ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI İÇİN KONSERVATİF MATRİS METOTLARI VE TOPLANABİLİRLİK ALANLARINDAKİ UYGULAMALARI

ŞEYDA SEZGEK

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
TEMMUZ - 2016

ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI İÇİN KONSERVATİF MATRİS METOTLARI VE TOPLANABİLİRLİK ALANLARINDAKİ UYGULAMALARI

ŞEYDA SEZGEK

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Danışman
Doç. Dr. İlhan DAĞADUR

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
TEMMUZ - 2016

Sezgek, Ş. 2016. Çift İndisli Dizi Uzayları için Konservatif Matris Metotları ve Toplanabilirlik Alanlarındaki Uygulamaları, Yüksek Lisans Tezi. Mersin Üniversitesi

ŞEYDA SEZGEK tarafından DOÇ. DR. İLHAN DAĞADUR danışmanlığında "Çift İndisli Dizi Uzayları için Konservatif Matris Metotları ve Toplanabilirlik Alanlarındaki Uygulamaları" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
PROF. DR. MEHMET KÜÇÜKASLAN	
DOÇ. DR. CAFER AYDIN	
DOÇ. DR. İLHAN DAĞADUR	

Yukarıdaki jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 29/08/2016 tarih ve 2016/32/881 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

PROF. DR. AYLA ÇELİK
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARI İÇİN KONSERVATİF MATRİS METOTLARI VE TOPLANABİLİRLİK ALANLARINDAKİ UYGULAMALARI

Şeyda SEZGEK

ÖZ

Bu çalışmada ilk olarak çift indisli diziler ve bu diziler için iyi bilinen Pringsheim anlamındaki yakınsaklık kavramı açıklandı ve çift indisli dizi uzayları üzerindeki topolojik yapı incelendi. Ayrıca; $A = (a_{mnkl})$ herhangi bir dört boyutlu skaler matrisi ve $\Omega_A = \left\{ x \in \Omega \ : \ Ax = \left(\nu - \sum\limits_{k,l} a_{mnkl} x_{kl} \right) \quad \text{mevcut} \right\}$ uzayı göz önüne alınarak $\nu_A = \{x \in \Omega_A \ : \ Ax \in \nu\}$ uzayının ν-regülerliği ve ν-konservatifliği verildi. Zeltser ve Limaye tarafından verilen klasikte bilinen bazı yakınsaklık testlerinin çift indisli diziler için karşılığı ve Cauchy çarpımı kavramı çalışıldı. Bununla birlikte, Zeltser tarafından verilen çift indisli dizi uzaylarının β duallerinin zayıf dizisel tamlığına ilişkin temel sonuçlar incelendi.

Anahtar Kelimeler: Çift indisli diziler, Çift indisli seriler, FDK-uzayı, Pringsheim yakınsaklık

Danışman: Doç. Dr. İlhan DAĞADUR, Mersin Üniversitesi Matematik Anabilim Dalı

CONSERVATIVE MATRIX METHODS AND APPLICATIONS ON SUMMABILITY DOMAINS FOR DOUBLE SEQUENCE SPACES

Şeyda SEZGEK

ABSTRACT

Firstly, in this study double sequences and the most well known notion of convergence for double sequences in the sense of Pringsheim was explained and the topological structure on the spaces of double sequences was investigated. Also, the v-regularity and the v-concervativity of $v_A = \{x \in \Omega_A / Ax \in v\}$ space were given by considering a four dimensional scalar matrix $A = (a_{mnkl})$ and the space $\Omega_A = \{x \in \Omega / Ax = \left(v - \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl}\right) exists\}$. Some convergency tests for double sequences and the notion of Cauchy product by given Zeltser and Limaye were studied. Also, the main results about weak sequential completeness of β-duals of double sequence spaces which was given by Zeltser was studied.

Keywords: Double Sequences, Double Series, FDK-spaces, Pringsheim Convergence

Advisor: Doç. Dr. İlhan DAĞADUR, Mersin University Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Bu tezi hazırlamamda bana yardımcı olan, vaktini, emeğini ve desteğini esirgemeyen değerli danışman hocam Doç. Dr. İlhan Dağadur'a teşekkür ederim.

Her zaman beni motive eden sevgisini eksik etmeyen aileme ve her zaman çalışmalarıma yardımcı olan sevgili arkadaşlarım Maya Altınok ve Mesut Altınok'a teşekkür ederim.

Ayrıca, yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerinden yararlandığım Mersin Üniversitesi Matematik Bölümündeki hocalarıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER DİZİNİ

SİMGELER VE KISALTMALAR

$\mathbb{R}$: Reel Sayılar Kümesi

$\mathbb{N}$: Doğal Sayılar Kümesi

$\mathbb{C}$: Kompleks Sayılar Kümesi

w : Reel ya da Kompleks Terimli Tüm Diziler Uzayı

ϕ : Sonlu Diziler Uzayı

$c = \left\{ x = (x_k) \ : \ \lim\limits_{k\to\infty} x_k \ \text{ mevcut} \right\}$

$c_0 = \left\{ x = (x_k) \ : \ \lim\limits_{k\to\infty} x_k = 0 \right\}$

$m = \left\{ x = (x_k) \ : \ \sup\limits_k |x_k| < \infty \right\}$

$cs = \{ x = (x_k) \ : \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \ \text{ yakınsak} \}$

$l = \left\{ x = (x_k) \ : \ \sum\limits_{k=1}^{\infty} |x_k| < \infty \right\}$

$\|A\|_\infty = \sup\limits_n \left| \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} \right|$

$(Ax)_n = \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$

$\lim_A x = \lim\limits_n \left((Ax)_n \right)$

$E_A = \{ x = (x_k) \ \in w \ : \ Ax \in E \}$

$a_k = \lim\limits_{n\to\infty} a_{nk}$

$\chi(A) = \lim\limits_{n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_{nk} - \sum\limits_{k=1}^{\infty} a_k$

$x^{(n)} = \sum\limits_{k=1}^{\infty} x_k \delta^k$

$\Re$: Reel Kısım

Ω : Çift İndisli Diziler Uzayı

$$\mathcal{V} = \left\{ x \in \Omega \;:\; \mathcal{V} - \lim x := \mathcal{V} - \lim_{k,l} x_{kl} \;\; \text{mevcut} \right\}$$

$$\Omega_A := \Omega_A^{(\mathcal{V})} := \left\{ x \in \Omega \;:\; Ax := \left(\mathcal{V} - \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl} \right)_{m,n} \quad \text{mevcut} \right\}$$

$$\mathcal{V}_A := \{ x \in \Omega \;:\; Ax \in \mathcal{V} \}$$

$\mathcal{C}_c$: Yakınsak Çift İndisli Dizilerin Uzayı

$\mathcal{C}_r$: Regüler Yakınsak Çift İndisli Dizilerin Uzayı

$$\mathcal{M} := \left\{ x \in \Omega \mid \forall l \in \mathbb{N} : \sup_k |x_{k,l}| < \infty \right\}$$

$$\mathcal{C} := \left\{ x \in \Omega \mid \forall l \in \mathbb{N} : \lim_k x_{k,l} \;\; \text{mevcut} \right\}$$

$$\mathcal{C}_m := \left\{ x \in \mathcal{C} \mid \left(\lim_k x_{k,l} \right)_l \in m \right\}$$

$$\mathcal{C}_0 := \left\{ x \in \mathcal{C} \mid \forall l \in \mathbb{N} \;:\; \lim_k x_{k,l} = 0 \right\}$$

$$\widehat{\mathcal{C}} := \left\{ x \in \mathcal{M} \mid \exists a \in \mathbb{K} \;:\; \lim_l \overline{\lim_k} |x_{k,l} - a| = 0 \right\}$$

$$\mathcal{M}_u := \left\{ x \in \Omega \mid \|x\|_\infty := \sup_{k,l} |x_{k,l}| < \infty \right\}$$

$$\mathcal{L}_u := \left\{ x \in \Omega \mid \sum_{k,l} |x_{k,l}| < \infty \right\}$$

$$\mathcal{L}_\varphi := \left\{ x \in \mathcal{L}_u \mid \exists l_o \in \mathbb{N} \;:\; x = \sum_{l=1}^{l_0} x e^l \right\}$$

$$\mathcal{BV} := \left\{ x \in \Omega \mid \|x\|_{\mathcal{BV}} := \sum_k \|(x_{kl} - x_{k+1,l})_l\|_{bv} + \|(x_{1l})_l\|_{bv} < \infty \right\}$$

$$F_E^{(\mathcal{V})} := \left\{ x \in E \;:\; \forall f \in E' : \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} x_{kl} f(e^{kl}) \right)_{m,n} \in \mathcal{V} \right\}$$

$$W_E^{(\mathcal{V})} := \left\{ x \in F_E^{(\mathcal{V})} \;:\; \forall f \in E' : f(x) = \mathcal{V} - \sum_{k,l} x_{kl} f(e^{kl}) \right)$$

$$\varphi(X) := \left\{ u \in \Omega \mid \forall l \in \mathbb{N} \;:\; (u_{kl})_k \in X \;\; \text{ve} \;\; \exists l_0 \in \mathbb{N} \;:\; u = \sum_{l=1}^{l_0} u e^l \right\}$$

1. GİRİŞ

Tek indisli dizi ve serilerin bir genellemesi olarak ortaya çıkan çift indisli dizi ve seriler özellikle son zamanlarda sıkça çalışılmaktadır. Bu tez çalışmasında $\mathcal{C}_c$ ve $\mathcal{C}_r$ uzaylarına ilişkin konservatif matris metotları ele alınıp toplanabilirlik alanlarındaki uygulamaları incelenmiştir. Ayrıca çift indisli seriler için Pringsheim yakınsaklık, mutlak yakınsaklık ve Cauchy çarpımı kavramları incelenmiş ve çeşitli karakterizasyonlar verilmiştir. Bununla birlikte, çift indisli dizi uzaylarının β-duallerinin zayıf dizisel tamlığı, salınım özellikleri, $\beta(r)-$kesitsel yakınsaklığı ve $\sigma(E^{\beta}, E)$ nin dizisel tamlığı incelenmiştir. Ayrıca, konuya ilişkin çeşitli sonuçlar verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Matematiksel analiz içinde önemli bir yer tutan toplanabilme yöntemleri oldukça eski bir geçmişe sahiptir. İlk defa 1949'da Wilansky ([1], [2], [3]) tarafından matrisler için conull ve coregüler sınıflandırılması yapılmış ve bu sınıflan- dırma 1965 yılında Snyder [4] tarafından FK-uzaylarına (koordinat fonksiyonelleri sürekli Frechet uzayı) aktarılmıştır. 1974 yılında Bennett [5] tarafından FK-uzayları ve uygulamalarına ilişkin çeşitli karakterizasyonlar verilmiştir.

1897 yılında Pringsheim [6] tarafından yapılan çalışmada çift indisli diziler ve bu diziler için iyi bilinen Pringsheim anlamındaki yakınsaklık kavramı verilmiş. 1932 yılında Agnew [7] tarafından çift indisli dizilerin toplanabilirliği ve 1940 yılında Hill [8] tarafından çift indisli dizilerin perfectliğine ilişkin çeşitli sonuçlar elde edilmiştir. Çift indisli dizi uzayları üzerindeki çalışmalar ise 1965 yılında Bromwich [9] tarafından yapılmış ve bazı önemli sonuçlar elde edilmiştir. 1988 yılında Móricz ve Rhoades [10] tarafından yapılan çalışmada toplanabilir matrislerin kuvvetli regülerliği ve çift indisli dizilerin hemen hemen yakınsaklığı ele alınmış ve çeşitli karekterizasyonlar verilmiştir. 1991 yılında Móricz [11] tarafından yapılan diğer bir çalışmada ise çift indisli diziler için yakınsak ve sıfıra yakınsak dizi uzaylarının bir genişlemesi verilmiştir. 1999 yılında Başarır ve Sonalcan [12] tarafından yapılan çalışmada ise çeşitli çift indisli dizi uzayları ele alınıp incelenmiştir.

Türkmenoğlu 1999 yılında [13] yapmış olduğu çalışmada ise çift indisli dizilerin bazı sınıfları arasındaki matris dönüşümlerini incelemiştir. Zeltser 2001, 2002 ve 2009 yıllarında ([14], [15], [16], [17], [18]) yapmış olduğu çalışmalarda ise çift indisli dizi uzayları için konservatif matris metotlarını, FDK ve BDK (koordinat fonksiyonelleri sürekli çift indisli Banach uzayı) uzaylarının topolojik yapısını ve bu uzayların dualleri ile toplanabilirlik alanlarındaki uygulamalarına ilişkin çeşitli sonuçlar elde etmiştir. Ayrıca çift indisli seriler için Pringsheim yoğunluğundaki yakınsaklık kavramını ele alıp önemli sonuçlar vermiştir. Böylece toplanabilme teorisi açısından incelenen özellikler fonksiyonel analiz açısından da incelenmeye başlanmıştır. Bu ise ilgili alanın önemini arttırmıştır. Bu nedenle adı geçen proje konusunun incelenmesi matematik analiz ve fonksiyonel analiz açısından önemlidir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1. TEMEL KAVRAMLAR

3.1.1. Dizi Uzayları ve Matris Dönüşümleriyle İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Bu çalışmada yakınsak diziler uzayı c, sıfıra yakınsak diziler uzayı c_0, sınırlı diziler uzayı m, mutlak yakınsak seri oluşturan diziler uzayı l, yakınsak seri oluşturan diziler uzayı cs, reel ya da kompleks terimli tüm diziler uzayı w ve sonlu diziler uzayı ϕ ile gösterilecektir.

Ayrıca çalışma boyunca birim dizi $e = (1, 1, 1 \ldots)$ ve $k-$ıncı terimi 1 diğer bütün terimleri 0 olan dizi δ^k ile gösterilecektir, yani $\delta^k = (0, 0, \ldots, 0, \underset{k.terim}{1}, 0, \ldots)$ olacaktır.

$A = (a_{nk})$ $n, k = 1, 2, \ldots$ reel ya da kompleks terimli sonsuz bir matris ve $x = (x_k) \in w$ olmak üzere

$$\sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k \tag{3.1}$$

serisi her bir $n \in \mathbb{N}$ için yakınsak ise

$$(Ax)_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k$$

ile tanımlı $Ax = ((Ax)_n)$ dizisine x dizisinin A matrisi ile yapılan dönüşüm dizisi denir.

(3.1) serisi her $n \in \mathbb{N}$ için yakınsak olduğundan matris dönüşümlerinin lineer olduğu açıktır. (3.1) serisi mevcut yani her $n \in \mathbb{N}$ için seri yakınsak olsun. Bu durumda eğer $\lim_n (Ax)_n = L$ ise $x = (x_k)$ dizisi L değerine A-limitlenebilirdir veya A-toplanabilirdir denir ve $\lim_A x = \lim_n (Ax)_n$ biçiminde gösterilir.

E, w nin bir lineer alt cümlesi olmak üzere $E_A = \{x \; : \; Ax \in E\}$ biçiminde tanımlanır. Şüphesiz burada Ax dizisinin mevcut olduğu kabul edilir. Ayrıca $E_A \subset w_A$ dır. Özel olarak $E = c$ alınırsa $c_A = \{x \; : \; Ax \in c\}$ olur ki c_A uzayına A nın toplanabilirlik alanı adı verilir.

Biri üçgensel biri karesel olmak üzere iki tip matris aşağıda verilsin.

$$T := \begin{pmatrix} a_{11} & 0 & 0 & 0 & \dots \\ a_{21} & a_{22} & 0 & 0 & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & 0 & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$$S := \begin{pmatrix} a_{11} & a_{12} & a_{13} & a_{14} & \dots \\ a_{21} & a_{22} & a_{23} & a_{24} & \dots \\ a_{31} & a_{32} & a_{33} & a_{34} & \dots \\ \dots & \dots & \dots & \dots & \dots \end{pmatrix}$$

$\{x_n\} \in w$ olmak üzere $\{y_n\}$ dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$\text{T matrisi için,} \qquad y_n = \sum_{k=1}^{n} a_{nk} x_k,$$
$$\text{S matrisi için,} \qquad y_n = \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} x_k.$$

Eğer herhangi bir T tipi matrise her n elemanı için $k > n$ olacak şekilde $a_{nk} \neq 0$ elemanları eklenirse bir S tipi matris elde edilir. Bu ekleme dönüşümü değiştirmeyeceğinden herhangi bir T tipi matris dönüşümü S tipi matris dönüşümünün özel hali gibi düşünülebilir. Eğer her iki dönüşüm için $\lim_{n\to\infty} y_n$ limiti mevcutsa bu limite (x_n) dizisinin genelleştirilmiş değeri denir. Eğer (x_n) ile (y_n) aynı değere yakınsar ise bu dönüşüme regülerdir denir.

Teorem 3.1 Bir T tipi matris dönüşümünün regüler olması için gerek ve yeter şart

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \text{Her } k \text{ için } \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0,\\
&b) \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{n} a_{nk} = 1,\\
&c) \quad \text{Her } n \text{ için } \sum_{k=1}^{n} \mid a_{nk} \mid < A.
\end{aligned}
$$

Teorem 3.2 Bir S tipi matris dönüşümünün regüler olması için gerek ve yeter şart

$$
\begin{aligned}
&a) \quad \text{Her } k \text{ için } \lim_{n\to\infty} a_{nk} = 0,\\
&b) \quad \text{Her } n \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} \mid a_{nk} \mid \ \text{ yakınsak},\\
&c) \quad \text{Her } n \text{ için } \sum_{k=1}^{\infty} \mid a_{nk} \mid < A,\\
&d) \quad \lim_{n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} a_{nk} = 1.
\end{aligned}
$$

Tanım 3.3 Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $P_n : X \to K,\ P_n(x) = x_n$ şeklinde tanımlı koordinat fonksiyonellerinin sürekli olduğu $X \subset w$ lineer topolojik uzayına bir K-uzayı denir.

Tanım 3.4 Tam, lineer metrik uzaya Fréchet uzayı denir. H bir Hausdorff lineer topolojik uzay olsun. X lokal konveks Fréchet uzayı ve X, H uzayının lineer altuzayı olmak üzere X in topolojisi, H nın topolojisinin X uzayına kısıtlanmasından daha geniş oluyorsa, yani $I : X \to H,\ I(x) = x$ ile verilen içerme dönüşümü sürekli ise X uzayına bir FH-uzayı denir.

$H = w$ alınırsa elde edilen bir FH uzayına bir FK uzayı denir. Böylece bir FK uzayı sürekli koordinatlara sahip lokal konveks bir Fréchet dizi uzayıdır veya kısaca lokal konveks bir Fréchet K-uzayıdır. FK topolojisi bir tektir yani bir dizi uzayı en çok bir FK topolojisine sahiptir. Ayrıca sürekli koordinatlara sahip bir Banach uzayına da bir BK uzayı denir. Böylece FK uzaylarının BK uzaylarını içerdiği açıktır.

c, c_0, m dizi uzayları $\|x\| = sup_n|x_n|$ normu ile bir FK uzayıdır. w ise bir BK uzayı olmamasına rağmen $p_n(x) = |x_n|$, $(n = 1, 2, \ldots)$ olmak üzere $\{p_n\}$ yarınorm ailesi ile bir FK uzayıdır.

Tanım 3.5 Her $x \in c$ için Ax dönüşüm dizisi mevcut ve $Ax \in c$ ise bu takdirde A matrisine konservatif matris denir. Buna göre

$$A \in (c, c) \Leftrightarrow c \subset c_A$$

dır.

$e^{(n)} \to e$ (zayıf) yani her $f \in X'$ için $\chi(f) = 0$ ise X konservatif FK-uzayına conull uzay denir [2]. c yi içeren bir E FK-uzayı için $e := (1, 1, \ldots) \in W_E$ ise E uzayına conull, aksi durumda ise coregüler denir. Bir konservatif $D = (d_{nk})$ matrisinin conull olması için gerek ve yeter şart $d_k := \lim_n d_{nk}$ $(k \in \mathbb{N})$ olmak üzere $\chi_D := \lim_D e - \sum_k d_k = 0$ olmasıdır.

Tanım 3.6 A ve B iki matris olsun. Eğer $\forall x \in c_A \cap c_B$ olduğunda $\lim_A = \lim_B$ ise A ve B matrisleri tutarlıdır denir.

Teorem 3.7 $D = (d_{nk})$ konservatif bir matris olsun. Bu durumda

a) c altuzayı c_D FK-uzayında kapalı ise $m \cap c_D = c$,

b) $c_D \subset m$ ise $c_D = c$,

c) B ve D matrisleri regüler ve $m \cap c_B \subset c_D$ ise B ve D matrisleri $m \cap c_B$ üzerinde tutarlıdır.

3.1.2. Çift İndisli Diziler

Tanım 3.8 $\mathbb{N}$ doğal sayılar cümlesi ve X boştan farklı bir cümle olmak üzere

$$a : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to X; \quad (m, n) \to a_{mn}$$

şeklinde tanımlanan a fonksiyonuna çift indisli dizi denir.

Kompleks ya da reel tüm skaler çift indisli diziler uzayı Ω ile gösterilir. Çift indisli dizilerin yakınsaklığıyla ilgili en bilinen tanım Pringsheim anlamında yakınsaklıktır. Şimdi Pringsheim anlamında yakınsaklık tanımını verelim.

Tanım 3.9 Her $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ mevcuttur öyleki $m, n \geq N$ olduğunda $|x_{mn} - L| < \varepsilon$ ise kompleks (ya da reel) değerli $x = (x_{mn})$ çift indisli dizisi L değerine Pringsheim anlamında yakınsaktır denir.

Tanım 3.10 $x = (x_{mn})$ çift indisli dizisi L değerine Pringsheim anlamında yakınsak olsun. Bu durumda eğer $\lim\limits_{m} x_{mn}$ $(n \in \mathbb{N})$ ve $\lim\limits_{n} x_{mn}$ $(m \in \mathbb{N})$ mevcut ise (x_{mn}) dizisine regüler yakınsaktır denir.

Tanım 3.11 $x = (x_{mn})$ çift indisli bir dizi olsun. Eğer her $m, n \in \mathbb{N}$ için $|x_{mn}| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ reel sayısı mevcut ise $x = (x_{mn})$ dizisine sınırlıdır denir.

Tanım 3.12 $x = (x_{mn})$ çift indisli bir dizi olsun. Eğer $(j, k), (m, n) \in \mathbb{N}^2$ olmak üzere her $(j, k) > (m, n)$ için $x_{jk} > x_{mn}$ oluyorsa $x = (x_{mn})$ dizisine monoton artan dizi, $(j, k) > (m, n)$ için $x_{jk} < x_{mn}$ oluyorsa $x = (x_{mn})$ dizisine monoton azalan dizi denir.

Tanım 3.13 $x = (x_{mn})$ çift indisli bir dizi ve $(m_k n_l)_{k,l}$ $\mathbb{N}^2$ de kesin artan bir dizi olsun. Bu takdirde $x = (x_{m_k n_l})$ dizisine $x = (x_{mn})$ dizisinin altdizisi denir.

Teorem 3.14 $x = (x_{mn})$ çift indisli yakınsak bir dizi olsun. Bu durumda $x = (x_{mn})$ dizisinin her altdizisi de aynı değere yakınsar.

Teorem 3.15 Reel değerli her çift indisli dizi monoton bir altdiziye sahiptir.

Teorem 3.16 (Bolzano-Weierstrass) Reel değerli sınırlı her çift indisli dizi monoton yakınsak bir altdiziye sahiptir.

Tanım 3.17 $x = (x_{mn})$ çift indisli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için $\exists N \in \mathbb{N}$ sayısı var öyleki $\forall p \geq m \geq N$ ve $\forall q \geq n \geq N$ için $|x_{pq} - x_{mn}| < \varepsilon$ ise bu durumda $x = (x_{mn})$ dizisine bir Cauchy dizisi denir.

Teorem 3.18 (Cauchy Yakınsaklık Kriteri) $x = (x_{mn})$ çift indisli dizisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $x = (x_{mn})$ dizisinin bir Cauchy dizisi olmasıdır.

3.1.3. Çift İndisli Seriler

Tanım 3.19 $x : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{C}$ kompleks terimli çift indisli bir dizi olsun. (y_{mn}) çift indisli dizisi ise

$$y_{mn} := \sum_{i=1}^{m} \left(\sum_{j=1}^{n} x_{ij} \right)$$

biçiminde tanımlansın. Bu durumda (x, y) ikilisine bir çift indisli seri denir ve $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$ veya $\sum x_{mn}$ şeklinde gösterilir. Burada (y_{mn}) dizisine $\sum x_{mn}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi adı verilir.

Tanım 3.20 Eğer $\lim\limits_{m,n\to\infty} y_{mn} = y$ ise $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$ çift indisli serisi y toplamına yakınsaktır denir. Eğer böyle bir limit mevcut değilse $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$ serisine ıraksaktır denir.

Teorem 3.21 $\sum\limits_{m,n=1}^{\infty} x_{mn}$ çift indisli serisi yakınsak ise bu durumda

$$\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$$

sağlanır.

Teorem 3.22 (Cauchy Yakınsaklık Kriteri) $\sum x_{mn}$ çift indisli serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serinin kısmi toplamlar dizisinin bir Cauchy dizisi olmasıdır.

Şimdi

$$\begin{aligned} & u_{11} + u_{12} + u_{13} + \ldots \\ + & u_{21} + u_{22} + u_{23} + \ldots \\ + & u_{31} + u_{32} + u_{33} + \ldots \\ + & \ldots; \end{aligned}$$

serisi verilsin. Bu seri için (x_{mn}) çift indisli dizisi

$$x_{mn} = \sum_{k=1,l=1}^{m,n} u_{kl}$$

biçiminde bir gösterime sahiptir. Dolayısıyla aşağıdaki eşitlikler kolayca elde edilir:

$$\begin{aligned} u_{mn} &= x_{mn} + x_{m-1,n-1} - x_{m,n-1} - x_{m-1,n}, \quad m > 1, n > 1; \\ u_{1n} &= x_{1n} - x_{1,n-1}, \quad n > 1; \\ u_{m1} &= x_{m1} - x_{m-1,1}, \quad m > 1; \\ u_{11} &= x_{11}. \end{aligned}$$

$A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris ve $(x_{mn}) \in \Omega$ olsun. Bu durumda A matrisinin x dizisi ile yapılan dönüşüm dizisi

$$y_{mn} = \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl} x_{kl}$$

biçiminde tanımlanır.

Tek indisli bir seri yakınsak ise dönüşüm dizisi sınırlıdır. Ancak bu çift indisli serilerde geçerli değildir. Örneğin;

$$u_{1n} = 1,$$
$$u_{2n} = -1,$$
$$u_{mn} = 0, \quad m \geq 3$$

serisi yakınsak olmasına rağmen dönüşüm dizisi sınırlı değildir.

3.2. LİNEER DÖNÜŞÜMLERİN REGÜLERLİĞİ

Teorem 3.23 $A = (a_{mnkl})$ bir üçgensel matris olsun. Bu durumda A matrisinin regüler olması için gerek ve yeter şart

a) Her k,l için $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = 0;$

b) $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sum\limits_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl} = 1;$

c) Her l için $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sum\limits_{k=1}^{m} \mid a_{mnkl} \mid = 0;$

d) Her k için $\lim\limits_{m,n\to\infty} \sum\limits_{l=1}^{n} \mid a_{mnkl} \mid = 0;$

e) A herhangi bir sabit olmak üzere $\sum\limits_{k=1,l=1}^{m,n} \mid a_{mnkl} \mid \leq A.$

İspat. Gereklilik: $x = (x_{mn})$ çift indisli dizisi

$$x_{mn} = \begin{cases} 1 \ , \ m = p, n = q \\ 0 \ , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$ olduğu açıktır. O halde $y_{mn} = a_{mnpq}$ olur. Bu nedenle regülerlik şartı gereği $\lim\limits_{m,n\to\infty} y_{mn} = 0$ olması için her p, q için $\lim\limits_{m,n\to\infty} a_{mnpq} = 0$ olmalıdır. Böylece (a) gereklidir.

(x_{mn}) dizisi her m, n için $x_{mn} = 1$ şeklinde tanımlansın. O zaman (y_{mn}) dönüşümü

$$y_{mn} = \sum_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl}$$

olur. Regülerlik şartından $\lim\limits_{m,n\to\infty} y_{mn} = 1$ olacağından (b) gerçeklenir.

Kabul edelim ki (a) gerçeklensin ancak (c) gerçeklenmesin. Yani herhangi bir sabit $l = l_0$ için $\sum\limits_{k=1}^{m} \mid a_{mnkl} \mid$ serisi sıfıra yakınsamasın. Bu durumda belirlenmiş herhangi bir $h > 0$ sabiti için (a_{mnkl}) dizisinin bir alt dizisi vardır öyleki bu altdizinin her elemanı h dan büyüktür. O halde

$$\sum_{k=1}^{m_1} \mid a_{m_1 n_1 k l_0} \mid > h$$

olacak biçimde m_1, n_1 sayıları vardır. Böylece

$$\sum_{k=1}^{m_1} \mid a_{m_2 n_2 k l_0} \mid \leq \frac{h}{2}\ , \qquad \sum_{k=1}^{m_2} \mid a_{m_2 n_2 k l_0} \mid > h$$

olacak şekilde $m_2 > m_1$, $n_2 > n_1$ sayıları seçilebilir. Bu takdirde,

$$\sum_{k=1}^{m_{p-1}} \mid a_{m_p n_p k l_0} \mid < \frac{h}{2^{p-1}}\ , \qquad \sum_{k=1}^{m_p} a_{m_p n_p k l_0} > h \tag{3.2}$$

olacak şekilde $m_p > m_{p-1}$, $n_p > n_{p-1}$ sayıları seçilebilir. Böylece (3.2) eşitsizliklerinden

$$\sum_{k=m_{p-1}+1}^{m_p} \mid a_{m_p n_p k l_0} \mid > h - \frac{h}{2^{p-1}} = h(1 - \frac{1}{2^{p-1}}) \tag{3.3}$$

elde edilir.

Şimdi ise (x_{mn}) çift indisli dizisi

$$x_{mn} = \begin{cases} 0 & , \quad n \neq l_0 \\ sgna_{m_1 n_1 k l_0} & , \quad m \leq m_1 \\ sgna_{m_2 n_2 k l_0} & , \quad m_1 < m \leq m_2 \\ \ldots & \\ sgna_{m_p n_p k l_0} & , \quad m_{p-1} < m \leq m_p \\ \ldots & \end{cases} \tag{3.4}$$

olacak biçimde verilsin. Bu durumda $\lim\limits_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$ olacağı açıktır. Böylece

$$\begin{aligned} y_{m_p n_p} &= \sum_{k=1}^{m_p} a_{m_p n_p k l_0} x_{k l_0} \\ &= \sum_{k=1}^{m_{p-1}} a_{m_p n_p k l_0} x_{k l_0} + \sum_{m_{p-1}+1}^{m_p} a_{m_p n_p k l_0} x_{k l_0} \end{aligned}$$

olup (3.2),(3.3) ve (3.4) den

$$\left| \sum_{k=1}^{m_{p-1}} a_{m_p n_p k l_0} x_{k l_0} \right| \leq \sum_{k=1}^{m_{p-1}} \left| a_{m_p n_p k l_0} \right| \leq \frac{k}{2^{p-1}}$$

$$\sum_{m_{p-1}+1}^{m_p} a_{m_p n_p k l_0} x_{k l_0} = \sum_{m_{p-1}+1}^{m_p} \left| a_{m_p n_p k l_0} \right| \geq h \left(1 - \frac{I}{2^{p-1}} \right)$$

sağlanır. Buradan ise

$$y_{m_p n_p} \geq h \left(1 - \frac{1}{2^{p-1}} \right) - \frac{1}{2^{p-1}} = h \left(1 - \frac{1}{2^{p-2}} \right)$$

olup $\lim y_{mn} \neq 0$ dır. Bu ise (c) nin gerekliliğini verir.

Satır ve sütun rolleri basitçe değiştirilerek (d) nin gerekliliği kolayca görülebilir.

(a) ve (b) şartları sağlansın ancak (e) sağlanmasın. Bu durumda

$$\sum_{k=1,l=1}^{m_1,n_1} |a_{m_1 n_1 k l}| \geq 1$$

olacak şekilde m_1 ve n_1 seçelim. $m_2 > m_1$ ve $n_2 > n_1$ olmak üzere

$$\sum_{k=1,l=1}^{m_1,n_1} |a_{m_2n_2kl}| \leq 2,$$

$$\sum_{k=1,l=1}^{m_2,n_2} |a_{m_2n_2kl}| \geq 2^4$$

ve genel olarak $m_p > m_{p-1}$ ve $n_p > n_{p-1}$ olacak biçimde

$$\begin{aligned} \sum_{k=1,l=1}^{m_{p-1},n_{p-1}} \left|a_{m_pn_pkl}\right| &\leq 2^{p-1}, \\ \sum_{k=1,l=1}^{m_p,n_p} \left|a_{m_pn_pkl}\right| &\geq 2^{2p} \end{aligned} \tag{3.5}$$

olsun. Böylece (3.5) eşitsizliklerinden

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{k=1,\\ l=n_{p-1}+1}}^{m_{p-1},n_p} \left|a_{m_pn_pkl}\right| + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=1}}^{m_p,n_{p-1}} \left|a_{m_pn_pkl}\right| + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=n_{p-1}+1}}^{m_p,n_p} \left|a_{m_pn_pkl}\right| \\ &\geqslant 2^{2p} - 2^{p-1} \geqslant 2^{2p} - 2^{2p-1} = 2^{2p-1} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde

$$m_1 < m_2 < m_3 < \ldots \qquad \text{ve} \qquad n_1 < n_2 < n_3 < \ldots$$

olacak şekilde tamsayıların iki dizisi elde edilir ki

$$\begin{aligned} &\sum_{k=1,l=1}^{m_{p-1},n_{p-1}} \left|a_{m_pn_pkl}\right| \leq 2^{p-1}\ , \qquad p > 1, \\ &\sum_{\substack{k=1,\\ l=n_{p-1}+1}}^{m_{p-1},n_p} \left|a_{m_pn_pkl}\right| + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=1}}^{m_p,n_{p-1}} \left|a_{m_pn_pkl}\right| \\ &+ \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=n_{p-1}+1}}^{m_p,n_p} \left|a_{m_pn_pkl}\right| \leq 2^{2p-1} \end{aligned} \tag{3.6}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

$x = (x_{mn})$ çift indisli dizisi

$$\begin{cases} x_{mn} = sgna_{m_1 n_1 kl} & , k \leq m_1 \ , \ \ l \leq n_1; \\ & \ \ m_1 < k \leq m_2 \ , 1 \leq l \leq n_1 \\ x_{mn} = \frac{1}{2} sgna_{m_2 n_2 kl} & , \ 1 \leq k \leq m_1 \ \ \ , m_1 < l \leq n_2 \\ & \ \ m_1 < k \leq m_2 \ , n_1 < l \leq n_2 \\ \ldots & \\ & \ \ m_{p-1} < k \leq m_p \ , 1 \leq l \leq n_{p-1} \\ x_{mn} = \frac{1}{2^{p-1}} sgna_{m_p n_p kl} & , \ 1 \leq k \leq m_{p-1} \ \ \ , n_{p-1} < 1 \leq n_p \\ & \ \ m_{p-1} < k \leq m_p \ , n_{p-1} < l \leq n_p \\ \ldots & \end{cases}$$

olsun. Bu durumda $\lim x_{mn} = 0$ olduğu açıktır. Böylece

$$\begin{aligned} y_{m_p n_p} &= \sum_{k=1,l=1}^{m_p,n_p} a_{m_p n_p kl} x_{kl} = \sum_{k=1,l=1}^{m_{p-1},n_{p-1}} a_{m_p n_p kl} x_{kl} \\ &+ \sum_{\substack{k=1, \\ l=n_{p-1}+1}}^{m_{p-1},n_p} a_{m_p n_p kl} x_{kl} + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1, \\ l=1}}^{m_p,n_{p-1}} a_{m_p n_p kl} x_{kl} \\ &+ \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1, \\ l=n_{p-1}+1}}^{m_p,n_p} a_{m_p n_p kl} x_{kl} \end{aligned}$$

elde edilir. O halde (3.2.) ve (3.6) eşitsizliklerinden

$$\left| \sum_{k=1,l=1}^{m_{p-1},n_{p-1}} a_{m_p n_p kl} x_{kl} \right| \leq \sum_{k=1,l=1}^{m_{p-1},n_{p-1}} \left| a_{m_p n_p kl} \right| \leq 2^{p-1}$$

ve

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{k=1, \\ l=n_{p-1}+1}}^{m_{p-1},n_p} a_{m_p n_p kl} x_{kl} + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1, \\ l=1}}^{m_p,n_{p-1}} a_{m_p n_p kl} x_{kl} + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1, \\ l=n_{p-1}+1}}^{m_p,n_p} a_{m_p n_p kl} x_{kl} \\ &= \frac{1}{2^{p-1}} \left[\sum_{\substack{k=1, \\ l=n_{p-1}+1}}^{m_{p-1},n_p} |a_{m_p n_p kl}| + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1, \\ l=1}}^{m_p,n_{p-1}} |a_{m_p n_p kl}| + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1, \\ l=n_{p-1}+1}}^{m_p,n_p} |a_{m_p n_p kl}| \right] \\ &\geq \frac{1}{2^{p-1}} 2_{2p-1} = 2^p \end{aligned}$$

elde edilir. Buradan ise

$$|y_{m_p n_p}| \geq 2^p - 2^{p-1} = 2^{p-1}$$

olup

$$\lim_{p\to\infty} |y_{m_p n_p}| = \infty$$

sağlanır. Böylece (y_{mn}) dizisinin $(y_{m_p n_p})$ alt dizisi yakınsak olmadığından (y_{mn}) dizisi de yakınsak değildir. Bu ise (e) nin gerekliliğini verir.

Yeterlilik: Yakınsak (x_{mn}) dizisinin limiti x olsun. Bu durumda

$$y_{mn} - x = \sum_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl} x_{kl} - x$$

olup (b) den

$$\sum_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl} + r_{mn} = 1 \tag{3.7}$$

elde edilir. Buradan da $\lim\limits_{m,n\to\infty} r_{mn} = 0$ eşitliği sağlanır. Böylece

$$y_{mn} - x = \sum_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl}(x_{kl} - x) - r_{mn} x$$

olup

$$\begin{aligned} \mid y_{mn} - x \mid \leq & \left| \sum_{k=1,l=1}^{p,q} a_{mnkl}(x_{kl} - x) \right| + \left| \sum_{k=1,l=q+1}^{p,n} a_{mnkl}(x_{kl} - x) \right| \\ & + \left| \sum_{k=p+1,l=1}^{m,q} a_{mnkl}(x_{kl} - x) \right| + \left| \sum_{k=p+1,l=q+1}^{m,n} a_{mnkl}(x_{kl} - x) \right| \\ & + \mid r_{mn} x \mid \end{aligned} \tag{3.8}$$

elde edilir. $x_{mn} \to x$ olduğundan yeterince büyük p ve q sayıları seçilebilir öyleki yeterince küçük herhangi bir ε sayısı için

$$\mid x_{kl} - x \mid < \frac{\varepsilon}{5A} \qquad k \geq p,\ l \geq q$$

sağlanır.

$\forall k, l$ için $\mid x_{kl} - x \mid$ ifadesinin en büyük değeri L olsun. Öyle M ve N sayıları seçilebilir ki $m \geq M$ ve $n \geq N$ olduğunda Teorem 3.23 (a) şartından $\sum_{k=1,l=1}^{p,q} \mid a_{mnkl} \mid < \frac{\varepsilon}{5pqL}$, (3.7) eşitsizliğinden $\mid r_{mn}x \mid < \frac{\varepsilon}{5|x|}$, Teorem 3.23 (c) şartından $\sum_{k=1}^{m} \mid a_{mnkl} \mid < \frac{\varepsilon}{5qL}$, $l = 1, 2, \ldots, q$ ve Teorem 3.23 (d) şartından $\sum_{l=1}^{n} \mid a_{mnkl} \mid < \frac{\varepsilon}{5pL}$, $k = 1, 2, \ldots, p$ sağlanır.

Böylece $m \geq M$ ve $n \geq N$ olduğunda

$$\begin{aligned} \mid y_{mn} - x \mid &\leq \frac{\varepsilon}{5pqL} pqL + \frac{\varepsilon}{5pL} pL + \frac{\varepsilon}{5qL} qL + \frac{\varepsilon}{5A} + \frac{\varepsilon}{5|x|} \\ &= \varepsilon \end{aligned} \tag{3.9}$$

gerçeklenir. Buradan ise $\lim_{m,n \to \infty} y_{mn} - x = 0$ ya da $y_{mn} \to x$ bulunur. Bu da ispatı tamamlar. ■

Teorem 3.23 de (c) ve (d) şartları kaldırılamaz. Örneğin

$$a_{mnkl} = \frac{1}{2^k n}$$

seçilmesi durumunda (a), (b), (c) ve (e) şartları sağlanırken (d) sağlanmaz.

Kabul edelim ki dönüşümün (a_{mnkl}) elemanları pozitif reel sayılar olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1,l=1}^{m,n} |a_{mnkl}| = \sum_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl}$$

eşitliği gerçeklenir. Bu durum tek indisli dizilerdeki gibi değildir. Bu nedenle Teorem 3.23 de (e) şartı, (b) şartından elde edilmez. Buradan da yukarıdaki varsayımı uygulayarak dönüşümün regülerliği için gereken şartın basitleştirilemeyeceği görülür. Böylece

$$y_{mn} = \sum_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl} x_{kl}$$

ve $|x_{kl}| \leq K$ olmak üzere

$$|y_{mn}| \leq \sum_{k=1,l=1}^{m,n} |a_{mnkl}x_{kl}| \leq \sum_{k=1,l=1}^{m,n} |a_{mnkl}|K \leq AK$$

elde edilir.

Sonuç olarak, herhangi bir $x = (x_{mn})$ çift indisli dizisi T tipi regüler bir dönüşümle (y_{mn}) sınırlı dizisine dönüştürülebilir.

S tipi dönüşümün regülerliğini göz önünde bulundurmadan önce aşağıdaki lemmaları ispatlayalım.

Lemma 3.24 $a_{mn} \geq 0$ olmak üzere $\sum\limits_{m=1,n=1}^{\infty,\infty} a_{mn}$ serisi ıraksak ise bu durumda

i) $\varepsilon_{mn} \geq 0$,

ii) $\lim\limits_{m,n} \varepsilon_{mn} = 0$,

iii) $\sum\limits_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl}\varepsilon_{kl}$ ıraksak

olacak şekilde sınırlı bir ε_{mn} dizisi mevcuttur.

İspat. $S_{mn} = \sum\limits_{k=1,l=1}^{m,n} a_{kl}$ olsun. Bu durumda $S_{m+1,n+1} \geq S_{m,n+1} \geq S_{mn}$, $S_{m+1,n+1} \geq S_{m+1,n} \geq S_{mn}$ sıralaması gerçeklenir ve dolayısıyla $\lim\limits_{m,n} S_{mn} = \infty$ olur. Şimdi ise ε_{mn} dizisini

$$\varepsilon_{mn} = \begin{cases} \frac{1}{S_{mn}} & , S_{mn} \neq 0 \\ 0 & , S_{mn} = 0 \end{cases}$$

olacak şekilde tanımlayalım.

i) ε_{mn} sınırlıdır ve $\varepsilon_{mn} \geq 0$

ve

ii) $\lim\limits_{m,n} \varepsilon_{mn} = 0$ dır.

Herhangi m ve n değerlerinden ileriye doğru

$$\varepsilon_{mn} \geq \varepsilon_{m+1,n} \geq \varepsilon_{m+1,n+1} \ , \quad \varepsilon_{mn} \geq \varepsilon_{m,n+1} \geq \varepsilon_{m+1,n+1}$$

olur. $\varepsilon_{mn} \neq 0$ olacak şekilde sabit m, n için

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m+1,l=n+1}^{p,q} a_{kl}\varepsilon_{kl} + \sum_{k=1,l=n+1}^{m,q} a_{kl}\varepsilon_{kl} + \sum_{k=m+1,l=1}^{p,n} a_{kl}\varepsilon_{kl} \\ &\geq \varepsilon_{m+p,n+q}\left[\sum_{k=m+1,l=n+1}^{p,q} a_{kl} + \sum_{k=1,l=n+1}^{m,q} a_{kl} + \sum_{k=m+1,l=1}^{p,n} a_{kl}\right] \\ &= \varepsilon_{m+p,n+q}(S_{m+p,n+q} - S_{mn}) \end{aligned} \tag{3.10}$$

elde edilir.

Şimdi yeterince büyük p, q sayıları için

$$S_{mn} \leq \frac{1}{2} S_{m+p,n+q}$$

eşitsizliği gerçeklensin. Bu durumda (3.10) eşitsizliğinden

$$\begin{aligned} &\sum_{k=m+1,l=n+1}^{p,q} a_{kl}\varepsilon_{kl} + \sum_{k=1,l=n+1}^{m,q} a_{kl}\varepsilon_{kl} + \sum_{k=m+1,l=1}^{p,n} a_{kl}\varepsilon_{kl} \\ &\geq \varepsilon_{m+p,n+q} S_{m+p,n+q} = \frac{1}{2} \end{aligned}$$

elde edilir. $m_1 = p$, $n_1 = q$ alınarak bu yöntem tekrarlanabilir. Bu yöntem sonsuz sayıda uygulanabildiğinden

$$\sum_{m=1,n=1}^{\infty,\infty} a_{mn}\varepsilon_{mn} = \infty$$

elde edilir. ■

Lemma 3.25 Eğer $\sum_{m=1,n=1}^{\infty,\infty} a_{mn}$ serisi mutlak yakınsak değilse bu durumda $x_{m,n} \to 0$ ve $\sum_{m=1,n=1}^{\infty,\infty} a_{mn}x_{mn}$ çift indisli serisinin ∞ a ıraksadığı sınırlı bir (x_{mn}) dizisi mevcuttur.

İspat. Hipotezden $\sum\limits_{m=1,n=1}^{\infty,\infty}|a_{mn}|$ serisi ıraksaktır. Bu seriyle ilgili olarak Lemma 3.24 deki gibi bir ε_{mn} dizisi seçilsin. Ayrıca $x_{mn} = \varepsilon_{mn} sgn a_{mn}$ olacak şekilde tanımlayalım. Bu durumda

$$a_{mn}x_{mn} = a_{mn}\varepsilon_{mn} sgn a_{mn} = \varepsilon_{mn}|a_{mn}|$$

olup Lemma 3.24 den $\sum\limits_{m=1,n=1}^{\infty,\infty} a_{mn}x_{mn}$ serisi ıraksaktır. ■

Şimdi S tipi matris dönüşümü için regülerlik şartını verelim.

Teorem 3.26 Sınırlı bir (x_{mn}) dizisinin bir x limit noktasına sahip olduğunda $\sum\limits_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl}x_{kl}$ serisinin yakınsak ve $\lim\limits_{m,n\to\infty}\sum\limits_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl}x_{kl} = x$ olması için gerek ve yeter şart

a) Her k ve l için $\lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = 0$,

b) Her m ve n için $\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty}|a_{mnkl}|$ yakınsaktır,

c) $\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl} = 1$,

d) Her l için $\lim_{m,n\to\infty}\sum_{k=1}^{\infty}|a_{mnkl}| = 0$,

e) Her k için $\lim_{m,n\to\infty}\sum_{l=1}^{\infty}|a_{mnkl}| = 0$

ve

f) Her m ve n için $\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty}|a_{mnkl}| \leq A$

olmasıdır.

İspat. Gereklilik: a) (x_{mn}) dizisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$x_{mn} = \begin{cases} 1 \ , \ m = p, n = q \\ 0 \ , \text{ diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu durumda $y_{mn} = a_{mnpq}$ olup hipotezden (a) nın gerekliliği elde edilir.

b) m ve n herhangi sabit sayılar olmak üzere $\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{mnkl}|$ serisi ıraksak olsun. Bu takdirde Lemma 3.25 den limiti sıfır olan sınırlı bir (x_{mn}) dizisi vardır öyleki $\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl}x_{kl}$ serisi ıraksaktır. Bu da bizim hipotezimizle çelişir. Bu nedenle (b) gereklidir.

c) (x_{mn}) dizisi her m, n için $x_{mn} = 1$ olacak şekilde seçilsin. Bu takdirde $y_{mn} = \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl}$ olur. Bu ise (c) nin gerekliliğini verir.

d) (a) ve (b) sağlansın ancak (d) sağlanmasın. Herhangi l_0 tamsayısı için $\sum_{k=1}^{\infty} |a_{mnkl_0}|$ çift indisli dizisi sıfıra yakınsamadığından yeterince küçük $h > 0$ için bu dizinin bir alt dizisi vardır öyleki her elemanı h dan büyüktür.

Keyfi m_1, n_1 ve r_1 sayıları için $m_2 > m_1, n_2 > n_1$ seçilsin bu durumda (a) dan

$$\sum_{k=1}^{r_1} |a_{m_2n_2kl_0}| \leq \frac{h}{8},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{m_2n_1kl_0}| \geq h;$$

ve $r_2 > r_1$ seçilsin bu durumda (b) den

$$\sum_{k=r_2+1}^{\infty} |a_{m_2n_2kl_0}| \geq \frac{h}{8}$$

elde edilir. Şimdi de $m_p > m_{p-1}$ ve $n_p > n_{p-1}$ seçilsin bu durumda (a) dan

$$\sum_{k=1}^{r_{p-1}} |a_{m_pn_pkl_0}| \leq \frac{h}{8},$$
$$\sum_{k=1}^{\infty} |a_{m_pn_pkl_0}| \geq h; \tag{3.11}$$

ve $r_p > r_{p-1}$ seçilsin bu durumda (b) den

$$\sum_{k=r_{p-1}+1}^{\infty} |a_{m_pn_pkl_0}| \geq \frac{h}{8} \tag{3.12}$$

olup (3.11) ve (3.12) den

$$\sum_{k=r_{p-1}+1}^{r_p} |a_{m_p n_p k l_0}| \geq \frac{3}{4}h \tag{3.13}$$

elde edilir.

(x_{mn}) çift indisli dizisi

$$x_{kl} = \begin{cases} 0 & , l = l_0 \\ sgna_{m_1 n_1 k l_0} & , k \leq r_1 \\ sgna_{m_2 n_2 k l_0} & , r_1 < k \leq r_2 \\ \dots & \\ sgna_{m_p n_p k l_0} & , r_{p-1} < k \leq r_p \\ \dots & \end{cases} \tag{3.14}$$

olarak tanımlansın. Bu durumda $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$ olduğu açıktır. Ayrıca (3.11) ve (3.12) den

$$\left| \sum_{k=1}^{r_{p-1}} a_{m_p n_p k l_0} x_{k l_0} \right| \leq \sum_{k=1}^{r_{p-1}} |a_{m_p n_p k l_0}| \leq \frac{h}{8}$$

ve (3.13) ve (3.14) den

$$\left| \sum_{k=r_{p-1}+1}^{r_p} a_{m_p n_p k l_0} x_{k l_0} \right| = \sum_{k=r_{p-1}+1}^{r_p} |a_{m_p n_p k l_0}| \geq \frac{3}{4}h$$

elde edilir. Böylece

$$\begin{aligned} |y_{mn}| &= \left| \sum_{k=1}^{\infty} a_{m_p n_p k l_0} x_{k l_0} \right| \\ &\geq \sum_{k=r_{p-1}+1}^{r_p} |a_{m_p n_p k l_0} x_{k l_0}| - \left| \sum_{k=1}^{r_{p-1}} a_{m_p n_p k l_0} x_{k l_0} \right| \\ &\quad - \left| \sum_{k=r_p+1}^{\infty} a_{m_p n_p k l_0} x_{k l_0} \right| \\ &\geq \frac{3}{4}h - \frac{2h}{8} = \frac{h}{2} \end{aligned}$$

eşitsizliği gerçeklenir. Buradan $\lim\limits_{m,n\to\infty} y_{mn} \neq 0$ olup (d) şartının gerekliliği görülür.

Benzer yöntemle (e) nin gerekliliği de ispatlanabilir.

(a) ve (b) sağlansın ancak (f) sağlanmasın. Rastgele m_1, n_1, r_1, s_1 sayıları için $m_2 > m_1$ ve $n_2 > n_1$ seçelim bu durumda (a) dan

$$\sum_{k=1,l=1}^{m_1,n_1} |a_{m_2n_2kl}| \leq 2,$$
$$\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{m_2n_2kl}| \geq 2^4;$$

ve $r_2 > r_1, s_2 > s_1$ için (b) den

$$\sum_{\substack{k=r_2+1,\\ l=s_2+1}}^{\infty,\infty} |a_{m_2n_2kl}| + \sum_{\substack{k=1,\\ l=s_2+1}}^{r_2,\infty} |a_{m_2n_2kl}| + \sum_{\substack{k=r_2+1,\\ l=1}}^{\infty,s_2} |a_{m_2n_2kl}| \leq 2^2$$

sağlanır. $m_3 > m_2$ ve $n_3 > n_2$ için

$$\sum_{k=1,l=1}^{m_2,n_2} |a_{m_3n_3kl}| \leq 2^2,$$
$$\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{m_3n_3kl}| \geq 2^6;$$

ve $r_3 > r_2, s_3 > s_2$ için

$$\sum_{\substack{k=r_3+1,\\ l=s_3+1}}^{\infty,\infty} |a_{m_3n_3kl}| + \sum_{\substack{k=1,\\ l=s_3+1}}^{r_3,\infty} |a_{m_3n_3kl}| + \sum_{\substack{k=r_3+1,\\ l=1}}^{\infty,s_3} |a_{m_3n_3kl}| \leq 2^4$$

gerçeklenir. Genel haliyle $m_p > m_{p-1}, n_p > n_{p-1}$ için

$$\sum_{k=1,l=1}^{m_{p-1},n_{p-1}} |a_{m_pn_pkl}| \leq 2^{p-1},$$
$$\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{m_pn_pkl}| \geq 2^{2p}; \tag{3.15}$$

ve $r_p > r_{p-1}, s_p > s_{p-1}$ için

$$\sum_{\substack{k=r_{p-1}+1,\\ l=s_{p-1}+1}}^{\infty,\infty} |a_{m_p n_p kl}| + \sum_{\substack{k=1,\\ l=s_{p-1}+1}}^{r_p,\infty} |a_{m_p n_p kl}| + \sum_{\substack{k=r_{p-1}+1,,\\ l=1}}^{\infty,s_p} |a_{m_p n_p kl}| \leq 2^{2p-2} \tag{3.16}$$

sağlanır. Bu eşitsizliklerden

$$\begin{aligned} &\sum_{\substack{k=r_{p-1}+1,\\ l=s_{p-1}+1}}^{r_p,s_p} |a_{m_p n_p kl}| + \sum_{\substack{k=1,\\ l=s_{p-1}+1}}^{r_{p-1},s_p} |a_{m_p n_p kl}| + \sum_{\substack{k=r_{p-1}+1,\\ l=1}}^{r_p,s_{p-1}} |a_{m_p n_p kl}| \\ &\geq 2^{2p} - 2^{2p-2} - 2^{p-1} = 2^{p-1}(2^{p+1} - 2^{p-1} - 1) \\ &\geq 2^{p-1}(2^{p+1} - 2^{p-1} - 2^{p-1}) = 2^{2p-1} \end{aligned} \tag{3.17}$$

eşitsizliği elde edilir.

Şimdi aşağıdaki gibi bir (x_{mn}) çift indisli dizisi tanımlansın:

$$x_{kl} = \begin{cases} sgn a_{m_1 n_1 kl} & , k \leq m_1, l \leq n_1 \\ \frac{1}{2} sgn a_{m_2 n_2 kl} & , \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq k \leq m_1 \quad , n_1 < l \leq n_2 \\ m_1 < k \leq m_2 \ , 1 \leq l \leq n_1 \\ m_1 < k \leq m_2 \ , n_1 < l \leq n_2 \end{array} \right\} \\ \ldots & \\ \frac{1}{2^{p-1}} sgn a_{m_p n_p kl} & , \left\{ \begin{array}{l} 1 \leq k \leq m_{p-1} \quad , n_{p-1} < l \leq n_p \\ m_{p-1} < k \leq m_p \ , 1 \leq l \leq n_{p-1} \\ m_{p-1} < k \leq m_p \ , n_{p-1} < l \leq n_p \end{array} \right\} \end{cases} \tag{3.18}$$

Burada $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = 0$ olduğu açıktır. (3.14), (3.15), (3.16) ve (3.17) den

$$\left| \sum_{k=1,l=1}^{m_{p-1},n_{p-1}} a_{m_p n_p kl} x_{kl} \right| \leq \sum_{k=1,l=1}^{m_{p-1},n_{p-1}} \left| a_{m_p n_p kl} \right| \leq 2^{p-1}; \tag{3.19}$$

$$\begin{aligned}
&\sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=n_{p-1}+1}}^{m_p,n_p} a_{m_pn_pkl}x_{kl} + \sum_{\substack{k=1,\\ l=n_{p-1}+1}}^{m_{p-1},n_p} a_{m_pn_pkl}x_{kl} + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=1}}^{m_p,n_{p-1}} a_{m_pn_pkl}x_{kl} \\
&= \frac{1}{2^{p-1}}\left[\sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=n_{p-1}+1}}^{m_p,n_p} |a_{m_pn_pkl}| + \sum_{\substack{k=1,\\ l=n_{p-1}+1}}^{m_{p-1},n_p} |a_{m_pn_pkl}| + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=1}}^{m_p,n_{p-1}} |a_{m_pn_pkl}|\right] \\
&\geq \frac{1}{2^{p-1}}2^{2p-1} = 2^p; \qquad (3.20)
\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}
&\left|\sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=n_p+1}}^{\infty,\infty} a_{m_pn_pkl}x_{kl} + \sum_{\substack{k=1,\\ l=n_p+1}}^{m_p,\infty} a_{m_pn_pkl}x_{kl} + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=1}}^{\infty,n_p} a_{m_pn_pkl}x_{kl}\right| \\
&= \frac{1}{2^{p}}\left[\sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=n_p+1}}^{\infty,\infty} |a_{m_pn_pkl}| + \sum_{\substack{k=1,\\ l=n_p+1}}^{m_p,\infty} |a_{m_pn_pkl}| + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=1}}^{\infty,n_p} |a_{m_pn_pkl}|\right] \\
&\geq \frac{1}{2^{p}}2^{2p-2} = 2^{p-2} \qquad (3.21)
\end{aligned}$$

elde edilir.

(3.19), (3.20) ve (3.21) den

$$\begin{aligned}
|y_{m_pn_p}| &= \left|\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{m_pn_pkl}x_{kl}\right| \\
&\geq \left|\sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=n_p+1}}^{m_p,n_p} a_{m_pn_pkl}x_{kl} + \sum_{\substack{k=1,\\ l=n_p+1}}^{m_{p-1},n_p} a_{m_pn_pkl}x_{kl} + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=1}}^{m_p,n_{p-1}} a_{m_pn_pkl}x_{kl}\right| \\
&- \left|\sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=n_p+1}}^{\infty,\infty} a_{m_pn_pkl}x_{kl} + \sum_{\substack{k=1,\\ l=n_p+1}}^{m_p,\infty} a_{m_pn_pkl}x_{kl} + \sum_{\substack{k=m_{p-1}+1,\\ l=1}}^{\infty,n_p} a_{m_pn_pkl}x_{kl}\right| \\
&- \left|\sum_{k=1,l=1}^{m_pn_p} a_{m_pn_pkl}x_{kl}\right| \\
&\geq 2^p - 2^{p-1} - 2^{p-2} = 2^{p-2}
\end{aligned}$$

elde edilir. Ayrıca

Böylece $\lim\limits_{p\to\infty}|y_{m_p n_p}| = +\infty$ olup (y_{mn}) dizisinin sonlu limiti yoktur. Yani (f) gereklidir.

Yeterlilik: Dönüşüm dizisi tanımından

$$y_{mn} - x = \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl}x_{kl} - x$$

yazılabilir. $\lim\limits_{m,n\to\infty} r_{mn} = 0$ olmak üzere (c) den

$$\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl} + r_{mn} = 1$$

eşitliği sağlanır. Bu nedenle

$$y_{mn} - x = \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl}(x_{kl} - x) + r_{mn}x;$$

$$|y_{mn} - x| \leq \left|\sum_{k=1,l=1}^{p,q} a_{m_p n_p kl}x_{kl}\right| + \left|\sum_{\substack{k=1,\\ l=q+1}}^{p,\infty} a_{m_p n_p kl}x_{kl}\right| + \left|\sum_{\substack{k=p+1,\\ l=1}}^{\infty,q} a_{m_p n_p kl}x_{kl}\right| + \left|\sum_{\substack{k=p+1,\\ l=q+1}}^{\infty,\infty} a_{m_p n_p kl}x_{kl}\right| + |r_{mn}x|$$

elde edilir. $\varepsilon > 0$ olmak üzere yeterince büyük p, q seçilebilir öyleki $k > p, l > q$ için

$$|x_{kl} - x| \leq \frac{\varepsilon}{5A}$$

olur. Her k, l için $|x_{kl} - x|$ sayılarının en büyük değeri L olsun. (a), (d) ve (e) koşullarını kullanarak M, N tamsayıları seçilebilir öyleki $m \geq M$, $n \geq N$

olduğunda

$$\begin{aligned}
&(i) \quad \sum_{k=1,l=1}^{p,q} |a_{m_p n_p kl}| < \frac{\varepsilon}{5pqL}; \\
&(ii) \quad \sum_{l=1}^{\infty} |a_{m_p n_p kl}| < \frac{\varepsilon}{5pL} \quad (k = 1, 2, \ldots, p); \\
&(iii) \quad \sum_{k=1}^{\infty} |a_{m_p n_p kl}| < \frac{\varepsilon}{5qL} \quad (l = 1, 2, \ldots, q); \\
&(iv) \quad |r_{mn}| < \frac{\varepsilon}{5|x|}
\end{aligned}$$

eşitsizlikleri sağlanır. Buradan $m > M$ ve $n > N$ olmak üzere

$$|y_{m,n} - x| \leq \frac{\varepsilon}{5pqL} pqL + \frac{\varepsilon}{5pL} pL + \frac{\varepsilon}{5qL} qL + \frac{\varepsilon}{5|x|}|x| + \frac{\varepsilon}{5A} A = \varepsilon$$

elde edilir. O halde

$$\lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = x$$

olup ispat tamamlanır. ■

Burada belirtelim ki,

$$y_{mn} = \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl} x_{kl}$$

eşitliğinin mutlak değeri alınarak $|x_{kl}| \leq K$ olmak üzere

$$|y_{mn}| \leq \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl} x_{kl} \leq \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{mnkl}| K \leq AK$$

elde edilir.

Sonuç olarak, bir (x_{mn}) sınırlı dizisi bir S tipi regüler dönüşüm ile (y_{mn}) sınırlı dizisine dönüştürülür.

Önceki teoremin ispatında t nin değişim aralığı olarak t_0 limitine sahip bir T nokta kümesi ile m nin değişim aralığı olarak $1, 2, 3, \ldots$ tamsayılarının kümesi ve v nin değişim aralığı olarak v_0 limitine sahip bir V nokta kümesi ile n nin değişim aralığı olarak $1, 2, 3, \ldots$ tamsayılarının kümesi yer değiştirilirse teoremin aşağıda verilen genelleştirilmiş hali elde edilir.

Teorem 3.27 T ve V reel ya da kompleks düzlemde sırasıyla t_0 ve v_0 (sonlu ya da sonsuz) limit noktalarına sahip iki nokta kümesi olmak üzere $t \in T$, $v \in V$ olsun. $k = 1, 2, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots$ için $a_{kl}(t, v)$ tanımlansın. Bu durumda (x_{mn}) sınırlı dizisi x sonlu limitine sahip olduğunda her (t, v) çifti için

$$\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl}(t,v)x_{kl}$$

mevcut ve

$$\lim_{t\to t_0, v\to v_0} \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl}(t,v)x_{kl} = x$$

olması için gerek ve yeter şart

$$(a) \quad \text{Her } \ k, l \ \text{ için } \quad \lim_{t\to t_0, v\to v_0} a_{kl}(t,v) = 0;$$

$$(b) \quad \text{Her } \ t, v \ \text{ için } \quad \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{kl}(t,v)| \ \text{ yakınsak;}$$

$$(c) \quad \lim_{t\to t_0, v\to v_0} \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl}(t,v) = 1;$$

$$(d) \quad \text{Her } \ l \ \text{ için } \quad \lim_{t\to t_0, v\to v_0} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kl}(t,v)| = 0;$$

$$(e) \quad \text{Her } \ k \ \text{ için } \quad \lim_{t\to t_0, v\to v_0} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}(t,v)| = 0;$$

$$(f) \quad \text{Her } \ t, v \ \text{ için } \quad \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{kl}(t,v)| < A.$$

şartlarının sağlanmasıdır.

Teorem 3.28 Reel veya kompleks düzlemde sırasıyla t_0 ve v_0 limit noktalarına sahip iki nokta kümesi T ve V olmak üzere $t \in T, v \in V$ olsun ve $k = 1, 2, \ldots$, $l = 1, 2, \ldots$ için $a_{kl}(t, v)$ tanımlansın. Bu durumda (x_{mn}) sınırlı dizisi sonlu limite sahip olduğunda her (t, v) çifti için

$$\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl}(t, v) x_{kl}$$

mevcut ve λ sabit olmak üzere

$$\lim_{t \to t_0, v \to v_0} \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl}(t, v) x_{kl} = \lambda x$$

olması için gerek ve yeter şart

$$\begin{aligned}
&(a) \quad \text{Her } \ k, l \ \text{ için } \lim_{t \to t_0, v \to v_0} a_{kl}(t, v) = 0; \\
&(b) \quad \text{Her } \ t, v \ \text{ için } \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{kl}(t, v)| \ \text{ yakınsak;} \\
&(c) \quad \lim_{t \to t_0, v \to v_0} \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl}(t, v) = \lambda; \\
&(d) \quad \text{Her } \ l \ \text{ için } \lim_{t \to t_0, v \to v_0} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{kl}(t, v)| = 0; \\
&(e) \quad \text{Her } \ k \ \text{ için } \lim_{t \to t_0, v \to v_0} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{kl}(t, v)| = 0; \\
&(f) \quad \text{Her } \ t, v \ \text{ için } \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{kl}(t, v)| < A.
\end{aligned}$$

şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. $\lambda \neq 0$ olduğunda

$$b_{kl}(t, v) = \frac{a_{kl}(t, v)}{\lambda}$$

tanımlayarak bu problem önceki teoreme indirgenir.

$\lambda = 0$ için bu ispat aşağıdaki şekilde tanımlanan dönüşümle önceki teoreme indirgenir.

$\varepsilon_1, \varepsilon_2, \ldots$ reel sayıların monoton azalan dizisi olmak üzere $\varepsilon_n \to 0$ olsun. Bu takdirde

a) t_0, v_0 sonlu limit noktaları ise

$$\varepsilon_n \leq |t - t_0| + |v - v_0| < \varepsilon_{n-1} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_0 = +\infty$$

için

$$b_{nn}(t,v) = a_{nn}(t,v) + 1$$

$$b_{kl}(t,v) = a_{kl}(t,v) \qquad , \left\{ \begin{array}{l} k \neq n \ , \ l \neq n \\ k = n \ , \ l \neq n \\ k \neq n \ , \ l = n \end{array} \right\}$$

tanımlanır.

b) Eğer t_0 sonlu, v_0 sonsuz ise bu durumda

$$\varepsilon_n \leq |t - t_0| + \frac{1}{|v|} < \varepsilon_{n-1} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_0 = +\infty$$

için

$$b_{nn}(t,v) = a_{nn}(t,v) + 1$$

$$b_{kl}(t,v) = a_{kl}(t,v) \qquad , \left\{ \begin{array}{l} k \neq n \ , \ l \neq n \\ k = n \ , \ l \neq n \\ k \neq n \ , \ l = n \end{array} \right\}$$

tanımlanır.

c) Eğer t_0 sonsuz, v_0 sonlu ise bu durumda

$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{|t|} + |v - v_0| < \varepsilon_{n-1} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_0 = +\infty$$

için

$$b_{nn}(t,v) = a_{nn}(t,v) + 1$$

$$b_{kl}(t,v) = a_{kl}(t,v) \qquad , \left\{ \begin{array}{l} k \neq n \ , \ l \neq n \\ k = n \ , \ l \neq n \\ k \neq n \ , \ l = n \end{array} \right\}$$

tanımlanır.

d) Eğer t_0 ve v_0 sonsuz ise bu durumda

$$\varepsilon_n \leq \frac{1}{|t|} + \frac{1}{|v|} < \varepsilon_{n-1} \quad \text{ve} \quad \varepsilon_0 = +\infty$$

için

$$b_{nn}(t,v) = a_{nn}(t,v) + 1$$

$$b_{kl}(t,v) = a_{kl}(t,v) \qquad , \left\{ \begin{matrix} k \neq n \ , \ l \neq n \\ k = n \ , \ l \neq n \\ k \neq n \ , \ l = n \end{matrix} \right\}$$

tanımlanır.

$a_{kl}(t,v)$ dönüşümü teoremin şartlarını sağladığında tanımlanan $b_{kl}(t,v)$ dönüşümü regülerdir. Eğer

$$y(t,v) = \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} b_{kl}(t,v)x_{kl} = \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl}(t,v)x_{kl} + x_{nn}$$

yazarsak önceki teorem yardımıyla

$$\lim_{t\to t_0, v\to v_0} y(t,v) = \lim_{t\to t_0 v\to v_0} \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} b_{kl}(t,v)x_{kl} = x$$

gerçeklenir. Buradan

$$\lim_{t\to t_0, v\to v_0} \left[\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl}(t,v)x_{kl} + x_{nn} \right] = x$$

olup

$$\lim_{t\to t_0, v\to v_0} \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl}(t,v)x_{kl} + x = x$$

gerçeklenir. Dolayısıyla

$$\lim_{t\to t_0, v\to v_0} \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl}(t,v)x_{kl} = 0$$

elde edilir ki bu da ispatı tamamlar. ∎

Teorem 3.29 Bir regüler T tipi dönüşümün tümüyle regüler olması için gerek ve yeter şart her m, n için $k > k_0, l > l_0$ olduğunda $a_{mnkl} > 0$ olacak biçimde k_0, l_0 sayılarının mevcut olmasıdır.

Teorem 3.30 Reel sayıların regüler bir T tipi dönüşümünün üst (alt) limiti L (l) olan (x_{mn}) sınırlı dizisini, üst (alt) limiti L' (l') olan (y_{mn}) sınırlı dizisine dönüştürmesi için gerek ve yeter şart dönüşümün tümüyle regüler olmasıdır.

Teorem 3.31 Bir T tipi dönüşümün sınırlı (x_{mn}) dizisini sınırlı yakınsak (y_{mn}) dizisine dönüştürmesi için gerek ve yeter şart aşağıdaki şartların sağlanmasıdır.

$$(a) \quad \text{Her } k, l \text{ için } \lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = c_{kl} \text{ mevcut;}$$

$$(b) \quad \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl} = a \text{ mevcut;}$$

$$(c) \quad \text{Her } m, n \text{ için } \sum_{k=1,l=1}^{m,n} |a_{mnkl}| < A;$$

$$(d) \quad \text{Her } l \text{ için } \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |a_{mnkl} - c_{kl}| = 0;$$

$$(e) \quad \text{Her } k \text{ için } \lim_{m,n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} |a_{mnkl} - c_{kl}| = 0.$$

Bu şartlar sağlandığında $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = x$ ve $\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} c_{kl}(x_{kl} - x)$ serisi her zaman yakınsak olmak üzere

$$\lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = ax + \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} c_{kl}(x_{kl} - x)$$

elde edilir.

Teorem 3.32 Sınırlı bir (x_{mn}) dizisi yakınsak olduğunda

$$y_{mn} = \sum_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl} x_{kl}$$

şeklinde tanımlanan (y_{mn}) kısmi toplamlar dizisinin yakınsak, limitinin de sadece

(x_{mn}) dizisinin limitine bağlı olup, (x_{mn}) dizisinin elemanlarına bağlı olmaması için gerek ve yeter şart

$$(a)\quad \text{Her}\ \ k,l\ \ \text{için}\ \ \lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = 0;$$

$$(b)\quad \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl}\ \ \text{mevcut};$$

$$(c)\quad \text{Her}\ \ k,l\ \ \text{ve sabit}\ \ A\ \ \text{için}\ \ \sum_{k=1,l=1}^{m,n} |a_{mnkl}| < A;$$

$$(d)\quad \text{Her}\ \ l\ \ \text{için}\ \ \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1}^{m} |a_{mnkl}| = 0;$$

$$(e)\quad \text{Her}\ \ k\ \ \text{için}\ \ \lim_{m,n\to\infty} \sum_{l=1}^{n} |a_{mnkl}| = 0$$

şartlarının sağlanmasıdır. Bu şartlar sağlandığında $\lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = ax$ elde edilmiş olur.

Teorem 3.33 Sınırlı yakınsak bir (x_{mn}) dizisini S tipi dönüşüm yardımıyla sınırlı yakınsak bir (y_{mn}) dizisine dönüştürmek için gerek ve yeter şart

$$(a)\quad \text{Her}\ \ k,l\ \ \text{için}\ \ \lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = c_{kl}\ \ \text{mevcut};$$

$$(b)\quad \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl} = a\ \ \text{mevcut};$$

$$(c)\quad \text{Her}\ \ m,n\ \ \text{için}\ \ \sum_{k=1,l=1}^{m,n} |a_{mnkl}| < A;$$

$$(d)\quad \text{Her}\ \ l\ \ \text{için}\ \ \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{mnkl} - c_{kl}| = 0;$$

$$(e)\quad \text{Her}\ \ k\ \ \text{için}\ \ \lim_{m,n\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{mnkl} - c_{kl}| = 0$$

şartlarının sağlanmasıdır. Bu şartlar gerçeklendiğinde $\lim_{m,n\to\infty} x_{mn} = x$ ve

$\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} c_{kl}(x_{kl}-x)$ serisi her zaman mutlak yakınsak olup

$$\lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = ax + \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} c_{kl}(x_{kl}-x)$$

elde edilir.

Teorem 3.34

$$y_{mn} = \sum_{k=1,l=1}^{m,n} a_{mnkl}x_{kl}$$

şeklinde tanımlanan (y_{mn}) dizisi, (x_{mn}) dizisi yakınsak olduğunda yakınsak ve (y_{mn}) dizisinin limitinin (x_{mn}) dizisinin elemanlarına değil limitine bağlı olması için gerek ve yeter şart

(a) Her k,l için $\lim_{m,n\to\infty} a_{mnkl} = 0;$

(b) Her m,n için $\sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{mnkl}|$ yakınsak;

(c) $\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{mnkl}$ mevcut;

(d) Herhangi sabit l için $\lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1}^{\infty} |a_{mnkl}| = 0;$

(e) Herhangi sabit k için $\lim_{m,n\to\infty} \sum_{l=1}^{\infty} |a_{mnkl}| = 0$

şartlarının sağlanmasıdır. Bu şartlar gerçeklendiğinde

$$\lim_{m,n\to\infty} y_{mn} = ax$$

limiti elde edilir.

Teorem 3.35 T tipi bir (a_{mnkl}) matris dönüşümünün sınırlı bir (x_{mn}) dizisini sınırlı yakınsak bir (y_{mn}) dizisine dönüştürmesi için gerek ve yeter şart

$$(a) \quad \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1,l=1}^{m,n} |a_{mnkl} - a_{kl}| = 0 \;\; \text{olacak şekilde} \;\; (a_{kl}) \;\; \text{mevcut;}$$

$$(b) \quad \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{kl}| \;\; \text{serisinin yakınsak}$$

olmasıdır.

Teorem 3.36 S tipi bir (a_{mnkl}) matris dönüşümünün sınırlı bir (x_{mn}) dizisini sınırlı yakınsak bir (y_{mn}) dizisine dönüştürmesi için gerek ve yeter şart

$$(a) \quad \text{Her} \;\; m,n \;\; \text{için} \quad \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{mnkl}| \;\; \text{serisinin yakınsak;}$$

$$(b) \quad \lim_{m,n\to\infty} \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} |a_{mnkl} - a_{kl}| \;\; \text{olacak şekilde} \;\; (a_{kl}) \;\; \text{mevcut;}$$

$$(c) \quad \sum_{k=1,l=1}^{\infty,\infty} a_{kl} \;\; \text{serisinin yakınsak}$$

olmasıdır.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde Zeltser [14] tarafından verilen çift indisli diziler için konservatif matris metotları ve uygulamaları, Limaye ve Zeltser [18] tarafından yapılan çalışmalar ele alınıp çift indisli seriler ve bunlara ilişkin sonuçlar verilmiştir. Ayrıca bu çalışmaların bir devamı olan ve Zeltser [15] tarafından verilen çift indisli dizi uzaylarının β-duallerinin zayıf dizisel tamlığı detaylı bir şekilde incelenmiştir.

4.1. ÇİFT İNDİSLİ DİZİLER İÇİN KONSERVATİF MATRİS METOTLARI

$\mathcal{V}$, yakınsak çift indisli dizilerin bir alt uzayı olmak üzere

$$\mathcal{V} = \{x \in \Omega \ \mid \ \mathcal{V} - \lim x := \mathcal{V} - \lim_{k,l} x_{kl} \ \text{ mevcut}\}$$

cümlesine $\mathcal{V}-$limit denir. Bir $\sum\limits_{k,l} u_{kl}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\left(\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} u_{kl}\right)_{m,n} \in \mathcal{V}$ olduğunda

$$\mathcal{V} - \sum_{k,l} u_{kl} = \mathcal{V} - \lim_{m,n} \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} u_{kl}$$

biçiminde gösterilir.

Eğer x çift indisli dizisi $\mathcal{V}_A$ da ise x çift indisli dizisine A tarafından $\mathcal{V}-$toplanabilir denir.

Ayrıca $\mathcal{V} \subset \mathcal{V}_A$ ve $\mathcal{V}-$regüler (yani, eğer $\mathcal{V} - \lim_A x := \mathcal{V} - \lim Ax = \mathcal{V} - \lim x \ (x \in \mathcal{V})$) ise $A = a_{mnkl}$ dört boyutlu matrisine $\mathcal{V}-$konservatif matris denir.

Bu kısımda; tüm yakınsak çift indisli diziler uzayı

$$\mathcal{C}_c := \{x \in \Omega \ \mid \ \mathcal{C}_c - \lim x := \lim_{l} \lim_{k} x_{kl} \ \text{ mevcut}\}$$

ve tüm regüler yakınsak çift indisli diziler uzayı $\mathcal{C}_r$ olmak üzere $\mathcal{V} := \mathcal{C}_c$ ve $\mathcal{V} := \mathcal{C}_r$ özel durumlarını göz önüne alacağız. Burada hemen belirtelim ki (u_{kl}) çift indisli dizisi için $\mathcal{C}_c - \sum\limits_{k,l} u_{kl}$ serisi mevcuttur ancak ve ancak her $l \in \mathbb{N}$ için $\left(\sum\limits_{k} u_{kl}\right)_{l} \in cs$ ve $(u_{kl})_k \in cs$ dır.

Teorem 3.7 de 4-boyutlu matrisler için düşünüldüğünde $\mathcal{V} = \mathcal{C}_c$ için (b) ve (c) ifadeleri tamamen sağlanır ancak (a) ifadesi kısmen sağlanır. $\mathcal{V} = \mathcal{C}_r$ olması durumunda (a)-(c) ifadelerinden hiçbiri gerçeklenmez.

Şimdi ise çift indisli dizi uzayları için FDK-uzay kavramını verelim. Eğer her

$$\begin{aligned} r_{kl} &: E \to \mathbb{R} \\ & x = (x_{ij}) \mapsto |x_{kl}| \quad (k, l \in \mathbb{N}) \end{aligned}$$

yarınormu sürekli ise Ω vektör uzayının E altuzayı DK-uzayı olarak adlandırılır. Bir Fréchet topolojisiyle DK-uzayı FDK-uzayı olarak adlandırılır. Ayrıca normlu bir FDK-uzayına ise BDK-uzayı denir.

$$q_n(y) := \sup_m |y_{mn}| \quad (n \in \mathbb{N}) \quad \text{ve} \quad q(y) := \sup_n |\lim_m y_{mn}| \quad (y \in \mathcal{C}_c)$$

olmak üzere $\{q,\ q_n \ \mid \ n \in \mathbb{N}\}$ yarınorm topolojisi ile verilen $\mathcal{C}_c-$uzayı bir FDK-uzayı olup,

$$\begin{aligned} \|\ \|_\infty &: C_r \to \mathbb{R} \\ & y \mapsto \sup_{m,n} |y_{mn}| \end{aligned}$$

normu ile verilen $\mathcal{C}_r-$uzayı ise bir BDK-uzayıdır. Bu çalışma boyunca (e_{kl}) çift indisli dizisi; $(k, l) = (i, j)$ olduğunda $e^{kl}_{ij} := 1$ ve diğer durumlarda $e^{kl}_{ij} := 0$ olan diziyi gösterecektir. Burada $e^l := \sum\limits_k e^{kl}$ $(l \in \mathbb{N})$, $e_k := \sum\limits_l e^{kl}$ $(k \in \mathbb{N})$ ve $e := \sum\limits_{k,l} e^{kl}$ dır. Böylece $\{e^{kl}, e_k, e^l, e \mid k, l \in \mathbb{N}\}$ ve $\{e^{kl}, e^l, e \mid k, l \in \mathbb{N}\}$ kümeleri sırasıyla $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{C}_c$ FDK-uzaylarının temel kümeleridir. Bu durumda $\mathcal{C}_r$ ve $\mathcal{C}_c$ uzayları

$$\begin{aligned} \Phi &:= span\{e^{kl} \mid k, l \in \mathbb{N}\} \\ &= \ \{x \in \Omega \mid \exists N_0 \in \mathbb{N}\ \forall (k, l) \in \mathbb{N}^2 - [1, N_0]^2 \ : \ x_{kl} = 0\} \end{aligned}$$

altuzayını içerir.

$M \subset \Omega$ altkümesi için $\beta-$dual aşağıdaki biçimde olup

$$M^{\beta(\mathcal{V})} := \left\{ u \in \Omega \mid \forall x \in M \ : \ P_u(x) := \left(\sum_{l=1}^{n} \sum_{k=1}^{m} u_{kl} x_{kl} \right)_{m,n} \in \mathcal{V} \right\}$$

$\mathcal{V} = \mathcal{C}_c$ ve $\mathcal{V} = \mathcal{C}_r$ olması durumunda $\beta(\mathcal{V})$ yerine sırasıyla $\beta(c)$ ve $\beta(r)$ yazacağız.

Hemen belirtelim ki; $\{t_r \mid r \in \mathbb{N}\}$ yarınormların yardımıyla tanımlanan τ topolojisiyle birlikte $\mathcal{V}$ bir FDK-uzayı olmak üzere her $u \in \Omega$ için $\{r_{kl}, t_r \circ P_u \mid k, l, n \in \mathbb{N}\}$ yarınorm sistemi $\{u\}^{\beta(\mathcal{V})}$ çift indisli dizi uzayı üzerinde bir FDK topolojisi tanımlar.

4.1.1. $\mathcal{C}_c$- Konservatif Matrisler

Bu kısımda hemen belirtelim ki, c_0 uzayındaki tüm dizilerin uzayı $\mathcal{C}_0 = w(c_0)$ olup $\mathcal{C}_0^{\beta(c)} = \varphi(l)$ dır. $\forall x \in \mathcal{C}_c$ çift indisli dizisi için $x' \in \mathcal{C}_0$ ve $y \in \left\{ \sum_l z_l e^l \mid (z_l) \in c \right\}$ olmak üzere $x = x' + y$ gösterimine sahiptir.

$A = (a_{mnkl})$ 4-boyutlu bir matris olsun. A matrisinin

$$\mathcal{C}_{cA} := \left\{ x \in \Omega_A^{(\mathcal{C}_c)} \mid Ax \in \mathcal{C}_c \right\}$$

toplanabilirlik alanı Φ alt uzayını içeriyorsa $a_{nkl} := \lim_m a_{mnkl}$ ve $a_{kl} := \lim_n a_{nkl}$ $(n, k, l \in \mathbb{N})$ mevcuttur. Burada $a := (a_{kl})$, $a^{(n)} := (a_{nkl})_{k,l}$ ve $a^{(m,n)} := (a_{m,n,k,l})_{k,l}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ olarak belirlenir. $\mathcal{C}_{cA}$ bir FDK-uzayıdır. Gerçekten, $\Omega_A = \bigcup_{m,n} \{a^{(m,n)}\}^{\beta(c)}$ çift indisli dizi uzayı

$$r_{mn} = |x_{mn}|,$$

$$p_{mnl}(x) := \sup_s \left| \sum_{k=1}^{s} a_{mnkl} x_{kl} \right|,$$

$$\varrho_{mn}(x) := \sup_s \left| \sum_{l=1}^{s} \sum_k a_{mnkl} x_{kl} \right| \quad (x \in \mathcal{C}_{cA})$$

yarınormları ile bir FDK-uzayıdır. $\mathcal{P}_A := \{r_{mn}, p_{mnl}, \varrho_{mn}, q_n \circ A, q \circ A \mid m, n, l \in \mathbb{N}\}$ sistemi $\mathcal{C}_{cA}$ üzerinde bir FDK-topolojisi tanımlar [1].

$\mathcal{C}_{cA}$ üzerindeki sürekli lineer f fonksiyoneli aşağıdaki gibi gösterilir. Her $f \in \mathcal{C}'_{cA}$ fonksiyoneli için

$$\begin{aligned} f(x) &= \mu \lim_A x + \sum_n s_n \lim_{A^{(n)}} x \\ &+ \sum_n \sum_m t_{mn} \sum_l \sum_k a_{mnkl} x_{kl} + \sum_l \sum_k w_{kl} x_{kl} \quad (x \in \mathcal{C}_{cA}) \end{aligned} \tag{4.1}$$

gösterimi mevcuttur. Burada $\mu \in \mathbb{K}$, $(s_n) \in l$, $(t_{mn}) \in \mathcal{L}_\varphi$, $(w_{kl}) \in \mathcal{C}_{cA}^{\beta(c)}$ ve $\lim_{A^{(n)}} x := \lim\limits_m [Ax]_{mn}$ $(n \in \mathbb{N})$ dir.

$A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris ve $\Phi \subset \mathcal{C}_{cA}$ olsun. Bu durumda $F_A := F_{\mathcal{C}_{cA}}^{(\mathcal{C}_c)}$, $W_A := W_{\mathcal{C}_{cA}}^{(\mathcal{C}_c)}$ olmak üzere

$$B_A := \left\{ x \in \mathcal{C}_{cA} \mid \forall l \in \mathbb{N} : \left\{ \sum_{k=1}^{i} x_{kl} e^{kl} \mid i \in \mathbb{N} \right\} \ \mathcal{C}_{cA} \ \text{FDK-uzayındadır} \right\}$$

$$I_A := \left\{ x \in \mathcal{C}_{cA} \mid \sum_l \sum_k a_{kl} x_{kl} \ \text{ve} \ \sum_l \sum_k a_{nkl} x_{kl} \ \text{serileri yakınsak} \ (n \in \mathbb{N}) \right\}$$

uzaylarını göz önüne alalım. $\Phi \subset W_A \subset F_A \subset B_A$ içermesi açıktır. Açıkça, her $j \in \mathbb{N}$ ve $x \in \Omega_A$ için r_{mn}, ϱ_{mn} ve p_{mnl} $(m, n, l \in \mathbb{N})$ yarınormları $\left\{ \sum\limits_{k=1}^{i} x_{kj} e^{kj} \mid i \in \mathbb{N} \right\}$ kümesi üzerinde sınırlıdır. Bu nedenle $x \in \mathcal{C}_{cA}$ dizisinin B_A uzayında olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{i,m} \left| \sum_{k=1}^{i} a_{mnkl} x_{kl} \right| < \infty \quad (n, l \in \mathbb{N}), \quad \sup_{i,n} \left| \sum_{k=1}^{i} a_{nkl} x_{kl} \right| < \infty \quad (l \in \mathbb{N}) \tag{4.2}$$

olmasıdır.

Önerme 4.1 a) $B = (b_{mkl})$ üç boyutlu bir matris olsun. Bu durumda B, $\mathcal{C}_0$ dan c ye bir matristir ancak ve ancak

i) $\forall m \in \mathbb{N}$ için $b^{(m)} := (b_{mkl})_{k,l} = \sum\limits_{l}^{N} b^{(m)} e^l$ olmak üzere $N \in \mathbb{N}$ mevcuttur,

ii) $\forall l \in \mathbb{N}$ için $(b_{mkl})_{m,k}$ c_0 dan c ye iki boyutlu bir matristir. Bu durumda $b_{k,l} := \lim_m b_{mkl}$ $(k, l \in \mathbb{N})$ olmak üzere

$$\lim_m \sum_l \sum_k b_{mkl} x_{kl} = \sum_l \sum_k b_{kl} x_{kl} \qquad (x \in \mathcal{C}_0).$$

b) $B = (b_{mkl})$ üç boyutlu matrisinin $\mathcal{C}_c$ dan c ye bir matris olması için gerek ve yeter şart

i) $\forall m \in \mathbb{N}$ için $b^{(m)} := (b_{mkl})_{k,l} = \sum_l^N b^{(m)} e^l$ olacak şekilde bir $N \in \mathbb{N}$ mevcut,

ii) Her $l \in \mathbb{N}$ için $(b_{mkl})_{m,k}$ c den c ye iki boyutlu bir matristir. Bu durumda B matrisi $\mathcal{C}$ den c ye de bir dönüşümdür ve

$$\begin{aligned} &\lim_m \sum_l \sum_k b_{mkl} x_{kl} \\ &= \sum_{l=1}^N \left(\left(\lim_m \sum_k b_{mkl} - \sum_k b_{kl} \right) \lim_m x_{kl} + \sum_k b_{kl} x_{kl} \right) \qquad (x \in \mathcal{C}) \qquad (4.3) \end{aligned}$$

biçiminde gösterilir.

Teorem 4.2 a) 4-boyutlu bir $A = (a_{mnkl})$ matrisinin $\mathcal{C}_c-$konservatif olması için gerek ve yeter şart

i) Her $n \in \mathbb{N}$ için $A^{(n)} := (a_{mnkl})_{m,k,l}$ matrisi $\mathcal{C}_c$ den c ye üç boyutlu bir matris

ii) (a_{nkl}) matrisi $\mathcal{C}_0$ dan c ye üç boyutlu bir matris

ve

iii) $u_{nl} := \lim_m \sum_k a_{mnkl}$ $(n, l \in \mathbb{N})$ olmak üzere $U = (u_{nl})$ matrisinin konservatif olmasıdır. Bu durumda

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_c - \lim_A x = &\left(v - \sum_l u_l\right) \lim_l \lim_k x_{kl} + \sum_l u_l \lim_k x_{kl} \\ &+ \sum_l \sum_k a_{kl} \left(x_{kl} - \lim_k x_{kl}\right) \quad (x \in \mathcal{C}_c) \qquad (4.4)\end{aligned}$$

olur. Burada $u_l := \lim\limits_n u_{nl}$ $(l \in \mathbb{N})$ ve $v := \lim\limits_n \sum\limits_l u_{nl}$ dır.

b) $A = (a_{mnkl})$ matrisinin $\mathcal{C}_c-$regüler olması için gerek ve yeter şart a_{kl} : $u_l = 0$ $(k, l \in \mathbb{N})$ ve $v = 1$ olmak üzere (i)-(iii) şartlarının sağlanmasıdır.

İspat. a) Gereklilik: (i) nin gerekliliği açıktır. Önerme 4.1 (b) den her $n, l \in \mathbb{N}$ için u_{nl} mevcuttur ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$a^{(m,n)} = \sum_{l=1}^{N(n)} a^{(m,n)} e^l \quad (m \in \mathbb{N})$$

olacak şekilde bir $N(n) \in \mathbb{N}$ bulunabilir. Ayrıca (4.3) den

$$\begin{aligned}\lim_m [Ax]_{mn} &= \sum_{l=1}^{N(n)} \left(u_{nl} - \sum_k a_{nkl}\right) \lim_k x_{kl} + \sum_{l=1}^{N(n)} \sum_k a_{nkl} x_{kl} \qquad (4.5) \\ &= \sum_{l=1}^{N(n)} u_{nl} \lim_k x_{kl} + \sum_{l=1}^{N(n)} \sum_k a_{nkl} \left(x_{kl} - \lim_k x_{kl}\right) \quad (x \in \mathcal{C}, n \in \mathbb{N})\end{aligned}$$

elde edilir. O halde (ii) gerçeklenir.

Son eşitlikten, her $x \in \mathcal{C}_c$ için $\lim\limits_n \sum\limits_{l=1}^{N(n)} u_{nl} \lim\limits_k x_{kl}$ limitinin mevcut olması A matrisinin $\mathcal{C}_c-$konservatifliğini verir. Bu da (iii) ye denktir.

Yeterlilik: Sabit bir $x \in \mathcal{C}_c$ alalım. (i) den her $n \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_m [Ax]_{mn}$ limitinin varlığı ve (4.5) eşitliği elde edilir. $P \in \mathbb{N}$ için $a^{(n)} = \sum\limits_{l=1}^{P} a^{(n)} e^l$ $(n \in \mathbb{N})$ ve (ii)-(iii) den $\lim_n \lim_m [Ax]_{mn}$ mevcuttur. Bununla birlikte her $x \in \mathcal{C}_c$ için

$$\lim_n \sum_{l=1}^{P} \sum_k a_{nkl} \left(x_{kl} - \lim_k x_{kl} \right) = \sum_{l=1}^{P} \sum_k a_{kl} \left(x_{kl} - \lim_k x_{kl} \right)$$
$$\lim_n \sum_l u_{nl} \lim_k x_{kl} = \left(v - \sum_l u_l \right) \lim_l \lim_k x_{kl} + \sum_l u_l \lim_k x_{kl}$$

olduğundan (4.4) elde edilir.

(b) ise (4.4) den ve $\{e^{kl}, e^l, e \mid k, l \in \mathbb{N}\} \subset \mathcal{C}_c$ içermesinden açıktır. ■

Önerme 4.3 $D = (d_{nk})$ iki boyutlu bir matris olsun.

$$\varphi \subset w_D := \left\{ x \in w \mid \forall n \in \mathbb{N} : \sum_k d_{nk} x_k \text{ yakınsak} \right\}$$

içermesi sağlansın ve $x = (x_k) \in w_D$ sabit olsun. O halde

$$\sup_{m,n} \left| \sum_{k=1}^{m} d_{nk} x_k \right| < \infty$$

olması için gerek ve yeter şart $\forall t \in l$ için $\sum_k \sum_n t_n d_{nk} x_k$ serisinin yakınsak olmasıdır. Bu durumda

$$\sum_k \sum_n t_n d_{nk} x_k = \sum_n t_n \sum_k d_{nk} x_k \quad (t \in l)$$

olur.

(4.2) ve Önerme 4.3 göz önüne alındığında her $s \in l$ ve $x \in B_A$ için

$$\sum_m s_m \sum_k a_{mnkl} x_{kl} = \sum_k \sum_m s_m a_{mnkl} x_{kl} \quad (n, l \in \mathbb{N}) \tag{4.6}$$

olup her $s \in l$ ve $x \in B_A \cap I_A$ için

$$\sum_n s_n \sum_k a_{nkl} x_{kl} = \sum_k \sum_n s_n a_{nkl} x_{kl} \quad (l \in \mathbb{N}) \tag{4.7}$$

elde edilir.

$A = (a_{mnkl})$ matrisi $\mathcal{C}_c-$konservatif olsun. Bu durumda uygun $N(n)$, $n \in \mathbb{N}$ ve P için

$$\begin{cases} a^{(m,n)} = \sum_{l=1}^{N(n)} a^{(m,n)} e^l & (m, n \in \mathbb{N}), \\ a^{(n)} = \sum_{l=1}^{P} a^{(n)} e^l & , (a_{nkl})_k \in l \quad (n, l \in \mathbb{N}), \\ a = \sum_{l=1}^{P} a e^l & , (a_{kl})_k \in l \quad (l \in \mathbb{N}) \end{cases} \tag{4.8}$$

gerçeklenir.

Önerme 4.4 $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu $\mathcal{C}_c-$konservatif bir matris olsun. Bu durumda

a) $F_A = B_A \cap I_A$;

b) F_A daki her sürekli lineer fonksiyoneli $f \in \mathcal{C}_c'$, $\mu \in \mathbb{K}$, $(s_n) \in l$

$$\Lambda_A(x) := \lim_A x - \sum_l \sum_k a_{kl} x_{kl}$$
$$\Lambda_{A^{(n)}}(x) := \lim_{A^{(n)}} x - \sum_l \sum_k a_{nkl} x_{kl} \quad (n \in \mathbb{N}, x \in I_A)$$

olmak üzere

$$f(x) = \mu \Lambda_A(x) + \sum_n s_n \Lambda_{A^{(n)}}(x) + \sum_l \sum_k f(e^{kl}) x_{kl}$$

biçiminde bir temsile sahiptir.

c) $W_A = B_A \cap \Lambda_A^{\perp} \cap \left(\bigcap_n \Lambda_{A^{(n)}}^{\perp} \right)$.

İspat. a) $\lim_A$, $\lim_{A^{(n)}} \in \mathcal{C}_{cA}'$ olduğundan her $x \in F_A$ için

$$\sum_l \sum_k a_{kl} x_{kl} = \sum_l \sum_k x_{kl} \lim_A e^{kl}$$

ve

$$\sum_l \sum_k a_{nkl} x_{kl} = \sum_l \sum_k x_{kl} \lim_{A^{(n)}} e^{kl} \quad (n \in \mathbb{N})$$

serileri yakınsaktır. Bu nedenle $F_A \subset B_A \cap I_A$ olur.

Şimdi $x \in B_A \cap I_A$ olsun. (4.1) de $f \in \mathcal{C}'_{cA}$ olduğundan

$$f(e^{kl}) = \mu a_{kl} + \sum_n s_n a_{nkl} + \sum_n \sum_m a_{mnkl} t_{mn} + w_{kl} \quad (k, l \in \mathbb{N}) \tag{4.9}$$

elde edilir. Ayrıca (4.6), (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden her $(s_n) \in l$ ve $(t_{m,n}) \in \mathcal{L}_\varphi$ için

$$\sum_l \sum_k a_{kl} x_{kl}, \quad \sum_l \sum_k \sum_n s_n a_{nkl} x_{kl}, \quad \sum_l \sum_k \sum_n \sum_m t_{mn} a_{mnkl} x_{kl} \tag{4.10}$$

serilerinin yakınsaklığı elde edilir. Böylece

$$\sum_l \sum_k f(e^{kl}) x_{kl}$$

serisi $x \in F_A$ için yakınsaktır.

b) (4.1) de $f \in \mathcal{C}'_{cA}$ olarak göz önüne alınsın. (4.9) daki w_{kl} $(k, l \in \mathbb{N})$ değeri (4.1) eşitliğinde yerine yazılırsa $x \in \mathcal{C}_c$ için

$$\begin{aligned} f(x) &= \mu \lim_A x + \sum_n s_n \lim_m [Ax]_{mn} + \sum_n \sum_m t_{mn} \sum_l \sum_k a_{mnkl} x_{kl} \\ &+ \sum_l \sum_k \left(f(e^{kl}) - \mu a_{kl} - \sum_n s_n a_{nkl} - \sum_n \sum_m t_{mn} a_{mnkl} \right) x_{kl} \end{aligned}$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned} &\lim_A x = \Lambda_A(x) - \sum_l \sum_k a_{kl}, \\ &\lim_{A^{(n)}} (x) = \lim_m [Ax]_{mn} = \Lambda_{A^{(n)}}(x) - \sum_l \sum_k a_{nkl} x_{kl} \end{aligned}$$

olup $x \in F_A$ olarak alınırsa (4.10) daki seriler yakınsaktır ve

$$f(x) = \mu\Lambda_A(x) + \sum_n s_n \Lambda_{A^{(n)}}(x) + \sum_l \sum_k f(e^{kl}) x_{kl} \tag{4.11}$$

elde edilir.

c) $x \in W_A$ olsun. Bu durumda $f \in \mathcal{C}'_{cA}$ için

$$f(x) = \sum_{k,l} x_{kl} f(e^{kl}) \tag{4.12}$$

dır. $W_A \subset B_A$ olduğundan $x \in B_A$ dır. (b) de $x \in I_A$ için (4.11) temsilinin (4.12) şeklini alması için $\Lambda_A(x) = 0$ ve her n için $\Lambda_{A^{(n)}}(x) = 0$ olmasıdır. Bu da $x \in \Lambda_A^{\perp}$ ve $x \in \bigcap \Lambda_{A^{(n)}}^{\perp}$ olduğunu gösterir. Böylece $W_A \subset B_A \cap \Lambda_A^{\perp} \cap \left(\bigcap \Lambda_{A^{(n)}}^{\perp}\right)$ elde edilir.

Karşıt olarak $x \in B_A \cap \Lambda_A^{\perp} \cap \left(\bigcap \Lambda_{A^{(n)}}^{\perp}\right)$ alınırsa

$$f(x) = \mu.0 + \sum_n s_n.0 + \sum_l \sum_k f(e^{kl}) x_{kl} = \sum_l \sum_k f(e^{kl}) x_{kl}$$

olur. Buradan açıkça görülür ki $x \in W_A$ dır. ■

Önerme 4.5 A matrisi $\mathcal{C}_c$−konservatif ise $\mathcal{M} \cap \mathcal{C}_{cA} \subset F_A$ dır.

İspat. $x \in \mathcal{M} \cap \mathcal{C}_{cA}$ olsun. (4.8) deki $\sum_l \sum_k a_{kl} x_{kl}$ ve $\sum_l \sum_k a_{nkl} x_{kl}$ $(n \in \mathbb{N})$ serileri yakınsaktır. Ayrıca (a_{nkl}) ve $(a_{mnkl})_{m,k,l}$ $(n \in \mathbb{N})$ $\mathcal{C}_0$ dan c ye üç boyutlu matrisler olduğundan

$$\sup_{i,m} \left| \sum_{k=1}^{i} a_{mnkl} x_{kl} \right| \leq \sum_{l=1}^{N(n)} \sup_m \sum_k |a_{mnkl}| \sup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l=1,2,\ldots,N(n)}} |x_{kl}| < \infty \quad (l, n \in \mathbb{N}),$$

$$\sup_{i,n} \left| \sum_{k=1}^{i} a_{nkl} x_{kl} \right| \leq \sum_{l=1}^{P} \sup_n \sum_k |a_{nkl}| \sup_{\substack{k \in \mathbb{N} \\ l=1,2,\ldots,P}} |x_{kl}| < \infty \quad (l \in \mathbb{N})$$

olur. Sonuç olarak $x \in B_A \cap I_A = F_A$ elde edilir. ■

$A = (a_{mnkl})$ matrisi $\mathcal{V}-$konservatif olsun. Bu durumda $e \in W_{\mathcal{V}_A^{(\mathcal{V})}}$ ise A matrisine $\mathcal{V}-$conull, aksi durumda $\mathcal{V}-$coregüler denir. Önerme 4.5 (b) ve Önerme 4.4 yardımıyla aşağıdaki önerme verilebilir.

Önerme 4.6 $\mathcal{C}_c-$konservatif bir $A = (a_{mnkl})$ matrisinin $\mathcal{C}_c-$conull olması için gerek ve yeter şart $|\Lambda_A(e)| + \sum_n |\Lambda_{A^{(n)}}(e)| = 0$ olmasıdır.

Her $\mathcal{C}_c-$regüler matrisi $\mathcal{C}_c-$coregülerdir ancak $\varphi(m) \subset \mathcal{C}_{cA}$ ise A matrisi $\mathcal{C}_c-$conulldır. Fakat $\mathcal{C}_m \subset \mathcal{C}_{cA}$ içermesi A matrisinin $\mathcal{C}_c-$conull olması için yeterli değildir. Bunun için A matrisinin $a_{mnm1} := 1$ ve diğer durumlarda $a_{mnkl} := 0$ $(m, n, k, l \in \mathbb{N})$ olacak şekilde seçilmesi yeterlidir. Böylece $\mathcal{C}_m \subset \mathcal{C}_{cA}$ gerçeklenir ancak $\Lambda_A(e) = 1$ olduğundan A matrisi $\mathcal{C}_c-$conull değildir.

Teorem 4.7 $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu $\mathcal{C}_c-$konservatif bir matris olsun. Eğer $\mathcal{C}_c$, $\mathcal{C}_{cA}$ FDK-uzayının kapalı altuzayı ise $\mathcal{C}_{cA} \cap \mathcal{C}_m = \mathcal{C}_c$ olur.

İspat. $\mathcal{C}_{cA}$ da $\mathcal{C}_c = \overline{\mathcal{C}_c}$ olsun. İspat için Teorem 4.2 de tanımlanan $U = (u_{nl})$ için c_U FK-uzayında $c = \bar{c}$ olduğu gösterilecektir. Böylece $m \cap c_U = c$ olacaktır. Ek olarak herhangi sabit $x \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{C}_{cA}$ için

$$z_l := \lim_k x_{kl} \quad (l \in \mathbb{N}) \quad \text{ve} \quad y := \sum_l z_l e^l \tag{4.13}$$

olur (koordinatsal yakınsaklık). Bu durumda $z \in m$ ve $y \in \mathcal{C}_{cA}$ dir. Ayrıca

$$\lim_n \sum_l u_{nl} z_l = \lim_n \lim_m \sum_l \sum_k a_{mnkl} y_{kl} = \mathcal{C}_c - \lim_A y \tag{4.14}$$

dır. Buradan $z \in m \cap c_U = c$ elde edilir. Bu nedenle $x \in \mathcal{C}_c$ dir.

$t \in \bar{c}$ ve $(t^{(i)})$, c_U FK-uzayında t ye yakınsayan bir dizi olsun. $s_{kl} := t_l$, $s_{kl}^{(i)} := t_l^{(i)}$ $(i, k, l \in \mathbb{N})$ olarak ifade edilirse $s^{(i)} := (s_{kl}^{(i)}) \in \mathcal{C}_c$ ve $s := (s_{kl}) \in \mathcal{C}_{cA}$ olur. Şimdi $s^{(i)} \to s \in \mathcal{C}_{cA}$ olduğu gösterilecektir. Bu da her $p \in \mathcal{P}_A$ için $p(s^{(i)} - s) \to 0$ $(i \to \infty)$ olduğunu gösterir. Örneğin, c_U uzayında $t^{(i)} \to t$

olduğundan

$$\begin{aligned}(q \circ A)(s^{(i)} - s) &= \sup_n \left| \sum_{l=1}^{N(n)} \lim_m \sum_k a_{mnkl}(t_l^{(i)} - t_l) \right| \\ &= \sup_n \left| \sum_l u_{nl}(t_l^{(i)} - t_l) \right| \to 0 \quad (i \to \infty)\end{aligned}$$

olur. Bu nedenle $t \in c$ olduğunda $s \in \overline{\mathcal{C}_c} = \mathcal{C}_c$ dır. Böylece $\overline{c} = c$ eşitliği gösterilmiş olur. ■

Uyarı 4.8 a) Teorem 4.7 nin tersi doğru değildir. Bunu görmek için $A = (a_{mnkl})$ matrisi $a_{m1k1} := \frac{1}{m}$ $(m, k \in \mathbb{N}, k \leq m)$, $a_{mnmn} := 1$ $(m, n \in \mathbb{N}, n > 1)$ ve diğer durumlarda $a_{mnkl} := 0$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda $\mathcal{C}_{cA} \cap \mathcal{C}_m = \mathcal{C}_c$ fakat $\mathcal{C}_c \neq \overline{\mathcal{C}_c}$ dır. Çünkü $x^{(i)} := \sum_{k=1}^{i} (-1)^k e^{kl}$ $(i \in \mathbb{N})$ olmak üzere $(x^{(i)}) \subset \mathcal{C}_c$ dizisi $\mathcal{C}_{cA}$ da $x := \sum_k (-1)^k e^{kl} \in \mathcal{C}_{cA} \setminus \mathcal{C}_c$ dizisine koordinatsal yakınsaktır.

b) $\mathcal{C}_{cA}$ da $\mathcal{C}_c = \overline{\mathcal{C}_c}$ ise A matrisi $\mathcal{C}_c-$coregülerdir.

c) D iki boyutlu matrisi için "c_D de $c = \overline{c} \Rightarrow m \cap c_D = c$ " ifadesini elde etmek için "c_D de $c = \overline{c} \Rightarrow D$ coregüler $\Rightarrow m \cap c_D \subset \overline{c}$ " ifadesi kullanilabilir. Bu yaklaşım $\mathcal{C}_c-$konservatif matrisler için geçerli değildir. $\mathcal{C}_m \cap \mathcal{C}_{cA} \not\subset \mathcal{C}_c$ olacak şekilde bir $A = (a_{mnkl})$ $\mathcal{C}_c-$coregüler matrisi mevcuttur. $A = (a_{mnkl})$ matrisi $m, n \in \mathbb{N}$ ve $n > 1$ için $a_{m1n1} := 1$, $a_{mnmn} := (-1)^n$, $a_{m,n,m,n-1} := (-1)^{n-1}$ ve diğer durumlarda $a_{mnkl} := 0$ olacak şekilde tanımlansın. o halde $\Lambda_{A^{(1)}}(e) = 1$ olduğundan A matrisi $\mathcal{C}_c-$coregülerdir. Şimdi $x_{mn} := (-1)^n$ $(m, n \in \mathbb{N})$ olacak şekilde $x = (x_{mn}) \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{C}_{cA}$ dizisi göz önüne alınsın. Bu durumda $\mathcal{C}_c - \lim_A x = 2$ olup diğer yandan $\mathcal{C}_c$ üzerinde $\mathcal{C}_c - \lim_A = 0$ olduğundan $x \notin \overline{\mathcal{C}_c}$ olur.

Önerme 4.9 $\mathcal{C}_{cA} \subset \mathcal{C}_m$ olmak üzere $A = (a_{mnkl})$ matrisi $\mathcal{C}_c-$konservatif ise $\mathcal{C}_{cA} = \mathcal{C}_c$ dir.

İspat. Teorem 4.2 den U matrisi konservatiftir. Eğer $t = (t_l) \in c_U$ ise o zaman

$s := \sum\limits_{l} t_l e^l \in \mathcal{C}_{cA} \subset \mathcal{C}_m$ olur. Bu nedenle $t \in m$ dir. Teorem 3.7 den $c_U = c$ yazılabilir.

Şimdi $x \in \mathcal{C}_{cA}$ z ve y ise (4.13) deki gibi olsun. Bu durumda $z \in m$ ve $y = x - (x - y) \in \mathcal{C}_{cA} - \mathcal{C}_0 \subset \mathcal{C}_{cA}$ elde edilir. (4.14) den $\lim_U z = \mathcal{C}_c - \lim_A y$ ve böylece $z \in c_U = c$ olur. Bu ise $x \in \mathcal{C}_c$ olduğunu gösterir. ■

Teorem 4.10 $A = (a_{mnkl})$ ve $B = (b_{mnkl})$ matrisleri $\mathcal{C}_c-$regüler ve $\mathcal{C}_m \cap \mathcal{C}_{cA} \subset \mathcal{C}_{cB}$ olsun. Bu durumda her $x \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{C}_{cA}$ için

$$\mathcal{C}_c - \lim_A x = \mathcal{C}_c - \lim_B x$$

dır.

İspat. $\mathcal{C}_c - \lim_A x \neq \mathcal{C}_c - \lim_B x$ olacak şekilde bir $x \in \mathcal{C}_m \cap \mathcal{C}_{cA} \cap \mathcal{C}_{cB}$ mevcut olsun. Bu durumda $s \in (\mathcal{C}_m \cap \mathcal{C}_{cA}) \setminus \mathcal{C}_{cB}$ mevcut olduğu gösterilecektir. z ve y (4.13) deki gibi olsun. $U = (u_{nl})$ ve $V = (v_{nl})$ elemanları $u_{nl} := \lim\limits_{m} \sum\limits_{k} a_{mnkl}$, $v_{nl} := \lim\limits_{m} \sum\limits_{k} b_{mnkl}$ şeklinde ifade edilen regüler matrisler olmak üzere $\mathcal{C}_c - \lim_A y = \lim_U z$ ve $\mathcal{C}_c - \lim_B y = \lim_V z$ dir. $z \in m$ ve

$$\begin{aligned} \lim_U z &= \mathcal{C}_c - \lim_A x - \mathcal{C}_c - \lim_A (x - y) = \mathcal{C}_c - \lim_A x \\ &\neq \mathcal{C}_c - \lim_B x = \mathcal{C}_c - \lim_B x - \mathcal{C}_c - \lim_B (x - y) = \lim_V z \end{aligned}$$

olması dikkate alınmalıdır. Bu nedenle Teorem 3.7 den $t \in (m \cap c_U) \setminus c_V$ elde edilir. O halde $s := \sum\limits_{l} t_l e^l$ çift indisli dizisi $\mathcal{C}_m$ dedir ve $\mathcal{C}_c \lim_A s = \lim_U t$ mevcuttur, fakat $t \in c_V$ olduğundan $s \notin \mathcal{C}_{cB}$ dir. ■

4.1.2. $\mathcal{C}_r-$Konservatif Matrisler

Bu kısımda $\mathcal{V} = \mathcal{C}_r$ durumu göz önüne alınacak ve $\mathcal{C}_r - \sum\limits_{k,l}$ yerine kısaca $r - \sum\limits_{k,l}$ yazılacaktır.

Dört boyutlu $A = (a_{mnkl})$ matrisinin toplanabilirlik alanı $\mathcal{C}_{rA}$, $\{r_{mn},\ p_{mn},\ \|.\|_\infty \circ A \mid m,n \in \mathbb{N}\}$ yarınorm sistemiyle bir FDK-uzayıdır. Burada

$$p_{mn}(x) := \sup_{s,t} \left| \sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{t} a_{mnkl} x_{kl} \right| \quad (m,n \in \mathbb{N}; x \in \mathcal{C}_{rA})$$

dır. $\mathcal{C}_r$ BDK-uzayında [8] ve $\Omega_A^{\mathcal{C}_r}$ FDK-uzayında lineer sürekli fonksiyonellerin temsilinden açıkça görülebilir ki $\mu \in \mathbb{K}$, $(t_{mn}) \in \mathcal{L}_u$, $(u_n) \in l$, $(v_n) \in l$ ve $(w_{kl}) \in \mathcal{C}_{rA}^{\beta(r)}$ olmak üzere her $f \in \mathcal{C}'_{rA}$ fonksiyoneli

$$\begin{aligned} f(x) = {} & r - \lim_A x + r - \sum_{m,n} t_{mn} \left(r - \sum_{k,l} a_{mnkl} x_{kl} \right) \\ & + \sum_n u_n \lim_m [Ax]_{mn} + \sum_m v_m \lim_n [Ax]_{mn} \\ & + r - \sum_{k,l} w_{kl} x_{kl} \qquad (x \in \mathcal{C}_{rA}) \end{aligned}$$

gösterimine sahiptir.

Teorem 4.11 a) $A = (a_{mnkl})$ matrisinin $\mathcal{C}_r-$konservatif olması için gerek ve yeter şart

i) $\sup\limits_{k,l} r - \sum\limits_{k,l} |a_{mnkl}| < \infty$,

ii) $r - \lim\limits_{m,n} a_{mnkl} =: a_{kl}$ mevcut $(k,l \in \mathbb{N})$,

iii) $r - \lim\limits_{m,n} \sum\limits_k a_{mnkl_0} =: u^{l_0}$ ve $r - \lim\limits_{m,n} \sum\limits_l a_{mnk_0 l} =: v_{k_0}$ mevcut $(k_0, l_0 \in \mathbb{N})$

iv) $r - \lim\limits_{m,n} r - \sum\limits_k a_{mnkl} =: v$ mevcut

olmasıdır. Bu şartlar altında $x_k := \lim\limits_l x_{kl}$ $(k \in \mathbb{N})$, $x^l := \lim\limits_k x_{kl}$ $(l \in \mathbb{N})$ olmak üzere $(a_{kl}) \in \mathcal{L}_u$, (u^l), $(v_k) \in l$ ve

$$r-\lim_{m,n}[Ax]_{m,n} = r-\sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} + \sum_k \left(v_k - \sum_l a_{kl}\right) x_k + \sum_l \left(u^l - \sum_k a_{kl}\right) x^l$$
$$+\left(\mu + r - \sum_{k,l} a_{kl} - \sum_k v_k - \sum_l u^l\right) r-\lim_{m,n} x_{mn} \qquad (x \in \mathcal{C}_r)$$

dır.

b) $A=(a_{mnkl})$ matrisinin $\mathcal{C}_r-$regüler olması için gerek ve yeter şart $a_{kl} = u^l = v_k = 0$ $(k,l \in \mathbb{N})$, $v=1$ olması ve (i)-(iv) şartlarının gerçeklenmesidir.

$\mathcal{C}_{rA} \supset \Phi$ olsun. Bu durumda a_{kl} $(k,l \in \mathbb{N})$ limiti, $\hat{a}_{nkl} := \lim_m a_{mnkl}$ $(n,k,l \in \mathbb{N})$, $\check{a}_{mkl} := \lim_n a_{mnkl}$ $(m,k,l \in \mathbb{N})$ mevcuttur ve $a := (a_{kl})$ çift indisli dizisi ile birlikte $\hat{A} := (\hat{a}_{nkl})$ ve $\check{A} := (\check{a}_{mkl})$ matrisleri göz önüne alınır.

$\mathcal{C}_{rA}$ FDK-uzayında seçkin altuzaylar $F_A := F^{(\mathcal{C}_r)}_{\mathcal{C}_{rA}}$, $W_A := W^{(\mathcal{C}_r)}_{\mathcal{C}_{rA}}$,

$$B_A := \left\{ x \in \mathcal{C}_{rA} \mid \left\{ \sum_{l=1}^{n}\sum_{k=1}^{m} x_{kl}e^{kl} \mid k,l \in \mathbb{N} \right\} \mathcal{C}_{rA},\ \text{FDK-uzayında sınırlıdır} \right\}$$

ve

$$I_A := \left\{ x \in \mathcal{C}_{rA} \mid r-\sum_{k,l} a_{kl}x_{kl},\quad r-\sum_{k,l} \hat{a}_{nkl}x_{kl}, \right.$$
$$\left. r-\sum_{k,l} \check{a}_{mkl}x_{kl} \ \ \text{yakınsaktır } (m,n \in \mathbb{N}) \right\}$$

altuzayları göz önüne alınsın. Burada;

$z \in \mathcal{C}_{rA}$ elemanının B_A da olması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{m,n,s,t} \left| \sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{t} a_{mnkl}x_{kl} \right| < \infty$$

sağlanmasıdır.

Lemma 4.12 a) $A = (a_{mnkl})$ 4-boyutlu bir matris olsun. Her $x \in \Omega^{(\mathcal{C}_r)}_A$ için aşağıdakiler denktir:

i) $\left|\sum_{k=1}^{\mu}\sum_{l=1}^{\nu} a_{mnkl}x_{kl}\right| \leq M$ olacak şekilde $M > 0$ mevcuttur $(m, n, \mu, \nu \in \mathbb{N})$,

ii) $\forall t \in \mathcal{L}_u \;:\; r-\sum_{k,l}\left(r-\sum_{m,n} t_{mn}a_{mnkl}\right)x_{kl}$ mevcuttur.

Bu durumda $r-\sum_{m,n} t_{mn}\left(r-\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl}\right)$ mevcut olup

$$r-\sum_{k,l}\left(r-\sum_{m,n} t_{mn}a_{mnkl}\right)x_{kl} = r-\sum_{m,n} t_{mn}\left(r-\sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl}\right) \quad (t \in \mathcal{L}_u)$$

eşitliği sağlanır.

b) Her $x \in B_A \cap I_A$ ve $u \in l$ için $r-\sum_{k,l}\sum_{n} u_n\hat{a}_{nkl}x_{kl}$ ve $r-\sum_{k,l}\sum_{n} u_n\breve{a}_{nkl}x_{kl}$ serileri yakınsak olup

$$r-\sum_{k,l}\sum_{n} u_n\hat{a}_{nkl}x_{kl} = \sum_{n} u_n\left(r-\sum_{k,l}\hat{a}_{nkl}x_{kl}\right)$$
$$r-\sum_{k,l}\sum_{n} u_n\breve{a}_{nkl}x_{kl} = \sum_{n} u_n\left(r-\sum_{k,l}\breve{a}_{nkl}x_{kl}\right)$$

eşitlikleri sağlanır.

Önerme 4.13 $A = (a_{mnkl})$ 4-boyutlu bir matris olsun. Bu durumda aşağıdakiler sağlanır.

a) $F_A = B_A \cap I_A$,

b) $f \in \mathcal{C}'_{rA}$ fonksiyoneli F_A da

$$f(x) = \mu\tilde{\Lambda}_A(x) + \sum_{m} u_m\lambda_{mA}(x) + \sum_{n} v_n\lambda_A^n(x) + r-\sum_{k,l} x_{kl}f(e^{kl}) \quad (x \in F_A)$$

gösterimine sahiptir. Burada

$$\begin{aligned}
\tilde{\Lambda}_A(x) &:= r-\lim_A x - r-\sum_{k,l} a_{kl}x_{kl}, \\
\Lambda_A^n(x) &:= \lim_m r-\sum_{k,l}(a_{mnkl}-\hat{a}_{nkl})x_{kl} \quad \text{ve} \\
\Lambda_{mA}(x) &:= \lim_n r-\sum_{k,l}(a_{mnkl}-\check{a}_{mkl})x_{kl} \quad (m,n\in\mathbb{N}; x\in I_A)
\end{aligned}$$

dır.

c) $\Lambda_A(x) := |\tilde{\Lambda}_A| + \sum_n |\Lambda_A^n| + \sum_m |\Lambda_{mA}|$ olmak üzere

$$W_A = B_A \cap \Lambda_A^{\perp} = F_A \cap \Lambda_A^{\perp}$$

dır.

Önerme 4.14 $A=(a_{mnkl})$ 4-boyutlu matrisi $\mathcal{C}_r-$konservatif ise $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rA} \subset F_A$ olur.

İspat. Sabit $x\in\mathcal{M}_u\cap\mathcal{C}_{rA}$ alınsın. Teorem 4.11 (a) dan (a_{kl}), $(\check{a}_{nkl})_{k,l}$ ve $(\hat{a}_{nkl})_{k,l}$ çift indisli dizileri her $n\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{L}_u$ dadır. Bu nedenle

$$r-\sum_{k,l} a_{kl}x_{kl},\ r-\sum_{k,l}\check{a}_{nkl}x_{kl},\ r-\sum_{k,l}\hat{a}_{nkl}x_{kl} \quad (n\in\mathbb{N})$$

çift indisli serileri yakınsaktır. Ayrıca (i) den Teorem 4.11 (a) da

$$\sum_{i,j,m,n}\left|\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j} a_{mnkl}x_{kl}\right| \le \sup_{m,n} r-\sum_{k,l}|a_{mnkl}|\sup_{k,l}|x_{kl}|<\infty$$

olup $x\in B_A\cap I_A=F_A$ elde edilir. ■

Uyarı 4.15 A matrisi $\mathcal{C}_r-$konservatif olsun. A matrisinin $\mathcal{C}_r-$conull olması için gerek ve yeter şart $\Lambda_A(e)=0$ olmasıdır. Bu ise her $\mathcal{C}_r-$regüler matrisinin $\mathcal{C}_r-$coregüler olduğunun ispatıdır. Ayrıca $\mathcal{M}_u\subset\mathcal{C}_{rA}$ ise A matrisi $\mathcal{C}_r-$conull dır.

Örnek 4.16 $A = (a_{mnkl})$ dört boyutlu $\mathcal{C}_r-$konservatif matrisi olmak üzere $\mathcal{C}_r$ uzayı $\mathcal{C}_{rA}$ da kapalı ancak $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rA} \neq \mathcal{C}_r$ olsun. $\forall n \in \mathbb{N}$, $m > 2$ için $a_{1,n,1,2n-1} := a_{2,n,1,2n} := a_{m,n,m-1,n} := 1$ ve diğer durumlarda $a_{mnkl} := 0$ olacak şekilde bir $A = (a_{mnkl})$ tanımlansın. Bu durumda

$$[Ax]_{1n} = x_{1,2n-1}, \quad [Ax]_{2n} = x_{1,2n}, \quad [Ax]_{mn} = x_{m-1,n}$$

elde edilir. A matrisinin $\mathcal{C}_r-$konservatif olduğu açıktır. Ayrıca $x \in \mathcal{C}_r$ için $\|Ax\|_\infty = \|x\|_\infty$ sağlanır. Bu nedenle $\mathcal{C}_r$ dizi uzayı $\mathcal{C}_{rA}$ da kapalıdır. Öte yandan $y_{1,2l-1} := y_{kl} := 0$, $y_{1,2l} := 1$ $(k, l \in \mathbb{N}, k > 1)$ şeklinde tanımlı çift indisli y dizisi $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rA} \setminus \mathcal{C}_r$ uzayının elemanıdır.

Örnek 4.17 $A = (a_{mnkl})$ matrisi $\mathcal{C}_r-$konservatif ve $\mathcal{C}_{rA} \subset \mathcal{M}_u$ ancak $\mathcal{C}_{rA} \neq \mathcal{C}_r$ olsun. Bir önceki örnekten $\mathcal{C}_r-$konservatif A matrisi için

$$\mathcal{C}_{rA} = \left\{ x \in \Omega \mid (x_{m+1,n}) \in \mathcal{C}_r \text{ ve } \lim_n x_{1,2n-1}, \ \lim_n x_{1,2n} \text{ mevcut} \right\} \supsetneq \mathcal{C}_r$$

elde edilir.

Örnek 4.18 $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rB}$ üzerinde tutarlı olmayan ve $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rB} \subset \mathcal{C}_{rA}$ içermesini sağlayan $\mathcal{C}_r-$regüler A, B matrisleri vardır. Bunu göstermek için $A = (a_{mnkl})$ matrisi $a_{mnnn} := a_{m,n,n+1,n} := \frac{1}{2}$ $(m, n \in \mathbb{N})$ ve diğer durumlarda $a_{mnkl} := 0$ olacak şekilde ve $B = (b_{mnkl})$ matrisi $b_{1,n,n+1,n} := b_{mnnn} := 1$ $(m, n \in \mathbb{N}, m > 1)$ ve diğer durumlarda $b_{mnkl} := 0$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda

$$[Ax]_{mn} = \frac{x_{nn} + x_{n+1,n}}{2} \quad (m, n \in \mathbb{N})$$

ve

$$[Bx]_{1n} = x_{n+1,n}$$

$$[Bx]_{mn} = x_{nn} \quad (m, n \in \mathbb{N}, m > 1)$$

eşitlikleri sağlanır. A ve B matrislerinin $\mathcal{C}_r-$regüler olduğu kolayca görülür. Ek olarak $\lim\limits_n x_{nn}$ ve $\lim\limits_n x_{n+1,n}$ limitleri mevcut ise $\lim \frac{(x_{nn}+x_{n+1,n})}{2}$ limiti de mevcuttur. Bu nedenle $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rB} \subset \mathcal{C}_{rA}$ sağlanır ancak $x_{kl} := (-1)^{k+l}$ $(k, l \in \mathbb{N})$ ile tanımlanan $x \in \mathcal{M}_u$ dizisi için

$$r - \lim_B x = 1 \quad \text{ve} \quad r - \lim_A x = 0$$

dır.

İlerideki notasyonları daha açık ifade edebilmek için tüm dizi uzayları üzerine tüm çift indisli dizi uzaylarının izomorfizmini verelim:

$\psi : \mathbb{N} \times \mathbb{N} \to \mathbb{N}$ bijeksiyonu

$$\psi[(1,1)] = 1$$

$$\psi[(1,2)] = 2, \quad \psi[(2,2)] = 3, \quad \psi[(2,1)] = 4$$

$$\vdots$$

$$\psi[(1,n)] = (n-1)^2 + 1 =, \quad \psi[(2,n)] = (n-1)^2 + 2 \ldots$$

$$\psi[(n,n)] = (n-1)^2 + n, \quad \psi[(n,n-1)] = n^2 - n + 2, \ldots, \psi[(n,1)] = n^2$$

$$\vdots$$

şeklinde tanımlansın. Her $x \in (x_{kl}) \in \Omega$ elemanını $\left(x_{\psi^{-1}(i)}\right)$ dizisi içine alan izomorfizm τ ile gösterilsin. $\tau^2(c) \subset \mathcal{C}_r$ ve

$$r - \lim_{k,l} z_{\psi[(k,l)]} = \lim_i z_i \quad (z \in c) \tag{4.15}$$

olup bununla beraber $\tau^{-1}(cs) \supset \mathcal{CS}_r := \left\{ x \in \Omega \mid \left(\sum\limits_{l=1}^{q} \sum\limits_{k=1}^{p} x_{kl} \right)_{p,q} \in \mathcal{C}_r \right\}$ ve

$$\sum_i x_{\psi^{-1}(i)} = r - \sum_{k,l} x_{kl} \quad (x \in \mathcal{CS}_r) \tag{4.16}$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 4.19 A ve B 4-boyutlu matrisleri aşağıdaki şartların en az birini gerçekleyen ve $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rA} \subset \mathcal{C}_{rB}$ olmak üzere $\mathcal{C}_r-$regüler matrisler olsun.

i) $A' = (a'_{ik}) := (a_{m_i n_i \psi^{-1}(k)})_{i,k}$, $B' = (b'_{ik}) := (b_{p_i q_i \psi^{-1}(k)})_{i,k}$ için $m \cap c_{A'} \subset c_{B'}$ ya da $m \cap c_{B'} \subset c_{A'}$ olacak şekilde (m_i), (n_i), (p_i) ve (q_i) doğal sayı dizileri mevcuttur.

ii) Her $n \in \mathbb{N}$ için $m, n > N$ var öyleki $(a_{mt\psi^{-1}k)})_{t,k}$ ya da $(a_{tm\psi^{-1}k)})_{t,k}$ (A' ile gösterilir) matrislerinin en az biri regülerdir ve $(b_{nt\psi^{-1}k)})_{t,k}$ ya da $(b_{nt\psi^{-1}k)})_{t,k}$ (B' ile gösterilir) matrislerinin en az biri regülerdir. Ayrıca $m \cap c_{A'} \subset c_{B'}$ ya da $m \cap c_{B'} \subset c_{A'}$ sağlanır.

Bu durumda $\forall x \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rA}$ için $r - \lim_A x = r - \lim_B x$ dır.

İspat. i) Her $z \in c$ için $\tau^{-1}(z)$ çift indisli dizisi $\mathcal{C}_r$ dedir. Bu nedenle (4.15) ve (4.16) dan

$$\begin{aligned}
\lim_i \sum_k a'_{ik} z_k &= \lim_i r - \sum_{k,l} a_{m_i n_i kl} (\tau^{-1}(z))_{k,l} \\
&= r \lim_{m,n} [A\tau^{-1}(z)]_{mn} \\
&= r \lim_{m,n} (\tau^{-1}(z))_{mn} \\
&= \lim_i z_i \quad (z \in c)
\end{aligned}$$

elde edilir. Eğer herhangi $x \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rA}$ için $r - \lim_A x \neq r - \lim_B x$ ise

$$\lim_{A'} \tau(x) \neq \lim_{B'} \tau(x)$$

olur. Bu ise Teorem 3.7 (c) ile çelişir.

ii) A ve B matrisleri (ii) hipotezini sağlasın. Eğer herhangi $x \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rA}$ için $r - \lim_A x \neq r - \lim_B x$ ise genelliği kaybetmeden $\Re\,(r - \lim_A x - r - \lim_B x) >$

0 olarak kabul edilebilir. Bu durumda $N \in \mathbb{N}$ sayısı vardır öyleki uygun $\nu > 0$ için

$$m,n,p,q > N \Rightarrow \Re\left(r - \sum_{k,l} a_{mnkl}x_{kl} - r - \sum_{k,l} b_{pqkl}x_{kl}\right) > \nu$$

olup $m,n > N$ için

$$A_1' := (a_{mt\psi^{-1}(k)})_{t,k}\ ,\quad A_2' := (a_{tm\psi^{-1}(k)})_{t,k}$$
$$B_1' := (b_{nt\psi^{-1}(k)})_{t,k}\ ,\quad B_2' := (b_{tn\psi^{-1}(k)})_{t,k}$$

tanımlanırsa bu durumda $z = \tau(x) \in m \cap c_{A_j'} \cap c_{B_k'}$ için

$$\Re\left(\lim_{A_j'} z - \lim_{b_k'} z\right) \geq \nu \quad (j,k = 1,2)$$

elde edilir. ■

Örnek 4.20 a) Örnek 4.16 daki A matrisi ve Örnek 4.18 deki B matrisi için

$$\begin{aligned}\mathcal{C}_{rA} &= \left\{x \in \Omega \mid (x_{m+1,n}) \in \mathcal{C}_r \text{ ve } \lim_n x_{1,2n-1},\ \lim_n x_{1,2n} \text{ mevcut}\right\}\\ &\subset \mathcal{C}_{rB} = \left\{x \in \Omega \mid \lim_n x_{n+1,n} \text{ ve } \lim_n x_{nn} \text{ mevcut}\right\}\end{aligned}$$

dır. $a_{ik}' := a_{i+1,i,\psi^{-1}(k)}$ ve $b_{ik}' := b_{ii\psi^{-1}(k)}$ şeklinde seçilirse o zaman $A' = (a_{ik}')$ ve $B' = (b_{ik}')$ matrisleri için $c_{A'} = c_{B'}$ olur. Böylece $x \in \mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rA} = \mathcal{C}_{rA}$ için $r - \lim_A x = r - \lim_B x$ dır.

b) A ve B 4-boyutlu matrisler ve $m,n \in \mathbb{N}$ için

$$[Ax]_{m,2n} = x_{mm},\quad [Ax]_{m,2n-1} = \frac{n}{n+1}x_{mm},\quad [Bx]_{mn} = x_{mm} + \frac{x_{m,m+1}}{m}$$

olsun. Bu durumda A ve B matrisleri $\mathcal{C}_r-$regülerdir ve $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rA} = \mathcal{C}_{rB}$ dır. Ayrıca $A' := (a_{m,2n,\psi^{-1}(i)})_{m,i}$ ve $B' := (b_{m,2n,\psi^{-1}(i)})_{m,i}$ matrisleri regülerdir ve $m \subset c_{A'} \subset c_{B'}$ $(n \in \mathbb{N})$ sağlanır. Dolayısıyla A ve B matrisleri $\mathcal{M}_u \cap \mathcal{C}_{rA}$ da tutarlıdır.

4.2. ÇİFT İNDİSLİ SERİLERİN PRINGSHEIM YAKINSAKLIĞI

Çift indisli dizilerin Pringsheim anlamında yakınsaklığı daha önce belirtilmişti. Şimdi reel terimli $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ çift indisli serisinin Pringsheim yakınsaklığı tanımlansın.

Tanım 4.21 Her $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ için $A_{mn} = \sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} a_{kl}$ olsun. $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisinin kısmi toplamlar dizisi (A_{mn}) Pringsheim anlamında yakınsak ise bu seriye yakınsaktır denir. Yani, $\forall\varepsilon > 0$ için $(m_0, n_0) \in \mathbb{N}^2$ olmak üzere

$$(m,n) \geq (m_0, n_0) \Rightarrow |A_{mn} - A| < \varepsilon$$

olacak şekilde $\exists A \in \mathbb{R}$ vardır.

a_{kl} sıfırdan farklı olmak üzere $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart (A_{mn}) kısmi toplamlar dizisinin üstten sınırlı olmasıdır. Bu durumda sabit her $k \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{l} a_{kl}$ serisine satır serisi ve sabit her $l \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{k} a_{kl}$ serisine sütun serisi denir.

4.2.1. Mutlak Yakınsaklık

Çift indisli bir seri mutlak yakınsak ise satır ve sütun serileri de mutlak yakınsaktır. Ancak bunun tersi doğru değildir. Örneğin; $a_{kk} := 1$ ve $k \neq l$ için $a_{kl} := 0$ olacak şekilde $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisi göz önüne alınırsa

$$\forall k \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{l} |a_{kl}| = 1 \text{ ve } \forall l \in \mathbb{N} \text{ için } \sum_{k} |a_{kl}| = 1$$

olup $\sum\limits_{k,l} |a_{kl}|$ serisi yakınsak değildir.

Lemma 4.22 $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ çift indisli serisinin mutlak yakınsak olması için gerek ve yeter şart

i) $\forall(m,n) \geq (k_0,l_0)$ için $\sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0}^{n}|a_{kl}| \leq \alpha_0$ olacak şekilde $(k_0,l_0) \in \mathbb{N}^2$ ve $\alpha_0 > 0$ sayısı mevcuttur,

ii) Her satır ve sütun serilerilerinin mutlak yakınsak olmasıdır.

Teorem 4.23 (Cauchy Benzerkik Testi) (a_{kl}) negatif olmayan terimli monoton azalan bir çift indisli dizi olsun. $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} 2^{k+l}a_{2^k,2^l}$ serisinin yakınsak olmasıdır.

İspat. $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ olmak üzere $2^i \leq m < 2^{i+1}$ ve $2^j \leq n < 2^{j+1}$ olacak şekilde $i,j \in \mathbb{N}_0$ alınsın. Bu durumda her $(j,k) \in \mathbb{N}_0^2$ için $a_{kl} \geq 0$ olduğundan

$$\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{j-1}\left(\sum_{u=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1}a_{uv}\right) \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}a_{kl} \leq \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}\left(\sum_{u=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1}a_{uv}\right)$$

sağlanır ve (a_{kl}) monoton azalan dizi olduğundan yukarıdaki kısmi toplamda her bir terim yerine $a_{2^{k+1},2^{l+1}}$ alınırsa kısmi toplamdaki terim sayısı 2^{k+l} olduğundan

$$\sum_{k=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{j-1}2^{k+l}a_{2^{k+1},2^{l+1}} \leq \sum_{k=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{j-1}\left(\sum_{u=2^k}^{2^{k+1}-1}\sum_{v=2^l}^{2^{l+1}-1}a_{uv}\right)$$

olup

$$\frac{1}{4}\sum_{k=1}^{i}\sum_{l=1}^{j}2^{k+l}a_{2^k,2^l} = \sum_{k=0}^{i-1}\sum_{l=0}^{j-1}2^{k+l}a_{2^{k+1},2^{l+1}} \leq \sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n}a_{kl} \leq \sum_{k=0}^{i}\sum_{l=0}^{j}2^{k+l}a_{2^k,2^l}$$

elde edilir. Buradan ise $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} 2^{k+l}a_{2^k,2^l}$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olması için gerek ve yeter şart $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ serisinin de kısmi toplamlarının sınırlı olmasıdır. Ayrıca (a_{k1}) ve (a_{1l}) negatif olmayan terimli monoton azalan diziler olmak üzere $\sum\limits_{k,l=1}^{\infty} a_{kl}$ yakınsak ise $\sum\limits_{l} a_{1l}$ satır serisi ve $\sum\limits_{k} a_{k1}$ sütun serisi de yakınsaktır. Bu durumda tek indisli seriler için Cauchy benzerlik testinden $\sum\limits_{k=0}^{\infty} 2^k a_{2^k,1}$ ve $\sum\limits_{l=0}^{\infty} 2^l a_{1,2^l}$

serileri yakınsaktır. ■

Örnek 4.24 $p \in \mathbb{R}$ ve $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ için $a_{kl} := \frac{1}{(k+l)^p}$ olsun. Cauchy benzerlik testinden $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $b_{kl} := \frac{2^{k+l}}{(2^k+2^l)^p}$ olmak üzere $\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ serisinin yakınsak olmasıdır.

$p \leq 2$ ise $k \in \mathbb{N}$ için

$$b_{kk} = \frac{2^{2k}}{(2.2^k)^p} = \frac{1}{2^p} 2^{k(2-p)} \geq \frac{1}{2^p}$$

olup dolayısıyla $\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ serisi ıraksaktır.

$p > 2$ ise $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ için

$$b_{kl} = \frac{2^{k+l}}{(2^k+2^l)^p} \leq \frac{2^{k+l}}{2^p(2^{k+l})^{\frac{p}{2}}} = \frac{1}{2^p}(2^{\frac{(2-p)}{2}})^{k+l}$$

olup dolayısıyla $\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ serisi yakınsaktır. O halde $\sum\limits_{k,l} \frac{1}{(k+l)^p}$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $p > 2$ olmasıdır.

$\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ yakınsak ise $k,l \to \infty$ olduğunda $a_{kl} \to 0$ dır. Bu $(k,l)-$inci terim testi, ıraksak çift indisli serileri kurmak için kullanışlıdır. Bu testin aşağıdaki biçimi tek indisli seriler için Abel k-ıncı terim testine benzerdir.

Teorem 4.25 (Abel (k,l)-inci Terim Testi) (a_{kl}) negatif olmayan terimli monoton azalan bir çift indisli dizi olsun. Bu durumda $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisi yakınsak ise $k,l \to \infty$ olduğunda $kla_{kl} \to 0$ dır.

İspat. $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ verilsin. $i_k, j_l \in \mathbb{N}_0$ için $2^{i_k} \leq k < 2^{i_k+1}$ ve $2^{j_l} \leq l < 2^{j_l+1}$ olsun bu durumda

$$0 \leq kla_{kl} \leq 2^{i_k+1} 2^{j_l+1} a_{2^{i_k},2^{j_l}} = 4.2^{i_k}.2^{j_l}.a_{2^{i_k},2^{j_l}}$$

eşitliğini göz önüne alalım bu takdirde Cauchy benzerlik testinden $\sum\limits_{i,j=0}^{\infty} 2^{i+j} a_{2^i,2^j}$ serisi yakınsaktır. Dolayısıyla $i,j \to \infty$ olduğunda $2^{i+j} a_{2^i,2^j} \to 0$ olup $k,l \to \infty$

olduğunda ise $kla_{kl} \to 0$ alacaktır. ■

Örnek 4.26 i) $p, q \in \mathbb{R}$ için $p > 0,\ q > 0$ ve $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} \geq 1$ olsun. $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ için $a_{kl} := \frac{1}{(k^p + l^q)}$ seçelim.

$k \in \mathbb{N}$ ve $l = [\![k^{\frac{p}{q}}]\!]$ için

$$kla_{kl} = \frac{kl}{k^p + l^q} > \frac{k(k^{\frac{p}{q}} - 1)}{k^p + (k^{\frac{p}{q}})^q} = \frac{1}{2}k^{1-p+\frac{p}{q}}(1 - k^{-\frac{p}{q}})$$

olup $1 - p + \frac{p}{q} \geq 0$ ve $\frac{p}{q} > 0$ olduğundan $k \to \infty$ için kla_{kl} sıfıra yakınsamaz. Bu nedenle $\sum\limits_{k,l} \frac{1}{(k^p + l^q)}$ serisi ıraksaktır.

ii) $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ için

$$a_{kl} := \frac{1}{kl(\ln k)(\ln l)}$$

tanımlansın. (a_{kl}) terimleri negatif olmayan monoton azalan bir çift indisli dizidir ve $k, l \to \infty$ olduğunda $kla_{kl} \to 0$ dır. Ancak $m, n \to \infty$ olduğunda

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} a_{kl} = \left(\sum_{k=1}^{m} \frac{1}{k.\ln k}\right)\left(\sum_{l=1}^{n} \frac{1}{l.\ln l}\right) \to \infty$$

elde edilir. Bu ise Teorem 4.25 in tersinin doğru olmadığını gösterir.

Teorem 4.27 (Limit Karşılaştırma Testi) Her $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ için $a_{kl} > 0$, $b_{kl} > 0$ olacak şekilde (a_{kl}) ve (b_{kl}) çift indisli dizileri mevcut, $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ ve $\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ serilerine karşılık gelen satır ve sütun serileri yakınsak ve $r \in \mathbb{R}$, $r \neq 0$ olmak üzere $\lim\limits_{k,l} \frac{a_{kl}}{b_{kl}} = r$ olsun. Bu durumda $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ serisinin yakınsak olmasıdır.

İspat. $\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ serisi yakınsak olsun. O halde her $(m,n) \in \mathbb{N}^2$ için

$$\sum_{k=1}^{m}\sum_{l=1}^{n} b_{kl} \leq \beta$$

olacak şekilde $\beta > 0$ sayısı vardır. $k, l \to \infty$ olduğunda $\frac{a_{kl}}{b_{kl}} \to r$ olup $\exists (k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ öyleki her $(k, l) \geq (k_0, l_0)$ için $a_{kl} \leq (r+1) b_{kl}$ dir. Bu nedenle her $(m, n) \geq (k_0, l_0)$ için

$$\sum_{k=k_0}^{m} \sum_{l=l_0}^{n} a_{kl} \leq (r+1) \sum_{k=k_0}^{m} \sum_{l=l_0}^{n} b_{kl} \leq (r+1)\beta$$

elde edilir. Böylece Lemma 4.22 den $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisi yakınsaktır.

Karşıt olarak $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisi yakınsak olsun. O halde $\lim\limits_{k,l} \frac{b_{kl}}{a_{kl}} = \frac{1}{r}$ olduğundan ispatın ilk kısmından a_{kl} ile b_{kl} nin yeri değiştirilerek $\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ serisinin yakınsaklığı elde edilir. ■

Teorem 4.28 (Oran Testi) (a_{kl}) terimleri sıfırdan farklı çift indisli bir dizi ve $a, \tilde{a} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ olmak üzere

$$\frac{|a_{k,l+1}|}{|a_{kl}|} \to a \quad \text{ya da} \quad \frac{|a_{k+1,l}|}{|a_{kl}|} \to \tilde{a}$$

olsun. Bu durumda

i) $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisine karşılık gelen satır ve sütun serileri mutlak yakınsak olmak üzere eğer $a < 1$ veya $\tilde{a} < 1$ ise $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisi de mutlak yakınsaktır.

ii) Eğer $a > 1$ veya $\tilde{a} > 1$ ise $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisi ıraksaktır.

İspat. i) $a < 1$ olsun. O zaman $\alpha \in (0, 1)$ ve $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ vardır öyleki her $(k, l) \geq (k_0, l_0)$ için $|a_{k,l+1}| \leq \alpha |a_{kl}|$ sağlanır. Bu nedenle her $(k, l) \geq (k_0, l_0 + 1)$ için

$$|a_{kl}| \leq \alpha |a_{k,l-1}| \leq \ldots \leq \alpha^{l-l_0} |a_{k,l_0}|$$

elde edilir. $\alpha < 1$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{l=1}^{n} \alpha^l \leq \frac{1}{1-\alpha}$ elde edilir. Bununla birlikte, hipotezden $\sum\limits_{k} a_{k,l_0}$ serisi mutlak yakınsak kabul edildiğinden $\exists \beta > 0$ vardır öyleki her $m \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{k=1}^{m} |a_{k,l_0}| < \beta$ olur. Bu nedenle her $(m, n) \geq (k_0, l_0+1)$

için

$$\sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0+1}^{n}|a_{kl}| \le \frac{\alpha^{-l_0}\beta}{1-\alpha}$$

elde edilir. Lemma 4.22 den $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisi mutlak yakınsaktır. $a < 1$ yerine $\tilde{a} < 1$ alınırsa benzer yolla ispat yapılır.

ii) $a > 1$ olacak şekilde $a \in \mathbb{R}$ ya da $a = \infty$ olsun. O zaman $\alpha \in (1, \infty)$ ve $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}^2$ vardır öyleki her $(k, l) \ge (k_0, l_0)$ için

$$\frac{|a_{k,l+1}|}{|a_{kl}|} \ge \alpha$$

elde edilir. Bu nedenle her $(k, l) \ge (k_0, l_0 + 1)$ için

$$|a_{kl}| \ge \alpha|a_{k,l-1}| \ge \ldots \ge \alpha^{l-l_0}|a_{k,l_0}| > 0$$

elde edilir. $k \ge k_0$ olacak şekilde sabit bir $k \in \mathbb{N}$ için $l_1 \in \mathbb{N}$ vardır öyleki her $l \ge l_1$ için $|a_{kl}| \ge \alpha^{l-l_0}|a_{k,l_0}| \ge 1$ sağlanır. Bu nedenle $k, l \to \infty$ için $a_{kl} \nrightarrow 0$ ve dolayısıyla $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisi ıraksaktır. $\tilde{a} > 1$ olacak şekilde $\tilde{a} \in \mathbb{N}$ ya da $\tilde{a} = \infty$ olduğunda da aynı sonuç elde edilir. ■

Uyarı 4.29 i) Teorem 4.28 (ii) nin ispatından $a > 1$ olduğunda yeterince büyük $\forall k$ için $\sum\limits_{l} a_{kl}$ satır serisinin ıraksak olduğunu görülür. Bu nedenle her satır serisi yakınsak ve Teorem 4.28 de geçen a limiti mevcutsa $a \le 1$ dir. Benzer olarak yeterince büyük $\forall l$ için $\sum\limits_{k} a_{kl}$ sütun serisinin ıraksak olduğu görülür. Bu nedenle her sütun serisi yakınsak ve Teorem 4.28 de geçen $\tilde{a}$ limiti mevcutsa $\tilde{a} \le 1$ dir.

ii) $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisine karşılık gelen satır ve sütun serileri mutlak yakınsak olsun. Bu durumda eğer $a = \tilde{a} = 1$ ise seri yakınsak ya da ıraksak olabilir.

iii) (a_{kl}) pozitif terimli bir çift indisli dizi olsun. Herhangi $k \in \mathbb{N}$ için $b_k := \lim\limits_{l} \frac{a_{k,l+1}}{a_{kl}}$ ve $l \in \mathbb{N}$ için $c_l := \lim\limits_{k} \frac{a_{k+1,l}}{a_{kl}}$ limitleri göz önüne alınsın. Biermann ve Vorob'ev in iddiasına göre eğer her $k \in \mathbb{N}$ için b_k mevcut ve 1 den küçük ise

$\sum_{k,l} a_{kl}$ serisi mutlak yakınsaktır.

Tek indisli seriler için oran testinden $\sum_{k,l} a_{kl}$ serisinin satır ve sütun serilerinin mutlak yakınsak olmasına rağmen $\sum_{k,l} a_{kl}$ çift indisli serisi mutlak yakınsak olmayabilir. Örneğin, $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ için

$$a_{k,l} := \frac{1}{2^k 2^{l/2^k}}$$

alınsın. O zaman her $k \in \mathbb{N}$ için $b_k < 1$ ve her $l \in \mathbb{N}$ için $c_l < 1$ dır. Ancak her sabit $k \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{l=1}^{\infty} a_{kl} = \frac{1}{2^k} \sum_{l=1}^{\infty} \left(\frac{1}{2^{l/2^k}} \right)^l = \frac{1}{2^k (2^{1/2^k} - 1)}$$

ve $k \to \infty$ için $\frac{1}{2^k (2^{1/2^k} - 1)} \to \frac{1}{\ln 2}$ olduğundan $\sum_k \sum_l a_{kl}$ serisi ıraksaktır ve bu nedenle $\sum_{k,l} a_{kl}$ serisi ıraksaktır. Dolayısıyla Biermann ve Vorob'ev in iddiası doğru değildir.

iv) Her $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ için $a_{kl} > 0$ ve $\sum_{k,l} a_{kl}$ serisinin her satır ve sütun serisi yakınsak olsun.

Eğer $\lim_{k,l} a_{kl}$ ve

$$d := \lim_{k,l} \frac{a_{k+1,l} + a_{k,l+1} - a_{k+1,l+1}}{a_{kl}}$$

limitleri mevcut ve $d < 1$ ise bu durumda $\sum_{k,l} a_{kl}$ serisi yakınsaktır.

Şimdi ise bu versiyon ile Teorem 4.28 yı karşılaştıralım. Teorem 4.28 deki $a, \tilde{a}$ mevcut ve $\mathbb{R}$ de olsun. O zaman d limiti mevcut olup

$$d := \lim_{k,l} \left(\frac{a_{k+1,l}}{a_{kl}} + \frac{a_{k,l+1}}{a_{kl}} - \frac{a_{k+1,l+1}}{a_{k+1,l}} \frac{a_{k+1,l}}{a_{kl}} \right)$$

elde edilir. (i) şıkkından $a \le 1$, $\tilde{a} \le 1$ ve $1 - d = (1-a)(1-\tilde{a})$ olduğundan

$$\text{“}d < 1 \quad \Leftrightarrow \quad a < 1 \ \text{ ve } \ \tilde{a} < 1\text{”}$$

ifadesi gerçeklenir. Bu nedenle a ve $\tilde{a}$ dan yalnız biri 1 e eşit ise $d = 1$ dir.

Dolayısıyla Teorem 4.28 geçerli olup, (iv) geçerli değildir. Örneğin,

$$a_{kl} := \frac{1}{k^2 2^l}$$

alınırsa $a = 1/2$, $\tilde{a} = 1$ ve $d = 1$ elde edilir.

Şimdi a limiti mevcut ve 1 den farklı olsun. Bu durumda d limiti mevcut ise $\tilde{a}$ limiti de mevcuttur ve $\frac{d-a}{1-a}$ ifadesine eşittir. Buradan $a < 1$ ve $\tilde{a}$ mevcut değilse d limiti mevcut olamaz. Dolayısıyla çift indisli seriler için Teorem 4.28 uygulanabilir ancak (iv) uygulanamaz. Örneğin,

$$a_{kl} := \frac{1}{2^{(k^2+kl+l)/k}}$$

alınırsa $a = 1/2$ olup $\tilde{a}$ ve d mevcut değildir.

Teorem 4.30 (Oran Karşılaştırma Testi) $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2$ için $b_{kl} > 0$ olmak üzere (b_{kl}) ve (a_{kl}) çift indisli iki dizi olsun. Bu takdirde

i) $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisine karşılık gelen satır ve sütun serileri yakınsak olmak üzere yeterince büyük k, l için

$$|a_{k,l+1}| b_{kl} \leq |a_{kl}| b_{k,l+1}, \qquad |a_{k+1,l}| b_{kl} \leq |a_{kl}| b_{k+1,l}$$

ve $\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ serisi yakınsak ise bu durumda $\sum\limits_{k,l} |a_{kl}|$ serisi de yakınsaktır.

ii) Yeterince büyük $k, l \in \mathbb{N}$ için

$$|a_{k,l+1}| b_{kl} \geq |a_{kl}| b_{k,l+1} > 0, \qquad |a_{k+1,l}| b_{kl} \geq |a_{kl}| b_{k+1,l} > 0$$

ve $\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ serisi ıraksak ise bu durumda $\sum\limits_{k,l} |a_{kl}|$ serisi de ıraksaktır.

İspat. i) $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ alalım. $\forall (k,l) \geq (k_0, l_0)$ için

$$|a_{k,l+1}| b_{kl} \leq |a_{kl}| b_{k,l+1} \quad \text{ve} \quad |a_{k+1,l}| b_{kl} \leq |a_{kl}| b_{k+1,l}$$

olsun. Bu durumda $(k,l) \geq (k_0, l_0)$ için

$$\frac{|a_{kl}|}{b_{kl}} \leq \frac{|a_{k,l-1}|}{b_{k,l-1}} \leq \ldots \leq \frac{|a_{kl_0}|}{b_{kl_0}} \leq \frac{|a_{k-1,l}|}{b_{k-1,l}} \leq \ldots \leq \frac{|a_{k_0l_0}|}{b_{k_0l_0}}$$

elde edilir.

$\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ serisi yakınsak olsun. $\beta := \sup\left\{\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} b_{kl} \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\} < \infty$ olduğundan $\forall m \geq k_0$ ve $\forall n \geq l_0$ için

$$\sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0}^{n} |a_{kl}| \leq \frac{|a_{k_0l_0}|}{b_{k_0,l_0}} \sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0}^{n} b_{kl} \leq \beta \frac{|a_{k_0l_0}|}{b_{k_0,l_0}}$$

elde edilir. Böylece Lemma 4.22 den $\sum\limits_{k,l} |a_{kl}|$ serisi yakınsak olur.

ii) $k_0, l_0 \in \mathbb{N}$ olsun öyleki $k \geq k_0$, $l \in \mathbb{N}$ için $|a_{k+1,l}| b_{kl} \geq |a_{kl}| b_{k+1,l} > 0$ ve $l \geq l_0$, $k \in \mathbb{N}$ için $|a_{k,l+1}| b_{kl} \geq |a_{kl}| b_{k,l+1} > 0$ sağlansın. Ayrıca $\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ ıraksak olsun. Eğer $l \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{k} b_{kl}$ serisi ıraksak ise tek indisli seriler için oran testinden aynı l için $\sum\limits_{k} |a_{kl}|$ serisi de ıraksaktır. Benzer olarak $k \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{l} b_{kl}$ serisi ıraksak ise tek indisli seriler için oran testinden aynı k için $\sum\limits_{l} |a_{kl}|$ serisi de ıraksaktır. Bu durumda Lemma 4.22 (ii) sağlanmaz ve bu nedenle $\sum\limits_{k,l} |a_{kl}|$ serisi ıraksaktır. Kalan durumda $\left\{\sum\limits_{k=1}^{m}\sum\limits_{l=1}^{n} b_{kl} \mid (m,n) \in \mathbb{N}^2\right\}$ sınırsızdır. Tersine, (i) deki eşitsizlikten

$$\sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0}^{n} |a_{kl}| \geq \frac{|a_{k_0l_0}|}{b_{k_0,l_0}} \sum_{k=k_0}^{m}\sum_{l=l_0}^{n} b_{kl}$$

elde edilir. Bu eşitsizlikte $m, n \to \infty$ olduğunda ∞ a gider. Bu nedenle Lemma 4.22 den $\sum\limits_{k,l} |a_{kl}|$ serisi ıraksak olur. ■

Uyarı 4.31 Teorem 4.30 (i) de

$$|a_{k,l+1}| b_{kl} \leq |a_{kl}| b_{k,l+1} \quad \text{ve} \quad |a_{k+1,l}| b_{kl} \leq |a_{kl}| b_{k+1,l}$$

eşitsizlikleri gereklidir. $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ için

$$a_{kl} := \frac{1}{(k+l)^2} \quad \text{ve} \quad b_{kl} := \frac{1}{2^k(k+l)^2}$$

alalım. Satır ve sütun serileri yakınsak olmasına rağmen $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ çift indisli serisi ıraksaktır. Ancak $\forall (k,l) \in \mathbb{N}^2$ için

$$\frac{1}{2^k(k+l)^2} \le \frac{1}{2^k l^2}$$

olduğundan $\sum\limits_{k,l} b_{kl}$ çift indisli serisi yakınsaktır. Böylece yukarıdaki ilk eşitsizlik sağlanır ikincisi ise sağlanmaz. Teorem 4.30 (ii) de

$$|a_{k,l+1}|b_{kl} \ge |a_{kl}|b_{k,l+1} \quad \text{ve} \quad |a_{k+1,l}|b_{kl} \ge |a_{kl}|b_{k+1,l}$$

eşitsizlikler gereklidir. Bunu görmek için yukarıda a_{kl} ile b_{kl} dizilerini yer değiştirmek yeterlidir.

Teorem 4.32 (a_{kl}) çift indisli bir dizi olsun. Bu durumda

i) $\sum\limits_{k,l} |a_{kl}|$ serisine karşılık gelen satır ve sütun serileri yakınsak olmak üzere eğer yeterince büyük k ve l için

$$|a_{k,l+1}| \le \left(1 - \frac{p}{l}\right)|a_{kl}| \quad \text{ve} \quad |a_{k+1,l} \le \left(1 - \frac{p}{k}\right)|a_{kl}|$$

olacak şekilde $p > 1$ mevcut ise $\sum\limits_{k,l} |a_{kl}|$ serisi yakınsaktır.

ii) Eğer $k \in \mathbb{N}$ ve yeterince büyük her $l \in \mathbb{N}$ için

$$|a_{k,l+1}| \ge \left(1 - \frac{1}{l}\right)|a_{kl}| > 0$$

ya da $l \in \mathbb{N}$ ve yeterince büyük her $k \in \mathbb{N}$ için

$$|a_{k+1,l} \ge \left(1 - \frac{1}{k}\right)|a_{kl}| > 0$$

eşitsizlikleri gerçeklenir ise bu takdirde $\sum\limits_{k,l}|a_{kl}|$ serisi ıraksaktır.

İspat. i) Verilen eşitsizlikleri sağlayan bir $p > 1$ mevcut olsun. Bu durumda $x \in [0,1]$ olmak üzere $1 - px \leq (1-x)^p$ eşitsizliği kullanılarak yeterince büyük k, l için

$$|a_{k,l+1}| \leq \left(1 - \frac{p}{l}\right)|a_{kl}| \leq \left(1 - \frac{1}{l}\right)^p |a_{kl}| \leq \left(\frac{l}{l+1}\right)^p |a_{kl}|$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$|a_{k,l+1}|\frac{1}{k^p l^p} \leq |a_{kl}|\frac{1}{k^p(l+1)^p}$$

elde edilir. Benzer olarak, yeterince büyük k, l için

$$|a_{k+1,l}|\frac{1}{k^p l^p} \leq |a_{kl}|\frac{1}{(k+1)^p l^p}$$

elde edilir. Böylece Teorem 4.30 (i) da $\forall(k,l) \in \mathbb{N}^2$ için $b_{kl} := \frac{1}{k^p l^p}$ alarak istenilen sonuç elde edilir.

ii) Verilen eşitsizlikler sağlansın. Bu durumda tek indisli seriler için Raabe Testinden herhangi $l \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{k}|a_{k,l}|$ ıraksak ya da $k \in \mathbb{N}$ için $\sum\limits_{l}|a_{k,l}|$ serisi ıraksaktır. Dolayısıyla Lemma 4.22 sağlanmaz; $\sum\limits_{k,l}|a_{k,l}|$ serisi ıraksaktır. ■

Örnek 4.33 i) $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ olmak üzere $a_{11} := 1$, $a_{k+1,1} := (2k-1)a_{k1}/(2k+2)$ $(k \in \mathbb{N})$, $a_{k,l+1} := (2l-1)a_{kl}/(2l+2)$ dizisi tanımlansın. Bu durumda Teorem 4.32 (i) de $p = 5/4$ alınırsa $\sum\limits_{k,l} a_{a_{kl}}$ çift indisli serisi yakınsaktır.

ii) $(k,l) \in \mathbb{N}^2$ olmak üzere $a_{11} := 1$, $a_{k+1,1} := ka_{k1}/(k+1)$ $(k \in \mathbb{N})$, $a_{k,l+1} := la_{kl}/(l+1)$ dizisi tanımlansın. Bu takdirde Teorem 4.32 den $\sum\limits_{k,l} a_{a_{kl}}$ çift indisli serisi ıraksaktır. Her iki örnekte de $a = \tilde{a} = 1$ olduğundan Teorem 4.28 uygulanamaz.

Teorem 4.34 (a_{kl}) terimleri sıfırdan farklı çift indisli bir dizi olsun. Bu durumda

i) $a, \tilde{a} \in \mathbb{R} \cup \{\infty\}$ olmak üzere

$$l\left(1 - \left|\frac{a_{k,l+1}}{a_{kl}}\right|\right) \to a \quad \text{ve} \quad k\left(1 - \left|\frac{a_{k+1,l}}{a_{kl}}\right|\right) \to \tilde{a} \qquad (k, l \to \infty)$$

olduğunu kabul edelim. Bu durumda $\sum\limits_{k,l} |a_{kl}|$ serisine karşılık gelen her satır ve sütun serileri yakınsak olsun. Eğer $a > 1$ ve $\tilde{a} > 1$ ise bu durumda $\sum\limits_{k,l} |a_{kl}|$ serisi yakınsaktır.

ii) Herhangi $k \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{l \to \infty} l\left(1 - \left|\frac{a_{k,l+1}}{a_{kl}}\right|\right)$ limiti mevcut ve 1 den küçük; herhangi $l \in \mathbb{N}$ için $\lim\limits_{k \to \infty} k\left(1 - \left|\frac{a_{k+1,l}}{a_{kl}}\right|\right)$ limiti mevcut ve 1 den küçük ise bu durumda $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisi ıraksaktır.

Uyarı 4.35 $\forall (k, l) \in \mathbb{N}^2$ için $a_{kl} > 0$ ve $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisine karşılık gelen satır ve sütun serileri yakınsak olsun. Çift indisli seriler için Raabe testinin bir analoğu aşağıdaki gibi verilir.

$$r := \lim_{k,l} \left[(k + l)\left(1 - \frac{a_{k+l,l} + a_{k,l+1} - a_{k+1,l+1}}{a_{kl}}\right) + \frac{a_{k+1,l+1}}{a_{kl}} \right]$$

limiti mevcut ve $r > 1$ ise bu durumda $\sum\limits_{k,l} a_{kl}$ serisi yakınsaktır.

Teorem 4.34 deki a ve $\tilde{a}$ limitleri mevcut ve $\mathbb{R}$ de olsun. Bu durumda

$$\frac{a_{k,l+1}}{a_{kl}} \to 1 \quad \text{ve} \quad \frac{a_{k+1,l}}{a_{kl}} \to 1 \qquad (k, l \to \infty)$$

olup

$$\begin{aligned} r := \lim_{k,l} \Bigg[& k\left(1 - \left|\frac{a_{k+1,l}}{a_{kl}}\right|\right) + l\left(1 - \left|\frac{a_{k,l+1}}{a_{kl}}\right|\right) - \frac{a_{k+1,l}}{a_{kl}} l \left(1 - \left|\frac{a_{k+1,l+1}}{a_{k+1,l}}\right|\right) \\ & - \frac{a_{k,l+1}}{a_{kl}} k \left(1 - \left|\frac{a_{k+1,l+1}}{a_{k,l+1}}\right|\right) + \frac{a_{k+1,l+1}}{a_{k,l+1}} \frac{a_{k,l+1}}{a_{kl}} \Bigg] \\ = {} & \tilde{a} + a - a - \tilde{a} + 1 = 1 \end{aligned}$$

elde edilir. Tüm bu durumlarda Teorem 4.34 uygulanabilirdir ancak yukarıda verilen Raabe testi uygulanamaz. Örneğin 4.33 (ii) de $a = 2 = \tilde{a}$ olduğu halde

$r = 1$ dir.

4.2.2. Cauchy Çarpımı

$k \in \mathbb{N}_0$ için (a_k) ve (b_k) dizilerinin Cauchy çarpımı $(a_k * b_k)$ dizisidir ve bu dizinin terimleri $a_k * b_k := \sum\limits_{i=1}^{k} a_i b_{k-i}$ şeklindedir. $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k$, $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ serilerinin Cauchy çarpımı ise $\sum\limits_{k=0}^{\infty} (a_k * b_k)$ şeklinde tanımlanır.

Benzer olarak, $k, l \in \mathbb{N}_0$ için (a_{kl}) ve (b_{kl}) çift indisli dizilerinin Cauchy çarpımı $(a_{kl} * b_{kl})$ dizisidir ve terimleri $a_{kl} * b_{kl} := \sum\limits_{i=1}^{k} \sum\limits_{j=1}^{l} a_{ij} b_{k-i,l-j}$ şeklindedir. $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$, $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ çift indisli serilerinin Cauchy çarpımı ise $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} (a_{kl} * b_{kl})$ şeklinde tanımlanır.

Tek indisli herhangi iki seri için, eğer serilerin biri mutlak yakınsak ve diğeri yakınsak ise bu iki serinin Cauchy çarpımı yakınsaktır. Ancak çift indisli seriler için aynı sonuç geçerli değildir. Bunu görmek için Sheffer [34] tarafından aksi bir örnek verilmiştir:

$\sum a_{ij}$ serisinin ilk sütununun elemanları

$$1, \frac{1}{2}, \frac{1}{2^2}, \dots, \frac{1}{2^n}, \dots$$

ve kalan terimleri 0 olan mutlak yakınsak bir seri olsun. $\sum b_{ij}$ serisi ise ilk iki satırı

$$0! + 1! + \dots + n! + \dots,$$

$$-0! - 1! - \dots - n! - \dots$$

ve kalan terimleri 0 olan yakınsak bir seri olsun. $\sum (a_{ij} * b_{ij})$ serisi yakınsak değildir.

$a_{mnkl} \in \mathbb{R}$ ve $A := (a_{mnkl})$ dört boyutlu bir matris olmak üzere dönüşüm dizisi aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$[Ax]_{mn} := \sum_{kl} a_{mnkl} x_{kl}.$$

Aşağıdaki lemma Kojima-Schur Teoreminin çift indisli seriler için bir benzeridir.

Lemma 4.36 $A = (a_{mnkl})$ matrisi her sınırlı yakınsak çift indisli diziyi sınırlı yakınsak bir çift indisli diziye dönüştürmesi için gerek ve yeter şart

i) $\sup\limits_{m,n} \sum\limits_{k} |a_{mnkl}| < \infty$,

ii) $a := \lim\limits_{m,n} \sum\limits_{k,l} a_{mnkl}$ mevcut,

iii) Her sabit (k,l) için $a_{kl} := \lim\limits_{m,n} a_{mnkl}$ limiti mevcut

ve

iv) $\forall l$ için $\lim\limits_{m,n} \sum\limits_{k} |a_{mnkl} - a_{kl}| = 0$ ve $\forall k$ için $\lim\limits_{m,n} \sum\limits_{l} |a_{mnkl} - a_{kl}| = 0$ olmasıdır.

Teorem 4.37 (a_{kl}) çift indisli bir dizi olsun. Bu durumda her sınırlı yakınsak $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ çift indisli serisi için $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl}$ Cauchy çarpımı serisinin sınırlı yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ serisinin mutlak yakınsak olmasıdır. Böylece

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl} = \left(\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} \right) \left(\sum_{k,l=0}^{\infty} b_{kl} \right)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. $m, n \in \mathbb{N}_0$ olmak üzere

$$A_{mn} := \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl}, \quad B_{mn} := \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} b_{kl}, \quad C_{mn} := \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} a_{kl} * b_{kl}$$

olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} C_{mn} &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}\left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} a_{k-i,l-j}b_{ij}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{m-k,n-l}\left(\sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} b_{ij}\right) \\ &= \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{m-k,n-l}B_{kl} \qquad (m,n)\in\mathbb{N}_0^2 \end{aligned}$$

elde edilir. $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl}$ $\left(\text{veya } \sum\limits_{k,l}^{\infty} b_{kl}\right)$ çift indisli serisinin sınırlı yakınsak olması için gerek ve yeter şart (C_{mn}) (veya (B_{mn})) çift indisli dizisinin sınırlı yakınsak olmasıdır. $A := (\alpha_{mnkl})$ matrisi aşağıdaki gibi tanımlansın.

$$\alpha_{mnkl} := \begin{cases} a_{m-k,n-l} & , \; 0\le k\le m \text{ ve } 0\le l\le n \\ 0 & , \text{ diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu durumda $\forall (m,n) \in \mathbb{N}_0^2$ için $[A(B_{kl})]_{mn} = C_{mn}$ gerçeklenir. A matrisinin Lemma 4.36 yı sağlaması için gerek ve yeter şart

$$\sup_{m,n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}|a_{m-k,n-l}| = \sup_{m,n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n}|a_{kl}| < \infty$$

olmasıdır. Yani $\sum_{k,l} a_{kl}$ çift indisli serisinin mutlak yakınsak olmasıdır. Bu durumda

$$\alpha := \lim_{m,n}\sum_{k,l}\alpha_{mnkl} = \lim_{m,n}\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} = \sum_{k,l} a_{kl},$$

$$\text{Her sabit } (k,l)\in\mathbb{N}_0^2 \text{ için } \alpha_{kl} := \lim_{m,n}\alpha_{mnkl} = \lim_{m,n} a_{mn} = 0,$$

$$\text{Her sabit } l\in\mathbb{N}_0 \text{ için } \lim_{m,n}\sum_{k}|\alpha_{mnkl}-\alpha_{kl}| = \lim_{n}\sum_{k=0}^{\infty}|a_{k,n-l}| = 0,$$

$$\text{Her sabit } k\in\mathbb{N}_0 \text{ için } \lim_{m,n}\sum_{l}|\alpha_{mnkl}-\alpha_{kl}| = \lim_{m}\sum_{l=0}^{\infty}|a_{m-k,l}| = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Bu durumda Lemma 4.36 (ii), (iii), (iv) şartları otomatik olarak sağlanır. Böylece istenilen sonuç elde edilir:

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl} = \left(\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} - 0\right) \lim_{m,n} B_{mn} + 0 = \left(\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}\right)\left(\sum_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}\right).$$

■

Uyarı 4.38 $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ serisi yakınsak olsun. Bu durumda $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl}$ Cauchy çarpım serisinin her mutlak yakınsak $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ çift indisli serisi için yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ serisinin kısmi toplamlar dizisinin sınırlı olmasıdır. Bu durumda

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl} = \left(\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}\right)\left(\sum_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}\right)$$

gerçeklenir.

Sınırlı yakınsak çift indisli seriler için Abel teoreminin benzeri aşağıda ispatlanmıştır.

Lemma 4.39 $(m, n) \in \mathbb{N}_0^2$ olmak üzere (a_{mn}) sınırlı yakınsak bir çift indisli dizi ve $a := \lim\limits_{m,n} a_{mn}$ olsun. Bu durumda eğer

$$\tilde{a}_{mn} := \frac{\left(\sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl}\right)}{(m+1)(n+1)}$$

ise $(\tilde{a}_{mn})$ çift indisli dizisi yakınsak olup $\lim\limits_{m,n} \tilde{a}_{mn} = a$ dır. Ek olarak eğer (b_{mn}) sınırlı yakınsak çift indisli dizi ve $b := \lim\limits_{m,n} b_{mn}$ ise

$$\lim_{m,n} \frac{a_{mn} * b_{mn}}{(m+1)(n+1)} = ab$$

dir.

İspat. $L := (\lambda_{mnkl})$ matrisi

$$\lambda_{mnkl} := \begin{cases} \frac{1}{(m+1)(n+1)} & , 0 \leq k \leq m \text{ ve } 0 \leq l \leq n \\ 0 & , \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $\forall (m,n) \in \mathbb{N}_0^2$ için $[L(a_{kl})]_{mn} = \tilde{a}_{mn}$ olup

$$\sup_{m,n} \sum_{k,l} |\lambda_{mnkl}| = \lim_{m,n} \sum_{k,l} \lambda_{mnkl} = \lim_{m,n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \lambda_{mnkl} = 1,$$

$$\text{Her sabit } (k,l) \in \mathbb{N}_0^2 \text{ için } \lambda_{kl} := \lim_{m,n} \lambda_{mnkl} = \lim_{m,n} \frac{1}{(m+1)(n+1)} = 0,$$

$$\text{Her sabit } l \in \mathbb{N}_0 \text{ için } \lim_{m,n} \sum_{k} |\lambda_{mnkl} - \lambda_{kl}| = \lim_{n} \frac{1}{(n+1)} = 0,$$

$$\text{Her sabit } k \in \mathbb{N}_0 \text{ için } \lim_{m,n} \sum_{l} |\lambda_{mnkl} - \lambda_{kl}| = \lim_{m} \frac{1}{(m+1)} = 0$$

eşitlikleri elde edilir. Böylece Lemma 4.36 (i)-(iv) sağlanır. Buradan ise

$$\lim_{m,n} \tilde{a}_{mn} = (1-0)a + 0$$

elde edilir. Şimdi ise (b_{mn}) sınırlı yakınsak çift indisli bir dizi ve $b := \lim\limits_{m,n} b_{mn}$ olsun. $A := (\alpha_{mnkl})$ matrisi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\alpha_{mnkl} := \begin{cases} \frac{a_{m-k,n-l}}{(m+1)(n+1)} & , 0 \leq k \leq m \text{ ve } 0 \leq l \leq n \\ 0 & , \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Bu durumda $\forall (m,n) \in \mathbb{N}_0^2$ için

$$[A(b_{kl})]_{mn} = \frac{(a_{mn} * b_{mn})}{(m+1)(n+1)}$$

elde edilir. Aynı zamanda $\beta := \sup\{|a_{mn}| : (m,n) \in \mathbb{N}_0^2\} < \infty$ olduğundan

$$\sup_{m,n} \sum_{k,l} |\alpha_{mnkl}| = \sup_{m,n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \alpha_{mnkl} \leq \beta,$$

$$\alpha := \lim_{m,n} \sum_{k,l} \alpha_{mnkl} = \lim_{m,n} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} \alpha_{mnkl} = \lim_{m,n} \tilde{a}_{mn} = a,$$

$$\text{Her sabit } \ (k,l) \in \mathbb{N}_0^2 \ \text{ için } \ \alpha_{kl} := \lim_{m,n} \alpha_{mnkl} = \lim_{m,n} \frac{a_{mn}}{(m+1)(n+1)} = 0,$$

$$\text{Her sabit } \ l \in \mathbb{N}_0 \ \text{ için } \ \lim_{m,n} \sum_{k} |\alpha_{mnkl} - \alpha_{kl}| \leq \lim_{n} \frac{\beta}{(n+1)} = 0,$$

$$\text{Her sabit } \ k \in \mathbb{N}_0 \ \text{ için } \ \lim_{m,n} \sum_{l} |\alpha_{mnkl} - \alpha_{kl}| \leq \lim_{m} \frac{\beta}{(m+1)} = 0$$

elde edilir. Böylece Lemma 4.36 (i)-(iv) koşulları sağlanır. Bu durumda

$$\lim_{m,n} \frac{(a_{mn} * b_{mn})}{(m+1)(n+1)} = (a-0)b + 0 = ab$$

elde edilir ki bu ise ispatı tamamlanır. ■

Tanım 4.40 $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ çift indisli bir seri olsun. Bu durumda serinin $(k,l)-$inci kısmi toplamı A_{kl} olmak üzere eğer

$$\lim_{m,n} \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=0}^{m} \sum_{l=0}^{n} A_{kl}$$

limiti mevcut ise bu durumda $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ serisi Cesàro toplanabilirdir.

Hemen belirtelim ki, Lemma 4.39 dan sınırlı yakınsak çift indisli seriler Cesàro toplanabilirdir ve serinin Cesàro toplamı, serinin toplamına eşittir.

Teorem 4.41 $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ ve $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ sınırlı yakınsak çift indisli seriler olmak üzere $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl}$ Cauchy çarpımı Cesàro toplanabilirdir ve A, B verilen serilerin toplamları olmak üzere Cesàro toplamı AB ye eşittir. Özel olarak $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl}$ sınırlı yakınsak ise toplamı AB ye eşittir.

İspat. Teorem 4.37 daki notasyonları kullanalım. $(m,n) \in \mathbb{N}_0^2$ olmak üzere

$$C_{mn} = \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} a_{kl} * b_{kl} = a_{mn} * B_{mn} = A_{mn} * b_{mn}$$

elde edilir. a_{kl} ve b_{kl} yerine A_{mn} ve B_{mn} alınırsa $(p,q) \in \mathbb{N}_0^2$ için

$$\sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} C_{mn} = \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} A_{mn} * b_{mn} = A_{pq} * B_{pq}$$

elde edilir. Dolayısıyla Lemma 4.39 dan

$$\lim_{p,q} \frac{1}{(p+1)(q+1)} \sum_{m=0}^{p}\sum_{n=0}^{q} C_{mn} = \lim_{p,q} \frac{A_{pq} * B_{pq}}{(p+1)(q+1)} = AB$$

eşitliği sağlanır. Böylece $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl}$ serisi Cesàro toplanabilirdir ve Cesàro toplamı AB ye eşittir. ■

Uyarı 4.42 $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ ve $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ yakınsak çift indisli seriler olmak üzere

$$\lim_{k+l\to\infty} a_{kl} = 0 = \lim_{k+l\to\infty} b_{kl}$$

eşitliği sağlansın. Bu durumda $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl}$ çift indisli serisi aşağıda gösterildiği gibi AB ye Cesàro toplanabilirdir. r, s herhangi pozitif reel sayılar ve $r < s$ olmak üzere

$$\sigma_{mn} := \frac{1}{(m+1)(n+1)} \sum_{k=0}^{m}\sum_{l=0}^{n} C_{kl} \quad \text{olup} \quad \lim_{\substack{m,n\to\infty \\ nr<m<ns}} \sigma_{mn} = AB.$$

Teorem 4.43 (a_{kl}) çift indisli bir dizi olsun. Bu durumda her regüler yakınsak $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ serisi için $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl}$ Cauchy çarpımı çift indisli serisinin regüler yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ çift indisli serisinin mutlak yakınsak olmasıdır. Bu takdirde

$$\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl} = \left(\sum_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}\right)\left(\sum_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}\right)$$

eşitliği gerçeklenir.

İspat. $A = (\alpha_{mnkl})$ matrisinin her regüler yakınsak çift indisli diziyi regüler yakınsak çift indisli diziye dönüştürmesi için gerek ve yeter şart Lemma 4.36 (i)-(iii) şartlarının ve aynı zamanda

iv) Her sabit k için $\beta_k := \lim\limits_{m,n} \sum\limits_l \alpha_{mnkl}$ mevcut ve

Her sabit l için $\gamma_l := \lim\limits_{m,n} \sum\limits_k \alpha_{mnkl}$ mevcut olmasıdır.

Burada yakınsaklık, (ii), (iii) ve (iv) şartlarının herbirinde regüler olduğunu gösterir. Bu durumda $\sum\limits_{k,l} \alpha_{k,l}$ çift indisli serisi, $\sum\limits_k \beta_k$ ve $\sum\limits_l \gamma_l$ serileri mutlak yakınsaktır ve herhangi (x_{kl}) regüler yakınsak çift indisli dizisi için

$$\begin{aligned}\lim_{m,n}[Ax]_{mn} = &\left(\alpha + \sum_{k,l}\alpha_{kl} - \sum_k \beta_k - \sum_l \gamma_l\right)\lim_{m,n} x_{mn} + \sum_{k,l}\alpha_{kl}x_{kl} \\ &+ \sum_k\left[\left(\beta_k - \sum_l \alpha_{kl}\right)\left(\lim_l x_{kl}\right)\right] + \sum_l\left[\left(\gamma_l - \sum_k \alpha_{kl}\right)\left(\lim_k x_{kl}\right)\right]\end{aligned}$$

elde edilir. A matrisi Teorem 4.37 nin ispatındaki gibi tanımlanırsa $\forall (k,l) \in \mathbb{N}_0^2$ ve $\alpha = \sum\limits_{k,l} \alpha_{kl}$ için $\alpha_{kl} = \beta_k = \gamma_l = 0$ elde edilir. ∎

Uyarı 4.44 i) Teorem 4.43 ün gereklilik kısmı Cesari [24] tarafından ispatlanmıştır. Yeterlilik kısmı ise Teorem 4.37 deki gibi aşağıdaki şekilde genişletilebilir.

Eğer $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl}$ Cauchy çarpımı çift indisli serisi her $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ regüler yakınsak çift indisli serisi için sınırlı yakınsak ise o zaman $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ mutlak yakınsaktır. Bunu görmek için yalnızca her regüler yakınsak çift indisli diziyi sınırlı yakınsak bir çift indisli diziye dönüştüren herhangi bir A matrisi için Lemma 4.36 (i) koşulunun sağlanması gereklidir.

ii) (i) de "Bütün terimleri sıfıra eşit olmayan $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ çift indisli serisi mutlak yakınsak ise sınırlı yakınsak bir $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ çift indisli serisi vardır öyleki $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}{*}b_{kl}$

çift indisli serisi regüler yakınsak değildir" ifadesi incelenmeye değerdir. Bunu görmek için $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ mutlak yakınsak ve herhangi $(k_0, l_0) \in \mathbb{N}_0^2$ için $a_{k_0 l_0} \neq 0$ olsun. $k \in \mathbb{N}_0$ için $a_k := a_{kl_0}$ tanımlansın. $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ mutlak yakınsak ve $a_{k_0} \neq 0$ dır. Buradan kısmi toplamlar dizisi sınırlı $\sum\limits_{k=0}^{\infty} b_k$ serisi mevcuttur öyleki $\sum\limits_{k=0}^{\infty} a_k * b_k$ ıraksaktır.

$$b_{kl} := \begin{cases} b_k & , k \in \mathbb{N}_0 \text{ ve } l = 0 \\ -b_k & , k \in \mathbb{N}_0 \text{ ve } l = l_0 + 1 \\ 0 & , k \in \mathbb{N}_0 \text{ ve } l \in \mathbb{N}_0 \backslash \{0, l_0 + 1\} \end{cases}$$

tanımlansın. Bu durumda

$$a_{kl_0} * b_{kl_0} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l_0} a_{ij} b_{k-i, l_0-j} = \sum_{i=0}^{k} a_{il_0} b_{k-i,0} = a_k * b_k$$

olur. Bu nedenle $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl_0} * b_{kl_0}$ ıraksaktır ve dolayısıyla $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl}$ regüler yakınsak değildir.

Örnek 4.45 i) $x, y \in (-1, 0)$ ve $x + y = -1$ olsun. $(k, l) \in \mathbb{N}_0^2$ için

$$a_{kl} := x^k y^l \quad \text{ve} \quad b_{kl} := \binom{k+l}{k}$$

seçelim. Bu durumda $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ serisi mutlak yakınsak ve $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ serisi regüler yakınsaktır (mutlak yakınsak değil). $(k, l) \in \mathbb{N}_0^2$ için

$$c_{kl} = \sum_{i=0}^{k} \sum_{j=0}^{l} \binom{i+j}{i} x^k y^l = \left[\binom{k+l+2}{k+1} - 1 \right] x^k y^l$$

olmak üzere $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} c_{kl}$ Cauchy çarpımıdır.

ii) $x, y \in (-1, 1]$, $a, \tilde{a} > 0$ ve $b, \tilde{b} \in (-1, 0]$ olsun. $(k, l) \in \mathbb{N}_0^2$ için

$$a_{kl} := \binom{a}{k}\binom{\tilde{a}}{l} x^k y^l \quad \text{ve} \quad b_{kl} := \binom{b}{k}\binom{\tilde{b}}{l} x^k y^l$$

seçilirse bu durumda $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ serisi mutlak yakınsak ve $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ serisi regüler yakınsaktır ($x = 1$ ya da $y = 1$ iken mutlak yakınsak değil). $(k, l) \in \mathbb{N}_0^2$ için

$$c_{kl} = \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} \binom{a}{i}\binom{b}{k+i}\binom{\tilde{a}}{j}\binom{\tilde{b}}{l-j} x^k y^l = \binom{a+b}{k}\binom{\tilde{a}+\tilde{b}}{l} x^k y^l$$

olmak üzere $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} c_{kl}$ serisi bir Cauchy çarpımıdır.

iii) $p \in (0, 2]$ olsun. $(k, l) \in \mathbb{N}_0^2$ için

$$a_{kl} := \frac{1}{2^{k+l}} \quad \text{ve} \quad b_{kl} := \frac{(-1)^{k+l}}{(k+l+1)^p}$$

seçilirse bu durumda $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl}$ serisi mutlak yakınsak ve $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ serisi regüler yakınsaktır (mutlak değil). $(k, l) \in \mathbb{N}_0^2$ için

$$c_{kl} := \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} \frac{(-1)^{i+j}}{2^{k-i+l-j}(i+j+1)^p} = \frac{1}{2^{k+l}} \sum_{i=0}^{k}\sum_{j=0}^{l} \frac{(-2)^{i+j}}{(i+j+1)^p}$$

olmak üzere Teorem 4.43 den $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} c_{kl}$ Cauchy çarpım serisi regüler yakınsaktır.

Teorem 4.46 (a_{kl}) çift indisli bir dizi olsun. O halde her yakınsak $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} b_{kl}$ serisi için $\sum\limits_{k,l=0}^{\infty} a_{kl} * b_{kl}$ Cauchy çarpım serisinin yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\{(k, l) \in \mathbb{N}_0^2 \ : \ a_{kl} \neq 0\}$ kümesinin sonlu olmasıdır.

İspat. Teorem 4.43 de olduğu gibi Teorem 4.37 nin ispatındaki benzer düşünce ile istenilen sonuç elde edilir. Yakınsak çift indisli diziyi yakınsak çift indisli diziye dönüştüren $A = (\alpha_{mnkl})$ matrisi için altı gerek ve yeter koşuldan biri : $\forall k \in \mathbb{N}_0$

için $\exists p_0 \in \mathbb{N}_0$ mevcuttur öyleki $m,n,l \geq p_0$ iken $\alpha_{mnkl} = 0$ ve $\forall l \in \mathbb{N}_0$ için $\exists q_0 \in \mathbb{N}_0$ mevcuttur öyleki $m,n,k \geq p_0$ iken $\alpha_{mnkl} = 0$ olur. Bu durumda Teorem 4.37 de tanımlanan A matrisi ile bu şart $\{(k,l) \in \mathbb{N}_0^2 \ : \ a_{kl} \neq 0\}$ kümesinin sonlu olmasını gerektirir. Geriye kalan beş şartta otomatik olarak sağlanır. ■

4.3. ÇİFT İNDİSLİ DİZİ UZAYLARININ β-DUALLERİNİN ZAYIF DİZİSEL TAMLIĞI

Tanım 4.47 E herhangi bir dizi uzayı olsun. $x \in m$ ve $y \in E$ için koordinatsal çarpımları $x.y \in E$ ise E ye solid uzay denir.

Köthe ve Toeplitz 'in klasikteki sonucu, eğer E solid ise E^β $\sigma(E^\beta, E)$-dizisel tamdır şeklindedir. Bennett ise bu sonucu monoton dizi uzaylarına genişletmiştir. Birçok yazar gliding hump metoduna dayandırarak dizi uzaylarına ilişkin solidlikten daha zayıf ancak β dualinin zayıf dizisel tamlığını garanti eden çeşitli özellikler tanımlamıştır. Bu bölümde benzer problemi çift indisli dizi uzayları için inceleyeceğiz.

Çift indisli diziler için yakınsaklık notasyonları içinde β duallerin farklı şekilleri göz önüne alınır. İyi bilinen ve oldukça çok çalışılmış üç yakınsaklık notasyonu; Pringsheim yakınsaklık (p-yakınsak), sınırlı Pringsheim yakınsaklık (bp-yakınsak) (bir $x = (x_{kl})$ dizisi p-yakınsak ve $\sup_{k,l} |x_{kl}| < \infty$) ve regüler yakınsaklıktır (r-yakınsak)(bir $x = (x_{kl})$ dizisi p-yakınsak, $\lim_k x_{kl}$ $(l \in \mathbb{N})$ ve $\lim_l x_{kl}$ $(k \in \mathbb{N})$ mevcut).

Bir $E \subset \Omega$ çift indisli dizi uzayının β-duali, $\nu \in \{p, bp, r\}$ olmak üzere

$$E^{\beta(\nu)} := \left\{ u \in \Omega : \quad \forall x \in E, \quad \nu - \sum_{k,l} u_{kl} x_{kl} := \nu - \lim_{m,n} \sum_{k=1}^{m} \sum_{l=1}^{n} u_{kl} x_{kl} \quad \text{mevcut} \right\}$$

şeklinde tanımlanır. Eğer $E \supset \Phi$ ise E ve $E^{\beta(\nu)}$

$$\begin{aligned} <.\,,.> \quad : \quad & E \times E^{\beta(\nu)} \longrightarrow \mathbb{K}, \\ & (x,u) \longrightarrow \nu - \sum_{k,l} u_{kl} x_{kl} \end{aligned}$$

bilineer form altında $< E, E^{\beta(\nu)} >$ dual çifti elde edilir.

Tanım 4.48 E çift indisli bir dizi uzayı ve $E \supset \Phi$ olsun. Eğer $\forall x \in E$ için $xy := (x_{kl}y_{kl}) \in E$ ve $y \in \{0,1\}^{\mathbb{N}\times\mathbb{N}}$ $(y \in \{e_k, e^k : k \in \mathbb{N}\})$ ise E uzayına monotondur (yarı-monoton) denir. Açıkça her monoton çift indisli dizi uzayı yarı monotondur.

4.3.1. Salınım Özellikleri

Tanım 4.49 Eğer φ de bir $(y^{(j)})$ dizisi (t_i) indis dizisi için aşağıdaki şartları sağlıyorsa $(y^{(j)})$ dizisine (k_i) indisine göre step 1-blok dizi denir;

(i) $t_{3i-1} < t_{3i}$ $(i \in \mathbb{N})$,

(ii) $y_k^{(j)} := \begin{cases} 0 \ , \ k < k_{t_{3j-2}} \text{ ya da } k \geq k_{t_{3j+1}}, \\ 1 \ , \ k_{t_{3j-1}} \leq k < k_{t_{3j}} \end{cases} \quad (j \in \mathbb{N}), \quad y_1^{(1)} \geq 0,$

(iii) $k_{t_{3j-2}} - 1 \leq k \leq k_{t_{3j-1}}$ ve $k_{t_{3j}} - 1 \leq k \leq k_{t_{3j+1}}$ $(j \in \mathbb{N})$ için $(y_k^{(j)})$ monoton

ve

(iv) $k_i \leq k < k_{i+1}$ $(i \in \mathbb{N})$ için $y = \sum_j y^{(j)}$(noktasal toplam) sabit .

Tanım 4.50 $E \supset \varphi$ olsun. Eğer her $x \in E$ ve herhangi (k_i) indis dizisi için bir (k_i) ye göre $(y^{(\nu)})$ step 1-blok dizisinin en az bir kuvvetli altdizisi (yani, $\mathbb{N} - \{\nu_j : j \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{N}$ nin sonsuz alt kümesi) var öyleki $yx \in E$ olacak şekilde $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ de bir (h_j) dizisi mevcut ise bu durumda E dizi uzayı işaretli noktasal salınım özelliğine (işaretli P_OSCP) sahiptir denir. Burada $y := \sum_j h_j y^{(\nu_j)}$ dir.

Stuart [35] ve Swartz [36]'ın çalışmalarındaki bazı sonuçlar vektör değerli dizi uzayları için gliding hump ve salınım özelliklerinin çift indisli dizilere uygulaması ile ilgilidir. Fakat birçok çift indisli dizi bu yolla ifade edilemediğinden bir E çift indisli dizi uzayı için işaretli P_OSCP tanımını genelleştireceğiz ve $\nu \in \{p, bp, r\}$ için $(E^{\beta(\nu)}, \sigma(E^{\beta(\nu)}, E))$ nin dizisel tamlığını çalışacağız. Uygunluk açısından burada kullanacağımız birkaç notasyonu verelim.

$$[u,p] := \{k \in \mathbb{N} : u \leq k \leq p\} \qquad (u,p \in \mathbb{N}, u \leq p)$$

$$\mathcal{I} := \{([u,p] \times [v,s]) - ([u,r] \times [v,t]) : u,v,p,r,s,t \in \mathbb{N}; p \geq r \geq u, s \geq t \geq v\}$$

olup $\mathcal{I}$ nın

$$\mathcal{S}(p,s,r,t) := ([1,p] \times [1,s]) - ([1,r] \times [1,t]) \subset \mathcal{I} \qquad (p \geq r, s \geq t)$$

elemanlarından oluşan küme $\mathcal{I}^1$ ile gösterilir. $\mathcal{I}^1$ de $\forall i \in \mathbb{N}$ için $r_{i+1} \geq p_i$ ve $t_{i+1} \geq s_i$ ise bu durumda $\mathcal{S}(p_i, s_i, r_i, t_i)_i$ dizisi artandır denir.

Tanım 4.51 Φ deki çift indisli dizilerin bir $(y^{(i)})$ dizisi aşağıdaki şartları sağlasın.

i) $z_k^{(i)} := y_{k1}^{(i)}$ $(i,k \in \mathbb{N})$ olmak üzere $(z^{(i)})$, (k_i) ye göre step 1-blok dizisidir.

ii) $(k,l) \in \mathcal{A}(i+1,i)$ $(i \in \mathbb{N})$ için $y = \sum_j y^{(j)}$ noktasal toplamı sabittir.

Bu durumda $(y^{(i)})$ dizisine (k_i) indis dizisine göre step 1-blok$_2$ dizisi denir. Burada $\mathcal{A}(i,j)$ dizisi $\mathcal{S}(k_i - 1, l_i - 1, k_j - 1, l_j - 1)$ $(i,j \in \mathbb{N})$ dizisi yerine kullanılmıştır.

Tanım 4.52 $E \supset \varphi$ olsun.

i) Herhangi $x \in E$ ve (k_i), (l_i) indis dizileri için (k_i) ve (l_i) ye göre bir $(y^{(i)})$ step 1-blok$_2$ dizisinin bir (y^{m_k}) kuvvetli altdizisi ve $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ de bir (h_k) dizisi var öyleki $\tilde{x} := \sum_k h_k y^{(m_k)} x \in E$ ise E dizi uzayı 1. mertebeden işaretli noktasal salınım özelliğine (işaretli P_OSCP(1)) sahiptir denir.

ii) İşaretli P_OSCP(1) tanımı aynı zamanda

$$\sum_{i=1}^{n} xe_i \quad \text{ve} \quad \sum_{i=1}^{n} xe^i \qquad (n \in \mathbb{N},\ x \in E)$$

için de sağlanırsa E dizi uzayı işaretli P_OSCP(2) e sahiptir denir.

Uyarı 4.53 a) Monotonluk $\Longrightarrow$ işaretli P_OSCP(1) $\Longrightarrow$ işaretli P_OSCP(2).

b) Eğer E dizi uzayı yarı monoton ise işaretli P_OSCP(2) $\Longrightarrow$ işaretli P_OSCP(1).

Gerçekten, $x \in E$ ve herhangi (k_i), (l_i) indis dizileri için işaretli P_OSCP(1) tanımından (k_i) ve (l_i) ye göre bir $(y^{(i)})$ step 1-blok$_2$ dizisinin bir (y^{m_k}) kuvvetli altdizisi ve $\{-1,1\}^{\mathbb{N}}$ de bir (h_k) dizisi vardır öyleki

$$\widetilde{x} := \sum_k h_k y^{(m_k)} x \ \in E$$

dir. Bu nedenle herhangi sabit $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_k h_k y^{(m_k)} \Big(\sum_{j=1}^{n} xe^j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x} e^j \ \in E$$

ve ayrıca

$$\sum_k h_k y^{(m_k)} \Big(\sum_{j=1}^{n} xe_j \Big) = \sum_{j=1}^{n} \tilde{x} e_j \ \in E$$

elde edilir.

Örnek 4.54 $\mathcal{CS}_r := \left\{ x \in \Omega : \Big(\sum_{k=1}^{s} \sum_{l=1}^{t} x_{kl} \Big)_{s,t} \ \text{ regüler yakınsak} \right\}$ işaretli P_OSCP e sahip yarı monoton (monoton olmayan değil) çift indisli dizi uzayıdır.

Gerçekten, bir $x \in \mathcal{CS}_r$ ve (k_i), (l_i) indis dizileri belirlensin. $(k,l) \in \mathcal{A}(i+1,i)$ için $y^{(i)}_{kl} = 1$ $(i \in \mathbb{N})$ ve diğer durumlarda $y_{kl} = 0$ olacak şekilde (k_i) ve

(l_i) ye göre bir $(y^{(i)})$ step 1-blok$_2$ dizisi göz önüne alınsın. Şimdi bir (m_i) dizisi seçilebilir öyleki $m_{i+1} > m_i + 1$ ve

$$\left|\sum_{k=m}^{p}\sum_{l=n}^{q} x_{kl}\right| < 2^{-i} \qquad (p \geq m, q \geq n; (m,n) \in \mathbb{N}^2 - [0, m_i]^2; i \in \mathbb{N}) \tag{4.17}$$

eşitsizlikleri sağlanır. $i \in \mathbb{N}$ ve $N := maks\{k_{m_i}, l_{m_i}\}$ olsun. $p \geq m, q \geq n; (m,n) \in \mathbb{N}^2 - [0, N]^2$ olacak şekilde her $p, q, m, n \in \mathbb{N}$ için (4.17) den

$$\left|\sum_{k=m}^{p}\sum_{l=n}^{q} \tilde{x}_{kl}\right| \leq \sum_{j=i}^{\infty}\left|\sum_{(k,l)\in J_i} x_{kl}\right| \leq 2^{-i+2}$$

elde edilir. Burada $J_i := ([m,p] - [n-q]) \cap \mathcal{A}(m_j + 1, m_j)$ $(j \in \mathbb{N})$ dır. Böylece $\tilde{x} := \sum_k y^{(m_k)} x \in \mathcal{CS}_r$ (noktasal toplam) elde edilir. Bu ise $\mathcal{CS}_r$ nin işaretli P_OSCP özelliğine sahip olduğunu gösterir.

4.3.2. İşaretli P_OSCP ve Dual Uzaylar

Bir E çift indisli dizi uzayının α-duali

$$E^{\alpha} := \{u \in \Omega \ : \ xu \in \mathcal{L}_u \ \ (x \in E)\}$$

olmak üzere E uzayı için

$$E^{\beta(p)} = E^{\beta(bp)} = E^{\beta(r)} = E^{\alpha}$$

sağlanır.

Teorem 4.55 B, $c_B \supset \varphi$ olacak şekilde bir matris ve $x \in c_B$ aşağıdaki şartlardan en az birini sağlasın. Bu durumda

i) (η_i) indis dizisi olmak üzere $\lim_i \sum_{k=1}^{\eta_i - 1} b_k x_k \neq \lim_B x$,

ii) $\sup_s \left| \sum_{k=1}^{s} b_k x_k \right| = \infty.$

O halde bir (k_i) indis dizisi vardır öyleki herhangi bir (k_i) ye göre $y^{(i)}$ step 1-blok dizisinin her $y^{(j_i)}$ kuvvetli alt dizisi için $yx \notin c_B$ elde edilir. Burada $y := \sum_i h_i y^{j_i}$ (noktasal toplam) $h_i \in \{-1, 1\}$ $(i \in \mathbb{N})$ dır.

Lemma 4.56 E bir çift indisli dizi uzayı olsun. Bu durumda $E^{\beta(p)} = E^{\beta(r)}$ olması için gerek ve yeter şart her $x \in E$ ve $s \in \mathbb{N}$ için xe^s ve xe_s nin $E^{\beta(p)\beta(p)}$ de olmasıdır.

İspat. $x \in E$, $y \in E^{\beta(p)\beta(p)}$ ve $s \in \mathbb{N}$ olmak üzere

$$\sum_{k,l} (xe^s)_{kl} y_{kl} = \sum_k x_{ks} y_{ks} \qquad \text{ve}$$
$$\sum_{k,l} (xe_s)_{kl} y_{kl} = \sum_l x_{sl} y_{sl}$$

elde edilir. ■

Lemma 4.57 $x = (x_k)$ bir dizi ve her (k_i) indis dizisi için en az bir (m_k) indis dizisi vardır öyleki $\{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ de herhangi (h_i) ve (k_i) ye göre $(y^{(i)})$ step 1-blok dizisi için $\tilde{x} := \sum_k h_k y^{(m_k)} x \in cs$ ise o zaman $x \in cs$ dir.

İspat. $\sum_k x_k$ serisi ıraksak olsun. İlk olarak, eğer

$$sup_t \left| \sum_{k=1}^{t} x_k \right| = \infty$$

ise genelliği kaybetmeksizin bir (k_i) indis dizisi seçilebilir öyleki $k_1 = 1$ ve

$$\Re \left(\sum_{k=k_i}^{k_{i+1}-1} x_k \right) \geq i + \sum_{k=1}^{k_i - 1} |x_k| \quad (i \in \mathbb{N}) \tag{4.18}$$

eşitsizliği sağlanır. Şimdi, (k_i) ye göre herhangi bir $(y^{(i)})$ step 1-blok dizisi belirleyelim öyleki $(y^{(j_i)})$, $(y^{(i)})$ nin bir alt dizisi olsun. Her $(h_i) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ için

$z := \sum\limits_i h_i y^{(j_i)} x \neq cs$ olduğunu göstereceğiz.

$t := t_{3j_i+1}$ göz önüne alınırsa (4.18) ve z nin tanımından

$$\begin{aligned}\left|\sum_{k=1}^{k_t-1} z_k\right| &\geq |h_i| \left|\sum_{k=k_{t_{3j_i-1}}}^{k_{t_{3j_i+1}}-1} x_k y_k^{(j_i)}\right| - \left|\sum_{k=1}^{k_{t_{3j_i-1}}-1} z_k\right| \\ &\geq \Re\left(\sum_{k=k_{t_{3j_i-1}}}^{k_{t_{3j_i}}-1} x_k\right) - \sum_{k=1}^{k_{t_{3j_i-1}}-1} |x_k| \geq t_{3j_i} \to \infty \qquad (i \to \mathbb{N})\end{aligned}$$

elde edilir. Böylece $z \notin cs$ olur.

İkinci olarak ise (m_i) ve (η_i) indis dizilerini ele alalım öyleki

$$\lim_i \sum_{k=1}^{m_i} x_k \neq \lim_i \sum_{k=1}^{\eta_i} x_k$$

olsun. $B = (b_{ik})$ matrisi

$$b_{ik} := \begin{cases} 1 \ , \ k \leq m_i \\ 0 \ , \ k > m_i \end{cases} \qquad (i \in \mathbb{N})$$

şeklinde tanımlansın. Bu durumda $x \in c_B$ ancak

$$\lim_i \sum_{k=1}^{\eta_i} b_k x_k \neq \lim_B x$$

dır. Böylece Teorem 4.55 ten bir (k_i) indis dizisi bulunabilir öyleki (k_i) ye göre $(y^{(i)})$ step 1-blok dizisinin her alt dizisi $(y^{(j_i)})$ için

$$z := yx \notin c_B$$

elde edilir. Dolayısıyla $\sum\limits_k z_k$ ıraksaktır. Burada $y := \sum\limits_i h_i y^{(j_i)}$ ve $h_i \in \{-1, 1\}$ $(i \in \mathbb{N})$ dır. ■

Önerme 4.58 $E \supset \Phi$ dizi uzayı işaretli P_OSCP(2) özelliğini sağlasın. Bu durumda

$$E^{\beta(r)} = E^{\beta(bp)} = E^{\beta(p)}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Lemma 4.56 dan her $z \in E$ ve herhangi $s \in \mathbb{N}$ için $ze^s, ze_s \in E^{\beta(p)\beta(p)}$ dir.

$s = 1$ olsun. E nin işaretli P_OSCP(2) olması her $z \in E$ ve $y \in E^{\beta(p)}$ için $x := (y_{k1}z_{k1})$ dizisinin Lemma 4.57 nin şartlarını sağlamasını gerektirir. Bu nedenle $\sum_k z_{k1}y_{k1}$ serisi yakınsaktır; yani $ze^1 \in E^{\beta(p)\beta(p)}$ dır. Aynı yöntemle $ze_1 \in E^{\beta(p)\beta(p)}$ olduğu ispatlanabilir.

$$\{ze^s, ze_s \quad : \quad z \in E, \ s = 1, \ldots, n-1\} \subset E^{\beta(p)\beta(p)}$$

olduğunu varsayalım ve her $z \in E$ için ze^n ve ze_n dizilerinin $E^{\beta(p)\beta(p)}$ de olduğunu gösterelim. (k_i) herhangi indis dizisi olsun. E işaretli P_OSCP(2) olduğundan (k_i) ye göre bir $(y^{(i)})$ step 1-blok$_2$ dizisinin bir $(y^{(m_k)})$ kuvvetli alt dizisi ve $(h_i) \in \{-1, 1\}^{\mathbb{N}}$ mevcuttur öyleki

$$\tilde{z} := \sum_k h_k y^{(m_k)} \left(\sum_{j=1}^{n} ze^j \right) \in E \subset E^{\beta(p)\beta(p)}$$

içermesi sağlanır. Tümevarımsal varsayımla

$$\sum_{l=1}^{n-1} \sum_k \tilde{z}_{kl} e^{kl} \in E^{\beta(p)\beta(p)}$$

olduğundan $\tilde{z}e^n \in E^{\beta(p)\beta(p)}$ dır. ■

Örnek 4.59

$$\mathcal{CS}_p^n := \left\{ x \in \Omega \ : \ \sum_k \left(\sum_{l=1}^{n} x_{kl} \right) \ \text{yakınsak} \right\} \qquad (n \in \mathbb{N})$$

uzayı işaretli P_OSCP(1) e sahiptir ancak $(\mathcal{CS}_p^n)^{\beta(p)} \neq (\mathcal{CS}_p^n)^{\beta(r)}$ $(n > 1)$ dır. Bu nedenle $\mathcal{CS}_p^n$ uzayı işaretli P_OSCP(2) e sahip değildir.

(k_i) ve (l_i) indis dizileri olsun. Herhangi $x \in \mathcal{CS}_p^n$ için

$$z^{(i)} := \sum_{k=k_i+1}^{k_{i+1}} \sum_{l=1}^{n} x_{kl} \to 0 \qquad (i \to \infty)$$

elde edilir. O halde $m_{i+1} > m_i + 1$ olacak şekilde bir (m_i) indis dizisi vardır öyleki $\sum_i z^{(m_i)}$ yakınsaktır. Buradan

$$y_{kl}^{(i)} := \begin{cases} 1 \ , \ (k,l) \in \mathcal{A}(i+1,i) \\ 0 \ , \ \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olmak üzere $\sum_i y^{(m_i)} x \in \mathcal{CS}_p^n$ dir. Bu nedenle $\mathcal{CS}_p^n$ işaretli P_OSCP(1) e sahiptir.

$(\mathcal{CS}_p^n)^{\beta(bp)} = (\mathcal{CS}_p^n)^{\beta(r)} = \Phi$ fakat $(\mathcal{CS}_p^n)^{\beta(p)} \neq \Phi$ dir. Gerçekten, $k \in \mathbb{N}$ ve $l = 1, 2, \ldots, n$ için $(y_{k,l+n})_{k,l} = 0$ ve $y_{k,l} = 1$ olacak şekilde y çift indisli dizisi $(\mathcal{CS}_p^n)^{\beta(p)}$ dedir.

Örnek 4.60 E çift indisli dizi uzayının işaretli P_OSCP(2) olması $E^{\alpha} = E^{\beta(p)}$ eşitliğini gerektirmez. Örneğin, $(\mathcal{CS}_r)^{\alpha} = \mathcal{L}_u$ olup $(\mathcal{CS}_r)^{\beta(p)} = \mathcal{BV}$ dir.

4.3.3. P_OSCP ve $\sigma(E^{\beta}, E)$ nin Dizisel Tamlığı

Teorem 4.61 B üç boyutlu bir matris ve $\Phi \subset c_B^{(p)}$ olsun. Bu durumda $x \in c_B^{(p)}$ aşağıda verilen şartlardan en az birini sağlasın.

(i) $\quad c := \lim_i \sum_{k=1}^{\gamma_i} \sum_{l=1}^{\delta_i} b_{kl} x_{kl} \neq \lim_B x =: d$

olacak şekilde (γ_i) ve (δ_i) indis dizileri vardır.

(ii) $\quad \forall s,t \in \mathbb{N} \quad : \quad \sup_{\substack{m>s \\ n>t}} \left| \sum_{i=1}^{m} \sum_{j=1}^{n} b_{ij} x_{ij} \right| = \infty.$

Bu durumda (k_i), (l_i) indis dizileri mevcuttur öyleki herhangi bir (k_i) ve (l_i) ye göre $(y^{(i)})$ step 1-blok$_2$ dizisinin her kuvvetli $(y^{(j_i)})$ altdizisi için $yx \notin c_B^{(p)}$ dır. Burada $y := \sum_i h_i y^{(j_i)}$ ve $h_i \in \{-1, 1\}$ $(i \in \mathbb{N})$.

İspat. (ii) de genelliği kaybetmeksizin (γ_i) ve (δ_i) indis dizileri seçilebilir öyleki $\gamma_1 = \delta_1 = 0$ ve

$$|a_i| := \left| \sum_{k=1}^{\gamma_{i+1}} \sum_{l=1}^{\delta_{i+1}} b_{kl} x_{kl} - \sum_{k=1}^{\gamma_i} \sum_{l=1}^{\delta_i} b_{kl} x_{kl} \right| \geq i \qquad (i \in \mathbb{N})$$

dır. Şimdi (i) ve (ii) için

$$a_{ni} := \sum_{k=1}^{\gamma_{i+1}} \sum_{l=1}^{\delta_{i+1}} b_{nkl} x_{kl} - \sum_{k=1}^{\gamma_i} \sum_{l=1}^{\delta_i} b_{nkl} x_{kl} \qquad (i, n \in \mathbb{N})$$

notasyonu kullanılsın. Bu durumda $a_i = \lim_n a_{ni}$ $(i \in \mathbb{N})$ ve 1 e eşit tüm elemanlarıyla z dizisi c_A dadır ve Teorem 4.55 deki (i) ve (ii) koşullarından birini sağlar. Buradan bir (m_i) indis dizisi vardır öyleki herhangi bir (m_i) ye göre $(w^{(i)})$ step 1-blok dizisinin her $(w^{(j_i)})$ kuvvetli altdizisi için $w := \sum_i h_i w^{(j_i)} \notin c_A$ (noktasal toplam) elde edilir. Burada $h_i \in \{-1, 1\}$ $(i \in \mathbb{N})$ dir.

Şimdi $k_i := \gamma_{m_i}$ ve $l_i := \delta_{m_i}$ $(i \in \mathbb{N})$ tanımlansın ve (k_i), (l_i) ye göre herhangi $y^{(i)}$ step 1-blok$_2$ dizisi göz önüne alınsın. $i, s \in \mathbb{N}$ ve $k = m_s, \ldots, m_{s+1}-1$ için $w_k^{(i)} = y_{k_s l_s}^{(i)}$ alınarak (m_i) ye göre bir $(w^{(i)})$ step 1-blok dizisi elde edilir. Herhangi (h_i) işaret dizisi ve herhangi (j_i) indis dizisi alınsın ve $w := \sum_i h_i w^{(j_i)}$ tanımlansın. Bu durumda $y := \sum_i h_i y^{(j_i)}$ için

$$\begin{aligned} \sum_{k,l} b_{nkl} y_{kl} x_{kl} &= \sum_i b^{(n)} h_i y^{(j_i)} x = \sum_i h_i \sum_{(k,l) \in \mathcal{A}(t_{3j_i+1}, t_{3j_i-2})} b_{nkl} y_{kl}^{(j_i)} x_{kl} \\ &= \sum_i h_i \sum_{k=m_{t_{3j_i-2}}}^{m_{t_{3j_i-2}}} a_{nk} w_k^{(j_i)} = \sum_k a_{nk} w_k \end{aligned}$$

elde edilir. Bu nedenle $yx \notin c_B^{(p)}$ dir. ∎

Teorem 4.62 $E \supset \Phi$ işaretli P_OSCP(1) e sahip çift indisli dizi uzayı olsun. Bu durumda $(E^{\beta(p)}, \sigma(E^{\beta(p)}, E))$ dizisel tamdır.

İspat. $(y^{(n)})$ dizisi $(E^{\beta(p)}, \sigma(E^{\beta(p)}, E))$ de bir Cauchy dizisi ve koordinatsal limiti y olsun. İspat için teoremin aksi kabul edilsin, yani

$$y \notin E^{\beta(p)} \qquad \text{ya da} \qquad y^{(n)} \nrightarrow y \in \sigma(E^{\beta(p)}, E)$$

olsun. $B = (b_{nkl})$ 3 boyutlu matrisi $b_{nkl} = y_{kl}^{(n)}$ $(n, k, l \in \mathbb{N})$ olacak şekilde tanımlansın. Bu durumda

$$E \subset c_B^{(p)} \qquad \text{ve} \qquad b_{nkl} := \lim_n b_{nkl} = y_{kl} \quad (k, l \in \mathbb{N})$$

olur. Ayrıca kabulden Teorem 4.61 (i), (ii) şartlarından en az birini sağlayan bir $x \in E$ mevcuttur. Bu nedenle E dizi uzayı P_OSCP(1) e sahip değildir. Bu ise çelişkidir. O halde $(E^{\beta(p)}, \sigma(E^{\beta(p)}, E))$ dizisel tamdır. ■

Sonuç 4.63 $E \supset \Phi$ işaretli P_OSCP(2) e sahip çift indisli dizi uzayı olsun. Bu durumda $(E^{\beta(r)}, \sigma(E^{\beta(r)}, E))$ ve $(E^{\beta(bp)}, \sigma(E^{\beta(bp)}, E))$ dizisel tamdır.

Uyarı 4.64 Bir E çift indisli dizi uzayının işaretli P_OSCP(1) e sahip olması $(E^{\beta(r)}, \sigma(E^{\beta(r)}, E))$ ve $(E^{\beta(bp)}, \sigma(E^{\beta(bp)}, E))$ nin dizisel tam olması için yeterli değildir. Örnek 4.59 de $n > 1$ için $\mathcal{CS}_p^n$ nın işaretli P_OSCP(2) e sahip ve $(\mathcal{CS}_p^n)^{\beta(bp)} = (\mathcal{CS}_p^n)^{\beta(r)} = \Phi$ olduğu gösterildi. Bu durumda $(\Phi, \sigma(\Phi, \mathcal{CS}_p^n))$ dizisel tam değildir.

Sonuç 4.65 $E, F \supset \Phi$ çift indisli dizi uzayları ve A, B ise 3 boyutlu matrisler olmak üzere

$$E + F \subset c_A^{(p)} \cap c_B^{(p)}$$

içermesi sağlansın. O halde eğer A ve B matrisleri F üzerinde tutarlı ve E dizi uzayı işaretli P_OSCP(1) e sahip ise A ve B matrisleri $E + F$ üzerinde tutarlıdır.

İspat. E dizi uzayı işaretli P_OSCP(1) e sahip ve $E \subset c_A^{(p)} \cap c_B^{(p)}$ içermesi sağlandığından

$$\lim_A x = \sum_{k,l} a_{kl}x_{kl} = \sum_{k,l} b_{kl}x_{kl} = \lim_B x \qquad (x \in E)$$

dır. Yani A ve B matrisleri E üzerinde tutarlıdır. Bu nedenle A ve B matrisleri $E + F$ üzerinde tutarlıdır. ■

4.3.4. Kuvvetli P_GHP ve $\beta(r)-$Kesitsel Yakınsaklık

Boos ve Fleming ([20], [21]) kesitsel yakınsak bir FK-uzayının kuvvetli P_GHP e sahip olduğunu göstermiştir. Bu kısımda benzer sonuçlar çift indisli diziler için gösterilecektir.

E bir FDK-uzayı ve

$$x^{[s,t]} := \sum_{k=1}^{s}\sum_{l=1}^{t} x_{kl}e^{kl} \qquad (s, t \in \mathbb{N})$$

olmak üzere

$$S_E := \left\{x \in E \;:\; (x^{[s,t]})_{s,t} \longrightarrow x \in E \text{ (r-yakınsak)}\right\}$$

uzayı tanımlansın. Burada E üzerine r-yakınsaklık tanımı reel ya da kompleks terimli çift indisli dizilerde r-yakınsaklık tanımıyla aynıdır.

S_E uzayı yarı monotondur. Eğer $E = S_E$ ise bu durumda E uzayına AK(r)-uzayı denir.

Tanım 4.66 Φ de çift indisli dizilerin bir $(y^{(i)})$ dizisi için I_i dizisi $\mathcal{I}^1$ de artan bir dizi olmak üzere

$$y^{(i)} := \sum_{(k,l)\in I_i} y_{kl}^{(i)}e^{kl} \qquad (i \in \mathbb{N})$$

ise bu durumda $(y^{(i)})$ dizisine blok$_2$ dizisi denir.

Tanım 4.67 E yarı monoton bir çift indisli dizi uzayı olsun. Herhangi $x \in E$ ve

$$\sup_j \| y^{(j)} \|_{\mathcal{BV}} < \infty$$

olacak şekilde $y^{(j)}$ blok$_2$ dizisi için en az bir (n_k) indis dizisi mevcuttur öyleki (n_k) dizisinin her (m_k) altdizisi için $\sum_k y^{(m_k)} x \in E$ ise bu durumda E uzayına kuvvettli P_GHP e sahiptir denir.

Teorem 4.68 E uzayı bir FDK-AK(r)-uzayı ise E uzayı kuvvettli P_GHP e sahiptir.

İspat. Kabul edelim ki $p_r(x) \leq p_{r+1}(x)$ $(x \in E, r \in \mathbb{N})$ olmak üzere E uzayının FDK-topolojisi p_r $(r \in \mathbb{N})$ yarınormlarıyla oluşturulsun. E bir AK(r)-uzayı olduğundan her $x \in E$ için

$$\forall \varepsilon > 0, r \in \mathbb{N}, \exists N \in \mathbb{N} \ : \ p_r\left(\sum_{k=m}^{p} \sum_{l=n}^{q} x_{kl} e^{kl}\right) < \varepsilon \qquad (4.19)$$
$$(p \geq m, n \geq q; m \geq N \text{ ya da } n \geq N)$$

elde edilir. $y^{(j)}$ dizisi

$$M := \sup_j \| y^{(j)} \|_{\mathcal{BV}} < \infty$$

olacak şekilde bir blok$_2$ dizisi olsun. Bu durumda (m_j), (t_j), (n_j) ve (q_j) indis dizileri mevcuttur öyleki $m_j < n_j < m_{j+1}$, $t_j < q_j < t_{j+1}$ ve

$$y^{(j)} = \sum_{k=1}^{n_j} \sum_{l=1}^{q_j} y_{kl}^{(j)} e^{kl} - \sum_{k=1}^{m_j} \sum_{l=1}^{t_j} y_{kl}^{(j)} e^{kl} \qquad (j \in \mathbb{N})$$

dır. (4.19) dan

$$\sup_{\mu,\nu} p_\varrho \left(\sum_{k=m}^{m+\mu} \sum_{l=n}^{n+\nu} x_{kl} e^{kl}\right) < 2^{-\varrho} \qquad (m \geq m_{j_\varrho} \text{ ya da } n \geq t_{j_\varrho}; \varrho \in \mathbb{N}) \qquad (4.20)$$

olacak şekilde bir (j_ϱ) indis dizisi seçilebilir.

Şimdi ise

$$\left(\sum_{\varrho=1}^{\nu} xy^{(j_\varrho)}\right)_\nu \tag{4.21}$$

dizisinin E de bir Cauchy dizisi olduğunu gösterelim. Böylece $\sum\limits_{\varrho} xy^{(j_\varrho)} \in E$ (noktasal toplam) olacaktır. Aşağıdaki işlemler $(y^{(j_\varrho)})$ nin herhangi altdizisi için de geçerli olacağından E uzayı kuvvetli P_GHP e sahiptir.

Sabit $r \in \mathbb{N}$ ve $v \geq r$ için $v, s \in \mathbb{N}$ olsun. Eğer $m > n_{j_{v+s}}$ ve $n > q_{j_{v+s}}$ ise çift indisli Abel dönüşümü

$$p_r\left(\sum_{k=1}^{n_{j_\varrho}} \sum_{l=t_{j_\varrho}+1}^{q_{j_\varrho}} (y^{(j_\varrho)}x)_{kl}e^{kl}\right) \qquad \text{ve} \qquad p_r\left(\sum_{k=m_{j_\varrho}+1}^{n_{j_\varrho}} \sum_{l=1}^{t_{j_\varrho}} (y^{(j_\varrho)}x)_{kl}e^{kl}\right)$$

$(\varrho = v, \ldots, v+s)$ için kullanılarak

$$\begin{aligned} p_r\left(\left(\sum_{\varrho=v}^{v+s} xy^{j^\varrho}\right)^{[m,n]}\right) \leq & \sum_{\varrho=v}^{v+s} \max\left\{ \sup_{\substack{1\leq i\leq n_{j_\varrho} \\ t_{j_\varrho}+1\leq j\leq q_{j_\varrho}}} p_r\left(\sum_{k=1}^{i} \sum_{l=t_{j_\varrho}+1}^{j} x_{kl}e^{kl}\right), \right. \\ & \left. \sup_{\substack{m_{j_\varrho}+1\leq i\leq n_{j_\varrho} \\ 1\leq j\leq t_{j_\varrho}}} p_r\left(\sum_{k=m_{j_\varrho}+1}^{i} \sum_{l=1}^{j} x_{kl}e^{kl}\right)\right\} \parallel y^{(j_\varrho)} \parallel_{\mathcal{BV}} \\ \leq & \; M\sum_{\varrho=v}^{v+s} 2^{-\varrho} \leq 2^{-v+1}M \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan

$$p_r\left(\sum_{\varrho=v}^{v+s} xy^{(j_\varrho)}\right) = \lim_{m,n} p_r\left(\left(\sum_{\varrho=v}^{v+s} xy^{j^\varrho}\right)^{[m,n]}\right) \leq 2^{-v+1}M$$

elde edilir. Bu ise (4.21) dizisinin Cauchy dizisi olduğunu gösterir. Böylece ispat tamamlanır. ■

Uyarı 4.69 $E \supset \Phi$ bir FDK-uzayı ise S_E uzayı kuvvetli P_GHP e sahiptir. Gerçekten; E nin FDK-topolojisi $\{p_r : r \in \mathbb{N}\}$ yarınormlarıyla oluşturulursa aynı yöntemle ispatlanabilir ki $\overline{p}_i(x) := \sup_{m,n} p_i(x^{[m,n]})$ $(x \in S_E)$ ile tanımlı $\{\overline{p}_i : i \in \mathbb{N}\}$ yarınorm ailesi ile oluşturulan topolojiyle S_E uzayı bir FDK-AK(r)-uzayıdır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

1. Toplanabilme teorisinde çift indisli dizi uzayları ve bu uzayların toplanabilirlik alanlarının FDK-topolojik yapısı verilmiştir.

2. Daha sonra Wilansky'nin ([1], [2], [3]) matrisler için yaptığı Conull ve Coregüler sınıflandırmasının FDK-uzaylarına Zeltser ([14], [15], [16], [17]) tarafından aktarılması ele alınmıştır.

3. Ayrıca Zeltser tarafından 2001, 2002 ve 2009 yıllarındaki ([14], [15], [16], [17]) çalışmalarına ilişkin sonuçların ortaya konulmasının yanısıra FDK-uzaylarının dualleri ve conull olmasına ilişkin önemli sonuçlar verilmiştir.

4. Çift indisli dizi uzaylarının salınım özellikleri ve dualleri verilmiştir.

5.2. ÖNERİLER

Bennett [5] ve Osikiewicz [31] de verilen tanım ve teoremler çift indisli diziler için genişletilebilir.

KAYNAKLAR

[1] Wilansky A., Zeller K. "FH-Spaces and Intersections of FK-Spaces", Michigan Math. J., 6: 349-357 (1959).

[2] Wilansky A."Summability Through Functional Analysis", North Holland (Amsterdam New York Oxford) (1984).

[3] Wilansky A. "Modern Methods in Topological Vector Spaces", McGraw-Hill, Inc. New York (1978).

[4] Snyder A. K. "Conull and Coregular FK-Spaces", Math. Z., 90: 376-381 (1965).

[5] Bennett G. "A New Class of Sequence Spaces with Applications in Summability Theory", J. reine agnew Math., 266: 49-75 (1974).

[6] Pringsheim A. "Elementare Theorie der unendliche Doppel-reihen" Sitsungsber. Akad. Wiss. München, 27: 101-153 (1897).

[7] Agnew R. P. "On Summability of Double Sequences", Amer. J. Math., 54:648-656 (1932).

[8] Hill J. D."On Perfect Summability of Double Sequences", Bull. Amer. Math. Soc., 46: 327-331 (1940).

[9] Bromwich T. J. I. "An Introduction to the Theory of Infinite Series", MacMillan Co. Ltd., New York (1965).

[10] Móricz F., Rhoades B. E. "Almost Convergence of Double Sequences and Strong Regularity of Summability Matrices", Math. Proc. Camb. Phil. Soc., 104:283-294 (1988).

[11] Móricz F. "Extensions of the Spaces c and c_0 from Single to Double Sequences" Acta Math. Hungar., 57: 129-136 (1991).

[12] Başarır M., Sonalcan O. "On Some Double Sequence Spaces", J. Indian Acad. Math., 21: 193-200 (1999).

[13] Türkmenoğlu A. "Matrix Transformation between Some Classes of Double Sequences" J. Ins. Math. Comp. Sci. (Math.Ser.), 12: 23-31 (1999).

[14] Zeltser M. "On Conservative Matrix Methods for Double Sequence Spaces", Acta. Math. Hungar., 95: 225-242 (2002).

[15] Zeltser M. "Weak Sequential Completeness of β-duals Double Sequence Spaces", Analysis Mathematica, 27: 223-238 (2001).

[16] Zeltser M. "Investigation of Double Sequence Spaces by Soft and Hard Analytical Methods", PhD thesis, Tartu Univ. Press, Tartu (2001).

[17] Zeltser M. "On Conservative and Coercive SM-Methods", Proc. Estonian Acad. Sci. Phys. Math., 50: 76-85 (2001).

[18] Limaye B. V., Zeltser M. "On the Pringsheim Convergence of Double Series", Proc. Estonian Ac. Sci., 58: 108-121 (2009).

[19] Apostol T.M. "Mathematical Analysis", Second edition, Addison Wesley (1974).

[20] Boos J., Fleming D.J. "Gliding Hump Properties and Some Applications", Internat. J. Math. Math. Sci., 18: 121-132 (1995).

[21] Boos J., Fleming D.J., Leiger T. "Sequence Spaces with Oscillating Properties", J. Math. Anal. Appl. 200: 519-537 (1996).

[22] Boos J. "Classical and Modern Methods in Summability", Oxford University Press, New York (2000).

[23] Boos J., Leiger T., Zeller K. "Consistency Theory for SM-Methods", Acta Math. Hunger., 76: 83-116 (1997).

[24] Cesari, L. "Sulla Moltiplicazione Delle Serie Doppie", Ann. Scuola Norm. Sup. Pisa, 12: 189-204 (1947).

[25] Çolak R., Türkmenoğlu A. "The Double Sequence Spaces $l^2_\infty(p)$, $c^2_0(p)$ and $c^2(p)$" (to appear).

[26] Habil E. D, "Double Sequences and Double Series", Islamic University of Gaza.

[27] Hamilton H. J. "Transformations of Multiple Sequences", Duke Math. J., 2:29-60 (1936).

[28] Hamilton H. J. "Transformations of Double Series", Bull. Amer. Math. Soc., 42:275-283 (1936).

[29] Hardy G. H. "On the Convergence of Certain Multiple Series", Proc. Camb. Phil. Soc., 19:86-95 (1917).

[30] Kamthan P. K., Gupta M."Sequence Spaces and Series", Marcel Dekker, I., New York and Basel (1981).

[31] Osikiewicz J. A. "Summability of Mtrix Submethods and Spliced Sequences", PhD Thesis Kent State Uni., (1997).

[32] Przybylski B. "On the Perfectness of Methods Defined by the Iteration Product of Matrix Transformations", Doctoral Thesis, University of Lódź (1977).

[33] Robison G. M. "Divergent Double Sequences and Series", American Math. Soc., 28: 50-73 (1926).

[34] Sheffer I. M. "Note on Multiply-Infinite Series" Bull. Amer. Math. Soc. 52: 1036-1041 (1946).

[35] Stuart C. E. "Weak Sequential Completeness in Sequence Spaces",Rocky Mountain J. Math. 26: 1559-1568 (1996).

[36] Swartz C. "The Gliding Hump Property in Vector Sequence Spaces", Mh. Math. 116: 147-158 (1993).

[37] Tripaty B. C. "On Statistically Convergent Double Sequences", Tamkang J. Math., 34: 231-237 (2003).

[38] Wilansky A. "Functional Analysis",Blaisdell Press (1964).

[39] Zeller K., Beekmann W. "Theorie der Limitierungsverfahren", Springer Berlin Heidelberg New York (1970).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Şeyda SEZGEK

Doğum Tarihi: 31/12/1990

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Lise/Üniversite	Yıl
Lise	Fen Bilimleri	Pakize Kokulu Lisesi	2003-2007
Lisans	Matematik	Gazi Üniversitesi	2008-2013
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2013-2016