FUZZY GRUPLARIN ÜÇGENSEL NORMLAR İLE SINIFLANDIRILMASI

Tuğba LEVENT OBUZ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
TEMMUZ – 2015

FUZZY GRUPLARIN ÜÇGENSEL NORMLAR İLE SINIFLANDIRILMASI

Tuğba LEVENT OBUZ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU

MERSİN
TEMMUZ - 2015

Tuğba LEVENT OBUZ tarafından Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU danışmanlığında hazırlanan "Fuzzy Grupların Üçgensel Normlar ile Sınıflandırılması" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği/çokluğu ile Yüksek Lisans/Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Doç. Dr. Hamza MENKEN ....

Yrd. Doç. Dr. Mehmet ÇİTİL ....

Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU ....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..31../..07../..2015..tarih ve ..2015 : 20../..798...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

FUZZY GRUPLARIN ÜÇGENSEL NORMLAR İLE SINIFLANDIRILMASI

Tuğba LEVENT OBUZ

ÖZ

Fuzzy küme teori 1965 yılında L. A. Zadeh tarafından ortaya koyulmuştur. Fuzzy cebirsel yapılar 1971 yılından buyana birçok araştırmacı tarafından çalışılmaktadır. Bu tezde t- fuzzy grup, t-fuzzy ideal ve t-fuzzy genelleştirilmiş grup kavramları incelenmiş, önemli sonuçları verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Fuzzy Küme, Fuzzy Cebirsel Yapılar, Fuzzy t-Norm, Fuzzy t-Conorm.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

CLASSIFICATION OF FUZZY GROUPS WITH TRIANGULAR NORMS

Tuğba LEVENT OBUZ

ABSTRACT

Fuzzy set theory was introduced by LA Zadeh in 1965. Fuzzy algebraic structures have been studied by many researchers since 1971. In this thesis, t- fuzzy groups, t-fuzzy ideals and t-fuzzy generalized groups examined and important results are given.

KeyWords: Fuzzy set, Fuzzy Algebraic Structures, Fuzzy t-Norm, Fuzzy t-Conorm.

Advisor: Asst. Prof. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Başta, tezimin konusunun belirlenmesine, araştırma safhasındaki yardımlarına ve yönlendirmelerine; hazırlama ve sonuç aşamalarındaki ilgisine, bu süreçte özellikle manevi desteğini, bilgisini ve tecrübelerini sonsuz bir kapı gibi bana açan değerli danışman Hocam Yrd. Doç. Dr. Gökhan ÇUVALCIOĞLU' na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Bu çalışmanın bütün aşamalarında bilgi ve desteğini esirgemeyen başta bölüm başkanımız Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV' e, matematik bölümünün değerleri hocalarına, bu süreçte hep yanımda olan Arş. Gör. Sinem YILMAZ'a ve diğer araştırma görevlisi arkadaşlarıma teşekkür ederim.

Ayrıca tezimi hazırlarken hep yanımda olan, kızım Aren Nazlı OBUZ ve sevgili eşim Mehmet OBUZ'a teşekkür ederim.

Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimine teşekkürler.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

ŞEKİLLER DİZİNİ

Sayfa

SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

SİMGELER	AÇIKLAMALAR
μ	Fuzzy küme
ν	Fuzzy küme
$\leq$	Küçük eşit
$\geq$	Büyük eşit
$\sqsubseteq$	Alt küme
$\sqcap$	Fuzzy kümelerin kesişimi
$\sqcup$	Fuzzy kümelerin birleşimi
$\in$	Elemanıdır
$\Rightarrow$	İse
$\Leftrightarrow$	Ancak ve Ancak
FS	Fuzzy Küme

1. GİRİŞ

Klasik küme teoride, kümelerin elemanlarının kümeye ait olma kriterlerinin kesin bir şekilde tanımlanması gerekmediğinden bazı problemlerin çözüm kümelerini kesin bir şekilde ifade etme problemiyle karşılaşılır. Örnek olarak, uzun boyluların kümesini oluşturmak boyu 165 cm den uzun olanlarların kümesini oluşturmaktan daha zordur. Uzun boyluların kümesini oluştururken, elemanların boylarına göre bir derecelendirme yapılması gerekir. Bu derecelendirme, elemanın o kümeye ne kadar ait olduğunu gösterir.

Bu ve buna benzer problemlerin çözümü için 1965 yılında L. A. Zadeh tarafından "Fuzzy Küme Teori" ortaya atılmıştır.

Klasik mantıkta, önermelerin doğruluk değeri $\{0,1\}$ kümesinin elemanlarıyken fuzzy mantıkta önermelerin doğruluk değeri $[0,1]$ aralığının elemanıdır. Fuzzy küme teoride, bir elemanın bir kümeye ait olma değerine o elemanın kümeye üye olma derecesi denir.Bir elemanın bir kümeye üye olma derecesi ile üye olmama derecesinin toplamı 1 dir. 1971 yılında, Rosenfeld [Rosenfeld, 1971] Fuzzy Gruplar'ı tanımladıktan sonra, Fuzzy Matematik Yapılar üzerine çalışmalar yapılmış, bu çalışmalar Mühendislik, Sosyal Bilimler, Genetik gibi birçok alanda uygulanma olanağı bulmuştur.

Daha sonraki yıllarda Fuzzy kümeler üzerinde bir çok cebirsel yapı tanımlanmış ve bu yapıların özellikleri farklı yazarlar tarafından incelenmiştir. Üçgensel t-normlar ve t-conormlar yardımıyla t-fuzzy cebirsel yapılar tanımlanmış ve özellikleri incelenmiştir.

Bu tezde t-fuzzy alt gruplar, t-fuzzy idealler, t-fuzzy genelleştirilmiş alt gruplar incelenmiştir. Bu cebirsel yapıların temel özellikleri ve önemli sonuçları verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Fuzzy küme teori 1965 yılında L. A. Zadeh tarafından tanıtılmıştır[Zadeh, 1965]. Daha sonraki yıllarda, fuzzy kümeler üzerindeki yapılar birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. 1971 yılında A. Rosenfeld fuzzy ideal, fuzzy grup tanımlarını vermiştir. Fuzzy grupların bazı özellikleri farklı yazarlar tarafından incelenmiş ve karakterize edilmiştir. 1984 yılında fuzzy normal altgruplar ve fuzzy yan sınıflar tanımlanmış ve bazı özellikleri incelenmiştir. R. A. Borzooei ve arkadaşları fuzzy cebirsel sistemlerin kafes yapısını ortaya koymuşlardır. Fuzzy grup, fuzzy ideal yapıların tanımları genişletilerek t-fuzzy ideal, t- fuzzy altgrup cebirsel yapıları tanımlanmıştır.[Sessa, 1984]. t-fuzzy ideallerin ve t- fuzzy altgrupların özellikleri bir çok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. Fuzzy hyper-grupoid, fuzzy hyper-ideal, fuzzy hypernear-halka tanımları verilmiş ve bu cebirsel yapıların özellikleri t-normlar ile incelenmiştir[Zhang, 2006]. 1999 yılında M.R. Molaei genelleştirilmiş grup ve genelleştirilmiş homomorfi tanımları vermiştir[Mehrabi, Molaei, Oloomi, 2000]. M.R. Molaei ve arkadaşları tarafından genelleştirilmiş gruplar karakterize edilmiştir[Borzooie, Rezaei, Molaei, Zahedi, 2000].

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Tanım 3.1: X bir küme, X de tanımlı "$\leq$" bağıntısı;

i. $\forall x \in X,\ x \leq x$

ii. $x, y \in X,\ x \leq y$ ve $y \leq x$ ise $x = y$

iii. $x, y \in X,\ x \leq y$ ve $y \leq z$ ise $x \leq z$

özelliklerini sağlıyorsa "$\leq$"bağıntısına kısmi sıralama bağıntısı ve $(X,\leq)$ kümesine kısmi sıralı küme denir.

Tanım 3.2: ($X,\leq$) kısmi sıralı küme olsun. Aşağıdaki koşul sağlanırsa $(X,\leq)$ kümesine zincir denir.

"$\forall x, y \in X, x \leq y$ veya $y \leq x$"

Tanım 3.3: $(L, \leq)$ kısmi sıralı bir küme olsun. Aşağıdaki koşul sağlanırsa L ye kafes denir.

"$\forall a, b \in L$ için $\sup\{a, b\} = a \vee b \in L$ ve $\inf\{a, b\} = a \wedge b \in L$"

Bu durumda kafes $(L, \vee, \wedge)$ ile gösterilir.

Tanım 3.4:L bir kafes ve $T \subseteq L$ olsun.

"$\forall a, b \in T$ için $a \wedge b \in T$ ve $a \vee b \in T$"

ise T kümesine alt kafes denir.

Tanım 3.5: L bir kafes olsun. $\forall$ T $\subseteq$ L için supT ve infTvarsa Lye tam kafes denir.

Önerme 3.1: Bir kafesin duali kafes ve tam kafesin duali tam kafestir.

Teorem 3.1: L bir tam kafes,S $\subset$ Lve I, L nin en büyük elemanı olsun.

(i) $I \in S$

(ii) $T \subset S$ ise $\inf T \in S$

sağlanıyorsa S tam kafestir.

Önerme 3.2: L bir kafes olsun. L kafesi aşağıdaki şekilde tanımlı dağılma eşitsizliğine sahiptir.

$\forall$ x, y, z$\in$L için

i. $x \wedge (y \vee z) \geq (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

ii. $x \vee (y \wedge z) \geq (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Teorem 3.2: Herhangi bir L kafesinde aşağıdaki özdeşlikler denktir.

i. $\forall$ x, y, z$\in$L için $x \wedge (y \vee z) = (x \wedge y) \vee (x \wedge z)$

ii. $\forall$ x, y, z$\in$L için $x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge (x \vee z)$

Tanım 3.6: L kafesi Teorem 3.2 deki koşullardan birini sağlarsa L ye dağılımlı kafes denir.

Teorem 3.3: L bir dağılımlı kafes olsun. Bu takdirde, x, y, c$\in$L için

i. $c \wedge x = c \wedge y$
ii. $c \vee x = c \vee y$ ise $x = y$

dir.

Önerme 3.3: Her zincir bir dağılımlı kafestir.

Tanım 3.7: L bir kafes ve $\forall$ x, y, z$\in$L için $x \leq z \Rightarrow x \vee (y \wedge z) = (x \vee y) \wedge z$ koşulu sağlanıyorsa L ye modüler denir.

3.1 FUZZY KÜMELER

MÖ.350 yılında Eflatun, bir önermenin doğruluk değerinin "1", "0" yada "arada bir değer" olabileceğini ifade etmiştir. Ancak, oluşturulan matematik sistemde bu fikir itibar görmediği için, bir önerme ya doğru yada yanlış olarak ifade edilmiştir. Bu matematik mantıkla, çözümleri olmayan, yada doğruyken yanlış, yanlışken doğru olan ifadeler çözümsüz kalmıştır. Bu mantık en detaylı şekilde 1965 yılında, L.Zadeh tarafından ilk olarak çalışılmıştır.

L. A. Zadeh fuzzy küme teorinin neden ve nasıl ortaya çıktığını şu şekilde tanımlamıştır:

"Çoğunlukla, günlük hayatta karşılaştığımız nesnelerin sınıfının üyelik kriterleri kesin bir şekilde tanımlanmamıştır. Örneğin; hayvanların sınıfının köpekleri, atları, kuşları, vs. içerdiği ancak kaya, bitki gibi nesneleri içermediği açıktır. Ancak bakteri, deniz yıldızı gibi nesneler belirsiz statüsündedirler. Benzer bir belirsizlik reel sayılar sınıfında bir sayının 1 sayısından çok büyük olma bağıntısında ortaya çıkar.

Açıktır ki, "1 sayısından çok büyük reel sayıların sınıfı" veya "güzel kadınların sınıfı", veya "uzun erkeklerin sınıfı" matematik anlamında "sınıf" veya "küme" belirtmez. Fakat yinede kesin olmayan şekilde tanımlanan bu sınıflar insanların özellikle iletişim ve somutlaştırma alanlarında önemli bir rol oynar.

Fuzzy küme kavramı klasik küme teorideki yapı ile paralellik gösterir ancak daha geneldir. Temel olarak böyle bir yapı kesin tanımlama kriterlerinden yoksun olan bir sınıfa üye olma problemleri için doğal bir yöntem belirtir."

Bunun daha iyi anlaşılabilmesi için L. A. Zadeh tarafından verilen örneğin orjinali aşağıdaki gibidir.

Örnek 3.1.1: $X = \mathbb{R}$(reel sayılar kümesi) ve A, 1 den çok büyük reel sayıların fuzzy kümesi olsun.μ_A, $\mathbb{R}$ de fonksiyon olmak üzere A nın karakterizasyonunu verebiliriz. Böyle bir fonksiyonun örnek değerleri şu şekilde olabilir:

$\mu_A(0) = 0$, $\mu_A(1) = 0$, $\mu_A(5) = 0{,}01$,

$\mu_A(10) = 0{,}2$, $\mu_A(100) = 0{,}95$, $\mu_A(500) = 1$.

Fuzzy küme tanımı ve fuzzy küme üzerinde tanımlı bazı işlemler şu şekilde vermiştir;

Tanım 3.1.1: X bir evrensel küme olsun.

$$A = \{< x, \mu_A(x) > \mid x \in X, \mu_A : X \to [0,1]\}$$

kümesine X de Fuzzy Küme(FS) denir.

Burada, $\mu_A(x)$, $x \in X$ elemanınınX kümesine üye olma derecesidir. Bu tezde X üzerindeki fuzzy kümelerin ailesini FS(X) ile göstereceğiz.

Tanım 3.1.2: X bir evrensel küme A, $B\in FS(X)$ olsun. A ve B üzerindeki bazı bağıntı ve işlemler aşağıdaki gibi tanımlanır.

a. $A \sqsubseteq B :\Leftrightarrow \forall x\in X, \mu_A(x)\leq \mu_B(x)$(içerme)
b. $A=B :\Leftrightarrow A\sqsubseteq B \wedge B\sqsubseteq A$(eşitlik)
c. $A\sqcap B=\{ <x , \mu_A(x) \wedge \mu_B(x)> \mid x\in X\}$(kesişim)
d. $A\sqcup B=\{ < x , \mu_A(x) \vee \mu_B(x)> \mid x\in X\}$(birleşim)
e. $A^c=\{ < x, 1 - \mu_A(x)> \mid x\in X\}$(tümleyen)

Örnek 3.1.2: $X = \{a, b, c, d, e, f\}$ kümesi için $A = \{(a, 0.4), (b, 0.8), (d, 0.5)\}$ ve $B = \{(a, 0.2), (b, 0.3), (c, 0.7), (e, 1)\}$ fuzzy kümeleri verilsin.
$A \sqcap B = \{(a, 0.2), (b, 0.3)\}$, $A \sqcup B = \{(a, 0.4), (b, 0.8), (c, 0.7), (d, 0.5), (e, 1)\}$,
$A^c = \{(a, 6), (b, 0.2), (c, 1), (d, 0.5), (e, 1), (f, 1)\}$ şeklinde bulunur.

Önerme 3.1.1: X bir evrensel küme A, B, C $\in FS(X)$ olsun. Bu takdirde,

i. $(A \sqcup B)^c = A^c \sqcap B^c$, $(A \sqcap B)^c = A^c \sqcup B^c$
ii. $C \sqcap (A \sqcup B) = (C \sqcap A) \sqcup (C \sqcap B), C \sqcup (A \sqcap B) = (C \sqcup A) \sqcap (C \sqcup B)$

Tanım 3.1.3: [34]X bir evrensel küme, $i\in I$ için $A_i\in FS(X)$ olsun. $x\in X$,

i. $(\bigcup_{i\in I} A_i)(x)=\sup_{i\in I} A_i(x)$
ii. $(\bigcap_{i\in I} A_i)(x)=\inf_{i\in I} A_i(x)$

dir.

Tanım 3.1.4: X bir evrensel küme, $A\in FS(X)$ olsun. $\alpha\in[0,1]$ için

$A_\alpha = \{x \in X \mid \mu(x) \geq \alpha\}$kümesine A nın$\alpha$ -seviye alt kümesi,

$A_{<\alpha>} = \{x \in X \mid \mu(x)>\alpha\}$ kümesine A nın güçlü α -seviye alt kümesi denir.

Örnek 3.1.3: $X = \{a, b, c, d, e, f\}$kümesi üzerinde

$A = \{(a, 0.6), (b, 0.8), (c, 0.0), (d, 0.5), (e, 0.3), (f, 1.0)\}$ fuzzy kümesi için

$A_1 = \{f\}$,

$A_{0.5} = \{a, b, d, f\}$,

$A_{<0.9>} = \{f\} = A_1$ ve $A_{<0>} = \{a, b, c, d, e\}$ şeklindedir.

Teorem 3.1.1: X bir evrensel küme ve $A, B \in FS(X)$ olsun. $\alpha \in [0,1]$ için,

i. $(A \sqcup B)_\alpha = A_\alpha \sqcup B_\alpha$
ii. $(A \sqcap B)_\alpha = A_\alpha \sqcap B_\alpha$
iii. $\alpha \in [0,1)$ için $(A^c)_{<\alpha>} = (A_{1-\alpha})^c \neq (A_\alpha)^c$

Tanım 3.1.5: G bir grupoid, A∈FS(G) osun.∀x, y∈G için,

$$\mu_A(xy) \geq \min(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

ise A fuzzy kümesine G nin fuzzy altgrupoidi denir.

Tanım 3.1.6: G bir grupoid, A∈FS(G) olsun.∀x, y∈G için,

i. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(y)$ ise A fuzzy kümesine G nin fuzzy sol ideali,
ii. $\mu_A(xy) \geq \mu_A(x)$ise A fuzzy kümesine G nin fuzzy sağ ideali denir.

Tanım 3.1.7: G bir grupoid, A∈FS(G) osun. ∀x, y∈G için,

$$\mu_A(xy) \geq \max(\mu_A(x), \mu_A(y))$$

ise A fuzzy kümesine G nin fuzzy ideali denir.

Tanım 3.1.8: G bir grup, A∈FS(G) altgrupoid olsun. ∀x∈G için,

$$\mu_A(x^{-1}) \geq \mu_A(x)$$

ise Aya G nin fuzzy alt grubu denir.

Önerme 3.1.2: A, G grubunun bir fuzzy alt grubu olsun. Bu takdirde, $\forall x \in G$ için

$$\mu_A(x^{-1}) = \mu_A(x) \text{ ve } \mu_A(x) \leq \mu_A(e) \text{ dir.}$$

Önerme 3.1.3: Fuzzy grupların kesişimi fuzzy gruptur.

Önerme 3.1.4: G bir grup olsun. $A \in FS(G)$ fuzzy alt gruptur. $\Leftrightarrow$ $\forall t \in [0,1]$ için $A_t \neq \emptyset$ t-seviye alt kümesi G nin alt grubudur.

Teorem 3.1.3: G bir grup, A G de bir fuzzy alt grup olsun. $t_1 < t_2$olmak üzere $A_{t_1} = A_{t_2} \Leftrightarrow t_1 \leq \mu_A(x) < t_2$olacak şekilde $x \in G$ yoktur.

Uyarı:A, G grubunun fuzzy alt grubu ve $t_0 > t_1 > \dots > t_n$ olmak üzere

$Im(A) = \{ t_0, t_1, \dots, t_n\}$ ise A nın seviye alt gruplarının ailesi bir zincir belirtir;

$A(e) = t_0, \quad A_{t_0} \sqsubseteq A_{t_1} \sqsubseteq A_{t_2} \sqsubseteq \cdots \sqsubseteq A_{t_n}$

Önerme 3.1.5: G bir grup, $A \in FS(G)$alt grup olsun. $\forall x, y \in G$ için aşağıdaki koşullar denktir;

i. $\mu_A(xyx^{-1}) \geq \mu_A(y)$
ii. $\mu_A(xyx^{-1}) = \mu_A(y)$
iii. $\mu_A(xy) = \mu_A(yx)$
iv. $xA = Ax$
v. $xAx^{-1} = A$

Tanım 3.1.9: G bir grup, A G de bir fuzzy alt grup olsun. A kümesi yukarıdaki önermenin koşullarından birini sağlıyorsa A ya fuzzy normal alt grup denir.

Tanım 3.1.10: X bir evrensel küme ve $\mathfrak{R}(X)$, X de tanımlı tüm ikili işlemlerin ailesi olmak üzere model operatör $\Omega\colon \mathfrak{R}(X) \times 2^X \longrightarrow 2^X$ tanımlı bir dönüşümdür.

Tanım 3.1.11: $R \subseteq X \times X$ ve $A \subseteq X$ için $[x]_R = \{y \in X \mid (x, y) \in R\}$ olmak üzere;

$[R]A = \{x \in X \mid [x]_R \subseteq A\}$, $\quad$ $\langle R \rangle A = \{x \in X \mid [x]_R \cap A \neq \emptyset\}$

operatörleri en tanınmış model operatörlerdir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Tanım 4.1: $T{:}I^2 \rightarrow I$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa bu fonksiyona t-norm denir;

(T1) (a) $T(x,0)=T(0,x)=0$

(b) $T(x,1)=T(1,x)=x$

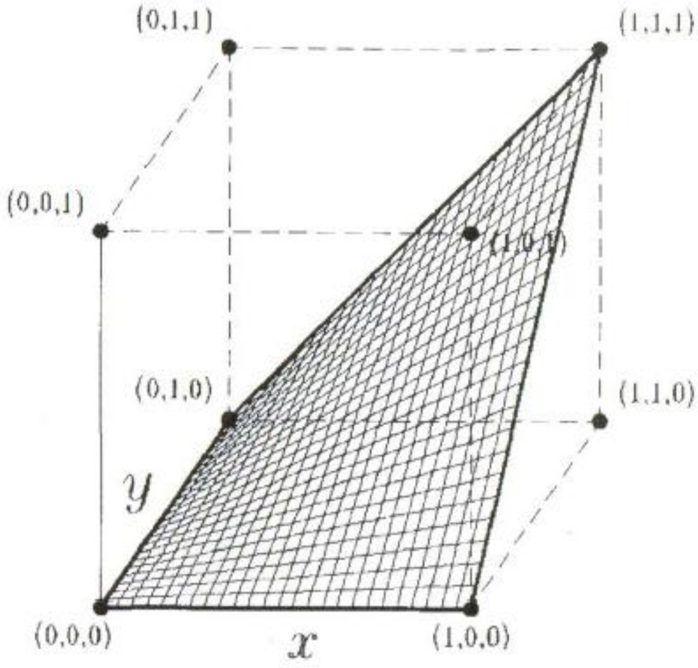
(T2) $x_1 \leq x_2$, $y_1 \leq y_2$ için $T(x_1,y_1) \leq T(x_2,y_2)$

(T3) $\forall\, x, y \in I$ için $T(x,y)=T(y,x)$

(T4) $\forall\, x, y, z \in I$ için $T(T(x,y),z)=T(x,T(y,z))$

Cebirsel olarak, t-norm; değişmeli, ve $[a, b]$ üzerinde birim eleman özelliğine sahip işlem olduğundan , (I, T) monoiddir.

Geometrik olarak, bir t-normun grafiği simetrik köşeleri $(0,0,0)$, $(1,0,0)$, $(1,1,1)$ ve $(0,1,0)$ olan dörtgen ile sınırlandırılmış yüzeydir.



Şekil 4.1. t-normun geometrik olarak ifadesi.

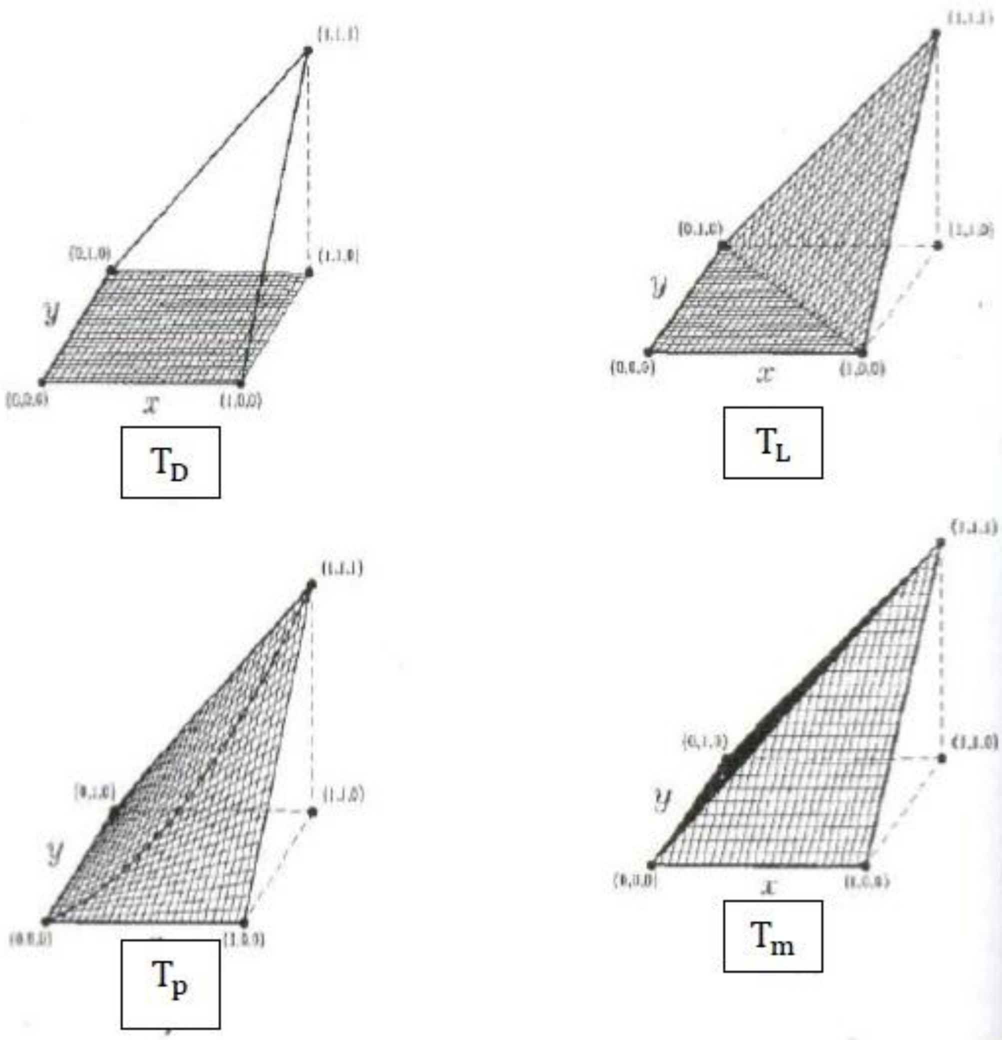
Bazı Özel Normlar;

$* \ T_m(x, y) = \min\{x, y\}$ (minimum t-norm),

$* \ T_p(x, y) = xy$ (Çarpım t-norm),

$* \ T_L(x, y) = \max\{x + y - 1{,}0\}$ (Lukasiewicz t-norm),

$* \ T_D(x, y) = \begin{cases} \min\{x, y\}, & \text{maks}\{x, y\} = 1 \\ 0 \quad , & \text{d. d.} \end{cases}$ (drastic çarpım).



Şekil 4.2. Minimum t-norm, Çarpım t-norm, Lukasiewicz t-norm, Drastic çarpım t-norm özel normlarının geometrik olarak ifadesi.

Not 4.1: T nin (T2) ve (T3) özellikleri kullanılarak (T1)(a) ve (T1)(b) tek koşul olarak elde edilir;

$$(T1') \quad \forall x \in I \text{ için } T(x,1)=x$$

Not 4.2: $x \in I$, ve $(T1')$, $(T3)$ den

$$0 \leq T(x,0) \leq T(1,0)=0$$

Olduğundan

$$T(x,0) = 0$$

elde edilir.

Örnek 4.1: I da sürekli bir ikili işlem, $(T4)$ özelliği hariç t-norm koşulların tümünü sağlar:

$$T(x,y) = xy + xy(1-x)(1-y)$$

Örnek 4.2: I da bir ikili işlem, değişme $(T3)$ özelliği hariç t-norm koşullarının tümünü sağlar:

$$(a) T(x,y) = \begin{cases} x+y-1 & , \quad x+y > \frac{3}{2} \\ \frac{1}{2} & , \quad x+y = \frac{3}{2} \text{ ve } x < y \\ T_D(x,y) & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

$$(b) T'(x,y) = \begin{cases} 0 & , (x,y) \in \left[0,\frac{1}{2}\right] \times [0,1) \\ T_m(x,y) & , \text{d.d.} \end{cases}$$

Örnek 4.3: I da bir ikili işlem ,(T2) özelliği hariç t-norm koşullarının tümünü sağlar:

$$T(x,y) = \begin{cases} T_m(x,y) & , \quad (x,y) \in Q^2 \cup (I/Q)^2 \\ 0 & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

Örnek 4.4: I da sürekli bir ikili işlem, (T1) özelliği hariç t-norm koşullarının tümünü sağlar:

(a) $T_1(x,y) = \frac{1}{2}xy$

(b) $T_2(x,y) = \frac{1}{2}$

(c) $T_3(x,y) = x + y - 2xy$

(d) $0 \leq \propto \leq 1$ için $T_\propto(x,y) = \begin{cases} \text{Maks}(x,y) & , \quad (x,y) \in [0,\propto]^2 \\ \text{Min}(x,y) & , \quad (x,y) \in [\propto,1]^2 \\ \propto & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$

Önerme 4.1: Süreklilik durumunda T normun özellikleri önemli ölçüde değişir. Böylece eğer

$T: I^2 \to I$ sürekli ve (T1), (T3) sağlıyor ise (T2),(T4) sağlar.

Fonksiyonlar üzerinde tanımlı sıralama bağıntısına göre

$$T_D \leq T_L \leq T_p \leq T_m$$

dir.

Önerme 4.2: $T: I^2 \rightarrow I$ T1 ve T2 özelliklerini sağlayan bir fonksiyon olsun. Bu takdirde

$$T_D \leq T \leq T_m$$

dir

Not 4.3: $\mathcal{T}$ normların ailesi olsun. $(\mathcal{T}, \leq)$ bilinen sıralama işlemine göre kısmi sıralı kümedir. Yukarıdaki önerme dikkate alındığında; inf $\mathcal{T}=T_D$ ve sup $\mathcal{T}=T_m$ dir.

Tanım 4.2: $\forall x \in I$ için T birleşmeli olduğundan, x in T-kuvvetleri aşağıdaki gibi tanımlanır.

$$x^0 = 1\,,\ \ x^1=x,\ n \in \mathbb{N}^*,\ \ x^{n+1}=T(x^n,x)$$

$\forall m, n \geq 1$ için

$$x^{m+n}=T(x^m,x^n)=T(x^n,x^m)= x^{n+m}$$

$$x^{mn}=(x^m)^n=(x^n)^m= x^{nm}$$

$\forall m, n \in \mathbb{N}$ için

$$T=T_m \text{ ve } n\geq 1 \text{ için } x^n=x$$

$$T=T_p,\ x^n, \text{ x in n. kuvveti}$$

$$T=T_L \text{için } x^n = \max(nx - n + 1{,}0)$$

Tanım 4.3: B , I da ikili işlem $B^*: I^2 \rightarrow I$ aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$B^*(x,y)=1-B(1-x,1-y) \qquad (*)$$

Önerme 4.3: B azalmayan (değişmeli, birleşmelidir) ⟺ B^* azalmayan (değişmeli, birleşmelidir).

$$B^{**}=B \text{ dir.}$$

Not 4.4: B ve B^*grafikleri $(\frac{1}{2},\frac{1}{2},\frac{1}{2})$ noktasına göre simetriktir.

Herhangi bir T t-norm için $T^*(x,0)=x$ ve $T^*(x,1)=1$ dir.

(I, B^*) bir monoiddir. Burada 0 birim eleman 1 yutan elemandır.

Tanım 4.4: $S:I^2 \rightarrow I$ olsun S dönüşümüne t-conorm denir:⟺

(S1)(a) $S(x,0)=S(0,x)=x$

(b)$S(x,1)=S(1,x)=1$

(S2) $x_1 \leq x_2$,$y_1 \leq y_2$ için $S(x_1,y_1) \leq S(x_2,y_2)$

(S3) $\forall\, x,y \in I$ için $S(x,y)=S(y,x)$

(S4) $\forall\, x,y,z \in I$ için $S(S(x,y),z)=S(x,S(y,z))$

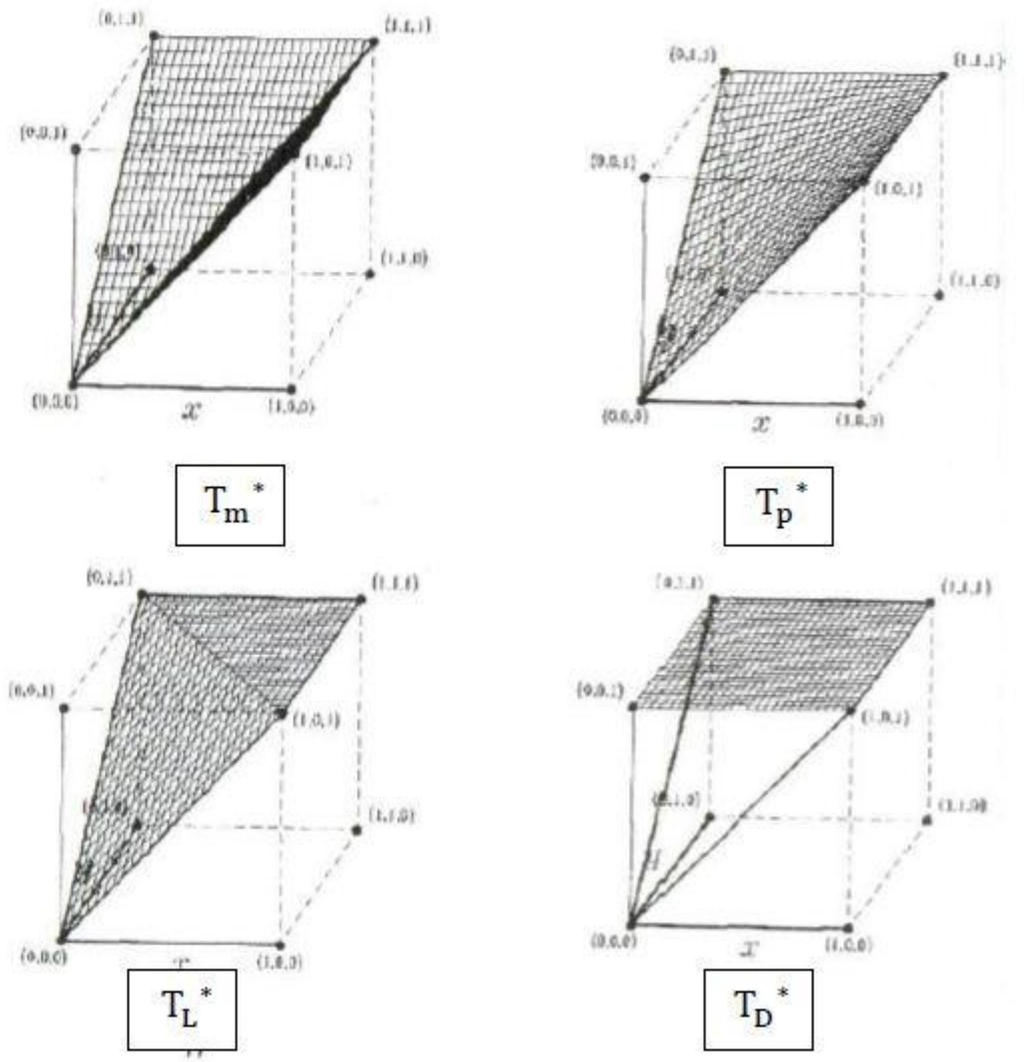
Daha önce tanımlanan T_m, T_p, T_L ve T_D normları için t-conormlar aşağıdaki gibidir;

∗ $T_m^*(x,y)=\mathrm{Max}\{x, y\}$

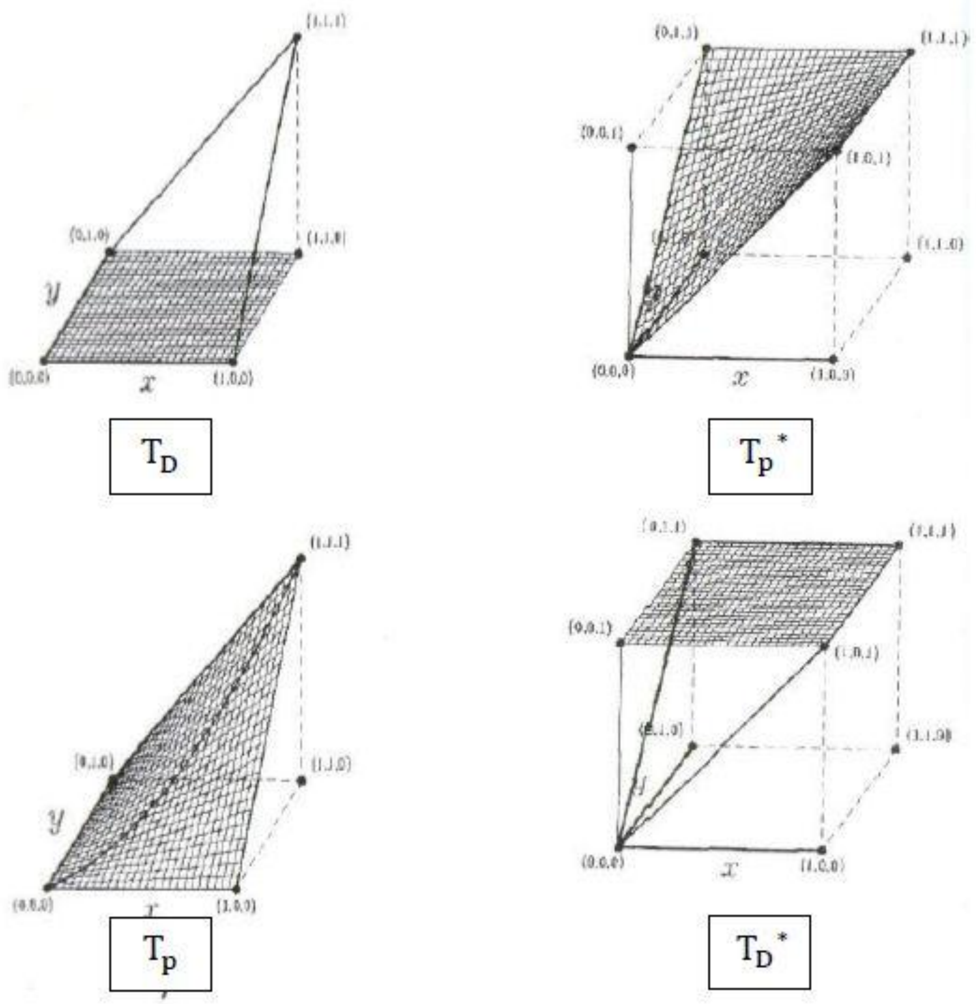
∗ $T_p^*(x,y)=x+y-xy$

∗ $T_L^*(x,y)=\mathrm{Min}\{x+y, 1\}$

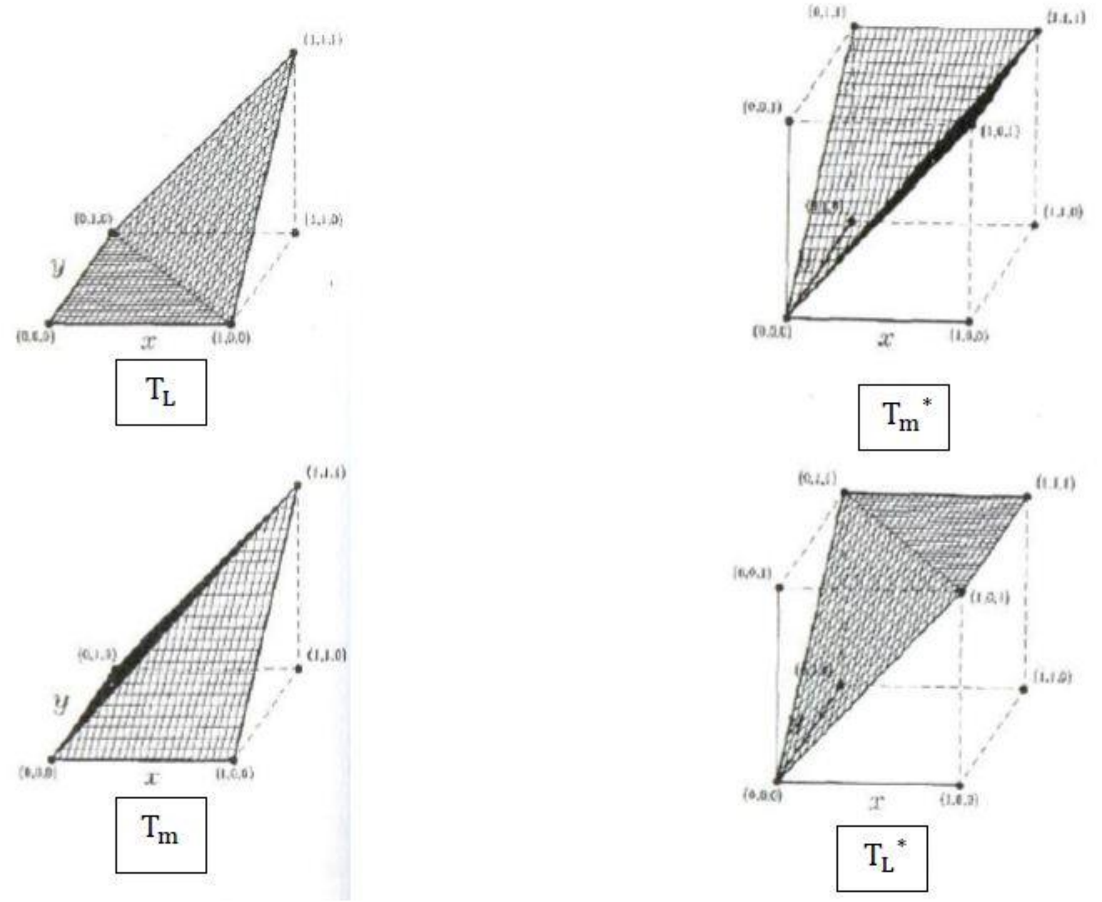
∗ $T_D^*(x, y)=\begin{cases} x & , \quad y=0 \\ y & , \quad x=0 \\ 1 & , \quad \text{diğer hallerde} \end{cases}$



Şekil 4.3. Minimum t-norm, Çarpım t-norm, Lukasiewicz t-norm, Drastic çarpım t-norm normlarının t-conormlarının geometrik olarak ifadesi.



Şekil 4.4. Çarpım t-norm ve t-conormu ile Drastic çarpım t-norm ve t-conormunun geometrik olarak ifadelerinin karşılaştırılması.



Şekil 4.5. Lukasiewicz t-norm ve t-conormu ile Minimum t-norm ve t-conormunun geometrik olarak ifadelerinin karşılaştırılması.

Tanım 4.5: Eğer bir t-conorm I^2 de sürekli ve $[0,1)^2$ de kesin artan ise bu norma kesin-norm denir.

Not 4.5: S ile t-conorm kümelerini, S_{Co} ile sürekli t-conorm, T_{Co} ile sürekli t-norm kümelerini, S_{St} ile kesin t-conorm kümelerini gösterelim.

Önerme 4.4: T bir t-norm $\Leftrightarrow$ T^* t-conorm.

Önerme 4.5: T t-norm olsun. Bu takdirde:

(i) $T \in T_{Co} \Leftrightarrow T^* \in S_{Co}$

(ii) $T_1 < T_2 \Leftrightarrow T_1^* > T_2^*$ ise;

$$T_m^* \leq S \leq T_D{}^*$$

$$T_m^* < T_p{}^* < T_L{}^* < T_D{}^* \;;$$

Bir S t-conormu için bir t-norm T ve t-conorm T^* için $T_m < T_m^*$olduğundan T< T^* dir.

Tanım4.6:.T t-norm olsun. $\delta_T : I \rightarrow I$, $\delta_T(x)=T(x,x)$ ' e T nin diagonal (köşegen) fonksiyonu denir.

Önerme 4.6: T t-norm olsun. δ_T diagonal fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir;

(a) δ_T ; $\delta_T(0)=0$ ve $\delta_T(1)=1$

(b) $\delta_T(x) \leq x \;, \forall x \in I$

Tanım 4.7: T t-norm olsun. x ∈ I , T ye göre idempotenttir denir ⟺ T(x,x)=x yani $\delta_T(x) = x$ tir.

0 ve 1 elemanları her t-norm için idempotenttir.

Önerme 4.7: T t-norm ,x ∈ I , T ye göre idempotent olsun. Bu taktirde,

$$\forall\, y \geq x\,,\ T(x,y) = T(y,x) = x \text{ dir.}$$

Önerme 4.8: T t-norm olsun.$\forall x \in I$, x T ye göre idempotent ise $T = T_m$ dir.

Tanım 4.8: T t-norm. $\forall x, y \in (0,1)$ için $\exists m \in \mathbb{N}^* \ni x^m < y$ ise T ye T Arşimedyan t-norm denir.

Örnek 4.5: $\delta_T\left(\frac{1}{2}\right) = \frac{1}{2}$ olacak şekilde aşağıda tanımlanan T t-norm Arşimedyandır

i. $$\mathbf{T}(x,y) = \begin{cases} 0 & , \quad (x,y) \in \left[0, \frac{1}{2}\right]^2 \\ \frac{1}{2} & , \quad (x,y) \in \left(\frac{1}{2}, 1\right)^2 \\ \mathrm{Min}(x,y) & , \quad \text{d.d.} \end{cases}$$

Teorem 4.1: Sürekli bir t-norm arşimedyandır $\Leftrightarrow \delta_t(x) < x\,,\ 0 < x < 1$.özel olarak, her kesin t-norm arşimedyandır. yani $t_{st} \subset t_{ar}$ dır.

$G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ olmak üzere bunun bir t-fuzzy altgrubu $A_1, A_2, \ldots, A_n$ sırasıyla $G_1, G_2, \ldots, G_n$ nin t-fuzzy altgrupları olmak üzere $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \subseteq A$ koşulunu sağlayan A dır. $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ nin fuzzy altgrubu $B_1, B_2, \ldots, B_n$ sırasıyla $G_1, G_2, \ldots, G_n$ nin fuzzy altgrupları olmak üzere B=$B_1 \times B_2 \times \ldots \times B_n$ dir.

Tanım 4.9:$\mathbb{R}$ de $[0,1]$ kapalı aralığındaki X kümesinin B fonksiyonu X içinde fuzzy küme olarak adlandırılır.$\forall x \in X$ için B(x) ,B de x in üyelik değeri olarak adlandırılır.

Tanım 4.10:$\forall x,y \in X$ için $A(xy) \geq \min(A(x),A(y))$ oluyorsa X grupoidinde ki $\forall x \in X$ için A fuzzy kümesi X in bir fuzzy alt grupoididir. A,X in altgrupoidi ise A,X in fuzzy alt grubudur ve $\forall x \in X$ için $A(x^{-1}) \geq A(x)$ dir.

Tanım 4.11: $\forall$ p,q,r,s $\in$ $[0,1]$ için bir üçgensel norm T: $[0,1] \times [0,1] \rightarrow [0,1]$ koşullarını sağlayan bir fonksiyondur.

(1) T(p,1)=p

(2) T(p,q)≤T(r,s) ise p ≤r ve q≤s

(3) T(p,q)=T(q,p)

(4) T (p,T(q,r))=T(T((p,q),r))

Tanım 4.12: S grupoid ve T t-norm olsun. B:S$\rightarrow [0,1]$ fonksiyonu S de t-fuzzy altgrupoiddir $\Leftrightarrow$ $\forall x,y \in S$ için $B(xy) \geq T(B(x),B(y))$

Eğer S bir grup ve B,S nin bir t-fuzzy altgrupoidi ise B t-fuzzy altgruptur$\Leftrightarrow$ $\forall x \in X$ için $B(x^{-1}) \geq B(x)$ tir.

Herhangi bir t-norm T birleşmeli olduğunda ,$T(x_1, x_2, \ldots, x_n)$ n-li çarpımı iyi tanımlıdır. Örneğin $T(x_1, x_2, x_3)$, $T(T(x_1, x_2), x_3) = T(x_1, T(x_2, x_3))$ ortak değeri anlamına gelir.

Tanım 4.13: $\forall$ i = 1,2,…,n için G_i , X_i grubu içinde t-fuzzy altgrup olsun. G_i (i = 1,2,…,n)nin T-çarpım fonksiyonu $G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n$ şeklinde bir fonksiyondur,bu da

$x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n \rightarrow [0,1]$ için

$(G_1 \times G_2 \times \ldots \times G_n)(x_1 \times x_2 \times \ldots \times x_n) = T(G_1(x_1), G_2(x_2), \ldots, G_n(x_n))$ şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.14: $\forall$i=1,2,…,n için X_i grubunun minimum işlemi altında G_i ler bir fuzzy altgrubu olsun. x= $x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n$ deki G=$G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ çarpımının üyelik fonksiyonu

$$(G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n)(x_1 \times x_2 \times \dots \times x_n) = \min(G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_n(x_n))$$

Şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.2: $G_1, G_2, \dots, G_n$ grup ve A da $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ nin t-fuzzy altgrubu olsun. $G_1, G_2, \dots, G_n$ nin t-fuzzy altgrupları $A_1, A_2, \dots, A_n$ $A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n \subseteq$ A olmak üzere mevcuttur.

İspat: Farzedelim ki A , $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ nin t-fuzzy altgrubu olsun. $E_1, e_2, \dots, e_n$ de $G_1, G_2, \dots, G_n$ nin birim elemanı olsun. İ = 1,2,…,n için $A_i : G_i \to [0,1]$ A_i (a):A($e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, a, e_{i+1}, \dots, e_n$) şeklinde tanımlansın. İ = 1,2,…,n için K_i:$\{e_1\} \times \dots \times \{e_{i-1}\} \times G_i \times \{e_{i+1}\} \times \dots \times \{e_n\}$ olsun.Daha sonra K_i , $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ nin altgrubudur. A $\backslash_{K_i}$, K_i nin t-fuzzy altgrubudur.Ve $\Phi: G_i \to K_i$ için, $\Phi(g) = (e_1, \dots, e_{i-1}, g, e_{i+1}, \dots, e_n)$ şeklinde tanımlansın.Bu durumda Φ bir izomorfidir ve A_i = A $\backslash_{K_i} \circ \Phi$ dır.Bu şekilde tanımlı A_i , G_i nin t-fuzzy altgrubudur. $A(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n)$=A(($a_1, e_2, \dots, e_n$) ($e_1, a_2, \dots, a_n$))

$\geq$T(A($a_1, e_2, \dots, e_n$), A ($e_1, a_2, \dots, a_n$))=T($A_1(a_1)$,A($e_1, a_2, a_3, \dots, a_n$))

=T($A_1(a_1)$,A(($e_1, a_2, e_3, \dots, e_n$)($e_1, e_2, a_3, \dots, a_n$)))

$\geq$T($A_1(a_1)$,T(A($e_1, a_2, e_3, \dots, e_n$), A($e_1, e_2, a_3, \dots, a_n$)))

$= T(A_1(a_1), T(A_2(a_2), A(e_1, e_2, a_3, \dots, a_n \geq \cdots$

$\geq T(A_1(a_1), T(A_2(a_2), T(A_3(a_3), A(e_1, e_2, e_3, a_4 \dots, a_n))))$

$\geq \cdots \geq T(A_1(a_1), T(A_2(a_2), \dots, T(A_{n-2}(a_{n-2}), T(A_{n-1}(a_{n-1}), A_n(a_n)))\dots))$

$= T(A_1(a_1), T(A_2(a_2), \dots, (A_{n-2}(a_{n-2})\ , \ (A_{n-1}(a_{n-1}), A_n\ (\ a_n\ ))$ .Böylece $A(a_1, a_2, a_3, \dots, a_n) \geq T(A_1(a_1), T(A_2(a_2), \dots, A_n(a_n))$

$= (A_1 \times A_2 \times \dots \times A_n)\ (a_1, a_2, \dots, a_n).$

Lemma 4.1: $G_1, G_2, \dots, G_n$ gruplar, A , $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ de minimum operasyonlar altında fuzzy altgrup ve $e_1, e_2, \dots, e_n$ de $G_1, G_2, \dots, G_n$ nin birimi olsun.Eğer i=1,2,…,k-1,k+1,…,n için $A(e_1, e_2, \dots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \dots, e_n) \geq A(a_1, a_2, \dots, a_n) \Longrightarrow A(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, a_k, e_{k+1}, \dots, e_n) \geq A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dir.

İspat:

$$\begin{aligned}
&A(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, a_k, e_{k+1}, \dots, e_n)\\
&= A((a_1, a_2, \dots, a_n)(a_1^{-1}, \dots, a_{k-1}^{-1}, e_k, a_{k+1}^{-1}, \dots, a_n^{-1}))\\
&\geq \min\left[A(a_1, a_2, \dots, a_n), A\left(a_1^{-1}, \dots, a_{k-1}^{-1}, e_k, a_{k+1}^{-1}, \dots, a_n^{-1}\right)\right]\\
&= \min[A(a_1, a_2, \dots, a_n), A(a_1, a_2, \dots, a_{k-1}, e_k, a_{k+1}, \dots, a_n)]\\
&\geq \min\left[A(a_1, a_2, \dots, a_n), \min\begin{bmatrix} A(e_1, e_2, \dots, e_{k-2}, a_{k-1}, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n), \\ A(a_1, a_2, \dots, a_{k-2}, e_{k-1}, e_k, a_{k+1}, \dots, a_n) \end{bmatrix}\right]
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\min[A(a_1, a_2, \dots, a_n), A(a_1, \dots, a_{k-2}, e_{k-1}, e_k, a_{k+1}, \dots, a_n)]\\
&\geq \min\left[A(a_1, a_2, \dots, a_n), \min\begin{bmatrix} A(e_1, \dots, e_{k-3}, a_{k-2}, e_{k-1}, e_k, e_{k+1}, \dots, e_n), \\ A(a_1, \dots, a_{k-3}, e_{k-2}, e_{k-1}, e_k, a_{k+1}, \quad \dots, a_n) \end{bmatrix}\right]\\
&= \min[A(a_1, a_2, \dots, a_n), A(a_1, \dots, a_{k-3}, e_{k-2}, e_{k-1}, e_k, a_{k+1}, \dots, a_n)] \geq \cdots\\
&\geq \min[A(a_1, a_2, \dots, a_n), A(e_1, \dots, e_{k-2}, e_{k-1}, e_k, a_{k+1}, \dots, a_n)] \geq \cdots\\
&\geq \min[A(a_1, a_2, \dots, a_n), A(e_1, \dots, e_{k-2}, e_{k-1}, e_k, e_{k+1}, \dots, e_{n-1}, a_n)]\\
&= A(a_1, a_2, \dots, a_n).
\end{aligned}$$

Böylece $A(e_1, e_2, \dots, e_{k-1}, a_k, e_{k+1}, \dots, e_n) \geq A(a_1, a_2, \dots, a_n)$ dir.

Teorem 4.3: $G_1, G_2, \dots, G_n$ gruplar,A; $G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ nin minimum operasyonlar altında fuzzy altgrubu ve $e_1, e_2, \dots, e_n$ $G_1, G_2, \dots, G_n$ nin birim elemanı olsun.

İ=1,2,…,k-1,k+1,…,n için $A(e_1, e_2, \ldots, e_{i-1}, a_i, e_{i+1}, \ldots, e_n) \geq A(a_1, a_2, \ldots, a_n) \Leftrightarrow$ $A_1, A_2, \ldots, A_n$ ler $G_1, G_2, \ldots, G_n$ nin fuzzy altgrubu için $A = A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n$ dir.

İspat: j=1,2,…,n için $G_j \longrightarrow [0,1]$ $A_j(a_j) = A(e_1, \ldots, a_j, \ldots, e_n)$ tanımlansın.

$K_j = \{e_1\} \times \{e_2\} \times \ldots \times G_j \times \ldots \times \{e_n\}$ olsun. j=1,2,…,n için K_j de $\forall A \setminus K_j$ fuzzy altgrup.

$A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n \subseteq A$ ve

i=1,2,…,n için

$A(e_1, e_2, \ldots, e_{k-1}, a_k, e_{k+1}, \ldots, e_n) \geq A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$ olduğundan

j=1,2,…,n için

$A_j(a_j) = A(e_1, \ldots, a_j, \ldots, e_n)$

$\geq A(a_1, a_2, \ldots, a_n)(A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n)(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

$= \min[A_1(a_1), T(A_2(a_2), \ldots, A_n(a_n)] \geq A(a_1, a_2, \ldots, a_n)$

Böylece $A_1 \times A_2 \times \ldots \times A_n = A$ dır. Diğer yönde basittir.

Tanım 4.15: Varsayalım ki f:$L_1 \rightarrow L_2$ bir dönüşüm.

Eğer a,b∈ L için, $a \leq b \Longrightarrow f(a) \leq f(b)$ şartı sağlanıyorsa f e sıra koruyan denir. Eğer boş olmayan her indeks kümesi T için ve

$\forall t \in T, a_t \in L_1$, $f(\vee a_t) = \vee f(a_t)$ ise f bileşke koruyan , $f(\wedge a_t) = \wedge f(a_t)$ ise f kesişimi koruyan olarak adlandırılır.

Tanım 4.16: Farz edelim ki $f: L_1 \rightarrow L_2$ bir dönüşüm. $f^{-1}: L_2 \rightarrow L_1$ şeklinde tanımlanan f in tersi şu şekilde tanımlanır.

$$f^{-1}(b) = \vee \{a \in L_1 : f(a) \leq b\}, b \in L_2$$

Lemma 4.2: Farz edelim ki f:$L_1 \rightarrow L_2$ bir fonksiyon.bu durumda :

(1) f^{-1}sıra koruyandır ve $f^{-1}(1)$ =1 dir.

(2) Eğer f sıra koruyan ve L_1 de tam dağılımlı kafes ise f^{-1} kesişimi koruyan dönüşümdür.

(3) Eğer f sıra koruyan ve L_1 de sonsuz dağılımlı kafes ise f^{-1} sonlu kesişimi koruyan dönüşümdür.

- i=1,2,…,n için G_i, X_i de fuzzy altgrup olsun.

x,y∈ X_i için

$$G_i(xy) \geq G_i(x) \wedge G_i(y)$$

$$G_i(x^{-1}) \geq G_i(x)$$

- $H_i <_f G_i$ olsun.

$H_i \subset G_i$ yani $\forall x \in X_i$ için $H_i(x) \leq G_i(x)$ ve

$x, y \in X_i$ için

$$H_i(xy) \geq H_i(x) \wedge H_i(y)$$

$$H_i(x^{-1}) \geq H_i(x)$$

Olsun.

1)

$(x_1, x_2, \dots, x_n)$∈ $X_1 \times X_2 \times \dots \times X_n$ olmak üzere

$(H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n)$ $(x_1, x_2, \dots, x_n)$=min($H_1(x_1), H_2(x_2), \dots, H_n(x_n)$)

$\leq \min(G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_n(x_n))$

$= (G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n)\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$

Olduğundan $H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n \subset G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n$ dir.(fuzzy altküme)

$x_i \ , \ y_i \in X_i$

2)

$(H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n)\ (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ny_n)$=min $(H_1(x_1y_1), H_2(x_2y_2), \dots, H_n(x_ny_n))$

$\geq \min\big((H_1(x_1) \wedge H_1(y_1)), (H_2(x_2) \wedge H_2(y_2)), \dots, (H_n(x_n) \wedge H_n(y_n)\big)$

$= \min(H_1(x_1), H_2(x_2), \dots, H_n(x_n)) \wedge \min(H_1(y_1), H_2(y_2), \dots, H_n(y_n))$

$= (H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n)\ (x_1, x_2, \dots, x_n) \wedge (H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n)\ (y_1, y_2, \dots, y_n)$

3)

$(H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n)\ (x_1^{-1}, x_2^{-1}, \dots, x_n^{-1}) = \min\big(H_1(x_1^{-1}), H_2(x_2^{-1}), \dots, H_n(x_n^{-1})\big)$

$\geq \min(H_1(x_1), H_2(x_2), \dots, H_n(x_n))$

$= (H_1 \times H_2 \times \dots \times H_n)\ (x_1, x_2, \dots, x_n)$

1)

$(G_1 \times G_2 \times \dots \times H_k \times \dots \times G_n)(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$

$= \min(G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, H_k(x_k), \dots, G_n(x_n))$

$\leq (G_1(x_1), G_2(x_2), \dots, G_k(x_k), \dots, G_n(x_n))$

$= (G_1 \times G_2 \times \dots \times G_k \times \dots \times G_n)(x_1, x_2, \dots, x_k, \dots, x_n)$

$(G_1 \times G_2 \times \dots \times H_k \times \dots \times G_n) \subset (G_1 \times G_2 \times \dots \times G_n)$

2)

$(G_1 \times G_2 \times \dots \times H_k \times \dots \times G_n)\ (x_1y_1, x_2y_2, \dots, x_ky_k, \dots, x_ny_n)$

=min$(G_1(x_1y_1), G_2(x_2y_2), \dots H_k(x_ky_k), \dots, G_n(x_ny_n))$

$\geq \min\big((G_1(x_1) \wedge G_1(y_1)), (G_2(x_2) \wedge G_2(y_2)), \dots, (H_k(x_k) \wedge H_k(y_k)), \dots., (G_n(x_n) \wedge G_n(y_n))\big)$

$=$
$\min(G_1(x_1), G_2(x_2), \ldots H_k(x_k), \ldots, G_n(x_n)) \wedge$
$\min((G_1(y_1), G_2(y_2), \ldots, H_k(y_k), \ldots, G_n(y_n))$

$= (G_1 \times G_2 \times \ldots \times H_k \times \ldots \times G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n) \wedge (G_1 \times G_2 \times \ldots \times H_k \times \ldots \times G_n)(y_1, y_2, \ldots, y_k, \ldots, y_n)$

3)

$(G_1 \times G_2 \times \ldots \times H_k \times \ldots \times G_n)\left(x_1^{-1}, x_2^{-1}, \ldots x_k^{-1}, \ldots, x_n^{-1}\right)$

$= \min\left(G_1(x_1^{-1}), G_2(x_2^{-1}), \ldots, H_k\left(x_k^{-1}\right), \ldots, G_n(x_n^{-1})\right)$

$\geq \min(G_1(x_1), G_2(x_2), \ldots, H_k(x_k), \ldots, G_n(x_n))$

$= (G_1 \times G_2 \times \ldots \times H_k \times \ldots \times G_n)(x_1, x_2, \ldots, x_k, \ldots, x_n)$

Tanım 4.17: [Molaei, 1999] Boş olmayan G kümesinde ikili işlem $''*''$ aşağıdaki özellikleri sağlıyorsa genelleştirilmiş grup olarak adlandırılır:

1)$\forall$ x,y,z$\in$G, $(x * y) * z = x * (y * z)$

2)$\forall x \in G$ için $x * e(x) = e(x) * x = x$ eşitliğini sağlayan $e(x) \in G$ elemanı vardır

3)$\forall x \in G$ için $x * x^{-1} = x^{-1} * x = e(x)$ eşitliğini sağlayan $x^{-1} \in G$ elemanı vardır.

Eğer genelleştirilmiş grup G nin boş olmayan H alt kümesi genelleştirilmiş alt grup olarak adlandırılır,eğer H G nin işlemleri altında genelleştirilmiş grup ise.

Teorem.4.3: [Molaei, 1999] $\forall x, y \in H, xy^{-1} \in H$ olur ise genelleştirilmiş G grubu boş olmayan H altgrubunun genelleştirilmiş alt grubu olur.

Önerme 4.9: Eğer $e(x) = e(y)$ ise G genelleştirilmiş grubunda belirtilen ikili bağıntı $\sim$, x~y şeklinde tanımlanır.~ G deki denklik bağıntısıdır ve her denklik sınıfı G_α G nin (genelleştirilmiş) alt grubudur.

Örnek 4.6: $[\text{Molaei}, 1999]$ (i) $G = R \times (R \setminus \{0\})$ olsun. O zaman G ile olan işlemlerde

$(x, y) * (w, z) = (yw, yz)$ genelleştirilmiş her grup için $(x, y) \in G$,$e(x, y) = \left(\frac{x}{y}, 1\right)$ ve $(x, y)^{-1} = \left(\frac{x}{y^2}, \frac{1}{y}\right)$ dir.

(ii)$M_{2\times 2}$

$$\begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{pmatrix}\begin{pmatrix} b_{11} & b_{12} \\ b_{21} & b_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} a_{11} & b_{12} \\ b_{21} & a_{22} \end{pmatrix}$$

, işlemi ile elde edilen 2×2 matris kümeleri

bütün $A \in M_{2\times 2}$ için genelleştirilmiş gruptur,

$e(A) = A^{-1} = A$

(iii)$G = \left\{A = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a & b \end{pmatrix} : a, b \in R, b \neq 0\right\}$ verilsin.O zaman G ile birlikte matrislerin genelleştirilmiş grupların doğal çarpımları bütün A∈G için genelleştirilmiş gruptur

$$e(A) = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a/b & 1 \end{pmatrix}, A^{-1} = \begin{pmatrix} 0 & 0 \\ a/b^2 & 1/b \end{pmatrix}.$$

Önerme 4.10: $[\text{Molaei}, 1999]$ Herhangi genelleştirilmiş G grubu için: $\forall x \in G$,

(i)$e\big(e(x)\big) = e(x)$

(ii)$e(x^{-1}) = e(x) = \big(e(x)\big)^{-1}$

(iii)x^{-1} tektir

(iv)$(x^{-1})^{-1} = x$.

Tanım 4.18: $\mathbf{n} \in \mathbf{N}$için $T_n : \prod_{i \in I_n}[0,1] \to [0,1]$ fonksiyonu

$T_2 = T$ ve $T_1 = \mathrm{id}$(identity) olduğu durumlarda her $i \in I_n$ için

$$T_n(a_1, a_2, \dots, a_n) = T\big(a_i, T_{n-1}(a_1, a_2, \dots, a_{i-1}, a_{i+1}, \dots, a_n)\big)$$

şeklinde tanımlanır.

Tanım 4.19: $f: X \to Y$ bir fonksiyon, μ ve ν sırasıyla X ve Y nin fuzzy alt kümeleridir.f altındaki μ görüntüsü ve ν ters görüntüsü aşağıdaki gibidir:

$$f(\mu)(y) = \begin{cases} \sup\limits_{x \in f^{-1}(y)} \mu(x) & ; \quad f^{-1}(y) \neq \emptyset \\ 0 & ; \quad \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

$$f^{-1}(\nu)(x) = \nu\big(f(x)\big)$$

bütün $y \in Y$ ve $x \in X$ için.

$(L, \wedge, \vee, 1)$ için $(L, \wedge, \vee, \to, 1)$ relatively pseudocomplemented(sözde tümleyen) kafes cebiri birim elemen 1 ile L nin $\to$ ikili işleminin kafesi

$$\forall x, y, z \in L, x \to y \leq z \Leftrightarrow x \wedge y \leq z$$

şeklinde tanımlanır**.**

Heyting cebiri eş isimli relatively sınırlı pseudocomplemented(sözde tümleyen) kafesler.Biz buna L'yi karşılayan Birleşmiş Sonsuz Dağılım özelliği (JID)deriz.Eğer

$$x \wedge \left(\bigvee_{\propto \in I} y_{\propto} \right) = \bigvee_{\propto \in I} (x \wedge y_{\propto})$$

İndeksli herhangi I kümesi,ara ara isteğe bağlı birleşme özelliği gösterir.

4.1 T –Fuzzy Genelleştirilmiş Altgruplar

Şimdiye kadar bu çalışmada G genelleştirilmiş grubu, T t-normu ve FS(G)

G'nin bütün fuzzy altkümelerinin kümesini ifade ettik

Tanım4.1.1: $\mu \in FS(G)$ olsun. μ için T t-normu ile fuzzy genelleştirilmiş altgrup olduğunu söyleyebiliriz. yada T-fuzzy genelleştirilmiş altgrub olduğunu söyleyebiliriz,eğer $\forall x, y \in G$

(TF1) $\mu(xy) \geq T(\mu(x), \mu(y))$

(TF2) $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$

Şimdiye kadar burada TF(G) ile G nin genelleştirilmiş T-fuzzy altgrupları belirtilmiştir.

Not 4.1.1: [Sessa, 1984] G bir grup olmak üzere ,G nin fuzzy alt kümeleri (TF1) ve (TF2) koşullarını sağlıyorsa, T-fuzzy alt grup olarak adlandırılır

Örnek 4.1.1: (i)G= $\{a, b, c\}$ ve $\forall x, y \in G$ için çarpım $xy = x$ şeklinde tanımlansın. G genelleştirilmiş grup olsun. Şimdi de G de tanımlanmış μ fuzzy alt kümsi için $\mu(a) = 1/2$, $\mu(b) = 1/4$ ve $\mu(c) = 1/8$ olsun.Öyleyse μ G nin T_M -fuzzy genelleştirilmiş alt grubudur.

(ii)G genelleştirilmiş grubu aşağıdaki tablodaki gibi tanımlansın:

*	x_1	x_2	x_3	x_4
x_1	x_1	x_1	x_3	x_3
x_2	x_2	x_2	x_4	x_4
x_3	x_1	x_1	x_3	x_3
x_4	x_2	x_2	x_4	x_4

Verilen G nin μ fuzzy alt kümesi $i \in \{1,2,3,4\}$ için $\mu(x_i) = {}^{1}/_{i}$ şeklinde tanımlansın. Öyleyse μ G nin T_P-fuzzy genelleştirilmiş alt grubu ,T_M -fuzzy genelleştirilmiş alt grubu değildir.çünkü

$$\mu(x_2 * x_3) = \mu(x_4) = {}^{1}/_{4} \ngeq {}^{1}/_{3} = \mu(x_2) \wedge \mu(x_3).$$

Not 4.1.2: Bilindiği üzere T_M-fuzzy genelleştirilmiş alt grubu ,fuzzy genelleştirilmiş alt grup olarak adlandırılır.

Tanım 4.1.2: [Klement, Mesiar, 2005] t normunda T ,eğer T(a,a)=a ise $a \in [0,1]$ elemanı birim eleman olarak adlandırılır

$\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ x,y∈G

$$\begin{aligned} \mu(x) \wedge \mu(y) &= T(\mu(x) \wedge \mu(y)\ , \mu(x) \wedge \mu(y)\ ) \\ &\leq T(\mu(x), \mu(y)\ ) \\ &\leq \mu(xy) \end{aligned}$$

Böylelikle , $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$

Tanım 4.1.3: X bir evrensel küme olsun.X de μ t-fuzzy alt kümesine imajlanabilir denir,eğer Imμ nün her elemanı T nin idempotent bir elemanı ise.Açıktır ki her $T_M -$ fuzzy genelleştirilmiş alt grubu imajlanabilirdir.

Önerme 4.1.1: Her imajlanabilir T-fuzzy genelleştirilmiş alt grubu,fuzzy genelleştirilmiş alt gruptur.

İspat: μ G nin T-fuzzy genelleştirilmiş alt grubu olsun.Bu $\mu(xy) \geq \mu(x) \wedge \mu(y)$ kanıtlamak için yeterlidir.Bunun için x,y∈G olsun.μ imajlanabilir olduğundan :

$$\mu(x)\wedge\mu(y) = T(\mu(x)\wedge\mu(y)\,,\mu(x)\wedge\mu(y)\,)$$

$$\leq T(\mu(x), \mu(y)\,)$$

$$\leq \mu(xy)$$

Ve buradan da $\mu(xy) \geq \mu(x)\wedge\mu(y)$ yi elde ederiz.

Lemma 4.1.1: μ, X kümesinin fuzzy alt kümesi olsun.Böylelikle

$$\mu_t = \bigcap_{s\in[0,1[} \mu_s > \text{ve } \mu_t >= \bigcup_{s\in]t,1]} \mu_s$$

bütün $t \in [0,1]$,için

$$\mu_t = \{x \in G: \mu(x) \geq t\} \text{ ve } \mu_t >= \{x \in G: \mu(x) > t\}.$$

Teorem 4.1.1: Genelleştirilmiş grubun genelleştirilmiş alt gruplarının ailesinin kesişimi yine bir genelleştirilmiş alt grubu verir

Teorem 4.1.2: G nin imajlanabilir T-fuzzy alt kümesi μ için aşağıdaki ifadeler denktir

(i) μ G nin T-fuzzy genelleştirilmiş alt grubudur,

(ii) Her boş olmayan kuvvetli seviye alt kümesi olan $\mu_t >, t \in [0,1]$ için G nin genelleştirilmiş alt grubudur,

(iii) Her boş olmayan seviye alt kümesi olan μ_t ,$t \in [0,1]$ için G nin genelleştirilmiş alt grubudur.

İspat: (i) ⇒ (ii) Teorem 4.3 den dolayı ,herhangi $a, b \in \mu_t >$ ve $t \in [0,1]$ için $ab^{-1} \in \mu_t >$ olduğunu göstermek yeterlidir.Şimdi $a, b \in \mu_t >$ olsun.Öyleyse $\mu(a) > t$ ve $\mu(b) > t$ ve bundan dolayı

$\mu(ab^{-1}) \geq T\big(\mu(a), \mu(b)\big) > T(t, t) = t$,böylelikle $ab^{-1} \in \mu_t >$.

$(\mathrm{ii}) \Rightarrow (\mathrm{iii})$ $\mathrm{t} \in [0,1]$ için $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mu_\mathrm{t}$ verilsin. Lemma 4.1.1 den her $\mathrm{s} \in [0, \mathrm{t}[$ için $\mathrm{a}, \mathrm{b} \in \mu_\mathrm{s} >$ ve (ii) den $\mathrm{ab}^{-1} \in \mu_\mathrm{s} >$ Bundan dolayı $\mathrm{ab}^{-1} \in \mu_\mathrm{t}$, μ_t nin G nin genelleştirilmiş alt grubu olduğunu kanıtlar.

$(\mathrm{iii}) \Rightarrow$ (i)ispat (ii), Teorem 4.1.1 ve lemma 4.1.1 i takip eder.

Lemma 4.1.2: μ G nin imajlanabilir T fuzzy genelleştirilmiş alt grubu olsun. Öyleyse bütün $x \in G$ için

(i) $\mu(e(x) \geq \mu(x)$.

(ii). $\mu(x^n) \geq \mu(x)$ $\forall n \in N$

İspat: Bütün $x \in G$. $e(x) = xx^{-1}$ için (i) gözlemlemek mümkündür, ve ispat (ii) n in düktif prosedürü izlemektedir.

Teorem 4.1.3: G nin her T fuzzy genelleştirilmiş alt grubu μ aşağıdaki özelliği sağlar;

$$\mu(xy^{-1}) \geq T(\mu(x), \mu(y)). \tag{4.1.1}$$

her x, y $\in$ G için. Tersine G nin her imajlanabilir T fuzzy alt kümesi μ (4.1.1) G nin T fuzzy genelleştirilmiş alt grubudur.

İspat: Açıkça her G nin genelleştirilmiş alt grubu T (4.1.1) koşulunu karşılar. Aksine verilen G nin T fuzzy alt kümesinde μ (4.1.1) durumunu sağlar ve her $x \in G$.

O zaman,

$$\mu(x) = \mu\big(e(x)x\big) = \mu\Big(e(x^{-1})(x^{-1})^{-1}\Big) \geq T\mu\Big(e(x^{-1})\Big), \mu(x^{-1})$$

$$\geq T\Big(\mu(x^{-1}), \mu(x^{-1})\Big) = \mu(x^{-1}).$$

Benzer bir görüşde $\mu(x^{-1}) \geq \mu(x)$ olduğunu kanıtlarız. Böylece $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$.

Verilen x,y∈G. O zaman,

$$\mu(xy) = \mu\left(x(y^{-1})^{-1}\right) \geq T\left(\mu(x), \mu(y^{-1})\right) = T\left(\mu(x), \mu(y)\right)$$

Teorem 4.1.4: G nin her genelleştirilmiş alt grubu, G nin fuzzy genelleştirilmiş alt grubunun seviye alt kümesidir.

İspat: G genelleştirilmiş alt grubunda veriler H ve G nin fuzzy μ alt kümesi şöyle tanımlanır,

$$\mu(x) = \begin{cases} s & , \ x \in H \\ t & , \ dd \end{cases}$$

verilen 0≤t<i≤1 dir. μ in G genelleştirilmiş fuzzy alt grup olduğunu gördük. x,y∈H ise verilen x,y∈G olmalıdır. O zaman x,y∈H ve böylece

$$\mu(xy) = s \geq \mu(x) \wedge \mu(y).$$

Eğer x ∈ H ve y ∉ H (veya x ∉ H ve y ∈ H) ise

$$\mu(xy) = s \geq t = \mu(x) \wedge \mu(y)$$

Şimdi verilen x∈G. Eğer x∈H ise böylece $\mu\left(x^{-1}\right) = s = \mu(x)$ olur. Diğer türlü x, x∉H ise $\mu\left(x^{-1}\right) = t = \mu(x)$ olur.

Teorem 4.1.5: Verilen $\mu \in FS(G)$ ve $\text{Im}\mu = \{s_0, s_1, s_2, ..., s_n\}$ koşulu $s_i < s_j$ için $i > j$. Eğer burada bir zincir varsa

$$H_0 \subseteq H_1 \subseteq ... \subseteq H_n = G$$

genelleştirilmiş G fuzzy alt grubu için $\mu(H'_k) = s_k$, olma koşulu $H'_0 = H_0$, $H'_k = H_k \setminus H_{k-1}$ için k = 1,2,...,n ise μ G nin genelleştirilmiş T fuzzy alt grubudur.

İspat: Verilen x, y ∈ G. Eğer x, y ∈ H'_k, bazı k ∈ {0, 1, …, n} öyleyse x, y ∈ H ve x, y ∉ H, bu xy ∈ H ve xy ∉ H olduğunu ima eder çünkü H ayrıktır. Böylece $\mu(xy) = s_k \geq T(s_k, s_k) = T(\mu(x), \mu(y))$. Diğer yandan eğer $x \in H'_k$ ve $y \in H'_k$ için k ≠ l birçok genelleme için, l < k sayılır. Öyleyse $\mu(x) = s_k \leq s_l = \mu(y)$ ve $H_l \subseteq H_k$ bu yüzden $x \in H'_k$, $y \in H'_k$ bu nedenle $xy \in H'_k$. Bu $\mu(xy) = s_k = T(s_k, 1) \geq T(\mu(x), \mu(y)$ anlamına gelir.

Açıkça tüm x ∈ G var olan k ∈ {0, 1, …, n} için $x \in H'_k$ ve $x^{-1} \in H'_k$. Öyle ki $\mu(x^{-1}) = \mu(x)$ ispatı tamamlar.

Teorem 4.1.6 (Representation Teoremi): $\{H_\propto : \propto \in [0,1]\}$, G nin genelleştirilmiş alt gruplarının bir ailesi olsun. Bu durum için gerek ve yeter koşul mevcut μ , G de T-fuzzy genelleştirilmiş alt gruptur öyleki $\forall\, \alpha \in [0,1]$ için $\mu_\alpha = H_\alpha$ olmak üzere $\forall M \subseteq [0,1]$ dir.

$$H_{\vee_{\propto \in M} \propto} = \cap_{\propto \in M} H_\propto \tag{4.1.2}$$

İspat: (4.1.2) yi tutarlı kılan varsayım ve G nin fuzzy μ alt kümesi şu şekildedir.

$$\mu(x) = \vee_{x \in H_\propto} \propto, \forall x \in G$$

μ ‘in T- fuzzy genelleştirilmiş G alt grubu olduğunu ispatlarız. Verilen x, y ∈ G ve

$$T\left(\bigvee_{x\in H_\beta}\beta,\bigvee_{y\in H_\gamma}\gamma\right)=T(\mu(x),\mu(y))=t$$

Öyleyse

$\bigvee_{x\in H_\beta}\beta\geq t$ ve $\bigvee_{y\in H_\gamma}\gamma\geq t$

Şimdi

$M=\{\alpha\in[0,1]:x\in H_\alpha\}$ kümesi düşer. Öyleyse

$$x\in\bigcap_{\beta\in M}H_\beta=H_{\underset{\beta\in M}{\vee\beta}}\subseteq H_t,$$

ve benzer bir şekilde $y\in H_t$ olduğunu anlarız. Bundan dolayı $xy\in H_t$ ve bu yüzden

$$\mu(xy)=\bigvee_{xy\in H_\propto}\propto=\bigvee_{x\in H_\propto}\propto=\mu(x)$$

Gördük ki bütün $\propto\in[0,1]$ için $\mu_\alpha=H_\alpha$ Bazı $t\in[0,1]$ için verilen $x\in H_t$.Öyleyse $x\in\mu_t$ ise $\mu(x)=\bigvee_{x\in H_\propto}\propto\geq t$ olur ve bu yüzden $H_t\subseteq\mu_t$ Eğer $x\in\mu t$ ise $\bigvee_{x\in H\alpha}\alpha=\mu(x)\geq t$ olduğu için $M=\{\alpha\in[0,1]:x\in H_\alpha\}$ dır. Burada $x\in\bigcap_{\alpha\in M}H_\alpha=H_{\underset{\alpha\in M}{\vee\alpha}}\subseteq H_t$ ise $\mu_t\subseteq H_t$. Bu da bize $t\in[0,1]$ için $\mu_t=H_t$ olduğunu kanıtlar. Aksine var olduğunu saydığımız G de genelleştirilmiş T fuzzy alt grup $t\in[0,1]$ için her zaman $\mu_t=H_t$ dir. (3.2) nin geçerliliğini kanıtlamış olduk. Bu yüzden verilen $M\subseteq[0,1]$ ve her $x\in H_\beta$ için $\beta=\bigvee_{\alpha\in M}\alpha$. Öyleyse $x\in\mu\beta$ ve $\mu(x)\geq\alpha$ için $\alpha\in M$ dir. Hepsi için $\alpha\in M$ ise $x\in\mu_\alpha=H_\alpha$ olduğu anlamına gelir ve $x\in\bigcup_{\alpha\in M}H_\alpha$ dır.

Bundan dolayı

$$H_{\underset{\alpha\in M}{\vee\alpha}} \subseteq \bigcap_{\alpha\in M} H_\alpha$$

Eşitsizliğin diğer tarafı benzer şekilde ispatlanır.

4.2 T- fuzzy genelleştirilmiş alt gruplarla ilgili bazı sonuçlar

T- fuzzy genelleştirilmiş alt grubun herhangi bir homomorfinin altında bulunan bir T- fuzzy genelleştirilmiş alt grup olduğunu doğrulamak kolaydır. Bu genel, görüntü için doğru değildir. Fakat bunun bizi sürekli t-normlar için hazırladığını düşünürüz. Bu durumda bir sonraki teoremin işlevini göstermek sürekli t-normlarının görevidir.

İlk olarak bizde sürekli t-normlarının tanımını verelim.

Tanım 4.2.1: T t-normu süreklidir eğer $\forall$ $y\in[0,1]$ ve her yakınsak dizi $(x_n)_{n\in\mathbb{N}}, (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in [0,1]^{\mathbb{N}}$ için

$$\lim_{n\to\infty} T(x_n, y_n) = T\left(\lim_{n\to\infty} x_n, \lim_{n\to\infty} y_n\right)$$

mevcutsa.

T_M, T_P, T_L t-normlarının sürekli oldoğunu, T_D nin de sürekli olmadığını görürüz.

Lemma 4.2.1: T , X kümesi üzerinde sürekli bir t-norm olsun, A ve B X in boş olmayan alt kümeleri ve μ de X in fuzzy alt kümesi olsun.Bu durumda

$$\sup_{\substack{x\in A\\ y\in B}} T\left(\mu(x), \mu(y)\right) = T\left(\sup_{x\in A}\mu(x), \sup_{y\in B}\mu(y)\right).$$

İspat:

$$\sup_{\substack{x\in A\\ y\in B}} T\big(\mu(x),\mu(y)\big) \le T\left(\sup_{x\in A}\mu(x), \sup_{y\in B}\mu(y)\right).$$

Şimdiki eşitsizliğin tersini kanıtlayalım. İlk olarak T nin sürekli olduğunu gözlemleriz. Tüm e>0 var olan δ>0, öyle ki bütün x, y∈[0,1] ise $\sup_{x\in A}\mu(x)-\mu(x')\le\delta$ ve $\sup_{y\in B}\mu(y)-\mu(y')\le\delta$ olduğunu söyler.

$$T\left(\sup_{x\in A}\mu(x), \sup_{y\in B}\mu(y)\right) \le T\big(\mu(x'),\mu(y')\big)+\in$$

Şimdi a∈A ve b∈B şeklinde seçilirse $\sup_{x\in A}\mu(x)-\mu(a)\le\delta$ ve $\sup_{y\in B}\mu(y)-\mu(b)\le\delta.$

Öyleyse

$$T\left(\sup_{x\in A}\mu(x), \sup_{y\in B}\mu(y)\right) \le T\big(\mu(a),\mu(b)\big)+\in$$

ve sonra ∈>0 ise

$$T\left(\sup_{x\in A}\mu(x), \sup_{y\in B}\mu(y)\right) \le T\big(\mu(a),\mu(b)\big),$$

hepsi için a∈A ve b∈B ise

$$T\left(\sup_{x\in A}\mu(x), \sup_{y\in B}\mu(y)\right) \le \sup_{\substack{x\in A\\ y\in B}} T\big(\mu(x),\mu(y)\big).$$

Teorem 4.2.1: Genelleştirilmiş gruplar G ve H için f: G→H homomorfi olsun. Eğer T sürekli t-norm ise G nin herhangi T-fuzzy genelleştirilmiş alt grubunun görüntüsü H nin T-fuzzy genelleştirilmiş alt grubu olur.

İspat: Verilen y, y∈G. İlk olarak eğer $f^{-1}(y_1) = f^{-1}(y_2) = \varnothing$

$$f(\mu)(y_1y_2) \geq 0 = T(0,0) = T\left(\sup_{x_1 \in f^{-1}(y_1)} \mu(x_1), \sup_{x_2 \in f^{-1}(y_2)} \mu(x_2) \right) = T\big(f(\mu)(y_1), f(\mu)(y_2)\big)$$

Ardından, $x_1, x_2 \in G$ şeklinde $y_1 = f(x_1), y_2 = f(x_2)$ ve $x = x_1x_2$ kümesinin orada var olduğunu varsayalım. Bu açıktır ki;

$$\{x \in G : x = a_1a_2,\ \text{bazı } a_1 \in f^{-1}(y_1) \text{ ve } a_2 \in f^{-1}(y_2)\} \subseteq f^{-1}(y_1y_2).$$

Bundan dolayı,

$$f(\mu)(y_1y_2) = \sup_{x \in f^{-1}(y_1y_2)} \mu(x) \geq \sup_{\substack{x_1 \in f^{-1}(y_1) \\ x_2 \in f^{-1}(y_2)}} \mu(x_1x_2)$$

$$\geq \sup_{\substack{x_1 \in f^{-1}(y_1) \\ x_2 \in f^{-1}(y_2)}} T\big(\mu(x_1), \mu(x_2)\big)$$

$$\geq T\left(\sup_{x_1 \in f^{-1}(y_1)} \mu(x_1), \sup_{x_2 \in f^{-1}(y_2)} \mu(x_2) \right) \text{ Lemma 4.2.1 den}$$

$$= T\big(f(\mu(y_1)), f(\mu(y_2))\big),$$

ispatı tamamlar.

Şimdi bu bölümde kullanılacak olan genelleştirilmiş normal alt grup kavramını vereceğiz, bir sonraki bölümde de bu kavramı daha yakından inceleyeceğiz.

Tanım 4.2.2: f G→H genelleştirilmiş grubun homomorfisi ve $f_a = f/G_a$ olsun.kerf ile kastettiğimiz $\bigcup_{a \in G} \ker f_a$ dır.

Tanım 4.2.3: G genelleştirilmiş grubunun N genelleştirilmiş alt grubu normal olarak ifade edilir. Eğer H genelleştirilmiş grubu ve $\forall a \in G$ için $f{:}G \to H$ homomorfisi ,$N_a = N \cap G_a$ için $N_a \neq \emptyset$ şartıyla $N_a = \ker f_a$ mevcutsa.

Örnek 4.2.1: G örnek 4.6 (i) deki genelleştirilmiş grupdur ve doğal sayılar m ve n olarak verilmiştir. $N_i = \{(x,y) \in G : x = iy\}$ için $i \in \{m,n\}$ ve $N = N_m \cup N_n$ olsun. Şimdi $f : G \to G$ için $f(x,y) = e(x,y)$ eşleşmesini tanımlayalım. f nin homomorfi olduğunu görebiliriz $N_{(m,1)} = \ker f_{(m,1)}$, $N_{(n,1)} = \ker f_{(n,1)}$ ve $\forall (x,y)$ ile $(x,y) \notin \{(m,1),(n,1)\}$ biz $N_{(x,y)} = \emptyset$ buluruz. Bu nedenle N, G nin normal genelleştirilmiş alt grubudur.

Not 4.2.1: Tanım 4.2.3 de açıktır ki G nin genelleştirilmiş normal alt grubu olan N, $N_a (a \in G)$ nin normal alt grubudur.

Teorem 4.2.2: Verilen N genelleştirilmiş G grubun normal bir genelleştirilmiş H grubudur. Öyleyse $G/N = \bigcup_{a \in G} G_a / N_a$ çarpılarak $(xN_a)(yN_b) = xyN_{ab}$ genelleştirilmiş alt gruba $e(xN_a) = e(x)N_a$ ve $x(N_a)^{-1} = x^{-1}N_a$ şeklini alır.

Önerme 4.2.1: T sürekli t-norm, N normal genelleştirilmiş alt grup ve μ G nin T-fuzzy genelleştirilmiş alt grubudur. Öyleyse fuzzy alt küme $\bar{\mu} \in FS(G/N)$,

$\bar{\mu}(xN_a) = \sup_{\omega \in xN_a} \mu(w)$ de tanımlanmış G/N T- fuzzy alt grubudur.

İspat:. Verilen $xN_a, yN_b \in G/N.$ ise

$$\bar{\mu}\left(xN_a yN_b\right) = \bar{\mu}\left(xyN_{ab}\right) = \sup_{\omega \in xyN_{ab}} \mu(\omega)$$

$$= \sup_{\omega \in xN_a yN_b} \mu(\omega) = \sup_{\substack{\omega_1 \in xN_a \\ \omega_2 \in yN_b}} \mu(\omega_1 \omega_2)$$

$$\geq \sup_{\substack{\omega_1 \in xN_a \\ \omega_2 \in yN_b}} T(\mu(\omega_1), (\omega_2))$$

$$\geq T\left(\sup_{\omega_1 \in N_a} \mu(\omega_1), \sup_{\omega_2 \in yN_b} \mu(\omega_2) \right) \text{ Lemma 4.2.1 den}$$

$$= T\left(\bar{\mu}(xN_a), \bar{\mu}(yN_b)\right).$$

Ayrıca,

$$\bar{\mu}\left((xN_a)^{-1}\right) = \bar{\mu}(x^{-1}N_a) = \sup_{\omega \in x^{-1}N_a} \mu(\omega) = \sup_{\omega^{-1} \in xN_a} \mu(\omega^{-1}) = \sup_{z \in xN_a} \mu(z) = \bar{\mu}(xN_a)$$

Önerme 4.2.2: N G nin normal genelleştirilmiş alt grubu ve $\bar{\mu} \in FS(G/N)$ olsun. Öyleyse $\mu(x) = \bar{\mu}(xN_a)$ tarafından tanımlanan $\mu \in FS(G)$,G nin T-fuzzy genelleştirilmiş alt grubudur

Teorem 4.2.3 (Correspondence Teoremi): Verilen T sürekli t-normu ve N de G nin genelleştirilmiş normal alt grubudur. Öyleyse TF(G) ve TF(G/N) arasında bir benzeşme tanımlanmaktadır.

İspat: Önerme 4.2.1 ve 4.2.2 den kolayca

$$\Phi : TF(G) \to TF(G/N$$

$$\mu \mapsto \bar{\mu}$$

elde ederiz.

4.3 T- fuzzy Normal Genelleşmiş Altgrupları

Bu bölüme bir tanım ile başlıyoruz.

Tanım 4.3.1: G nin T- fuzzy genelleştirilmiş alt grubu μ, T- fuzzy normal genelleştirilmiş alt grup olarak adlandırılır, $\mu \lhd \mathrm{TF(G)}$ şeklinde gösterilir.;eğer her boş olmayan seviye alt kümesi μ_t ,G nin normal genelleştirilmiş alt grubu oluyorsa.

Örnek 4.3.1: G örnek 4.6(i) deki genelleştirilmiş grup olsun ve $m \in \mathbb{N}$ için G nin fuzzy alt kümesi μ $\mu(x, y) = s_k$ ile gsterilir,eğer x=ky $\left(k \in \{1,2,\ldots,m\} \text{ ile}\right)$ ve $\mu(x, y) = 0$ koşulu sağlanıyorsa. diğer taraftan $0 = s_0 < s_1 < s_2 < \ldots < s_m < 1$ şeklindedir. Öyleyse bunu doğrulamak kolaydır, bütün $t \in (s_m, 1]$, $\mu_t = \varnothing$ ve yapacak bir şey yoktur. Ama $t \in (s_{k-1}, s_k)$ ise

$$\mu_t = N_k \cup N_{k+1} \cup \ldots \cup N_m$$

Öyleki $N_k = \{(x, y) \in G : x = ky\}$ ve $k \in \{1,2,\ldots,m\}$. Örnek 4.2.1 deki $f_t : G \to G$ için $f_t(x, y) = e(x, y)$ $\left(t \in [0,1]\right)$ de göründüğü üzere,

$$(\mu_t)(a,b) = \begin{cases} \ker(f_t)_{(m,1)} & , \ (a,b) = (m,1), \\ \ker(f_t)_{(m-1,1)} & , \ (a,b) = (m-1,1), \\ \vdots & \\ \ker(f_t)_{(1,1)} & , \ (a,b) = (1,1), \\ \varnothing & , \ \text{bunun dışında} \end{cases}$$

bu da bize μ in G nin T- fuzzy genelleştirilmiş normal alt grubu olduğunu gösterir.

Aşağıdaki birbirini izleyen T- fuzzy alt gruplar ve fuzzy gruplar bu şekilde kolayca kontrol edilir.

Teorem 4.3.1: G grubunun herhangi bir T- fuzzy alt grubu μ aşağıdaki koşulları sağlar

$\forall x, y \in G$,

(1) $\mu(xy) = \mu(yx)$,
(2) $\mu(xyx^{-1}) = \mu(y)$,
(3) $\mu(xyx^{-1}) \geq \mu(y)$,
(4) $\mu(xyx^{-1}) \leq \mu(y)$.

Tanım 4.3.2: G grubunun T- fuzzy alt grubu μ Teorem 4.3.1 deki eşdeğer koşulları sağlıyor ise T- fuzzy normal alt grup olarak adlandırılır.

Teorem 4.3.2: G grubunun T- fuzzy alt altkümesi μ T- fuzzy normal alt grup ise ve G (normal) alt gruplarının boş olmayan her seviyesindeki alt kümeleri μt olursa hepsi için $t \in [0,1]$.

G (genelleştirilmiş) grubunun T- fuzzy (genelleştirilmiş) alt grubu μ verilen $\mu_* = \{x \in G : \mu(x) = \mu(e)\} \left(\{x \in G : \mu(x) = \mu(e(x))\}\right)$ biçimlendirirken [Mordeson, Bhutani, Rosenfeld, 2005] deki Teorem1.3.4 ve Teorem 1.3.10 da bu sonuçları elde ederiz.

Teorem 4.3.3: G bir grup olsun ve μ G nin T-fuzzy alt grubu olsun. Bu durumda;

(i) $x\mu = y\mu$ ise $x\mu_* = y\mu_*$

(ii) Eğer μ G'nin T- fuzzy normal alt grubu ise , μ_* da G nin normal alt grubudur.

Lemma 4.3.1: G'nin T- fuzzy genelleştirilmiş alt grubu μ için $a\in G$ ve $t\in[0,1]$ ise $(\mu_a)_t = (\mu_t)_a$. Özellikle $(\mu_a)_* = (\mu_*)_a$.

Not 4.3.1: Açıkça G nin T- fuzzy alt grubu olan μ deki kısıtlama G_a yı; gösterim şekli olarak μ_a yı verir. μ_a, G_a grubunun T-fuzzy alt grubudur. Ayrıca μ normal ise μ_a da normaldir. Şimdi verilen $\mu \lhd TF(G)$. Bu tanımlamaya göre her boş olmayan alt küme seviyesi μ_t $(t\in[0,1])$ G nin genelleştirilmiş normal alt grubudur. Bu yüzden $G_a/(\mu_t)_a$ gruptur ve $G/\mu_t = \bigcup_{a\in G} G_a/(\mu_t)_a$ Teorem 4.2.2 deki genelleştirilmiş grup olur. Şimdi verilen μ hayal edilebilinir. [Muherjee, Bhattacharya, 1984], T ile ilgili devam eden G_a/μ_a bütün μ_a belirsiz yan kümeleri ile çarpımı $x\mu_a y\mu_a = xy\mu_a$ grubu verir. Verilen $G/\mu = \bigcup_{a\in G} G_a/\mu_a$ ve ikili işlemi "." ile tanımlanır, G/μ için $x\mu_a y\mu_b = xy\mu_{ab}$. $(G/\mu,.)$ in genelleştirilmiş grup olduğunu gösterdik.

Tanım 4.3.3: G nin T- fuzzy genelleştirilmiş alt grubu μ in bütün $x\in G, \mu(e(x)) = t$ için t tipine sahip olduğu söylenebilir.

Teorem 4.3.4: μ G nin t tipinde imajlanabilir. T- fuzzy genelleştirilmiş alt grubu olsun. Bu durumda μ_* kümesi G nin genelleştirilmiş alt grubu olur.

İspat: Verilen $x, y\in \mu_*$. ise

$$\mu(xy^{-1}) \ge T\big(\mu(x),\mu(y)\big) = T\big(\mu(e(x)),\mu(e(y)) = T(t,t) = t = \mu\Big(e(xy^{-1})\Big)$$

Eşitsizliğin tersi. Lemma 4.4 tarafından sağlanır.

Lemma 4.3.2: Verilen G normal genelleştirilmiş alt grup ve μ t tipinin ve G nin imajlanabilir T- fuzzy genelleştirilmiş alt grubudur. Öyleyse;

$$(\mu_*)_a(\mu_*)_b \subseteq (\mu_*)_{ab}.$$

İspat: $z \in (\mu_*)_a(\mu_*)_b$. Sonra $x \in (\mu_*)_a$ ve $y \in (\mu_*)_b$ ise $z = xy$. Ama bu $x \in G_a, \mu(x) = \mu(e(x)) = t$, $y \in G_b$ ve $\mu(y) = \mu(e(y)) = t$, anlamına gelir.

Şimdi,

$$\mu(xy) \geq T(\mu(x), \mu(y)) \geq T(t,t) = t = \mu(e(xy))$$

bu da $xy \in \mu_*$ anlamına gelir. hepsi birlikte $xy \in G_a G_b \subseteq G_{ab}$ ise $xy \in (\mu_*)_{ab}$ anlamına gelir.

Teorem 4.3.5: G normal genelleştirilmiş grup ve μ t tipinde G nin imajlanabilir. T-fuzzy normal genelleştirilmiş alt grubu olsun. Öyleyse $(G/\mu,.)$ genelleştirilmiş gruptur.

İspat: $x_1\mu_a = x_2\mu_a$ ve $y_1\mu_b = y_2\mu_b$ için $x_1x_2 \in G_a$ ve $y_1y_2 \in G_b$ dir. Teorem4.3.3 e göre, $x_1(\mu_a)_* = x_2(\mu_a)_*$ ve $y_1(\mu_b)_* = y_2(\mu_b)_*$ ve bu yüzden

$$\begin{aligned}
(x_1y_1)(\mu_{ab})_* &= (x_1y_1)(\mu_*)_{ab} && \text{Lemma 4.3.1}\\
&= x_1(\mu_*)_a y_1(\mu_*)_b \\
&= x_1(\mu_a)_* y_1(\mu_a)_* \\
&= x_2(\mu_a)_* y_2(\mu_b)_* && \text{hipotezden.}\\
&= x_2(\mu_*)_a y_2(\mu_*)_b
\end{aligned}$$

$$= x_2 y_2 (\mu_*)_{ab}$$

$$= (x_2 y_2)(\mu_{ab})_*.$$

Bu bize $(x_1y_1)\mu_{ab} = (x_2y_2)\mu_{ab}$ olduğunu kanıtlar. G nin diğer özelliklerini kolaylıkla sağlar.

Teorem 4.3.6: [9] Eğer $f : G \to H$ genelleştirilmiş grupların homomorfisi ise,

$$G / \ker f \backsimeq f(G)$$

dir.

Teorem 4.3.7: Verilen μ imajlanabilir T- fuzzy normal genelleştirilmiş alt grubu ile G grubunun normal genelleştirilmiş tip t si için. $G / \mu \backsimeq G / \mu_*$.

İspat: Teorem 4.3.3 (i) ve Lemma 4.3.1 bu eşleşmeyi kolayca gösterir Φ:

$G / \mu \to G / \mu_*$ için $\Phi(x\mu_a) = x(\mu_*)_a$ birebir ve iyice tanımlanmıştır.

Açıkça ve üzerinde bulunduğu. Ayrıca,

$$\Phi\big(xy(\mu_a)\big) = xy(\mu_*)_a = xy(\mu_a)_* = x(\mu_a)_* y(\mu_a)_* = x(\mu_*)_a y(\mu_*)_a$$

$$= \Phi(x\mu_a)\Phi(y\mu_a)$$

bize Φ nın homomofi olduğunu gösterir. Bu yüzden, Φ izomorfidir.

Teorem 4.3.6 ve 4.3.7 den aşağıdaki teoremi elde ederiz.

Teorem 4.3.8: (Homomorphism Teoremi) Normal genelleştirilmiş grup G, imajlanabilir T- fuzzy normal genelleştirilmiş alt grup μ, G nin tip t ile $f : G \rightarrow H$ şeklinde genelleştirilmiş homomorfi grubunu oluşturur bu da $\mu_* = \ker f$ dir. Öyleyse

$$G / \mu \simeq f(G) \text{ dir.}$$

4.4. T- fuzzy Genelleştirilmiş Altgrupların Kafesi

G bir (T- fuzzy) genelleştirilmiş alt gruptur. Bundan dolayı G nin boş olmayan X alt kümesi tarafından oluşturulan (FS(G)), G nin (T-fuzzy) genelleştirilmiş alt grubunu; <X> şeklinde göstereceğiz X i kapsayan G genelleştirilmiş (T- fuzzy) alt gruplarının tüm kesişimleri incelenecetir.

Uyarı 4.4.1: $\left(FS(G), \subseteq\right)$ Tam bir kafestir.

Not 4.4.1: G'nin boş olmayan X alt kümesi için

$$X^{-1} = \left\{x^{-1} : x \in X\right\}$$

olur.

Teorem 4.4.1: G normal genelleştirilmiş grubu sağlıyor ise,

$$\text{(CI)} \quad xe(y) = e(y)x \ , \ (\varnothing \neq) X \subseteq G \text{ ve } \forall x, y \in X \bigcup X^{-1} \text{ için}$$

Öyleyse,

(4.4.1) $$< X >= \left\{x_1^{n_1} x_2^{n_2} \ldots x_k^{n_k} : x_i \in X, n_i \in \mathbf{Z}, i = 1, 2, \ldots, k\right\} \text{ dir.}$$

İspat: (4.4.1) in sağ tarafına A diyelim. Açıkça $X \subseteq A$. Şimdi verilen $x,y \in A$. Öyleyse burada var olan doğal sayılar k ve l, tamsayılar n_i, m_j ile $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ ve $j \in \{1,2,\ldots,l\}$ ve $a_1,a_2,\ldots,a_k,b_1,b_2,\ldots,\in X$ öyle ki $x = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k}$ ve $y = b_1^{m_1}, b_2^{m_2}, \ldots, b_l^{m_l}$. Ama sonra,

$$xy^{-1} = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_k^{n_k} a_{k+1}^{n_{k+1}} a_{k+2}^{n_{k+2}} \ldots a_{k+l}^{n_{k+l}}$$

verilen $j \in \{k+1, k+2, \ldots, k+1\}, a_j = b_j$ ve $n_j = -m_j$ bunu sağlayan A G nin genelleştirilmiş alt grubudur. Açıkça görülür ki A G nin X'i kapsayan en küçük genelleştirilmiş alt grubudur. Böylece A = <**X**>.

Şimdi aşağıdaki lemma'ya bakalım.

Lemma 4.4.1: : G normal genelleştirilmiş grup ve μ G'nin imajlanabilir T- fuzzy genelleştirilmiş alt grubu olan her boş olmayan seviye alt kümesi $\mu_t (t \in [0,1])$ (CI) özelliğine sahiptir. Öyleyse

$$<\mu_s><\mu_t> \subseteq \mu_{T(s,t)}, \quad s,t \in [0,1]$$

dir.

İspat: x=zw için $z \in <\mu_s>$ ve $w \in <\mu_t>$. Öyleyse burada var olan doğal sayılar k, l; tamsayılar n_i, m_j ise $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ ve $j \in \{1,2,\ldots,l\}$ ve $z_i \in \mu_s; w_j \in \mu_t$ öyle ki $z = z_1^{n_1} z_2^{n_2} \ldots z_k^{n_k}, w = w_1^{m_1} w_2^{m_2}, \ldots w_l^{m_l}$. Lemma 4.4 (ii) de $\mu\left(z_i^{n_i}\right) \geq \mu(z_i) \geq s$ tümü için $i \in \{1,2,\ldots,k\}$ ve $\mu\left(w_j^{m_j}\right) \geq \mu(w_j) \geq t$ tümü için $j \in \{1,2,\ldots,l\}$ ve bu yüzden

$$\mu(z) \geq T_k\left(\mu(z_1), \mu(z_2), \ldots, \mu(z_k)\right) \geq s \quad \text{ve} \quad \mu(w) \geq T_l\left(\mu(w_1), \mu(w_2), \ldots, \mu(w_l)\right) \geq t.$$

Böylece $\mu(x) = \mu(z_w) \geq T\left(\mu(z), \mu(w)\right) \geq T(s,t)$ bunun anlamı da $x \in \mu_{T(s,t)}$ dir.

Teorem 4.4.2: G, (CI) özelliğindeki normal genelleştirilmiş grup ve $A=\{\mu_i : i\in I\}$ G nin imajlanabilir T- fuzzy genelleştirilmiş alt grubunun indeks ailesi olsun. Öyleyse;

$$<A>(x)=\vee\left\{k : x\in<(\bigcup_{i\in I\mu_i})_k>\right\}.$$

İspat: $x\in G$ için ve i ∈ I , verilen $\mu_i(x)=t_i$ dir ve

$$\lambda(x)=\vee\left\{k : x\in<(\bigcup_{i\in I\mu_i})_k>\right\}.$$

Öyleyse

$$x\in(\mu_i)_{ti}\subseteq\left(\bigcup_{i\in I}\mu_i\right)_{t_i}\subseteq<(\bigcup_{t\in I\mu_i})t_i>$$

Bu nedenle $t_i\in\left\{k : x\in<(\bigcup_{i\in z\mu i})_k>\right\}$ kanıtlar ki $\lambda(x)\geq\mu_i(x)$ hepsi için i ∈ I. Şimdi λ in G nin T- fuzzy genelleştirilmiş alt grubu olduğunu görmekteyiz. x,y ∈ G için verilen $T(\lambda(x),\lambda(y))=t$ ve $\alpha=t-1/n$ ise n yeterince büyük pozitif tamsayıdır. Öyleyse;

$$\lambda(x)\geq T\big(\lambda(x),\lambda(y)\big)>\alpha,$$

ve benzer olarak $\lambda(y)>\alpha$ ve bundan dolayı

$$\vee\left\{k : x\in<(\bigcup_{i\in I\mu_i})_k>\right\}=\lambda(x)>\alpha$$

ve

$$\vee\left\{k : y\in<(\bigcup_{i\in I\mu_i})_k>\right\}=\lambda(y)>\alpha.$$

Bundan dolayı burada var olan $k_0>\alpha$ ve $k_1>a$ öyle ki $x\in<(\bigcup_{i\in f\mu_i})_{k_0}>$ ve $y\in<(\bigcup_{i\in z\mu_i})_{k_1}>$ bu nedenle Lemma 4.4.1 deki $xy\in<(\bigcup_{i\in I\mu_i})_{T(k_0k_1)}>$ için $T(k_0,k_1)>\alpha$. Bu yüzden,

$$\lambda(xy) = \vee\left\{k : xy \in <(\bigcup_{i\in I\mu_i})_k>\right\} \geq t = T\left(\lambda(x), \lambda(y)\right).$$

İkinci özellikde $\lambda(x^{-1}) = \lambda(x)$ G nin T- fuzzy genelleştirilmiş alt grubu olan μ'i takip eden durumdur, $x \in <\mu_k>$ ise ve sadece $x^{-1} \in <\mu_k>$ ise.

Şimdi G A yı kapsayan G'nin T- fuzzy genelleştirilmiş alt grubudur ve verilen $\lambda(x) = t$ dir. Öyleyse $\vee\left\{k : x \in <(\bigcup_{i\in I\mu_i})_k>\right\} > s$ ise $s = t - 1/n$ ve n yeterince büyük pozitif tamsayıdır, buradan dolayı orada var olan $k_0 > s$ için $x \in <(\bigcup_{i\in I\mu_i})_{k_0}>$. Ama sonra $x = a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots, a_r^{m_r}$ için $r \in N$, $m_1, m_2, \ldots, m_r \in Z$ ve $a_1, a_2, \ldots, a_r \in (\bigcup_{i\in I\mu_i})_{k_0}$ dır. Böylece $(\bigcup_{i\in I\mu_i})(a_j) \geq k_0 > s$ için $j \in \{1,2,\ldots,r\}$ bu da $\mu_{ij}(a_j) > s$ ile $j \in \{1,2,\ldots,r\}$ yi ima eder. Bundan dolayı,

$$\sigma(x) = \sigma\left(a_1^{m_1} a_2^{m_2} \ldots a_r^{m_r}\right) \geq T_r\left(\sigma(a_1), \sigma(a_2), \ldots, \sigma(a_r)\right) > T_r(s, s, \ldots, s) = s$$

$\sigma(x) \geq t = \lambda(x)$ anlamına gelir ve X in A'yı içeren en küçük T- fuzzy genelleştirilmiş alt grup olduğunu kanıtlar.

Teorem 4.4.3: G normal genelleştirilmiş grup, (CI) yı sağlayan $\mu, \mu_i \in TF(G)$, $i \in I$, G nin T-fuzzy genelleştirilmiş alt grupları. Bu durumda,

$$\mu \wedge \left(\bigvee_{\alpha\in\Lambda} \mu_\alpha\right) = \bigvee_{\alpha\in\Lambda} (\mu \wedge \mu_\alpha)$$

dır.

İspat: $x \in G$ ise $\mu \wedge (\vee\mu_\alpha)(x) = t$, ve $s = t - 1/n$ için n yeterince büyük pozitif tamsayıdır. Öyleyse $\mu(x) \geq t$ ve

$$\vee\left\{k : x \in <(\bigcup\mu_\alpha)_k>\right\} = (\vee\mu_\alpha)(x) > s.$$

Bundan dolayı var olan $k_0 > s$ öyle ki $x \in < (\bigcup \mu_\alpha)_{k_0} >$ ve burada var olan doğal sayılar r, tamsayılar $n_1, n_2, \ldots, n_r, a_1, a_2, \ldots a_r \in (\bigcup \mu_\alpha)_{k_0}$ Öyle ki $x = a_1^{n_1} a_2^{n_2} \ldots a_r^{n_r}$ dir.

Böylece $\bigcup \mu_\alpha (a_i) \geq k_0 > s$ ve var olan $\lambda \in A$ için $\mu_\lambda (a_i) > s$. Bundan dolayı, $\mu \wedge \mu_\lambda (a_i) > s$ bu da $a_i \in (\bigcup \mu \wedge \mu_\alpha)$ ve $x \in < (\bigcup \mu \wedge \mu_\alpha)$ anlamına gelir. Bu da $s \in \{ k : x \in < (\bigcup \mu \wedge \mu_\alpha)_k > \}$ olduğunu kasteder. Böylece $\vee_\alpha (\mu \wedge \mu_\alpha)(x) \geq t = \mu \wedge (\vee \mu_\alpha)(x).$ Eşitsizliğin tersi açıkça verilmiştir.

Teorem 4.4.3 den ve herhangi bir T- fuzzy genelleşmiş alt grubun kesişimi bize yeniden T-belirsiz genelleştirilmiş alt grubu verir.

Sonuç 4.4.1: Teorem 4.4.3 deki hipoteze göre $(TF(G), \subseteq)$ Heyting cebiridir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Bu çalışmada, fuzzy genelleştirilmiş alt grupların temel özellikleri incelenmiştir. T-normlar kullanılarak, fuzzy genelleştirilmiş alt grup kavramı verilmiştir. T-normlar kullanılarak elde edilen kavramlar sayesinde, fuzzy genelleştirilmiş alt grupları karakterize eden teoremler verilmiştir.

Bölüm 4.2.' de grup homomorfi altındaki T-fuzzy genelleştirilmiş alt grubun görüntü ve ters görüntüsü incelenmiştir. T-normlarının süreklilik kavramı yardımıyla, T-fuzzy genelleştirilmiş alt grupların bazı özellikleriyle bir T-fuzzy genelleştirilmiş alt grubun ters görüntüsünü incelenmiştir.

Bölüm 4.3.'te, T-belirsiz normal genelleştirilmiş alt grup tanımı yapılmış, temel özellikleri incelenmiştir.

. Son olarak, Bölüm 4.4.' de, T-belirsiz genelleştirilmiş alt grupların kafes yapısı incelenmiş, bu kafesin Heyting Cebiri yapısında olduğu gösterilmiştir.

KAYNAKLAR

Ameri, R., Bakhshi, R., Nemato!lahzadeh, S. A. and Borznooei, R. A. ″Fuzzy (strong) congruence relaitions on a hypergroupoid and hyper BCK–algebra″, Quasigroups and Related Systems, 15: 11-24, (2007).

Abu Osman, M. T. ″On some product of fuzzy subgroups″, Fuzzy Sets and Systems, 24: 79-86, (1987).

Anthony, J. M. and Sherwoord, H ″A characterization of fuzzy subgroups″, Fuzzy Sets and Systems, 7: 297-305, (1982).

Bakshi, M. and Borzooei, R. A. ″Some properties of T-fuzzy generalized subgroups″, Iranian Journal of Fuzzy System, 6(4): 73-87, (2009).

Bakshi, M. and Borzooei, R. A. ″Lattice structure on fuzzy congruence relations of a hypergroupoid″, İnform. Sci., 177(16): 3305-3313, (2007).

Birkhofoof, G. ″Lattice theori″ Amer. Math. Soc., Providence, R. I., (1967).

Borzooei, R. A., Bakhshi, M. and Marshinchi, M. ″Lattice structure on some fuzzy algebraic systems″, Soft Computing, 12(8): 739-749, (2008).

Borzooei, R. A., Rezaei, G. R., Molaei, M. R. and Zahedi, M. M. ″Characterization of generalized groups of orders 2 and 3″, Pure Math. Apple., 11(4): 1-74, (2000).

Klement, E. P. and Mesiar, R., ″Logical, algebraic, analytic and probabilistic aspects of triangular norms″, Elsevier, Netherlandhs, (2005).

Liu, W. J. ″Fuzzy invariant subgroups and fuzzy ideals″, Fuzzy Sets and Systems, 8: 133-139, (1982).

Mehrabi, M., Molaei, M. R. and Oloomi, A. ″Generalized subgroups and homomorphisms″, Arab J. Math. Sci., 6(2): 1-7, (2000).

Molaei, M. R. ″Generalized groups″, Buletinul Institului Polithhnic Din Iasi Tomul, XLV(XLIX): 21-24, (1999).

Mordeson, J. N., Buhutani, K. R. and Rosenfeld, A. ″Fuzzy group theory″, Springer-Verlag Berlin Heidelberg, Netherlands, (2005).

Mukherjee, N. P. and Bhattacharya, P. ″Fuzzy normal subgroups and fuzzy cosets″, Inform. Sci., 34: 225-239, (1984).

Nguyen, H. T. and Walker, E. A., ″A first course in fuzzy logic″, 3rd ed.Chapman and Hall/CRC, USA, Florida, (2006).

Roh, E. H., Davvaz, B. and Kim,.H. ″T-fuzzy subhypernear-rings of hypernear-rings″, SCİ. Math. Jpn., 61(3): 535-545, (2005).

Rosenfeld, A. ″Fuzzy groups″, Journal of Mathematical Analysis and Applications, 35: 512-517, (1971).

Sessa, S. ″On fuzzy subgroups and fuzzy ideals under triangular norms: short communiction″, Fuzzy Sets and Systems, 13: 95-100, (1984).

Zadeh, L. A. ″Fuzzy sets″, Information and Control, 8: 338-353, (1965).

Zhang, J. ″On properties of fuzzy hyperideals in hypernear-rings with t-norms″, J. Appl. Math. Comput., 20: 255-277, (2006).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Tuğba LEVENT OBUZ

Doğum Tarihi: 13.01.1980

Öğrenim Durumu: Lisans

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	İsmail Safa Özler Anadolu Lisesi	1997
Lisans	Matematik Eğitimi	Balıkesir Üniversitesi Necatibey Eğitim Fakültesi	2001

Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Öğretmen	Atatürk Anadolu Lisesi	2003–2014
Öğretmen	AKİB Zafer Çağlayan Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	2014-

ESERLER

1. Çuvalcıoğlu, G., Söylemez, R., Obuz Levent, T., Intuitionistic fuzzy hyper structures with T-(co)norm(s), International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications, TÜRKİYE, 2012.
2. Sinem Yılmaz, Tuğba Levent Obuz, Ahu Meryem Çuvalcıoğlu, İkili Tip Operatörlerin I. Tip Operatörlerle İlişkileri. 12. Matematik Sempozyumu, 12(2013).
3. Çuvalcıoğlu, G., Yılmaz, S., Levent Obuz., T. "The New Intuitionistic Fuzzy Modal Operators: Uni-type Operators",Bogolyubos readinds DIF-2013. Differential equations, theory of functions and their applications, Ukraine, (2013).