\mathcal{I})$	idealle ilgili filtre
$(C,1)$	Cesaro toplanabilme metodu
$w=\{x=(x_k):\forall k\in\mathbb{N},\ \ x_k\in\mathbb{R}\}$	Reel terimli tüm dizilerin uzayı
WS	Wijsman istatistiksel yakınsaklık
WD	Wijsman deferred yakınsaklık
WDS	Wijsman deferred istatistiksel yakınsaklık
■	İspat biter

1. GİRİŞ

Literatürde küme dizilerinin yakınsaklığı ile ilgili temelde üç kavram vardır. Bunlar; Kuratowski yakınsaklık (Painleve yakınsaklık), Wijsman yakınsaklık, Hausdorff yakınsaklıktır. Bu yakınsaklık çeşitlerinin bir takım genellemeleri de mevcuttur.

X boştan farklı bir küme ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ X ' in alt kümelerinin bir dizisi olsun. Bu tezde, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi ve $x \in X$ elemanı için doğal sayıların $N_x^-(A_n)$ ve $N_x^+(A_n)$ şeklinde alt kümeleri tanımlanacaktır. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin ideal limit infimumu ve ideal limit supremumu, admissible bir $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ ideali için $N_x^-(A_n)$ ve $N_x^+(A_n)$ kümelerinin ideale ait olup olmadığı ile ilgili olacaktır. Kümeler dizisinin bu anlamdaki yakınsaklığı da ideal yakınsaklık olarak adlandırılacaktır ve bazı özellikleri incelenecektir.

Ayrıca, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi için infimum ve supremum kavramları tanımlanarak bazı özellikleri verilecektir. Bu kavramlardan faydalanarak ideal infimum ve ideal supremum kavramları tanımlacak ve bazı özellikleri incelenecektir. Ayrıca infimum, supremum, ideal infimum ve ideal supremum kavramları arasındaki ilişki incelenecektir. Küme dizisi için tanımlanan ideal infimum, ideal supremum, ideal limit infimum ve ideal limit supremum kavramları arasındaki ilişki verilecektir.

Çalışmanın ikinci bölümünde küme değerli dizilerin Wijsman deferred istatistiksel yakınsaklığı tanımlanarak literatürdeki bazı sonuçları kapsayan (Wijsman istatistiksel yakınsama konusunda verilen sonuçları kapsayan) sonuçlar elde edilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Küme dizilerinin yakınsaklığı konusunun incelenmesi günümüzde oldukça önem kazanmıştır.

1902' de küme dizilerinin limiti Painleve tarafından tanımlanmıştır ve onun öğrencisi Zoretti tarafından derlenmiştir. Bu kavram Kuratowski' nin ünlü kitabı Topologie [1]' de popüler olmuş zamanla Kuratowski yakınsaklık olarak adlandırılmıştır.

Ayrıca bu yakınsaklık literatürde Painleve–Kuratowski yakınsaklık, topolojik yakınsaklık ya da kapalı yakınsaklık şeklinde de isimlendirilmektedir. Bununla ilgili birçok örnek [2], [3], [4], [5], [6] çalışmalarında bulunur.

Küme dizileri için Wijsman yakınsaklık kavramı ise 1986 yılında Baronti ve Papini tarafından tanımlanmıştır. Wijsman yakınsaklığa fonksiyon dizilerinin noktasal yakınsaklığı gibi bakılabilir. Noktasal yakınsaklık düzgün yakınsaklığı veriyorsa bu yakınsaklık Hausdorff yakınsaklık olarak bilinir.

2002 yılında, Beer G. küme dizilerinin Kuratowski yakınsaklığıyla ilgilenmiştir. Bu çalışmada kompaktlık teoreminden faydalanarak küme dizileri için Arzela- Ascoli Teoreminini elde etmiştir [4].

2011 yılında, Letavaj P. metrik uzayda reel terimli bir dizinin boştan farklı kapalı bir kümeye olan ideal yakınsaklığını incelemiştir [7].

2012 yılında, Wijsman yakınsaklığın bir genellemesi olan Wijsman istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk kez Nuray F. ve Rhoades B. E. tarafından verilmiştir. Benzer şekilde yazarlar çalışmalarında Kuratowski ve Hausdorff yakınsaklık kavramlarını istatistiksel anlamda genelleştirmişlerdir [8].

2012 yılında, Nuray F. ile Ulusu U. keyfi bir lacunary dizisi kullanarak Wijsman lacunary yakınsaklık kavramını tanımlayıp bazı sonuçlar elde etmişlerdir [9].

2013 yılında, Kişi Ö. ile Nuray F. Wijsman yakınsaklığı kullanarak Wijsman ideal yakınsaklık kavramını tanımlayıp çalışmışlardır [10].

2014 yılında, Ulusu U. ve Dündar E. küme dizilerinin Wijsman $\mathcal{I}-$istatistiksel yakınsaklığını, Wijsman $\mathcal{I}-$lacunary istatistiksel yakınsaklığını ve

Wijsman kuvvetli $\mathcal{I}-$lacunary yakınsaklığını tanımlayıp aralarındaki ilişkiyi incelemişlerdir [11].

2014 yılında, Dündar E. ve Sever Y. küme dizileri için Wijsman kuvvetli lacunary Cauchy ve Wijsman kuvvetli $\mathcal{I}-$lacunary Cauchy kavramlarını tanımlayarak aralarındaki ilişkiyi vermişlerdir [12].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak bazı temel tanımlar ve teoremler verilecektir. Özellikle w sembolü ile $w=\{x=(x_k):\forall k\in\mathbb{N},\ x_k\in\mathbb{R}\}$ reel terimli tüm dizilerin uzayı gösterilecektir.

3.1. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Tanım 3.1.1: $A=(a_{n,k})$ sonsuz matrisi verilsin. Eğer, $\forall k>n$ için $a_{n,k}=0$ ise A matrisine üçgensel matris denir.

Ayrıca, $A=(a_{n,k})$ üçgensel matris olduğunda $\forall k\in\mathbb{N}$ için $a_{k,k}\neq 0$ ise A matrisine üçgen matris denir.

$X,Y\subset w$ kümeleri verilsin. $A=(a_{n,k})$ reel (veya kompleks) terimli sonsuz bir matris olsun. Bu durumda, $x=(x_k)\in X$ ve $\forall n\geq 1$ için

$$t_n:=(Ax)_n:=\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k}x_k \tag{3.1.1}$$

şeklinde tanımlı dizi yakınsak ise $t=(t_n):=(Ax)_n$ dönüşüm dizisi mevcuttur denir.

Tanım 3.1.2: Eğer $\forall x\in X$ için (3.1.1) de tanımlanan $t=(t_n):=(Ax)_n$ dönüşüm dizisi mevcut ve $\forall n\in\mathbb{N}$ için $t_n\in Y$ ise $A=(a_{n,k})$ matrisi X ten Y içine bir matris dönüşümü tanımlar denir.

Tanım 3.1.3: Eğer, $x=(x_k)$ dizisi için (Ax) dönüşüm dizisi mevcut ve bir l sayısına yakınsak ise $x=(x_k)$ dizisi l sayısına $A-$toplanabilirdir denir. Bu durum $A-\lim\limits_{n\to\infty}x=l$ ile gösterilir.

X ten Y içine tanımlı tüm matrislerin sınıfı (X,Y) ile gösterilir ve A matrisi X ten Y içine bir matris dönüşümü ise $A\in(X,Y)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.4: $A=(a_{n,k})$ sonsuz matrisi ve $x=(x_k)$ dizisi verilsin. Eğer, $\lim\limits_{k\to\infty}x_k=l$ olduğunda $\lim\limits_{n\to\infty}(Ax)_n=l$ ise $A=(a_{n,k})$ matrisine regüler matris denir.

Şimdi, $A=(a_{n,k})$ matrisinin bir regüler matris olması için gerek ve yeter koşulu veren teoremi verelim:

Teorem 3.1.1(Silverman-Toeplitz Teoremi) [13] $A=(a_{n,k})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul,

i. $\exists K>0$ sabiti vardır ki $\|A\|=\sup_{n}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{n,k}|<K$ (3.1.2)

ii. $\forall k\in\mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty}a_{n,k}=0$ (3.1.3)

iii. $\lim_{n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}a_{n,k}=1$ (3.1.4)

sağlanmasıdır.

Tanım 3.1.5: Aşağıdaki biçimde tanımlanan matrise Cesaro matrisi denir ve $(C,1)$ ile gösterilir:

$$(C,1)=(c_{n,k}):=\begin{cases}\dfrac{1}{n}, & 0<k\le n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

$(C,1)$ matrisi Teorem 3.1.1'de verilen (3.1.2), (3.1.3) ve (3.1.4) koşullarını sağladığından regülerdir.

Tanım 3.1.6: Reel terimli bir (x_k) dizisi ve $l\in\mathbb{R}$ sayısı verilsin. Eğer,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}x_i=l$$

ise (x_k) dizisine $l\in\mathbb{R}$ sayısına $(C,1)-$toplanabilirdir (veya $(C,1)-$yakınsaktır) denir [13].

Tanım 3.1.7: Reel terimli bir (x_k) dizisi ve $l\in\mathbb{R}$ sayısı verilsin. Eğer,

$$\lim_{k\to\infty}\frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}|x_i-l|=0$$

ise (x_k) dizisine $l\in\mathbb{R}$ sayısına kuvvetli $(C,1)-$toplanabilirdir denir [13],[14].

3.2. YOĞUNLUK KAVRAMI ve ÇEŞİTLERİ

Bu bölümde asimptotik yoğunluk (doğal yoğunluk), logaritmik yoğunluk, düzgün yoğunluk, A bir matris olmak üzere $A-$yoğunluk ve deferred istatistiksel yoğunluk kavramları ile onların bazı özellikleri verilecektir.

$\mathbb{N}$ pozitif tam sayıların kümesini göstermek üzere, $A \subset \mathbb{N}$ olsun ve $|A(n)|$ ile $A(n) := \{k \leq n : k \in A\}$ kümesinin eleman sayısı gösterilsin.

Tanım 3.2.1: $A \subset \mathbb{N}$ olmak üzere A kümesinin üst ve alt asimptotik yoğunluğu sırasıyla $\overline{\delta}(A)$ ve $\underline{\delta}(A)$ ile gösterilir ve aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\overline{\delta}(A) := \limsup_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)| \ \ , \ \ \underline{\delta}(A) := \liminf_{n\to\infty} \frac{1}{n}|A(n)|$$

Eğer, $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin üst ve alt asimptotik yoğunlukları var ve birbirine eşit ise A kümesi asimptotik yoğunluğa (veya doğal yoğunluğa) sahiptir denir ve $\delta(A)$ sembolü ile gösterilir.

Örneğin;

$$\delta(\{2k : k \in \mathbb{N}\}) = \delta(\{2k+1 : k \in \mathbb{N}\}) = \frac{1}{2},$$

$$\delta(\mathbb{N}) = 1, \ \delta(\{k^2 : k \in \mathbb{N}\}) = 0,$$

ve $\mathbb{P}$ asal sayıları göstermek üzere $\delta(\{k : k \in \mathbb{P}\}) = 0$ dir.

Not 3.2.1: χ_A ile $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin karakteristik fonksiyonu gösterilsin ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\delta_n(A) = \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n} \chi_A(k)$$

olsun. Bu durumda sırasıyla üst ve alt asimptotik yoğunluk şu şekilde yazılabilir:

$$\delta^*(A) = \limsup_{n\to\infty} \delta_n(A) \ , \ \delta_*(A) = \liminf_{n\to\infty} \delta_n(A)$$

ve $\delta^*(A) = \delta_*(A) = \delta(A)$ ise A kümesinin asimptotik yoğunluğu vardır denir.

Eğer $A \subset \mathbb{N}$ kümesi asimptotik yoğunluğa sahip ise $\delta(\mathbb{N} \setminus A) = 1 \setminus \delta(A)$ ve $0 \leq \delta(A) \leq 1$ sağlanır [15].

Tanım 3.2.2: $A \subset \mathbb{N}$ olmak üzere, eğer $\delta(A)=0$ ise A kümesine sıfır yoğunlukludur denir. Ayrıca, $\delta(A)=1$ ise A kümesine $\mathbb{N}$'nin yoğun alt kümesi denir.

Doğal sayıların sonlu her alt kümesi sıfır yoğunlukludur. Tersi doğru değildir.

Örneğin; $\delta\left(\left\{k^2 : k \in \mathbb{N}\right\}\right)=0$ olmasına rağmen $\left\{k^2 : k \in \mathbb{N}\right\}$ sonlu küme değildir.

Not 3.2.2: Her $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin üst ve alt asimptotik yoğunluğu olmasına rağmen asimptotik yoğunluğu olmayabilir.

Örneğin; $A \subset \mathbb{N}$ kümesi,

$$x_k = \begin{cases} 1 \quad , & k=1, \\ k+2^{2n+1}, & 2^{2n}+1 \le k \le 2^{2n+2} \ , \ n=0,1,\cdots \end{cases}$$

şeklinde tanımlanan dizinin terimlerinden oluşsun. Yani,

$$A=\{1,4,5,6,13,14,15,\cdots,24,49,50,51,\cdots,96,193,194,\cdots,384,\cdots\}$$

dir ve $\frac{|A_n|}{n}$ dizisinin üst limitini veren alt dizi,

$$\frac{1}{1},\frac{4}{6},\frac{16}{24},\frac{64}{96},\cdots \to \frac{2}{3}$$

ve alt limitini veren alt dizisi,

$$\frac{1}{3},\frac{4}{12},\frac{16}{48},\frac{64}{192},\cdots \to \frac{1}{3}$$

şeklindedir. Dolayısıyla A kümesinin üst asimptotik yoğunluğu $\frac{2}{3}$ ve alt asimptotik yoğunluğu $\frac{1}{3}$ dür. Fakat A kümesinin asimptotik yoğunluğu yoktur.

Tanım 3.2.3: $A \subset \mathbb{N}$ kümesi verilsin. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $s_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$ olmak üzere

$$d_n(A) = \frac{1}{s_n} \sum_{k=1}^{n} \frac{\chi_A(k)}{k}$$

olsun. $A \subset \mathbb{N}$ kümesinin üst ve alt logaritmik yoğunluğu sırasıyla

$$\overline{d}(A) = \limsup_{n\to\infty} d_n(A), \ \underline{d}(A) = \liminf_{n\to\infty} d_n(A)$$

biçiminde tanımlanır.

Eğer, $\overline{d}(A)=\underline{d}(A)$ ise bu ortak değere A kümesinin logaritmik yoğunluğu denir ve $d(A)$ ile gösterilir [16], [17].

Teorem 3.2.1: ([16] , 70-75, 95-96) Her $A\subset\mathbb{N}$ için,

$$\underline{\delta}(A)\le\underline{d}(A)\le\overline{d}(A)\le\overline{\delta}(A) \tag{3.2.1}$$

eşitsizliği sağlanır.

Açıktır ki $\underline{\delta}(A)$, $\overline{\delta}(A)$, $\underline{d}(A)$, $\overline{d}(A)$ (ve dolayısıyla $\delta(A)$, $d(A)$) sayıları [0,1] aralığındadır.

Sonuç 3.2.1.: $A\subset\mathbb{N}$ olsun. Eğer, $\delta(A)$ mevcut ise $d(A)$ da mevcuttur ve $\delta(A)=d(A)$ dır. Bu ifadenin tersi doğru değildir.

Gerçekten; $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$ için $A_k=\left\{k^{k^2}+1,k^{k^2}+2,\cdots,k^{k^2+1}\right\}$ ve $A=\bigcup\limits_{k=2}^{\infty}A_k$

olsun. Buradan,

$$\overline{\delta}(A)\ge\limsup_{n\to\infty}\frac{\left|A\left(k^{k^2+1}\right)\right|}{k^{k^2+1}}\ge\limsup_{n\to\infty}\frac{k^{k^2+1}-k^{k^2}}{k^{k^2+1}}=1$$

dır. Böylece $\overline{\delta}(A)=1$ dir.

Her $n\in\mathbb{N}$ için $S_n=\sum\limits_{k=1}^{n}\frac{1}{k}\approx\ln n$ yaklaşık ifadesi sağlanır [16], [17]. Buradan, $k\in\mathbb{N}$, $k\ge 2$ için

$$\sum_{j\in A_n}\frac{1}{j}\approx\ln k$$

dır. Bu ise

$$\overline{d}(A)\le\lim_{n\to\infty}\frac{\sum\limits_{k=1}^{n}\ln k}{\sum\limits_{j=1}^{n^{n^2+1}}\frac{1}{j}}\le\lim_{n\to\infty}\frac{n\ln n}{\left(n^2+1\right)\ln n}=0$$

olduğunu verir.

Böylece, $d(A)=0$ olur ve (3.2.1)' den $\underline{\delta}(A)=0$ elde edilir.

Tanım 3.2.4: $A \subset \mathbb{N}$ olmak üzere her bir $t \geq 0$ ve $s \geq 1$ tam sayıları için

$$A(t+1, t+s) = \left|\{n \in A : t+1 \leq n \leq t+s\}\right|$$

olsun.

$$\beta^s = \limsup_{t\to\infty} A(t+1, t+s), \qquad \beta_s = \liminf_{t\to\infty} A(t+1, t+s)$$

limitleri mevcuttur [18].

$$\bar{u}(A) = \lim_{s\to\infty} \frac{\beta^s}{s} \quad , \quad \underline{u}(A) = \lim_{s\to\infty} \frac{\beta_s}{s}$$

Eğer, $\bar{u}(A) = \underline{u}(A)$ ise bu ortak değere A kümesinin düzgün yoğunluğu denir ve $u(A)$ sembolü ile gösterilir.

Tanım 3.2.5: $A = (a_{n,k})$ negatif olmayan regüler matris olsun. $K \subset \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\delta_A(K) := \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{n,k} \chi_K(k)$$

limiti mevcut ise bu sayıya K kümesinin $A-$yoğunluğu denir ve $\delta_A(K)$ ile gösterilir. A nin regülerliğinden,

$$\lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{n,k} = 1$$

dir ve buradan $\delta_A(K) \in [0,1]$ elde edilir.

Tanım 3.2.6: $p = (p(n))$ ve $q = (q(n))$ pozitif tam sayıların

$$p(n) < q(n) \text{ ve } \lim_{n\to\infty} q(n) = \infty \tag{3.2.2}$$

koşulunu sağlayan dizileri ve $K \subset \mathbb{N}$ olsun. Eğer,

$$\delta_{D_{p,q}}(K) := \lim_{n\to\infty} \frac{1}{q(n) - p(n)} \left|\{p(n) < k \leq q(n) : k \in K\}\right|$$

limiti var ve sonlu ise bu sayıya K ’ nın deferred istatistiksel yoğunluğu denir.

Tanım 3.2.7: $\theta = (k_n)$ dizisi, $k_0 = 0$ ve $n \to \infty$ iken

$$h_n = (k_n - k_{n-1}) \to \infty$$

olacak biçimde negatif olmayan tam sayıların artan bir dizisi ise $\theta = (k_n)$ dizisine lacunary dizisi denir. Ayrıca, $\theta = (k_n)$ lacunary dizisi için $I_n = (k_{n-1}, k_n]$ olarak belirtilir. Her $\varepsilon > 0$ için,

$$\delta_\theta\left(K\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\left|\left\{k\in I_n\ :\ \left|x_k-l\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

limiti var ve sonlu ise bu sayıya K ’ nın $\theta-$ yoğunluğu denir.

3.3. YAKINSAKLIK ve ÇEŞİTLERİ

Bu bölümde reel (veya kompleks) terimli bir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için Cauchy anlamında yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, $A-$istatistiksel yakınsaklık, deferred Cesaro ortalama, $D_{p,q}-$yakınsaklık, $\alpha-$kuvvetli deferred Cesaro yakınsaklık, deferred istatistiksel yakınsaklık ve ideal yakınsaklık tanımları ve bazı özellikleri verilecektir.

Tanım 3.3.1: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reel (veya kompleks) terimli bir dizi ve $l\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer,

$$\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists k_0=k_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \text{ bulunabilir öyle ki } \forall k\geq k_0 \text{ için } |x_k-l|<\varepsilon$$

sağlanır ise $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisine l sayısına Cauchy anlamında yakınsaktır denir.

Tanım 3.3.2: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reel (veya kompleks) terimli bir dizi ve $l\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer, $\forall\varepsilon>0$ için

$$K(\varepsilon)=\{k\in\mathbb{N} : |x_k-l|\geq\varepsilon\}$$

kümesinin asimptotik yoğunluğu sıfır ise (yani $\delta(K(\varepsilon))=0$) (x_n) dizisine $l\in\mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsaktır denir.

Not 3.3.1: Yakınsak her dizi istatistiksel anlamda da yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir.

Örnek 3.3.1: Her $k\in\mathbb{N}$ için

$$x_k=\begin{cases}1, & k=m^2,\ m\in\mathbb{N}\\ 0, & k\neq m^2\end{cases}$$

biçiminde tanımlı $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi verilsin. Bu dizi 0'a istatistiksel yakınsaktır, fakat klasik anlamda yakınsak değildir.

Teorem 3.3.1: [19], [20] $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir $l\in\mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\delta(\{n_k : k\in\mathbb{N}\})=1$ ve $\lim\limits_{n} x_{n_k}=l$ olacak şekilde monoton artan (n_k) dizisinin mevcut olmasıdır.

Tanım 3.3.3: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reel (veya kompleks) terimli bir dizi ve $l\in\mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $K(\varepsilon)$ kümesinin $A-$istatistiksel yoğunluğu sıfır ise (yani $\delta_A\left(K(\varepsilon)\right)=0$) $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisine $l\in\mathbb{R}$ sayısına $A-$istatistiksel yakınsaktır denir [21], [22], [23].

Tanım 3.3.4: Reel (veya kompleks) terimli bir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi ve (3.2.2)' de verilen kouşulları sağlayan $p=\left(p(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\left(q(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri verilsin.

$$\left(D_{p,q}x\right)_n := \frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)} x_k,\quad n=1,2,3,\cdots$$

biçiminde tanımlanan dönüşüme $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin deferred Cesaro ortalaması denir.

$D_{p,q}-$dönüşümünün regüler olduğu Teorem 3.1.1 Silverman Teoplitz teoreminden açıktır.

Tanım 3.3.5: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reel (veya kompleks) terimli bir dizi ve $l\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}\left(x_k-l\right)=0$$

sağlanır ise $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisine l sayısına $D_{p,q}-$yakınsaktır denir.

$D_{p,q}-$yakınsak dizilerin kümesi $D[p,q]$ sembolü ile gösterilir [24].

Tanım 3.3.6.: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reel (veya kompleks) terimli bir dizi, $l\in\mathbb{R}$ ve $0<\alpha<\infty$ olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\sum_{k=p(n)+1}^{q(n)}\left|x_k-l\right|^{\alpha}=0$$

sağlanır ise $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisine l sayısına $\alpha-$kuvvetli deferred Cesaro yakınsaktır denir ve $\lim_{k\to\infty}x_k=l\ \left(\alpha-D[p,q]\right)$ ile gösterilir.

Tanım 3.3.7: Reel (veya kompleks) terimli bir $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisini ve (3.2.2)' de verilen koşulları sağlayan $p=\left(p(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\left(q(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif tam sayıların dizilerini göz önüne alalım. Her $\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q(n)-p(n)}\left|\left\{p(n)<k\le q(n):\left|x_k-l\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0$$

sağlanır ise $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi l sayısına deferred istatistiksel yakınsaktır denir ve $\lim_{k\to\infty} x_k = l\left(DS[p,q]\right)$ biçiminde gösterilir.

Tanım 3.3.8: $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ reel (veya kompleks) terimli bir dizi ve $\theta=(k_n)$ lacunary dizisi olsun. Eğer $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\theta-$yoğunluğu sıfır yani,

$$\delta_\theta(K)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{h_n}\left|\left\{k\in I_n \,:\, |x_k-l|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

ise $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi l sayısına lacunary istatistiksel yakınsaktır denir ve $S_\theta-\lim_{k\to\infty} x_k = l$ ile gösterilir.

3.4. İDEAL ve İDEAL YAKINSAKLIK

Bu bölümde ideal, filtre tanımları ve aralarındaki ilişki ve ideal yakınsaklık kavramı verilecektir.

İdeal yakınsaklık kavramı, klasik yakınsaklıktan ve istatistiksel yakınsaklıktan tamamen farklı bir kavramdır.

X boştan farklı bir küme olmak üzere 2^X ile X 'in kuvvet kümesini işaret edelim.

Öncelikle temel kavramları verelim:

Tanım 3.4.1: $\mathcal{I} \subset 2^X$ kümeler ailesini göz önüne alalım. Eğer,

i. $\emptyset \in \mathcal{I}$

ii. $A, B \in \mathcal{I}$ için $A \cup B \in \mathcal{I}$, (toplamsallık özelliği)

iii. $A \in \mathcal{I},\ B \subset A$ ise $B \in \mathcal{I}$, (kalıtsallık özelliği)

sağlanır ise $\mathcal{I}$ ' ya X üzerinde bir idealdir denir [25].

Tanım 3.4.2: Boştan farklı $\mathcal{F} \subset 2^X$ kümeler ailesi olsun. Eğer,

i. $\emptyset \notin \mathcal{F}$,

ii. $A, B \in \mathcal{F}$ için $A \cap B \in \mathcal{F}$,

iii. $A \in \mathcal{F},\ A \subset B$ ise $B \in \mathcal{F}$,

ise, $\mathcal{F}$ ailesine X üzerinde bir filtre denir [25].

Tanım 3.4.3: Eğer $\mathcal{I} \neq \emptyset$ ve $X \notin \mathcal{I}$ ise $\mathcal{I}$ idealine trivial olmayan (non-trivial) ideal denir.

Tanım 3.4.4: Non-trivial $\mathcal{I} \subset 2^X$ ideali uzayın tüm tek elemanlı alt kümelerini içeriyor ise $\mathcal{I}$ idealine admissible ideal denir.

Not 3.4.1: Herhangi bir $\mathcal{I}$ ideali için bu ideale karşılık gelen bir $\mathcal{F}(\mathcal{I})$ filtresi vardır. Yani,

$$\mathcal{F}(\mathcal{I}) = \{K \subset \mathbb{N} : \mathbb{N} \setminus K \in \mathcal{I}\}$$

Örnek 3.4.1: $\mathbb{N}$ nin tüm sonlu alt kümelerini içeren ideal $\mathcal{I}_f$ ile gösterilsin. Açıktır ki, $\mathcal{I}_f$ ideali admissible idealdir.

Örnek 3.4.2: $A \subset \mathbb{N}$ için $\delta(A)=0$ $\left(\text{veya } d(A)=0\right)$ koşulunu sağlayan tüm kümelerinin ailesini $\mathcal{I}_\delta$ $\left(\text{ veya } \mathcal{I}_d\right)$ ile işaret edelim. $\mathcal{I}_\delta$ ve $\mathcal{I}_d$ idealleri non-trivial ve admissible idealdir.

Tanım 3.4.5: X boştan farklı bir küme, $\mathcal{I}$ ise $\mathbb{N}$ nin alt kümelerinin non-trivial ideali ve $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ X içinde bir dizi olsun. Eğer, $\forall\varepsilon>0$ için

$$A(\varepsilon)=\left\{k\in\mathbb{N}:|x_k-l|\geq\varepsilon\right\}\in\mathcal{I}$$

ise $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisine $l\in X$ elemanına ideal yakınsaktır (veya $\mathcal{I}-$yakınsaktır) denir. Burada l elemanına $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin $\mathcal{I}-$limiti denir ve $\mathcal{I}-\lim\limits_{k\to\infty}x_k=l$ ile gösterilir.

$\mathcal{I}_f-$yakınsaklık X içindeki klasik yakınsaklığa, $\mathcal{I}_\delta-$yakınsaklık istatistiksel yakınsaklığa, $\mathcal{I}_d-$yakınsaklık ise logaritmik istatistiksel yakınsaklığa denktir.

Örnek 3.4.3: $\mathcal{I}_u=\left\{A\subset\mathbb{N}:\ u(A)=0\right\}$ şeklinde tanımlanan ideal non-trivial idealdir ve $\mathcal{I}_u-$yakınsaklığa düzgün istatistiksel yakınsaklık denir.

Örnek 3.4.4: $A=\left(a_{n,k}\right)$ negatif olmayan regüler matris olsun. $K\subset\mathbb{N}$ olmak üzere $\delta_A(K)=0$ koşulunu sağlayan kümelerin ailesi $\mathcal{I}_{\delta_A}$ ile gözterilsin. $\mathcal{I}_{\delta_A}$ ideali non-trivialdir ve $\mathcal{I}_\delta-$yakınsaklık ve $\mathcal{I}_d-$yakınsaklık $\mathcal{I}_{\delta_A}-$yakınsaklığın özel halidir. Gerçekten,

$$a_{n,k}=\begin{cases}\frac{1}{n}, & k\leq n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

biçiminde seçilirse $\mathcal{I}_\delta-$yakınsaklık , $S_n=\sum\limits_{j=1}^{n}\frac{1}{j}$ olmak üzere $\forall n\in\mathbb{N}$ için

$$a_{n,k}=\begin{cases}\dfrac{\frac{1}{k}}{S_n}, & k\leq n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

biçiminde seçilirse $\mathcal{I}_d-$yakınsaklık elde edilir.

$\mathcal{I}_{\delta_A}-$yakınsaklığın diğer özel durumu ise şöyledir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $c_n > 0$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} c_n$ keyfi ıraksak seri ve $S_n = \sum_{j=1}^{n} c_j$ olsun.

$$a_{n,k} = \begin{cases} \dfrac{c_k}{S_n} , & k \leq n \\ 0 , & k > n \end{cases}$$

seçilerek elde edilir [26].

3.5. KÜME DİZİLERİNİN YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde öncelikle küme dizilerinin bilinen anlamdaki yakınsaklık tanımı hatırlatılacaktır. Daha sonra, küme dizileri için Kuratowski, Wijsman ve Hausdorff yakınsaklık tanımları verilip aralarındaki ilişki verilecektir.

Tanım 3.5.1: $X \neq \varnothing$ bir küme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ise X ’in alt kümelerinin bir dizisi olsun. Bu durumda,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n := \bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq n} A_k\right)$$

$$\liminf_{n\to\infty} A_n := \bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k\geq n} A_k\right)$$

kümelerine sırasıyla $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin üst limiti ve alt limiti denir. Eğer,

$$\limsup_{n\to\infty} A_n = \liminf_{n\to\infty} A_n = A$$

ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine yakınsaktır denir ve $\lim\limits_{n\to\infty} A_n = A$ biçiminde gösterilir. Bu yakınsaklık klasik yakınsaklık olarak bilinir.

Tanım 3.5.2: (X,ρ) metrik uzay, $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ bu uzayda bir dizi ve $x \in X$ olsun. Eğer,

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ için } \exists k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N} \text{ bulunabilir öyle ki } \forall k \geq k_0 \text{ için } \rho(x_k, x) < \varepsilon$$

sağlanır ise $(x_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisine x elemanına X içindeki ρ metriğine göre yakısaktır denir.

Tanım 3.5.3: (X,ρ) metrik uzay ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ise (X,ρ) metrik uzayında bir küme dizisi olsun. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin üst ve alt limitleri sırasıyla

$$\limsup A_n := \left\{x \in X : \exists (n_k)\ \exists \left(a_{n_k}\right) \subset \left(A_{n_k}\right),\ \mathrm{a}_{n_k} \xrightarrow{\rho} x\right\}$$

$$\liminf A_n := \left\{x \in X : \exists (a_n) \subset (A_n),\ a_n \xrightarrow{\rho} x\right\}$$

biçiminde tanımlanır. Eğer,

$$\limsup A_n = \liminf A_n = \lim A_n = A$$

ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine A kümesine Kuratowski yakınsaktır denir ve $K-\lim A_n = A$ biçiminde gösterilir [8].

(X,ρ) bir metrik uzay olsun. Boş kümeden farklı herhangi bir $A\subset X$ kümesi ve $x\in X$ noktası için, x noktasının A kümesine uzaklığı

$$d(x,A) := \inf\{\rho(x,a) \ : a\in A\}$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 3.5.4: (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_n ise X ' in boştan farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer, keyfi bir $x\in X$ için

$$\lim_{n\to\infty} d(x,A_n) = d(x,A)$$

sağlanırsa (A_n) küme dizisi A kümesine Wijsman yakınsaktır denir ve $W-\lim A_n = A$ biçiminde gösterilir [8].

Tanım 3.5.5: (X,ρ) bir metrik uzay, A ve A_n ise X ' in boştan farklı kapalı alt kümeleri olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\left(\sup_{x\in X}\left|d(x,A_n)-d(x,A)\right|\right)=0$$

ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine A kümesine Hausdorff yakınsaktır denir ve $H-\lim A_n = A$ şeklinde gösterilir [8].

Not 3.5.1: Herhangi bir metrik uzaydaki küme dizisi Hausdorff yakınsak ise Wijsman yakınsaktır. Eğer, Wijsman yakınsak ise Kuratowski yakınsaktır. Fakat Kuratowski yakınsaklık, uzaklık fonksiyonlarının noktasal yakınsaklığını içermez. Hatta noktasal yakınsaklık sonlu limitten oluşur ve bu limitin uzaklık fonksiyonu olması gerekmez. Eğer bazı x ler için $\lim_{n\to\infty} d(x,A_n)=\infty$ ise $K-\lim A_n = \emptyset$ olur.

Bu durumlarla ilgili örnekler veremeden önce gerekli bazı tanımları verelim.

$\mathcal{U}_x$ ile x noktasının tüm komşuluklar ailesi ve (X,τ) ile topolojik uzay gösterilecektir.

(X,τ) topolojik uzay, $A\subset X$ olsun. A nın her açık örtüsü sonlu bir alt örtüye sahipse A kümesine kompakt küme denir. Eğer, her $x\in X$ için $\mathcal{U}_x$, X in kompakt bir alt kümesini içeriyorsa X e lokal kompakttır denir.

(X,ρ) metrik uzayında tanımlı her Cauchy dizisi uzayın bir noktasına yakınsak ise bu uzaya tam metrik uzay denir.

(X,ρ) metrik uzay, $A \subset X$ ve $\overline{A} = X$ ise A ya X içinde yoğun alt küme denir. Bir metrik uzay sayılabilir ve yoğun bir alt küme içerirse bu metrik uzaya ayrılabilirdir denir.

Şimdi yukarıda verilen durumlar için örnekler verelim:

$X = \{x_1, x_2, x_3, \cdots\}$ ve $Y = \{y_1, y_2, y_3, \cdots\}$ ayrık sayılabilir iki küme olmak üzere $W = X \cup Y$ ayrılabilir, lokal kompakt ve tam metrik uzay olsun. W üzerindeki d metriği aşağıdaki koşulları sağlasın:

$$i \neq j \text{ için } d(x_i, x_j) = 1 \text{ , } i \neq j \text{ için } d(y_i, y_j) = 2 \text{ ve } d(x_i, y_i) = 3$$

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi ise şöyle tanımlansın:

$$A_n = \begin{cases} \{x_{n/2}\}, & n \text{ çift ise,} \\ \{y_{(n+1)/2}\}, & n \text{ tek ise.} \end{cases}$$

Bu durumda $K - \lim A_n = \varnothing$ dir, fakat $(d(\,.\,, A_n))$ uzaklık fonksiyonlarının dizi hiçbir noktaya yakınsamaz.

Aynı uzayda, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$B_n = \begin{cases} Y \cup \{x_n\} \ , & n \text{ çift ise} \\ Y \ , & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

Açıktır ki, $K - \lim B_n = Y$ dir. Dolayısıyla $(d(\,.\,, B_n))$ dizisi minimal olarak Y üzerinde yakınsaktır. Y içinde olmayan her x noktası için $d(x, B_n)$ dizisinin terimleri 1 ve 3 ten oluşur. Böylece noktasal yakınsaklık sadece Y üzerinde olur.

Son olarak uzaklık fonksiyonlarının, uzaklık fonksiyonu olmayan sonlu bir limite noktasal yakınsadığını gösterelim:

$$\forall n \in \mathbb{Z}^+ \text{ için } C_n = \{y_1, x_n, x_{n+1}, x_{n+2}, \cdots\}$$

olsun. $(d(\,.\,, C_n))$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanan f fonksiyonuna noktasal yakınsar:

$$f(x) = \begin{cases} 2\ , & x = y_n \text{ ve } n > 1 \text{ ise} \\ 0\ , & x = y_1 \text{ ise} \\ 1\ , & x = x_n \text{ ise} \end{cases}$$

Eğer f fonksiyonu C kapalı kümesi için uzaklık fonksiyonu olsaydı $C = \{y_1\}$ olurdu. Fakat,

$$\forall n \in \mathbb{N} \text{ için } d\left(x_n, \{y_1\}\right) = 3 \neq 1 = f\left(x_n\right)$$

dır. Böylece küme dizileri boş olmayan bir kümeye Kuratowski yakınsak olsa bile uzaklık fonksiyonlarının dizisi bir uzaklık fonksiyonu olmak zorunda değildir.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. KÜME DİZİLERİNİN İDEAL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde X boştan farklı bir küme, $\mathcal{I}$ admissible ideal ve her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n, A \subset X$ olmak üzere $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin A kümesine ideal yakınsaklığı tanımlanacaktır.

Ayrıca, küme dizileri için supremum, infimum, ideal supremum ve ideal infimum kavramları verilecek ve bazı özellikleri incelenecektir.

Tanım 4.1.1: $X \neq \varnothing$ bir küme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ise X 'in alt kümelerinin bir dizisi olmak üzere $x \in X$ için N_x^- ve N_x^+ kümeleri

$$\mathrm{N}_x^-(A_n) := \{n \in \mathbb{N} : x \notin A_n\}$$

$$N_x^+(A_n) := \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\}$$

biçiminde tanımlanır.

Lemma 4.1.1: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi X 'in alt kümelerinin bir dizisi olmak üzere $\forall x \in X$ için

$$N_x^-(A_n) \cap N_x^+(A_n) = \varnothing$$

ve

$$N_x^-(A_n) \cup N_x^+(A_n) = \mathbb{N}$$

dır. Dolayısıyla,

$$N_x^-(A_n) = \mathbb{N} \setminus N_x^+(A_n) \quad \text{ve} \quad N_x^+(A_n) = \mathbb{N} \setminus N_x^-(A_n)$$

sağlanır.

Lemma 4.1.2: $X \neq \varnothing$ bir küme ve $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ herhangi iki küme dizisi olmak üzere

i. $N_x^-(K_n \cap L_n) = N_x^-(K_n) \cup N_x^-(L_n)$,

ii. $N_x^{+}\left(K_n \cap L_n\right)=N_x^{+}\left(K_n\right) \cap N_x^{+}\left(L_n\right)$

dir.

İspat:

i. Tanım gereği

$$N_x^{-}\left(K_n \cap L_n\right)=\left\{n \in \mathbb{N} : x \notin \left(K_n \cap L_n\right)\right\}$$

dir. Ayrıca, $\left(x \notin K_n \cap L_n\right) \equiv \left(x \notin K_n \vee x \notin L_n\right)$ olduğundan

$$\left\{n \in \mathbb{N} : x \notin K_n \vee x \notin L_n\right\}=\left\{n \in \mathbb{N} : x \notin K_n\right\} \cup \left\{n \in \mathbb{N} : x \notin L_n\right\}$$

elde edilir. Yani, $N_x^{-}\left(K_n \cap L_n\right)=N_x^{-}\left(K_n\right) \cup N_x^{-}\left(L_n\right)$ dir.

ii. Tanım gereği

$$N_x^{+}\left(K_n \cap L_n\right)=\left\{n \in \mathbb{N} : x \in \left(K_n \cap L_n\right)\right\}$$

sağlanır. Ayrıca, $\left(x \in K_n \cap L_n\right) \equiv \left(x \in K_n \wedge x \in L_n\right)$ olduğundan

$$\left\{n \in \mathbb{N} : x \in K_n \wedge x \in L_n\right\}=\left\{n \in \mathbb{N} : x \in K_n\right\} \cap \left\{n \in \mathbb{N} : x \in L_n\right\}$$

elde edilir.

Yani; $N_x^{+}\left(K_n \cap L_n\right)=N_x^{+}\left(K_n\right) \cap N_x^{+}\left(L_n\right)$ dir. ■

Lemma 4.1.3: $X \neq \varnothing$ bir küme ve $\left(K_n\right)_{n \in \mathbb{N}}$, $\left(L_n\right)_{n \in \mathbb{N}} \subset X$ herhangi iki küme dizisi olmak üzere;

i. $N_x^{-}\left(K_n \cup L_n\right)=N_x^{-}\left(K_n\right) \cap N_x^{-}\left(L_n\right)$

ii. $N_x^{+}\left(K_n \cup L_n\right)=N_x^{+}\left(K_n\right) \cup N_x^{+}\left(L_n\right)$

dir.

İspat:

i. Tanım gereği

$$N_x^{-}\left(K_n \cup L_n\right)=\left\{n \in \mathbb{N} : x \notin \left(K_n \cup L_n\right)\right\}$$

dir. Ayrıca,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : x \notin K_n \wedge x \notin L_n\right\}=\left\{n \in \mathbb{N} : x \notin K_n\right\} \cap \left\{n \in \mathbb{N} : x \notin L_n\right\}$$

olduğundan $N_x^{-}\left(K_n \cup L_n\right)=N_x^{-}\left(K_n\right) \cap N_x^{-}\left(L_n\right)$ dir.

ii. Tanımdan

$$N_x^+(K_n \cup L_n) = \{n \in \mathbb{N} : x \in (K_n \cup L_n)\}$$

dir. Buradan

$$\{n \in \mathbb{N} : x \in K_n \vee x \in L_n\} = \{n \in \mathbb{N} : x \in K_n\} \cup \{n \in \mathbb{N} : x \in L_n\}$$

olur. Yani; $N_x^+(K_n \cup L_n) = N_x^+(K_n) \cup N_x^+(L_n)$ dir. ■

Lemma 4.1.4: $X \neq \varnothing$ bir küme ve $\left(A_n^{(i)}\right) \subset X$, $(i = 1,2,3,\cdots,p)$ küme dizisi olmak üzere $x \in X$ için,

$$N_x^-\left(\prod_{i=1}^{p} A_n^{(i)}\right) = \bigcup_{i=1}^{p} N_x^-\left(A_n^{(i)}\right)$$

ve

$$N_x^+\left(\prod_{i=1}^{p} A_n^{(i)}\right) = \bigcap_{i=1}^{p} N_x^+\left(A_n^{(i)}\right)$$

dir.

İspat: $x^i \in X$, $i = 1,2,\cdots,p$ olmak üzere $x = \left(x^1, x^2, \cdots, x^p\right)$ olsun. Tanımdan

$$N_x^-\left(\prod_{i=1}^{p} A_n^{(i)}\right) = \left\{n \in \mathbb{N} : x \notin \prod_{i=1}^{p} A_n^{(i)}\right\}$$

dir. Ayrıca,

$$\left\{n \in \mathbb{N} : x \notin \prod_{i=1}^{p} A_n^{(i)}\right\} = \left\{n \in \mathbb{N} : \exists i = \{1,2,\cdots,p\},\ x^i \notin A_n^{(i)}\right\}$$

olduğundan $N_x^-\left(\prod_{i=1}^{p} A_n^{(i)}\right) = \bigcup_{i=1}^{p} N_x^-\left(A_n^{(i)}\right)$ elde edilir.

Benzer şekilde yine tanımdan

$$N_x^+\left(\prod_{i=1}^{p} A_n^{(i)}\right) = \left\{n \in \mathbb{N} : x \in \prod_{i=1}^{p} A_n^{(i)}\right\}$$

dir. Ayrıca,

$$\left\{n\in\mathbb{N} : x\in\prod_{i=1}^{p} A_n^{(i)}\right\}=\left\{n\in\mathbb{N} : \forall i=1,2,\cdots,p \text{ için } x^i\in A_n^{(i)}\right\}$$

olduğundan $N_x^{+}\left(\prod_{i=1}^{p} A_n^{(i)}\right)=\bigcap_{i=1}^{p} N_x^{+}\left(A_n^{(i)}\right)$ elde edilir. ■

Lemma 4.1.5: $X,Y\neq\emptyset$ kümeler, $(K_n)\subset X$, $(M_n)\subset Y$ küme dizileri ve $f:X\to Y$ tersi olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda her $x\in X$ ve her $y\in Y$ için

i. $N_x^{-}(K_n)=N_{f(x)}^{-}(f(K_n))$

ii. $N_x^{+}(K_n)=N_{f(x)}^{+}(f(K_n))$

iii. $N_y^{-}(M_n)=N_{f^{-1}(y)}^{-}(f^{-1}(M_n))$

iv. $N_y^{+}(M_n)=N_{f^{-1}(y)}^{+}(f^{-1}(M_n))$

sağlanır.

İspat:

i. $n\in N_x^{-}(K_n)=\{n\in\mathbb{N} : x\notin K_n\}$ keyfi eleman olsun. O halde $f(x)\notin f(K_n)$ dir. Bu ise

$$N_x^{-}(K_n)\subset\{n\in\mathbb{N} : f(x)\notin f(K_n)\}=N_{f(x)}^{-}(f(K_n))$$

olması demektir.

Şimdi $n\in N_{f(x)}^{-}(f(K_n))$ keyfi olsun öyle ki bu n ler için $f(x)\notin f(K_n)$ dir. Bu ise $x\notin K_n$ olması demektir. Böylece $n\in N_x^{-}(K_n)$ elde edilir. Bu da

$$N_{f(x)}^{-}(f(K_n))\subset N_x^{-}(K_n)$$

içermesinin sağlanması demektir. Böylece ispat tamamlanmış olur.

ii. Keyfi $n\in N_x^{+}(K_n)$ için $x\in K_n$ olduğundan $f(x)\in f(K_n)$ sağlanır. Yani; $n\in N_{f(x)}^{+}(f(K_n))$ dir.

Bu ise $N_x^+(K_n) \subset N_{f(x)}^+(f(K_n))$ olması demektir.

Benzer şekilde $n \in N_{f(x)}^+(f(K_n))$ için $f(x) \in f(K_n)$ olmak üzere $x \in K_n$ dir. Böylece $n \in N_x^+(K_n)$ dir. Yani, $N_{f(x)}^+(f(K_n)) \subset N_x^+(K_n)$ olur ve ispat tamamlanır.

iii. $n \in N_y^-(M_n)$ keyfi olmak üzere $y \notin M_n$ için $f^{-1}(y) \notin f^{-1}(M_n)$ dir. Buradan $n \in N_{f^{-1}(y)}^-(f^{-1}(M_n))$ elde edilir. Yani, $N_y^-(M_n) \subset N_{f^{-1}(y)}^-(f^{-1}(M_n))$ dir. Benzer biçimde keyfi $n \in N_{f^{-1}(y)}^-(f^{-1}(M_n))$ için $f^{-1}(y) \notin f^{-1}(M_n)$ olduğundan $y \notin M_n$ elde edilir. Böylece $n \in N_y^-(M_n)$ dir ve $N_{f^{-1}(y)}^-(f^{-1}(M_n)) \subset N_y^-(M_n)$ olur. Bu ise ispatı tamamlar.

iv. Keyfi $n \in N_y^+(M_n)$ için $y \in M_n$ olduğundan $f^{-1}(y) \in f^{-1}(M_n)$ sağlanır. Buradan $n \in N_{f^{-1}(y)}^+(f^{-1}(M_n))$ elde edilir. Yani, $N_y^+(M_n) \subset N_{f^{-1}(y)}^+(f^{-1}(M_n))$ dir. Benzer şekilde $n \in N_{f^{-1}(y)}^+(f^{-1}(M_n))$ için $f^{-1}(y) \in f^{-1}(M_n)$ olmak üzere $y \in M_n$ dir. Böylece $n \in N_y^+(M_n)$ dir. Yani, $N_{f^{-1}(y)}^+(f^{-1}(M_n)) \subset N_y^+(M_n)$ olur. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Tanım 4.1.2: $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ admissible ideal ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ küme dizisi verilsin. Bu durumda,

$$\{x \in X : N_x^-(A_n) \in \mathcal{I}\} ,$$

$$\{x \in X : N_x^+(A_n) \notin \mathcal{I}\}$$

kümelerine sırasıyla $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin ideal limit infimumu ve ideal limit supremumu denir. Yani sırasıyla

$$\mathcal{I} - \liminf_{n\to\infty} A_n := \{x \in X : N_x^-(A_n) \in \mathcal{I}\},$$

$$\mathcal{I}-\limsup_{n\to\infty} A_n := \left\{ x \in X \ : N_x^+\left(A_n\right) \notin \mathcal{I} \right\}$$

dir. Eğer,

$$\mathcal{I}-\liminf_{n\to\infty} A_n = \mathcal{I}-\limsup_{n\to\infty} A_n =: A$$

ise $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine A kümesine ideal yakınsaktır (veya $\mathcal{I}-$ yakınsaktır) denir ve

$$\mathcal{I}-\lim_{n\to\infty} A_n = A$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 4.1.1: $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ admissible ideal ve $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi verilsin. Bu durumda,

$$\mathcal{I}-\lim\inf A_n \subseteq \mathcal{I}-\lim\ \sup A_n$$

içermesi sağlanır. Bu içermenin tersi her zaman doğru değildir.

İspat: $x \in \mathcal{I}-\lim\inf A_n$ keyfi verilsin. $\mathcal{I}-\lim\inf A_n$ tanımından $N_x^-\left(A_n\right) \in \mathcal{I}$ olmak zorundadır. Yani $\left\{n \in \mathbb{N} : x \notin A_n\right\} \in \mathcal{I}$ dır. Bu ise $\left\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\right\} \notin \mathcal{I}$ olması demektir. Yani $N_x^+ \notin \mathcal{I}$ dır. O halde, $x \in \mathcal{I}-\lim\sup A_n$ sağlanır. x keyfi olduğundan içerme sağlanır.

Şimdi içermenin tersinin her zaman doğru olmayacağına dair bir örnek verelim. Genelliği kaybetmeksizin $\mathcal{I}_\delta$ idealini göz önüne alalım:

$$A_n = \begin{cases} \mathbb{N}, & n\ tek \\ \left\{1,2\right\}, & n\ çift \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa açıktır ki

$$\mathcal{I}_\delta-\limsup_{n\to\infty} A_n = \mathbb{N} \not\subset \left\{1,2\right\} = \mathcal{I}_\delta-\liminf_{n\to\infty} A_n$$

sağlanır. ■

Teorem 4.1.2: $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ admissible ideal olmak üzere $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi verilsin. Bu durumda

$$\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \mathcal{I} - \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \mathcal{I} - \limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$$

içermesi sağlanır.

İspat: $\mathcal{I} - \liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \mathcal{I} - \limsup_{n\to\infty} A_n$ olduğu Teorem 4.1.1' den açıktır. Şimdi $\liminf_{n\to\infty} A_n \subseteq \mathcal{I} - \liminf_{n\to\infty} A_n$ ve $\mathcal{I} - \limsup_{n\to\infty} A_n \subseteq \limsup_{n\to\infty} A_n$ olduğunu gösterelim:

$x \in \liminf A_n$ keyfi verilsin. Tanımdan $x \in \bigcup_{n=1}^{\infty}\bigcap_{k\geq n} A_k$ dır. Yani; $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall k \geq n_0$ için $x \in A_k$ dır. Böylece $\{n \in \mathbb{N} : x \notin A_n\} \subset \{1, 2, ..., n_0\}$ olur. $\mathcal{I}$ admissible ideal olduğundan $\{1, 2, \cdots, n_0\} \in \mathcal{I}$ dır ve buradan $N_x^-(A_n) \in \mathcal{I}$ elde edilir. Bu ise $x \in \mathcal{I} - \liminf A_n$ olması demektir.

Şimdi, $x \in \mathcal{I} - \limsup A_n$ keyfi verilsin. Tanımdan $\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\} \notin \mathcal{I}$ olacağından $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki $k \geq n_0$ olmak üzere $x \in A_k$ olur. Yani; $x \in \bigcup_{k\geq n_0} A_k \subset \bigcup_{k=1}^{\infty} A_k$ dır. Böylece $x \in \bigcap_{n=1}^{\infty}\bigcup_{k\geq n} A_k$ olur ve $x \in \limsup A_n$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Uyarı 4.1.1: $\mathcal{I}-$yakınsak olup, yakınsak olmayan en az bir $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi vardır.

İspat: Genelliği kaybetmeden $\mathcal{I}_\delta$ idealini göz önüne alalım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi

$$A_n := \begin{cases} \varnothing & , n = k^2 \\ X & , n \neq k^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanırsa açıktır ki,

$$\mathcal{I}_\delta - \liminf A_n = \{x \in X \,:\, \{n \in \mathbb{N} : x \notin A_n\} \in \mathcal{I}_\delta\} = X \,,$$

$$\mathcal{I}_\delta-\limsup A_n=\left\{x\in X\ :\ \left\{n\in\mathbb{N} : x\in A_n\right\}\notin\mathcal{I}_\delta\right\}=X$$

sağlanır. Yani, $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ kümeler dizisi $\mathcal{I}_\delta-$yakınsaktır. Fakat

$$\liminf_{n\to\infty} A_n=\bigcup_{n=1}^{\infty}\left(\bigcap_{k\geq n}A_k\right)=\varnothing,$$

$$\limsup_{n\to\infty} A_n=\bigcap_{n=1}^{\infty}\left(\bigcup_{k\geq n}A_k\right)=X$$

olduğundan $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi yakınsak değildir. ■

Teorem 4.1.3: $I\subset 2^{\mathbb{N}}$ admissible ideali ve $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ küme dizisi verilsin. Bu durumda;

i. $\mathcal{I}-\limsup\left(X\setminus A_n\right)=X\setminus\left(\mathcal{I}-\liminf A_n\right)$

ii. $\mathcal{I}-\liminf\left(X\setminus A_n\right)=X\setminus\left(\mathcal{I}-\limsup A_n\right)$

sağlanır.

İspat:

i. $x\in\mathcal{I}-\limsup\left(X\setminus A_n\right)$ keyfi elemanını alalım. $\mathcal{I}-\limsup$ tanımından $\left\{n\in\mathbb{N} : x\in\left(X\setminus A_n\right)\right\}\notin\mathcal{I}$ dir ve bu da $\left\{n\in\mathbb{N} : x\notin A_n\right\}\notin\mathcal{I}$ olması demektir. O halde, $x\notin\mathcal{I}-\liminf A_n$ olur. Buradan $x\in X\setminus\left(\mathcal{I}-\liminf A_n\right)$ olur. Böylece,

$$\mathcal{I}-\limsup\left(X\setminus A_n\right)\subset X\setminus\left(\mathcal{I}-\liminf A_n\right)$$

elde edilir.

Şimdi $x\in X\setminus\left(\mathcal{I}-\liminf A_n\right)$ keyfi elemanını alalım. Buradan $x\notin\mathcal{I}-\liminf A_n$ dır. Tanım gereği $\left\{n\in\mathbb{N} : x\notin A_n\right\}\notin\mathcal{I}$ olur ve böylece $\left\{n\in\mathbb{N} : x\in\left(X\setminus A_n\right)\right\}\notin\mathcal{I}$ dır. Bu ise $x\in\mathcal{I}-\limsup\left(X\setminus A_n\right)$ olması demektir. Buradan

$$X\setminus\left(\mathcal{I}-\liminf A_n\right)\subset\mathcal{I}-\limsup\left(X\setminus A_n\right)$$

olur ve bu da ispatı tamamlar.

ii. $x \in \mathcal{I} - \liminf \left(X \setminus A_n \right)$ keyfi elemanını alalım. $\mathcal{I} - \liminf$ tanımından $\{n \in \mathbb{N} : x \notin \left(X \setminus A_n \right)\} \in \mathcal{I}$ olur ve bu ise $\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\} \in \mathcal{I}$ olması demektir. O halde, $x \notin \mathcal{I} - \limsup A_n$ olur. Buradan $x \in X \setminus \left(\mathcal{I} - \limsup A_n \right)$ dır. Böylece,

$$\mathcal{I} - \liminf \left(X \setminus A_n \right) \subset X \setminus \left(\mathcal{I} - \limsup A_n \right)$$

elde edilir.

Şimdi, $x \in X \setminus \left(\mathcal{I} - \limsup A_n \right)$ keyfi olsun. Buradan $x \notin \mathcal{I} - \limsup A_n$ dır. Tanım gereği $\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\} \in \mathcal{I}$ dır ve buradan $\{n \in \mathbb{N} : x \notin \left(X \setminus A_n \right)\} \in \mathcal{I}$ olur. Buradan, $x \in \mathcal{I} - \liminf \left(X \setminus A_n \right)$ elde edilir. Böylece

$$X \setminus \left(\mathcal{I} - \limsup A_n \right) \subset \mathcal{I} - \liminf \left(X \setminus A_n \right)$$

olur ve bu da ispatı tamamlar. ■

Sonuç 4.1.1: $\left(A_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ sabit küme dizisi olsun. Bu durumda $\left(A_n \right)_{n \in \mathbb{N}}$ dizisi $\mathcal{I} -$yakınsaktır.

İspat: $A \subset X$ tespit edilmiş bir küme ve $\left(A_n \right) = \left(A, A, A, ..., A, ... \right)$ olsun. $x \in X$ keyfi olmak üzere ya $x \in A$ ya da $x \notin A$ dır.

$$\mathcal{I} - \liminf_{n \to \infty} A_n = \{x \in X : \{n \in \mathbb{N} : x \notin A_n\} \in \mathcal{I}\} = \begin{cases} \varnothing \in \mathcal{I}, & x \in A \\ \mathbb{N} \notin \mathcal{I}, & x \notin A \end{cases}$$

Bu ise $\mathcal{I} - \liminf A_n = A$ olması demektir.

Benzer biçimde,

$$\mathcal{I} - \limsup_{n \to \infty} A_n = \{x \in X : \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\} \notin \mathcal{I}\} = \begin{cases} \mathbb{N} \notin \mathcal{I}, & x \in A \\ \varnothing \in \mathcal{I}, & x \notin A \end{cases}$$

olur. Bu ise $\mathcal{I} - \limsup A_n = A$ olması demektir. Böylece,

$$\mathcal{I} - \liminf_{n \to \infty} A_n = \mathcal{I} - \limsup_{n \to \infty} A_n = \mathcal{I} - \lim_{n \to \infty} A_n = A$$

sağlanır. ■

Teorem 4.1.4: $X \neq \varnothing$ bir küme, her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n \subset L_n \subset M_n$ koşulunu sağlayan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizileri verilsin. Eğer, $\mathcal{I}-\liminf_{n\to\infty} K_n = \mathcal{I}-\liminf_{n\to\infty} M_n = A$ ise $\mathcal{I}-\liminf_{n\to\infty} L_n = A$ dır.

İspat: $A = \mathcal{I}-\liminf_{n\to\infty} K_n = \mathcal{I}-\liminf_{n\to\infty} M_n$ ve $x \in A$ keyfi eleman olsun. Bu durumda,

$$N_x^-(K_n) = \{n \in \mathbb{N} : x \notin K_n\} \in \mathcal{I}$$

$$N_x^-(M_n) = \{n \in \mathbb{N} : x \notin M_n\} \in \mathcal{I}$$

dir. Ayrıca, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $K_n \subset L_n \subset M_n$ sağlandığından

$$\{n \in \mathbb{N} : x \notin M_n\} \subset \{n \in \mathbb{N} : x \notin L_n\} \subset \{n \in \mathbb{N} : x \notin K_n\}$$

içermesi doğrudur. Ayrıca, $\{n \in \mathbb{N} : x \notin K_n\} \in \mathcal{I}$ olduğundan ve idealin tanımından $\{n \in \mathbb{N} : x \notin L_n\} \in \mathcal{I}$ elde edilir. Böylece $x \in \mathcal{I}-\liminf_{n\to\infty} L_n$, yani; $A \subset \mathcal{I}-\liminf_{n\to\infty} L_n$ elde edilir.

Şimdi $x \in \mathcal{I}-\liminf_{n\to\infty} L_n$ keyfi eleman olsun. Açıktır ki $N_x^-(L_n) \in \mathcal{I}$ dir.

$$\{n \in \mathbb{N} : x \notin M_n\} \subset \{n \in \mathbb{N} : x \notin L_n\}$$

içermesi sağlandığından $N_x^-(M_n) \in \mathcal{I}$ ve $x \in A$ olur. Buradan, $\mathcal{I}-\liminf_{n\to\infty} L_n \subset A$ dir. Böylece istenen elde edilir. ■

Teorem 4.1.5: $X \neq \varnothing$ bir küme ve her $n \in \mathbb{N}$ için $K_n \subset L_n \subset M_n$ koşulunu sağlayan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizileri verilsin. Eğer, $\mathcal{I}-\limsup_{n\to\infty} K_n = \mathcal{I}-\limsup_{n\to\infty} M_n = A$ ise $\mathcal{I}-\limsup_{n\to\infty} L_n = A$ dır.

İspat: $A = \mathcal{I}-\limsup_{n\to\infty} K_n = \mathcal{I}-\limsup_{n\to\infty} M_n$ ve $x \in A$ keyfi eleman olsun. Yani;

$$N_x^+(K_n) = \{n \in \mathbb{N} : x \in K_n\} \notin \mathcal{I},$$

$$N_x^+(M_n)=\{n\in\mathbb{N}: x\in M_n\}\notin\mathcal{I}$$

sağlanır. Ayrıca, $\forall n\in\mathbb{N}$ için $K_n\subset L_n\subset M_n$ sağlandığından

$$\{n\in\mathbb{N}: x\in K_n\}\subset\{n\in\mathbb{N}: x\in L_n\}\subset\{n\in\mathbb{N}: x\in M_n\}$$

içermesi elde edilir. Ayrıca $\{n\in\mathbb{N}: x\in K_n\}\notin\mathcal{I}$ olduğundan ve idealin tanımından $\{n\in\mathbb{N}: x\in L_n\}\notin\mathcal{I}$ dır. Bu ise $x\in\mathcal{I}-\limsup\limits_{n\to\infty} L_n$, yani; $A\subset\mathcal{I}-\limsup\limits_{n\to\infty} L_n$ olması demektir.

Şimdi $x\in\mathcal{I}-\limsup\limits_{n\to\infty} L_n$ keyfi eleman olsun. Açıktır ki $N_x^+(L_n)\notin\mathcal{I}$ dır.

$$\{n\in\mathbb{N}: x\in L_n\}\subset\{n\in\mathbb{N}: x\in M_n\}$$

içermesi sağlandığından $N_x^+(M_n)\notin\mathcal{I}$ ve $x\in A$ elde edilir. Böylece $\mathcal{I}-\liminf\limits_{n\to\infty} L_n\subset A$ olur ve ispat tamamlanır ■

Teorem 4.1.6: $X\neq\varnothing$ bir küme ve bu uzayda her $n\in\mathbb{N}$ için $K_n\subset L_n\subset M_n$ koşulunu sağlayan $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(M_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizileri verilsin. Eğer, $\mathcal{I}-\lim\limits_{n\to\infty} K_n=\mathcal{I}-\lim\limits_{n\to\infty} M_n=A$ ise $\mathcal{I}-\lim\limits_{n\to\infty} L_n=A$ dır.

İspat: İspat Teorem 4.1.5 ve Teorem 4.1.6' dan açıktır. ■

Teorem 4.1.7: $X\neq\varnothing$ bir küme, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(L_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve (K_n^i) $(i=1,2,\cdots,p)$ küme dizileri verilsin. Bu durumda;

i. $\mathcal{I}-\limsup(K_n\cap L_n)=(\mathcal{I}-\limsup K_n)\cap(\mathcal{I}-\limsup L_n)$

ii. $\mathcal{I}-\liminf(K_n\cap L_n)=(\mathcal{I}-\liminf K_n)\cup(\mathcal{I}-\liminf L_n)$

iii. $\mathcal{I}-\limsup(K_n\cup L_n)=(\mathcal{I}-\limsup K_n)\cup(\mathcal{I}-\limsup L_n)$

iv. $\mathcal{I}-\liminf(K_n\cup L_n)=(\mathcal{I}-\liminf K_n)\cap(\mathcal{I}-\liminf L_n)$

v. $\mathcal{I}-\limsup\prod\limits_{i=1}^{p} K_n^i=\bigcap\limits_{i=1}^{p}(\mathcal{I}-\limsup K_n^i)$

vi. $\mathcal{I}-\liminf \prod_{i=1}^{p} K_n^{\,i} = \bigcup_{i=1}^{p}\left(\mathcal{I}-\liminf K_n^{\,i}\right)$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: Teoremin ispatı Lemma 4.2.2, Lemma 4.2.3 ve Lemma 4.2.4'den açıktır. ■

Teorem 4.1.8: $X, Y \neq \varnothing$ iki küme, $(K_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$, $(M_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset Y$ ve $f: X \to Y$ tersi olan bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur:

i. $f\left(\mathcal{I}-\limsup K_n\right) = \mathcal{I}-\limsup f\left(K_n\right)$

ii. $f\left(\mathcal{I}-\liminf K_n\right) = \mathcal{I}-\liminf f\left(K_n\right)$

iii. $f^{-1}\left(\mathcal{I}-\limsup M_n\right) = \mathcal{I}-\limsup f^{-1}\left(M_n\right)$

iv. $f^{-1}\left(\mathcal{I}-\liminf M_n\right) = \mathcal{I}-\liminf f^{-1}\left(M_n\right)$

İspat: Teoremin ispatı Lemma 4.1.5' ten açıktır. ■

Tanım 4.1.3: $X \neq \varnothing$ bir küme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ keyfi küme dizisi olsun. Eğer,

i. En az bir $\varnothing \subsetneq B \subsetneq X$ kümesi bulunabilir öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset B$ ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine üstten sınırlıdır denir. B kümesine ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi için bir üst sınır kümesi denir.

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin üst sınır kümelerinin ailesi U_{A_n} ile gösterilir. Yani;

$$\mathrm{U}_{A_n} = \{B :\ \forall n \in \mathbb{N}\ A_n \subset B\}$$

ii. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin üst sınır kümelerinin en darına $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin supremumu denir ve $\sup_n A_n$ biçiminde gösterilir.

Aşağıdaki teoremde bir $\varnothing \subsetneq B \subsetneq X$ kümesinin $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin supremumu olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

Teorem 4.1.9: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n) \subset X$ küme dizisi ve $B \subset X$ olsun.

$\sup_n A_n := B \Leftrightarrow$ **i.** $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset B$

ii. $\forall C \subset B$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $C \subset A_{n_0} \subset B$

İspat: "$\Rightarrow$" $\sup\limits_n A_n = B$ olduğunu kabul edelim. O halde, supremumun tanımından $B \in \mathrm{U}_{A_n}$ elde edildir ve buradan (i) açıktır. Şimdi (ii)' nin doğru olmadığını kabul edelim. Yani, öyle $B^* \subset B$ kümesi bulunabilir öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset B^*$ sağlanır. Bunun anlamı ise $B^* \in \mathrm{U}_{A_n}$ olması demektir. Bu ise $B = \sup\limits_n A_n$ olmasıyla çelişir.

"$\Leftarrow$" Şimdi (i) ve (ii) sağlandığını kabul edelim. (ii)'den $C \notin \mathrm{U}_{A_n}$ sağlanır. $C \subset B$ olduğundan ve (i)'den $\sup\limits_n A_n = B$ elde edilir. ■

Sonuç 4.1.2: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ise X ' in alt kümelerinin bir dizisi olmak üzere

$$\sup_n A_n = \bigcap \left\{ B : B \in \mathrm{U}_{A_n} \right\}$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $\mathrm{C} := \sup\limits_n A_n \neq \bigcap \left\{ B : B \in \mathrm{U}_{A_n} \right\}$ olsun. Bu durumda Teorem 4.1.3-(i)' den $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset C$ sağlanır. Böylece

$$\bigcap \left\{ B : B \in \mathrm{U}_{A_n} \right\} \subset C$$

elde edilir. Bu ise C ' nin $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ için en dar üst sınır kümesi olmasıyla çelişir. ■

Tanım 4.1.4: $X \neq \varnothing$ bir küme $(A_n) \subset X$ keyfi küme dizisi olsun. Eğer,

i. En az bir $\varnothing \subsetneq B \subsetneq X$ kümesi bulunabilir öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B \subset A_n$ ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine alttan sınırlıdır denir ve B kümesine ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi için bir alt sınır kümesi denir.

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin alt sınır kümelerinin ailesi L_{A_n} ile gösterilir. Yani;

$$\mathrm{L}_{A_n} = \{B : \forall n \in \mathbb{N} \;\; B \subset A_n\}$$

ii. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin alt sınır kümelerinin en genişine $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin infimumu denir ve $\inf_n A_n$ biçiminde gösterilir.

Aşağıdaki teoremde bir $\varnothing \subsetneq B \subsetneq X$ kümesinin $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin infimumu olması için gerek ve yeter şartlar verilecektir.

Teorem 4.1.10: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n) \subset X$ bir küme dizisi ve $B \subset X$ olsun.

$\inf_n A_n = B \Leftrightarrow$ **i)** $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B \subset A_n$

ii) $\forall C \supset B$ için $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $B \subset A_{n_0} \subset C$

İspat: "$\Rightarrow$" $\inf_n A_n = B$ olduğunu kabul edelim. O halde, infimum tanımından $B \in \mathrm{L}_{A_n}$ elde edildir ve buradan (i) açıktır. Şimdi (ii)' nin doğru olmadığını kabul edelim. Yani, öyle $B^* \supset B$ kümesi bulanabilir öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $B^* \subset A_n$ sağlanır. Bunun anlamı ise $B^* \in \mathrm{L}_{A_n}$ olması demektir. Bu ise $B = \inf_n A_n$ olmasıyla çelişir.

"$\Leftarrow$" Şimdi (i) ve (ii) sağlandığını kabul edelim. (ii)'den $C \notin \mathrm{L}_{A_n}$ sağlanır. $B \subset C$ olduğundan ve (i)'den $\inf_n A_n = B$ elde edilir. ■

Sonuç 4.1.3: $X \neq \varnothing$ bir küme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ise X ' in alt kümelerinin bir dizisi olmak üzere

$$\inf_n A_n = \bigcup \{B : B \in \mathrm{L}_{A_n}\}$$

dir.

İspat: Kabul edelim ki $C = \inf_n A_n \neq \bigcup \{B : B \in \mathrm{L}_{A_n}\}$ olsun. Bu durumda Teorem 4.1.4-(i)' den $\forall n \in \mathbb{N}$ için $C \subset A_n$ dir. Böylece $C \subset \bigcup \{B : B \in \mathrm{L}_{A_n}\}$ dir. Bu ise C ' nin $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ için en geniş alt sınır kümesi olması ile çelişir. ■

Tanım 4.1.5: Eğer $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi hem alttan hem de üstten sınırlı ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine sınırlıdır denir.

Yani; $\exists A, B \subset X\left(A, B \neq \varnothing, X\right)$ kümeleri vardır öyle ki $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A \subset A_n \subset B$ sağlanır.

Uyarı 4.1.2: Alttan ya da üstten sınırlı olmayan küme dizileri vardır. Örneğin;

i. $\mathbb{N}$ üzerinde

$$(A_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\{1, 2, \cdots, n\}\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

biçiminde tanımlanan küme dizisi üstten sınırlı değildir.

ii. $\mathbb{R}$ üzerinde

$$(B_n)_{n\in\mathbb{N}} = \left(\left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right)\right)_{n\in\mathbb{N}}$$

biçiminde tanımlanan küme dizisi alttan sınırlı değildir.

iii. $\mathbb{R}$ üzerinde

$$(C_n)_{n\in\mathbb{N}} = \begin{cases} \mathbb{R}, & n \text{ tek} \\ \varnothing, & n \text{ çift} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan küme dizisi ne alttan ne de üstten sınırlıdır.

Teorem 4.1.11: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ bir küme dizisi olsun. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi monoton artan ise

$$\sup_n A_n = \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

dır.

İspat: $x \in \sup_n A_n$ keyfi verilsin. Sonuç 4.1.2'den,

$$\sup_n A_n = \bigcap\left\{B : B \in \mathrm{U}_{A_n}\right\} \text{ ve } x \in \bigcap\left\{B : B \in \mathrm{U}_{A_n}\right\}$$

dir. Yani her $B \in \mathrm{U}_{A_n}$ için $x \in B$ dir. Şimdi kabul edelim ki $x \notin \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ olsun. Buradan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x \notin A_n$ dir. O halde $B^* = B \setminus \{x\}$ biçiminde seçilirse $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset B^* \subset B$ olur. Böylece $\forall B \in \mathrm{U}_{A_n}$ için $B^* \in \mathrm{U}_{A_n}$ dir ve

$$\bigcap\left\{B : B \in \mathrm{U}_{A_n}\right\} \supset \bigcap\left\{B^* : B^* \in \mathrm{U}_{A_n}\right\}$$

içermesi sağlanır. Bu ise çelişkidir. Böylece $x \in \bigcup_{n\in\mathbb{N}} A_n$ olur ve

$$\sup_n A_n \subset \bigcup_n A_n$$

içermesi sağlanır.

Şimdi $x \in \bigcup_n A_n$ olsun. Yani, en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ için $x \in A_{n_0}$ dır. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi monoton artan olduğundan $\forall n \geq n_0$ için $x \in A_n$ dir. Böylece her $\forall n \geq n_0$ için $A_n \subset B$ ve $x \in B$ dir. O halde

$$x \in \bigcap\left\{B : B \in \mathrm{U}_{A_n}\right\} = \sup_n A_n$$

olur. Bu da

$$\bigcup_n A_n \subset \sup_n A_n$$

içermesinin doğru olduğunu gösterir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Sonuç 4.1.4: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ küme dizisi monoton artan olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \sup_n A_n$$

sağlanır.

Teorem 4.1.12: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ bir küme dizisi olsun. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi monoton azalan ise

$$\inf_n A_n = \bigcap_{n\in\mathbb{N}} A_n$$

dir.

İspat: $x \in \inf_n A_n$ keyfi bir nokta olsun. Sonuç 4.1.3'ten

$$\inf_n A_n = \bigcup \{B : B \in \mathrm{L}_{A_n}\} \text{ ve } x \in \bigcup \{B : B \in \mathrm{L}_{A_n}\}$$

elde edilir. Bu ise en az bir $B^* \in \mathrm{L}_{A_n}$ için $x \in B^*$ olması demektir. Buradan her $n \in \mathbb{N}$ için $x \in A_n$ elde edilir. Yani $x \in \bigcap_n A_n$ dir. Böylece

$$\inf_n A_n \subset \bigcap_n A_n$$

içermesi sağlanır.

Şimdi $x \in \bigcap_n A_n$ alalım ve kabul edelim ki $x \notin \inf_n A_n$ olsun. Buradan her $B \in \mathrm{L}_{A_n}$ için $x \notin B$ elde edilir. $B^* = B \cup \{x\}$ biçiminde seçilirse $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton azalan olduğundan $\forall n \in \mathbb{N}$ için $B^* \subset A_n$ olur. Bu ise $B^* \in \mathrm{L}_{A_n}$ olası demektir. Buradan,

$$\bigcup \{B : B \in \mathrm{L}_{A_n}\} \subset \bigcup \{B^* : B^* \in \mathrm{L}_{A_n}\}$$

elde edilir. Bu ise çelişkidir. Böylece

$$\bigcap_n A_n \subset \inf_n A_n$$

içermesi sağlanır. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Sonuç 4.1.5: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ küme dizisi monoton azalan olsun. Bu durumda,

$$\lim_{n\to\infty} A_n = \inf_n A_n$$

dır.

Tanım 4.1.6: $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ bir admissible ideal, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ise X ' de bir küme dizisi ve $\varnothing \subsetneq B \subsetneq X$ verilsin. Eğer,

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \subset B\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \quad \left(\text{veya } \{n \in \mathbb{N} : A_n \not\subset B\} \in \mathcal{I}\right)$$

sağlanıyor ise B kümesine $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin ideal üst sınır kümesi denir. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine ise ideal üstten sınırlıdır denir.

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin ideal üst sınırlarının kümesi $\mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ sembolü ile gösterilir.

Teorem 4.1.13: $X \neq \varnothing$ bir küme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ bir küme dizisi olmak üzere $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin her bir üst sınır kümesi ideal üst sınır kümesidir. Yani, $\mathrm{U}_{A_n} \subset \mathrm{U}^{\mathcal{I}}{}_{A_n}$ dır.

İspat: $B \subset X$ kümesi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin bir üst sınır kümesi olsun. Yani, $\forall n \in \mathbb{N}$ için $A_n \subset B$ sağlanır. Buradan,

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \subset B\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

elde edilir. Böylece, B kümesi bir ideal üst sınır kümesi olur. B kümesi keyfi olduğundan

$$\mathrm{U}_{A_n} \subset \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$$

elde edilir. ■

Uyarı 4.1.3: Teorem 4.1.13' ün tersi her zaman doğru değildir. Özel olarak $\mathcal{I}_\delta$ idealini ve

$$A_n = \begin{cases} \mathbb{R} & , n = k^2, k \in \mathbb{N} \\ \{1,2\} & , n \neq k^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan küme dizisini göz önüne alalım. Bu durumda, $B=\{1,2,3\}$ kümesi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi için bir ideal üst sınır kümesidir. Fakat $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi üstten sınırlı değildir.

Tanım 4.1.7: $\mathcal{I}\subset 2^{\mathbb{N}}$ admissible ideali, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ise X 'de bir küme dizisi ve $\varnothing\subsetneq A\subsetneq X$ verilsin. Eğer,

$$\{n\in\mathbb{N}: A\subset A_n\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})\quad \left(\text{veya } \{n\in\mathbb{N}: A\not\subset A_n\}\in\mathcal{I}\right)$$

ise A kümesine $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin ideal alt sınır kümesi denir. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisine ise ideal alttan sınırlıdır denir.

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin ideal alt sınırlarının kümesi $\mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ sembolü ile gösterilir.

Teorem 4.1.14: $X\neq\varnothing$ bir küme $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ bir küme dizisi olmak üzere $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin her bir alt sınır kümesi ideal alt sınır kümesidir. Yani, $\mathrm{L}_{A_n}\subset\mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ dır.

İspat: $A\subset X$, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin bir alt sınır kümesi olsun. O halde her $n\in\mathbb{N}$ için $A\subset A_n$ sağlanır. Buradan,

$$\{n\in\mathbb{N}: A\subset A_n\}=\mathbb{N}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$$

olur. Böylece A kümesi bir ideal alt sınır kümesi olur. Burada A kümesi keyfi olduğundan,

$$\mathrm{L}_{A_n}\subset\mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$$

elde edilir. ■

Uyarı 4.1.4: Teorem 4.1.14' ün tersi her zaman doğru değildir. Özel olarak $\mathcal{I}_\delta$ idealini ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$A_n = \begin{cases} \left(-\frac{1}{n}, \frac{1}{n}\right), & n = k^2, k \in \mathbb{N} \\ \{1,2,3\}, & n \neq k^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan küme dizisini göz önüne alalım. Bu durumda, $A = \{1,2\}$ kümesi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi için bir ideal alt sınır kümesidir. Fakat $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi alttan sınırlı değildir.

Tanım 4.1.8: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi hem ideal alttan hem de ideal üstten sınırlı ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizine ideal sınırlıdır denir. Yani, boştan farklı $A, B \subsetneq X$ kümeleri verilsin. Eğer

$$\{n \in \mathbb{N} : A \subset A_n \subset B\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

sağlanıyor ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine ideal sınırlı (veya $\mathcal{I}-$sınırlı) dır denir.

Sonuç 4.1.6: $A \subset X$ bir ideal alt sınır kümesi ve $A^* \subset A$ ise A^* kümesi de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi için ideal alt sınır kümesidir.

İspat: $A \subset X$ kümesi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi için bir ideal alt sınır kümesi ise

$$\{n \in \mathbb{N} : A \subset A_n\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

sağlanır. $A^* \subset A$ olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : A \subset A_n\} \subset \{n \in \mathbb{N} : A^* \subset A_n\}$$

içermesi sağlanır. Filtre tanımından

$$\{n \in \mathbb{N} : A^* \subset A_n\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

elde edilir. Yani, $A^* \in \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ sağlanır. ■

Sonuç 4.1.7: $B \subset X$ bir ideal üst sınır kümesi ve $B \subset B^*$ ise B^* kümesi de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi için ideal üst sınır kümesidir.

İspat: $B \subset X$ kümesi bir ideal üst sınır olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \subset B\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

sağlanır ve $B \subset B^*$ olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \subset B\} \subset \{n \in \mathbb{N} : A_n \subset B^*\}$$

içermesi sağlanır. Filtre tanımından

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \subset B^*\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

elde edilir. Yani, $B^* \in \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ sağlanır. ■

Uyarı 4.1.5: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi ideal alt (ideal üst) sınır kümesine sahip ise sonsuz çoklukta ideal alt (ideal üst) sınır kümelerine sahiptir.

Tanım 4.1.9: $X \neq \varnothing$ ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ bir küme dizisi olsun. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin ideal üst sınırlarının kümesinin infimumuna $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin ideal supremumu denir ve

$$\mathcal{I} - \sup A_n := \inf \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$$

biçiminde gösterilir.

Tanım 4.1.10: $X \neq \varnothing$ ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ bir küme dizisi olsun. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin ideal alt sınırlarının kümesinin supremumuna $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin ideal infimumu denir ve

$$\mathcal{I} - \inf A_n := \sup \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 4.1.15: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ keyfi bir dizi olmak üzere

$$\inf A_n \subseteq \mathcal{I} - \inf A_n \subseteq \mathcal{I} - \sup A_n \subseteq \sup A_n$$

içermesi sağlanır.

İspat: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin infimum tanımından,

$$\{n\in\mathbb{N} : \inf A_n \subseteq A_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

elde edilir. Böylece $\inf A_n \in \mathrm{L}^{\mathcal{I}}_{A_n}$ sağlanır. Ayrıca $\mathcal{I}-\inf A_n = \sup \mathrm{L}^{\mathcal{I}}_{A_n}$ olduğundan,

$$\inf A_n \subseteq \mathcal{I}-\inf A_n$$

elde edilir.

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin supremum tanımından,

$$\{n\in\mathbb{N} : A_n \subseteq \sup A_n\} = \mathbb{N} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

sağlanır. Böylece $\sup A_n \in \mathrm{U}^{\mathcal{I}}_{A_n}$ elde edilir. Ayrıca $\mathcal{I}-\sup A_n = \inf \mathrm{U}^{\mathcal{I}}_{A_n}$ olduğundan,

$$\mathcal{I}-\sup A_n \subseteq \sup A_n$$

elde edilir.

İspatı tamamlamak için $A\in \mathrm{L}^{\mathcal{I}}_{A_n}$ ve $B\in \mathrm{U}^{\mathcal{I}}_{A_n}$ keyfi kümeleri için $A\subseteq B$ olduğunu göstermek yeterlidir. Kabul edelim ki en az bir $A^*\in \mathrm{L}^{\mathcal{I}}_{A_n}$ ve $B^*\in \mathrm{U}^{\mathcal{I}}_{A_n}$ kümeleri vardır öyle ki $B^* \subset A^*$ sağlanır.

B^* bir ideal üst sınır kümesi olduğundan Sonuç 4.1.7' ten A^* kümesi de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin ideal üst sınır kümesi olur. Bu ise A^* kümesinin bir ideal alt sınır kümesi olmasıyla çelişir. Böylece

$$\mathcal{I}-\inf A_n \subseteq \mathcal{I}-\sup A_n$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.1.16: $X\neq\varnothing$ ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\subset X$ küme dizisi olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi monoton artan ise $\mathcal{I}-\inf A_n = \sup A_n$ dir.

ii. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi monoton azalan ise $\mathcal{I}-\sup A_n = \inf A_n$ dir.

İspat:

i. $x\in\mathcal{I}-\inf A_n$ olsun. Bu durumda en az bir $B\in\mathcal{I}-\inf A_n$ kümesi bulunabilir öyle ki $x\in B$ dir ve

$$\{n\in\mathbb{N} : B\subset A_n\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$$

sağlanır. Yani $\exists n_0\in\mathbb{N}$ için $x\in B\subset A_{n_0}$ dır. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton artan küme dizisi olduğundan, $\forall n\geq n_0$ için $x\in A_n$ olur. Buradan $x\in\bigcup_n A_n = \sup A_n$ elde edilir. Bu ise

$$\mathcal{I}-\inf A_n \subset \sup A_n$$

içermesinin sağlandığını gösterir.

Şimdi $x\in\sup A_n = \bigcup_n A_n$ olsun. Bu durumda $\exists n_0\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $x\in A_{n_0}$ dır. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi monoton artan olduğundan $\forall n\geq n_0$ için $A_{n_0}\subset A_n$ dir. Buradan,

$$\{n\in\mathbb{N} : A_{n_0}\subset A_n\}\supset\left(\mathbb{N}\setminus\{1,2,\ldots,\mathrm{n}_0\}\right)\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$$

olur. Böylece, $A_{n_0}\in \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ olduğundan $A_{n_0}\in\sup \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ ve $x\in\mathcal{I}-\inf A_n$ elde edilir. Yani,

$$\sup A_n \subset \mathcal{I}-\inf A_n$$

içermesi sağlanır. Bu da ispatı bitirir.

ii. $x\in\mathcal{I}-\sup A_n$ olsun. Böylece en az bir $B\in\mathcal{I}-\sup A_n$ kümesi mevcuttur öyle ki $x\in B$ dir ve

$$\{n\in\mathbb{N} : A_n\subset B\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$$

sağlanır. En az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $x \in A_{n_0}$ dır. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi monoton azalan olduğundan $\forall n \leq n_0$ için $x \in A_n$ olur. Şimdi kabul edelim ki $\forall n \geq n_0$ için $x \notin A_n$ olsun. O halde $x \notin A_{n_0+1} \in \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ olur. Bu ise çelişkidir. Böylece $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x \in A_n$ dir. Yani $x \in \bigcap_n A_n = \inf A_n$ dir. Buradan,

$$\mathcal{I} - \sup A_n \subset \inf A_n$$

elde edilir.

Şimdi $x \in \inf A_n = \bigcap_n A_n$ olsun. Kabul edelim ki $x \notin \mathcal{I} - \sup A_n$ olsun. Buradan, $x \notin \inf \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ ve dolayısıyla $x \notin \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ elde edilir. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kümeler dizisi monoton azalan olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_1\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

ve $A_1 \in \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ sağlanır. $\forall n \in \mathbb{N}$ için $x \in A_n$ olduğundan $x \in A_1$ elde edilir. Bu ise çelişkidir. Buradan,

$$\inf A_n \subset \mathcal{I} - \sup A_n$$

elde edilir ve bu da ispatı tamamlar. ■

Uyarı 4.1.6:

i. Eğer $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ sabit küme dizisi ise,

$$\inf A_n = \mathcal{I} - \inf A_n = \mathcal{I} - \sup A_n = \sup A_n$$

ii. Eğer $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall k \in \{1, 2, \ldots, n_0\}$ için $A_k \subseteq A$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n := \begin{cases} A_n \ , & n \leq n_0 \\ A \ , & n > n_0 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa,

$$\inf A_n \subseteq \mathcal{I}-\inf A_n \subseteq \mathcal{I}-\sup A_n = \sup A_n$$

iii. Eğer $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $\exists n_0 \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\forall k \in \{1,2,\ldots,n_0\}$ için $A_k \supseteq A$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n := \begin{cases} A_n \ , & n \le n_0 \\ A \ , & n > n_0 \end{cases}$$

olarak tanımlanırsa,

$$\inf A_n = \mathcal{I}-\inf A_n \subseteq \mathcal{I}-\sup A_n \subseteq \sup A_n$$

iv. Eğer $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi monoton artan ise,

$$\inf A_n \subseteq \mathcal{I}-\inf A_n = \mathcal{I}-\sup A_n = \sup A_n$$

v. Eğer $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi monoton azalan ise,

$$\inf A_n = \mathcal{I}-\inf A_n = \mathcal{I}-\sup A_n \subseteq \sup A_n$$

sağlanır. ■

Lemma 4.1.6: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ küme dizisi olsun. Bu durumda

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{I}-\inf A_n \not\subset A_n \not\subset \mathcal{I}-\sup A_n\} \in \mathcal{I} \qquad (*)$$

$$\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{I}-\inf A_n \subseteq A_n \subseteq \mathcal{I}-\sup A_n\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \qquad (**)$$

sağlanır.

İspat: İşlem kolaylığı için $A = \mathcal{I}-\inf A_n$ ve $B = \mathcal{I}-\sup A_n$ olsun. Yani $A = \sup \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ ve $B = \inf \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ dir. İdeal infimum ve ideal supremum tanımından

$$\{n \in \mathbb{N} : A \subseteq A_n\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I}) \ \text{ ve } \ \{n \in \mathbb{N} : A_n \subseteq B\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

sağlanır. Ayrıca,

$$\{n \in \mathbb{N} : A \not\subset A_n \not\subset B\} = \{n \in \mathbb{N} : A_n \subseteq A\} \cup \{n \in \mathbb{N} : B \subseteq A_n\}$$

eşitliğinden

$$\{n \in \mathbb{N} : A \not\subset A_n \not\subset B\} \in \mathcal{I}$$

elde edilir. Böylece $(*)$ sağlanmış olur.

$(*)$ ve filtre tanımından

$$\{n \in \mathbb{N} : A \subseteq A_n \subseteq B\} = \left(\mathbb{N} \setminus \{n \in \mathbb{N} : A \not\subset A_n \not\subset B\}\right) \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

elde edilir. Yani $(**)$ ispat edilmiş olur. ■

Sonuç 4.1.8: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin $\mathcal{I}-$supremum kümesi bir ideal üst sınır kümesidir.

İspat: $\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{I}-\inf A_n \subseteq A_n \subseteq \mathcal{I}-\sup A_n\}$ kümesi $\{n \in \mathbb{N} : A_n \subseteq B\}$ kümesinin alt kümesi olduğundan, filtrenin tanımından ve $(**)$'dan ispat elde edilir. ■

Sonuç 4.1.9: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin $\mathcal{I}-$infimum kümesi bir ideal alt sınır kümesidir.

İspat: $\{n \in \mathbb{N} : \mathcal{I}-\inf A_n \subseteq A_n \subseteq \mathcal{I}-\sup A_n\}$ kümesi $\{n \in \mathbb{N} : A \subseteq A_n\}$ kümesinin alt kümesi olduğundan, filtrenin tanımından ve $(*)$'dan ispat elde edilir. ■

Teorem 4.1.17: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ küme dizisi ve $A \subset X$ verilsin. Bu durumda

$$\mathcal{I}-\sup A_n := A \Leftrightarrow \textbf{(i)}\ \forall A' \supset A \text{ için } \{n \in \mathbb{N} : A_n \subset A'\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$
$$\textbf{(ii)}\ \forall A^* \subset A \text{ için } \{n \in \mathbb{N} : A_n \supset A^*\} \notin \mathcal{I}$$

sağlanır.

İspat: "$\Rightarrow$" $\mathcal{I}-\sup A_n = A$ olduğundan $A = \inf \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ dir. O halde Sonuç 4.1.7 ve Sonuç 4.1.8' dan (i) açıktır.

Şimdi (ii)' nin doğru olmadığını kabul edelim. Yani,

$$\forall A^* \subset A \text{ için } \{n \in \mathbb{N} : A^* \subset A_n\} \in \mathcal{I}$$

olsun. Buradan $\{n \in \mathbb{N} : A_n \subset A^*\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ sağlanır. Bu ise $A^* \in \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ demektir. Bu sonuç A nın en dar ideal üst sınır kümesi olmasıyla çelişir. O halde,

$$\forall A^* \subset A \text{ için } \{n \in \mathbb{N} : A_n \supset A^*\} \notin \mathcal{I}$$

dır.

"$\Leftarrow$" (i) ve (ii) sağlansın. O halde

$$A' \in \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}} \text{ ve } A^* \notin \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$$

olur. Buradan ve $A^* \subset A \subset A'$ olduğundan

$$\inf \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}} = A$$

elde edilir. Yani, $\mathcal{I} - \sup A_n = A$ olur. ■

Sonuç 4.1.10: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi ve $\mathcal{I} - \sup A_n = A$ olsun. Eğer,

$A^* \subset A$ için $\{n \in \mathbb{N} : A_n \supset A^*\} \in \mathcal{I}$ ise $A^* = A$ dır.

Teorem 4.1.18: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ küme dizisi ve $B \subset X$ verilsin.

$$\mathcal{I} - \inf A_n := B \Leftrightarrow \textbf{(i) } \forall B' \subset B \text{ için } \{n \in \mathbb{N} : B' \subset A_n\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$
$$\textbf{(ii) } \forall B^* \supset B \text{ için } \{n \in \mathbb{N} : B^* \supset A_n\} \notin \mathcal{I}$$

İspat: "$\Rightarrow$" $\mathcal{I} - \inf A_n = B$ olduğundan $B = \sup \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ dir. O halde Sonuç 4.1.6 ve Sonuç 4.1.9' den (i) açıktır.

Şimdi (ii)' nin doğru olmadığını kabul edelim. Yani,

$$\forall B^* \supset B \text{ için } \{n \in \mathbb{N} : B^* \supset A_n\} \in \mathcal{I}$$

sağlansın. Buradan $\{n \in \mathbb{N} : B^* \subset A_n\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $B^* \in \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ olur. Bu ise B nın en geniş ideal alt sınır kümesi olmasıyla çelişir. O halde

$$\forall B^* \supset B \text{ için } \{n \in \mathbb{N} : B^* \supset A_n\} \notin \mathcal{I}$$

dır.

"$\Leftarrow$" (i) ve (ii) sağlansın. O halde

$$B' \in \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}} \text{ ve } B^* \notin \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$$

olur. Buradan ve $B' \subset B \subset B^*$ olduğundan,

$$\sup \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}} = B$$

elde edilir. Yani $\mathcal{I}-\inf A_n = B$ olur. ■

Sonuç 4.1.11: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ kümeler dizisi ve $\mathcal{I}-\inf A_n = B$ olsun. Eğer,

$B^* \supset B$ için $\{n \in \mathbb{N} : B^* \supset A_n\} \in \mathcal{I}$ ise $B^* = B$ dır.

Tanım 4.1.11: $X \neq \varnothing$ bir küme, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ küme dizisi verilsin. Eğer $H \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ olacak şekilde $H \subset \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi H kümesi üzerinde monoton artan ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine ideal monoton artan (veya $\mathcal{I}-$monoton artan) denir.

Eğer $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi H kümesi üzerinde monoton azalan ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine ideal monoton azalan ($\mathcal{I}-$monoton azalan) denir.

$(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $\mathcal{I}-$monoton artan ya da $\mathcal{I}-$monoton azalan ise bu diziye ideal monoton ($\mathcal{I}-$ monoton) dizi denir.

Teorem 4.1.19: Eğer $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $\mathcal{I}-$monoton ise $\mathcal{I}-$yakınsaktır.

İspat: İspatı yalnız $\mathcal{I}-$monoton artan diziler için verelim. Tanım gereği $\exists H\subset\mathbb{N}$ vardır öyle ki $H\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve $(A_n)_{n\in H}$ monoton artandır. H kümesinin elemanlarını k_n ile işaret edelim ve kabul edebiliriz ki k_n doğal sayıların monoton artan bir dizisidir. O halde $\left(A_{k_n}\right)$ dizisi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin monoton artan bir alt dizisidir ve $\lim\limits_{n\to\infty}A_{k_n}=\bigcup\limits_n A_{k_n}$ dir. İddia ederiz ki

$$\mathcal{I}-\liminf_{n\to\infty}A_n=\mathcal{I}-\limsup_{n\to\infty}A_n=\bigcup_n A_{k_n}$$

sağlanır.

Şimdi $x\in\mathcal{I}-\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$ olsun ve kabul edelim ki $x\notin\bigcup\limits_n A_{k_n}$ dir. Kabulden dolayı her $n\in\mathbb{N}$ için $x\notin A_{k_n}$ elde edilir. C kümesi $\mathbb{N}\setminus H$ 'ın alt kümesi olmak üzere

$$N_x^-(A_n)=\{n\in\mathbb{N}:x\notin A_n\}=H\cup C$$

elde edilir. $N_x^-(A_n)\in\mathcal{I}$ olduğundan $H\cup C\in\mathcal{I}$ sağlanır. Böylece $H\subset H\cup C$ olduğundan $H\in\mathcal{I}$ elde edilir. Bu ise $H\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ olmasıyla çelişir.

Şimdi $x\in\bigcup\limits_n A_{k_n}$ keyfi bir eleman olsun. Buradan öyle $n_0\in\mathbb{N}$ bulunabilir ki $x\in A_{k_{n_0}}$ sağlanır. $\left(A_{k_n}\right)$ küme dizisinin monotonluğundan her $k_n\ge k_{n_0}$ için $x\in A_{k_n}$ dir. Böylece,

$$\{n\in\mathbb{N}:x\notin A_n\}\subset\{1,2,\cdots,n_0\}\cup(\mathbb{N}\setminus H)$$

içermesi elde edilir. Burada $\{1,2,\cdots,n_0\}\in\mathcal{I}$ ve $(\mathbb{N}\setminus H)\in\mathcal{I}$ olduğundan $N_x^-(A_n)\in\mathcal{I}$ olur. Yani, $x\in\mathcal{I}-\liminf\limits_{n\to\infty}A_n$ elde edilir.

$x\in\mathcal{I}-\limsup\limits_{n\to\infty}A_n$ keyfi eleman olsun ve kabul edelim ki $x\notin\bigcup\limits_n A_{k_n}$ dir. Kabulden dolayı her $n\in\mathbb{N}$ için $x\notin A_{k_n}$ elde edilir.

$$N_x^+(A_n) = \{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\} = \mathbb{N} \setminus H$$

sağlanır. Burada $(\mathbb{N} \setminus H) \in \mathcal{I}$ dır. Bu ise $N_x^+(A_n) \notin \mathcal{I}$ olmasıyla çelişir.

Şimdi $x \in \bigcup_n A_{k_n}$ keyfi elemanını göz önüne alalım. $N_x^-(A_n) \in \mathcal{I}$ ve $N_x^+(A_n) = \mathbb{N} \setminus N_x^-(A_n)$ olduğundan $N_x^+(A_n) \notin \mathcal{I}$ elde edilir. Böylece $x \in \mathcal{I} - \limsup_{n\to\infty} A_n$ sağlanır ve bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.1.20: $\mathcal{I} \subset 2^{\mathbb{N}}$ admissible ideali, $X \neq \emptyset$ bir küme olmak üzere $(A_n)_{n\in\mathbb{N}} \subset X$ küme dizisi verilsin. Eğer,

i. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $\mathcal{I}-$monoton artan ise $\{n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n\} \in \mathcal{I}$ $\left(\text{veya } \{n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \not\subset A_n\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\right)$

ii. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $\mathcal{I}-$monoton azalan ise $\{n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \supset A_n\} \in \mathcal{I}$ $\left(\text{veya } \{n \in \mathbb{N} : A_n \not\subset A_{n+1}\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})\right)$

sağlanır.

İspat: Sadece (i)’ nin ispatı verilecektir. (ii) durumu ise (i)’ nin ispatında gerekli değişiklikler yapılarak elde edilir.

Şimdi $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $\mathcal{I}-$monoton artan olsun. O halde $H \subset \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki $H \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$ dir ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi H üzerinde monoton artandır. Yani,

$$\forall n \in H \text{ için } A_n \subset A_{n+1}$$

dir. O halde,

$$\{n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n\} \subset (\mathbb{N} \setminus H) \in \mathcal{I}$$

olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n\} \in \mathcal{I}$$

elde edilir. ■

Uyarı 4.1.7: Teorem 4.1.20' nin tersi genelde doğru değildir. Bunun için $\mathcal{I}_\delta$ idealini ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n := \begin{cases} \{1,2\}, & 2^k \le n \le 2^{k+1} - 1 \text{ ve } k \text{ çift} \\ \{1\}, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan küme dizisini göz önüne alalım.

$A := \{n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n\}$ olmak üzere $|A(n)| := |\{k : k \le n,\ k \in A\}|$ olsun. O halde yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ için tek bir $m \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki $2^{2m} \le n \le 2^{2m+1} - 1$ ya da $2^{2m+1} \le n \le 2^{2m+2}$ sağlanır.

$$\delta(A) = \lim_{n\to\infty} \frac{|A(n)|}{n} \le \lim_{m\to\infty} \frac{|A(2^{2m+2})|}{2^{2m}} \le \lim_{m\to\infty} \frac{m+1}{2^{2m}} = 0$$

olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : A_{n+1} \subset A_n\} \in \mathcal{I}_\delta$$

elde edilir. Böylece (i) sağlanır.

Şimdi $B := \{n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1}\}$ olsun ve $|B(n)| := |\{k : k \le n,\ k \in B\}|$ olsun. O halde

$$\delta(B) = \lim_{n\to\infty} \frac{|B(n)|}{n} \le \lim_{m\to\infty} \frac{|A(2^{2m+2})|}{2^{2m}} \le \lim_{m\to\infty} \frac{m+1}{2^{2m}} = 0$$

olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \subset A_{n+1}\} \in \mathcal{I}_\delta$$

elde edilir. Böylece (ii) sağlanır.

Fakat $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi ne ideal monoton artan ne de ideal monoton azalandır.

Teorem 4.1.21: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi monoton ise ideal monotondur. Tersi doğru değildir.

İspat: Kabul edelim ki $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ monoton artan küme dizisi olsun. Yani, her $n\in\mathbb{N}$ için $A_n \subset A_{n+1}$ sağlanır. $H=\mathbb{N}$ olarak alınırsa $\mathbb{N}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ olduğundan $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi ideal monoton artan olur.

Şimdi tersinin doğru olmadığına dair bir örnek verelim. Bunun için $\mathcal{I}_\delta$ idealini ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$A_n=\begin{cases}\varnothing\,, & n=p \text{ ve } p\in\mathbb{P}\\ \{1,\cdots,n\}, & n\neq p\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan küme dizisini göz önüne alalım. Burada $\mathbb{P}$ ile asal sayılar işaret edilmiştir. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin monoton artan olmadığı açıktır.

Şimdi $H=\{n\in\mathbb{N} : n\neq p,\ p\in\mathbb{P}\}$ olarak seçelim. Bu durumda $H\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_\delta)$ dir ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi H üzerinde monoton artandır. Bu ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin ideal monoton artan olması demektir. ■

Tanım 4.1.12: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi verilsin. $k_n:\mathbb{N}\to\mathbb{N}$ kesin artan bir dizi ve $\{k_n : n\in\mathbb{N}\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ olmak üzere (A_{k_n}) alt küme dizisine $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin bir ideal yoğun $(\text{veya } \mathcal{I}-\text{yoğun})$ alt küme dizisi denir.

Uyarı 4.1.7: $\mathcal{I}-$monoton küme dizilerinin her ideal yoğun alt küme dizisi de $\mathcal{I}-$monotondur.

Tanım 4.1.13: $A=(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $B=(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizileri verilsin. $H\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ olacak şekilde $H\subset\mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki her $n\in H$ için $A_n=B_n$ ise $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizilerine ideal denktir $(\text{veya } \mathcal{I}-\text{denktir})$ denir ve $A\overset{\mathcal{I}}{\asymp}B$ ile gösterilir.

Önerme 4.1.1: $A=(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $B=(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizileri $\mathcal{I}-$denk olsun. O halde $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin $\mathcal{I}-$monoton olması için gerek ve yeter koşul $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin $\mathcal{I}-$monoton olmasıdır.

İspat: "$\Rightarrow$" $A=(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $B=(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizileri $\mathcal{I}-$denk olsun. Yani $H\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ olacak şekilde $H\subset\mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n\in\mathbb{N}$ için $A_n=B_n$ dir. $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $\mathcal{I}-$monoton artan olsun. O halde tanım gereği $K\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ olacak şekilde $K\subset\mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi K kümesi üzerinde monoton artandır. $L:=H\cap K$ olarak alınırsa, $L\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ ve her $n\in L$ için $A_n=B_n$ olduğundan $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi L üzerinde monoton artan olur. Sonuç olarak, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $\mathcal{I}-$monoton artan olur.

"$\Leftarrow$" Yukarıdaki ispatta $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi yerine $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi alındığında istenen elde edilir.

Not edelim ki $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $\mathcal{I}-$monoton azalan küme dizisi olduğunda da aynı sonuç elde edilir. ■

Teorem 4.1.22: $A=(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $B=(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizileri $\mathcal{I}-$denk ise

$$\mathcal{I}-\inf A_n=\mathcal{I}-\inf B_n \text{ ve } \mathcal{I}-\sup A_n=\mathcal{I}-\sup B_n$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat: $A\overset{\mathcal{I}}{\asymp}B$ olsun. Buradan $H=\{n\in\mathbb{N}:A_n=B_n\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$ dir. Böylece $\{n\in\mathbb{N}:A_n\neq B_n\}\in\mathcal{I}$ sağlanır. $A^*\in\mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ keyfi elemanını göz önüne alalım. Yani,

$$\{n\in\mathbb{N}:A^*\subset A_n\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I}) \text{ ve } \{n\in\mathbb{N}:A_n\subset A^*\}\in\mathcal{I}$$

sağlanır. Böylece

$$\{n\in\mathbb{N}:B_n\subset A^*\}=\left(\{n\in\mathbb{N}:A_n\neq B_n\subset A^*\}\cup\{n\in\mathbb{N}:A_n=B_n\subset A^*\}\right)\in\mathcal{I}$$

olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : A^* \subset B_n\} \in \mathcal{F}(\mathcal{I})$$

elde edilir. Bu ise $A^* \in \mathrm{L}_{B_n}^{\mathcal{I}}$ demektir. Böylece,

$$\mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}} \subset \mathrm{L}_{B_n}^{\mathcal{I}}$$

elde edilir.

$\mathrm{L}_{B_n}^{\mathcal{I}} \subset \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ tamamıyla benzer biçimde elde edilir. O halde,

$$\mathcal{I} - \inf A_n = \mathcal{I} - \inf B_n$$

eşitliği ispat edilmiş olur.

$\mathcal{I} - \sup A_n = \mathcal{I} - \sup B_n$ eşitliğinin ispatı benzer şekilde görülür. ■

Uyarı 4.1.8: Yukarıdaki teoremin tersi her zaman doğru değildir. Bunun için $\mathcal{I}_\delta$ idealini ve $k \in \mathbb{N}$ olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$A_n := \begin{cases} \varnothing & , n = k^2 \\ \left[0, 1 - \frac{1}{n}\right] & , n \neq k^2 \end{cases} \quad \text{ve} \quad B_n := \begin{cases} \varnothing & , \; n = k^2 \\ \left[0, 1 + \frac{1}{n}\right], & n \neq k^2 \end{cases}$$

biçiminde tanımlanmış küme dizilerini göz önüne alalım. $\mathcal{I}_\delta - \inf A_n = \mathcal{I}_\delta - \inf B_n = [0,1]$ ve $\mathcal{I}_\delta - \sup A_n = \mathcal{I}_\delta - \sup B_n = [0,1]$ sağlanır. Fakat $A = (A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ ve $B = (B_n)_{n \in \mathbb{N}}$ küme dizileri $\mathcal{I}_\delta -$denk değildir.

Teorem 4.1.23: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ küme dizisi için

$$\mathcal{I} - \sup A_n = \mathcal{I} - \limsup A_n$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x \in \mathcal{I} - \sup A_n$ keyfi seçilsin. O halde $x \in \bigcap_{B \in \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}} B$ dir. Buradan $\forall B \in \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ için $x \in B$ olur. B ideal üst sınır olduğundan

$$\{n \in \mathbb{N} : B \subset A_n\} \in \mathcal{I}$$

sağlanır. Şimdi kabul edelim ki $x \notin \mathcal{I} - \limsup A_n$ olsun. Yani $N_x^+(A_n) \in \mathcal{I}$ dır. Böylece keyfi $k \in N_x^-(A_n)$ için $x \notin A_k$ olur. $B = \bigcup_{k \in N_x^-(A_n)} A_k$ olmak üzere $x \notin B$ dir. İddia edelim ki B ideal üst sınırdır. O halde $\{n \in \mathbb{N} : A_n \subset B\} = N_x^-(A_n)$ elde edilir. Kabulden dolayı $N_x^-(A_n) \notin \mathcal{I}$ olur ve B ideal üst sınır kümesidir. Bu ise çelişkidir. Böylece,

$$\mathcal{I} - \sup A_n \subset \mathcal{I} - \limsup A_n$$

elde edilir.

Keyfi $x \in \mathcal{I} - \limsup A_n$ elemanı için $\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\} \notin \mathcal{I}$ sağlanır. Kabul edelim ki $x \notin \mathcal{I} - \sup A_n$ olsun. Böylece $\exists B \in \mathrm{U}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ bulunabilir öyle ki $x \notin B$ dir. B bir ideal üst sınır kümesi olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : A_n \subset B\} \notin \mathcal{I}$ sağlanır. Buradan ve $x \notin B$ olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : x \notin A_n\} \notin \mathcal{I}$ elde edilir. Böylece $\{n \in \mathbb{N} : x \in A_n\} \in \mathcal{I}$ olur. Bu ise çelişkidir. Böylece,

$$\mathcal{I} - \limsup A_n \subset \mathcal{I} - \sup A_n$$

elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.1.24: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ küme dizisi için

$$\mathcal{I} - \inf A_n = \mathcal{I} - \liminf A_n$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x \in \mathcal{I} - \inf A_n$ keyfi eleman olmak üzere $x \in \bigcup_{B \in \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}} B$ dir. O halde $\exists B \in \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ bulunabilir öyle ki $x \in B$ dir. B bir ideal alt sınır kümesi olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : B \subset A_n\} \notin \mathcal{I}$ sağlanır. Buradan ve $x \in B$ olduğundan $\{n \in \mathbb{N} : x \notin A_n\} \in \mathcal{I}$ elde edilir. Böylece $x \in \mathcal{I} - \liminf A_n$ olur. Yani,

$$\mathcal{I} - \inf A_n \subset \mathcal{I} - \liminf A_n$$

elde edilir.

Şimdi $x \in \mathcal{I} - \liminf A_n$ keyfi bir eleman ve $N_x^-(A_n) = \{k_n : n \in \mathbb{N}\}$ olsun. $B = \left(\bigcup_{n=1}^{\infty} A_{k_n} \cup \{x\} \right)$ olarak belirleyelim. Bu durumda

$$\{n \in \mathbb{N} : A_n \subset B\} = N_x^-(A_n) \in \mathcal{I}$$

elde edilir. Yani, $x \in B$ ve $B \in \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}$ dır. Buradan $x \in \bigcup_{B \in \mathrm{L}_{A_n}^{\mathcal{I}}} B$ olur. Böylece,

$$\mathcal{I} - \liminf A_n \subset \mathcal{I} - \inf A_n$$

sağlanır. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Teorem 4.1.25: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ küme dizisinin $\mathcal{I} -$yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\mathcal{I} - \sup A_n = \mathcal{I} - \inf A_n$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat: İspatı Teorem 4.1.17 ve Teorem 4.1.18'den açıktır. ■

Tanım 4.1.14: $(A_n)_{n \in \mathbb{N}}$ küme dizisi verilsin. $\forall l > k$ için $A_k \supset A_l \left(A_l \supset A_k \right)$ ise A_k kümesine üst (alt) peak küme denir.

A_k kümesi (A_n) küme dizisi için bir üst peak küme veya bir alt peak küme ise A_k kümesine (A_n) küme dizisinin peak kümesi denir.

Teorem 4.1.26: (A_n) küme dizisinin peak kümelerinin indeks kümesi filtreye ait ise (A_n) dizisi $\mathcal{I}-$monotondur.

İspat: (A_n) kümeler dizisinin üst peak kümelerinin indeks kümesini

$$H=\{k : A_k,\ (A_n) \text{ dizisinin üst peak kümesi}\}\subset\mathbb{N}$$

ile gösterelim. Pozitif doğal sayıların monoton artan (k_n) dizisi mevcuttur öyle ki,

$$H:=\{k_1<k_2<\cdots<k_n<\cdots\}\in\mathcal{F}(\mathcal{I})$$

biçiminde yazılabilir. $\forall n\in\mathbb{N}$ için A_{k_n} bir üst peak küme olduğundan,

$$A_{k_1}\supset A_{k_2}\supset\cdots\supset A_{k_n}\supset\cdots$$

elde edilir. Böylece (A_n) küme dizisi $\mathcal{I}-$monoton azalan olur.

Bu ispat alt peak küme alınarak da benzer şekilde yapılır. ■

Uyarı 4.1.9: Teorem 4.1.26' nin tersi her zaman doğru değildir. Bunun için $\mathcal{I}_\delta$ idealini ve her $n\in\mathbb{N}$ için

$$A_n:=\begin{cases}\left\{\dfrac{1}{p}\right\} & , n=p \text{ ve } \mathrm{p}\in\mathbb{P}\\ \{1,\cdots,n\} & , n\neq p\end{cases}$$

biçiminde tanımlanan küme dizisini göz önüne alalım. $H=\{n\in\mathbb{N} : n\neq p\wedge p\in\mathbb{P}\}$ olmak üzere $H\in\mathcal{F}(\mathcal{I}_\delta)$ dir ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $H\subset\mathbb{N}$ üzerinde monoton artandır. Böylece $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi ideal monoton olur. Fakat $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi peak kümeye sahip değildir.

4.2. KÜME DİZİLERİNİN DEFERRED İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde, keyfi metrik uzay içindeki küme dizilerinin deferred istatistiksel yakınsaklığı tanımlanacak ve bazı teoremler verilecektir. Ayrıca [4], [8] ve [9]' da verilen bazı sonuçlar genelleştirilecektir.

Bu bölüm boyunca $p(n)$ ve $q(n)$ yerine basitlik için sırasıyla p ve q, $d(x,A_k)$ ve $d(x,A)$ yerine ise $d_x(A_k)$ ve $d_x(A)$ yazılacaktır.

Tanım 4.2.1: $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ küme dizisi ve $A\subset\mathbb{N}$ kümesini göz önüne alalım. Eğer, $\forall\varepsilon>0$ ve $x\in X$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q-p}\left|\left\{p<k\le q:\ \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=0 \qquad (4.2.1)$$

sağlanıyor ise $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ küme dizisine A kümesine Wijsman deferred istatistiksel yakınsaktır denir. Bu durum $WDS-\lim_{n\to\infty}A_k=A$ biçiminde gösterilir.

Tanım 4.2.2: $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ küme dizisi ve $A\subset\mathbb{N}$ kümesini göz önüne alalım. Eğer, $x\in X$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q-p}\sum_{k=p+1}^{q}\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|=0 \qquad (4.2.2)$$

sağlanıyor ise $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ küme dizisine A kümesine Wijsman kuvvetli deferred Cesaro toplanabilir denir. Bu durum $WD-\lim_{n\to\infty}A_n=A$ biçiminde gösterilir.

Not 4.2.1: $\theta=(k_n)$ bir lacunary dizisi olmak üzere (4.2.1) ve (4.2.2) denklemlerinde

i. $p=0$, $q=n$

ii. $p=k_{n-1}$, $q=k_n$

durumlarını göz önüne alırsak küme dizileri için sırasıyla Wijsman istatistiksel yakınsaklık-Wijsman kuvvetli Cesaro toplabilme ve Wijsman lacunary istatistiksel yakınsaklık-Wijsman lacunary kuvvetli toplanabilme elde edilir.

Teorem 4.2.1: (X,ρ) keyfi bir metrik uzay, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bu uzayda her $n\in\mathbb{N}$ için $A_n\subset B_n\subset C_n$ koşulunu sağlayan küme dizileri olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i. Eğer $W-\lim\limits_{n\to\infty} A_n = W-\lim\limits_{n\to\infty} C_n = T$ ise $W-\lim\limits_{n\to\infty} B_n = T$ dir.

ii. Eğer $WDS-\lim\limits_{n\to\infty} A_n = WDS-\lim\limits_{n\to\infty} C_n = T$ ise $WDS-\lim\limits_{n\to\infty} B_n = T$ dir.

İspat: Teoremin ispatında sadece (ii) durumu gösterilecektir. (i) durumu ise analizdeki standart yöntemler kullanılarak ispatlanabilir.

Şimdi $x\in X$ tespit edilmiş bir eleman olsun. $(d_x(A_n))_{n\in\mathbb{N}}$, $(d_x(B_n))_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(d_x(C_n))_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerini göz önüne alalım. $A_n\subset B_n\subset C_n$ içermesinden açıktır ki her $n\in\mathbb{N}$ için

$$d_x(C_n)\le d_x(B_n)\le d_x(A_n) \tag{4.2.3}$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan her $\varepsilon>0$ için

$$\{p<k\le q : |d_x(B_k)-d_x(T)|\ge\varepsilon\}=$$

$$=\{p<k\le q : d_x(B_k)\ge d_x(T)+\varepsilon\}\cup\{p<k\le q : d_x(B_k)\le d_x(T)-\varepsilon\}$$

$$\subset\{p<k\le q : d_x(A_k)\ge d_x(T)+\varepsilon\}\cup\{p<k\le q : d_x(C_k)\le d_x(T)-\varepsilon\}$$

elde edilir. Ayrıca

$$\{p<k\le q : |d_x(A_k)-d_x(T)|\ge\varepsilon\}\supset\{p<k\le q : d_x(A_k)\ge d_x(T)+\varepsilon\}$$

ve

$$\{p<k\le q : |d_x(C_k)-d_x(T)|\ge\varepsilon\}\supset\{p<k\le q : d_x(C_k)\le d_x(T)-\varepsilon\}$$

içermeleri sağlanır. Böylece

$$\delta_{D_{p,q}}\left(\{p<k\le q : d_x(A_k)\ge d_x(T)+\varepsilon\}\right)=0,$$

$$\delta_{D_{p,q}}\left(\left\{p<k\leq q: d_x\left(C_k\right)\leq d_x\left(T\right)-\varepsilon\right\}\right)=0$$

eşitlikleri doğrudur. Buradan,

$$\delta_{D_{p,q}}\left(\left\{p<k\leq q: \left|d_x\left(B_k\right)-d_x\left(T\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right)=0$$

elde edilir ve böylece ispat tamamlanmış olur. ■

Tanım 4.2.3: $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\left(B_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ keyfi iki küme dizisi olsun. Eğer, $\left\{n\in\mathbb{N}: A_n\neq B_n\right\}$ kümesinin deferred yoğunluğu sıfır ise $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi, $\left(B_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine deferred hemen hemen denktir denir ve $\left(A_n\right)\equiv\left(B_n\right),\ \left(D-h.h.y.\right)$ sembolü ile gösterilir.

Teorem 4.2.2: $\left(X,\rho\right)$ keyfi bir metrik uzay, $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $\left(B_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ bu uzayda keyfi küme dizileri olsun öyle ki$\left(A_n\right)\equiv\left(B_n\right),\ \left(D-h.h.y.\right)$ sağlansın. Eğer $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (veya $\left(B_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$) küme dizisi Wijsman deferred istatistiksel yakınsak ise $\left(B_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ (veya $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$) küme dizisi de Wijsman deferred istatistiksel yakınsaktır.

İspat: Kabul edelim ki $WDS-\lim_{n\to\infty}A_n=A$ olsun. Yani, $x\in X$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q-p}\left|\left\{p<k\leq q:\ \left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0 \tag{4.2.4}$$

sağlanır. Ayrıca $A_k\neq B_k,\ \left(D-h.h.y\right)$ olduğundan,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q-p}\left|\left\{p<k\leq q:\ A_k\neq B_k\right\}\right|=0 \tag{4.2.5}$$

eşitliği sağlanır. Böylece,

$$\begin{aligned}\left\{p<k\leq q:\ \left|d_x\left(B_k\right)-d_x\left(A\right)\right|\geq\varepsilon\right\}&=\\ =\left\{p<k\leq q:\ A_k=B_k\right\}&\cup\left\{p<k\leq q:\ A_k\neq B_k\right\}\end{aligned} \tag{4.2.6}$$

elde edilir. (4.2.4), (4.2.5) ve (4.2.6)’ ’dan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q-p}\left|\left\{p<k\leq q:\ \left|d_x\left(B_k\right)-d_x\left(A\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

sağlanır. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Sonuç 4.2.1: (X,ρ) keyfi bir metrik uzay, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, $(B_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $(C_n)_{n\in\mathbb{N}}$ bu uzayda $A_n\subset B_n\subset C_n$, $(D-h.h.y.)$ koşulunu sağlayan küme dizileri olsun. Eğer, $WDS-\lim_{n\to\infty}A_n=WDS-\lim_{n\to\infty}C_n=T$ ise $WDS-\lim_{n\to\infty}B_n=T$ dir.

Tanım 4.2.4: (X,ρ) keyfi bir metrik uzay ve $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi olsun. Eğer her $x\in X$ için öyle M_x pozitif sayısı bulunabilir öyle ki her $n\in\mathbb{N}$ için $d_x(A_n)<M_x$ sağlanıyorsa $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisine sınırlıdır denir. Tüm sınırlı küme dizilerinin kümesi L_∞ ile gösterilir ve

$$L_\infty:=\left\{(A_n)_{n\in\mathbb{N}}\ :\forall x\in X,\ \sup_{n\in\mathbb{N}}d_x(A_n)<\infty\right\}$$

biçiminde tanımlanır.

Teorem 4.2.3: (X,ρ) keyfi bir metrik uzay, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ ve A bu uzayın boştan farklı kapalı alt kümeleri olsun. Aşağıdaki ifadeler sağlanır:

i. Eğer $WD-\lim_{n\to\infty}A_n=A$ ise $WDS-\lim_{n\to\infty}A_n=A$ dır.

ii. (i)' nin tersi genel olarak doğru değildir.

iii. $WDS\cap L_\infty=WD\cap L_\infty$ dır.

İspat: (i) $WD-\lim_{n\to\infty}A_n=A$ olduğundan $x\in X$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q-p}\sum_{k=p+1}^{q}\left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|=0$$

sağlanır. Böylece, her $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{q-p}\sum_{k=p+1}^{q}\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right| \geq \frac{1}{q-p}\sum_{\substack{k=p+1 \\ |d_x(A_k)-d_x(A)|\geq\varepsilon}}^{q}\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|$$

$$\geq \frac{1}{q-p}\left|\left\{p<k\leq q : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|.\varepsilon$$

eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizlikte $n\to\infty$ iken limite geçilirse istenen elde edilir.

(ii) (3.2.2)' yi sağlayan keyfi p ve q için $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ küme dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$A_k = \begin{cases} \{k\}, & p<k\leq p+\left[\!\left[\sqrt{q-p}\right]\!\right], n\in\mathbb{N} \\ \{0\}, & diğer\ durumlar \end{cases}$$

Açıktır ki,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q-p}\left|\left\{p<k\leq q : \left|d_x(A_k)-d_x(\{0\})\right|\geq\varepsilon\right\}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\!\left[\sqrt{q-p}\right]\!\right]}{q-p}=0$$

elde edilir. Fakat,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q-p}\sum_{k=p+1}^{q}\left|d_x(A_k)-d_x(\{0\})\right| \geq \lim_{n\to\infty}\frac{\left[\!\left[\sqrt{q-p}\right]\!\right]\left(\left[\!\left[\sqrt{q-p}\right]\!\right]+1\right)}{2(q-p)}=\frac{1}{2}\neq 0$$

dır.

(iii) $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}\in WDS\cap L_\infty$ keyfi küme dizisi olsun. $(A_k)_{k\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin sınırlılığından her $x\in X$ için öyle M_x pozitif sayısı bulunabilir ki $d_x(A_n)<M_x$ sağlanır. Buradan,

$$\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\leq d_x(A_k)+d_x(A)\leq M_x+d_x(A)$$

elde edilir. Böylece herhangi bir $\varepsilon>0$ için

$$\frac{1}{q-p}\sum_{k=p+1}^{q}\left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|=\frac{1}{q-p}\left(\sum_{\substack{k=p+1\\ \left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|\geq\varepsilon}}^{q}+\sum_{\substack{k=p+1\\ \left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|<\varepsilon}}^{q}\right)\left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|$$

$$\leq\frac{2M_x{}'}{q-p}\left|p<k\leq q:\left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|\geq\varepsilon\right|+\varepsilon$$

elde edilir. Burada $M_x{}'=M_x+d_x\left(A\right)$ dır. Yukarıdaki eşitsizlikte $n\to\infty$ iken limite geçilirse ispat tamamlanır. ■

Tanım 4.2.5: $p=\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri için eğer $\left(\dfrac{p}{q-p}\right)$ dizisi sınırlı ise $D\left[p,q\right]$ metoduna properly deferred denir.

Aşağıdaki teoremde $p=\left(p_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q=\left(q_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ üzerine bazı kısıtlamalar koyularak WS ile WDS karşılaştırılacaktır.

Teorem 4.2.4: $WS\subset WDS$ olması için gerek ve yeter şart D' nin proper olmasıdır.

İspat: $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $\left(X,d\right)$ uzayının kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Kabul edelim ki $WS-\lim_{n\to\infty}A_n=A$ dır. O halde $\left(A_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin WDS dönüşümü aşağıdaki gibidir:

$$\frac{1}{q-p}\left|\left\{p<k\leq q:\left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|=$$

$$=\frac{1}{q-p}\left|\left\{1\leq k\leq q:\left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|-\frac{1}{q-p}\left|\left\{1\leq k\leq p:\left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

$$=\frac{q}{q-p}\frac{1}{q}\left|\left\{1\leq k\leq q:\left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|-\frac{p}{q-p}\frac{1}{p}\left|\left\{1\leq k\leq p:\left|d_x\left(A_k\right)-d_x\left(A\right)\right|\geq\varepsilon\right\}\right|$$

Yukarıdaki eşitlikten $\left(d_x\left(A_n\right)\right)$ dizisinin WDS dönüşümü, bu dizinin WS dönüşümünün lineer kombinasyonudur.

Silverman-Teoplitz Teoremi'nden açıktır ki bu dönüşümün regüler olması için gerek ve yeter koşul $\left[\frac{p}{q-p}+\frac{q}{q-p}\right]$'nin sınırlı olmasıdır. Yani, $\left(\frac{p}{q-p}\right)$ dizisi sınırlı olmak zorundadır. ■

Teorem 4.2.5: Her $n\in\mathbb{N}$ için $q(n)=n$ olduğunda $WS\supset WDS[p,q]$ dir.

İspat: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (X,d) uzayının kapalı alt kümelerinin bir dizisi olsun. Kabul edelim ki $WDS-\lim_{n\to\infty}A_n=A$ dır. Her $n\in\mathbb{N}$ için

$$p(n)=n^{(1)}>p\left(n^{(1)}\right)=n^{(2)}>p\left(n^{(2)}\right)=n^{(3)}>\cdots$$

olsun. Bu parçalanıştan,

$$\begin{aligned}\left\{k\le n:\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}&=\left\{k\le n^{(1)}:\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\\&\cup\left\{n^{(1)}<k\le n:\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned}\left\{k\le n^{(1)}:\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}&=\left\{k\le n^{(2)}:\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\\&\cup\left\{n^{(2)}<k\le n^{(1)}:\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer bu ardışık sürece devam edilirse

$$\begin{aligned}\left\{k\le n^{(h-1)}:\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}&=\left\{k\le n^{(h)}:\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\\&\cup\left\{n^{(h)}<k\le n^{(h-1)}:\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada h, $n^{(h)}\ge1$ ve $n^{(h+1)}=0$ koşullarını sağlayan belirli pozitif bir tamsayıdır. Böylece,

$$\frac{1}{n}\left|\left\{k\le n:\left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|=\sum_{m=0}^{h}\left(\frac{n^{(m)}-n^{(m+1)}}{n}\right)L_m$$

elde edilir. Burada L_m aşağıdaki biçimde bir dizidir:

$$(L_m) = \left(\frac{1}{n^{(m)} - n^{(m+1)}} \left| \left\{ n^{(m+1)} < k \leq n^{(m)} \ : \ \left| d_x(A_k) - d_x(A) \right| \geq \varepsilon \right\} \right| \right)$$

$T = (t_{n,m})$ matrisi $n^{(0)} = n$ olmak üzere

$$t_{n,m} := \begin{cases} \dfrac{n^{(m)} - n^{(m+1)}}{n}, & m = 0,1,\cdots,h \\ 0, & \textit{diğer durumlar} \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Açıktır ki $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin Wijsman istatistiksel dönüşümü, (L_m) dizisinin T dönüşümüdür.

$T = (t_{n,m})$ matrisi regülerlik koşullarını sağlar [13]. Böylece $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi $x \in X$ noktasında A kümesine Wijsman istatistiksel yakınsaktır. ■

Teorem 4.2.5 ve Teorem 4.2.6’ dan aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.2.2: $WS = WDS[p,n]$ olması için gerek ve yeter şart $\left(\frac{p}{n-p}\right)$ dizisinin sınırlı olmasıdır.

Teorem 4.2.6: $q = (q(n))_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi hemen hemen her doğal sayıyı içersin. Bu durumda $WDS \subset WS$ içermesi sağlanır.

İspat: Yeterince büyük m doğal sayısı için $\{q(n) : n \in \mathbb{N}\}$ kümesi m’ den büyük tüm doğal sayıları içersin. O halde doğal sayıların öyle bir dizisi inşa edilebilir ki

$$k_1 = k_2 = \cdots = k_m = 1 \text{ ve her } n > m \text{ için } q_{k_n} = n$$

sağlanır. p ve q için $WDS - \lim_{n\to\infty} A_n = A$ olduğundan p_{k_n} ve q_{k_n} için de $WDS - \lim_{n\to\infty} A_n = A$ sağlanır. Buradan ve Teorem 4.2.6’ den istenilen elde edilir. ■

Not 4.2.2: Yukarıdaki teoremden, herhangi proper WS ile WDS metodları karşılıklı olarak birbirlerini içerirler. Fakat herhangi iki proper WDS için bu doğru değildir. Bunu görmek için $WDS[2n,4n]$ ile $WDS[2n-1,4n-1]$ ve

$$A_n := \begin{cases} \left\{\dfrac{-n}{2}\right\}, & n \text{ çift} \\ \left\{\dfrac{n+1}{2}\right\}, & n \text{ tek} \end{cases}$$

biçiminde tanımlanan küme dizisini göz önüne alalım.

Açıktır ki,

$$WDS[2n,4n]-\lim_{n\to\infty} A_n = \{0\} \text{ ve } WDS[2n-1,4n-1]-\lim_{n\to\infty} A_n = \left\{\frac{1}{2}\right\}$$

sağlanır.

Şimdi $p=\left(p(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $q=\left(q(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$, $p'=\left(p'(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ ve $q'=\left(q'(n)\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizileri her $n\in\mathbb{N}$ için

$$p \le p' < q' \le q \tag{4.2.7}$$

eşitsizliğini sağlasın.

(4.2.7) eşitsizliği dikkate alındığında birbirinden farklı olan $WDS[p,q]$ ile $WDS[p',q']$ metotları karşılaştırılabilir.

Teorem 4.2.7: $\{k : p < k \le p'\}$ ve $\{k : q' < k \le q\}$ kümeleri her $n\in\mathbb{N}$ için sonlu olsun. Bu durumda $WDS[p',q'] \subset WDS[p,q]$ içermesi sağlanır.

İspat: $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi A kümesine p' ve q' ne göre Wijsman deferred istatistiksel yakınsak olsun. O helde her $\varepsilon>0$ için

$$\begin{aligned} &\left\{p<k\le q : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\} = \left\{p<k\le p' : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\cup \\ &\cup\left\{p'<k\le q' : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\cup\left\{q'<k\le q : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\} \end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Buradan,

$$\begin{aligned}\frac{1}{q-p}\left|\left\{p<k\le q : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\right| &\le \\ \le\frac{1}{q'-p'}\left|\left\{p<k\le p' : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\right| &+ \\ +\frac{1}{q'-p'}\left|\left\{p'<k\le q' : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\right| &+ \\ +\frac{1}{q'-p'}\left|\left\{q'<k\le q : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\right|&\end{aligned}$$

sağlanır. Eşitsizliğin her iki tarafında $n\to\infty$ iken limete geçersek

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{q-p}\left|\left\{p<k\le q : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\right\}\right|=0$$

elde edilir. ■

Teorem 4.2.8: (4.2.7) koşulu altında eğer $\left(\frac{q-p}{q'-p'}\right)$ dizisi sınırlı ise $WDS[p,q]\subset WDS[p',q']$ içermesi sağlanır.

İspat:

$$\left\{p'<k\le q' : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\subset\left\{p<k\le q : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}$$

içermesi sağlandığından,

$$\begin{aligned}\frac{1}{q'-p'}\left|\left\{p'<k\le q' : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\ge\varepsilon\right\}\right| &\le \\ &\le\frac{q-p}{q'-p'}\frac{1}{q-p}\left|\left\{p<k\le q : \left|d_x(A_k)-d_x(A)\right|\right\}\ge\varepsilon\right|\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır ve bu eşitsizliğin eğer her iki tarafında $n\to\infty$ iken limite geçersek ispat tamamlanır.■

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bulguların birinci bölümünde, $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisi ve $x \in X$ elemanı için doğal sayıların $N_x^-(A_n)$ ve $N_x^+(A_n)$ şeklinde alt kümeleri Tanım 4.1.1'de tanımlandı. Bu kümelerin özellikleri Lemma 4.1.1, Lemma 4.1.2, Lemma 4.1.3, Lemma 4.1.4 ve Lemma 4.1.5'te incelendi.

Tanım 4.1.2'de $(A_n)_{n\in\mathbb{N}}$ küme dizisinin ideal limit infimum ve ideal limit supremum kavramları $N_x^-(A_n)$ ve $N_x^+(A_n)$ kümelerinin admissible bir $I \subset 2^{\mathbb{N}}$ ideali için ideale ait olup olmadığı ile ilgili olarak tanımlanarak küme dizilerinin ideal yakınsaklığı tanımlandı.

Teorem 4.1.1'de ideal limit infimum ve ideal limit supremum arasındaki ilişki verildi. Teorem 4.1.2'de ise küme dizisinin limit infimum, limit supremum, ideal limit infimum ve ideal limit supremum arasındaki içerme gösterildi ve bu içermenin tersinin doğru olmayacağına dair örnekler verildi. Uyarı 4.1.1'de ise ideal anlamda yakınsak olup, klasik anlamda yakınsak olmayan küme dizisi gösterildi.

Teorem 4.1.4, Teorem 4.1.5 ve Teorem 4.1.6'da küme dizileri için sırasıyla ideal limit infimum, ideal limit supremum ve ideal limit için analizdeki Sandwich Teoremi'nin analoğu verildi.

Küme dizisi için üst sınır küme ve supremum kavramı Tanım 4.1.3'te verildi. Benzer şekilde alt sınır küme ve infimum kavramı ise Tanım 4.1.4'te verildi. Bir kümenin supremum ve infimum olabilmesi için gerek ve yeter şartlar sırasıyla Teorem 4.1.9 ve Teorem 4.1.10'da verildi.

Tanım 4.1.5'te küme dizisinin sınırlılığı tanımlandı ve Uyarı 4.1.2'de alttan sınırlı olmayan, üstten sınırlı olmayan ve sınırlı olmayan küme dizilerine örnekler gösterildi.

Küme dizisinin ideal üstten sınırlı ve ideal alttan sınırlı olması kavramları sırasıyla Tanım 4.1.6 ve Tanım 4.1.7'de tanımlandı. Teorem 4.1.13'te üst sınır kümesi ile ideal üst sınır kümesi arasındaki ilişki verilerek Uyarı 4.1.3'te tersinin doğru olmadığına dair örnek gösterildi. Benzer biçimde küme dizisinin alt sınır kümesi ile ideal alt sınır kümesi arasındaki ilişki Teorem 4.1.14'te gösterildi. Bu içermenin tersinin doğru olmadığına dair örnek verildi.

Tanım 4.1.9 ve Tanım 4.1.10'da küme dizisi için sırasıyla ideal supremum ve ideal infimum kavramları tanımlandı. Teorem 4.1.15'te keyfi küme dizisi için infimum, supremum, ideal infimum ve ideal supremum kavramları arasındaki içerme verildi ve bu içermelerin hangi durumlarda eşit olduğu gösterildi.

Küme dizisinin ideal supremumu ve ideal infimumunun olması için gerek ve yeter şartlar sırasıyla Teorem 4.1.17 ve Teorem 4.1.18'de verildi.

Tanım 4.1.11'de küme dizisinin ideal monotonluğu tanımlanarak Teorem 4.1.19'da ideal monoton küme dizisinin ideal yakınsak olduğu ispatlandı. Teorem 4.1.21'de ise monoton bir küme dizisinin ideal monoton olduğu ispatlandı ve tersinin doğru olmadığına dair örnek verildi.

Tanım 4.1.12'de küme dizisinin ideal yoğun alt küme dizisi tanımlandı.

Tanım 4.1.13'te keyfi iki küme dizisinin ideal denk olması kavramı tanımlandı. Teorem 4.1.22'de ideal denk küme dizilerinin ideal infimum ve ideal supremumlarının eşit olduğu ispatlandı ve terslerinin doğru olmadığına dair örnekler gösterildi.

Teorem 4.1.23'te küme dizisinin ideal supremumu ve ideal limit supremumu arasındaki ilişki verildi. Benzer biçimde ideal infimum ve ideal limit infimum arasındaki ilişki Teorem 4.1.24'te gösterildi. Teorem 4.1.25'te ise küme dizisinin ideal yakınsak olması için gerek ve yeter şart verildi.

Tanım 4.1.14'te küme dizisi için peak küme kavramı tanımlandı. Teorem 4.1.26'da küme dizisinin peak kümelerinin indeks kümesi filtreye ait olduğunda bu küme dizisinin ideal monoton olduğu ispatlandı.

Bulguların ikinci bölümünde, Tanım 4.2.1'de küme dizisinin Wijsman deferred istatistiksel yakınsaklığı tanımlandı.

Tanım 4.2.2'de küme dizisinin Wijsman kuvvetli deferred Cesaro toplanabilmesi tanımlandı.

Teorem 4.2.1'de küme dizilerinin $WDS-$yakınsaklığı için Sandwich Teoremi'nin analoğu gösterildi.

Tanım 4.2.3'te keyfi iki küme dizi için deferred hemen hemen denk kavramı tanımlandı. Teorem 4.2.2'de deferred hemen hemen denk küme dizisininden biri $WDS-$yakınsak ise diğerinin de $WDS-$yakınsak olduğu ispatlandı.

Teorem 4.2.4'te keyfi küme dizisi için $WD-$yakınsaklığı ile $WDS-$yakınsaklığı karşılaştırılmıştır.

Teorem 4.2.5, Teorem 4.2.6 ve Teorem 4.2.7'de WS ve WDS yakınsaklıkları karşılaştırılmıştır.

Herhengi iki proper $WDS-$yakınsaklığın birbirine eşit olmadığına dair örnek verilmiştir ve aralarındaki ilişki ise Teorem 4.2.8 ve Teorem 4.2.9'da ispatlanmıştır.

5.2. ÖNERİLER

Reel terimli dizilerin ideal yakınsaklığında olduğu gibi küme değerli diziler için de $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık kavramı tanımlanabilir.

Küme dizilerinin $\mathcal{I}$-yakınsaklığı ile $\mathcal{I}^*$-yakınsaklığı arasındaki ilişki incelenebilir.

Ayrıca, hangi koşul (ya da koşullar) altında $\mathcal{I}$-yakınsaklık ile $\mathcal{I}^*$-yakınsaklık birbirlerini eşit olur.

KAYNAKLAR

[1] Kuratowski, C., “Topology”, Vol. I, Academic Press, New York, (1966).

[2] Aubin, J.P. and Frankowska, H., “Set- Valued Analysis”, Birkhauser, Boston, (1990).

[3] Baronti, M. and Papini, P., “Convergence of sequences of sets”, In Methods of functional analysis in approximation theory, ISNM 76, Birkhauser, Basel, 133-155, (1986).

[4] Beer, G., “On the compactness theorem for sequences of closed sets”, Math. Balkanica, 16: 327-338, (2002).

[5] Beer, G., “On convergence of closed sets in a metric space and distance functions, Bull. Austral. Math. Soc., 31: 421-432, (1985).

[6] Beer, G., “Convergence of continuous linear functionals and their level sets”, Arch. Math., 52: 482-491, (1989).

[7] Letavaj, P., “I convergence to a set”, Acta Math. Univ. Comenianae, vol LXXX, 1: 103-106, (2011).

[8] Nuray, F. and Rhoades, B.E., “Statistical convergence of sequences of sets”, Fasciculi Mathematici, 49: 87-99, (2012).

[9] Ulusu, U. and Nuray, F., ”Lacunary statistical convergence of sequences of sets”, Progress in Applied Mathematics, 4(2): 99-109, (2012).

[10] Kişi, Ö. and Nuray, F., “New convergence definitions for sequences of sets”, Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis, vol. 2013: 6 pages, (2013).

[11] Ulusu, U. and Dündar, E., “$\mathcal{I}-$lacunary statistical convergence of sequences of sets”, Filomat, 28-8: 1567-1574, (2014).

[12] Dündar, E. and Sever, Y., “On strongly $\mathcal{I}-$lacunary Cauchy sequences of sets, Contemporary Analysis and Applied Mathematics, vol.2, no.1: 127-135, (2014).

[13] Petersen, G.M., "Regular Matrix Transformations", Mc Graw Hill, London, New York, Toronto, Sydney, (1966).

[14] Connor, J.S., "The statistical and strong p- Cesaro convergence of sequences", Analysis, 8: 47-63, (1988).

[15] Connor, J.S., "Two valued measures and summability", Analysis, 10: 373-385, (1990).

[16] Ostmann, H.H., "Additive Zahlentheorie I", Springer, Verlag, Berlin, Göttingen, Heidelberg, (1956).

[17] Salat, T. and Tijdeman, R., "Asymptotic densities of sets of positive integers", Math. Slov., 33: 199-207, (1983).

[18] Brown, T. C. and Freedman, A. R., "The uniform density of sets of integers and Fermat's last Theorem", Compt. Rendus Math. L' Acad. Sci., 12: 1-6, (1990).

[19] Fridy, J.A., "On statistical convergence", Analysis, 5: 301-313, (1985).

[20] Kaya, E., Küçükaslan, M. and Wagner, R., "On statistical convergence and statistical monotonicity", Annales Univ. Sci. Budapest., Sect. Comp., 39: 257-270, (2013).

[21] Freedman, A.R. and Sember, J.J., "Densities and Summability", Pacific Joumal of Math., 59(2): 283-305, (1981).

[22] Connor, J.S., "On Strong Matrix Summability with Respect to A Modulus and Statistical Convergence", Canad Math. Bull., 32: 194-198, (1989).

[23] Miller, H.I.,"A Measure Theoretical Subsequence Characterization of Statistical Convergence", Transaction of American Math. Society, 347(5): 1811-1819, (1995).

[24] Agnew, R.P., "On Deferred Cesaro means", Ann. Of Math., 33: 413-421, (1932).

[25] Kostyrko, P., Salat, T. and Wilczynski, W., "I- convergence", Real Analysis Exch., 26(2): 669-686, (2000).

[26] Alexander, R., “Density and multiplicative structure of sets of integers”, Acta Arithm., 12: 321- 332, (1967).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Burcu İNAN

Doğum Tarihi: 31/ 03 / 1990

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	Ümitköy Anadolu Lisesi	2004-2008
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2009-2013
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2013-
Pedagojik Formasyon	Eğitim Bilimleri	Mersin Üniversitesi	2015

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. B. İNAN, M. KÜÇÜKASLAN, Ideal convergence of sequence of sets, Contemprary Analysis and Applied Mathematics, accepted, 2015.

2. M. ALTINOK, B. İNAN ve M. KÜÇÜKASLAN, On deferred statistical convergence of sequences of sets in metric space, Turkish Journal of Mathematics and Computer Science, vol 2015, Article ID 20150050, 9 pages, 2015.

3. B. İNAN, M. KÜÇÜKASLAN, Küme Dizileri İçin İdeal Supremum-İnfimum, 14. Matematik Sempozyumu, Niğde, 14-16 Mayıs 2015.

4. B. İNAN, M. KÜÇÜKASLAN, Küme Dizilerinin İdeal Yakınsaklığı, 10. Ankara Matematik Günleri, Ankara, 11- 12 Haziran 2015.