DÖRDÜNCÜ DERECEDEN BİR REGÜLER SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

HİKMET GÜNEŞ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2015

DÖRDÜNCÜ DERECEDEN BİR REGÜLER SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

HİKMET GÜNEŞ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Nazim KERİMOV

MERSİN
HAZİRAN - 2015

Hikmet GÜNEŞ tarafından Prof. Dr. Nazim KERİMOV danışmanlığında hazırlanan "Dördüncü Dereceden Bir Regüler Sınır Değer Probleminin Spektral Analizi" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Nazim KERİMOV ....

Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV ....

Prof.Dr. Rauf AMİROV ....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03/07/2015 tarih ve 2015.18/764 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Enstitü Müdürü

DÖRDÜNCÜ DERECEDEN BİR REGÜLER SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SPEKTRAL ANALİZİ

HİKMET GÜNEŞ

ÖZ

Bu tez çalışmasında periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarına sahip

$$y^{(iv)} + p_2(x)\,y'' + p_1(x)\,y' + p_0(x)\,y = \lambda y, \quad (0 < x < 1)$$
$$y^{(s)}(1) - (-1)^{\sigma}\, y^{(s)}(0) = 0, \quad \left(s = \overline{0,3}\right)$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada λ spektral parametre, $p_j(x) \in L_1(0,1)$, $(j = 0,1)$, $p_2(x) \in W_1^1(0,1)$ kompleks değerli fonksiyonlar, $\int_0^1 p_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$ ve $\sigma = 0,1$ dir. Belirtelim ki, söz konusu sınır değer probleminin sınır koşulları regülerdir, fakat güçlü regüler değildir.

Tez çalışmasında, önce söz konusu sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri alınmıştır ve gösterilmiştir ki, $c_1 = \int_0^1 p_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi$ olmak üzere $\left(p_2(1) - p_2(0) - 2c_1\right)\left(p_2(1) - p_2(0) + 2c_1\right) \neq 0$ koşulu sağlandığında sonlu sayıda hariç bütün özdeğerler basittir. Ayrıca ispat edilmiştir ki,

$$p_1(1) = p_1(0) \quad p_2^{(s)}(1) = p_2^{(s)}(0),\ (\mathrm{s} = 0,1) \quad p_j(x) \in W_1^{\,j}(0,1),\ (j = 0,1,2) \quad c_1 \neq 0$$

koşulları altında bu spektral problemin kök fonksiyonlar sistemi $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında taban oluşturur ve bu taban $p = 2$ durumunda koşulsuzdur.

Anahtar Kelimeler: Sınır değer problemi; özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller; kök fonksiyonlar sisteminin tabanlığı.

Danışman: Prof. Dr. Nazim Kerimov, Matematik Ana Bilim Dalı, Mersin Üniversitesi

SPEKTRAL ANALYSIS OF A REGULAR FOURTH ORDER BOUNDARY VALUE PROBLEM

HİKMET GÜNEŞ

ABSTRACT

In this paper we consider the periodic and antiperiodic problem

$$y^{(iv)} + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = \lambda y, \quad (0 < x < 1)$$
$$y^{(s)}(1) - (-1)^{\sigma} y^{(s)}(0) = 0, \quad \left(s = \overline{0,3}\right)$$

where λ is a spectral parameter; $p_j(x) \in L_1(0,1)$, $j = 0,1$, $p_2(x) \in W_1^1(0,1)$ with $\int_0^1 p_2(\xi)\,\mathrm{d}\xi = 0$, are complex-valued functions and $\sigma = 0,1$. The boundary conditions of this problem are regular, but not strongly regular. Asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions of considered boundary value problem are established. Under the condition

$$c_1 = \int_0^1 p_1(\xi)\,\mathrm{d}\xi, \ \left(p_2(1) - p_2(0) - 2c_1\right)\left(p_2(1) - p_2(0) + 2c_1\right) \neq 0,$$

it is proved that all the eigenvalues, except for finite number, are simple. Furthermore, proved that the system of root functions of this spectral problem forms a basis in the space $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$, when

$$p_1(1) = p_1(0) \quad p_2^{(s)}(1) = p_2^{(s)}(0), \ (\mathrm{s} = 0,1) \quad p_j(x) \in W_1^j(0,1), \ (j = 0,1,2) \quad c_1 \neq 0;$$

Moreover, this basis is unconditional for $p = 2$.

Keywords: Boundary value problem; asymptotic formulae for eigenvalue and eigenfunctions, basicity of the system of root functions.

Advisor: Prof. Dr. Nazim Kerimov, Mathematics Department, Mersin University

TEŞEKKÜR

Üniversite hayatıma başladığım ilk günden bu günlere kadar gelmemde büyük emeği geçen çok değerli danışmanım Prof. Dr. Nazim KERİMOV'a tez konusunun belirlenmesinde, hazırlanmasında ve tez çalışması boyunca yaptığı katkılarından dolayı en içten duygularımla teşekkür eder, saygı ve şükranlarımı sunarım.

Gerek lisans gerekse de yüksek lisans yıllarımda bilgi ve deneyimleriyle bana yol gösteren Prof. Dr. Fahreddin Abdullayev'e, Prof. Dr. Hanlar Reşidoğlu'na, Doç. Dr. Mehmet Küçükaslan'a, Doç. Dr. Erol Yaşar'a, Yrd. Doç. Dr. Tuncay Tunç'a ve Yrd. Doç. Dr. Ufuk Kaya'ya ayrıca teşekkür ederim.

Her daim yanımda olan ve benden desteklerini esirgemeyen aileme ve ayrıca değerli bölüm arkadaşlarıma teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\overline{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
(f,g)	f ve g elemanlarının bulundukları Hilbert uzayındaki iç çarpımı
$[a,b]$	$\mathbb{R}$ 'de bitim noktaları a ve b olan kapalı aralık
(a,b)	$\mathbb{R}$ 'de bitim noktaları a ve b olan açık aralık
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli ve kompleks değerli tüm fonksiyonların oluşturduğu uzay
$C^{(n)}[a,b]$	$[a,b]$ aralığında $n.$ mertebeden türevi var ve sürekli olan kompleks değerli tüm fonksiyonların oluşturduğu uzay
$L_p(a,b)$	$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $\int_a^b \lvert f(x) \rvert^p dx$ sonlu Lebesque integraline sahip olan kompleks değerli tüm fonksiyonların oluşturduğu uzay
$W_p^n(a,b)$	$1 \leq p < \infty$ ve $n \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ olmak üzere $n.$ türevi $L_p(a,b)$ uzayından olan kompleks değerli tüm fonksiyonların oluşturduğu uzay
$O(a_n)$	Landau sembolü
$\delta_{n,m}$	Kronecker sembolü ($n = m$ olduğunda 1, $n \neq m$ olduğunda ise 0 değerini alan fonksiyon)
$\lVert f \rVert_p$	$1 \leq p < \infty$ olmak üzere $f \in L_p(0,1)$ fonksiyonunun normu, $\lVert f \rVert_p = \left(\int_0^1 \lvert f(x) \rvert^p dx \right)^{1/p}$
$\lVert f \rVert$	$L_2(0,1)$ uzayında $f \in L_2(0,1)$ fonksiyonunun normu

1. GİRİŞ

Lineer diferansiyel operatörlerin spektral teorisinin önemli problemlerinden biri de diferansiyel operatörün özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotlarının elde edilmesi, kök fonksiyonlar sisteminin farklı fonksiyonel uzaylarda (özellikle $1 < p < \infty$ olmak üzere $L_p(0,1)$ uzayında) tabanlık özelliklerinin araştırılmasıdır. Belirtelim ki, adi diferansiyel operatörlerin spektral teorisi Liouville J. ve Sturm S.'un çalışmalarıyla başlamıştır. 20. yüzyılın ortalarında gösterilmiştir ki, güçlü regüler sınır koşullarına sahip diferansiyel operatörün (başka bir deyişle, güçlü regüler diferansiyel operatörün) kök fonksiyonlar sistemi L_2 uzayında (koşulsuz) taban oluşturur. Bu sonuç regüler olan fakat güçlü regüler olmayan adi diferansiyel operatörler için geçerli değildir. Regüler olan fakat güçlü regüler olmayan sınır değer problemlerinin kök fonksiyonlar sisteminin L_2 uzayında taban oluşturduğuna ve oluşturmadığına dair birçok örnekler vardır.

Bu tez çalışmasında periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarına sahip

$$y^{(iv)} + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y = \lambda y, \quad (0 < x < 1)$$
$$y^{(s)}(1) - (-1)^{\sigma} y^{(s)}(0) = 0, \quad \left(s = \overline{0,3}\right)$$

sınır değer probleminin diferansiyel ifadenin katsayıları üzerine uygun koşullar altında özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edilmiş, kök fonksiyonlar sisteminin $1 < p < \infty$ olmak üzere $L_p(0,1)$ uzayında tabanlık özellikleri incelenir; burada λ spektral parametre, $p_j(x) \in L_1(0,1)$ $(j = 0,1,2)$ kompleks değerli fonksiyonlar ve $\sigma = 0,1$ dir.

Dikkate alalım ki, periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları regüler sınır koşullarıdır, fakat güçlü regüler sınır koşulları değildir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Bu güçlü regüler sınır koşullarına sahip çift mertebeli adi diferansiyel operatörün kök fonksiyonlar sistemi L_2 uzayında koşulsuz taban oluşturduğu iyi bilinmektedir [1-3].

Parantezli tabanlarla ilgili sonuçlar (bkz. [4]) hariç $L_p, \left(1 < p < \infty\right)$ uzaylarında regüler fakat güçlü regüler olmayan sınır koşullarına sahip adi diferansiyel operatörlerin kök fonksiyonlar sisteminin tabanlığı yeterli kadar incelenmemiştir. Belirtelim ki, bu tür araştırmalar en çok periyodik ve anti-periyodik sınır koşullarına sahip ikinci mertebeden adi diferansiyel operatörler için yapılmıştır (bkz. [5-19]).

Son yıllarda A. S. Makin [20-24] regüler fakat güçlü regüler olmayan genel biçimli sınır koşullarına sahip Sturm - Liouville diferansiyel operatörlerinin spektral özelliklerini incelemiştir.

[2] ve [25] makalelerinde ayrıca kök fonksiyonlar sistemi taban oluşturmayan regüler olan fakat güçlü regüler olmayan sınır koşullarına sahip adi diferansiyel operatörlere ait örnekler verilmiştir.

Diferansiyel operatörlerin spektral özelliklerinin incelenmesinde V. A. İl'in in ve onun öğrencilerinin (V. D. Budaev, İ. S. Lomov, V. M. Kurbanov, A. S. Makin ve başkaları) kullandığı yöntem büyük öneme sahiptir [26].

Regüler olan fakat güçlü regüler olmayan ikinci ve dördüncü mertebeden adi diferansiyel operatörlerin bazı spektral özelliklerinin araştıtıldığı [27-29] çalışmalarını da hatırlatmakta yarar var.

Regüler olan fakat güçlü regüler olmayan sınır koşullarına sahip yüksek mertebeden adi diferansiyel operatörlerin tabanlık özelliklerinin incelendiği çalışmaların sayısı çok azdır.

$\left[30-32\right]$ çalışmalarında katsayılar üzerine farklı koşullar altında

$$y^{(iv)} + p_2\left(x\right)y'' + p_1\left(x\right)y' + p_0\left(x\right)y \quad \left(0 < x < 1\right)$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$y^{(s)}(1)-(-1)^{\sigma}y^{(s)}(0)+\sum_{l=0}^{s-1}\alpha_l^{(s)}y^{(l)}(0)=0\,,(\mathrm{s}=1,2,3)$$
$$y(1)-(-1)^{\sigma}y(0)=0$$

sınır koşullarının ürettiği diferansiyel operatörün spektral özellikleri incelenir; burada λ spektral parametre, $p_j(x)\in L_1(0,1)$ $(j=0,1,2)$ kompleks değerli fonksiyonlar, $\alpha_{s,j}\,(s=1,2,3\,;\,j=\overline{0,s})$ herhangi kompleks sabitler ve $\sigma=0,1$ dir. Kolayca gösterilebilir ki, bu problemin sınır koşulları regülerdir, fakat güçlü regüler değildir. Adı geçen çalışmalarda bu operatörün özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edilmiş ve uygun kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)\,,1<p<\infty$ uzayında tabanlık özelliği incelenmiştir. Belirtelim ki, söz konusu tez çalışmasında $[30-32]$ makalelerinin içermediği durumlar araştıtılmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde, bulgular kısmında kullanılacak bazı tanımlar ve temel teoremler verilecektir.

3.1. TABAN KAVRAMI, ADİ LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN TANIMI VE ÖZELLİKLERİ

3.1.1. Taban ve Koşulsuz Taban Kavramları

Tanım 3.1.1.1 [33]. X , Y lineer uzaylar olmak üzere $A: X \rightarrow Y$ dönüşümü verilsin ve

$$\forall a_1, a_2 \in \mathbb{C},\ \forall x_1, x_2 \in X:\ A(a_1 x_1 + a_2 x_2) = a_1 A(x_1) + a_2 A(x_2)$$

koşulu sağlansın. Bu durumda A ’ya bir lineer dönüşüm veya lineer operatör denir.

Tanım 3.1.1.2 [33]. $(X, \|\cdot\|)$ bir normlu uzay, $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ ise bu uzayda bir dizi (sistem) olsun. Eğer her bir $x \in X$ için

$$x = \sum_{n=1}^{\infty} c_n e_n$$

olacak biçimde tek bir $\{c_n\}_{n=1}^{\infty}$ sayısal dizisi var ise $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine (sistemine) $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayının bir tabanı denir.

Örneğin, $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\cos n\pi x\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinden (sistemlerinden) herbiri $p > 1$ olmak üzere $L_p(0,1)$ Banach uzayının bir tabanıdır.

Tanım 3.1.1.3 [33]. $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi (sistemi) $(X, \|\cdot\|)$ uzayının bir tabanı olsun. $\mathbb{N}$ ’nin her bir α permutasyonu için $\{e_{\alpha(n)}\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi (sistemi) de $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayının bir tabanı ise $\{e_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine (sistemine) bir koşulsuz taban denir. Koşulsuz olmayan tabana koşullu taban adı verilir.

İspat edilebilir ki $\{\sin n\pi x\}_{n=1}^{\infty}$ ve $\{\cos n\pi x\}_{n=0}^{\infty}$ dizilerinden (sistemlerinden) herbiri $L_2(0,1)$ uzayının koşulsuz tabanıdır ve $p \neq 2$ olduğunda $L_p(0,1)$ $(p>1)$ uzayında koşulsuz taban yoktur.

3.1.2. Lineer Diferansiyel Operatör

Tanım 3.1.2.1 [33].

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \cdots + p_n(x)y, \quad x \in [a,b] \tag{3.1}$$

şeklindeki bir ifadeye lineer diferansiyel ifade denir. $p_0(x), p_1(x), \ldots, p_n(x)$ fonksiyonlarına lineer diferansiyel ifadenin katsayı fonksiyonları, n sayısına da lineer diferansiyel ifadenin mertebesi veya derecesi adı verilir.

$p_k(x) \in L_1(a,b)$ $(k = 0,1,...,n)$ olduğunda herbir $y \in C^{(n)}[a,b]$ için $l(y) \in L_1(a,b)$ olduğu açıktır.

$$\begin{aligned} &y_a = y(a), y'_a = y'(a), y''_a = y''(a), ..., y_a^{(n-1)} = y^{(n-1)}(a), \\ &y_b = y(b), y'_b = y'(b), y''_b = y''(b), ..., y_b^{(n-1)} = y^{(n-1)}(b) \end{aligned} \tag{3.2}$$

olarak gösterelim. $U(y)$ y_a, y'_a, … , $y_a^{(n-1)}$, y_b, y'_b, … , $y_b^{(n-1)}$ değişkenlerine göre bir lineer ifade olsun:

$$U(y) = \alpha_0 y_a + \alpha_1 y'_a + \cdots + \alpha_{n-1} y_a^{(n-1)} + \beta_0 y_b + \beta_1 y'_b + \cdots + \beta_{n-1} y_b^{(n-1)}.$$

Tanım 3.1.2.2 [33]. $U_\nu(y) = 0,\ \nu = \overline{1,m}$ ifadeleri verilsin ve $y \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonu

$$U_\nu(y) = 0 \quad \left(\nu = \overline{1,m}\right) \tag{3.3}$$

koşullarını sağlasın. Bu koşullara $y \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonu üzerine konulan sınır koşulları denir.

(3.3) ile belirtilmiş sınır koşullarını sağlayan tüm $y \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonlarının oluşturduğu kümeyi D ile gösterelim. D'nin $C^{(n)}[a,b]$'nin alt uzayı olduğu açıktır. Bu tür koşullar yok ise veya $U_\nu(y)$ $\left(\nu=\overline{1,m}\right)$ lineer ifadelerinin tüm katsayıları sıfırsa, $D=C^{(n)}[a,b]$ olur.

$l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.3) ile tanımlı D alt uzayı verilsin. Her bir $y\in D$ fonksiyonuna bir $u=l(y)$ fonksiyonunu karşılık getirelim. Bu, tanım kümesi D olan bir lineer operatör tanımlar. Bu operatörü L ile gösterelim.

Tanım 3.1.2.3 [33]. L operatörüne $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.3) sınır koşullarının ürettiği lineer diferansiyel operatör denir.

$U_\nu(y)=0$ $\left(\nu=\overline{1,m}\right)$ sınır koşullarından bazıları diğerlerinin lineer kombinasyonu olabilir. Bu durumda m tane sınır koşulundan lineer bağımlı olanlar atılır.

Biz bundan sonra $U_\nu(y)=0$ $\left(\nu=\overline{1,m}\right)$ sınır koşullarının lineer bağımsız olduğunu, yani $U_\nu(y)$ $\left(\nu=\overline{1,m}\right)$ lineer ifadelerinin katsayılarından oluşan matrisin rankının m olduğunu varsayacağız.

3.1.3. Lagrange Formülü ve Eşlenik Diferansiyel İfade

(3.1) diferansiyel ifadesindeki katsayı fonksiyonları $p_k(x)\in C^{(n-k)}[a,b]$ $(k=\overline{0,n})$ koşullarını sağlasın. $y,z\in C^{(n)}[a,b]$ olsun. k kez kısmi integrasyon formülünü kullanarak

$$\int_a^b p_{n-k}\bar{z}y^{(k)}dx=\left[p_{n-k}\bar{z}y^{(k-1)}-\left(p_{n-k}\bar{z}\right)'y^{(k-2)}+\cdots+(-1)^{k-1}\left(p_{n-k}\bar{z}\right)^{(k-1)}y\right]_a^b+$$
$$+(-1)^k\int_a^b y\left(p_{n-k}\bar{z}\right)^{(k)}dx$$

elde ederiz. Bu eşitlikte $k=\overline{0,n}$ alıp elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplarsak

$$\int_a^b l(y)\bar{z}dx=P(\eta,\zeta)+\int_a^b y\overline{l^*(z)}dx \tag{3.4}$$

bulunur; burada

$$l^*(z) = (-1)^n \left(\overline{p_0} z\right)^{(n)} + (-1)^{n-1} \left(\overline{p_1} z\right)^{(n-1)} + \cdots + \overline{p_n} z \tag{3.5}$$

ve $P(\eta, \zeta)$

$$\eta = \left(y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}\right),$$
$$\zeta = \left(z_a, z'_a, \ldots, z_a^{(n-1)}, z_b, z'_b, \ldots, z_b^{(n-1)}\right)$$

değişkenlerine bağlı bilineer bir ifadedir.

(3.5) ile tanımlı $l^*(z)$ diferansiyel ifadesine $l(y)$ diferansiyel ifadesinin eşleniği, (3.4) formülüne ise Lagrange formülü denir.

l_1, l_2 diferansiyel ifadeler ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olduğunda eşlenik diferansiyel ifadenin tanımından kolayca

$$(l_1 + l_2)^* = l_1^* + l_2^* \ , (\lambda l_1)^* = \overline{\lambda} l_1^*$$

eşitlikleri elde edilir.

3.1.4. Eşlenik Diferansiyel Operatör

$U_1, U_2, \ldots, U_m$ $\quad y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}$ değişkenlerine bağlı lineer bağımsız ifadeler olsunlar. $m < 2n$ durumunda, $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ ifadelerinden oluşan $2n$ sayıda lineer bağımsız ifade elde etmek için $U_{m+1}, \ldots, U_{2n}$ ifadelerini ekleyelim. Bu ifadeler lineer bağımsız olduğundan $y_a, y'_a, \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, \ldots, y_b^{(n-1)}$ değişkenleri $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ ifadelerinin lineer kombinasyoları olur.

(3.4) Lagrange formülünde bu ifadeleri yerine yazarsak $P(\eta, \zeta)$ $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ değişkenlerine bağlı olur. Ayrıca $P(\eta, \zeta)$'nın $V_1, V_2, \ldots, V_{2n}$ ile göstereceğimiz katsayıları $\overline{z_a}, \overline{z'_a}, \ldots, \overline{z_a^{(n-1)}}, \overline{z_b}, \overline{z'_b}, \ldots, \overline{z_b^{(n-1)}}$ değişkenlerine bağlı lineer bağımsız lineer ifadelerdir. Böylece bu durumda (3.4) Lagrange formülü

$$\int_a^b l(y) \overline{z} dx = U_1 V_{2n} + U_2 V_{2n-1} + \cdots + U_{2n} V_1 + \int_a^b y \overline{l^*(z)} dx \tag{3.6}$$

şeklinde yazılabilir.

$$V_1 = 0,\ V_2 = 0, \ldots, V_{2n-m} = 0 \tag{3.7}$$

sınır koşullarına (veya (3.7)'ye denk tüm sınır koşullarına)

$$U_1 = 0,\ U_2 = 0, \ldots, U_m = 0 \tag{3.8}$$

sınır koşullarının eşlenik sınır koşulları denir.

Tanım 3.1.4.1 [33]. (3.5) lineer diferansiyel ifadesinin ve (3.7) sınır koşullarının ürettiği diferansiyel operatöre (3.1) lineer diferansiyel ifadesinin ve (3.8) sınır koşullarının ürettiği L diferansiyel operatörünün eşleniği denir. L operatörünün eşlenik operatörü L^* ile gösterilir.

(3.6)–(3.8)'den

$$\int_a^b L(y)\bar{z}dx = \int_a^b y\overline{L^*(z)}dx \tag{3.9}$$

elde edilir. (3.9) eşitliği

$$(Ly, z) = (y, L^*z) \tag{3.10}$$

biçiminde de yazılabilir, burada $(f, g) = \int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$ 'dir.

Eşlenik operatörün tanımına göre L operatörü L^* operatörüne eşlenik olur, yani $L^{**} = L$ eşitliği sağlanır.

$L = L^*$ olduğunda L^* operatörüne özeşlenik diferansiyel operatör denir. L özeşlenik diferansiyel operatör olduğunda $(Ly, z) = (y, Lz)$ eşitliği sağlanır.

3.2. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN ÖZDEĞER VE ÖZFONKSİYONLARI

3.2.1. Diferansiyel Operatörün Özdeğer ve Özfonksiyonları

Tanım 3.2.1.1 [33]. L, n. mertebeden bir diferansiyel operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ olsun. Eğer

$$Ly = \lambda y \tag{3.11}$$

denklemi sıfıra özdeş olmayan bir y fonksiyonu için sağlanıyorsa, λ sayısına L operatörünün bir özdeğeri, y fonksiyonuna da λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyon denir.

Varsayalım ki, L operatörü $l(y)$ diferansiyel ifadesinin ve

$$U_1(y)=0,\dots,U_n(y)=0 \tag{3.12}$$

sınır koşullarının ürettiği diferansiyel operatördür. O halde y özfonksiyonu L operatörünün tanım kümesine ait olmak zorundadır. Böylece, bir L operatörünün özdeğerleri λ'nın öyle değerleridir ki, bu değerlerde

$$l(y)=\lambda y, \quad U_\nu(y)=0 \quad \left(\nu=\overline{1,n}\right) \tag{3.13}$$

homojen sınır değer probleminin sıfıra özdeş olmayan çözümü vardır. Sıfıra özdeş olmayan çözüm λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyondur.

Aynı λ özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonların herbir lineer kombinasyonu yine λ'ya karşılık gelen bir özfonksiyondur. Başka bir deyişle, $Ly_1=\lambda y_1$ ve $Ly_2=\lambda y_2$ ise her $c_1,c_2\in\mathbb{C}$ için $L(c_1y_1+c_2y_2)=\lambda(c_1y_1+c_2y_2)$'dir.

$l(y)=\lambda y$ homojen denklemi verilen bir λ parametresi için n sayıda lineer bağımsız çözüme sahiptir. Belirtelim ki, aynı özdeğere ait olan tüm özfonksiyonların kümesi boyutu n'den büyük olmayan bir lineer uzay belirler. Bu uzayın boyutu verilen λ özdeğeri için problemin lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır. Bu sayıya λ özdeğerinin geometrik katlılığı denir.

Varsayalım ki,

$$y_1(x,\lambda),y_2(x,\lambda),\dots,y_n(x,\lambda) \tag{3.14}$$

fonksiyonları $l(y)=\lambda y$ denkleminin

$$y_j^{(\nu-1)}(a,\lambda)=\delta_{j,\nu} \quad \left(j,\nu=\overline{1,n}\right) \tag{3.15}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerinin temel sistemidir. Belirtelim ki, $[a,b]$ aralığında sabitlenmiş her x için (3.14) fonksiyonları λ parametresinin tam fonksiyonlarıdır.

Bir λ sayısının L operatörünün özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul en az biri sıfır olmayan öyle $c_1,c_2,\dots,c_n\in\mathbb{C}$ sayılarının var olmasıdır ki $y(x,\lambda)=\sum_{j=1}^{n}c_jy_j(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.12) sınır koşullarını sağlasın. Başka bir deyişle, λ sayısının L operatörünün bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$c_1U_\nu(y_1)+c_2U_\nu(y_2)+\cdots+c_nU_\nu(y_n)=0 \ \ (\nu=\overline{1,m})$$

homojen lineer denklemler sisteminin en az biri sıfır olmayan $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{C}$ çözümünün var olmasıdır. Dolayısıyla λ sayısının L operatörünün bir özdeğeri olması için gerek ve yeter koşul

$$U=\begin{pmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \cdots & U_m(y_n) \end{pmatrix} \tag{3.16}$$

biçiminde tanımlanan matrisin rankının n 'den küçük olmasıdır.

Uygulamalarda $m=n$ durumu daha önemlidir. İleride yalnızca bu durumla ilgileneceğiz.

$\Delta(\lambda)$ determinantını

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) & \cdots & U_1(y_n) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & \cdots & U_2(y_n) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ U_m(y_1) & U_m(y_2) & \cdots & U_m(y_n) \end{vmatrix}$$

gibi tanımlayalım. $\Delta(\lambda)$ λ değişkenine bağlı bir tam fonksiyondur. $\Delta(\lambda)$' ya L operatörünün karakteristik determinantı denir. Yukarıdaki söylenenlerden görülür ki,

1. L operatörünün özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun kökleridir.

Eğer $\Delta(\lambda)\equiv 0$ ise her $\lambda\in\mathbb{C}$ sayısı L operatörünün özdeğeridir.

2. $\Delta(\lambda)\not\equiv 0$ ise L operatörünün tüm özdeğerlerinin oluşturduğu küme en fazla sayılabilir sayıda elemana sahiptir ve bu kümenin sonlu limit noktası yoktur.

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırı olmazsa, L operatörünün özdeğere sahip olmayacağı açıktır.

λ_0 sayısı L operatörünün bir özdeğeri olsun. O halde bu sayı $\Delta(\lambda)$ tam fonksiyonunun bir sıfır yeridir. Bu sebeple, $\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k G(\lambda)$ olarak yazılabilir. Burada G bir tam fonksiyon, $G(\lambda_0)\neq 0$ ve $k\in\mathbb{N}$'dir. Bu biçimde tanımlanan k sayısına λ_0 özdeğerinin cebirsel katlılığı denir. $k=1$ durumunda λ_0 'a basit özdeğer adı verilir.

λ_0 özdeğerinin geometrik katlılığına s diyelim. Gösterilebilir ki, $s \le k$ 'dır. Daha açık bir ifade ile, λ_0 özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonların sayısı bu özdeğerin cebirsel katlılığını geçemez.

3.2.2. Lineer Diferansiyel Operatörün Ek Fonksiyonları

λ_0 sayısı L diferansiyel operatörünün bir özdeğeri, $\varphi_0(x)$ bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. $\varphi_1(x)$ ile $L(\varphi)=\lambda_0\varphi+\varphi_0$ denklemini sağlayan herhangi bir fonksiyonu belirtelim. Başka bir deyişle, φ_1 fonksiyonu

$$l(\varphi_1)=\lambda_0\varphi_1+\varphi_0$$

denklemini ve

$$U_\nu(\varphi_1)=0 \quad \left(\nu=\overline{1,n}\right)$$

sınır koşullarını sağlıyor. φ_1 fonksiyonuna, λ_0 özdeğerine ve φ_0 özfonksiyonuna karşılık gelen birinci mertebeden ek fonksiyon adı verilir.

λ_0 özdeğerine ve φ_0 özfonksiyonuna karşılık gelen r. mertebeden (burada $r \ge 2$) ek fonksiyon $L(\varphi_r)=\lambda_0\varphi_r+\varphi_{r-1}$ denkleminin bir çözümü gibi tanımlanır. Görüldüğü gibi φ_r fonksiyonu

$$\begin{cases} l(\varphi)=\lambda_0\varphi+\varphi_{r-1}\,, \\ U_\nu(\varphi)=0 \quad \left(\nu=\overline{1,n}\right) \end{cases}$$

homojen olmayan bir sınır değer probleminin çözümüdür.

λ_0 sayısı L operatörünün bir özdeğeri, $\varphi_0(x)$ bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. Varsayalım ki, λ_0 özdeğerine ve $\varphi_0(x)$ özfonksiyonuna karşılık gelen $(s-1)$. mertebeden ek fonksiyon vardır ve s. mertebeden ek fonksiyon yoktur. Bu durumda "$\varphi_0(x)$ özfonksiyonunun katlılığı s 'ye eşittir" denir.

Varsayalım ki, λ_0 sayısı L operatörünün bir özdeğeri ve $\varphi_1(x), \varphi_2(x), ..., \varphi_p(x)$ bu özdeğere uygun lineer bağımsız özfonksiyonların maksimal sistemidir. $\varphi_j(x)$ $(j = \overline{1, p})$ özfonksiyonu katlılığı m_j 'ye eşit olsun. Bu yöntemle λ_0 özdeğerine uygun özfonksiyonlardan ve ek fonksiyonlardan oluşmuş

$$\varphi_j(x), \varphi_{j,1}(x), ..., \varphi_{j,m_j-1}(x) \quad (j = \overline{1, p})$$

sistemini elde ederiz.

Teorem 3.2.2.1 [33]. λ_0 özdeğerinin cebirsel katlılığı m ise $m_1 + m_2 + ... + m_p = m$ eşitliği doğrudur.

3.2.3. Normalleştirilmiş Sınır Koşulları

Verilmiş bir lineer diferansiyel operatörü belirleyen $U_\nu(y)$ $\left(\nu = \overline{1, n}\right)$ lineer formlarını göz önüne alalım. Varsayalım ki, $U_\nu(y)$ lineer formunda $y_0^{(k)}$ veya $y_1^{(k)}$ değişkeni bulunur, fakat $\nu > k$ olduğunda bu form $y_0^{(\nu)}$ ve $y_1^{(\nu)}$ değişkenlerini sağlamıyor. Bu durumda k sayısına $U(y)$ lineer formunun mertebesi adı verilir.

Söz konusu lineer formlardan $n-1$ mertebeli lineer formları (eğer varsa) ayıralım. Bu lineer formları gerekli olduğunda onların lineer ifadeleri ile öyle değiştirmek mümkündür ki, $n-1$ mertebeli en çok iki lineer form bulunsun. Diğer lineer formların her birinin mertebesi $n-1$ den küçük olur ve $n-2$ mertebeli formlara (eğer varsa) aynı yöntemi uygularsak, $n-2$ mertebeli en fazla iki lineer form bulunur.

Bu işleme sınır koşullarının normalleştirilmesi ve bu işlemin sonucunda elde edilmiş sınır koşullarına ise normalleştirilmiş sınır koşulları denir. Görüldüğü gibi normalleştirilmiş sınır koşulları

$$U_\nu(y) \equiv U_{\nu 0}(y) + U_{\nu 1}(y) = 0 \tag{3.17}$$

biçiminde olmalıdır, burada

$$U_{\nu 0}(y) = \alpha_\nu y_0^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \alpha_{\nu j} y_0^{(j)}, \tag{3.18}$$

$$U_{\nu 1}(y) = \beta_\nu y_1^{(k_\nu)} + \sum_{j=0}^{k_\nu - 1} \beta_{\nu j} y_1^{(j)} \tag{3.19}$$

ve $n-1 \geq k_1 \geq k_2 \geq \cdots \geq k_n \geq 0$, $k_{\nu+2} < k_\nu$ ve $\forall \nu = \overline{1,n}$ için $\alpha_\nu \neq 0$ veya $\beta_\nu \neq 0$'dır.

3.2.4 Regüler Sınır Koşulları

Kompleks ρ düzlemi

$$\frac{\pi \nu}{n} \leq \arg \rho \leq \frac{\pi(\nu+1)}{n}$$

eşitsizlikleri ile tanımlanan $2n$ sayıda S_ν $(\nu = \overline{0, 2n-1})$ bölgelerine bölelim. $w_1, w_2, ..., w_n$ ile (-1) sayısının n. dereceden tüm farklı köklerini belirtelim. İspat edilebilir ki [33], $w_1, w_2, ..., w_n$ sayılarının öyle sıralaması vardır ki, her $\rho \in S_\nu$ için

$$\mathrm{Re}(\rho w_1) \leq \mathrm{Re}(\rho w_2) \leq \cdots \leq \mathrm{Re}(\rho w_n)$$

eşitsizliği sağlanıyor.

Aşağıdaki gibi normalleştirilmiş sınır koşullarını göz önüne alalım:

$$U_\nu(y) = 0 \quad \left(\nu = \overline{1,n}\right). \tag{3.20}$$

Burada $U_\nu(y)$ lineer formları (3.17)-(3.19) eşitlikleri ile tanımlanmıştır.

Regüler sınır koşulları n sayısının tek ve çift olma durumuna göre ayrı ayrı tanımlanıyor.

a) n tek olsun: $n = 2\mu - 1$. Bu durumda

$$\theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \alpha_1 w_1^{k_1} & \cdots & \alpha_1 w_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1) w_\mu^{k_1} & \beta_1 w_{\mu+1}^{k_1} & \cdots & \beta_1 w_n^{k_1} \\ \alpha_2 w_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2 w_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2) w_\mu^{k_2} & \beta_2 w_{\mu+1}^{k_2} & \cdots & \beta_2 w_n^{k_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n w_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n w_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n) w_\mu^{k_n} & \beta_n w_{\mu+1}^{k_n} & \cdots & \beta_n w_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

eşitliğiyle verilen θ_0 ve θ_1 sayıları sıfırdan farklı ise (3.20) normalleştirilmiş sınır koşullarına regüler sınır koşulları denir.

b) n çift olsun: $n = 2\mu$. Bu durumda

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s =$$

$$\begin{vmatrix} \alpha_1 w_1^{k_1} & \cdots & \alpha_1 w_{\mu-1}^{k_1} & (\alpha_1 + s\beta_1) w_\mu^{k_1} & \left(\alpha_1 + \frac{1}{s}\beta_1\right) w_{\mu+1}^{k_1} & \beta_1 w_{\mu+2}^{k_1} & \cdots & \beta_1 w_n^{k_1} \\ \alpha_2 w_1^{k_2} & \cdots & \alpha_2 w_{\mu-1}^{k_2} & (\alpha_2 + s\beta_2) w_\mu^{k_2} & \left(\alpha_2 + \frac{1}{s}\beta_2\right) w_{\mu+1}^{k_2} & \beta_2 w_{\mu+2}^{k_2} & \cdots & \beta_2 w_n^{k_2} \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ \alpha_n w_1^{k_n} & \cdots & \alpha_n w_{\mu-1}^{k_n} & (\alpha_n + s\beta_n) w_\mu^{k_n} & \left(\alpha_n + \frac{1}{s}\beta_n\right) w_{\mu+1}^{k_n} & \beta_n w_{\mu+2}^{k_n} & \cdots & \beta_n w_n^{k_n} \end{vmatrix}$$

eşitliğiyle verilen θ_{-1} ve θ_1 sayıları sıfırdan farklı ise (3.20) normalleştirilmiş sınır koşullarına regüler sınır koşulları denir. Sınır koşullarının regüler olduğu durumda $\theta_0^2 \neq 4\theta_{-1}\theta_1$ ise (3.20) sınır koşullarına güçlü regüler sınır koşulları adı verilir.

Belirtelim ki, sınır koşullarının regülerliği genel bir kavram iken güçlü regülerlik sadece çift mertebeli operatörler için geçerli olan bir kavramdır. Gösterilebilir ki, sınır koşullarının regülerliği ve güçlü regülerliği S_ν bölgesinin seçiminden bağımsızdır.

Aşağıdaki gibi sınır koşullarını gözönüne alalım:

$$U_\nu(y) = y^{(\nu)}(1) - (-1)^\sigma y^{(\nu)}(0) = 0 \quad \left(\nu = \overline{0, n-1}\right).$$

Bu sınır koşullarına $\sigma = 0$ ve $\sigma = 1$ durumlarında sırasıyla periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları denir.

Periyodik ve antiperiyodik sınır koşullarının regülerliğini ve güçlü regülerliğini inceleyelim. Dikkate alalım ki, periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları normalleştirilmiştir.

S_ν belirlenmiş bir bölge olsun ve $w_1, w_2, \ldots, w_n$ sayıları herbir $\rho \in S_\nu$ için

$$\operatorname{Re}(\rho w_1) \leq \operatorname{Re}(\rho w_2) \leq \cdots \leq \operatorname{Re}(\rho w_n)$$

eşitsizliğini sağlayacak sırada dizilsin.

a) n tek olsun: $n=2\mu-1$. Bu durumda

$$\theta_0+\theta_1 s=\pm\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \left(1-(-1)^{\sigma}s\right) & 1 & \cdots & 1 \\ w_1 & \cdots & w_{\mu-1} & \left(1-(-1)^{\sigma}s\right)w_{\mu} & w_{\mu+1} & \cdots & w_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_1^{n-1} & \cdots & w_{\mu-1}^{n-1} & \left(1-(-1)^{\sigma}s\right)w_{\mu}^{n-1} & w_{\mu+1}^{n-1} & \cdots & w_n^{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=\pm C\left(1-(-1)^{\sigma}s\right)$$

olur, burada C $w_1,w_2,\ldots,w_n$ sayılarının Vandermonde determinantıdır. $w_1,w_2,\ldots,w_n$ sayıları birbirinden farklı olduğundan $C\neq 0$'dır. Buradan $\theta_0=\pm C\neq 0$, $\theta_1=\pm C.(-1)^{\sigma+1}\neq 0$ bulunur. Görüldüğü gibi, n tek sayı olduğunda periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları regülerdir.

b) n çift olsun: $n=2\mu$. Bu durumda

$$\frac{\theta_{-1}}{s}+\theta_0+\theta_1 s=$$

$$=\pm\begin{vmatrix} 1 & \cdots & 1 & \left(1-(-1)^{\sigma}s\right) & \left(1-\frac{(-1)^{\sigma}}{s}\right) & 1 & \cdots & 1 \\ w_1 & \cdots & w_{\mu-1} & \left(1-(-1)^{\sigma}s\right)w_{\mu} & \left(1-\frac{(-1)^{\sigma}}{s}\right)w_{\mu+1} & w_{\mu+2} & \cdots & w_n \\ \vdots & & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & & \vdots \\ w_1^{n-1} & \cdots & w_{\mu-1}^{n-1} & \left(1-(-1)^{\sigma}s\right)w_{\mu}^{n-1} & \left(1-\frac{(-1)^{\sigma}}{s}\right)w_{\mu+1}^{n-1} & w_{\mu+2}^{n-1} & \cdots & w_n^{n-1} \end{vmatrix}=$$

$$=\pm C\left(1-(-1)^{\sigma}s\right)\left(1-\frac{(-1)^{\sigma}}{s}\right)$$

olur, burada C $w_1,w_2,\ldots,w_n$ sayılarının Vandermonde determinantıdır ve bu sayılar birbirinden farklı olduklarından $C\neq 0$'dır. Buradan $\theta_{-1}=\theta_1=\pm C(-1)^{\sigma+1}\neq 0$, $\theta_0=\pm 2C$ ve $\theta_0^2=4\theta_{-1}\theta_1=4C^2$ bulunur. Böylece, n çift sayı olduğunda periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları regülerdir, fakat güçlü regüler değildir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMALAR

4.1. PROBLEMİN İFADESİ

İleride L ile

$$l(y) = y^{(iv)} + p_2(x)y'' + p_1(x)y' + p_0(x)y, \quad (0 < x < 1) \tag{4.1}$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$U_s(y) \equiv y^{(s)}(1) - (-1)^{\sigma} y^{(s)}(0) = 0, \quad \left(s = \overline{0,3}\right) \tag{4.2}$$

periyodik veya antiperiyodik sınır koşullarının tanımladığı diferansiyel operatörü gösterilsin; burada $p_j(x) \in L_1(0,1)$ $(j = 0,1,2)$ kompleks değerli fonksiyonlar ve $\sigma = 0,1$'dir. Bu sınır değer probleminin sınır koşulları regülerdir, fakat güçlü regüler değildir.

Bu tez çalışmasında $p_0(x)$, $p_1(x)$, $p_2(x)$ katsayıları belirli koşulları sağladığında L diferansiyel operatörünün
1) özdeğerleri ve özfonksiyonları için asimptotik formüller elde edilmiştir;
2) kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında tabanlığı incelenmiştir.

4.2. SONUÇLARIN İFADESİ

c_0, c_1 ve γ_0 sayılarını aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$c_0 = \int_0^1 p_2(\xi)\,d\xi, \qquad c_1 = \int_0^1 p_1(\xi)\,d\xi, \tag{4.3}$$

$$\gamma_0^2 = (-1)^{\sigma}\left(p_2(1) - p_2(0) - 2c_1\right)\left(p_2(1) - p_2(0) + 2c_1\right). \tag{4.4}$$

Bu tez çalışmasının temel sonuçları aşağıdaki üç teoremde ifade edilmiştir.

Teorem.4.2.1. $p_2(x) \in W_1^1(0,1)$, $p_j(x) \in L_1(0,1)$ $(j=0,1)$ herhangi kompleks değerli fonksiyonlar ve $c_0 = 0$, $c_1 \neq 0, \gamma_0 \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.1)-(4.2) lineer diferansiyel operatörünün sonlu sayıdaki hariç tüm özdeğerleri basittir ve $\{\lambda_{n,1}\}_{n=1}^{\infty}$, $\{\lambda_{n,2}\}_{n=1}^{\infty}$ gibi iki sonsuz dizi oluşturur. Ayrıca, yeterince büyük n sayıları için

$$\lambda_{n+n_j,\mathrm{j}} = \left((2n-\sigma)\pi\right)^4 \left\{1 + \frac{(-1)^j \gamma_0}{2\left((2n-\sigma)\pi\right)^3} + O\left(n^{-3}\varepsilon_n\right)\right\} \tag{4.5}$$

asimptotik formülleri doğrudur, burada n_1 ve n_2 negatif olmayan belirli tam sayılardır. Bunun yanı sıra, yeterince büyük n doğal sayıları için $\lambda_{n,1}$ ve $\lambda_{n,2}$ özdeğerlerine karşılık gelen $u_{n,1}(x)$ ve $u_{n,2}(x)$ özfonksiyonları

$$u_{n+n_j,\mathrm{j}}(x) = \left[2c_1 + p_2(1) - p_2(0)\right]\cos(2n-\sigma)\pi x + (-1)^{\sigma}\gamma_0 \sin(2n-\sigma)\pi x + O\left(\varepsilon_n\right) \tag{4.6}$$

asimptotoik gösterimlerine sahiptir, burada

$$\varepsilon_n = \left|\int_0^1 (2p_1(\xi) - p_2'(\xi))\,\mathrm{e}^{2(2n-\sigma)\pi i\xi}\, d\xi\right| + \left|\int_0^1 (2p_1(\xi) - p_2'(\xi))\,\mathrm{e}^{-2(2n-\sigma)\pi i\xi}\, d\xi\right| + n^{-1} \tag{4.7}$$

dır.

Teorem.4.2.2. $p_j(x) \in W_1^j(0,1)$ $(j=0,1,2)$, $p_1(1) = p_1(0)$, $p_2^{(s)}(1) = p_2^{(s)}(0)$ $(s=0,1)$ ve $c_0 = 0$, $c_1 \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.1)-(4.2) lineer diferansiyel operatörünün kök fonksiyonlar sistemi $1 < p < \infty$ olmak üzere $L_p(0,1)$ uzayının tabanını oluşturur ve bu taban $p = 2$ için koşulsuzdur.

Sonuç 4.2.1. Teorem 4.2.2'nin tüm koşulları sağlansın ve n_1, n_2 Teorem 4.2.1'de verilen tamsayılar olsun. Bu takdirde $n_1 + n_2 = 1 - \sigma$'dır ve $n_1 = 1 - \sigma$, $n_2 = 0$ seçebiliriz.

Not 4.2.1. Teorem 4.2.2 nin koşulları sağlandığında $j = 1,2$ olmak üzere

$$u_{n+n_j,\mathrm{j}}(x) = \cos(2n-\sigma)\pi x + (-1)^j i^{1-\sigma}\gamma_0 \sin(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.8}$$

asimptotik formülleri doğrudur.

4.3. BAZI YARDIMCI SONUÇLAR.

$l(y)+\rho^4 y=0$ DENKLEMİNİN ÇÖZÜMÜ İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

$\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesi olmak üzere

$$S_0=\left\{\rho=re^{i\theta} \mid r\geq 0,\, 0\leq\theta\leq\frac{\pi}{4}\right\} \tag{4.9}$$

olsun. w_k $\left(k=\overline{1,4}\right)$ ile $w^4+1=0$ denkleminin farklı 4 kökünü gösterelim. w_k $\left(k=\overline{1,4}\right)$ sayıları

$$\forall\rho\in S_0:\operatorname{Re}(\rho w_1)\leq\operatorname{Re}(\rho w_2)\leq\operatorname{Re}(\rho w_3)\leq\operatorname{Re}(\rho w_4) \tag{4.10}$$

koşulunu sağlayacak biçimde sıralanabilir [33, II. bölüm, §4.8], burada $\operatorname{Re}(z)$ ile z sayısının gerçel kısmı belirtilmiştir.

Bundan sonra w_k $\left(k=\overline{1,4}\right)$ sayılarının (4.10) eşitsizliğini sağlayacak biçimde sıralandığını kabul edeceğiz. O halde

$$w_1=e^{3\pi i/4},\quad w_2=e^{-3\pi i/4},\quad w_3=e^{\pi i/4},\quad w_4=e^{-\pi i/4} \tag{4.11}$$

olur ve buradan kolayca

$$w_1=-w_4,\quad w_2=-w_3 \tag{4.12}$$

olduğu görülür.

Lemma 4.3.1.[32]. S_0 bölgesinde

$$\operatorname{Re}(\rho w_1)\leq-\frac{\sqrt{2}}{2}|\rho|,\quad \operatorname{Re}(\rho w_4)\geq\frac{\sqrt{2}}{2}|\rho| \tag{4.13}$$

eşitsizlikleri doğrudur.

c tespit edilmiş bir kompleks sayı olmak üzere S_0 bölgesini $-c$ kadar ötelenmesi sonucu elde edilmiş bölgeyi T_0 ile işaret edelim:

$$T_0=\{\rho-c \mid \rho\in S_0\}.$$

T_0 bölgesi için (4.10) ve (4.13) eşitsizlikleri aşağıdaki biçimde olur:

$$\operatorname{Re}((\rho+c)w_1)\leq\operatorname{Re}((\rho+c)w_2)\leq\operatorname{Re}((\rho+c)w_3)\leq\operatorname{Re}((\rho+c)w_4), \tag{4.14}$$

$$\operatorname{Re}\left(\left(\rho+c\right)w_1\right)\le-\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\rho+c\right|,\quad \operatorname{Re}\left(\left(\rho+c\right)w_4\right)\ge\frac{\sqrt{2}}{2}\left|\rho+c\right|. \tag{4.15}$$

T_0 bölgelerinden herhangi birini seçelim ve $\rho\in T_0$ olmak üzere

$$l\left(y\right)+\rho^4 y=0 \tag{4.16}$$

denklemini göz önüne alalım. Bu denklemin lineer bağımsız olan dört çözümü vardır. Bu çözümleri $y_k\left(x,\rho\right)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$ ile gösterelim. r_0 yeterince büyük sayı olmak üzere $y_k\left(x,\rho\right)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$ fonksiyonları herbir tespit edilmiş

$$\widetilde{T_0}=\left\{\rho\in\mathbb{C}\mid\rho\in T_0,\left|\rho\right|>r_0\right\}$$

bölgesinde analitiktirler. Ayrıca $\left|\rho\right|$'nun yeterince büyük değerlerinde bu çözümler ve türevleri

$$\begin{aligned}\frac{d^s y_k(x,\rho)}{dx^s}&=\rho^s w_k^s e^{\rho w_k x}+\frac{1}{4\rho^3}\int_0^x\frac{\partial^s K_1\left(x,\xi,\rho\right)}{\partial x^s}M_\xi\left(y_k\right)d\xi-\\&-\frac{1}{4\rho^3}\int_x^1\frac{\partial^s K_2\left(x,\xi,\rho\right)}{\partial x^s}M_\xi\left(y_k\right)d\xi,\quad \nu=\overline{0,3}\end{aligned} \tag{4.17}$$

biçiminde bir integro-diferansiyel denklemini sağlar [33, II. bölüm, §4.5-4.6]; burada

$$M_x(y)=p_2(x)y''(x)+p_1(x)y'(x)+p_0(x)y,$$

$$K_1\left(x,\xi,\rho\right)=\sum_{\alpha=1}^{k}w_\alpha e^{\rho w_\alpha\left(x-\xi\right)},\qquad K_2\left(x,\xi,\rho\right)=\sum_{\alpha=k+1}^{4}w_\alpha e^{\rho w_\alpha\left(x-\xi\right)} \tag{4.18}$$

dır. Dikkate alalım ki [33, II. bölüm, §4.5],

$$\frac{d^s y_k}{dx^s}=\rho^s e^{\rho w_k x}z_{k,s}\left(x,\rho\right)\quad\left(s=\overline{0,3},k=\overline{1,4}\right) \tag{4.19}$$

dır, burada $z_{k,s}\left(x,\rho\right)$ fonksiyonu herbir tespit edilmiş $x\in[0,1]$ için $\rho\in\widetilde{T_0}$ değişkeninin analitik fonksiyonudur ve

$$z_{k,s}\left(x,\rho\right)=w_k^s+O\left(\rho^{-1}\right)\quad\left(s=\overline{0,3};\ k=\overline{1,4}\right) \tag{4.20}$$

eşitliği sağlanıyor. (4.17)-(4.19)' dan

$$
\begin{aligned}
z_{k,s}(x,\rho) &= w_k^s + \frac{w_k^{s+1}}{4\rho}\int_0^x \sum_{j=0}^{2} \frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi + \\
&+ \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=1}^{k-1} w_\alpha^{s+1}\int_0^x e^{\rho(w_\alpha - w_k)(x-\xi)} \sum_{j=0}^{2}\frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi - \\
&- \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=k+1}^{4} w_\alpha^{s+1}\int_x^1 e^{\rho(w_\alpha - w_k)(x-\xi)} \sum_{j=0}^{2}\frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi
\end{aligned} \tag{4.21}
$$

elde ederiz. Dikkate alalım ki, (4.14)’e göre

$$
\operatorname{Re}\left(\rho\left(w_\alpha - w_\beta\right)\right) = \operatorname{Re}\left((\rho + c)\left(w_\alpha - w_\beta\right)\right) - \operatorname{Re}\left(c\left(w_\alpha - w_\beta\right)\right) \le 2|c|
$$

sağlanır, burada $1 \le \alpha \le \beta \le 4$’tür. Buradan ve (4.20)’den $k = \overline{1,4}$ ve $j = 0,1,2$ olmak üzere

$$
\int_0^x p_j(\xi) z_{k,j}(\xi,\rho) e^{\rho(w_\alpha - w_k)(x-\xi)} d\xi = O(1) \quad (\alpha \le k),
$$

$$
\int_x^1 p_j(\xi) z_{k,j}(\xi,\rho) e^{\rho(w_\alpha - w_k)(x-\xi)} d\xi = O(1) \quad (\alpha \ge k)
$$

elde edilir. Son iki eşitlikten ve (4.21)’den kolayca

$$
\begin{aligned}
z_{k,s}(x,\rho) &= w_k^s + \frac{w_k^{s+1}}{4\rho}\int_0^x \sum_{j=1}^{2} \frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi + \\
&+ \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=1}^{k-1} w_\alpha^{s+1}\int_0^x e^{\rho(w_\alpha - w_k)(x-\xi)} \sum_{j=1}^{2}\frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi - \\
&- \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=k+1}^{4} w_\alpha^{s+1}\int_x^1 e^{\rho(w_\alpha - w_k)(x-\xi)} \sum_{j=1}^{2}\frac{p_j(\xi)}{\rho^{2-j}} z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi + O\left(\rho^{-3}\right)
\end{aligned} \tag{4.22}
$$

olduğu görülür. Bu eşitlik,

$$
z_{\mathrm{k},s}(x,\rho) = w_k^s\left[1 - \frac{1}{4\rho w_k}\int_0^x p_2(\xi)\,d\xi + O\left(\rho^{-2}\right)\right] \tag{4.23}
$$

biçiminde de yazılabilir. (4.22)’den

$$
z_{k,s}(0,\rho) = w_k^s - \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=k+1}^{4} w_\alpha^{s+1} B_{\alpha,k}(\rho) + O\left(\rho^{-3}\right), \tag{4.24}
$$

$$
\begin{aligned}
z_{k,s}(1,\rho) &= w_k^s + \frac{w_k^{s+1}}{4\rho}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho^{2-j}}\int_0^1 p_j(\xi) z_{k,j}(\xi,\rho)\,d\xi + \\
&+ \frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=1}^{k-1} w_\alpha^{s+1} B_{\alpha,k}(\rho) + O\left(\rho^{-3}\right)
\end{aligned} \tag{4.25}
$$

elde edilir, burada

$$B_{\alpha,k}(\rho)=\begin{cases}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho^{2-j}}\int_0^1 p_j(\xi)z_{k,j}(\xi,\rho)e^{-\rho(w_\alpha-w_k)\xi}d\xi, & 1\le k<\alpha\le 4 \text{ ise},\\ \sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho^{2-j}}\int_0^1 p_j(\xi)z_{k,j}(\xi,\rho)e^{\rho(w_\alpha-w_k)(1-\xi)}d\xi, & 1\le \alpha<k\le 4 \text{ ise}\end{cases} \tag{4.26}$$

dir. Kolayca görülür ki

$$B_{\alpha,k}(\rho)=o(1) \qquad (\alpha\ne k) \tag{4.27}$$

dir.

(4.3) ve (4.20)'den

$$\int_0^1 p_1(\xi)z_{k,1}(\xi,\rho)d\xi=w_k\int_0^1 p_1(\xi)d\xi+O(\rho^{-1})=c_1w_k+O(\rho^{-1}),$$

eşitliği ve (4.23)'den

$$\int_0^1 p_2(\xi)z_{k,2}(\xi,\rho)d\xi=w_k^2\int_0^1 p_2(\xi)\left[1-\frac{1}{4\rho w_k}\int_0^\xi p_2(t)dt\right]d\xi+O(\rho^{-2})=O(\rho^{-2})$$

eşitliği elde edilir. Son iki eşitlikten $s=\overline{0,3}$ ve $k=2,3$ olmak üzere

$$\frac{w_k^{s+1}}{4\rho}\sum_{j=1}^{2}\frac{1}{\rho^{2-j}}\int_0^1 p_j(\xi)z_{k,j}(\xi,\rho)d\xi=\frac{w_k^{s+2}}{4\rho^2}c_1+O(\rho^{-3})$$

bulunur. Sonuncu eşitlikten dolayı (4.25)

$$z_{k,s}(1,\rho)=w_k^s+\frac{c_1w_k^{s+2}}{4\rho^2}+\frac{1}{4\rho}\sum_{\alpha=1}^{k-1}w_\alpha^{s+1}B_{\alpha,k}(\rho)+O(\rho^{-3}) \tag{4.28}$$

şeklinde yazılabilir.

(4.24) ve (4.28) formüllerinin yardımı ile kolayca gösterilir ki, $s=\overline{0,3}$ için olmak üzere

$$\begin{aligned} z_{2,s}(0,\rho)&=w_2^s-\frac{w_3^{s+1}}{4\rho}B_{3,2}(\rho)-\frac{w_4^{s+1}}{4\rho}B_{4,2}(\rho)+O(\rho^{-3}),\\ z_{3,s}(0,\rho)&=w_3^s-\frac{w_4^{s+1}}{4\rho}B_{4,3}(\rho)+O(\rho^{-3}),\\ z_{2,s}(1,\rho)&=w_2^s+\frac{c_1w_2^{s+2}}{4\rho^2}+\frac{w_1^{s+1}}{4\rho}B_{1,2}(\rho)+O(\rho^{-3}),\\ z_{3,s}(1,\rho)&=w_3^s+\frac{c_1w_3^{s+2}}{4\rho^2}+\frac{w_1^{s+1}}{4\rho}B_{1,3}(\rho)+\frac{w_2^{s+2}}{4\rho}B_{2,3}(\rho)+O(\rho^{-3})\end{aligned} \tag{4.29}$$

değerlendirmeleri doğrudur.

4.4. TEOREM 4.2.1'İN İSPATI

$y_k(x,\rho)$ $\left(k=\overline{1,4}\right)$ fonksiyonları (4.16) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olmak üzere

$$\Delta(\rho)=\begin{vmatrix} U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \\ U_0(y_1) & U_0(y_2) & U_0(y_3) & U_0(y_4) \end{vmatrix} \tag{4.30}$$

olsun. T_0 bölgesinin $\rho=-c$ köşe noktası uygun biçimde seçilirse, (4.1)–(4.2) diferansiyel operatörünün λ özdeğerleri için $\lambda=-\rho^4$ eşitliği doğrudur, burada ρ

$$\Delta(\rho)=0 \tag{4.31}$$

denkleminin T_0 bölgesinde yerleşen bir çözümüdür; ayrıca bu, şekilde tanımlı ρ sayıları, sonlu tanesi hariç, (4.31) denkleminin T_0 bölgesindeki tüm köklerini içerir [32, II. bölüm, §4.9].

(4.19)'a göre $s=\overline{0,3}$ ve $k=\overline{1,4}$ olmak üzere

$$U_s(y_k)=\rho^s\left\{e^{\rho w_k}z_{k,s}(1,\rho)-(-1)^\sigma z_{k,s}(0,\rho)\right\} \tag{4.32}$$

elde edilir. (4.15)'e göre $|\rho|\to+\infty$ iken $e^{\rho w_1}$ ifadesi eksponansiyel olarak 0 'a, $e^{\rho w_4}$ ifadesi ise eksponansiyel olarak sonsuza gider. O halde (4.20) ve (4.32)'den

$$U_s(y_1)=-\rho^s\left\{(-1)^\sigma z_{1,s}(0,\rho)+O\left(\rho^{-3}\right)\right\}\ ,\ U_s(y_4)=\rho^s e^{\rho w_4}\left\{z_{4,s}(1,\rho)+O\left(\rho^{-3}\right)\right\}$$

veya

$$U_s(y_1)=-\rho^s(-1)^\sigma\left\{w_1^s+O\left(\rho^{-1}\right)\right\}\ ,\ U_s(y_4)=\rho^s e^{\rho w_4}\left\{w_4^s+O\left(\rho^{-1}\right)\right\} \tag{4.33}$$

eşitlikleri elde edilir.

$k=2,3$ ve $s=\overline{0,3}$ olmak üzere

$$A_{s,k}(\rho)=e^{\rho w_k}z_{k,s}(1,\rho)-(-1)^\sigma z_{k,s}(0,\rho) \tag{4.34}$$

olarak tanımlayalım. (4.32)'ye göre

$$U_s\left(y_k\right) = \rho^s A_{s,k}\left(\rho\right) \quad \left(k = 2,3; s = \overline{0,3}\right) \tag{4.35}$$

olduğu açıktır. [30]'daki (64) ve (65) formüllerine göre, ρ (4.31) denkleminin çözümü olduğunda

$$e^{\rho w_k} - \left(-1\right)^{\sigma} = O\left(\rho^{-2}\right), \qquad k = 2,3 \tag{4.36}$$

eşitlikleri sağlanıyor (gerçekten periyodik ve antiperiyodik sınır koşulları [30]'da bakılan sınır koşullarından $\alpha_{1,0} = \alpha_{2,1} = \alpha_{3,2} = 0$ olduğunda elde edilir ve ayrıca, $p_2(x) \in W_1^1(0,1)$ dir.) Buradan, (4.27) ve (4.29)'dan

$$A_{s,k}(\rho) = C_{s,k}(\rho) + D_{s,k}(\rho) + O\left(\rho^{-3}\right),\ k = 2,3;\ s = \overline{0,3} \tag{4.37}$$

ve

$$A_{s,k}(\rho) = O\left(\rho^{-2}\right),\ k = 2,3;\ s = \overline{0,3} \tag{4.38}$$

bulunur, burada $k = 2,3$ ve $s = \overline{0,3}$ olmak üzere

$$\begin{aligned} C_{s,k}(\rho) &= w_k^s\left(e^{p w_k} - \left(-1\right)^{\sigma}\right) + \frac{\left(-1\right)^{\sigma} c_1 w_k^{s+2}}{4\rho^2} + \frac{\left(-1\right)^{\sigma} w_{5-k}^{s+1}}{4\rho} B_{5-k,k}\left(\rho\right), \\ D_{s,k}(\rho) &= \frac{\left(-1\right)^{\sigma} w_1^{s+1}}{4\rho} B_{1,k}(\rho) + \frac{\left(-1\right)^{\sigma} w_4^{s+1}}{4\rho} B_{4,k}\left(\rho\right) \end{aligned} \tag{4.39}$$

dır. Bu eşitlikleri (4.31) denkleminde yerine yazıp (bkz. (4.30)) birinci, ikinci, üçüncü satırlardaki ρ^3, ρ^2, ρ ve son sütundaki $e^{\rho w_4}$ çarpanlarını sadeleştirirsek (4.31) denklemi

$$\Delta_1\left(\rho\right) + O\left(\rho^{-5}\right) = 0 \tag{4.40}$$

biçiminde yazılabilir, burada

$$\Delta_1\left(\rho\right) \equiv \begin{vmatrix} w_1^3 & A_{3,2}\left(\rho\right) & A_{3,3}\left(\rho\right) & w_4^3 \\ w_1^2 & A_{2,2}\left(\rho\right) & A_{2,3}\left(\rho\right) & w_4^2 \\ w_1 & A_{1,2}\left(\rho\right) & A_{1,3}\left(\rho\right) & w_4 \\ 1 & A_{0,2}\left(\rho\right) & A_{0,3}\left(\rho\right) & 1 \end{vmatrix} \tag{4.41}$$

dır.

(4.37) eşitliği (4.41) (bkz. (4.39)) determinantında dikkate alındığında kolayca görülür ki, $k = 2,3$ için $D_{s,k}(\rho)$ sütun vektörleri birinci ve dördüncü sütunların lineer ifadeleridir. Bu nedenle (4.40) denklemi

$$\Delta_2(\rho)+O\left(\rho^{-5}\right)=0 \tag{4.42}$$

biçiminde yazılabilir, burada

$$\Delta_2(\rho)\equiv\begin{vmatrix} w_1^3 & C_{3,2}(\rho) & C_{3,3}(\rho) & w_4^3 \\ w_1^2 & C_{2,2}(\rho) & C_{2,3}(\rho) & w_4^2 \\ w_1 & C_{1,2}(\rho) & C_{1,3}(\rho) & w_4 \\ 1 & C_{0,2}(\rho) & C_{0,3}(\rho) & 1 \end{vmatrix} \tag{4.43}$$

dir.

(4.43) determinantı (4.11) ve (4.39) eşitliklerini kullanmakla hesaplanabilir ve sonuçta (4.42) denklemi

$$\begin{gathered}-16\left(e^{\rho w_2}-(-1)^\sigma\right)\left(e^{\rho w_3}-(-1)^\sigma\right)-\frac{4(-1)^\sigma ic_1\left(e^{\rho w_2}-(-1)^\sigma\right)}{\rho^2}-\frac{4(-1)^\sigma ic_1\left(e^{\rho w_3}-(-1)^\sigma\right)}{\rho^2}+ \\ +\frac{c_1^2}{\rho^4}-\frac{iB_{3,2}(\rho)B_{2,3}(\rho)}{\rho^2}+O\left(\rho^{-5}\right)=0\end{gathered} \tag{4.44}$$

denklemine indirgenir.

Kolayca ispatlanabilir ki, $\operatorname{Re}\tau\le c=const$ koşulu sağlandığında herbir $f(x)\in L_1(0,1)$ fonksiyonu için

$$\int_0^1 f(\xi)e^{\tau\xi}d\xi=o(1),\qquad \int_0^1 f(\xi)e^{\tau(1-\xi)}d\xi=o(1),\qquad |\tau|\to+\infty \tag{4.45}$$

eşitlikleri doğrudur.

(4.12), (4.20), (4.26), (4,45) eşitliklerinin ve kısmi integralleme formülünün yardımı ile

$$B_{3,2}(\rho)B_{2,3}(\rho)=-\frac{i\left(p_2(1)-p_2(0)\right)^2}{4\rho^2}+O\left(\rho^{-2}\varepsilon(\rho)\right) \tag{4.46}$$

elde edilir, burada

$$\varepsilon(\rho)=\left|\int_0^1(2p_1(\xi)-p_2'(\xi))\mathrm{e}^{2\rho w_2\xi}\,d\xi\right|+\left|\int_0^1(2p_1(\xi)-p_2'(\xi))\mathrm{e}^{-2\rho w_2(1-\xi)}\,d\xi\right|+\left|\rho^{-1}\right| \tag{4.47}$$

dir. Belirtelim ki, (4.45)'e göre $\varepsilon(\rho)$ fonksiyonu

$$\varepsilon(\rho)=\mathrm{o}(1)$$

eşitliğini sağlıyor.

(4.46)'den dolayı (4.44) denklemi

$$-16\left(e^{\rho w_2}-(-1)^{\sigma}\right)\left(e^{\rho w_3}-(-1)^{\sigma}\right)-\frac{4(-1)^{\sigma} ic_1\left(e^{\rho w_2}-(-1)^{\sigma}\right)}{\rho^2}-\frac{4(-1)^{\sigma} ic_1\left(e^{\rho w_3}-(-1)^{\sigma}\right)}{\rho^2}+\frac{c_1^2}{\rho^4}-$$
$$-\frac{\left(p_2(1)-p_2(0)\right)^2}{4\rho^2}+O\left(\rho^{-4}\varepsilon(\rho)\right)=0$$

biçiminde yazılabilir.

Bazı sadeleştirmelerden sonra sonuncu denklem

$$\left(16-\frac{4ic_1}{\rho^2}\right)e^{2\rho w_2}-2(-1)^{\sigma}\left(16-\frac{4ic_1}{\rho^2}-\frac{c_1^2}{2\rho^4}+\frac{\left(p_2(1)-p_2(0)\right)^2}{8\rho^4}\right)e^{\rho w_2}+\left(16-\frac{4ic_1}{\rho^2}\right)+O\left(\rho^{-4}\varepsilon(\rho)\right)=0$$

şekline indirgenir. Bu denklem

$$e^{p w_2}=(-1)^{\sigma}-\frac{\gamma_0}{8\rho^2}+O\left(\rho^{-2}\varepsilon(\rho)\right)=0, \tag{4.48}$$

$$e^{p w_2}=(-1)^{\sigma}+\frac{\gamma_0}{8\rho^2}+O\left(\rho^{-2}\varepsilon(\rho)\right)=0 \tag{4.49}$$

gibi iki denkleme ayrılır, burada γ_0 (4.4) ile tanımlanmış sayıdır.

(4.48) denklemini araştıralım. Rouche teoremi kullanılarak (4.48) denkleminin mutlak değerce yeterince büyük $\rho\in T_0$ köklerinin $G_n\subset T_0$ $\left(n=n_0,n_0+1,\ldots\right)$ bölgelerinde yerleştiği ispatlanabilir; burada G_n, merkezi $-\left(2n-\sigma\right)\pi i/w_2$, yarıçapı $O\left(n^{-1}\right)$ olan daire ve n_0 yeterince büyük doğal sayıdır; ayrıca, (4.48) denkleminin herbir G_n bölgesinde bir tek kökü vardır.

$\tilde{\rho}\in T_0$ (4.48) denkleminin G_n bölgesindeki kökü olsun, [32, II. bölüm, §4.9]. [30] makalesindeki (67) ve (71) formüllerine göre

$$\tilde{\rho}=-\frac{\left(2n-\sigma\right)\pi i}{w_2}+r,\ \ r=O\left(n^{-2}\right) \tag{4.50}$$

olur. Buradan kolayca

$$\begin{gathered}\frac{1}{\tilde{\rho}}=\frac{-w_2}{(2n-\sigma)\pi i}+O(n^{-4}),\qquad \frac{1}{\tilde{\rho}^2}=\frac{-w_2}{(2n-\sigma)^2\pi^2 i}+O(n^{-5}),\\ e^{\tilde{\rho}w_2}=(-1)^{\sigma}\left\{1+rw_2+O(n^{-4})\right\}\end{gathered} \tag{4.51}$$

eşitlikleri elde edilir.

(4.7), (4.47), (4.50) ve (4.51)'e göre

$$\varepsilon(\widetilde{\rho}) = O(\varepsilon_n) \tag{4.52}$$

bulunur.

(4.48)'de $\rho = \widetilde{\rho}$ yazarak ve (4.51), (4.52) eşitliklerini kullanarak bazı basit sadeleştirmelerden sonra

$$r = \frac{-(-1)^{\sigma}\gamma_0}{8w_2(2n-\sigma)^2\pi^2 i} + O(n^{-2}\varepsilon_n) \tag{4.53}$$

eşitliğini elde ederiz.

Böylece (4.50) ve (4.53)'e göre $z_n = -(2n-\sigma)\pi i / w_2 \ (n = n_0 + n_0 + 1, ...)$ noktasının $O(n^{-1})$ komşuluğunda (G_n bölgesinde) (4.48) denkleminin tek bir

$$\widetilde{\rho}_{n,1} = -\frac{1}{w}\left\{(2n-\sigma)\pi i + \frac{\gamma_0}{8(2n-\sigma)^2\pi^2 i}\right\} + O\left(n^{-2}\varepsilon_n\right) \tag{4.54}$$

çözümü vardır.

Tamamiyle benzer şekilde gösterilir ki, $z_n = -(2n-\sigma)\pi i / w$ $(n = n_0, n_0 + 1, \ldots)$ noktasının $O\left(n^{-1}\right)$ komşuluğunda (G_n bölgesinde) (4.49) denkleminin tek bir

$$\widetilde{\rho}_{n,2} = -\frac{1}{w}\left\{(2n-\sigma)\pi i - \frac{\gamma_0}{8(2n-\sigma)^2\pi^2 i}\right\} + O\left(n^{-3}\right) \tag{4.55}$$

çözümü vardır.

Şimdi, yeterince büyük bir n sayısı için $\lambda = -\left(\widetilde{\rho}_{n,j}\right)^4$ özdeğerine karşılık gelen $\widetilde{u}_{n,j}(x)$ özfonksiyonu için asimptotik gösterim elde edelim. Bu özfonksiyon için

$$\widetilde{u}_{n,j}(x) = \frac{ie^{-\rho w_4}}{\rho^4}\begin{vmatrix} y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & y_4(x,\rho) \\ U_3(y_1) & U_3(y_2) & U_3(y_3) & U_3(y_4) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) & U_2(y_3) & U_2(y_4) \\ U_1(y_1) & U_1(y_2) & U_1(y_3) & U_1(y_4) \end{vmatrix}$$

eşitliği doğrudur; burada $\rho = \widetilde{\rho}_{n,\mathrm{j}}$'dir. Bu özfonksiyonu

$$\tilde{u}_{n,j}(x) = -(-1)^{\sigma} i\rho^2 . \begin{vmatrix} -y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & e^{-\rho\omega_4} y_4(x,\rho) \\ -\rho^{-3}U_3(y_1) & \rho^{-3}U_3(y_2) & \rho^{-3}U_3(y_3) & \rho^{-3}e^{-\rho\omega_4}U_3(y_4) \\ -\rho^{-2}U_2(y_1) & \rho^{-2}U_2(y_2) & \rho^{-2}U_2(y_3) & \rho^{-2}e^{-\rho\omega_4}U_2(y_4) \\ -\rho^{-1}U_1(y_1) & \rho^{-1}U_1(y_2) & \rho^{-1}U_1(y_3) & \rho^{-1}e^{-\rho\omega_4}U_1(y_4) \end{vmatrix}$$

biçimde yazalım, burada da aynı şekilde $\rho = \tilde{\rho}_{n,j}$ 'dir. Sonuncudan ve (4.35) eşitliğinden

$$\tilde{u}_{n,j}(x) = -i\rho^2 \times \left. \begin{vmatrix} -(-1)^{\sigma} y_1(x,\rho) & y_2(x,\rho) & y_3(x,\rho) & e^{-\rho w_4} y_4(x,\rho) \\ -(-1)^{\sigma} z_{1,3}(0,\rho) & A_{3,2}(\rho) & A_{3,3}(\rho) & z_{4,3}(1,\rho) \\ -(-1)^{\sigma} z_{1,2}(0,\rho) & A_{2,2}(\rho) & A_{2,3}(\rho) & z_{4,2}(1,\rho) \\ -(-1)^{\sigma} z_{1,1}(0,\rho) & A_{1,2}(\rho) & A_{1,3}(\rho) & z_{4,1}(1,\rho) \end{vmatrix} \right|_{\rho=\tilde{\rho}_{n,1}} \tag{4.56}$$

elde edilir. (4.19) ve (4.20)'e göre

$$y_k(x,\rho) = O(1) \quad (k = 1,2,3), \qquad e^{-\rho w_4} y_4(x,\rho) = O(1) \tag{4.57}$$

olur. (4.33), (4.38), (4.56) ve (4.57)'den dolayı

$$\tilde{u}_{n,j}(x) = -(-1)^{\sigma} i\rho^2 . \left[y_3(x,\rho) E_2(\rho) - y_2(x,\rho) E_3(\rho) \right] + O\left(\rho^{-1}\right) \tag{4.58}$$

olur, burada $\rho = \widetilde{\rho_{n,j}}$ ve

$$E_k(\rho) = \left. \begin{vmatrix} w_1^3 & A_{3,k}(\rho) & w_4^3 \\ w_1^2 & A_{2,k}(\rho) & w_4^2 \\ w_1 & A_{1,k}(\rho) & w_4 \end{vmatrix} \right|_{\rho=\widetilde{\rho_{n,j}}} \qquad (k = 2,3)$$

dir.

(4.37) ve (4.39)'un yardımı ile $E_k(\rho)$ determinantı

$$E_k(\rho) = \begin{vmatrix} w_1^3 & C_{3,k}(\rho) & w_4^3 \\ w_1^2 & C_{2,k}(\rho) & w_4^2 \\ w_1 & C_{1,k}(\rho) & w_4 \end{vmatrix} + O(\rho^{-3}), \quad (k = 2,3)$$

biçiminde yazılabilir, burada $\rho = \widetilde{\rho_{n,j}}$ 'dir. Sonuncudan, (4.48) ve (4.49)'dan

$$E_k(\rho) = \frac{(-1)^{\sigma}\gamma_0 + (-1)^{k+\sigma} i \left[2c_1 + \left(p_2(1) - p_2(0) \right) \right]}{2\rho^2} + O\left(\rho^{-2}\varepsilon(\rho)\right) \tag{4.59}$$

elde edilir, burada $k = 2,3$ ve $\rho = \widetilde{\rho_{n,j}}$ 'dir.

(4.19), (4.20), (4.54) ve (4.55)'e göre

$$y_2(x,\widetilde{\rho}_{n,j}) = e^{-(2n-\sigma)\pi ix} + O(n^{-2}),\ y_3(x,\widetilde{\rho}_{n,j}) = e^{-(2n-\sigma)\pi ix} + O(n^{-2}),\ (\widetilde{\rho}_{n,j})^{-1} = O(n^{-1})$$

olur, burada $j=1,2$'dir. Bu ifadeleri ve (4.52), (4.57) - (4.59) eşitliklerini dikkate alırsak $j=1,2$ için

$$\tilde{u}_{n,j}\left(x\right) = \left[2c_1 + \left(p_2(1) - p_2(0)\right)\right]\cos(2n-\sigma)\pi x + (-1)^j \gamma_0 \sin(2n-\sigma)\pi x + O\left(\varepsilon_n\right) \quad (4.60)$$

gösterimini elde ederiz.

n_1 ve n_2 sayılarının inşası tamamiyle [30-32] makalelerinde olduğu gibidir. (4.5) ve (4.6) formülleri (4.54), (4.55), (4.60)'dan ve $\lambda = -\rho^4$ eşitliğinden direkt elde edilir. Teorem 4.2.1'in ispatı bitti.

4.5. TEOREM 4.2.2 VE SONUÇ 4.2.1'İN İSPATI

$p_2\left(x\right) \in W_1^2\left(0,1\right)$ olduğundan (4.7) formüllerine göre $\varepsilon_n = O\left(n^{-1}\right)$ olur. Dolayısıyla bu durumda (4.8) formülleri doğrudur.

Kabul edelim ki,

$$v_{1,1}\left(x\right), v_{1,2}\left(x\right), \ldots, v_{n,1}\left(x\right), v_{n,2}\left(x\right), \ldots \quad (4.61)$$

sistemi

$$u_{1,1}\left(x\right), u_{1,2}\left(x\right), \ldots, u_{n,1}\left(x\right), u_{n,2}\left(x\right), \ldots \quad (4.62)$$

sisteminin biortogonali olsun. Başka bir deyişle $\left(u_{n,j}, v_{m,s}\right) = \delta_{n,m}.\delta_{j,s}$ eşitliği $\left(n,m=1,2,...;\ j,s=1,2\right)$ sağlansın. [2]'ye veya [33, s.99]'a göre söz konusu durumda (4.61) sistemi L operatörünün eşlenik operatörü olan L^* operatörünün kök fonksiyonlar sistemidir. Teorem 4.2.2'nin $p_2^{(s)}(1) = p_2^{(s)}(0)\ \ (\mathrm{s}=1,2)$ ve $p_1(1) = p_1(0)$ koşullarına göre L^* lineer diferansiyel operatörü

$$l^*\left(z\right) = z^{(iv)} + \left(\overline{p_2\left(x\right)}z\right)'' - \left(\overline{p_1\left(x\right)}z\right)' + \overline{p_0\left(x\right)}z \quad (4.63^*)$$

diferansiyel ifadesi ve

$$\begin{aligned} U_0^*(z) &\equiv z(1)-(-1)^{\sigma} z(0)=0, \\ U_1^*(z) &\equiv z'(1)-(-1)^{\sigma} z'(0)=0, \\ U_2^*(z) &\equiv z''(1)-(-1)^{\sigma} z''(0)=0, \\ U_3^*(z) &\equiv z'''(1)-(-1)^{\sigma} z'''(0)=0 \end{aligned} \tag{4.63**}$$

eşlenik sınır koşullarıyla tamamlanır.

L^* operatörünün biçiminden ve Teorem.4.2.1'den yeterince büyük n'ler için

$$\overline{v_{n+n_j,j}(x)} = r_{n+n_j,j}\left(\cos(2n-\sigma)\pi x + (-1)^j(-i)^{1-\sigma}\sin(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right)\right) \tag{4.64}$$

asimptotik formülleri elde edilir; burada $r_{n+n_j,j}$ $(j=1,2)$ sayıları $\left(u_{n+n_j,j}, v_{n+n_j,j}\right)=1$ $(j=1,2)$ eşitliğinden elde edilen sayılardır. Buradan, (4.8) ve(4.64) asimptotik formüllerinden yeterince büyük n'ler için

$$r_{n+n_j,j} = 1+O\left(n^{-1}\right) \quad (j=1,2)$$

bulunur. Sonuç olarak (4.64) formülü yeterince büyük n'ler için

$$\overline{v_{n+n_j,\mathrm{j}}(x)} = \cos(2n-\sigma)\pi x + (-1)^j(-i)^{1-\sigma}\sin(2n-\sigma)\pi x + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.65}$$

biçiminde olur.

$n=1,2,\ldots$ ve $j=1,2$ olmak üzere

$$g_0(x)=1, \quad g_{2n-1}(x)=\sqrt{2}\sin 2n\pi x, \quad g_{2n}(x)=\sqrt{2}\cos 2n\pi x, \tag{4.66}$$

$$\tilde{g}_{2n-1}=\sqrt{2}\sin(2n-1)\pi x, \quad \tilde{g}_{2n}=\sqrt{2}\cos(2n-1)\pi x \tag{4.67}$$

$$h_0(x)=1, \quad \mathrm{h}_{2(n-1)+j}(x)=\cos 2\,\mathrm{n}\,\pi x + (-1)^j i \sin 2\,\mathrm{n}\,\pi x \tag{4.68}$$

$$\tilde{h}_{2(n-1)+j}(x)=\cos(2n-1)\pi x + (-1)^j \sin(2n-1)\pi x \tag{4.69}$$

olsun. (4.66) ve (4.67) sistemlerinin herbiri $L_2(0,1)$ uzayının ortonormal tabanıdır. (4.8) ve (4.65) formüllerinden açıktır ki, (4.61) ve (4.62) sistemlerinin herbiri Bessel eşitsizliğini sağlar. Başka bir deyişle, her $f \in L_2(0,1)$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\left|\left(f,u_{n,j}\right)\right|^2 < +\infty, \quad \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=1}^{2}\left|\left(f,v_{n,j}\right)\right|^2 < +\infty$$

dur. Ayrıca, (4.61) ve (4.62) sistemlerinin herbiri $L_2(0,1)$uzayında tamdır (bkz: [4]). Dolayısıyla bu sistemlerden her biri $L_2(0,1)$ uzayının Riesz tabanıdır. (bkz: [34, VI. bölüm,§ 2.2, Teorem 2.1]).

Şimdi Sonuç 4.2.1'i ispatlayalım.

[31] makalesindeki Lemma2'ye göre (4.68) ve (4.69) sistemlerinden her biri (bkz: (4.66) ve (4.67)) $L_2(0,1)$ uzayının Riesz tabanıdır.

İspatı yalnızca $\sigma = 0$ için yapalım. $\sigma = 1$ durumu (4.69)'un yardımıyla tamamiyle benzer biçimde incelenir.

$n_1 \geq 0$ ve $n_2 \geq 0$ olsun. (4.6) asimptotik formüllerinden ve $\{h_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ sisteminin tanımından (bkz: (4.68))

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(\left\|u_{n+n_1,1} - h_{2n-1}\right\|^2 + \left\|u_{n+n_2,2} - h_{2n}\right\|^2\right) \leq const \sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{n^2} < +\infty \tag{4.70}$$

elde edilir. Kolayca görülür ki, (4.70) eşitsizliğinin sol tarafında L operatörünün kök fonksiyonlarından $n_1 + n_2$ tanesi ve (4.68) sisteminin fonksiyonlarından bir tanesi yoktur. $n_1 + n_2 > 1$ olsun. Bu durumda (4.70) eşitsizliğine göre (4.62) sisteminin $n_1 + n_2 - 1$ sayıda fonksiyonu dışındaki fonksiyonlarından oluşan S sistemi (4.68) sistemine karesel yakındır. (4.68) sistemi $L_2(0,1)$ uzayının ortonormal tabanı olduğundan S, $L_2(0,1)$'in Riesz tabanıdır [34, VI. bölüm, §2, Teorem 2.3]. Bu durum (4.62) sisteminin $L_2(0,1)$ uzayının tabanı olması ile çelişir.

$n_1 = n_2 = 0$ olsun. (4.62) sistemi $L_2(0,1)$ uzayının Riesz tabanı olduğundan yine (4.70)'e göre $\{h_k(x)\}_{k=1}^{\infty}$ sistemi $L_2(0,1)$ uzayının tabanı olur ve bu da $\{h_k(x)\}_{k=0}^{\infty}$ sisteminin $L_2(0,1)$'de taban olması ile çelişir.

Geriye kalan tüm durumlar benzer biçimde incelenir, yani $\sigma = 0$ olduğunda $n_1 + n_2 = 1$ olur.

Böylece genelliği kaybetmeden $n_1 + n_2 = 1 - \sigma$ kabul edilebilir. Yine de genelliği kaybetmeden

$$n_1 = 0, \quad n_2 = 1 - \sigma$$

varsayabiliriz. O halde

$$\begin{aligned}
&u_{n,1}(x)=\cos(2n-\sigma)\pi x-i^{1-\sigma}\sin(2n-\sigma)\pi x+O\left(n^{-1}\right),\\
&u_{n+1-\sigma,2}(x)=\cos(2n-\sigma)\pi x+i^{1-\sigma}\sin(2n-\sigma)\pi x+O\left(n^{-1}\right),\\
&\overline{v_{n,1}(x)}=\cos(2n-\sigma)\pi x-(-i)^{1-\sigma}\sin(2n-\sigma)\pi x+O\left(n^{-1}\right),\\
&\overline{v_{n+1-\sigma,2}(x)}=\cos(2n-\sigma)\pi x+(-i)^{1-\sigma}\sin(2n-\sigma)\pi x+O\left(n^{-1}\right).
\end{aligned} \tag{4.71}$$

olur.

Şimdi, L operatörünün kök fonksiyonlar sisteminin $1<p<+\infty$ ve $p\neq 2$ olmak üzere $L_p(0,1)$ uzayında taban oluşturduğunu ispatlayalım.

Yukarda olduğu gibi ispatı yalnızca $\sigma=0$ durumu için yapacağız. $\sigma=1$ durumu yine tamamiyle benzer şekilde araştırılır.

Dikkate alalım ki, (4.66) sistemi her bir $p\in(1,+\infty)$ için $L_p(0,1)$ uzayının tabanıdır [35, VIII. bölüm, §20, Teorem 2]. Dolayısıyla [36, I. bölüm, §4, Teorem 6]' dan herbir $f\in L_p(0,1)$ için

$$\left\|\sum_{n=0}^{N}(f,g_n)g_n\right\|_p\leq M_p\|f\|_p \quad (N=1,2,...) \tag{4.72}$$

olacak şekilde $M_p>0$ sayısının varlığı elde edilir, burada $\|\cdot\|_p$, $L_p(0,1)$ uzayındaki normdur.

$p\in(1,2)$ olsun. (4.62) sistemi $L_2(0,1)$'de tam olduğundan $L_p(0,1)$'de de tamdır. Öte yandan herbir $f\in L_p(0,1)$ için

$$\left\|(f,v_{n,j})u_{n,j}\right\|_p\leq const\|f\|_p$$

sağlanır; burada $n=1,2,\ldots,$ ve $j=1,2$'dir. O halde [36, VIII. bölüm, §4, Teorem 6]'dan (4.62) sisteminin $L_p(0,1)$ uzayında taban olduğunu göstermek için

$$\forall f\in L_p(0,1):\left\|\sum_{n=1}^{m}\sum_{j=1}^{2}(f,v_{n,j})u_{n,j}\right\|_p\leq M\|f\|_p \quad (m=1,2,...)$$

olacak biçimde bir $M>0$ sabiti bulmak yeterlidir. Belirtelim ki, aynı koşullar altında

$$J_m(f)=\left\|\sum_{n=1}^{m}\left\{(f,v_{n,1})u_{n,1}+(f,v_{n+1,2})u_{n+1,2}\right\}\right\|_p\leq M'\|f\|_p \tag{4.73}$$

eşitsizliğini ispatlamak yeterlidir; burada $m=1,2,\dots$ ve M' belirli pozitif bir sabittir.

(4.66) ve (4.71)'e göre

$$J_m(f)\le J_{m,1}(f)+J_{m,2}(f)+J_{m,3}(f)+J_{m,4}(f) \tag{4.74}$$

bulunur; burada $m=1,2,\dots$ ve

$$J_{m,1}(f)=\left\|\sum_{n=1}^{2m}(f,g_n)g_n\right\|_p,\quad J_{m,2}(f)=\left\|\sum_{n=1}^{2m}(f,g_n)O\left(n^{-1}\right)\right\|_p,$$

$$J_{m,3}(f)=\left\|\sum_{n=1}^{2m}\left(f,O\left(n^{-1}\right)\right)g_n\right\|_p,\quad J_{m,4}(f)=\left\|\sum_{n=1}^{2m}\left(f,O\left(n^{-1}\right)\right)O\left(n^{-1}\right)\right\|_p$$

dir. (4.72)'den

$$J_{m,1}(f)\le const\|f\|_p. \tag{4.75}$$

elde edilir. Riesz teoreminden (bkz: [37, XII. bölüm , §2, Teorem 2.8])

$$\begin{aligned}J_{m,2}(f)&\le const\sum_{n=1}^{2m}\left|(f,g_n)\right|n^{-1}\le\\ &\le const\left(\sum_{n=1}^{2m}\left|(f,g_n)\right|^q\right)^{1/q}\left(\sum_{n=1}^{2m}n^{-p}\right)^{1/p}\le const\|f\|_p.\end{aligned} \tag{4.76}$$

bulunur; burada, $\dfrac{1}{p}+\dfrac{1}{q}=1$'dir.

Dikkate alalım ki,

$$\begin{aligned}J_{m,3}(f)&\le\left\|\sum_{n=1}^{2m}\left(f,O\left(n^{-1}\right)\right)g_n\right\|_2=\left(\sum_{n=1}^{2m}\left|\left(f,O\left(n^{-1}\right)\right)\right|^2\right)^{1/2}\\ &\le const\|f\|_1\left(\sum_{n=1}^{2m}n^{-2}\right)^{1/2}\le const\|f\|_p\end{aligned} \tag{4.77}$$

dir ve

$$J_{m,4}\le const\|f\|_1\sum_{n=1}^{2m}n^{-2}\le const\|f\|_p \tag{4.78}$$

eşitsizliği sağlanıyor.

(4.73) eşitsizliği (4.74) – (4.78) eşitsizliklerinin bir sonucudur. Böylece (4.62) sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<2)$ uzayının bir tabanı olduğu ispatlandı.

$2<p<+\infty$ ve $1/p+1/q=1$ olsun. Dikkate alalım ki, $1<q<2$'dir ve (4.61) sistemi L^* diferansiyel operatörünün kök fonksiyonlar sistemidir. Yukarıda ispatlandığı gibi, bu tür operatörün kök fonksiyonlar sistemi $L_q\left(0,1\right)$ uzayında taban oluşturur. O halde (4.61) sistemine biortogonal olan (4.62) sistemi de $L_p\left(0,1\right)$ uzayının tabanıdır.

Teorem 4.2.2'nin ispatı bitti.

5. SONUÇLAR VE ÖNERİLER

Bu bölümde öncelikle bu tez çalışmasında ele alınan sonuçlar özetlenecek daha sonra bu konu ile ilgili başka nelerin yapılabileceği ile ilgili öneriler verilecektir.

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde, bazı koşullar altında (4.1)–(4.2) operatörünün özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik davranışları incelenmiş, kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında taban oluşturduğu ve bu tabanın $p=2$ durumunda koşulsuz olduğu ispatlanmıştır. Bu sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde verilmiştir.

Problemin çözümü için gerekli lemmalar, teoremler ve yardımcı sonuçlar Materyal ve Yöntem başlığı altında verilmiştir.

5.2.ÖNERİLER

Tez konusu iki yönde genelleştirilebilir:

1) Periyodik veya antiperiyodik sınır koşullarına sahip yüksek mertebeden adi diferansiyel operatörlerin, yani

$$l(y)=y^{(2n)}+p_2(x)y^{(2n-2)}+\ldots+p_{2n}(x)y$$

diferansiyel ifadesinin ve

$$U_s(y)\equiv y^{(\nu)}(1)-(-1)^{\sigma}y^{(\nu)}(0)=0 \quad \left(\nu=\overline{0,2\text{n}-1}\right)$$

sınır koşullarının tanımladığı L operatörünün spektral özelliklerinin (özdeğerler ve özfonksiyonlar, asimptotik gösterimler, $1<p<\infty$ olmak üzere $L_p(0,1)$ uzayında kök fonksiyonlar sisteminin tabanlığı v.s.) incelenmesi;

2) Söz konusu L operatörünün $L_p(0,1),\ (1<p<\infty)$ uzayında farklı uzaylarda tabanlığının araştırılması

KAYNAKLAR

[1] Mikhailov V.P., “On Riesz bases in $L_2\left(0,1\right)$”, Dokl. Akad. Nauk SSSR, 144(5), 981–984 (in Russian) , (1962).

[2] Keselman G.M., “On the unconditional convergence of eigenfunction expansions of certain differential operators”, Izv. Vyssh. Uchebn. Zaved. Mat., 39(2), 82–93 (in Russian), (1964).

[3] Dunford N. and Schwartz J.T., “Linear Operators. Part III”, Wiley Classics Lib., John Wiley & Sons, New York, 667 s., (1988).

[4] Shkalikov A.A., “Basis property of eigenfunctions of ordinary differential operators with integral boundary conditions”, Vestnik Moskov. Univ. Ser. I Mat. Mekh., 6, 12–21, (1982).

[5] Dernek N. and Veliev O.A., “On the Riesz basisness of the root functions of the nonself-adjoint Sturm–Liouville operator”, Israel J. Math., 145, 113–123, (2005).

[6] Djakov P. and Mityagin B., “Convergence of spectral decompositions of Hill operators with trigonometric polynomials as potentials”, Doklady Math., 83(1), 5–7, (2011).

[7] Djakov P. and Mityagin B., “Convergence of spectral decompositions of Hill operators with trigonometric polynomial potentials”, Math. Ann., 351(3), 509–540, (2011).

[8] Djakov P. and Mityagin B., “Criteria for existance of Riesz bases consisting of root functions of Hill and 1D Dirac operators”, Journal of Functional Analysis, 263(8), 2300-2332, (2012).

[9] Djakov P. and Mityagin B.S., “Instability zones of one-dimensional periodic Shrödinger and Dirac operators”, Russian Math. Surveys, 61(4), 663–766, (2006).

[10] Gesztesy F. and Tkachenko V., “A Schauder and Riesz basis criterion for non-self-adjoint Schrödinger operators with periodic and antiperiodic boundary conditions”, Journal of Differential Equations, 253(2), 400–437, (2012).

[11] Kerimov N.B. and Mamedov Kh.R., On the Riesz basis property of the root functions in certain regular boundary value problems, Math. Notes, 64(4), 483–487, (1998).

[12] Kiraç A.A., “Riesz basis property of the root functions of non-selfadjoint operators with regular boundary conditions”, Int. J. Math. Anal. (Ruse), 3(21-24), 1101–1109, (2009).

[13] Makin A.S., “Convergence of expansions in the root functions of periodic boundary value problems”, Dokl. Math., 73(1), 71–76, (2006).

[14] Mamedov Kh.R. and Menken H., “On the basisness in $L_2(0,1)$ of the root functions in not strongly regular boundary value problems”, Eur. J. Pure Appl. Math., 1(2), 51–60, (2008).

[15] Mamedov Kh.R., “On the basis property in $L_p(0,1)$ of the root functions of a class non self adjoint Sturm–Liouville operators”, Eur. J. Pure Appl. Math., 3(5), 831–838, (2010).

[16] Menken H. and Mamedov Kh.R., “Basis property in $L_p(0,1)$ of the root functions corresponding to a boundary-value problem”, J. Appl. Funct. Anal., 5(4), 351–356, (2010).

[17] Shkalikov A.A. and Veliev O.A., “On the Riesz basis property of eigen- and associated functions of periodic and antiperiodic Sturm–Liouville problems”, Math. Notes, 85(5-6), 647–660, (2009).

[18] Veliev O.A., “On the nonself-adjoint ordinary differential operators with periodic boundary conditions”, Israel J. Math., 176, 195–207, (2010).

[19] Karpikova, A. V. Asimptotics for eigenvalues of Sturm-Liuville operatör with periodic boundary conditions. Upimsk. Math. Zh. 6(3), 28-31(2014).

[20] Makin A.S., “Asymptotics of the spectrum of the Sturm–Liouville operator with regular boundary conditions”, Differ. Equ., 44(5), 645–658, (2008).

[21] Makin A.S., “Characterization of the spectrum of regular boundary value problems for the Sturm–Liouville operator”, Differ. Equ., 44(3), 341–348, (2008).

[22] Makin A.S., “On a class of boundary value problems for the Sturm–Liouville operator”, Differ. Uravn., 35(8), 1058–1066 (in Russian), (1999).

[23] Makin A.S., “On spectral decompositions corresponding to non-self-adjoint Sturm–Liouville operators”, Dokl. Math., 73(1), 15–18, (2006).

[24] Makin A.S., “On the basis property of systems of root functions of regular boundary value problems for the Sturm–Liouville operator”, Differ. Equ., 42(12) 1717–1728, (2006).

[25] Ionkin N.I., “The solution of a certain boundary value problem of the theory of heat conduction with a nonclassical boundary condition”, Differ. Uravn., 13(2), 294–304 (in Russian), (1977).

[26] Il’in V.A. and Kritskov L.V., “Properties of spectral expansions corresponding to non-self-adjoint differential operators”, J. Math. Sci. (N.Y.), 116(5), 3489–3550, (2003).

[27] Veliev O.A., “Asymptotic analysis of non-self-adjoint Hill operators”, arXiv.org, http://arxiv.org/pdf/1107.2552v4.pdf (23.07.2012).

[28] Veliev O.A. and Duman M.T., “The spectral expansion for a nonself-adjoint Hill operator with a locally integrable potential”, J. Math. Anal. Appl., 265(1), 76–90, (2002).

[29] Menken H., “Accurate asymptotic formulas for eigenvalues and eigenfunctions of a boundary-value problem of fourth order”, Boundary Value Problems, DOI:10.1155/2010/720235, 21 s., (2010).

[30] N.B. Kerimov and U. Kaya, Spectral properties of some regular boundary value problem for fourth order differential operators, Central European Journal of Math., 11 (1), (2013), 94-111.

[31] N.B. Kerimov and U. Kaya, Spectral asymptotics and basis properties of fourth order differential operators with regular boundary conditions, Math. Methods in the Applied Science, (2014), 37(5), 698-710

[32] N.B. Kerimov and U. Kaya, Some problems of spectral theory of fourth order diffrential operators with regular boundary conditions, Arabian Journal of Mathematics, (2014), 3(1), 49-61.

[33] Naimark M.A., Linear Differential Operators, 2nd ed., Nauka, Moskow, 129 s., (in Russian), (1967).

[34] Gohberg I.C. and Krein M.G., “Introduction to the Theory of Linear Nonselfadjoint Operators, Transl. Math. Monogr., 18”, American Mathematical Society, Providence, 378 s., (1969).

[35] Bari N.K., “A Treatise on Trigonometric Series, Vol. II”, Macmillan, New York, 548 s., (1964).

[36] Kashin B.S. and Saakyan A.A., “Orthogonal Series, Transl. Math. Monogr., 75”, American Mathematical Society, Providence, 378 s., (1989).

[37] Zygmund A., “Trigonometric Series. II, 2nd ed.”, Cambridge University Press, New York, 331 s., (1959).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Hikmet GÜNEŞ

Doğum Tarihi: 06/02/1989

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Lise/Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	Malatya R.Batu Lisesi	2003-2006
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2007-2011
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2012-2015

ESERLER

1. Kerimov N.B. ve Güneş H. ‘’Dördüncü Dereceden Bir Regüler Sınır Değer Probleminin Spektral Analizi’’, 9. Ankara Matematik Günleri, 12-13 Haziran 2014, Ankara.

2. Hikmet Gunes, Nazim B. Kerimov and Ufuk Kaya “Spectral Properties of Fourth Order Differential Operators with Periodic and Antiperiodic Boundary Conditions”, Results in Mathematics, DOI: 10.1007/s00025-015-0454-2, (2015), 1-18.