KOROVKIN DİZİ UZAYININ FONKSİYONEL ÖZELLİKLERİ

HALİL İBRAHİM YAMAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
TEMMUZ – 2016

KOROVKIN DİZİ UZAYININ FONKSİYONEL ÖZELLİKLERİ

HALİL İBRAHİM YAMAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ

MERSİN
TEMMUZ – 2016

Halil İbrahim YAMAN tarafından Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ danışmanlığında hazırlanan "Korovkin Dizi Uzayının Fonksiyonel Özellikleri" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ	....
Yrd. Doç. Dr. Nida Palamut KOŞAR	....
Yrd. Doç. Dr. Uğur DEĞER	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05/08/2016 tarih ve 2016/838/29 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Enstitü Müdürü

KOROVKIN DİZİ UZAYININ FONKSİYONEL ÖZELLİKLERİ

Halil İbrahim YAMAN

ÖZ

Bu çalışmada [0,1] kapalı aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı üzerinde tanımlı operatörlerden oluşan diziler ele alındı. Bu dizilerin elemanları Bohman-Korovkin Teoreminin koşullarını bir sabit çarpanı farkıyla sağlayan regüler operatörlerdir. Bu dizilerin oluşturduğu ailenin bir lineer uzay olduğu gösterildi. Bu uzayın tam olan bir alt uzayı elde edildi. Bohman-Korovkin Teoreminin koşullarını sağlayan, pozitif ve lineer operatör dizilerinin oluşturduğu kümenin bu tam alt uzay içinde bir konik oluşturduğu ispatlandı.

Anahtar Kelimeler: Bohman-Korovkin Teoremi, Bernstein Operatörleri, Pozitif Lineer Operatörler, Regüler Operatörler.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı.

FUNCTIONAL PROPERTIES OF THE SPACE OF KOROVKIN SEQUENCES

Halil Ibrahim YAMAN

ABSTRACT

In this research, the sequences consisting of operators defined on the space of continuous functions on the closed interval [0,1] was studied. The elements of the sequences are regular operators providing the conditions of Bohman-Korovkin Theorem, with a constant factor difference. It was shown that the family consisting of those sequences is a linear space. A complete subspace of this space was obtained. It was proved that the family of the sequences of positive and linear operators by providing Bohman-Korovkin Theorem of conditions, which created a cone in this complete subspace.

Keywords: Bohman-Korovkin Theorem, Bernstein Operators, Positive Linear Operators, Regular Operators.

Advisor: Assist. Prof. Dr. Tuncay TUNC, Department of Mathematics, Mersin University.

TEŞEKKÜR

Bu tezin her aşamasında görüş, öneri ve yardımlarını esirgemeyerek büyük emeği geçen; çalışmalar sırasında olağanüstü sabır gösteren, yapıcı tutum sergileyen, insan sevgisi ve hoşgörüsü yüksek kıymetli tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ'a;

Matematiği sevmemde etkileri olan lise matematik öğretmenlerim Şadi KARATAŞ ve Osman ÇİFTÇİ'ye;

Ders aşamasında göstermiş oldukları anlayıştan dolayı bölüm öğretim elemanlarına;

Yüksek lisans eğitimim süresince gerekli kolaylığı sağlayan Çukurova Üniversitesi Eğitim Fakültesi dekanları Prof. Dr. Necmi YAŞAR, Prof. Dr. Turan AKBAŞ ve Prof. Dr. Filiz YURTAL ile yardımcıları Doç. Dr. M. Oğuz KUTLU, Doç. Dr. Mehmet BİLGİN, Doç. Dr. Fulya Cenkseven ÖNDER, Prof. Dr. Muzaffer ÖZCAN ve Prof. Dr. Ahmet DOĞANAY'a; Fakülte Sekreterleri Halil İbrahim AYKAN, Cüneyit SORGUN ve Talat GÜLER'e; Bölüm Başkanlarına ve değerli iş arkadaşlarıma;

Son olarak kıymetli anneme, babama ve kardeşlerime teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER ve KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N} \cup \{0\}$
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^+$	: Negatif olmayan reel sayılar kümesi
$[a,b]$	: Kapalı ve sınırlı aralık
(a,b)	: Açık ve sınırlı aralık
$B[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında sınırlı fonksiyonlar uzayı
$C[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar uzayı
$C^+[a,b]$	: $[a,b]$ aralığında sürekli ve pozitif reel değerli fonksiyonlar uzayı
$\mathcal{B}(X,Y)$	: X uzayından Y uzayına tanımlı sınırlı lineer operatörler uzayı
$\mathcal{P}_C[a,b]$	: $C[a,b]$ üzerinde tanımlı pozitif lineer operatörler ailesi
$\mathcal{R}_C[a,b]$	: Regüler operatörler ailesi
$\mathcal{R} = \{R_n\}$	: Bir regüler operatör dizisi
$Q\mathcal{P}_C[a,b]$	: Quasi-pozitif lineer operatörler ailesi
$\mathcal{AP}_C[a,b]$	: Hemen hemen pozitif lineer operatörlerin ailesi
$\mathbb{K}_C[0,1]$	: Korovkin dizilerinin oluşturduğu küme
$\mathbb{K}_C^+[0,1]$	: Pozitif Korovkin dizilerinin oluşturduğu küme

$\mathbb{K}_C^-[0,1]$	: Negatif kısmı sınırlı Korovkin dizilerinin oluşturduğu küme
$\lambda_{\mathcal{R}}$	: $\mathcal{R}$ dizisinin yaklaşım çarpanı
W_n	: Weierstrass Operatörleri
B_n	: Bernstein Operatörleri
L_n	: Landau Operatörleri
K_n	: Kantorovich Operatörleri
ℓ_∞	: Sınırlı reel dizi uzayı
$F(A)$	: A kümesi üzerinde tanımlı reel değerli fonksiyonlar kümesi
$f_n \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$	: $\{f_n\}$ dizisi f 'e $[a,b]$ üzerinde düzgün yakınsaktır
$\Vert \bullet \Vert_\infty$	: ℓ_∞ dizi uzayında $\Vert x \Vert_\infty = \sup_{n\in\mathbb{N}} \lvert x_n \rvert$ ile tanımlı norm
$\Vert f \Vert_{[a,b]}$	: $C[a,b]$ uzayında $\Vert f \Vert_{[a,b]} = \max_{x\in[a,b]} \lvert f(x) \rvert$ ile tanımlı norm
$\Vert A \Vert$	: A operatörünün normu
$e_i(x)$	: x^i $(\mathrm{i} \in \mathbb{N}_0)$

1. GİRİŞ

Yaklaşım Teorisinin amaçlarından biri olan kompakt aralıkta sürekli bir fonksiyona polinom dizileriyle yaklaşımın varlığı, uygulamalarda karşılaşılacak zor ve zaman alıcı sorunların kolay ve kısa zamanda çözümü için önemlidir. Bu yöndeki ilk adım 1854 yılında Chebyshev tarafından, verilen bir polinomun belli dereceden polinomlar sınıfı içinde bir fonksiyona düzgün norma göre en yakın olup olmaması durumunu ortaya koyan kriteri vermesiyle atılmıştır. Chebyshev'in araştırmaları bir buhar motorunun doğrusal hareketini bir tekerleğin dairesel hareketine dönüştüren aygıtların çalışmasında verimin en yüksek dolayısıyla hatanın minimize edilmesine hizmet ediyordu.

K. Weierstrass tarafından 1885 yılında, sürekli bir fonksiyona cebirsel polinomlarla yaklaşmanın mümkün olduğuna dair bir teorem verilmiştir. Matematiksel analizde *Yaklaşım Teorisinin Temel Teoremi* olarak adlandırılan söz konusu teorem, sonlu $[a,b]$ aralığı üzerinde sürekli olan herhangi bir f fonksiyonuna söz konusu aralıkta düzgün yakınsayan polinomlar dizisinin varlığı üzerinedir. Yaklaşım Teorisinin Temel Teoreminde verilen bir sürekli fonksiyona yaklaşan fonksiyonların sadece varlığı hakkında bilgi verilirken; 1912 yılında S. N. Bernstein yukarıda bahsi geçen polinomların fonksiyonlarla ilişkisini ortaya koyarak, Weierstrass Teoreminin basit bir ispatını vermiştir. $[0,1]$ aralığında sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsayan bir polinomlar dizisinin terimlerini

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\frac{k}{n}\right)\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}, \qquad n\in\mathbb{N},$$

şeklinde tanımlamıştır. $B_n(f)$ polinomuna f fonksiyonunun n. Bernstein polinomu denir. B_n operatörleri tanımlı oldukları sınırlı fonksiyonlar uzayında pozitif ve lineerdir. Söz konusu operatörlere Bernstein operatörleri denir. 1951 yılında H. Bohman ve 1953 yılında P. P. Korovkin fonksiyon uzayları üzerinde tanımlı pozitif lineer operatör dizilerinin yaklaşım teorisindeki uygulamaları üzerinde önemli araştırmalar yapmıştır. Kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsayan operatörler için basit bir kriter veren Bohman-Korovkin teoremine göre; $[a,b]$ aralığında tanımlı sürekli bir fonksiyona verilen pozitif lineer operatör dizileri altındaki görüntülerinin söz konusu sürekli fonksiyona düzgün yakınsayabilmesi için gerek ve yeter koşul 1, x, x^2 fonksiyonlarının her birinin görüntülerinden oluşan dizilerin kendilerine düzgün yakınsamasıdır. Bernstein operatörleri Bohman-Korovkin Teoreminin koşullarını sağlar. Bu temel çalışmadan sonra sürekli fonksiyonlara düzgün yakınsayan polinomlar veya daha genel olan tam fonksiyonlar dizisi oluşturmak için çok sayıda pozitif ve lineer operatörler inşa edilmiştir.

Bu çalışmada tüm bu operatör dizilerini daha genel özelliğe sahip olacak şekilde bir sınıfta toplayıp oluşturulan sınıfın bazı fonksiyonel özelliklerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Bu çerçevede her biri pozitif ve lineer operatörleri içeren regüler operatörler, quasi-operatörler ve hemen hemen pozitif lineer operatörler sınıflarının tanımları ve aralarındaki ilişkiler verilmiştir. Her $n \in \mathbb{N}$ için $R_n \in \mathcal{R}_C[0,1]$ (regüler operatörler sınıfı) ve $e_i(x) = x^i \; (i \in \mathbb{N}_0)$ olmak üzere

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \quad \forall i = 0,1,2 \quad \text{için} \quad \lim_{n\to\infty} \left\| R_n(e_i) - \lambda(e_i) \right\|_{[0,1]} = 0$$

koşullarını sağlayan $\mathcal{R} = \{R_n\}$ dizisine *Korovkin dizisi* adı verilir. Yukarıda elde edilen λ sayısına $\mathcal{R} = \{R_n\}$ dizisinin yaklaşım çarpanı denir ve her bir dizi için tek türlü bulunur. $\mathbb{K}_C[0,1]$ sembolü ile temsil edilen Korovkin dizileri ailesi bir reel lineer uzay oluşturur. Bu uzaya bazı kısıtlayıcı koşullar eklenerek elde edilen

$$\mathbb{K}_C^-[0,1] = \left\{ \mathcal{R} = \{R_n\} = \left\{P_n^+ - P_n^-\right\} \in \mathbb{K}_C[0,1] : \; \exists M > 0, \; \sup_n \left\| P_n^- \right\| \le M \right\}$$

alt uzayında bir norm tanımlanıp bu uzayın tamlığı incelenmiştir. Sonuç olarak da Bohman-Korovkin Teoreminin koşullarını sağlayan operatör dizilerinin oluşturduğu ailenin bu uzayda bir konik olduğu tespit edilmiştir. Tüm bu sonuçlar tezin Bulgular ve Tartışma bölümünde açıklanmıştır.

Tezin Materyal ve Metot kısmında; Cauchy kriterinden, lineer (vektör) uzay olma, normlu lineer uzay olma, tam olma (Banach uzayı olma) koşullarından, operatör çeşitlerinden, operatörlerin sınırlılığından, fonksiyon ve operatör normlarından, bazı fonksiyon, dizi uzayları ve özelliklerinden, yaklaşımın temel teoremi olan Weierstrass Teoremi, Bohman-Korovkin Teoremi ile ispatı ve Korovkin Teoremindeki test fonksiyonlarının gerekliliği gibi matematiksel analiz ve fonksiyonel analizde karşılaşılabilecek bazı temel tanımlar, teoremler ve özellikler verilmiştir.

Bu çalışmanın Bulgular ve Tartışma bölümü dört alt kısma ayrılmıştır. İlk kısımda regüler operatörlerden, ikinci kısımda hemen hemen pozitif operatörler için yakınsaklık özelliklerinden, üçüncü kısımda Korovkin dizi uzaylarından ve son kısımda da Pozitif Korovkin dizi uzaylarından bahsedilmiştir. Böylece tez çalışmamızın amacı olan Korovkin dizi uzaylarıyla ilgili bazı kısıtlamalar yaparak söz konusu uzayın lineer (vektör) uzayı olma, normlu lineer uzay olma, Banach uzayı olma ve konik olma gibi fonksiyonel özellikleri araştırılmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

Fonksiyonlar Teorisinin en önemli uygulamalarından olan Yaklaşım Teorisinin temel amacı bir fonksiyon uzayının elemanlarının belirli bir normda bu uzayın bir alt uzayının elemanlarından oluşturulmuş dizilerin limiti şeklinde gösterimini bulmaktır. Başka bir deyişle sürekli bir fonksiyona, bir polinom fonksiyonu dizisiyle yaklaşımın mümkünlüğünün tespiti ve ispatı yaklaşım teorisinin en önemli amaçlarından birisidir. Yaklaşım Teorisi'nin öncülerinden sayılan P. L. Chebyshev [1] 1854 yılında, bir polinomun verilen polinomlar sınıfı içinde bir fonksiyona düzgün norma göre yakınsak olup olmadığını belirleyen bir kriter vermiştir. K. Weierstrass [2] 1885 yılında yayınlanan "Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veranderlichen" adlı çalışmasında sürekli fonksiyonlara polinomlarla yaklaşımın mümkün olduğunu gösteren önemli bir teorem vermiştir. Teoreminde f, $\mathbb{R}$ üzerinde sınırlı ve sürekli olmak üzere ,

$$W_n(f;x)=\sqrt{\frac{n}{2\pi}}\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-n\frac{(t-x)^2}{2}} f(t)\,dt, \qquad x\in(-\infty,+\infty),$$

ile tanımlı $\{W_n(f)\}$ fonksiyon dizisinin söz konusu fonksiyona $\mathbb{R}$ üzerinde noktasal; kapalı ve sınırlı aralıklar üzerinde ise düzgün yakınsak olduğunu göstermiştir. 1908 yılında E. Landau [3], Weierstrass Teoremi'nin başka bir ispatını vermiştir. E. Landau ispatında terimleri ,

$$L_n(f;x)=\frac{\int_0^1\left(1-(t-x)^2\right)^n f(t)\,dt}{2\int_0^1\left(1-t^2\right)^n dt}$$

şeklinde tanımlı bir polinom dizisi kullanmıştır. Weierstrass Teoremi'nin verilen ispatlar içerisinde en önemli olanlardan bir tanesi 1912 yılında S. N. Bernstein [4] tarafından verilmiştir. f, $[0,1]$ aralığı üzerinde sınırlı bir fonksiyon olmak üzere ,

$$B_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\,f\left(\frac{k}{n}\right),\qquad 0\le x\le 1$$

biçiminde polinomlar dizisi tanımlanmıştır. Bernstein bu polinom dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yaklaşılabileceğini ispatlamıştır. Bu polinom dizisinin elemanlarına Bernstein polinomları denir. Yaklaşım Teorisi'nin temel teoremi olarak adlandırılan Weierstrass Teoremi'nin yukarıdaki ispatlarının dışında pek çok ispatı daha vardır. Bernstein'in $B_n(f;.)$ dizilerini oluşturma tekniği pozitif lineer operatörlere yaklaşımın ilk adımıdır. Daha sonraki yıllarda kapalı bir aralıkta sürekli fonksiyonlara yaklaşabilmek için pozitif lineer operatör yaygın olarak kullanılmıştır. 1930 yılında L.V. Kantorovich [5] tarafından

$$K_n(f;x)=(n+1)\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\int_{k/(n+1)}^{(k+1)/(n+1)}f(t)dt,\qquad 0\le x\le 1$$

operatörleri tanımlanarak, $[0,1]$ aralığı üzerinde integrallenebilir fonksiyonlar sınıfı için Bernstein Teoremi genelleştirilmiştir. K_n operatörüne Kantorovich operatörleri denir.

1952 yılında H. Bohman [6],

$$L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n}f\left(t_{k,n}\right)u_k(x),\qquad x\in[0,1],\ 0\le t_{k,n}\le 1,\ n\in\mathbb{N}$$

şeklinde olan pozitif lineer operatörler dizisinin $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yakınsaklığı hakkında oldukça kullanışlı bir kriter vermiştir. Ancak bu tipteki operatörler f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığı dışındaki değerlerinden bağımsızdır. 1953 yılında P. P. Korovkin [7-8], H. Bohman'nın sonucunu genelleyen ve pozitif lineer operatörler teorisini derinleştiren bir çalışma sunmuştur. Çalışmadaki kritere göre; keyfi bir $\{L_n(f)\}$ pozitif lineer operatör dizisinin f fonksiyonuna kapalı ve sonlu bir aralıkta düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter koşul her $i=0,1,2$ için $\{L_n(e_i)\}$ dizisinin ilgili aralıkta e_i fonksiyonuna düzgün yakınsamasıdır. Burada e_i'ler $e_i(x)=x^i$, $i\in\mathbb{N}_0$ ile tanımlı test fonksiyonlarıdır. Söz konusu kriter sürekli fonksiyonlara pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisinin temelini oluşturur. Bohman-Korovkin Teoremini gerçekleyen diğer operatör dizileri Bernstein operatörlerinin bulunma yöntemleri kullanılarak elde edilmiştir. Bu yüzden Bernstein polinomları pozitif lineer operatörlerle yaklaşım teorisinin oluşmasında çok önemli bir yere sahiptir. Ayrıca pozitif lineer operatör dizileri yaklaşım teoreminde en iyi yaklaşım sonuçlarını vermese de polinomların açık olarak yazılabilmesine imkan sağladığından oldukça kullanışlıdır.

1969 yılında D. D. Stancu [9], Bernstein operatörünü aşağıdaki şekilde genelleştirmiştir;

$$P_n^{(\alpha,\beta)}(f;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\, f\left(\frac{k+\alpha}{n+\beta}\right),\qquad 0\le\alpha\le\beta .$$

Açıktır ki $\alpha=\beta=0$ durumunda Bernstein polinomları elde edilir. Bu operatörlere Stancu operatörleri adı verilir.

Bohman-Korovkin Teoremi reel eksenin sonlu ve kapalı aralıklarında verilmiştir. Sonlu olmayan aralıklarda ise pozitif lineer operatörler ile yaklaşım koşullarını ilk olarak 1974-76 yılları arasında A. D. Gadjiev[10] ve Z. Ditzian [11] ağırlıklı fonksiyon uzaylarında araştırmışlardır.

Son yıllarda pozitif olmayan bazı lineer operatör dizileri için Korovkin tipi teoremleri üzerine araştırmalar yapılmıştır. 1991 yılında T. Nishishiraho [12] quasi-pozitif operatörleri tanımlamış ve onların yaklaşım özelliklerini incelemiştir. 1993 yılında M. Campiti [13] ise konveks-monoton operatörler üzerine araştırmalar yapmıştır. 2010 yılında O. Nowak [14] hemen hemen pozitif lineer operatörler dizisi için Korovkin tipi teoremi ispatlamıştır. Ayrıca bu operatör dizilerinin quasi-pozitif operatör ve diğer regüler operatör dizileri arasındaki ilişkileri açıklanmıştır. [14]

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, matematiksel analiz, fonksiyonel analiz, yaklaşım teorisi ile ilgili bazı konu ve kavramların yanı sıra yaklaşımım temel teoremine, regüler operatörlere, pozitif lineer operatörlere ve pozitif lineer operatörlerin düzgün yakınsaklık konusunda sağladığı yararlara değinilecektir.

3.1. ÖN BİLGİLER

3.1.1. Tanım. f, (a,b) açık aralığında tanımlı reel değerli bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x - x_0| < \delta$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0)$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu x_0 noktasında süreklidir denir [15].

3.1.2. Tanım. f, (a,b) açık aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f, fonksiyonu (a,b) açık aralığının her noktasında sürekli ise f fonksiyonu (a,b) aralığında süreklidir denir [15].

3.1.3. Tanım. f, (a,b) açık aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $x_0 \in (a,b)$ olsun. Her bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $0 \le x - x_0 < \delta \, (-\delta < x - x_0 \le 0)$ iken $|f(x) - f(x_0)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta = \delta(\varepsilon, x_0) > 0$ sayısı bulunabilirse f fonksiyonu x_0 noktasında sağdan (soldan) süreklidir denir [15].

3.1.4. Tanım. f, $[a,b]$ kapalı aralığında tanımlı bir fonksiyon olsun. f, (a,b) açık aralığında sürekli $x = a$ noktasında sağdan ve $x = b$ noktasında soldan sürekli ise f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında süreklidir denir. $[a,b]$ aralığında sürekli, reel değerli tüm fonksiyonların sınıfı $C[a,b]$ ile gösterilir. [15]

3.1.5 Teorem. f, (a,b) açık aralığında sürekli bir fonksiyon olsun. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık $|x' - x''| < \delta$ koşulunu sağlayan her $x', x'' \in (a,b)$

için $\left|f(x')-f(x'')\right|<\varepsilon$ olacak şekilde bir $\delta=\delta(\varepsilon)>0$ sayısı bulunabiliyorsa f fonksiyonu (a,b) aralığında *düzgün süreklidir* denir. [15]

3.1.6.Tanım. f , $A\subset\mathbb{R}$ kümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. Bir $M>0$ ve her $x\in A$ için $\left|f(x)\right|\le M$ oluyorsa f fonksiyonu A kümesi üzerinde *sınırlıdır* denir. A üzerinde sınırlı tüm fonksiyonların kümesi $B(A)$ ile gösterilir. Özel olarak $A=[a,b]$ için bu küme $B[a,b]$ ile temsil edilir [15].

3.1.7. Teorem. Kapalı bir aralıkta sürekli olan her fonksiyon o aralıkta aynı zamanda düzgün süreklidir. [15]

3.1.8. Teorem (Ara Değer Teoremi). $f\in C[a,b]$ olsun. $[a,b]$ aralığında $x_1<x_2$ ve $f(x_1)\ne f(x_2)$ olacak şekilde x_1,x_2 noktaları verildiğinde f fonksiyonu, (x_1,x_2) aralığında $f(x_1)$ ve $f(x_2)$ aralığındaki her değeri en az bir defa alır [15].

3.1.9. Tanım. Eğer $A\subset\mathbb{R}$ kümesi üstten (alttan) sınırlı bir küme ise üst sınırların en küçüğüne (alt sınırların en büyüğüne) A ’nın *supremumu (infimumu)* denir ve $\sup A$ $(\inf A)$ ile gösterilir.

3.1.10. Önerme. [15] $A\subset\mathbb{R}$ sınırlı kümesi için $\inf A=m$ ve $\sup A=M$ olsun. Bu durumda

i. $\forall x\in A$ için $x\le M$;
ii. $\forall\varepsilon>0$ için $x>M-\varepsilon$ olacak şekilde bir $x\in A$ vardır;
iii. $\forall x\in A$ için $x\ge m$ ’dir;
iv. $\forall\varepsilon>0$ için $x<m+\varepsilon$ olacak şekilde bir $x\in A$ vardır.

3.1.11. Teorem. $f\in C[a,b]$ ise f fonksiyonu , $[a,b]$ kapalı aralığında sınırlıdır [15].

3.1.12. Teorem. $f \in C[a,b]$ ise f fonksiyonu $[a,b]$ kapalı aralığında en büyük ve en küçük değerini alır [15].

3.1.13. Tanım. Tanım kümesi doğal sayılar olan fonksiyona bir *dizi* denir. f , bir dizi ise her bir n doğal sayısına bir a_n sayısı karşılık geleceğinden f dizisi $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ şeklinde gösterilir. Diziler görüntü kümesine göre adlandırılır [15].

3.1.14. Tanım. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi verilsin. Bir kesin artan $\{n_k\}_{k=1}^{\infty}$ doğal sayı dizisi için elde edilen $\{a_{n_k}\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin bir *alt dizisi* denir. [15]

3.1.15. Tanım. $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir reel sayı dizisi olsun. Bir $M > 0$ var öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $|a_n| \leq M$ oluyorsa bu diziye bir *sınırlı dizi* denir. Bütün sınırlı dizilerin kümesi ℓ_∞ sembolüyle gösterilir [15].

3.1.16. Önerme. ℓ_∞ reel terimli bütün sınırlı dizilerin kümesini oluşturmak üzere $\{x_n\} \in \ell_\infty$ ise $\sup x_n$ ve $\inf x_n$ vardır. $\sup\limits_{n\geq k} x_n = \alpha_k$ ve $\inf\limits_{n\geq k} x_n = \beta_n$ olmak üzere $\{\alpha_k\}$ azalan, $\{\beta_k\}$ ise artan bir dizidir [16].

3.1.17. Tanım. $\{x_n\} \in \ell_\infty$ olmak üzere

i. $\inf \alpha_k = \lim\limits_{k\to\infty} \alpha_k = \inf\limits_{n\geq 1}\left(\sup\limits_{n\geq k} x_n\right)$ sayısına $\{x_n\}$ dizisinin *üst limiti* denir ve $\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ ya da $\limsup x_n$ ile gösterilir.

ii. $\sup \beta_k = \lim\limits_{k\to\infty} \beta_k = \sup\limits_{n\geq 1}\left(\inf\limits_{n\geq k} x_n\right)$ sayısına $\{x_n\}$ dizisinin *alt limiti* denir ve $\underline{\lim\limits_{n\to\infty}}\, x_n$ ya da $\liminf x_n$ ile gösterilir. [16]

3.1.18. Önerme. [16] $\{x_n\} \in \ell_\infty$ için aşağıdakiler doğrudur:

i. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \leq y_n$ ise $\limsup x_n \leq \limsup y_n$ ve $\liminf x_n \leq \liminf y_n$;

ii. $\limsup x_n = \liminf x_n = \ell \iff \lim x_n = \ell$;

iii. $\liminf x_n + \liminf y_n \leq \liminf (x_n + y_n) \leq \liminf x_n + \limsup y_n$

$$\leq \limsup (x_n + y_n)$$
$$\leq \limsup (x_n) + \limsup (y_n)$$

iv. $\liminf x_n = -\limsup(-x_n)$ ve $\limsup(-x_n) = -\liminf x_n$.

3.1.19. Tanım. [15] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi verildiğinde $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere her $\varepsilon > 0$ sayısı için her bir $n \geq N$ için $|a_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon, a) \in \mathbb{N}$ bulunabilirse $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi a'ya yakınsıyor denir ve $\lim_{n\to\infty} a_n = a$ şeklinde gösterilir.

3.1.20. Tanım. [15] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ var öyle ki her $n, m \geq n_\varepsilon$ için $|a_n - a_m| < \varepsilon$ koşulu sağlanıyorsa $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ bir *Cauchy dizisidir* denir.

3.1.21. Teorem. [15] $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ reel sayı dizisi verilsin. Eğer $\{a_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi yakınsak ise bir Cauchy dizisidir. Tersine, eğer bir Cauchy dizisi ise bir reel sayıya yakınsar.

3.1.22. Tanım. $A \subset \mathbb{R}$ ve $F(A)$, A kümesi üzerinde tanımlı reel değerli tüm fonksiyonların kümesi olsun. Doğal sayılar kümesinden $F(A)$ kümesine tanımlı fonksiyona *fonksiyon dizisi* denir [17].

3.1.23. Tanım. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$, $A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon dizisi olmak üzere bir $M > 0$ var öyle ki her $x \in A$ ve $n \in \mathbb{N}$ için $|f_n(x)| \leq M$ sağlanıyorsa $\{f_n\}$ dizisi A kümesi üzerinde *düzgün sınırlıdır* denir [17].

3.1.24. Tanım. $A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisi verilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ ve $x \in A$ için bir $N = N(\varepsilon, x) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir öyle ki her $n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f fonksiyonuna *noktasal yakınsaktır* denir [17].

3.1.25. Tanım. $A \subset \mathbb{R}$ kümesi üzerinde tanımlı $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyon dizisi verilsin. Herhangi bir $\varepsilon > 0$ için bir $N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı bulunabilir öyle ki her $x \in A$ ve her $n \geq N$ için $|f_n(x) - f(x)| < \varepsilon$ olacak şekilde bir f fonksiyonu varsa $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır* denir ve $f_n \overset{A}{\rightrightarrows} f$ ile gösterilir [17].

3.1.26. Teorem (Cauchy Kriteri). $A \subset \mathbb{R}$, $f_n : A \to \mathbb{R}$ $(n \in \mathbb{N})$ bir fonksiyon dizisi ve $f : A \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilmiş olsun. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonel dizisinin bir f fonksiyonuna düzgün yakınsaması için gerek ve yeter koşul verilen her $\varepsilon > 0$ sayısına karşılık bir $n_0(\varepsilon) > 0$ sayısının, $n, m \geq n_\varepsilon(\varepsilon)$ koşulunu sağlayan tüm n ve m 'ler ve her $x \in A$ için $|f_n(x) - f_m(x)| < \varepsilon$ eşitsizliğini sağlayacak şekilde var olmasıdır [17].

3.1.27 Tanım. $[a,b]$ üzerinde tanımlı bir f fonksiyonu, eğer

$$\text{“}\forall x \in [a,b] \quad \text{için} \quad f(x) \geq 0\text{”}$$

özelliğine sahip ise f fonksiyonuna *pozitif fonksiyon* denir. $[a,b]$ üzerinde pozitif ve sürekli fonksiyonlar sınıfı $\mathcal{P}_C[0,1]$ ile gösterilir.

3.2 NORMLU LİNEER UZAYLAR

3.2.1. Tanım. X boş olmayan bir küme ve K bir cisim olsun.

$$+ : X \times X \to X,\ (x, y) \to x + y$$

$$\bullet : K \times X \to X,\ (a, x) \to ax$$

dönüşümleri ile toplama ve skalerle çarpma işlemleri tanımlansın. Her $x, y, z \in X$ ve $a, b \in K$ için aşağıdaki koşullar sağlansın:

i. $x + y = y + x$;

ii. $x + (y + z) = (x + y) + z$;

iii. Her $x \in X$ için $x + \theta = x$ eşitliğini sağlayan bir tek $\theta \in X$ vardır ;

iv. Her $x \in X$ için $x + (-x) = \theta$ eşitsizliğini sağlayan bir tek $-x \in X$ vardır;

v. Her $x \in X$ için $1 \bullet x = x$

vi. $a \bullet (x + y) = a \bullet x + a \bullet y$

vii. $(a + b) \bullet x = a \bullet x + b \bullet x$

viii. $(ab) \bullet x = a \bullet (b \bullet x)$

Bu durumda X ’e K üzerinde bir *vektör uzayı (lineer uzay)* denir [16].

3.2.2. Tanım. X , K üzerinde bir lineer uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer her $x,\ y \in E$ ve her $\alpha \in [0,1]$ için $\alpha x + (1 - \alpha) y \in E$ ise E bir *konveks (dış bükey) kümedir* denir [18].

3.2.3. Tanım. X , K cismi üzerinde bir lineer uzay olsun.

$$\| \cdot \| : X \to \mathbb{R}^{+},\ x \to \|x\|$$

dönüşümü her $x,\ y \in X$ ve $\alpha \in K$ için

i. $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$;

ii. $\|\alpha x\| = |\alpha| \|x\|$;

iii. $\|x + y\| \le \|x\| + \|y\|$

özelliklerini sağlıyorsa X üzerinde norm adını alır. Bu durumda $(X,\|\cdot\|)$ ikilisine *normlu lineer uzay* denir [18].

3.2.4. Örnekler

1. $\mathbb{R}^n=\{x=(x_1,x_2,\cdots,x_n):\ x_i\in\mathbb{R},\ i=1,2,\cdots,n\}$ vektör uzayı aşağıda verilen her bir norma göre normlu uzaydır:

i. $\|x\|_p=\left(\sum_{i=1}^{n}|x_i|^p\right)^{1/p}, \quad 1\le p<\infty$

ii. $\|x\|_\infty=\max\{|x_i|:\ i=1,2,\cdots,\mathrm{n}\}$

2. $\ell_\infty=\left\{x=\{x_n\}_{n=0}^{\infty}:\ \forall n\in\mathbb{N}_0 \text{ için } x_n\in\mathbb{R},\ x \text{ sınırlıdır}\right\}$ kümesi

$$x+y=\{x_n\}+\{y_n\}=\{x_n+y_n\}; \qquad \lambda x=\{\lambda x_n\}$$

işlemlerine göre bir vektör uzayı ve

$$\|x\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}_0}|x_n|$$

ile bir normlu uzaydır.

3. $f,g\in C[a,b]$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ için

$$(f+g)(x)=f(x)+g(x), \quad (\alpha f)(x)=\alpha(f(x))$$

ile tanımlı işlemlere göre $C[a,b]$, $\mathbb{R}$ üzerinde lineer uzay;

$$\|f\|_{[a,b]}=\max_{x\in[a,b]}|f(x)|$$

ile bir normlu uzaydır.

3.2.5. Tanım. X bir normlu uzay ve $E \subset X$ olsun. Eğer E kümesi tüm yığılma noktalarını içeriyorsa E *kapalı kümedir* denir. [18]

3.2.6. Önerme. [18]. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında bir dizi ve $x_0 \in X$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} x_n = x_0$$

ise aşağıdakiler doğrudur.

i. x_0 limiti tektir;

ii. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi sınırlıdır;

iii. $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin her alt dizisinin de limiti x_0 dır;

iv. Eğer $y_n \to y_0$ $(y_n, y_0 \in X)$ ise $x_n + y_n \to x_0 + y_0$;

v. $\|x_n\| \to \|x_0\|$.

3.2.7. Önerme. [18] $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayında;

i. Yakınsak her dizi bir Cauchy dizisidir,

ii. Her Cauchy dizisi sınırlıdır,

iii. Bir Cauchy dizisi bir $x \in X$ noktasına yakınsak bir alt diziye sahipse dizi x'e yakınsaktır.

3.2.8. Tanım. Bir $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayındaki her Cauchy dizisi X içinde bir limite yakınsıyorsa, bu uzaya *tam normlu uzay* ya da *Banach uzayı* denir [18].

Örnekler 3.2.4'te verilen her normlu uzay bir Banach uzayıdır.

3.2.9. Tanım. X bir reel Banach uzayı ve $E \subset X$ alt kümesi verilmiş olsun. Eğer

i. E kümesi kapalı ve dışbükey;

ii. $x \in E$ ise her $t \geq 0$ için $tx \in E$;

iii. $x \in E$ ve $-x \in E$ ise $x = \theta$

koşulları sağlanıyorsa E kümesine X uzayında *koniktir* denir [18].

3.2.10. Tanım. X bir reel Banach uzayı ve $E \subset X$ bir konik olsun. Eğer $x, y \in X$ için $y - x \in E$ ise " y *büyük-eşit* x *'dir*" denir ve $y \geq x$ ile gösterilir. Üzerinde $\geq$ bağıntısı olan Banach uzayına *kısmi sıralı Banach uzayı* denir [18].

3.3. LİNEER OPERATÖRLER

3.3.1. Bazı Genel Tanım ve Teoremler

3.3.1.1. Tanım. [18] X ve Y aynı K cismi üzerinde iki lineer uzay olmak üzere

$$A : X \to Y$$

bir fonksiyon olsun. Her $x, y \in X$ ve $\alpha, \beta \in K$ için

$$A(\alpha x + \beta y) = \alpha A(x) + \beta A(y)$$

ise A fonksiyonuna bir *lineer operatör* denir. Herhangi bir A lineer operatörü için aşağıdaki bağıntılar doğrudur:

$$A(\theta) = \theta; \qquad A(-x) = -A(x).$$

3.3.1.2. Tanım. [18] X ve Y aynı K cismi üzerinde iki normlu uzay ve $A : X \to Y$ bir lineer operatör olsun. Her $x \in X$ için

$$\|A(x)\|_Y \leq C\|x\|_X$$

olacak şekilde bir $C>0$ varsa A operatörüne *sınırlıdır* denir. X 'den Y 'ye sınırlı tüm lineer operatörler ailesi $\mathcal{B}(X,Y)$ ile gösterilir. Eğer $Y\subset X$ ise kısaca $\mathcal{B}(X)$ ile gösterilir. Yukarıdaki eşitsizliği sağlayan $C>0$ sayılarının infimumuna $A:X\to Y$ operatörünün *normu* denir ve $\|A\|$ ile gösterilir:

$$\|A\| = \inf\left\{C>0:\ \forall x\in X,\ \ \|A(x)\|_Y \le C\|x\|_X\right\}$$

3.3.1.3. Önerme. [18] X ve Y aynı K cismi üzerinde iki normlu uzay ve $A:X\to Y$ bir sınırlı lineer operatör olsun. Bu durumda aşağıdakiler doğrudur:

i. $\|A\| = \sup\left\{\|A(x)\|_Y :\ x\in X,\ \ \|x\|_X <1\right\};$

ii. $\|A\| = \sup\left\{\|A(x)\|_Y :\ x\in X,\ \ \|x\|_X =1\right\};$

iii. $\|A\| = \sup\left\{\dfrac{\|A(x)\|_Y}{\|x\|_X} :\ x\in X,\ \ x\neq\theta\right\}.$

$\mathcal{B}(X,Y)$ üzerinde toplama ve skaler ile çarpma işlemleri aşağıdaki gibi tanımlanır: $A,B\in\mathcal{B}(X,Y)$ ve $\alpha\in K$ için

$$(A+B)(x)=A(x)+B(x),\quad (\alpha A)(x)=\alpha(A(x)).$$

3.3.1.4. Teorem. $\mathcal{B}(X,Y)$ bir normlu lineer uzaydır. Eğer Y bir Banach uzayı ise $\mathcal{B}(X,Y)$ bir Banach uzayıdır [16].

3.3.1.5. Tanım. [18] X ve Y Banach uzayları (A_n), $\mathcal{B}(X,Y)$ içinde operatörler dizisi ve $A\in\mathcal{B}(X,Y)$ olsun.

i. $\{A_n\}$ dizisi sınırlıdır $\Leftrightarrow$ $\exists c>0\ :\ \forall n\in\mathbb{N}$ için $\|A_n\|\le c.$

ii. $\{A_n\}$ bir Cauchy dizisidir $\Leftrightarrow$ $\forall\varepsilon>0$ için $\exists n_\varepsilon\in\mathbb{N}$:

$\forall n,m>n_\varepsilon$ için $\|A_n-A_m\|\le\varepsilon.$

iii. $\{A_n\}$ dizisi A operatörüne yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\forall \varepsilon > 0$, $\exists n_\varepsilon \in \mathbb{N}$:

$\forall n > n_\varepsilon$ için $\|A_n - A\| \le \varepsilon$.

3.3.1.6. Teorem. (Düzgün sınırlılık prensibi). X ve Y aynı K cismi üzerinde iki Banach uzayı ve $\{A_n\}$, $\mathcal{B}(X,Y)$ uzayında bir dizi olsun. Her $x \in X$ için $\{A_n(x)\}$ dizisi sınırlı ise $\{\|A_n\|\}$ dizisi sınırlıdır [16].

3.3.1.7. Teorem. (Banach-Steinhaus). X ve Y aynı K cismi üzerinde iki Banach uzayı ve $\{A_n\}$, $\mathcal{B}(X,Y)$ uzayında bir dizi olsun. $\{A_n\}$ dizisinin bir $A \in \mathcal{B}(X,Y)$ operatörüne yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $\{\|A_n\|\}$ dizisinin sınırlı ve X 'in yoğun bir alt uzayında $\{A_n\}$ dizisinin A operatörüne yakınsak olmasıdır [18].

Çalışmada ele alınan operatörler sürekli fonksiyonların oluşturduğu uzaylar üzerinde olacağından, bu aşamadan sonra operatörleri ve özelliklerini fonksiyon uzayları için vereceğiz.

3.3.2. Pozitif Lineer Operatörler

M boştan farklı bir küme olsun. M 'de tanımlanmış reel değerli fonksiyonlar sınıfı $F(M)$ $\mathbb{R}$ üzerinde bir lineer uzaydır.

3.3.2.1. Tanım. M ve N boştan farklı kümeler olmak üzere X ve Y sırasıyla $F(M)$ ve $F(N)$ 'nin alt uzayları olmak üzere her pozitif $f \in X$ fonksiyonu için $P(f)$ pozitif fonksiyon ise $P: X \to Y$ operatörüne *pozitif operatör* denir. Hem pozitif hem de lineer olan operatöre *pozitif lineer operatör* adı verilir. Pozitif ve lineer operatörler ailesi $\mathcal{P}_F(M,N)$ ile; eğer $M = N$ ise kısaca $\mathcal{P}_F(M)$ ile gösterilir. Özel olarak $C[0,1]$ üzerinde tanımlı tüm pozitif ve lineer operatörlerin kümesi $\mathcal{P}_C[0,1]$ ile gösterilir.

3.3.2.2. Tanım. Her $f,\ g \in X$ için $f \leq g$ olduğunda, $L(f) \leq L(g)$ oluyorsa L pozitif lineer operatörüne *monotondur* denir. Açıktır ki pozitif lineer operatörler aynı zamanda monotondurlar. Öte yandan, $L: X \to Y$ pozitif lineer operatör ve $f, |f| \in X$ için

$$|L(f)| \leq L(|f|)$$

eşitsizliği doğrudur [20].

3.3.2.3. Önerme. [20]. $L: B[a,b] \to B[a,b]$ pozitif lineer operatör ise o zaman L sınırlıdır ve normu

$$\|L\| = \|L(1)\|_{[a,b]}$$

eşitliği ile hesaplanır.

Pozitif lineer operatör ile yaklaşım kuramında sık kullanılan eşitsizliklerden bir tanesi aşağıda verilmiştir:

$$|L(f\,g)| \leq \sqrt{L(f^2)}\sqrt{L(g^2)}.$$

Bu eşitsizliğe *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* denir. Bu eşitsizliğin genel hali de doğrudur:

$L: X \to Y$ pozitif lineer operatör ve $p,q > 1$ reel sayılar öyle ki $1/p + 1/q = 1$ olsun. O zaman her $f, g \in X$ için

$$L(|f\,g|) \leq \left(L\left(|f|^p\right)\right)^{\frac{1}{p}} \left(L\left(|g|^q\right)\right)^{\frac{1}{q}}$$

eşitsizliği doğrudur. Bu eşitsizliğe *pozitif lineer operatörler için Hölder eşitsizliği* adı verilir.

Özel olarak Hölder Eşitsizliğinde $p=q=2$ alınırsa yukarıda verilen *Cauchy-Schwarz eşitsizliği* elde edilir [21].

3.3.3. Pozitif Olmayan Bazı Operatör Sınıfları

3.3.3.1. Tanım. [14]. $L:C[a,b]\to C[a,b]$ bir lineer operatör olsun. Eğer $[a,b]$ kümesi için $[a,b]=P\cup N$ olacak şekilde P ve N kapalı kümeleri bulunabilir öyle ki her $f\in C^{+}[a,b]$ için $x\in P$ iken $L(f)(x)\geq 0$ ve $x\in N$ iken $L(f)(x)\leq 0$ ise L opeartörüne *quasi-pozitif operatör* ya da *konveks-monoton operatör* adı verilir. Bu operatörler sınıfı $Q\mathcal{P}_C[a,b]$ ile gösterilir.

Açıktır ki her $P\in\mathcal{P}_C[a,b]$ operatörü bir quasi-pozitif operatördür. Her $x\in[a,b]$ için $e_0(x)=1$ olsun.

3.3.3.2. Önerme. L bir quasi-pozitif operatör olsun. Eğer $L(e_0)=e_0$ ise $L\in\mathcal{P}_C[a,\text{b}]$ olduğunu ifade eder [14].

3.3.3.3. Tanım. R $C[a,b]$ üzerinde tanımlı bir operatör olmak üzere $R=P^{+}-P^{-}$ olacak şekilde $P^{+},\ P^{-}\in\mathcal{P}_C[a,b]$ varsa R 'ye *regüler operatör* denir. Regüler operatörler ailesi $\mathcal{R}_C[a,b]$ ile gösterilir [14].

Açıktır ki her bir quasi-pozitif operatör bir regüler operatördür. Dolayısıyla da her bir quasi-pozitif operatör dizisi bir regüler operatör dizisidir [14].

3.3.3.4. Tanım. $\mathcal{R}=\{R_n\}=\{P_n^{+}-P_n^{-}\}$ regüler operatör dizisi verilsin. Her $f\in C[a,b]$ ve $x\in[a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty}P_n^{-}(f)(x)=0$$

ise $\mathcal{R}=\{R_n\}$ dizisine *hemen hemen pozitif operatör dizisi* adı verilir. Bu dizilerin ailesi $\mathcal{AP}_C[a,b]$ ile gösterilir [14].

$C[a,b]$ üzerinde tanımlı, regüler, pozitif, hemen hemen pozitif ve quasi-pozitif lineer operatör dizileri arasındaki ilişki aşağıda verilmiştir.

$$\mathcal{P}_C[a,b]\subset \mathcal{AP}_C[a,b]\subset \mathcal{R}_C[a,b]; \quad \mathcal{P}_C[a,b]\subset Q\mathcal{P}_C[a,b]\subset \mathcal{R}_C[a,b].$$

Bu içermeler kesindir. Ayrıca

$$\left(Q\mathcal{P}_C[a,b]\cap \mathcal{AP}_C[a,b]\right)-\mathcal{P}_C[a,b]\neq\varnothing .$$

Örnekler için [14]'e bakılabilir.

3.4. YAKLAŞIM TEORİSİNDE BAZI TEOREMLER

Bu bölümde, verilen kompakt aralıkta sürekli fonksiyona istenilen yakınlıkta polinomların varlığı hakkındaki Weierstrass Teoremi, Bernstein Teoremi ve Bohman-Korovkin Teoremi verilecektir.

3.4.1. Weierstrass Yaklaşım Teoremi

1885 yılında K. Weierstrass [2], keyfi bir $f\in C[a,b]$ fonksiyonu verildiğinde bu fonksiyona istenilen yakınlıkta bir cebirsel polinomun varlığını aşağıda verilen teoremiyle ispatlamıştır.

3.4.1.1 Weierstrass Yaklaşım Teoremi. Her bir $f\in C[a,b]$ fonksiyonu ve her $\varepsilon>0$ sayısı için $\|f-P\|<\varepsilon$ olacak şekilde bir P polinomu vardır. [2]

Yaklaşım teorisinin temel teoremi olarak nitelendirilen ve literatürde *Weierstrass Yaklaşım Teoremi* olarak bilinen teoremin birçok ispatı vardır. Bu ispatlar içerisinde önemli olanlardan bir tanesi 1912 yılında S. N. Bernstein tarafından verilmiştir. S. N. Bernstein, $[0,1]$ aralığında sınırlı bir f fonksiyonu ve $n \in \mathbb{N}$ için

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)$$

ile tanımlı polinomları tanımlamıştır. Bu polinomlara n. *Bernstein polinomu*, B_n operatörüne de n. *Bernstein operatörü* denir. Fonksiyonlar kümesinden polinomlar kümesine giden B_n operatörü lineerdir, yani her f, g fonksiyonu ve her α, β reel sayıları için

$$B_n(\alpha f + \beta g; x) = \alpha B_n(f;x) + \beta B_n(g;x)$$

eşitliği doğrudur. Ayrıca, eğer $f \leq g$ ise,

$$B_n(f;x) \leq B_n(g;x)$$

eşitsizliği doğrudur. Öte yandan, tanımdan kolayca görüleceği üzere,

$$|B_n(f;x)| \leq B_n(|f|;x)$$

olur.

S. N. Bernstein [4], bu polinomlarla $[0,1]$ aralığında sürekli f fonksiyonuna düzgün yaklaşılabileceğini aşağıda verilen teorem ile ispatlamıştır.

3.4.1.2. Bernstein Teoremi. Bir $f \in C[0,1]$ fonksiyonu verildiğinde, $\{B_n(f;.)\}$ Bernstein polinomlar dizisi f fonksiyonuna $[0,1]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır. [4]

3.4.2. Bohman-Korovkin Teoremi

1951 yılında H. Bohman, $f \in C[0,1]$ olmak üzere

$$L_n(f;x)=\sum_{k=0}^{n} f\left(\xi_{n,k}\right) p_{n,k}(x); \qquad x,\ \xi_{n,k}\in[0,1],\ p_{n,k}\geq 0,\ n\in\mathbb{N}$$

ile tanımlı $\{L_n(f)\}$ dizisinin

$$L_n(e_i)\overset{[0,1]}{\rightrightarrows} e_i, \qquad i=0,1,2$$

koşullarını sağladığında, f fonksiyonuna $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsadığını ispatlamıştır. H. Bohman'ın ele aldığı bu tipteki operatörler, açıktır ki, pozitif ve lineerdir ve f fonksiyonunun $[0,1]$ aralığının dışındaki değerlerinden bağımsızdır. 1953 yılında P. P. Korovkin aynı problemi daha geniş operatörler sınıfında, b noktasında sağdan, a noktasında soldan sürekli ve tüm reel eksende sınırlı olan $f\in C[a,b]$ fonksiyonları için incelemiştir. [21]

3.4.2.1. Korovkin Teoremi. $C[a,b]$ üzerinde tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatörler dizisi verilsin. $f\in C[a,b]$ fonksiyonu b noktasında sağdan, a noktasında soldan sürekli ve tüm reel eksende sınırlı olmak üzere

$$L_n(f)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$$

olması için gerek ve yeter koşul

$$L_n(e_i)\overset{[a,b]}{\rightrightarrows} e_i, \qquad i=0,1,2 \tag{3,1}$$

koşullarının sağlanmasıdır. [7]

İspat. Gereklilik kısmının ispatı açıktır. Dolayısıyla sadece yeterlilik kısmı ispatlanacaktır. f fonksiyonu reel eksende sınırlı olduğundan bir $M>0$ sayısı vardır öyle ki

$$\text{her } x\in\mathbb{R} \text{ için } \quad |f(x)|\leq M\,. \tag{3,2}$$

Ayrıca $f \in C[a,b]$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $|t-x| < \delta$ olacak şekilde her $t \in \mathbb{R}$ ve $x \in [a,b]$ için

$$|f(t) - f(x)| < \varepsilon \tag{3,3}$$

eşitsizliğini gerçekleyen en az bir $\delta > 0$ sayısı vardır. Öte yandan $|t-x| \geq \delta$ için

$$\frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 \geq 2M$$

eşitsizliği doğrudur. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin. Son eşitsizlikle birlikte (3,2) ve (3,3) eşitsizlikleri yardımıyla ε yerine $\varepsilon/8$ alınırsa

$$|f(t) - f(x)| < \frac{2M}{\delta^2}(t-x)^2 + \frac{\varepsilon}{8} \tag{3,4}$$

eşitsizliği bulunur. Pozitif lineer operatörün özelliklerinden her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} |L_n(f;x) - f(x)| &= |L_n(f - f(x);x) + f(x)(L_n(e_0;x) - e_0(x))| \\ &\leq |L_n(f - f(x);x)| + |f(x)||L_n(e_0;x) - e_0(x)| \\ &\leq L_n(|f - f(x)|;x) + M\|L_n(e_0) - e_0\| \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. (3,1)'den dolayı bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq N$ için

$$\|L_n(e_0) - e_0\| < \frac{\varepsilon}{2M}.$$

Dolayısıyla

$$|L_n(f;x) - f(x)| < L_n(|f - f(x)|;x) + \frac{\varepsilon}{2} \tag{3,5}$$

elde edilir. (3,4) eşitsizliği ve pozitif lineer operatörün özellikleri kullanılarak

$$
\begin{aligned}
L_n\left(\left|f-f(x)\right|;x\right) &< L_n\left(\frac{2M}{\delta^2}(e_1-x)^2+\frac{\varepsilon}{8};x\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{8}L_n(e_0;x)+\frac{2M}{\delta^2}L_n\left((e_1-x)^2;x\right)\\
&= \frac{\varepsilon}{8}L_n(e_0;x)+\frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(e_2;x)-2xL_n(e_1;x)+x^2L_n(e_0;x)\right]\\
&\le \frac{\varepsilon}{8}\left[L_n(e_0;x)-e_0(x)\right]+\frac{\varepsilon}{8}+\frac{2M}{\delta^2}\left\{\left[L_n(e_2;x)-e_2(x)\right]\right.\\
&\qquad \left.-2x\left[L_n(e_1;x)-e_1(x)\right]+x^2\left[L_n(e_0;x)-e_0(x)\right]\right\}\\
&= \frac{\varepsilon}{8}+\left(\frac{\varepsilon}{8}+\frac{2M}{\delta^2}x^2\right)\left[L_n(e_0;x)-e_0(x)\right]+\frac{2M}{\delta^2}\left[L_n(e_2;x)-e_2(x)\right]\\
&\qquad -\frac{4M}{\delta^2}x\left[L_n(e_1;x)-e_1(x)\right]
\end{aligned}
$$

elde edilir.

$$
\max_{x\in[a,b]}\left|\frac{\varepsilon}{8}+\frac{2M}{\delta^2}x^2\right|=M_0,\quad \max_{x\in[a,b]}\left|-\frac{4M}{\delta^2}x\right|=M_1,\quad \frac{2M}{\delta^2}=M_2
$$

olmak üzere

$$
L_n\left(\left|f-f(x)\right|;x\right)<\frac{\varepsilon}{8}+\sum_{i=0}^{2}M_i\left|L_n(e_i;x)-e_i(x)\right|
$$

$$
\le\frac{\varepsilon}{8}+\sum_{i=0}^{2}M_i\left\|L_n(e_i)-e_i\right\|.
$$

(3,1)'den dolayı her bir $i=0,1,2$ için bir $N_i\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n\ge N_i$ için

$$
\left\|L_n(e_i)-e_i\right\|<\frac{\varepsilon}{8M_i}
$$

elde edilir. Dolayısıyla

$$
L_n\left(\left|f-f(x)\right|;x\right)<\frac{\varepsilon}{2} \tag{3,6}
$$

bulunur. Son eşitsizlik ve (3,5) eşitsizliği yardımıyla her $n \geq \max\{N, N_0, N_1, N_2\}$ için

$$\|L_n(f) - f\| < \varepsilon$$

olur. Dolayısıyla ispat tamamlanır.

3.4.2.2. Örnek (Bernstein Polinomları). $[0,1]$ aralığında tanımlı sürekli keyfi f fonksiyonu için n. Bernstein polinomu(operatörü)

$$B_n(f;x) = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right) \tag{3,7}$$

şeklinde tanımlanır. Bu operatörlerin oluşturulma yapısı binom açılımına dayanmaktadır. Yani; x, y pozitif sayılar ve $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere Binom açılımı

$$(x+y)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k y^{n-k}$$

biçimindedir. Bu açılımda $x \in [0,1]$ olmak üzere $y = 1-x$ alınırsa;

$$1 = (x+1-x)^n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} x^k (1-x)^{n-k}$$

eşitliği elde edilir. Aşağıda, verilen sürekli fonksiyona bağlı Bernstein polinomlar dizisinin bu fonksiyona düzgün yakınsadığını, yani Bernstein Teoreminin (Teorem 3.4.1.2) ispatı Bohman-Korovkin Teoremi kullanılarak yapılacaktır.

Bernstein operatörleri lineerdir: Her $\alpha, \beta \in \mathbb{R}$, her $f, g \in C[0,1]$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned} B_n(\alpha f+\beta g;x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}(\alpha f+\beta g)\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \alpha\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} f\left(\frac{k}{n}\right)+\beta\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k} g\left(\frac{k}{n}\right) \\ &= \alpha B_n(f;x)+\beta B_n(g;x). \end{aligned}$$

Bernstein operatörleri pozitiftir: Her $x\in[0,1]$, her $n\in\mathbb{N}$ ve her $k=0,1,\cdots,n$ için $x^k(1-x)^{n-k}\geq 0$ olduğundan her $f\geq 0$ için $B_n(f;x)\geq 0$ sağlanır.

Bernstein operatörleri (3,1) *koşullarını sağlar:*

$$B_n(e_0;x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}=(x+1-x)^n=1$$

$$\begin{aligned} B_n(e_1;x) &= \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}x^k(1-x)^{n-k}\frac{k}{n}=x\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\ &= x\sum_{k=0}^{n-1}\binom{n-1}{k}x^k(1-x)^{(n-1)-k} \\ &= e_1(x) \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} B_n(e_2;x) &= x\sum_{k=1}^{n}\frac{k}{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\ &= x\sum_{k=1}^{n}\frac{k-1}{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n}\sum_{k=1}^{n}\binom{n-1}{k-1}x^{k-1}(1-x)^{n-k} \\ &= x^2\,\frac{n-1}{n}\sum_{k=2}^{n}\binom{n-2}{k-2}x^{k-2}(1-x)^{n-k}+\frac{x}{n} \\ &= \frac{n-1}{n}x^2+\frac{x}{n} \\ &= x^2+\frac{x(1-x)}{n}. \end{aligned}$$

Bu sonuçlar toparlanırsa

$$B_n(e_0;x)=1,\quad B_n(e_1;x)=x,\quad B_n(e_2;x)=x^2+\frac{x(1-x)}{n} \qquad (3,8)$$

elde edilir. Buradan

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|B_n\left(e_i;x\right)-e_i\left(x\right)\right|=0, \qquad i=0,1$$

$$\sup_{x\in[0,1]}\left|B_n\left(e_2;x\right)-e_2\left(x\right)\right|=\frac{1}{4n}$$

dolayısıyla Bernstein operatörler dizisinin (3,1) koşullarını sağladığı görülür. O halde Bohman-Korovkin Teoremi gereğince her $f\in C[0,1]$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|B_n\left(f\right)-f\right\|=0$$

olur. Bir başka deyişle, $\{B_n(f)\}$ dizisi f fonksiyonuna $[0,1]$ kapalı aralığında düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla Bernstein Teoreminin sonuç olarak da Weierstrass Teoreminin farklı bir ispatı elde edilmiş olur.

3.4.3. Bohman-Korovkin Teoreminde Test Fonksiyonlarının Gerekliliği

Korovkin Teoreminde bir pozitif lineer operatör dizisinin kapalı aralıkta sürekli bir fonksiyona düzgün yakınsaklığını kontrol etmek için kullanılan test fonksiyonlarının yerine herhangi üç fonksiyonun alınıp alınamayacağı veya söz konusu test fonksiyonlarının herhangi birinin çıkarılıp çıkarılamayacağını araştıralım.

Yukarıdaki tartışma kapsamında aşağıdaki iki soruya yanıt aranacaktır.

a) Korovkin Teoremi'nin koşullarındaki $e_0(x)=1,\ e_1(x)=x$ ve $e_2(x)=x^2$ fonksiyonları yerine lineer bağımsız olan herhangi bir fonksiyon sistemi alınabilir mi?

b) Korovkin Teoremi'nin koşullarındaki $e_0(x)=1,\ e_1(x)=x$ ve $e_2(x)=x^2$ fonksiyonlarından sadece ikisi alınabilir mi?

Söz konusu her iki sorunun yanıtı da olumsuzdur. Korovkin Teoremi'nin koşullarındaki $e_0(x)=1,\ e_1(x)=x$ ve $e_2(x)=x^2$ fonksiyonları test fonksiyonlarıdır.

3.4.3.1. Teorem. [10]. $[a,b]$ aralığında sürekli olan $f_0,\ f_1,\ f_2$ fonksiyonları için hepsi birden sıfır olmayan $a_0,\ a_1,\ a_2$ sayıları ve bu aralık üzerinde ikiden fazla köke sahip,

$$F(x)=a_0 f_0(x)+a_1 f_1(x)+a_2 f_2(x)$$

polinomu varsa bu durumda bir L operatörü vardır öyle ki

$$L(f_k;x)=f_k(x), \qquad x\in[a,b],\ k=0,1,2;$$

ancak bu aralık üzerinde sürekli olan bir f fonksiyonu için

$$L(f;x)\neq f(x).$$

Yukarıdaki teoremden iki önemli sonuç çıkarılabilir.

3.4.3.2. Sonuç. Korovkin Teoremi'nin koşullarında $e_0(x)=1,\ e_1(x)=x,$ $e_2(x)=x^2$ fonksiyonları yerine lineer bağımsız olan herhangi bir fonksiyon sistemi alınamaz.

İspat. $[-2,2]$ aralığında $f_0=1,\ f_1=x^2,\ f_2=x^4$ fonksiyonları lineer bağımsızdır. Pozitif ve lineer olan

$$L(f;x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 1\\ \dfrac{1}{2}f(1)+\dfrac{1}{2}f(-1), & x=1\end{cases}$$

operatörü ele alınırsa

$$L(1;x)=\begin{cases} 1, & x\neq 1\\ \dfrac{1}{2}+\dfrac{1}{2}=1, & x=1\end{cases}$$

$$L(x^2;x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 1 \\ \dfrac{1}{2}1^2+\dfrac{1}{2}(-1)^2=1, & x=1 \end{cases}$$

$$L(x^4;x)=\begin{cases} x^4, & x\neq 1 \\ \dfrac{1}{2}1^4+\dfrac{1}{2}(-1)^4=1, & x=1 \end{cases}$$

elde edilir. Diğer taraftan $f(x)=x(x-1/2)$ ve $x=1$ alınırsa

$$L(x(x-\frac{1}{2});1)=\frac{1}{2}f(1)+\frac{1}{2}f(-1)=\frac{1}{2}1(1-\frac{1}{2})+\frac{1}{2}(-1)(-1-\frac{1}{2})=1.$$

Her $n\in\mathbb{N}$ için $L_n(f;x)=L(f;x)$ alınırsa $e_i(x):=x^i$ için

$$L_n(e_i;x)\rightrightarrows e_i; \qquad i=0,1,2$$

elde edilir. Ancak $L_n(f;1)=1\neq f(1)=1/2$. ∎

3.4.3.3. Sonuç. Korovkin Teoremi'nin koşullarında $e_0(x)=1,\ e_1(x)=x,$ $e_2(x)=x^2$ fonksiyonlarından sadece ikisi alınamaz.

İspat. $[-2,2]$ aralığında tanımlı $f_0=1,\ f_1=x^2$ fonksiyonlarını dikkate alalım. Pozitif ve lineer olan

$$L(f;x)=\begin{cases} f(x), & x\neq 1 \\ \dfrac{3}{4}f(1)+\dfrac{1}{4}f(-1), & x=1 \end{cases}$$

operatörünü ele alınırsa

$$L(1;x)=\begin{cases} 1, & x\neq 1 \\ \dfrac{3}{4}+\dfrac{1}{4}=1, & x=1 \end{cases} \qquad \text{yani} \qquad L(1;x)=1$$

$$L(t^2;x)=\begin{cases} x^2, & x\neq 1 \\ \frac{3}{4}1^2+\frac{1}{4}(-1)^2=1, & x=1 \end{cases} \qquad \text{yani} \quad L(t^2;x)=x^2$$

elde edilir. Diğer taraftan $f(x)=x(x-\frac{1}{4})$ ve $x=1$ alınırsa $L(f;1)=\frac{3}{4}f(1)+\frac{1}{4}f(-1)=\frac{7}{8}$ ve $f(1)=\frac{3}{4}$. Her $n\in\mathbb{N}$ için $L_n(f;x)=L(f;x)$ ile tanımlı $\{L_n\}$ pozitif lineer operatör dizisi için

$$L_n(1;x)\rightrightarrows 1; \qquad L_n(t^2;x)\rightrightarrows x^2$$

iken $L_n(f;1)=\frac{7}{8}\neq f(1)=\frac{3}{4}$. ■

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. REGÜLER OPERATÖRLER

$[0,1]$ üzerinde tanımlı negatif olmayan reel değerli tüm sürekli fonksiyonların kümesi $C^+[0,1]$ olsun; yani

$$f \in C^+[0,1] \quad \Leftrightarrow \quad f \in C[0,1] \text{ ve } \forall x \in [0,1] \text{ için } f(x) \geq 0.$$

L, $C[0,1]$ üzerinde tanımlı lineer bir operatör olmak üzere her $f \in C^+[0,1]$ için $L(f) \in C^+[0,1]$ ise L operatörüne *pozitif operatör* denir. $C[0,1]$ üzerinde tanımlı tüm pozitif operatörlerin kümesi $\mathcal{P}_C[0,1]$ ile gösterilir.

4.1.1. Tanım. R, $C[0,1]$ üzerinde tanımlı bir operatör olmak üzere $R = P^+ - P^-$ olacak şekilde P^+, $P^- \in \mathcal{P}_C[0,1]$ varsa R 'ye *regüler operatör* denir. Regüler operatörler ailesi $\mathcal{R}_C[0,1]$ ile gösterilir.

Açıktır ki her pozitif operatör regülerdir, ancak tersi doğru değildir. Örneğin $R : C[0,1] \to C[0,1]$,

$$R(f;t) = \int_0^1 (1-2xt) f(x)dx$$

ile tanımlı operatör,

$$P^+(f;t) = \int_0^1 (1-xt) f(x)dx \quad \text{ve} \quad P^-(f;t) = \int_0^1 xtf(x)dx$$

olarak tanımlanan P^+, $P^- \in \mathcal{P}_C[0,1]$ için $R = P^+ - P^-$ olduğundan regülerdir. Ancak her $x \in [0,1]$ için $f(x) = x$ ile tanımlı fonksiyon için $R(f) \notin C^+[0,1]$ olduğundan R bir pozitif operatör değildir.

4.1.2. Önerme. Her regüler operatör sınırlıdır.

İspat . $f \in C[0,1]$ için $f \le \|f\|_{[0,1]}$ ve $-f \le \|f\|_{[0,1]}$ olduğundan her $P \in \mathcal{P}_C[0,1]$ için

$$P(f) \le P\left(\|f\|_{[0,1]} e_0\right) = \|f\|_{[0,1]} P(e_0),$$

$$-P(f) = P(-f) \le P\left(\|f\|_{[0,1]} e_0\right) = \|f\|_{[0,1]} P(e_0)$$

dolayısıyla

$$|P(f)| \le \|f\|_{[0,1]} P(e_0) \le \|P(e_0)\|_{[0,1]} \|f\|_{[0,1]}. \tag{4,1}$$

R regüler operatör olsun. Bu durumda $R = P^+ - P^-$ olacak şekilde $P^+,\ P^- \in \mathcal{P}_C[0,1]$ vardır. (4,1) eşitsizliği kullanılırsa

$$\begin{aligned} |R(f)| &= |P^+(f) - P^-(f)| \le |P^+(f)| + |P^-(f)| \\ &\le \left(\|P^+(e_0)\|_{[0,1]} + \|P^-(e_0)\|_{[0,1]}\right)\|f\|_{[0,1]} \end{aligned}$$

elde edilir ki bu R 'nin sınırlı olduğunu gösterir. ■

4.1.3. Önerme. $\mathcal{R}_C[0,1]$ toplama ve skaler ile çarpma işlemleri altında kapalıdır; yani, $R,\ R_1,\ R_2 \in \mathcal{R}_C[0,1]$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise $R_1 + R_2 \in \mathcal{R}_C[0,1]$ ve $\alpha R \in \mathcal{R}_C[0,1]$'dir.

İspat. $P_1^+, P_1^-, P_2^+, P_2^- \in \mathcal{P}_C[0,1]$ olmak üzere $R_1 = P_1^+ - P_1^-$ ve $R_2 = P_2^+ - P_2^-$ olsun. Bu durumda

$$R_1 + R_2 = \left(P_1^+ - P_1^-\right) + \left(P_2^+ - P_2^-\right) = \left(P_1^+ + P_2^+\right) - \left(P_1^- + P_2^-\right)$$

$P_1^+ + P_2^+,\ P_1^- + P_2^- \in \mathcal{P}_C[0,1]$ olduğundan $R_1 + R_2 \in R_C[0,1]$. Diğer taraftan $P^+, P^- \in \mathcal{P}_C[0,1]$ olmak üzere $R = P^+ - P^-$ ve $\alpha \in \mathbb{R}$ ise

$$\alpha R = \alpha(P^+ - P^-) = \begin{cases} \alpha P^+ - \alpha P^-, & \alpha \geq 0 \\ (-\alpha)P^- - (-\alpha)P^+, & \alpha < 0 \end{cases}$$

olduğundan $\alpha R \in R_C[0,1]$. ■

4.2. HEMEN HEMEN POZİTİF OPERATÖR DİZİLERİ İÇİN KOROVKİN TİPİ YAKINSAKLIK

4.2.1. Tanım. $\mathcal{R} = \{R_n\} = \{P_n^+ - P_n^-\}$ regüler operatör dizisi verilsin. Her $f \in C[a,b]$ ve $x \in [a,b]$ için

$$\lim_{n\to\infty} P_n^-(f)(x) = 0$$

ise $\mathcal{R} = \{R_n\}$ dizisine *hemen hemen pozitif operatör dizisi* adı verilir [14].

4.2.2. Teorem. $\mathcal{R} = \{R_n\}$ hemen hemen pozitif operatör dizisi ve $z \in [a,b]$ için $\varphi_z(x) = (x-z)^2$ olsun. Her $z \in [0,1]$ için

$$R_n(e_0) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} 1 \quad \text{ve} \quad R_n(\varphi_z) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} 0$$

ise her $f \in C[a,b]$ için $R_n(f) \overset{[a,b]}{\rightrightarrows} f$ 'dir. [14]

İspat. f $[a,b]$ üzerinde sürekli olduğundan bir $M > 0$ vardır öyle ki herhangi $x, y \in [a,b]$ için

$$-M < f(x) - f(y) < M\ ;$$

ayrıca $z \in [a,b]$ ve $\varepsilon > 0$ için $\delta > 0$ vardır öyle ki

$$|x-z| < \delta \qquad \Rightarrow \qquad -\varepsilon < f(x) - f(z) < \varepsilon$$

Her $z \in [a,b]$ ve $x \neq z$ için $\varphi_z(z) = 0 < \varphi_z(x) = (x-z)^2$ olduğundan

$$M_\delta = \min_{\substack{x\in[a,b] \\ |x-z|\geq\delta}} \varphi_x(x) > 0 .$$

O halde her $x \in [a,b]$ için

$$-\varepsilon - \frac{M}{M_\delta}\varphi_z(x) < f(x) - f(z) < \varepsilon + \frac{M}{M_\delta}\varphi_z(x).$$

Dolayısıyla

$$\psi_1 := \frac{M}{M_\delta}\varphi_z + \varepsilon e_0 + f - f(z)e_0 \in C^+[0,1];$$

$$\psi_2 := \frac{M}{M_\delta}\varphi_z + \varepsilon e_0 - f + f(z)e_0 \in C^+[0,1].$$

$P_n^+(\psi_1),\ P_n^+(\psi_2) \in C^+[0,1]$ olduğundan her $x \in [a,b]$ için

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(R_n(\psi_1) + P_n^-(\psi_1)\right)(x) \\ &= \left(\frac{M}{M_\delta}R_n(\varphi_z) + \varepsilon R_n(e_0) + R_n(f) - f(z)R_n(e_0)\right)(x) + P_n^-(\psi_1)(x) \\ &= \frac{M}{M_\delta}R_n(\varphi_z)(x) + \varepsilon R_n(e_0) + R_n(f)(x) - f(z)R_n(e_0) + P_n^-(\psi_1)(x) \end{aligned}$$

ve

$$\begin{aligned} 0 &\leq \left(R_n(\psi_2) + P_n^-(\psi_2)\right)(x) \\ &= \left(\frac{M}{M_\delta}R_n(\varphi_z) + \varepsilon R_n(e_0) - R_n(f) + f(z)R_n(e_0)\right)(x) + P_n^-(\psi_2)(x) \\ &= \frac{M}{M_\delta}R_n(\varphi_z)(x) + \varepsilon R_n(e_0) - R_n(f)(x) + f(z)R_n(e_0) + P_n^-(\psi_2)(x). \end{aligned}$$

Yukarıdaki eşitsizliklerden aşağıdaki bağıntı elde edilir:

$$-\frac{M}{M_\delta} R_n(\varphi_z)(x) - \varepsilon R_n(e_0) - P_n^-(\psi_1)(x) \leq R_n(f)(x) - f(z) R_n(e_0)$$

$$\leq \frac{M}{M_\delta} R_n(\varphi_z)(x) + \varepsilon R_n(e_0) + P_n^-(\psi_2)(x)$$

$n \to \infty$ için limite geçilirse $\lim_{n\to\infty} P_n^-(\psi_1)(x) = 0$ ve $\lim_{n\to\infty} P_n^-(\psi_2)(x) = 0$ olduğundan

$$-\frac{M}{M_\delta}\varphi_z(x) - \varepsilon \leq \lim_{n\to\infty} R_n(f)(x) - f(z) \leq \frac{M}{M_\delta}\varphi_z(x) + \varepsilon$$

bulunur. $x = z$ yazılırsa

$$\left|\lim_{n\to\infty} R_n(f)(z) - f(z)\right| \leq \varepsilon$$

elde edilir. Böylece ispat tamamlanır. ■

4.3. KOROVKIN DİZİ UZAYI

4.3.1. Tanım. Her $n \in \mathbb{N}$ için $R_n \in \mathcal{R}_C[0,1]$ ve $e_i(x) = x^i$ $(i \in \mathbb{N}_0)$ olmak üzere

$$\exists \lambda \in \mathbb{R}, \ \forall\, i = 0,1,2 \quad \text{için} \quad \lim_{n\to\infty} \left\| R_n(e_i) - \lambda e_i \right\|_{[0,1]} = 0 \qquad (4,2)$$

koşulu sağlanıyorsa $\mathcal{R} = \{R_n\}$ dizisine bir *Korovkin dizisidir* denir.

Korovkin dizisinin tanımında geçen λ sayısı tektir. Gerçekten eğer λ_1 ve λ_2 $\mathcal{R} = \{R_n\}$ dizisine bağlı iki farklı sayısı ise

$$|\lambda_1 - \lambda_2| = |\lambda_1 e_0 - \lambda_2 e_0| = |R_n(e_0) - \lambda_1 e_0 - R_n(e_0) + \lambda_2 e_0|$$

$$\leq \|R_n(e_0) - \lambda_1 e_0\|_{[0,1]} + \|R_n(e_0) - \lambda_2 e_0\|_{[0,1]},$$

eşitsizliği her $n \in \mathbb{N}$ için doğrudur. $n \to \infty$ iken eşitsizliğin sağ tarafı (4,2)'den dolayı sıfır olur. Dolayısıyla $\lambda_1 = \lambda_2$ 'dir. Tanımda geçen λ sayısına $\mathcal{R}$ dizisinin *yaklaşım çarpanı* adı verilir ve $\lambda_{\mathcal{R}}$ ile gösterilir. Tüm Korovkin dizilerinin oluşturduğu küme $\mathbb{K}_C\left[0,1\right]$ ile gösterilir. Her terimi pozitif operatör olan Korovkin dizisine *pozitif Korovkin dizisi* denir. Pozitif Korovkin dizilerinin oluşturduğu küme $\mathbb{K}_C^+\left[0,1\right]$ ile gösterilir. Her pozitif operatör regüler olduğundan $\mathbb{K}_C^+\left[0,1\right] \subset \mathbb{K}_C\left[0,1\right]$. Bu kümeler boştan farklıdır. Örneğin genel terimi n. Bernstein operatörü olan $\mathcal{B} = \left\{B_n\right\}$ dizisi bir pozitif Korovkin dizisi, dolayısıyla da bir Korovkin dizisidir. Bu dizinin yaklaşım çarpanı $\lambda_{\mathcal{B}} = 1$'dir.

$\mathbb{K}_C\left[0,1\right]$ *toplama işlemine göre kapalıdır*, yani sırasıyla $\mathcal{R}^{(1)} = \left\{R_n^{(1)}\right\}$ ve $\mathcal{R}^{(1)} = \left\{R_n^{(1)}\right\}$ Korovkin dizilerinin toplamı olan

$$\mathcal{R}^{(1)} + \mathcal{R}^{(2)} = \left\{R_n^{(1)} + R_n^{(2)}\right\}$$

operatör dizisi, yaklaşım çarpanı $\lambda_{\mathcal{R}^{(1)}} + \lambda_{\mathcal{R}^{(2)}}$ olan bir Korovkin dizisidir. Gerçekten Önerme 4.1.3'den her $n \in \mathbb{N}$ için $R_n^{(1)} + R_n^{(2)}$ bir regüler operatördür, ayrıca $i = 0,1,2$ için,

$$\left\|\left(R_n^{(1)} + R_n^{(2)}\right)(e_i) - \left(\lambda_{\mathcal{R}^{(1)}} + \lambda_{\mathcal{R}^{(2)}}\right)e_i\right\|_{[0,1]} \leq \left\|R_n^{(1)}(e_i) - \lambda_{\mathcal{R}^{(1)}}e_i\right\|_{[0,1]} + \left\|R_n^{(2)}(e_i) - \lambda_{\mathcal{R}^{(2)}}e_i\right\|_{[0,1]}$$

eşitsizliğinden $i = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|(R_n^{(1)} + R_n^{(2)})(e_i) - (\lambda_{\mathcal{R}^{(1)}} + \lambda_{\mathcal{R}^{(2)}})e_i\right\|_{[0,1]} = 0 .$$

$\mathbb{K}_C\left[0,1\right]$ *skaler ile çarpma işlemine göre kapalıdır;* yani $\alpha \in \mathbb{R}$ ve $\mathcal{R} = \left\{R_n\right\} \in \mathbb{K}_C\left[0,1\right]$ ise $\alpha \bullet \mathcal{R} = \left\{\alpha R_n\right\}$ yaklaşım çarpanı, $\alpha\lambda_{\mathcal{R}}$ olan bir Korovkin dizisidir. Gerçekten Önerme 4.1.3'den her $n \in \mathbb{N}$ için αR_n bir regüler operatördür, ayrıca $i = 0,1,2$ için

$$\lim_{n\to\infty}\left\|\alpha R_n(e_i)-\alpha\lambda_{\mathcal{R}}e_i\right\|_{[0,1]}=|\alpha|\lim_{n\to\infty}\left\|R_n(e_i)-\lambda_{\mathcal{R}}e_i\right\|_{[0,1]}=0\,.$$

4.3.2. Sonuç.

$$+:\mathbb{K}_C[0,1]\times\mathbb{K}_C[0,1]\to\mathbb{K}_C[0,1],\qquad \mathcal{R}^{(1)}+\mathcal{R}^{(2)}=\left\{R_n^{(1)}+R_n^{(2)}\right\};$$

$$\bullet:\mathbb{R}\times\mathbb{K}_C[0,1]\to\mathbb{K}_C[0,1],\qquad \alpha\bullet\mathcal{R}=\left\{\alpha R_n\right\}$$

işlemleri iyi tanımlıdır.

4.3.3. Teorem. $\left(\mathbb{K}_C[0,1],+,\bullet\right)$ $\mathbb{R}$ ’de bir lineer uzaydır.

İspat. $\mathcal{R},\mathcal{R}^{(1)},\mathcal{R}^{(2)},\mathcal{R}^{(3)}\in\mathbb{K}_C[0,1]$ ve $\alpha,\beta\in\mathbb{R}$ için aşağıdaki özellikler sağlandığından istenen elde edilir:

i. $\mathcal{R}^{(1)}+\mathcal{R}^{(2)}=\left\{R_n^{(1)}+R_n^{(2)}\right\}=\left\{R_n^{(2)}+R_n^{(1)}\right\}=\mathcal{R}^{(2)}+\mathcal{R}^{(1)}$.

ii. $\left(\mathcal{R}^{(1)}+\mathcal{R}^{(2)}\right)+\mathcal{R}^{(3)}=\left\{\left\{R_n^{(1)}+R_n^{(2)}\right\}+R_n^{(3)}\right\}$

$$=\left\{R_n^{(1)}+\left\{R_n^{(2)}+R_n^{(3)}\right\}\right\}=\mathcal{R}^{(1)}+\left(\mathcal{R}^{(2)}+\mathcal{R}^{(3)}\right).$$

iii. θ, $C[0,1]$ üzerinde tanımlı bir sıfır operatörü olmak üzere $\Theta=\{\theta\}$ sıfır dizisi $\lambda_\Theta=0$ yaklaşım çarpanına sahip bir Korovkin dizisidir ve

$$\mathcal{R}+\Theta=\left\{R_n+\theta\right\}=\left\{R_n\right\}=\mathcal{R}\,.$$

iv. $-\mathcal{R}=\left\{-R_n\right\}$ dizisi $-\lambda_{\mathcal{R}}$ yaklaşım çarpanına sahip bir Korovkin dizisidir ve

$$\mathcal{R}+(-\mathcal{R})=\left\{R_n+(-R_n)\right\}=\left\{R_n-R_n\right\}=\{\theta\}=\Theta\,.$$

v. $1\in\mathbb{R}$ için $1\bullet\mathcal{R}=\mathcal{R}$.

vi. $\alpha \bullet \left(\mathcal{R}^{(1)} + \mathcal{R}^{(2)} \right) = \left\{ \alpha \left(R_n^{(1)} + R_n^{(2)} \right) \right\} = \left\{ \alpha R_n^{(1)} + \alpha R_n^{(2)} \right\}$

$$= \left\{ \alpha R_n^{(1)} \right\} + \left\{ \alpha R_n^{(2)} \right\} = \alpha \bullet \mathcal{R}^{(1)} + \alpha \bullet \mathcal{R}^{(2)} .$$

vii. $(\alpha + \beta) \bullet \mathcal{R} = \left\{ (\alpha + \beta) R_n \right\} = \left\{ \alpha R_n + \beta R_n \right\}$

$$= \left\{ \alpha R_n \right\} + \left\{ \beta R_n \right\} = \alpha \bullet \mathcal{R} + \beta \bullet \mathcal{R}$$

viii. $\left(\alpha\beta \right) \bullet \mathcal{R} = \left\{ \left(\alpha\beta \right) R_n \right\} = \left\{ \alpha \left(\beta R_n \right) \right\} = \alpha \bullet \left(\beta \bullet \mathcal{R} \right).$ ■

$\mathcal{R} = \left\{ R_n \right\}$ bir Korovkin dizisi olsun. Her $n \in \mathbb{N}$ için R_n regüler operatör olduğundan $P_n^+ ,\ P_n^- \in \mathcal{P}_C \left[0,1 \right]$ pozitif operatörleri vardır öyle ki $R_n = P_n^+ - P_n^-$ yazılabilir. $\left\{ \| R_n \| \right\}$ dizisi sınırlı iken $\left\{ \| P_n^+ \| \right\}$ ve $\left\{ \| P_n^- \| \right\}$ dizileri sınırlı olmak zorunda değildir. Örneğin

$$R_n (f ; x) = f \left(0 \right) (2x - 1)(x - 1) + f \left(1 \right) x(2x - 1) - 4 f \left(\frac{1}{2} \right) x(x - 1) + \frac{f \left(1 \right)}{n}$$

ile tanımlı $\left\{ R_n \right\}$ dizisi bir Korovkin dizisidir. Gerçekten

$$R_n (e_0 , x) = e_0 (x) + \frac{1}{n}$$

$$R_n (e_1 , x) = e_1 (x) + \frac{1}{n}$$

$$R_n (e_2 , x) = e_2 (x) + \frac{1}{n} .$$

Ayrıca

$$P_n^+(f,x) = 4f\left(\frac{1}{2}\right)x(1-x) + \left(\frac{1+n^2}{n} + 2x^2\right)f(1) + f(0)(1-x)$$

$$P_n^-(f,x) = 2f(0)x(1-x) + f(1)(n+x)$$

olmak üzere $P_n^+, P_n^- \in \mathcal{P}_C[0,1]$ ve $R_n = P_n^+ - P_n^-$. Yani her $n \in \mathbb{N}$ için $R_n \in \mathcal{R}_C[0,1]$. Diğer taraftan $\|f\| = 1$ olmak üzere $\|R_n(f;.)\|_{[0,1]} \le 11$ olduğundan her $n \in \mathbb{N}$ için $\|R_n\| \le 11$, yani $\{\|R_n\|\}$ dizisi sınırlıdır. Ancak $P_n^+, P_n^- \in \mathcal{P}_C[0,1]$ olduğundan

$$\|P_n^+\| = \|P_n^+(e_0)\|_{[0,1]} = \max_{x\in[0,1]}\left|-2x^2 + 3x + \frac{n^2+1}{n} + 1\right| > n$$

$$\|P_n^-\| = \|P_n^-(e_0)\|_{[0,1]} = \max_{x\in[0,1]}\left|-2x^2 + 3x + n\right| > n$$

yani hem $\{\|P_n^+\|\}$ hem de $\{\|P_n^-\|\}$ sınırlı değildir.

4.3.4. Teorem. $\mathcal{R} = \{R_n\} = \{P_n^+ - P_n^-\} \in \mathbb{K}_C[0,1]$ olsun. $\{\|P_n^+\|\}$ ve $\{\|P_n^-\|\}$ dizileri eş zamanlı sınırlıdır.

İspat. $P_n^+, P_n^- \in \mathcal{P}_C[0,1]$ olduğundan $\|P_n^+\| = \|P_n^+(e_0)\|_{[0,1]}$, $\|P_n^-\| = \|P_n^-(e_0)\|_{[0,1]}$. Ayrıca $R_n(e_0) + P_n^-(e_0) = P_n^+(e_0)$ ve $P_n^+(e_0) - R_n(e_0) = P_n^-(e_0)$ olduğundan

$$\begin{aligned} \|P_n^+(e_0)\|_{[0,1]} &\le \|R_n(e_0)\|_{[0,1]} + \|P_n^-(e_0)\|_{[0,1]} \\ \|P_n^-(e_0)\|_{[0,1]} &\le \|R_n(e_0)\|_{[0,1]} + \|P_n^+(e_0)\|_{[0,1]}. \end{aligned} \tag{4,3}$$

$\{R_n(e_0)\}$ dizisi $\lambda_{\mathcal{R}} e_0$ fonksiyonuna düzgün yakınsak olduğundan $\{\|R_n(e_0)\|_{[0,1]}\}$ dizisi yakınsak dolayısıyla sınırlıdır. O halde (4,3) bağıntılarından dolayı $\{\|P_n^-\|\}$ ve $\{\|P_n^-\|\}$ dizileri eşzamanlı sınırlıdır. ■

4.3.5. Sonuç. $\mathcal{R}=\{R_n\}=\{P_n^+-P_n^-\}\in\mathbb{K}_C[0,1]$ olsun. $\{\|P_n^-\|\}$ dizisi sınırlı ise $\{\|R_n\|\}$ dizisi sınırlıdır.

İspat. $\|R_n\|\le\|P_n^+\|+\|P_n^-\|$ ve $\{\|P_n^+\|\}$ ve $\{\|P_n^-\|\}$ dizileri eş zamanlı sınırlı olduğundan $\{\|R_n\|\}$ sınırlıdır.■

Klasik sınırlı diziler uzayındaki supremum normunu Korovkin dizileri için tanımlayalım. $\mathbb{K}_C[0,1]$ lineer uzayının bir alt uzayını ele alalım:

$$\mathbb{K}_C^-[0,1]=\left\{\mathcal{R}=\{P_n^+-P_n^-\}\in\mathbb{K}_C[0,1]:\ \exists M>0,\ \sup_n\|P_n^-\|\le M\right\}.$$

Bu uzayın gerçekten bir alt uzay olduğunu gösterelim. $\mathcal{R}^{(1)}=\{R_n^{(1)}\}$, $\mathcal{R}^{(2)}=\{R_n^{(2)}\}\in\mathbb{K}_C^-[0,1]$ ise

$$R_n^{(1)}=P_{n,1}^+-P_{n,1}^-,\qquad \sup_n\|P_{n,1}^-\|\le M_1;$$

$$R_n^{(2)}=P_{n,2}^+-P_{n,2}^-,\qquad \sup_n\|P_{n,2}^-\|\le M_2$$

olacak şekilde $P_{n,1}^+,P_{n,1}^-,P_{n,2}^+,P_{n,2}^-\in\mathcal{P}_C[0,1]$ ve pozitif $M_1,\ M_2$ sayıları vardır.

$$R_n^{(1)}+R_n^{(2)}=\left(P_{n,1}^++P_{n,2}^+\right)-\left(P_{n,1}^-+P_{n,2}^-\right),\qquad \sup_n\|P_{n,1}^-+P_{n,2}^-\|\le M_1+M_2$$

olduğundan $\mathcal{R}^{(1)}+\mathcal{R}^{(2)}\in\mathbb{K}_C^-[0,1]$. Benzer şekilde her $\lambda\in\mathbb{R}$ için $\lambda\mathcal{R}^{(1)}\in\mathbb{K}_C^-[0,1]$. Bu uzay üzerinde

$$\|\mathcal{R}\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|R_n\| \tag{4,4}$$

ile tanımlı $\|\cdot\|_\infty$ bağıntısı $\mathbb{K}_C^-[0,1]$ üzerinde bir norm tanımlar. Gerçekten

$$\|\cdot\|_\infty:\mathbb{K}_C^-[0,1]\to\mathbb{R}^+,\qquad \mathcal{R}\to\|\mathcal{R}\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|R_n\|$$

fonksiyonu herhangi $\mathcal{R}=\{R_n\}$, $\mathcal{R}^{(1)}=\{R_n^{(1)}\}, \mathcal{R}^{(2)}=\{R_n^{(2)}\}\in\mathbb{K}_C^-[0,1]$ ve $\alpha\in\mathbb{R}$ için

i. $$\begin{aligned}\|\mathcal{R}\|_\infty=0 \quad\Leftrightarrow\quad & \sup_{n\in\mathbb{N}}\|R_n\|=0\\ \Leftrightarrow\quad & \forall n\in\mathbb{N},\quad \|R_n\|=0\\ \Leftrightarrow\quad & \forall n\in\mathbb{N},\quad R_n=\theta\\ \Leftrightarrow\quad & \mathcal{R}=\Theta;\end{aligned}$$

ii. $$\|\alpha\mathcal{R}\|_\infty=\sup_{n\in\mathbb{N}}\|\alpha R_n\|=|\alpha|\sup_{n\in\mathbb{N}}\|R_n\|=|\alpha|\|\mathcal{R}\|_\infty;$$

iii. $$\begin{aligned}\left\|\mathcal{R}^{(1)}+\mathcal{R}^{(2)}\right\|_\infty=\sup_n\left\|R_n^{(1)}+R_n^{(2)}\right\| &\le \sup_n\left\{\left\|R_n^{(1)}\right\|+\left\|R_n^{(2)}\right\|\right\}\\ &=\sup_n\left\|R_n^{(1)}\right\|+\sup_n\left\|R_n^{(2)}\right\|\\ &=\left\|\mathcal{R}^{(1)}\right\|_\infty+\left\|\mathcal{R}^{(2)}\right\|_\infty\end{aligned}$$

özelliklerini sağladığından $\mathbb{K}_C^-[0,1]$ üzerinde normdur. Böylece $\mathbb{K}_C^-[0,1]$, $\|\cdot\|_\infty$ ile bir normlu lineer uzaydır.

4.3.6. Sonuç. (4,4) ile tanımlı $\|\,.\,\|_\infty$ için $\mathbb{K}_C^-[0,1]$ bir normlu lineer uzaydır.

4.3.7. Teorem. $\mathbb{K}_C^-[0,1]$, $\|\,.\,\|_\infty$ normu ile bir Banach uzayıdır.

İspat. $\left\{\mathcal{R}^{(m)}\right\}_{m=1}^{\infty}$, $\mathbb{K}_C^-[0,1]$ 'de bir Cauchy dizisi olsun. Her $m\in\mathbb{N}$ için $\mathcal{R}^{(m)}=\left\{R_n^{(m)}\right\}_{n=1}^{\infty}$ olsun. $\left\{\mathcal{R}^{(m)}\right\}$ Cauchy dizisi olduğundan her $\varepsilon>0$ için bir $m_\varepsilon\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall k,l\ge m_\varepsilon$ için

$$\left\|\mathcal{R}^{(k)}-\mathcal{R}^{(l)}\right\|_\infty<\frac{\varepsilon}{3},$$

$$\Rightarrow\qquad \forall n\in\mathbb{N}\ \text{ için }\ \left\|R_n^{(k)}-R_n^{(l)}\right\|<\frac{\varepsilon}{3}.$$

Her $n \in \mathbb{N}$ için $\{R_n^{(k)}\}$, $\mathcal{B}(C[0,1])$ sınırlı operatörler uzayında bir Cauchy dizisidir. $\mathcal{B}(C[0,1])$ Banach uzayı olduğundan bir $R_n \in \mathcal{B}(C[0,1])$ öyle ki

$$\lim_{k\to\infty} \left\| R_n^{(k)} - R_n \right\| = 0. \tag{4,5}$$

Şimdi $\mathcal{R} = \{R_n\}$ dizisinin $\mathbb{K}_C^-[0,1]$ uzayının bir elemanı olduğunu gösterelim. $\forall n,\ k \in \mathbb{N}$ için $R_n^{(k)}$ regüler olduğundan

$$R_n^{(k)} = P_{n,k}^+ - P_{n,k}^-$$

olacak şekilde $P_{n,k}^+,\ P_{n,k}^- \in \mathcal{P}_C[0,1]$ vardır. Ayrıca $\mathbb{K}_C^-[0,1]$'nin tanımından

$$\sup_{n,k\in\mathbb{N}} \left\| P_{n,k}^- \right\| \le M\ . \tag{4,6}$$

Her bir $n \in \mathbb{N}$ için

$$\overline{\lim_{k\to\infty}}\, P_{n,k}^- =: P_n^-$$

tanımlanırsa, açıktır ki P_n^-, $C[0,1]$ üzerinde pozitif ve lineer operatördür. Ayrıca (4,6)'dan dolayı $\sup_n \left\| P_n^- \right\| \le M$.

$$P_n^+ = R_n + P_n^-$$

alınırsa $P_n^+ \in \mathcal{P}_C[0,1]$ olur. Böylece her bir $n \in \mathbb{N}$ için R_n operatörünün regüler olduğu görülür.

Her $k \in \mathbb{N}$ için $\lambda_{\mathcal{R}^{(k)}}$ sayısı $\{R_n^{(k)}\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin yaklaşım çarpanı olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \left\| R_n^{(k)}(e_i) - \lambda_{\mathcal{R}^{(k)}}(e_i) \right\|_{[0,1]} = 0\,, \qquad i = 0,1,2;\ \ k \in \mathbb{N}$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{n\to\infty} \sup_{x\in[0,1]} \left| R_n^{(k)}\left(e_i;x\right) - \lambda_{\mathcal{R}^{(k)}} e_i\left(x\right) \right| = 0, \qquad i=0,1,2; \quad k\in\mathbb{N}.$$

O halde bir $n_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \ge n_\varepsilon$ için

$$\left\| R_n^{(k)}(e_i) - \lambda_{\mathcal{R}^{(k)}}(e_i) \right\|_{[0,1]} < \frac{\varepsilon}{3}, \qquad i=0,1,2; \quad k\in\mathbb{N} \tag{4,7}$$

$k,l \ge m_\varepsilon$ ve $n \ge n_\varepsilon$ ise

$$\begin{aligned}
\left| \lambda_{\mathcal{R}^{(k)}} - \lambda_{\mathcal{R}^{(l)}} \right| &= \left| \lambda_{\mathcal{R}^{(k)}} e_0(x) - \lambda_{\mathcal{R}^{(l)}} e_0(x) \right| \\
&\le \left| R_n^{(k)}(e_0;x) - \lambda_{\mathcal{R}^{(k)}} e_0(x) \right| + \left| R_n^{(k)}(e_0;x) - R_n^{(l)}(e_0;x) \right| + \left| R_n^{(l)}(e_0;x) - \lambda_{\mathcal{R}^{(l)}} e_0(x) \right| \\
&\le \left\| R_n^{(k)}(e_0) - \lambda_{\mathcal{R}^{(k)}} e_0 \right\|_{[0,1]} + \left\| R_n^{(k)}(e_0) - R_n^{(l)}(e_0) \right\|_{[0,1]} + \left\| R_n^{(l)}(e_0) - \lambda_{\mathcal{R}^{(l)}}(e_0) \right\|_{[0,1]} \\
&< \frac{2\varepsilon}{3} + \left\| R_n^{(k)} - R_n^{(l)} \right\| < \varepsilon
\end{aligned}$$

olduğundan $\left\{ \lambda_{\mathcal{R}^{(k)}} \right\}$, reel sayılarda Cauchy dizisi, dolayısıyla da yakınsak bir dizidir. Yakınsadığı sayı $\lambda_{\mathcal{R}}$ olsun. Şimdi elde edilen bu $\lambda_{\mathcal{R}}$ sayısının $\mathcal{R} = \{R_n\}$ dizisinin yaklaşım çarpanı olduğunu gösterelim. $\lim_{k\to\infty} \lambda_{\mathcal{R}^{(k)}} = \lambda_{\mathcal{R}}$ olduğundan bir $k_\varepsilon \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $k \ge k_\varepsilon$ için

$$\left| \lambda_{\mathcal{R}^{(k)}} - \lambda_{\mathcal{R}} \right| < \frac{\varepsilon}{3}. \tag{4,8}$$

$i \in \{0,1,2\}$ olmak üzere (4,5), (4,7) ve (4,8) dikkate alınırsa her $n \ge n_\varepsilon$ için

$$\begin{aligned}
\left\| R_n(e_i) - \lambda_{\mathcal{R}} e_i \right\|_{[0,1]} &\le \left\| R_n(e_i) - R_n^{(k_\varepsilon)}(e_i) \right\|_{[0,1]} + \left\| R_n^{(k_\varepsilon)}(e_i) - \lambda_{\mathcal{R}^{(k_\varepsilon)}}(e_i) \right\|_{[0,1]} + \left| \lambda_{\mathcal{R}^{(k_\varepsilon)}} - \lambda_{\mathcal{R}} \right| \left\| e_i \right\|_{[0,1]} \\
&< \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} + \frac{\varepsilon}{3} = \varepsilon.
\end{aligned}$$

Böylece ispat tamamlanmış olur. ■

4.4. POZİTİF KOROVKIN DİZİ UZAYI

Bu bölümde pozitif terimli Korovkin dizilerinin oluşturduğu $\mathbb{K}_C^+[0,1]$ kümesinin $\mathbb{K}_C^-[0,1]$ Banach uzayında bir konik olduğu gösterilecektir. $\mathbb{K}_C^+[0,1]$ kümesinin elemanları negatif kısmı sıfır olan regüler operatör terimli diziler olduğundan $\mathbb{K}_C^-[0,1]$ 'ın bir alt kümesi olduğu açıktır. Ayrıca $\mathbb{K}_C^+[0,1]$ 'ın her elemanı yaklaşım çarpanı negatif olmayan bir reel sayıdır

4.4.1. Önerme. $\mathbb{K}_C^+[0,1]$ kümesi her $M>0$ için $\mathbb{K}_C^-[0,1]$'de kapalıdır.

İspat. $\{\mathcal{P}^{(k)}\}$ terimleri $\mathbb{K}_C^+[0,1]$ kümesinde olan $\mathbb{K}_C^-[0,1]$'de yakınsak olan bir dizi olsun. Dolayısıyla bir $\mathcal{R}\in\mathbb{K}_C^-[0,1]$ vardır öyle ki

$$\lim_{k\to\infty}\left\|\mathcal{P}^{(k)}-\mathcal{R}\right\|_\infty=0$$

$$\Rightarrow \qquad \lim_{k\to\infty}\sup_n\left\|P_n^{(k)}-R_n\right\|_\infty=0$$

$$\Rightarrow \qquad \forall n\in\mathbb{N} \text{ için } \lim_{k\to\infty}P_n^{(k)}=R_n$$

Burada $\mathcal{R}=\{R_n\}$ ve $\mathcal{P}^{(k)}=\{P_n^{(k)}\}$ dır.

$f\in C^+[0,1]$ ise her $n\in\mathbb{N}$ için $P_n^{(k)}(f)\geq 0$. Her $n\in\mathbb{N}$ için $\lim_{k\to\infty}P_n^{(k)}(f)\geq 0$ olduğundan $R_n(f)\geq 0$. O halde her $n\in\mathbb{N}$ için $R_n\in\mathcal{P}_C[0,1]$. Böylece $\mathcal{R}\in\mathbb{K}_C^+[0,1]$. ■

4.4.2. Önerme. $\mathbb{K}_C^+[0,1]$ dış bükeydir.

İspat. $\mathcal{P}^{(1)}=\{P_n^{(1)}\}$, $\mathcal{P}^{(2)}=\{P_n^{(2)}\}\in\mathbb{K}_C^+[0,1]$ ve $\alpha\in[0,1]$ olsun.

$$\alpha\mathcal{P}^{(1)}+(1-\alpha)\mathcal{P}^{(2)}=\left\{\alpha P_n^{(1)}\right\}+\left\{(1-\alpha)P_n^{(2)}\right\}$$

$$=\left\{\alpha P_n^{(1)}+(1-\alpha)P_n^{(2)}\right\}$$

pozitif, lineer ve yaklaşım çarpanı $\lambda=\alpha\lambda_{P^{(1)}}+(1-\alpha)\lambda_{P^{(2)}}$ olan bir operatör dizisidir. Yani $\mathbb{K}_C^+[0,1]$'nın elemanıdır. ■

4.4.3. Teorem. $\mathbb{K}_C^+[0,1]$, $\mathbb{K}_C^-[0,1]$'de bir koniktir.

İspat. Konik olmanın özelliklerinden ilki Önerme 4.4.1 ve Önerme 4.4.2'den görülür. $\mathcal{P}\in\mathbb{K}_C^+[0,1]$ ve $t\in\mathbb{R}^+$ ise $t\bullet\mathcal{P}=t\{P_n\}=\{tP_n\}$ yaklaşım çarpanı $t\lambda_{\mathcal{P}}$ olan pozitif bir Korovkin dizisidir. Yani $t\bullet\mathcal{P}\in\mathbb{K}_C^+[0,1]$. Ayrıca $\mathcal{P}\in\mathbb{K}_C^+[0,1]$ ve $-\mathcal{P}\in\mathbb{K}_C^+[0,1]$ ise $\lambda_{\mathcal{P}}$ ve $\lambda_{-\mathcal{P}}=-\lambda_{\mathcal{P}}$ negatif olmayan sayılar olur. Burada $\lambda_{\mathcal{P}}=0$ yani $\mathcal{P}=\Theta$ elde edilir. ■

Böylece $\mathbb{K}_C^-[0,1]$ uzayında bir sıralama bağıntısı şu şekilde tanımlanabilir:

$\mathcal{R}^{(1)}, \mathcal{R}^{(2)}\in\mathbb{K}_C^-[0,1]$ için

$$\text{“}\mathcal{R}^{(1)}\geq\mathcal{R}^{(2)} \quad\Leftrightarrow\quad \mathcal{R}^{(1)}-\mathcal{R}^{(2)}\in\mathbb{K}_C^+[0,1].\text{”}$$

O halde $\left(\mathbb{K}_C^-[0,1],\geq\right)$ kısmi sıralı Banach uzayıdır.

4.4.4. Teorem. Sıfırdan farklı $\mathcal{P}=\{P_n\}\in\mathbb{K}_C^+[0,1]$ verilsin. Bu durumda her $f\in C[0,1]$ için $P_n(f)$ fonksiyon dizisi $[0,1]$ üzerinde $\lambda_{\mathcal{P}}f$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

İspat. Her $n\in\mathbb{N}$ için $L_n=\lambda_{\mathcal{P}}^{-1}P_n$ ile tanımlı $\{L_n\}$ dizisi Korovkin Teoreminin koşullarını sağladığından istenen elde edilir. ■

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının sonucunda kompakt aralıkta sürekli fonksiyonların cebirsel polinomlar ile düzgün yaklaşımında çok önemli yer tutan Korovkin Teoremi baz alınmıştır. Bir sabit çarpanı farkıyla Korovkin Teoreminin koşullarını sağlayan pozitif ve lineer olan operatörlerden oluşan dizileri de içeren bir dizi uzayı oluşturulmuştur. Pozitif ve lineer operatörlerin de üyesi olduğu regüler operatörlerin ve bazı alt sınıflarının özellikleri incelenmiştir. Elde edilen bazı sonuçlar aşağıda listelenmiştir:

1. $\left(\mathbb{K}_C[0,1],+,\bullet\right)$ $\mathbb{R}$ 'de bir lineer uzaydır.
2. $\mathcal{R}=\{R_n\}=\{P_n^+-P_n^-\}\in\mathbb{K}_C[0,1]$ olsun. $\{\|P_n^+\|\}$ ve $\{\|P_n^-\|\}$ dizileri eş zamanlı sınırlıdır.
3. $\mathbb{K}_C^-[0,1]$, $\|\,.\,\|_\infty$ normu ile bir Banach uzayıdır.
4. $\mathbb{K}_C^+[0,1]$, $\mathbb{K}_C^-[0,1]$'de bir koniktir. Dolayısıyla $\left(\mathbb{K}_C^-[0,1],\geq\right)$ kısmi sıralı Banach uzayıdır.
5. Sıfırdan farklı $\mathcal{P}=\{P_n\}\in\mathbb{K}_C^+[0,1]$ verilsin. Bu durumda her $f\in C[0,1]$ için $P_n(f)$ fonksiyon dizisi $[0,1]$ üzerinde $\lambda_{\mathcal{P}}f$ fonksiyonuna düzgün yakınsaktır.

Son madde oluşturulan uzayın Korovkin Teoreminin koşullarını sağlayan tüm operatör dizilerini kapsadığını göstermektedir.

5.2. ÖNERİLER

Tezde elde edilen sonuçlar, $\mathbb{K}_C^-[0,1]$ uzayı oluşturulurken yapılan kısıtlamaları azaltarak daha geniş bir aile için yapılabilir. Ayrıca incelenen uzayın fonksiyonel özelliklerinin artırılması mümkündür. Kısmi sıralı Banach uzayının özelliklerinin bu uzayda nasıl davrandığı incelenebilir. Son olarak kompakt aralıkta sürekli fonksiyonlar üzerinde tanımlı bu operatörler ailesi sonsuz aralıklar ele alınarak özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Chebyshev, P. L., "Théorie des mécanismes connus sous le nom de parallélogrammes", Mémoires des Savants étrangers présentés à I' Académie de Saint-Pétersburg, 7: 539-586, (1864).

[2] Weierstrass, K., "Über die Analytische Darstellbarkeit Sogenannter Willkürlicher Funktionen Einer Reelen Veranderlichen", Sitzungsberichete der Akademie zu Berlin, 633-639, (1885).

[3] Landau, E., "Uber die Approximation einer stetigen Funktion durch eine ganzerationale Funktion", Rend. Circ. Mat. Palermo, 25: 337-345,(1908).

[4] Bernstein, S. N., "Demonstration du theoreme de Weierstrass Fondee sur le Calculde probabilities", Commun. Soc. Math. Kharkow (2), 13: 1-2, (1912-13).

[5] Kantorovich, L. V., "Sur Certains developpements suivant les polynomes de laforme de S. Bernstein", I, II, C.R. Acad. URSS, 563-568, 595-600, (1930).

[6] Bohman, H., "On approximation of continuous and of analytic functions", Ark. Mat. 2: 43-56, (1952).

[7] Korovkin, P. P., "On the convergence of linear positive operators in the space of continuous functions", Dokl. Akad. Nauk. 90: 961-964, (1953).

[8] Korovkin. P. P., "Linear Operators and Approximation Theory", Hindustan publishing Corp. (India), Delhi, 222 s., (1960).

[9] Stancu D. D., "Asupra unei generalizari a polinoamelor lui Bernstein", Studia Univ. Babeş-Bolyei, Ser. Math. Phys. , 14: 31-45, (1969).

[10] Gadjiev, A. D., "Theorems of Korovkin Type, Zametki 20(5):781-786, Math Notes 20(5): 996-998, 1976 (in Russian).

[11] Ditzian, Z., "Convergence of Squences of Linear Positive Operators : Remaks and Applications", J. Approx. Theory, 14: 296-301, (1975).

[12] Nishishiraho T., "Approximation Processes of Quasi-Positive Linear Operators", Ryukyu Math. J. 5: 85-79 (1992).

[13] Campiti M., "Convexity-monotone operators in Korovkin Theory", In Proceedings of the 2nd International Conference in Functional Analysis and

Approximation Theory, Acquafredda di Maratea (Potenza), September 14-19, 1992, Rend Circ. Mati Palermo (2) Suppl., 33: 229-238 (1994).

[14] Nowak, O., "Korovkin-type convergence results for non-positive operators" Cent. Eur. Math., 8(5): 890-907, (2010).

[15] Balcı, M., "Matematik Analiz", Ertem Matbası, s.420, (1984).

[16] Kızmaz, H., "Fonksiyonel Analize Giriş", Karadeniz Teknik Ünv. Basımevi, Trabzon, s.11, (1993).

[17] Musayev. B., Alp, M., ve Mustafayev, N., "Teori ve Çözümlerle Analiz II", Tek Ağaç, Kütahya, s.623, (2003).

[18] Musayev, B. ve Alp, M., "Fonksiyonel Analiz", s.76-78., Kütahya, (200).

[19] Holhoş, A., "Contributions to the Approximation of Functions", Babeş-Boylai University, Ph. D. Thesis, 41 p., (2010).

[20] Pitul, P. A., "Evaluation of the Approximation Order by Positive Linear Operators", Babeş-Bolyai University, Ph. D. Thesis, 159 p., (2007).

[21] Hacıyev A., ve Hacısalihoğlu, H. H., "Lineer Pozitif Operatörler Dizilerinin Yakınsaklığı" 1. Basım, A.Ü.F.F Döner Sermeye İşletmesi Yayınları:31, Ankara, 72 s., (1995).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Halil İbrahim YAMAN.

Doğum Tarihi: 05/02/1985

Öğrenim Durumu:

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lise	Matematik-Fen	Kozan Lisesi	1999-2002
Lisans	Matematik	Çukurova Üniversitesi	2003-2007
Lisans	Matematik Öğr.	Cumhuriyet Üniversitesi	2011-2013
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2010-…

(Varsa) Görevler:

Derece	**Üniversite**	**Yıl**
Memur	Çukurova Üniversitesi	2006 - …