BİR SINIF DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMİN ÇÖZÜLEBİLMESİ İÇİN GEREK VE YETER KOŞUL

ÖZGE AKÇAY

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

MERSİN
OCAK – 2016

BİR SINIF DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMİN ÇÖZÜLEBİLMESİ İÇİN GEREK VE YETER KOŞUL

ÖZGE AKÇAY

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

MERSİN
OCAK – 2016

Özge AKÇAY tarafından Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU danışmanlığında hazırlanan "Bir Sınıf Dirac Operatörü İçin Ters Problemin Çözülebilmesi İçin Gerek ve Yeter Koşul" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	....
Prof. Dr. Nazım KERİMOV	....
Prof. Dr. Anar ADİLOĞLU	....
Doç.Dr. Oktay AYDOĞDU	....
Yrd.Doç.Dr. Hakan YETİŞKİN	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun ..12../..02../..2016..tarih ve ..2016-6......./..212...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Enstitü Müdürü

BİR SINIF DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMİN ÇÖZÜLEBİLMESİ İÇİN GEREK VE YETER KOŞUL

Özge AKÇAY

ÖZ

Bu çalışmada, süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi ve farklı sınır koşulları ile oluşturulan sınır değer problemleri için spektral analizin ters problemi farklı karakteristiklere göre incelenmiştir. Sonlu aralıkta, süreksiz katsayılı Dirac operatörü için ters spektral problem Gelfand-Levitan yöntemi uygulanarak spektral verilere göre çözülmüştür. Ters problemin çözümünün tekliği gösterilmiştir, spektral veriler üzerine gerek ve yeter koşul bulunmuştur ve potansiyeli inşa etme algoritması spektral verilere göre verilmiştir. Süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi ve sınır koşulunda spektral parametre bulunduran sınır değer problemi için ters problemin çözümünün tekliği Weyl fonksiyonuna göre elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Dirac Operatörü, Ters Problem, Weyl Fonksiyonu, Spektral Veri, Temel Denklem

Danışman: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

NECESSARY AND SUFFICIENT CONDITIONS FOR THE SOLVABILITY OF INVERSE PROBLEM FOR A CLASS OF DIRAC OPERATORS

Özge AKÇAY

ABSTRACT

In this work, the inverse problems of spectral analysis for the boundary value problems generated by the Dirac differential equations system with discontinuous coefficient and different boundary conditions are examined according to different characteristics. In the finite interval, the inverse spectral problem by spectral data for the Dirac operators with discontinuous coefficient is solved by using the method of Gelfand-Levitan. The uniqueness of the solution of inverse problem is shown, necessary and sufficient conditions on spectral data is found and the algorithm of reconstruction of potential is given with respect to spectral data. The uniqueness of solution of inverse problem by Weyl function for the boundary value problem formed by Dirac differential equations system with discontinuous coefficient and spectral parameter contained boundary condition are obtained.

Key Words: Dirac Operator, Inverse Problem, Weyl Function, Spectral Data, Main Equation

Advisor: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Çalışma konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında yardımlarını hiç eksik etmeyen, daima yanımda olan çok saygı duyduğum tez danışmanım Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU'na teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGE ve KISALTMALAR

$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\lVert \cdot \rVert$	Öklid normu
W	Wronskian
λ	Spektral parametre
$\Omega(x)$	Potansiyel fonksiyonu
F^T	F nin transpozu
$\dot{F}$	F nin λ ya göre türevi
$iz[Q(x)]$	$Q(x)$ matrisinin izi
$M(\lambda)$	Weyl Fonksiyonu
$AC[a,b]$	$[a,b]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyonlar sınıfı
$D(L)$	L operatörünün tanım kümesi
$I(L)$	L eğrisinin içi
$E(L)$	L eğrisinin dışı
$hhhy(0,\pi)$	$(0,\pi)$ üzerinde hemen hemen her yerde
$\square$	İspatın bittiğini gösterir

1. GİRİŞ

Fiziksel problemlerde diferansiyel operatörlerin spektral teorisi geniş uygulamalara sahiptir. Operatörün spektrum kümesinin incelenmesi, özfonksiyonlara göre ayrışım problemleri spektral analizin düz problemleridir. Spektral analizin ters problemi ise spektral karakteristiklere göre lineer operatörün inşasıdır. Spektral karakteristikler; spektrum, spektral fonksiyon, Weyl fonksiyonu, spektral veriler, saçılma fonksiyonu ve benzerleridir. Spektral karakteristiklere bağlı olarak farklı ters problemler ele alınır.

Dirac denklemi kuantum mekanik dalga denklemidir. 1973 yılında M. J. Ablowitz, D. J. Kaup, A. C. Newell ve H. Segur, Dirac denkleminin lineer olmayan dalga denklemleriyle (Korteweg-de Vries denklemi, Zakharov-Shabat denklemi gibi) bağlantılı olduğunu elde etmiştir [1].

Kuantum mekaniğinin temel denklemi olan Schrödinger denkleminin çözümü için yardımcı lineer problem birinci mertebeden diferansiyel denklemler sisteminden oluşur. Bir boyutlu Dirac denklemler sistemi

$$J\frac{d}{dx}\psi(x)+Q(x)\psi(x)=k\psi(x), \qquad -\infty<x<\infty$$

biçimindedir, burada

$$J=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix}, \qquad Q(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},$$

$Q(x)$ reel değerli matristir. Bu sistemin operatör biçimi

$$H=J\frac{d}{dx}+Q(x).$$

H operatöründe

$$Q(x)=\begin{pmatrix} 0 & q(x) \\ q(x) & 0 \end{pmatrix}$$

olarak alındığında

$$H=-\frac{d^2}{dx^2}+q^2(x)+q'(x)$$

elde edilir. Bu ise bir boyutlu Schrödinger operatörüdür, yani Dirac denklemi genelleşmiş Schrödinger denklemidir. Bu nedenle Dirac denklemler sistemi için düz ve ters problemin incelenmesi önemlidir.

Tezde, Dirac denklemler sistemi için spektral analizin ters problemleri spektral verilere ve Weyl fonksiyonuna göre ele alınır.

Bulgular ve Tartışma kısmının birinci bölümünde süreksiz katsayılı Dirac operatörünün ters probleminin çözümü için spektral veriler üzerine gerek ve yeter koşul bulunur ve potansiyeli inşa etme algoritması verilir. Sonlu aralıkta

$$By'+\Omega(x)y=\lambda\rho(x)y, \qquad 0<x<\pi \tag{1.1}$$

Dirac denklemler sistemi ve

$$y_1(0)=y_1(\pi)=0 \tag{1.2}$$

sınır koşulları ile oluşan sınır değer problemi ele alınır, burada

$$B=\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix},\ \Omega(x)=\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix},\ y(x)=\begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix},$$

$p(x)\in L_2(0,\pi)$ ve $q(x)\in L_2(0,\pi)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar, λ spektral parametre, $1\neq\alpha>0$ olmak üzere

$$\rho(x)=\begin{cases} 1, & 0\le x\le a, \\ \alpha, & a<x\le\pi. \end{cases}$$

Gelfand-Levitan metodu uygulanarak, Dirac operatörünün ters spektral problemi spektral verilere göre tamamen çözülmüştür. Diğer çalışmalardan farklı olarak, (1.1) denklemi parçalı sürekli $\rho(x)$ katsayısına sahip olduğundan, klasik durumdan farklı incelemeler gerektirmektedir. Örneğin, $\rho(x)$ fonksiyonu (1.1) denkleminin çözümünün biçimini etkilemektedir. Bu yüzden (1.1) denkleminin çözümü dönüşüm operatöründen farklı olarak bir integral gösterime sahiptir. Ters problemin çözümü için bu integral gösterim kullanılır. Ayrıca, ters problemin çözümünde önemli yeri olan temel denklem, klasik durumdaki Gelfand-Levitan denkleminden farklı bir biçime sahiptir.

(1.1), (1.2) sınır değer problemlenin ters problemi spektral verilere (özdeğerler ve normlaştırıcı sayılar) göre incelenir. Bu durum için ters problem şu şekilde ifade edilmektedir: spektral veriler bilindiğinde potansiyeli belirlemek için metod vermek ve spektral veriler üzerine gerek ve yeter koşulu bulmaktır. Tezde, spektral verilere göre ters problemin çözümü verilir; yani

i. Gelfand-Levitan yöntemi kullanılarak temel denklem inşa edilir,

ii. Temel denklemin tek bir çözüme sahip olduğu gösterilir,

iii. (1.1), (1.2) sınır değer probleminin ters probleminin çözümünün tekliği spektral verilere göre ispatlanır,

iv. (1.1), (1.2) sınır değer probleminin ters probleminin çözümü için spektral veriler üzerine gerek ve yeter koşul elde edilir. Bu elde edilirken diferansiyel denklem ve Parseval eşitliği temel denklem kullanılarak inşa edilir. Son olarak sınır koşulları inşa edilir,

v. Spektral verilere göre $\Omega(x)$ potansiyelini inşa etme algoritması verilir.

Bulgular ve Tartışma kısmının ikinci bölümünde, süreksiz katsayılı, sınır koşulu spektral parametre bulunduran Dirac operatörü için spektral analizin düz ve ters problemleri incelenir. Sonlu aralıkta (1.1) Dirac denklemler sistemi ve

$$y_1(0) = 0,$$
$$\lambda\left(b_1 y_2(\pi) + b_2 y_1(\pi)\right) + a_1 y_1(\pi) + a_2 y_2(\pi) = 0, \tag{1.3}$$

sınır koşulları ile oluşan sınır değer problemi ele alınır, burada a_1, a_2, b_1 ve b_2 reel sayılardır. Kabul edelim ki $k := a_2 b_2 - a_1 b_1 > 0$ olsun.

(1.1), (1.3) sınır değer probleminin bazı spektral özellikleri ve spektral analizin ters problemi incelenir ve aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Spektral analizin düz problemi adı altında,

i. (1.1), (1.3) sınır değer probleminin $H_\rho = L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right) \oplus \mathbb{C}$ Hilbert uzayında operatör biçimi verilir. Problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları tanımlanır. Farklı özdeğerlere uygun özfonksiyonların dik olduğu ve operatörün özdeğerlerinin reel olduğu ispatlanır,

ii. (1.1), (1.3) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu hesaplanır. (1.1), (1.3) probleminin normlaştırıcı sayıları tanımlanır. (1.1), (1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin, özfonksiyonlarının ve normlaştırıcı sayılarının asimptotik biçimleri incelenir. Problemin özdeğerlerinin basit olduğu elde edilir,

iii. Rezolvent operatör inşa edilir. Özfonksiyonlara göre tamlık teoremi ispatlanır. Kontur üzeri integralleme yöntemi kullanılarak özfonksiyonlara göre ayrışım formülü elde edilir ve Parseval eşitliği verilir.

Spektral analizin ters problemi adı altında,

i. Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu tanımlanır. Weyl fonksiyonun biçimi elde edilir,

ii. (1.1), (1.3) sınır değer probleminin ters probleminin çözümünün tekliği Weyl fonksiyonuna göre ispatlanır,

iii. Spektral verilere göre (1.1), (1.3) sınır değer probleminin ters probleminin çözümünün tekliği gösterilir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Sonlu aralıkta Dirac operatörü için ters problem iki spektruma göre 1966 yılında M. G. Gasymov ve T. T. Dzabiev [2] tarafından, bir spektrum ve normlaştırı sayıya göre 1966 yılında T. T. Dzabiev [3] tarafından ve spektral fonksiyona göre 1975 yılında S. G. Mamedov [4] tarafından çözülmüştür. Dirac operatörünün periyodik ve anti periyodik sınır değer problemi için ters problem T. V. Misyura'nın [5] ve I. M. Nabiev'in [6] çalışmalarında incelenmiştir. Potansiyelin $L_p(0,1), p \in [1,\infty)$ ait olduğu durumda Dirac operatörü için ters spektral problem iki spektruma ve bir spektrum ve normlaştırıcı sayılara göre S. Albeverio, R. Hryniv ve Ya. Mykytyuk'un [7] çalışmasında çözülmüştür. Bu çalışmada Gelfand-Levitan-Marchenko metodunun yanısıra Krein metodu da kullanılmıştır. M. M. Malamud, [8] çalışmasında $2n$ boyutlu Dirac tipli sistemler için ters problemin tekliğini elde etmiştir. Sınır koşulunda spektral parametre bulunduran Dirac operatörü için ters problem ilk kez S. G. Mamedov [4] tarafından incelenmiştir. Süreksiz katsayılı Dirac operatörü için Weyl fonksiyonuna göre ters problemin tekliğini A. R. Latifova [9] çalışmasında, sınır koşulunda spektral parametre bulunduran durum için ise Kh. R. Mamedov ve Ö. Akçay [10] çalışmasında ispatlamıştır. Kh. R. Mamedov ve Ö. Akçay'ın [11] çalışmasında süreksiz katsayılı Dirac operatörü için ve [12] çalışmasında sınır koşulunda spektral parametre bulunduran Dirac operatörü için spektral verilere göre ters problem tamamen çözülmüştür. Dirac sistemi için ters nodal problemler Y. Guo ve G.Wei [13], C.-F. Yang ve Z.-Y. Huang [14], C.-F. Yang ve V. N. Pivovarchik [15] tarafından çözülmüştür. D. V. Puyda [16] çalışmasında, Dirac operatörü için ters problemin nümerik çözümünü vermiştir. Aralığın içinde süreksizlik olduğu durumda Dirac operatörü için spektral analizin düz ve ters problemleri R. Kh. Amirov [17], H. M. Huseynov ve A. R. Latifova [18], C.-F. Yang [19], C.-F. Yang ve G.-L. Yuan [20], Y. Guo, G. Wei ve R. Yao [21], M. M. Tharwat [22], M. M. Tharwat, A. Yıldırım ve A. H. Bhrawy [23] tarafından çözülmüştür. Sınır koşulu spektral parametre bulunduran klasik Dirac sistemi için sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının özellikleri N. B. Kerimov [24] tarafından incelenmiştir.

Yarı eksende [25] çalışmasında ilk kez M. G. Gasymov ve B. M. Levitan, spektral fonksiyonu kullanılarak, Dirac operatörü için ters problemi (1964-1966) çözmüştür ve daha sonra bu alanlarda araştırmalar artmıştır. 1968 yılında M. G. Gasymov [26] çalışmasında $2n$ boyutlu Dirac denklemler sistemi için saçılma verilerine göre ters problemi tamamen çözmüştür. Sınır koşulunda spektral parametre bulunduran Dirac denklemler sistemi için saçılmanın ters problemi Kh. R. Mamedov ve A. Çöl [27] tarafından incelenmiştir. Süreksiz katsayılı Dirac operatörü ve sınır koşulunda spektral parametre bulunduran durum için saçılma teorisinin ters problemi Kh. R. Mamedov ve A. Çöl'ün [28] çalışmasında ve sınır koşulu spektral parametreyi polinom biçiminde bulunduran durum için spektral analizin ters problemi A. Çöl'ün [29] çalışmasında incelenmiştir. Kh. R. Mamedov ve Ö. Akçay [30]'da süreksiz katsayılı Dirac operatörü için spektral ayrışım formülünü elde etmiştir. Weyl-Titschmarsh fonksiyonu kullanılarak, Dirac tipli sistemler için düz ve ters problem A. Sakhnovich ve diğerleri tarafından çalışılmıştır [31, 32].

Dirac denkleminin lineer olmayan dalga denklemleriyle bağlantılı olduğunun elde edilmesi ile fiziğin çeşitli alanlarında Dirac operatörü için düz ve ters problemlere olan ilgi artmıştır. Örneğin, Dirac denklemler sistemi M. J. Ablowitz ve H. Segur [33], R. G. Newton ve R. Jost [34], L. D. Faddeev ve L. Takhtajan [35], L. P. Nizhnik [36, 37, 38], R. J. Kruger [39], D. G. Shepelsky [40, 41], B. Thaller [42], B. A. Watson [43] gibi birçok yazar için ilgi ve araştırma araştırma alanı olmuştur ve bu yönde yapılan çalışmalar devam etmektedir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 BİR BOYUTLU DIRAC OPERATÖRÜ ve BAZI ÖZELLİKLERİ

3.1.1 Birinci Mertebeden Dirac Denklemler Sistemi

$$B\frac{dy}{dx}+P(x)y=\lambda y \tag{3.1.1.1}$$

matris denklemi ele alınır, burada

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\quad P(x)=\begin{pmatrix}p_{11}(x) & p_{12}(x)\\ p_{21}(x) & p_{22}(x)\end{pmatrix},\quad y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix},$$

$p_{12}(x)\equiv p_{21}(x),\ p_{ik}(x),\ i,k=1,2$ reel değerli ve $[0,\pi]$ aralığı üzerinde sürekli fonksiyonlardır ve λ spektral parametredir.

(3.1.1.1) denklemi aşağıdaki şekilde yazılabilir:

$$\begin{aligned} y_2^{'}+p_{11}(x)y_1+p_{12}(x)y_2&=\lambda y_1,\\ -y_1^{'}+p_{21}(x)y_1+p_{22}(x)y_2&=\lambda y_2. \end{aligned} \tag{3.1.1.2}$$

$p_{12}(x)=p_{21}(x)\equiv 0,\quad p_{11}(x)=V(x)+m$ ve $p_{22}(x)=V(x)-m$ olması durumunda, (3.1.1.2) sistemine göreli kuantum teorisinde bir boyutlu durağan Dirac sistemi denir, burada $V(x)$ potansiyel fonksiyon ve m kütledir.

$H=H(x)$ iki boyutlu uzayın düzgün ortagonal dönüşümü olsun. Her bir ortagonal dönüşüm iki boyutlu uzayın sabitlenmiş ortanormal tabanına göre

$$H(x)=\begin{pmatrix}\cos\varphi(x) & -\sin\varphi(x)\\ \sin\varphi(x) & \cos\varphi(x)\end{pmatrix}$$

biçimine sahiptir. B ve H matrisleri komütatiftir, yani $BH=HB$. (3.1.1.1)'de $y=H(x)z$ değişken dönüşümü yapılarak ve daha sonra soldan H^{-1} ile çarpılarak,

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}\left(Hz\right)+H^{-1}PHz=H^{-1}\lambda Hz$$

veya

$$B\frac{dz}{dx}+\left(H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}PH\right)z=\lambda z \qquad (3.1.1.3)$$

elde edilir. $Q(x)\equiv H^{-1}B\frac{d}{dx}H+H^{-1}PH$ matrisi oluşturulsun.

$$H^{-1}B\frac{d}{dx}H=\begin{pmatrix}\varphi'(x) & 0\\ 0 & \varphi'(x)\end{pmatrix},$$

$$H^{-1}PH=\begin{pmatrix}p_{11}(x)\cos^2\varphi+p_{12}(x)\sin 2\varphi+p_{22}(x)\sin^2\varphi & p_{12}(x)\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\left(p_{22}-p_{11}\right)\sin 2\varphi\\ p_{12}(x)\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\left(p_{22}-p_{11}\right)\sin 2\varphi & p_{11}(x)\sin^2\varphi-p_{12}(x)\sin 2\varphi+p_{22}(x)\cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

ifadeleri kullanılarak $Q(x)$ matrisi aşağıdaki şekilde yazılır:

$$Q(x)=\begin{pmatrix}q_{11}(x) & q_{12}(x)\\ q_{21}(x) & q_{22}(x)\end{pmatrix}=$$

$$=\begin{pmatrix}\varphi'+p_{11}(x)\cos^2\varphi+p_{12}(x)\sin 2\varphi+p_{22}(x)\sin^2\varphi & p_{12}(x)\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\left(p_{22}-p_{11}\right)\sin 2\varphi\\ p_{12}(x)\cos 2\varphi+\frac{1}{2}\left(p_{22}-p_{11}\right)\sin 2\varphi & \varphi'+p_{11}(x)\sin^2\varphi-p_{12}(x)\sin 2\varphi+p_{22}(x)\cos^2\varphi\end{pmatrix}$$

Şimdi, $\varphi(x)$ fonksiyonu $q_{12}(x)\equiv 0$ olacak şekilde seçilsin. O halde,

$$p_{12}(x)\cos 2\varphi(x)+\frac{1}{2}\left(p_{22}(x)-p_{11}(x)\right)\sin 2\varphi(x)=0 .$$

Eğer $p_{11}(x)\neq p_{22}(x)$ ise,

$$\varphi(x)=\frac{1}{2}\tan^{-1}\frac{2p_{12}(x)}{p_{11}(x)-p_{22}(x)}$$

bulunur ve $Q(x)$ matrisi aşağıdaki biçime indirgenir:

$$Q(x)=\begin{pmatrix} q_{11}(x) & 0 \\ 0 & q_{22}(x)\end{pmatrix}\equiv\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x)\end{pmatrix}.$$

Böylece, (3.1.1.3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & 0 \\ 0 & r(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \qquad (3.1.1.4)$$

biçiminde yazılabilir.

Şimdi, $\varphi(x)$ fonksiyonu $iz\left[Q(x)\right]=q_{11}(x)+q_{22}(x)=0$, yani $2\varphi'(x)+p_{11}(x)+p_{22}(x)=0$ olacak şekilde seçilsin. O halde,

$$\varphi(x)=-\frac{1}{2}\int_0^x\left\{p_{11}(s)+p_{22}(s)\right\}ds$$

bulunur ve (3.1.1.3) denklemi

$$\begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0\end{pmatrix}\frac{dz}{dx}+\begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix}z=\lambda z \qquad (3.1.1.5)$$

biçimine indirgenir. (3.1.1.4) ve (3.1.1.5) denklemlerine (3.1.1.1) denkleminin (ya da (3.1.1.2) sisteminin) kanonik formları denir. (3.1.1.1) denkleminin spektral teorisinde çeşitli problemlerin çözümlerinde bu ve buna benzer kanonik formları kullanmak uygundur. Örneğin, (3.1.1.1) denkleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonların asimptotik davranışlarını çalışırken ve (3.1.1.1) denkleminin özfonksiyonlarına göre ayrışım formülünü incelerken (3.1.1.4) kanonik formunu kullanmak uygundur, verilen sonsuz aralık üzerinde (3.1.1.1) denkleminin özdeğerlerinin asimptotik dağılımı gibi sorularda ve ters problem için (3.1.1.5) kanonik formunu kullanmak uygundur ([44]).

3.1.2 Dirac Operatörünün Temel Özellikleri

(3.1.1.4) kanonik biçimine indirgenmiş (3.1.1.1) denklemi için aşağıdaki sınır değer problemi ele alınsın:

$$y_2' - \{\lambda + p(x)\} y_1 = 0, \qquad y_1' + \{\lambda + r(x)\} y_2 = 0, \tag{3.1.2.1}$$

$$y_1(0)\sin\alpha + y_2(0)\cos\alpha = 0, \tag{3.1.2.2}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0. \tag{3.1.2.3}$$

$p(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $[0,\pi]$ aralığında sürekli olsun.

Tanım 3.1.2.1 ([44]) (3.1.2.1)-(3.1.2.3) sınır değer problemi belli bir λ_0 değeri için aşikar olmayan $y(x,\lambda_0) = \begin{pmatrix} y_1(x,\lambda_0) \\ y_2(x,\lambda_0) \end{pmatrix}$ çözümüne sahip ise λ_0'a özdeğer ve $y(x,\lambda_0)$ fonksiyonuna ise bu özdeğere karşılık gelen vektör-değerli özfonksiyon denir.

Lemma 3.1.2.2 ([44]) Farklı $\lambda_1 \neq \lambda_2$ özdeğerlerine uygun $y(x,\lambda_1)$ ve $z(x,\lambda_2)$ vektör-değerli özfonksiyonları diktir, yani $\left(y^T = (y_1 \quad y_2)\right)$,

$$\int_0^\pi y^T z\, dx \equiv \int_0^\pi \{ y_1(x,\lambda_1) z_1(x,\lambda_2) + y_2(x,\lambda_1) z_2(x,\lambda_2) \} dx = 0.$$

Lemma 3.1.2.3 ([44]) (3.1.2.1)-(3.2.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

3.2 ÖZDEĞERLER ve VEKTÖR-DEĞERLİ ÖZFONKSİYONLAR İÇİN ASİMPTOTİK FORMÜLLER

(3.1.2.1)-(3.1.2.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve vektör-değerli özfonksiyonlarının asimptotik davranışları dönüşüm operatörü kullanılarak incelenir.

3.2.1 Dönüşüm Operatörü

E, iki bileşenli, birinci mertebeden sürekli türeve sahip kompleks değerli sürekli $f(x)$, $0 \le x < \infty$ vektör fonksiyonlarının uzayı olsun. $A_1 : E \to E$ ve $A_2 : E \to E$ 2×2 lineer matris operatörleri, E_1 ve E_2, E'nin kapalı alt uzayları olsun.

Tanım 3.2.1.1 ([44]) E uzayında tanımlı, $X : E_1 \to E_2$ lineer tersinir operatörü aşağıdaki koşulları sağlasın:

1. X ve X^{-1} operatörü E'de süreklidir,

2. $A_1 X = X A_2$ sağlanır.

Bu durumda X operatörüne A_1 ve A_2 operatörleri için dönüşüm operatörü denir.

Burada, 3 durum ele alınır ([44]):

Durum 1. E uzayı yukarıda tanımlandığı biçimde olsun. E uzayının

$$f_2(0) = h f_1(0) \tag{3.2.1.1}$$

koşulunu sağlayan $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ vektör değerli fonksiyonlarından oluşan alt uzayı $E_1 = E_2$ olsun, burada h keyfi kompleks sayıdır.

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix} \frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix} \equiv B\frac{d}{dx} + Q(x),$$

$$A_2 = B\frac{d}{dx}, \qquad 0 \le x < \infty$$

matris operatörleri ele alınsın, burada $p(x)$ ve $q(x)$ sürekli kompleks değerli fonksiyonlardır.

Teorem 3.2.1.2 $X : E_1 \to E_2$ operatörü

$$X\, f(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\, f(t)dt \tag{3.2.1.2}$$

biçimindedir. (3.2.1.2) ifadesinin $K(x,t)$ çekirdeği

$$BK_x(x,t) + K_t(x,t)B = -Q(x)K(x,t), \tag{3.2.1.3}$$

$$K(x,x)B - BK(x,x) = Q(x), \tag{3.2.1.4}$$

$$K(x,0)BH = 0, \qquad H = \begin{pmatrix} 1 \\ h \end{pmatrix} \tag{3.2.1.5}$$

probleminin çözümüdür. Tersine, eğer $K(x,t)$, (3.2.1.3)-(3.2.1.5) probleminin çözümü ise, (3.2.1.2) formülü ile belirlenen X operatörü A_1 ve A_2 operatörleri için dönüşüm operatörüdür.

Durum 2. E uzayı Durum 1'de verilen ile aynıdır ve E'nin $E_1 = E_2$ alt uzayı, $f_1(0) = 0$ koşulunu sağlayan $f(x) = \begin{pmatrix} f_1(x) \\ f_2(x) \end{pmatrix}$ vektör değerli fonksiyonlarının uzayıdır. Aslında, bu koşul $h = \infty$ için (3.2.1.1) koşulundan elde edilir.

A_1 ve A_2, Durum 1'de tanımlanan biçimdedir. Böylece, X dönüşüm operatörü

$$X\,f(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t)\,f(t)dt$$

formundadır. Benzer şekilde, $K(x,t)$ çekirdeği için

$$BK_x(x,t) + K_t(x,t)B = -Q(x)K(x,t)\,,$$

$$K(x,x)B - BK(x,x) = Q(x)\,,$$

$$K_{11}(x,0) = K_{21}(x,0) = 0$$

problemi elde edilir.

Durum 3. E uzayı, Durum 1 ve Durum 2'de verilen biçimdedir. E'nin E_1 ve E_2 alt uzayları,

$$f_2(0) = h_1 f_1(0), \qquad f_2(0) = h_2 f_1(0)$$

koşullarını sağlayan $f(x)$ vektör değerli fonksiyonlarının uzaylarıdır, burada h_1 ve h_2 keyfi kompleks sayılardır.

A_1 ve A_2 operatörleri,

$$A_1 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_1(x) & 0 \\ 0 & q_1(x) \end{pmatrix} \equiv B\frac{d}{dx} + Q_1(x),$$

$$A_2 = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}\frac{d}{dx} + \begin{pmatrix} p_2(x) & 0 \\ 0 & q_2(x) \end{pmatrix} \equiv B\frac{d}{dx} + Q_2(x)$$

formunda olsun. O halde, X dönüşüm operatörü

$$Xf(x) = R(x)\,f(x) + \int_0^x L(x,t)\,f(t)dt \tag{3.2.1.6}$$

biçimdedir, burada $R(x)=\begin{pmatrix}\alpha(x) & \beta(x)\\ -\beta(x) & \alpha(x)\end{pmatrix}$ ve

$$\alpha(x)=\frac{1}{\kappa}\sin\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x r(\tau)d\tau+\sin^{-1}\frac{1}{\kappa}\right\},$$

$$\beta(x)=\frac{1}{\kappa}\cos\left\{-\frac{1}{2}\int_0^x r(\tau)d\tau+\sin^{-1}\frac{1}{\kappa}\right\},$$

$$r(x)=p_1(x)+q_1(x)-p_2(x)-q_2(x)\,, \qquad \kappa=\frac{(1+h_1)(1+h_2)}{1+h_1h_2}\,.$$

(3.2.1.6) dönüşüm operatörünün çekirdeği $L(x,t)$

$$BL_x(x,t)+L_t(x,t)B=L(x,t)Q_2(x)-Q_1(x)L(x,t)\,,$$

$$BL(x,x)-L(x,x)B=R(x)Q_2(x)-Q_1(x)R(x)-BR'(x)\,,$$

$$L(x,0)BH=0, \qquad H=\begin{pmatrix}1\\ h_1\end{pmatrix}$$

probleminin çözümüdür.

Sonlu aralıkta aşağıdaki durum ele alınsın ([44]):

A ve B operatörleri

$$A\equiv\begin{pmatrix}p_1(x) & \frac{d}{dx}\\ -\frac{d}{dx} & r_1(x)\end{pmatrix}, \qquad B\equiv\begin{pmatrix}p_2(x) & \frac{d}{dx}\\ -\frac{d}{dx} & r_2(x)\end{pmatrix} \qquad (3.2.1.7)$$

biçiminde olsun, burada $p_k(x),\ r_k(x),\ k=1,2$ $[0,\pi]$ aralığında reel değerli, sürekli fonksiyonlardır.

E_1 ve E_2 uzayları

$$\begin{aligned} f_1(0)\sin\gamma + f_2(0)\cos\gamma &= 0, \\ g_1(0)\sin\delta + g_2(0)\cos\delta &= 0 \end{aligned} \tag{3.2.1.8}$$

koşullarını sağlayan sürekli diferansiyellenebilir $f(x)$ ve $g(x)$ vektör değerli fonksiyonlarının uzayları olsun, burada γ ve δ keyfi reel sayılardır.

X matris dönüşüm operatörü

$$X\{f(x)\} = R(x) f(x) + \int_0^x K(x,s) f(s)\,ds \tag{3.2.1.9}$$

biçiminde ifade edilir, burada $R(x)$ ve $K(x,s)$ iki boyutlu sürekli diferansiyellenebilir matrislerdir,

$$R(x) = \begin{pmatrix} \alpha(x) & \beta(x) \\ -\beta(x) & \alpha(x) \end{pmatrix}$$

ve $\alpha(x)$, $\beta(x)$ fonksiyonları

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \frac{1}{\kappa}\sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x iz[A-B]\,d\tau + \sin^{-1}\frac{1}{\kappa}\right\}, \\ \beta(x) &= \frac{1}{\kappa}\cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x iz[A-B]\,d\tau + \sin^{-1}\frac{1}{\kappa}\right\} \end{aligned} \tag{3.2.1.10}$$

$\kappa = \sec(\delta - \gamma)$.

3.2.2 Birinci Mertebeden Denklemler Sisteminin Özel Çözümünün Özellikleri

$\varphi(x,\lambda)$, (3.1.2.1) sisteminin,

$$\varphi_1(0,\lambda)=\cos\alpha, \qquad \varphi_2(0,\lambda)=-\sin\alpha \tag{3.2.2.1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Açıktır ki, $\varphi(x,\lambda)$, (3.1.2.2) koşulunu da sağlar. $p(x)=r(x)\equiv 0$ için (3.1.2.1), (3.2.2.1) problemi ele alınsın. Bu problemin çözümü $\psi(x,\lambda)$ olarak tanımlandığında

$$\begin{aligned}\psi_1(x,\lambda)&=\cos\left(\lambda x-\alpha\right),\\ \psi_2(x,\lambda)&=\sin\left(\lambda x-\alpha\right)\end{aligned} \tag{3.2.2.2}$$

elde edilir.

Şimdi, (3.1.2.1), (3.1.2.2) probleminin çözümüne dönüşüm operatörü uygulansın. (3.1.2.1) sistemi

$$A_1 y\equiv\begin{pmatrix}-p(x) & \dfrac{d}{dx}\\ -\dfrac{d}{dx} & -r(x)\end{pmatrix}y=\lambda y \tag{3.2.2.3}$$

biçimindedir. Diğer taraftan, (3.2.2.2) eşitlikleri ile belirli $\psi(x,\lambda)$ vektör değerli fonksiyonu

$$B_1 y=\begin{pmatrix}0 & \dfrac{d}{dx}\\ -\dfrac{d}{dx} & 0\end{pmatrix}y=\lambda y \tag{3.2.2.4}$$

denkleminin çözümüdür. $\psi(x,\lambda)$, $B_1\psi=\lambda\psi$ denkleminin çözümü olduğundan, X dönüşüm operatörünün tanımından

$$A_1 X\{\psi\} = XB_1\{\psi\} = X\{\lambda\psi\} = \lambda X\{\psi\}$$

elde edilir, yani $\varphi = X\{\psi\}$, $A_1\varphi = \lambda\varphi$ denkleminin çözümüdür. Böylece, eğer $\psi(x,\lambda)$ (3.2.2.4) denkleminin çözümü ise, $\varphi(x,\lambda) = X\{\psi(x,\lambda)\}$ fonksiyonu (3.2.2.3) denkleminin çözümüdür. Ele alınan bu durumda

$$p_1(x) = -p(x), \quad r_1(x) = -r(x), \quad p_2(x) = r_2(x) = 0$$

olur. Bu nedenle, $iz[A_1 - B_1] = -[p(x) + r(x)]$. Aynı zamanda (3.1.2.2) koşulları, (3.2.1.8) sınır koşulu ile değiştirildiğinden $\gamma = \delta$ ve $\kappa = 1$ elde edilir. (3.2.1.10)'dan

$$\begin{aligned} \alpha(x) &= \sin\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau) + r(\tau)]d\tau\right\}, \\ \beta(x) &= \cos\left\{\frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau) + r(\tau)]d\tau\right\} \end{aligned} \tag{3.2.2.5}$$

bulunur. (3.1.2.1), (3.2.2.1) probleminin $\varphi(x,\lambda)$ çözümü için (3.2.1.9)'dan

$$\varphi(x,\lambda) = R(x)\psi(x,\lambda) + \int_0^x K(x,s)\psi(s,\lambda)ds$$

elde edilir. Böylece, (3.2.2.5) biçimine sahip $\alpha(x)$ ve $\beta(x)$ fonksiyonlarından oluşan $R(x)$ matrisinin ifadesi ve (3.2.2.2) formundaki $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu kullanılarak

$$\varphi_1(x,\lambda) = \cos\{\xi(x,\lambda) - \alpha\} + \int_0^x \{K_{11}(x,s)\cos(\lambda s - \alpha) + K_{12}(x,s)\sin(\lambda s - \alpha)\}ds\,, \tag{3.2.2.6}$$

$$\varphi_2(x,\lambda) = \sin\{\xi(x,\lambda) - \alpha\} + \int_0^x \{K_{21}(x,s)\cos(\lambda s - \alpha) - K_{22}(x,s)\sin(\lambda s - \alpha)\}ds \tag{3.2.2.7}$$

formülleri elde edilir, burada

$$\xi(x,\lambda)=\lambda x-\frac{1}{2}\int_0^x [p(\tau)+r(\tau)]d\tau \tag{3.2.2.8}$$

ve $K_{ij}(x,s)$, $i,j=1,2$, (3.2.1.9) ifadesindeki $K(x,t)$ matris çekirdeğinin girdileridir ([44]).

Lemma 3.2.2.1 ([44]) $|\lambda|\to\infty$ iken x 'e ($0\le x\le\pi$) göre düzgün olarak,

$$\begin{aligned}\varphi_1(x,\lambda)&=\cos\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O(\lambda^{-1}),\\ \varphi_2(x,\lambda)&=\sin\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O(\lambda^{-1}),\end{aligned} \tag{3.2.2.9}$$

$$\begin{aligned}\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(x,\lambda)&=-x\sin\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O(1),\\ \frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_2(x,\lambda)&=x\cos\{\xi(x,\lambda)-\alpha\}+O(1)\end{aligned} \tag{3.2.2.10}$$

asimptotik formülleri sağlanır.

Lemma 3.2.2.2 ([44]) (3.1.2.1)-(3.1.2.3) sınır değer probleminin özdeğerleri basittir.

3.2.3 Özdeğerlerin ve Özvektör Fonksiyonların Asimptotik Biçimleri

(3.1.2.1)-(3.1.2.3) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\varphi_1(\pi,\lambda)\sin\beta+\varphi_2(\pi,\lambda)\cos\beta=0$$

denkleminin kökleriyle çakışır. $\varphi_1(\pi,\lambda)$ ve $\varphi_2(\pi,\lambda)$ 'nın (3.2.2.9) ifadeleri bu denklemde yerine yazılarak

$$\sin(\lambda\pi-\nu)+O(\lambda^{-1})=0, \tag{3.2.2.11}$$

elde edilir, burada

$$\nu = \beta - \alpha - \frac{1}{2}\int_0^\pi \{ p(\tau) + r(\tau)\} \, d\tau \, . \tag{3.2.2.12}$$

$|\lambda|$'nın büyük değerlerinde (3.2.2.11) denklemi

$$\pi\lambda_n - \nu = n\pi + \delta_n$$

biçiminde çözümlere sahiptir. Bu ifade (3.2.2.11)'de yerine yazılarak, $\sin\delta_n = O\left(n^{-1}\right)$ yani $\delta_n = O\left(n^{-1}\right)$ bulunur. Böylece, özdeğerler için

$$\lambda_{\pm n} = \frac{\nu}{\pi} \pm n + O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{3.2.2.13}$$

asimptotik formülü elde edilir, burada ν (3.2.2.12) biçimindedir.

(3.2.2.13) ifadesi kullanılarak, vektör değerli özfonksiyonların asimptotik formülleri elde edilir:

$$\varphi_1\left(x,\lambda_n\right) \equiv u_n(x), \qquad \varphi_2\left(x,\lambda_n\right) \equiv v_n(x)$$

yani

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \cos\left(\xi_n - \alpha\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \\ v_n(x) &= \sin\left(\xi_n - \alpha\right) + O\left(\frac{1}{n}\right), \end{aligned} \tag{3.2.2.14}$$

burada $\xi_n = \xi\left(x,\lambda_n\right) = \lambda_n x - \frac{1}{2}\int_0^x \{ p(\tau) + r(\tau)\} \, d\tau$. Ayrıca,

$$\alpha_n^2 = \int_0^\pi \left\{ u_n^2(x) + v_n^2(x) \right\} dx = \pi + O\left(\frac{1}{n}\right)$$

ifadesi kullanılarak normlaştırılmış vektör değerli özfonksiyonların asimptotik formülü

$$\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)=\begin{pmatrix}\dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\cos(\xi_n-\alpha)+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\\ \dfrac{1}{\sqrt{\pi}}\sin(\xi_n-\alpha)+O\left(\dfrac{1}{n}\right)\end{pmatrix}$$

biçiminde elde edilir ([44]).

3.3 AYRIŞIM TEOREMİ

$$y_2' - \{\lambda + p(x)\} y_1 = f_1(x), \quad y_1' + \{\lambda + r(x)\} y_2 = -f_2(x), \tag{3.3.1}$$

$$y_1(a)\sin\alpha + y_2(a)\cos\alpha = 0 , \tag{3.3.2}$$

$$y_1(\pi)\sin\beta + y_2(\pi)\cos\beta = 0 \tag{3.3.3}$$

sınır değer probleminin çözümü aransın, burada $f(x) \neq 0$ sürekli vektör değerli fonksiyondur. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ sırasıyla (3.1.2.1) sisteminin

$$\varphi_1(a,\lambda) = \cos\alpha, \qquad \varphi_2(a,\lambda) = -\sin\alpha \tag{3.3.4}$$

$$\psi_1(b,\lambda) = \cos\beta, \qquad \psi_2(b,\lambda) = -\sin\beta \tag{3.3.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

Eğer $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ lineer bağımsız ise, o halde Wronskian

$$W\{\varphi,\psi\} = \begin{vmatrix} \varphi_1(x,\lambda) & \varphi_2(x,\lambda) \\ \psi_1(x,\lambda) & \psi_2(x,\lambda) \end{vmatrix} \neq 0 .$$

Tersine, eğer belli bir λ değeri için, Wronskian $W\{\varphi,\psi\} = 0$ ise, $\varphi(x,\lambda) = C\psi(x,\lambda)$ ve bu nedenle $\varphi(x,\lambda)$ vektör-değerli özfonksiyondur. Böylece, (3.1.2.1), (3.3.3), (3.3.4) sınır değer probleminin özdeğerleri, eğer Wronkskian λ'nın bir fonksiyonu olarak ele alınırsa $W\{\varphi,\psi\}$'nın sıfırları ile çakışır.

$W\{\varphi,\psi\}$, x'e bağlı değildir. Gerçekten,

$$\begin{aligned} &\varphi_2' - \{\lambda + p(x)\}\varphi_1 = 0, \qquad \psi_2' - \{\lambda + p(x)\}\psi_1 = 0, \\ &\varphi_1' + \{\lambda + r(x)\}\varphi_2 = 0, \qquad \psi_1' + \{\lambda + r(x)\}\psi_2 = 0 \end{aligned} \tag{3.3.6}$$

yazılabilir. Bu eşitlikler sırasıyla, ψ_1, $-\psi_2$, $-\varphi_1$ ve φ_2 ile çarpılarak ve daha sonra toplanarak

$$\left(\varphi_2'\psi_1-\varphi_1'\psi_2-\psi_2'\varphi_1+\psi_1'\varphi_2\right)\left(x,\lambda\right)=0$$

yani

$$\frac{d}{dx}\left(\varphi_1\psi_2-\varphi_2\psi_1\right)\left(x,\lambda\right)=\frac{d}{dx}W\left\{\varphi,\psi\right\}=0$$

bulunur. Buradan $W\left\{\varphi,\psi\right\}$'nin x'e bağlı olmadığı elde edilir. Böylece, $W\left\{\varphi,\psi\right\}$ sadece λ' ya bağlıdır ve $W\left\{\varphi,\psi\right\}\equiv w\left(\lambda\right)$.

$$G(x,y;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{w(\lambda)}\psi(x,\lambda)\varphi^T(y,\lambda), & y<x\\ \dfrac{1}{w(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\psi^T(y,\lambda), & x<y\end{cases} \tag{3.3.7}$$

olsun, $G(x,y;\lambda)$ ifadesine Green matrisi denir.

$$y(x,\lambda)=\int_a^b G(x,y;\lambda)f(y)dy \tag{3.3.8}$$

vektör-değerli fonksiyonu (3.3.1) sisteminin (3.3.3) ve (3.3.4) koşullarını sağlayan çözümüdür. Gerçekten, (3.3.7)'den

$$G(x,y;\lambda)=\begin{cases}\dfrac{1}{w\left(\lambda\right)}\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\psi_1(y,\lambda) & \varphi_1(x,\lambda)\psi_2(y,\lambda)\\ \varphi_2(x,\lambda)\psi_1(y,\lambda) & \varphi_2(x,\lambda)\psi_2(y,\lambda)\end{pmatrix}, & x<y,\\ \\ \dfrac{1}{w\left(\lambda\right)}\begin{pmatrix}\varphi_1(y,\lambda)\psi_1(x,\lambda) & \varphi_1(y,\lambda)\psi_2(x,\lambda)\\ \varphi_2(y,\lambda)\psi_1(x,\lambda) & \varphi_2(y,\lambda)\psi_2(x,\lambda)\end{pmatrix}, & y<x\end{cases}$$

yazılabilir. Buradan

$$G(x,y;\lambda)\,f(y)=\begin{cases}\dfrac{1}{w(\lambda)}\begin{pmatrix}\varphi_1(x,\lambda)\psi_1(y,\lambda)\,f_1(y)+\varphi_1(x,\lambda)\psi_2(y,\lambda)\,f_2(y)\\ \varphi_2(x,\lambda)\psi_1(y,\lambda)\,f_1(y)+\varphi_2(x,\lambda)\psi_2(y,\lambda)\,f_2(y)\end{pmatrix}, & x<y,\\[2ex] \dfrac{1}{w(\lambda)}\begin{pmatrix}\varphi_1(y,\lambda)\psi_1(x,\lambda)\,f_1(y)+\varphi_1(y,\lambda)\psi_2(x,\lambda)\,f_2(y)\\ \varphi_2(y,\lambda)\psi_1(x,\lambda)\,f_1(y)+\varphi_2(y,\lambda)\psi_2(x,\lambda)\,f_2(y)\end{pmatrix}, & y<x\end{cases}$$

bulunur. $\left[u^T v\right](y)=u_1(y)v_1(y)+u_2(y)v_2(y)$ olduğu kullanılarak, (3.3.8)'den

$$y_1(x,\lambda)=\frac{1}{w(\lambda)}\left\{\psi_1(x,\lambda)\int_a^x\left[\varphi^T f\right](y)\,dy+\varphi_1(x,\lambda)\int_x^b\left[\psi^T f\right](y)\,dy\right\},\qquad(3.3.9)$$

$$y_2(x,\lambda)=\frac{1}{w(\lambda)}\left\{\psi_2(x,\lambda)\int_a^x\left[\varphi^T f\right](y)\,dy+\varphi_2(x,\lambda)\int_x^b\left[\psi^T f\right](y)\,dy\right\}\qquad(3.3.10)$$

elde edilir. (3.3.9) ifadesi x'e göre diferansiyellenerek,

$$y_1'(x,\lambda)=\frac{1}{w(\lambda)}\left\{\psi_1'(x,\lambda)\int_a^x\left[\varphi^T f\right](y)\,dy+\varphi_1'(x,\lambda)\int_x^b\left[\psi^T f\right](y)\,dy-\right.$$

$$\left.-\varphi_1(x,\lambda)\left[\psi_1(x,\lambda)\,f_1(x)+\psi_2(x,\lambda)\,f_2(x)\right]+\psi_1(x,\lambda)\left[\varphi_1(x,\lambda)\,f_1(x)+\varphi_2(x,\lambda)\,f_2(x)\right]\right\}$$

bulunur. (3.3.6) sisteminden $\varphi_1'(x,\lambda)$ ve $\psi_1'(x,\lambda)$ ifadeleri son eşitlikte yazılarak

$$y_1(x,\lambda)=-\frac{\lambda+r(x)}{w(\lambda)}\left\{\psi_2(x,\lambda)\int_a^x\left[\varphi^T f\right](y)\,dy+\varphi_2(x,\lambda)\int_x^b\left[\psi^T f\right](y)\,dy\right\}-$$

$$-\frac{1}{w(\lambda)}\left\{\varphi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)-\varphi_2(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda)\right\}f_2(x)\qquad(3.3.11)$$

elde edilir. (3.3.10) eşitliğinden ve

$$\varphi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda)-\varphi_2(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda)=W\left\{\varphi,\psi\right\}=w(\lambda)$$

olduğundan, (3.3.11)

$$y_1'(x,\lambda) = -\{\lambda + r(x)\} y_2(x,\lambda) - f_2(x)$$

biçiminde yazılabilir. Bu eşitlik (3.3.1) sisteminin $y_1' + \{\lambda + r(x)\} y_2 = -f_2(x)$ ifadesi ile çakışır. Benzer şekilde $y_2' - \{\lambda + p(x)\} y_1 = f_1(x)$ için de elde edilir. Böylece, (3.3.8) vektör-değerli fonksiyonu (3.3.1) sisteminin çözümüdür. Aynı zamanda, (3.3.8) fonksiyonu (3.3.2) ve (3.3.3) sınır koşullarını da sağlar.

Böylece aşağıdaki teorem ispatlanır:

Teorem 3.3.1 ([44]) Eğer λ (3.1.2.1), (3.3.2), (3.3.3) homojen sınır değer probleminin özdeğeri değil ise, (3.2.1)-(3.2.3) homojen olmayan sistemi, herhangi vektör-değerli $f(x)$ fonksiyonu için çözülebilirdir ve çözüm (3.2.8) formülüyle verilir. Tersine, eğer λ (3.1.2.1), (3.2.2), (3.2.3) homojen sınır değer probleminin özdeğeri ise, (3.2.1)-(3.2.3) homojen olmayan sistemi çözülemeyendir.

Teorem 3.3.2 ([44]) Eğer $f(x)$ fonksiyonu sürekli türevli ve (3.2.2), (3.2.3) sınır koşullarını sağlıyor ise, $f(x)$ (3.1.2.1), (3.3.2), (3.3.3) sınır değer probleminin vektör-değerli özfonksiyonlarının mutlak ve düzgün yakınsak Fourier serisi biçiminde ayrışıma sahiptir:

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n v_n(x), \qquad \text{burada} \quad a_n = \int_a^b f^T(x) v_n(x)\,dx.$$

Teorem 3.3.3 ([44]) $[a,b]$ aralığında karesi integrallenebilir herhangi vektör-değerli $f(x)$ fonksiyonu için

$$\int_a^b f^2(x)\,dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty} a_n^2, \qquad f^2(x) = f_1^2(x) + f_2^2(x)$$

Parseval eşitliği sağlanır.

3.4 SÜREKSİZ KATSAYILI DIRAC DENKLEMLER SİSTEMİNİN ÇÖZÜMÜNÜN GÖSTERİMİ

$$By' + \Omega(x)y = \lambda\rho(x)y, \qquad 0 \le x \le \pi , \tag{3.4.1}$$

Dirac denklemler sistemi ele alınsın, burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \ \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \ y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}, \ \rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le a, \\ \alpha, & a < x \le \pi, \end{cases}$$

$1 \neq \alpha > 0$, $p(x)$ ve $q(x)$ kompleks değerli fonksiyonlar ve $\|\Omega(x)\|$ Öklid normu

$$\int_0^\pi \|\Omega(x)\| dx < +\infty$$

koşulunu sağlasın. $\Omega(x) \equiv 0$ olduğunda (3.4.1) denkleminin $E(0,\lambda) = I$ (I birim matris) koşulunu sağlayan çözümü

$$E_0(x,\lambda) = e^{-\lambda B \mu(x)}$$

biçimindedir, burada

$$\mu(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le a, \\ \alpha x - \alpha a + a, & a < x \le \pi. \end{cases}$$

Teorem 3.4.1 ([45])

$$\int_0^\pi \|\Omega(x)\| dx < +\infty$$

olsun. O halde, (3.4.1) denkleminin $E(0,\lambda) = I$ başlangıç koşulunu sağlayan matris çözümü

$$E(x,\lambda) = e^{-\lambda B\mu(x)} + \int_{-\mu(x)}^{\mu(x)} K(x,t)e^{-\lambda Bt}dt$$

biçimindedir. $K(x,t)$ çekirdeği

$$\int_{-\mu(x)}^{\mu(x)} \|K(x,t)\|dt \le e^{\sigma(x)} - 1, \qquad \sigma(x) = \int_0^x \|\Omega(s)\| ds$$

sağlar. Eğer $\Omega(x)$ diferansiyellenebilir ise, $K(x,t)$ çekirdeği için

$$BK_x + \Omega(x)K + \rho(x)K_t B = 0,$$

$$\rho(x)\left[K(x,\mu(x))B - BK(x,\mu(x))\right] = \Omega(x),$$

$$BK(x,-\mu(x)) = 0$$

bağıntıları sağlanır.

3.5 TEMEL TANIMLAR ve TEOREMLER

Tanım 3.5.1 ([46])

a) Bir f karmaşık fonksiyonu bir z_0 noktasının belli bir $D(z_0,\delta)$ komşuluğundaki tüm noktalarda diferansiyellenebiliyorsa f, z_0 da analitiktir denir.

b) Eğer bir f karmaşık fonksiyonu bir S kümesinin bütün noktalarında analitik ise f, S üzerinde analitiktir denir.

c) Bir f fonksiyonu $\mathbb{C}$ 'nin tüm noktalarında analitik ise f 'ye tam fonksiyon denir.

Teorem 3.5.2 ([47]) Kompleks değişkenli $f(z)$ fonksiyonu G bölgesinde analitik olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler denktir:

i. $f(z)$ fonksiyonu G bölgesindeki her z_0 noktasının komşuluğunda

$$f(z)=a_0+a_1(z-z_0)+...+a_n(z-z_0)^n+...$$

biçiminde gösterilebilir,

ii. $f(z)$ fonksiyonu G nin her z_0 noktasında diferansiyellenebilirdir.

Tanım 3.5.3 ([47]) İki tam fonksiyonun oranı biçiminde ifade edilebilen fonksiyona meramorf fonksiyon denir.

Tanım 3.5.4 ([47]) $f(z)$ tek değerli fonksiyonu z_0 noktasının delinmiş komşuluğunda analitik olsun. Bu durumda z_0 noktasına ayrık tekil nokta denir. Bu noktada fonksiyon tanımlı olmayabilir yada tek değerli ve analitik değildir.

Tanım 3.5.5 ([47]) z_0, $f(z)$ fonksiyonun ayrık tekil noktası olsun. Eğer $z \to z_0$ iken $f(z) \to \infty$ ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun kutup noktası denir.

Tanım 3.5.6 ([47]) Eğer z_0 noktası $\dfrac{1}{f(z)}$ fonksiyonunun $k.$ mertebeden sıfırı ise z_0 noktasına $f(z)$ fonksiyonunun $k.$ mertebeden kutup noktası denir. Eğer $k=1$ ise z_0 noktasına $f(z)$ nin basit kutup noktası denir.

Teorem 3.5.7 (Rezidü Teoremi [47]) L kapalı Jordan eğrisi verilsin. Eğer $f(z)$ fonksiyonu z_1, $z_2,\ldots,$ $z_n \in I(L)$ ayrık tekil noktaları dışında $\overline{I(L)}$ üzerinde analitik ise

$$\int_L f(z)dz = 2\pi i\sum_{k=1}^{n}\operatorname*{Res}_{z=z_k} f(z).$$

Teorem 3.5.8 (Rouche Teoremi [47]) L kapalı Jordan eğrisi verilsin. Kabul edelim ki $f(z)$ ve $g(z)$ fonksiyonları $\overline{I(L)}$ üzerinde analitik ve L nin her noktasında

$$|f(z)|>|g(z)|$$

olsun. O halde, L içinde $f(z)$ ve $f(z)+g(z)$ fonksiyonlarının sıfırlarının sayısı aynıdır.

Teorem 3.5.9 (Cauchy İntegral Formülü [47]) Eğer $f(z)$, G bölgesinde analitik ve G bölgesi L kapalı Jordan eğrisini ve bu eğrinin içini ($I(L)$) içeriyorsa,

$$f(z)=\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta, \qquad z\in I(L),$$

burada sağ kısımdaki integrale Cauchy integrali denir. Diğer taraftan,

$$\frac{1}{2\pi i}\int_L \frac{f(\zeta)}{\zeta - z}d\zeta = 0, \qquad z\in E(L),$$

burada $E(L)$, L eğrisinin dışıdır.

Lemma 3.5.10 ([48], Lemma 1.3.1) Eğer $f(x) \in L_1(0,\pi)$ ise, o halde

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda\pi|} \int_0^\pi f(x)\cos\lambda x dx = \lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda\pi|} \int_0^\pi f(x)\sin\lambda x dx = 0.$$

(3.4.1) denklemler sisteminin $S(t,\lambda)$ ve $\psi(t,\lambda)$ özel çözümleri için Lemma 3.5.10' a benzer şekilde aşağıdaki lemma sağlanır:

Lemma 3.5.11 ([49]) Her $f(x) \in L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)$ vektör fonksiyonu için

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \max_{0\le x\le\pi} e^{-|\operatorname{Im}\lambda|\mu(x)} \left| \int_0^x \tilde{S}(t,\lambda) f(t)\rho(t)dt \right| =$$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \max_{0\le x\le\pi} e^{-|\operatorname{Im}\lambda|(\mu(\pi)-\mu(x))} \left| \int_x^\pi \tilde{\psi}(t,\lambda) f(t)\rho(t)dt \right| = 0$$

sağlanır, burada $\tilde{S}(t,\lambda)$ fonksiyonu $S(t,\lambda)$ fonksiyonunun transpozudur.

Tanım 3.5.12 ([50]) W_2^N uzayı, aşağıdaki koşulları sağlayan $f(x)$, $x \in [0,\pi]$ fonksiyonlarının Sobolev uzayıdır:

i. $f^{(j)}(x)$, $j = \overline{0, N-1}$ mutlak sürekli fonksiyonlar,

ii. $f^{(N)}(x) \in L_2(0,\pi)$.

Lemma 3.5.13 ([50], Lemma 1.5.4) $\{\rho_n, \alpha_n\}_{n\ge 0}$ sayıları aşağıdaki biçimde verilsin:

$$\rho_n = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \qquad \alpha_n = \frac{\pi}{2} + \frac{\kappa_{n1}}{n}, \quad \{\kappa_n\}, \{\kappa_{n1}\} \in l_2, \alpha_n \ne 0 .$$

$$a(x) := \sum_{n=0}^{\infty} \left(\frac{\cos\rho_n x}{\alpha_n} - \frac{\cos nx}{\alpha_n^0} \right), \qquad \alpha_n^0 = \begin{cases} \dfrac{\pi}{2}, & n > 0, \\ \pi, & n < 0 \end{cases}$$

olarak tanımlansın. O halde $a(x) \in W_2^1(0,2\pi)$.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1 BİR SINIF SÜREKSİZ KATSAYILI DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEMİN ÇÖZÜMÜ

4.1.1 Probleme Giriş

Sonlu aralıkta, Dirac denklemler sistemi

$$By' + \Omega(x)y = \lambda\rho(x)y, \qquad 0 < x < \pi \tag{4.1.1.1}$$

ve

$$y_1(0) = y_1(\pi) = 0 \tag{4.1.1.2}$$

sınır koşulları ile oluşan sınır değer problemi ele alınır, burada

$$B = \begin{pmatrix} 0 & 1 \\ -1 & 0 \end{pmatrix}, \quad \Omega(x) = \begin{pmatrix} p(x) & q(x) \\ q(x) & -p(x) \end{pmatrix}, \quad y(x) = \begin{pmatrix} y_1(x) \\ y_2(x) \end{pmatrix}$$

$p(x) \in L_2(0,\pi)$ ve $q(x) \in L_2(0,\pi)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar, λ spektral parametre, $1 \neq \alpha > 0$ olmak üzere

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x \le a, \\ \alpha, & a < x \le \pi. \end{cases}$$

$\varphi(x,\lambda)$, (4.1.1.1) sisteminin

$$\varphi_1(0,\lambda) = 0, \qquad \varphi_2(0,\lambda) = -1 \tag{4.1.1.3}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. $\varphi(x,\lambda)$ çözümü aşağıdaki integral gösterime [10, 49] sahiptir:

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^{\mu(x)} A(x,t)\begin{pmatrix}\sin\lambda t\\ -\cos\lambda t\end{pmatrix}dt, \qquad (4.1.1.4)$$

burada

$$\varphi_0(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\lambda\mu(x)\\ -\cos\lambda\mu(x)\end{pmatrix}, \qquad \mu(x)=\begin{cases}x, & 0\le x\le a,\\ \alpha x-\alpha a+a, & a<x\le\pi,\end{cases}$$

sabitlenmiş her $x\in[0,\pi]$ için $A_{ij}(x,.)\in L_2(0,\pi)$, $i,j=1,2$ ve $A(x,t)$,

$$BA_x(x,t)+\rho(x)A_t(x,t)B=-\Omega(x)A(x,t),$$

$$\Omega(x)=\rho(x)\left[A(x,\mu(x))B-BA(x,\mu(x))\right], \qquad (4.1.1.5)$$

$$A_{11}(x,0)=A_{21}(x,0)=0$$

probleminin çözümüdür. (4.1.1.5) eşitliği, (4.1.1.4) integral gösteriminin $A(x,t)$ çekirdeği ile (4.1.1.1) denkleminin $\Omega(x)$ potansiyel fonksiyonu arasındaki ilişkiyi verir.

$\psi(x,\lambda)$, (4.1.1.1) denklemler sisteminin aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun:

$$\psi_1(\pi,\lambda)=0, \qquad \psi_2(\pi,\lambda)=-1.$$

(4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu

$$\Delta(\lambda):=W[\varphi(x,\lambda),\psi(x,\lambda)]=\varphi_2(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda) \qquad (4.1.1.6)$$

biçiminde tanımlansın, burada $W\left[\varphi(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\right]$, $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümlerinin Wronskianıdır ve $x\in\left[0,\pi\right]$'e bağlı değildir. O halde, (4.1.1.6) ifadesinde sırasıyla $x=0$ ve $x=\pi$ yazılarak,

$$\Delta(\lambda)=-\psi_1(0,\lambda)=\varphi_1(\pi,\lambda) \tag{4.1.1.7}$$

elde edilir. (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri ile karakteristik fonksiyonun λ_n sıfırları çakışır. $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ özfonksiyonlardır ve öyle bir β_n dizisi vardır ki

$$\psi(x,\lambda_n)=\beta_n\varphi(x,\lambda_n), \quad \beta_n\neq 0, \tag{4.1.1.8}$$

sağlanır.

(4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n:=\int_0^\pi\left(\left|\varphi_1(x,\lambda_n)\right|^2+\left|\varphi_2(x,\lambda_n)\right|^2\right)\rho(x)\,dx \tag{4.1.1.9}$$

biçiminde tanımlansın.

Lemma 4.1.1.1 Aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$\dot{\Delta}(\lambda_n)=\alpha_n\beta_n, \qquad \dot{\Delta}(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda). \tag{4.1.1.10}$$

İspat. $\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin çözümleri olduğundan

$$\psi_2'(x,\lambda)+p(x)\psi_1(x,\lambda)+q(x)\psi_2(x,\lambda)=\lambda\rho(x)\psi_1(x,\lambda),$$

$$-\psi_1'(x,\lambda)+q(x)\psi_1(x,\lambda)-p(x)\psi_2(x,\lambda)=\lambda\rho(x)\psi_2(x,\lambda),$$

$$\varphi_2'(x,\lambda_n)+p(x)\varphi_1(x,\lambda_n)+q(x)\varphi_2(x,\lambda_n)=\lambda_n\rho(x)\varphi_1(x,\lambda_n),$$

$$-\varphi_1'(x,\lambda_n)+q(x)\varphi_1(x,\lambda_n)-p(x)\varphi_2(x,\lambda_n)=\lambda_n\rho(x)\varphi_2(x,\lambda_n)$$

sağlanır. Bu eşitlikler sırasıyla $\varphi_1'(x,\lambda_n)$, $\varphi_2'(x,\lambda_n)$, $-\psi_1'(x,\lambda)$ ve $-\psi_2'(x,\lambda)$ ile çarpılarak ve daha sonra toplanarak,

$$\frac{d}{dx}\left\{\varphi_1(x,\lambda_n)\psi_2(x,\lambda)-\psi_1(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n)\right\}=$$

$$=(\lambda-\lambda_n)\rho(x)\left\{\varphi_1(x,\lambda_n)\psi_1(x,\lambda)+\psi_2(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n)\right\}$$

bulunur. Son eşitlik 0'dan π'ye integrallenerek ve (4.1.1.2) sınır koşulları kullanılarak,

$$\int_0^\pi\left\{\varphi_1(x,\lambda_n)\psi_1(x,\lambda)+\psi_2(x,\lambda)\varphi_2(x,\lambda_n)\right\}\rho(x)dx=$$

$$=-\varphi_1(\pi,\lambda_n)-\psi_1(0,\lambda_n)=\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\lambda_n)}{\lambda-\lambda_n}$$

elde edilir. Lemma 4.1.1.1'den $\psi(x,\lambda_n)=\beta_n\varphi(x,\lambda_n)$ olduğundan, son eşitlikte bu ifade kullanılarak

$$\beta_n\int_0^\pi\left\{\varphi_1^2(x,\lambda_n)+\varphi_2^2(x,\lambda_n)\right\}\rho(x)\,dx=\frac{\Delta(\lambda)-\Delta(\lambda_n)}{\lambda-\lambda_n}$$

bulunur. Burada $\lambda\to\lambda_n$ iken limite geçilerek, $\beta_n\alpha_n=\dot{\Delta}(\lambda_n)$ elde edilir. Lemma ispatlandı. □

Teorem 4.1.1.2 ([49])

(i) (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer problemi sayılabilir sayıda basit λ_n, $(n\in\mathbb{Z})$ özdeğerlerine sahiptir, burada

$$\lambda_n = \frac{n\pi}{\alpha\pi - \alpha a + a} + \varepsilon_n, \qquad \{\varepsilon_n\} \in l_2 \tag{4.1.1.11}$$

(ii) (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin özvektör-fonksiyonları aşağıdaki biçimdedir:

$$\varphi(x,\lambda_n) = \begin{pmatrix} \sin \dfrac{n\pi\mu(x)}{\alpha\pi - \alpha a + a} \\ -\cos \dfrac{n\pi\mu(x)}{\alpha\pi - \alpha a + a} \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \xi_n^{(1)}(x) \\ \xi_n^{(2)}(x) \end{pmatrix},$$

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty} \left\{ \left|\xi_n^{(1)}(x)\right|^2 + \left|\xi_n^{(2)}(x)\right|^2 \right\} \le C; \qquad \mu(x) = \begin{cases} x, & 0 \le x \le a, \\ \alpha x - \alpha a + a, & a < x \le \pi. \end{cases}$$

(iii) (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n = \alpha\pi - \alpha a + a + \delta_n, \qquad \{\delta_n\} \in l_2. \tag{4.1.1.12}$$

Aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$\left|\Delta(\lambda)\right| \ge C_\delta e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu(\pi)}, \tag{4.1.1.13}$$

burada C_δ pozitif sayıdır ve (4.1.1.13) eşitsizliği

$$G_\delta = \left\{ \lambda : \left|\lambda - \lambda_n^0\right| \ge \delta, \quad n = 0, \pm 1, \pm 2, \ldots \right\}$$

bölgesinde geçerlidir, burada $\lambda_n^0 = \dfrac{n\pi}{\mu(\pi)}$, $(n \in \mathbb{Z})$, $\Delta_0(\lambda) = \sin \lambda\mu(\pi)$ fonksiyonunun sıfırlarıdır ve δ yeterince küçük sayıdır.

Teorem 4.1.1.3 ([49])

(i) (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$, $(n \in \mathbb{Z})$ özvektör-fonksiyonlarının sistemi $L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)$ uzayında tamdır.

(ii) $f(x)=\left(f_1(x), f_2(x)\right)^T$, $\left[0,\pi\right]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olsun ve $f_1(0)=f_1(\pi)=0$ olsun. O halde,

$$f\left(x\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\varphi\left(x,\lambda_n\right), \qquad c_n=\frac{1}{\alpha_n}\left\langle f(x),\varphi\left(x,\lambda_n\right)\right\rangle. \tag{4.1.1.14}$$

Ayrıca, (4.1.1.14) serisi $x\in\left[0,\pi\right]$'e göre düzgün yakınsaktır.

(iii) $f(x)\in L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)$ için, (4.1.1.14) serisi $L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)$ uzayında yakınsaktır ve Parseval eşitliği sağlanır:

$$\|f\|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\left|c_n\right|^2. \tag{4.1.1.15}$$

4.1.2 Temel Denklem

(4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminde $\Omega(x)\equiv 0$ olduğunda elde edilen sınır değer probleminin sırasıyla özdeğerleri ve normlaştırıcı sayıları λ_n^0 ve α_n^0 olsun. Aşağıdaki fonksiyonları ele alalım:

$$F_0\left(x,t\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n x\\ -\cos\lambda_n x\end{pmatrix}\varphi_0^T(t,\lambda_n)-\frac{1}{\alpha_n^0}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n^0 x\\ -\cos\lambda_n^0 x\end{pmatrix}\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)\right], \tag{4.1.2.1}$$

$$F(x,t)=F_0\left(\mu\left(x\right),t\right). \tag{4.1.2.2}$$

(4.1.2.1) ve (4.1.2.2) kullanılarak

$$F\left(x,t\right)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0\left(x,\lambda_n\right)\varphi_0^T\left(t,\lambda_n\right)-\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0\left(x,\lambda_n^0\right)\varphi_0^T\left(t,\lambda_n^0\right)\right] \tag{4.1.2.3}$$

bulunur.

$$a(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\begin{pmatrix}\cos\lambda_n x & -\sin\lambda_n x\\ \sin\lambda_n x & \cos\lambda_n x\end{pmatrix}-\frac{1}{\alpha_n^0}\begin{pmatrix}\cos\lambda_n^0 x & -\sin\lambda_n^0 x\\ \sin\lambda_n^0 x & \cos\lambda_n^0 x\end{pmatrix}\right]$$

olmak üzere $F_0(x,t)$ fonksiyonu

$$F_0(x,t)=\frac{1}{2}\left[a\left(x-\mu(t)\right)+a\left(x+\mu(t)\right)T\right]$$

biçiminde yazılabilir, burada $T=\begin{pmatrix}-1 & 0\\ 0 & 1\end{pmatrix}$. [50], Lemma 1.5.4’e benzer şekilde $a(x)\in W_2^1[0,2\pi]$.

Teorem 4.1.2.1 Sabitlenmiş $x\in(0,\pi]$ için (4.1.1.4) integral gösteriminin $A(x,t)$ çekirdeği aşağıdaki denklemi sağlar:

$$A\left(x,\mu(t)\right)+F(x,t)+\int_0^{\mu(x)}A(x,\xi)F_0(\xi,t)\,d\xi=0,\qquad 0<t<x. \qquad (4.1.2.4)$$

İspat. (4.1.1.4) integral gösteriminden

$$\varphi_0(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)-\int_0^{\mu(x)}A(x,t)\begin{pmatrix}\sin\lambda t\\ -\cos\lambda t\end{pmatrix}dt \qquad (4.1.2.5)$$

yazılabilir. (4.1.1.4) ifadesinden

$$\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\left\{\varphi_0(x,\lambda_n)+\int_0^{\mu(x)}A(x,\xi)\begin{pmatrix}\sin\lambda_n\xi\\ -\cos\lambda_n\xi\end{pmatrix}d\xi\right\}\varphi_0^T(t,\lambda_n)$$

$$=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)+\int_0^{\mu(x)}A(x,\xi)\left(\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n\xi\\ -\cos\lambda_n\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T(t,\lambda_n)\right)d\xi$$

bulunur. Benzer şekilde, (4.1.2.5)’den,

$$\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)=$$

$$=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\left\{\varphi^T(t,\lambda_n)-\int_0^{\mu(t)}(\sin\lambda_n\xi,-\cos\lambda_n\xi)A^T(t,\xi)d\xi\right\}$$

$$=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n)-\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\int_0^{\mu(t)}(\sin\lambda_n\xi,-\cos\lambda_n\xi)A^T(t,\xi)d\xi$$

elde edilir. Son iki eşitlik kullanılarak

$$\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)+$$

$$+\int_0^{\mu(x)}A(x,\xi)\left(\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n\xi\\-\cos\lambda_n\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T(t,\lambda_n)\right)d\xi+$$

$$+\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\left(\int_0^{\mu(t)}(\sin\lambda_n\xi,-\cos\lambda_n\xi)A^T(t,\xi)d\xi\right)$$

bulunur. Bu eşitliğin her iki tarafından $\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0\left(x,\lambda_n^0\right)\varphi_0^T\left(t,\lambda_n^0\right)$ ifadesi çıkarılarak ve eşitliğin sağ tarafına $\int_0^{\mu(x)}A(x,\xi)\left(\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n^0}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n^0\xi\\-\cos\lambda_n^0\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T\left(t,\lambda_n^0\right)\right)d\xi$ ifadesi eklenip çıkarılarak:

$$\sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n)-\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0\left(x,\lambda_n^0\right)\varphi_0^T\left(t,\lambda_n^0\right)\right]=$$

$$=\sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)-\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0\left(x,\lambda_n^0\right)\varphi_0^T\left(t,\lambda_n^0\right)\right]+$$

$$+\int_0^{\mu(x)} A(x,\xi)\sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{\alpha_n^0}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n^0\xi\\ -\cos\lambda_n^0\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T\left(t,\lambda_n^0\right)\right]d\xi+$$

$$+\int_0^{\mu(x)} A(x,\xi)\sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{\alpha_n}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n\xi\\ -\cos\lambda_n\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T\left(t,\lambda_n\right)-\frac{1}{\alpha_n^0}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n^0\xi\\ -\cos\lambda_n^0\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T\left(t,\lambda_n^0\right)\right]d\xi$$

$$+\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\left(\int_0^{\mu(t)}\left(\sin\lambda_n\xi,-\cos\lambda_n\xi\right)A^T(t,\xi)\,d\xi\right)$$

veya

$$\Phi_N(x,t)=I_{N1}(x,t)+I_{N2}(x,t)+I_{N3}(x,t)+I_{N4}(x,t) \qquad (4.1.2.6)$$

elde edilir, burada

$$\Phi_N(x,t)=\sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(t,\lambda_n)-\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi\left(x,\lambda_n^0\right)\varphi^T\left(t,\lambda_n^0\right)\right],$$

$$I_{N1}(x,t)=\sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)-\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0\left(x,\lambda_n^0\right)\varphi_0^T\left(t,\lambda_n^0\right)\right],$$

$$I_{N2}(x,t)=\int_0^{\mu(x)} A(x,\xi)\sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{\alpha_n^0}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n^0\xi\\ -\cos\lambda_n^0\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T\left(t,\lambda_n^0\right)\right]d\xi\,,$$

$$I_{N3}(x,t)=\int_0^{\mu(x)} A(x,\xi)\sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{\alpha_n}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n\xi\\ -\cos\lambda_n\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T\left(t,\lambda_n\right)-\frac{1}{\alpha_n^0}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n^0\xi\\ -\cos\lambda_n^0\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T\left(t,\lambda_n^0\right)\right]d\xi\,,$$

$$I_{N4}(x,t)=\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\left(\int_0^{\mu(t)}\left(\sin\lambda_n\xi,-\cos\lambda_n\xi\right)A^T(t,\xi)\,d\xi\right).$$

$f(x)$, $[0,\pi]$ aralığında mutlak sürekli fonksiyon olsun. (4.1.1.14) ayrışım formülünden, $x\in[0,\pi]$'e göre düzgün olarak,

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \Phi_N(x,t)\, f(t)\,\rho(t)\,dt = \lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\varphi^T(x,\lambda_n)\, f(t)\,\rho(t)\,dt -$$

$$-\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi \sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0^T(x,\lambda_n^0)\, f(t)\,\rho(t)\,dt$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\varphi(x,\lambda_n) - \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n^0\varphi(x,\lambda_n^0) = f(x) - f(x) = 0 \qquad (4.1.2.7)$$

elde edilir.

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^\pi I_{N1}(x,t)\, f(t)\,\rho(t)\,dt =$$

$$=\int_0^\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n) - \frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)\right] f(t)\,\rho(t)\,dt$$

$$=\int_0^\pi F(x,t)\, f(t)\,\rho(t)\,dt \qquad (4.1.2.8)$$

bulunur. (4.1.1.4) integral gösteriminden,

$$\begin{pmatrix}\sin\lambda\xi \\ -\cos\lambda\xi\end{pmatrix} = \begin{cases}\varphi_0(\xi,\lambda), & \xi < a, \\ \varphi_0\left(\dfrac{\xi}{\alpha} + a - \dfrac{a}{\alpha},\lambda\right), & \xi > a\end{cases} \qquad (4.1.2.9)$$

yazılabilir. (4.1.2.9) ifadesi ve (4.1.1.14) ayrışım formülü kullanılarak,

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi I_{N2}(x,t)\, f(t)\,\rho(t)\,dt =$$

$$=\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi\left[\int_0^{\mu(x)} A(x,\xi)\sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{\alpha_n^0}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n^0\xi \\ -\cos\lambda_n^0\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)\right]d\xi\right] f(t)\,\rho(t)\,dt$$

$$=\int_0^\pi\left[\int_0^a A(x,\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0\left(\xi,\lambda_n^0\right)\varphi_0^T\left(x,\lambda_n^0\right)d\xi\right]f(t)\rho(t)\,dt+$$

$$=\int_0^\pi\left[\int_a^{\alpha x-\alpha a+a} A(x,\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha},\lambda_n^0\right)\varphi_0^T\left(x,\lambda_n^0\right)d\xi\right]f(t)\rho(t)\,dt$$

$$=\int_0^a A(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi+\int_a^{\alpha x-\alpha a+a}A(x,\xi)\,f\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha}\right)d\xi$$

elde edilir. Son eşitlikte, $\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha}=\xi^{'}$ dönüşümü yapılarak

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi I_{N2}(x,t)\,f(t)\rho(t)dt=\int_0^a A(x,\xi)\,f(\xi)\,d\xi+\alpha\int_a^x A\left(x,\alpha\xi^{'}-\alpha a+a\right)f\left(\xi^{'}\right)d\xi^{'}$$

bulunur. Burada ξ ve $\xi^{'}$ değişkenleri t değişkeni ile değiştirilerek

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi I_{N2}(x,t)\,f(t)\rho(t)dt=\int_0^a A(x,t)\,f(t)\,dt+\alpha\int_a^x A(x,\alpha t-\alpha a+a)\,f(t)\,dt$$

$$=\int_0^x A\left(x,\mu(t)\right)f(t)\rho(t)\,dt \tag{4.1.2.10}$$

sonucuna varılır.

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi I_{N3}(x,t)\,f(t)\rho(t)dt=$$

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^\pi\int_0^{\mu(x)} A(x,\xi)\sum_{n=-N}^{N}\left[\frac{1}{\alpha_n}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n\xi\\-\cos\lambda_n\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T(t,\lambda_n)-\frac{1}{\alpha_n^0}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n^0\xi\\-\cos\lambda_n^0\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T\left(t,\lambda_n^0\right)\right]f(t)\rho(t)\,d\xi\,dt$$

$$=\int_0^\pi\left[\int_0^{\mu(x)}A(x,\xi)\,F_0(\xi,t)\,d\xi\right]f(t)\rho(t)\,dt \tag{4.1.2.11}$$

elde edilir.

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi} I_{N4}(x,t)\, f(t)\rho(t)dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\left\{\sum_{n=-N}^{N}\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n)\left(\int_0^{\mu(t)}(\sin\lambda_n\xi, -\cos\lambda_n\xi)\, A^T(t,\xi)\, d\xi\right)\right\} f(t)\rho(t)dt \qquad (4.1.2.12)$$

biçimindedir. $\psi(x,\lambda_n) = \beta_n\varphi(x,\lambda_n)$ ve $\dot{\Delta}(\lambda_n) = \alpha_n\beta_n$ olduğundan $\frac{1}{\alpha_n}\varphi(x,\lambda_n) = \frac{\psi(x,\lambda_n)}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}$ yazılabilir. Bu ifade (4.1.2.12)'de yerine yazılarak ve rezidü teoremi kullanılarak

$$\lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi} I_{N4}(x,t)\, f(t)\rho(t)dt =$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\left\{\sum_{n=-N}^{N}\frac{\psi(x,\lambda_n)}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\int_0^{\mu(t)}(\sin\lambda_n\xi, -\cos\lambda_n\xi)\, A^T(t,\xi)\, d\xi\right\} f(t)\rho(t)dt$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\left\{\sum_{n=-N}^{N}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int_0^{\mu(t)}(\sin\lambda\xi, -\cos\lambda\xi)\, A^T(t,\xi)\, d\xi\right\} f(t)\rho(t)dt$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\int_0^{\mu(t)}(\sin\lambda\xi, -\cos\lambda\xi)\, A^T(t,\xi)\, d\xi d\lambda\right\} f(t)\rho(t)dt$$

$$= \lim_{N\to\infty}\int_0^{\pi}\left\{\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu(t)}\times\right.$$

$$\left.\times e^{-|\operatorname{Im}\lambda|\mu(t)}\int_0^{\mu(t)}(\sin\lambda\xi, -\cos\lambda\xi)\, A^T(t,\xi)\, d\xi d\lambda\right\} f(t)\rho(t)dt \qquad (4.1.2.13)$$

bulunur, burada $\Gamma_N = \left\{ \lambda : |\lambda| = \frac{N\pi}{\mu(\pi)} + \frac{\pi}{2\mu(\pi)} \right\}$, N yeterince büyük sayıdır. $|\lambda| \to \infty$ iken $\psi(x,\lambda)$ çözümü için $x \in [0,\pi]$'e göre düzgün olarak aşağıdaki asimptotik formüller vardır:

$$\psi_1(x,\lambda) = -\sin\lambda\left(\mu(\pi)-\mu(x)\right) + O\left(\frac{1}{|\lambda|} e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|(\mu(\pi)-\mu(x))}\right),$$

$$\psi_2(x,\lambda) = -\cos\lambda\left(\mu(\pi)-\mu(x)\right) + O\left(\frac{1}{|\lambda|} e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|(\mu(\pi)-\mu(x))}\right),$$

[48], Lemma 1.3.1 ve [49]'a göre aşağıdaki bağıntılar vardır:

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \max_{0\le t\le\pi} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu(t)} \left| \int_0^{\mu(t)} A_{i1}(t,\xi)\sin\lambda\xi\, d\xi \right| = 0,$$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \max_{0\le t\le\pi} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu(t)} \left| \int_0^{\mu(t)} A_{i2}(t,\xi)\cos\lambda\xi\, d\xi \right| = 0, \quad i = 1,2.$$

Bu bağıntılar ve (4.1.1.13) eşitsizliği, (4.1.2.13)'de kullanılarak,

$$\lim_{N\to\infty} \int_0^{\pi} I_{N4}(x,t)\, f(t)\rho(t)dt = 0 \tag{4.2.2.14}$$

elde edilir. Böylece (4.1.2.6) eşitliğinde, (4.1.2.7), (4.1.2.8), (4.1.2.10), (4.1.2.11) ve (4.1.2.13) ifadeleri yerine yazılarak,

$$\int_0^x A(x,\mu(t))\, f(t)\rho(t)dt + \int_0^{\pi} F(x,t)\, f(t)\rho(t)dt + \int_0^{\pi} \left[\int_0^{\mu(x)} A(x,\xi) F_0(\xi,t)\, d\xi \right] f(t)\rho(t)dt = 0$$

bulunur. $f(x)$ keyfi fonksiyon olduğundan,

$$A\left(x,\mu(t)\right)+F\left(x,t\right)+\int_{0}^{\mu(x)} A\left(x,\xi\right)F_0\left(\xi,t\right)d\xi=0,\quad 0<t<x$$

elde edilir. Teorem ispatlandı. □

Tanım 4.1.2.2 (4.1.2.4) denklemine temel denklem ya da Gelfand-Levitan tipli denklem denir.

Lemma 4.1.2.3 Her sabitlenmiş $x\in(0,\pi]$ için (4.1.2.4) temel denklemi tek $A\left(x,.\right)\in L_2\left(0,\mu\left(x\right)\right)$ çözümüne sahiptir.

İspat. Sabitlenmiş $x>a$ için (4.1.2.4) denklemi $\left(I+B\right)f=h$ biçiminde denkleme denktir, burada B mutlak sürekli operatör ve I, $L_2(0,\pi)$ uzayında birim operatördür. $x>a$ için (4.1.2.4) temel denklemi

$$L_xA(x,.)+K_xA(x,.)=-F(x,.)$$

biçiminde yazılabilir, burada

$$\left(L_xf\right)(t)=\begin{cases} f(t), & t\le a<x,\\ f\left(\alpha t-\alpha a+a\right), & a<t\le x,\end{cases} \tag{4.1.2.15}$$

$$\left(K_xf\right)=\int_{0}^{\alpha x-\alpha a+a} f\left(\xi\right)F_0\left(\xi,t\right)d\xi,\quad 0<t<x.$$

Şimdi, L_x operatörünün $L_2\left(0,\pi\right)$ uzayında sınırlı tersi olduğu gösterilsin. $\left(L_xf\right)\left(t\right)=\phi\left(t\right)$, $\phi\left(t\right)\in L_2\left(0,\pi\right)$ ve $t>\pi$ için $\phi(t)=0$ olsun. Buradan ve (4.1.2.15)'den

$$f(t)=\left(L_x^{-1}\phi\right)\left(t\right)=\begin{cases}\phi(t), & t\le a,\\ \phi\left(\dfrac{t}{\alpha}+a-\dfrac{a}{\alpha}\right), & a<t.\end{cases}$$

Şimdi, $\|f\|_{L_2} = \left\|L_x^{-1}\phi\right\|_{L_2} \le C\|\phi\|_{L_2}$ olduğu gösterilmelidir:

$$\int_0^{\pi}\left(|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2\right)dt =$$

$$= \int_0^{a}\left(|\phi_1(t)|^2 + |\phi_2(t)|^2\right)dt + \int_a^{\pi}\left(\left|\phi_1\left(\frac{t}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha}\right)\right|^2 + \left|\phi_2\left(\frac{t}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha}\right)\right|^2\right)dt$$

$$= \int_0^{a}\left(|\phi_1(t)|^2 + |\phi_2(t)|^2\right)dt + \alpha\int_a^{\frac{\pi+\alpha a-a}{\alpha}}\left(|\phi_1(t)|^2 + |\phi_2(t)|^2\right)dt$$

elde edilir. Burada $t > \pi$ için $\phi(t) = 0$ olduğu kullanılarak

$$\int_0^{\pi}\left(|f_1(t)|^2 + |f_2(t)|^2\right)dt < \int_0^{a}\left(|\phi_1(t)|^2 + |\phi_2(t)|^2\right)dt + \alpha\int_a^{\pi}\left(|\phi_1(t)|^2 + |\phi_2(t)|^2\right)dt$$

$$< C\int_0^{\pi}\left(|\phi_1(t)|^2 + |\phi_2(t)|^2\right)dt$$

bulunur. Böylece, L_x operatörünün $L_2(0,\pi)$ uzayında sınırlı tersi olduğu sonucuna varılır. O halde, (4.1.2.4) temel denklemi

$$A(x,.) + L_x^{-1}K_x A(x,.) = -L_x^{-1}F(x,.)$$

biçiminde yazabilir ve $L_x^{-1}K_x$ operatörü $L_2(0,\pi)$ uzayında mutlak sürekli operatördür. O halde, lemmanın ispatlanması için

$$g\left(\mu(t)\right) + \int_0^{\mu(x)} g\left(\xi\right)F_0\left(\xi,t\right)d\xi = 0 \qquad (4.1.2.16)$$

denkleminin sadece $g(t)=0$ çözümünün olduğunu göstermek yeterlidir. Aksi varsayılsın: yani, $g(t)=\left(g_1(t),g_2(t)\right)\in L_2(0,x)$ (4.1.2.16) denkleminin sıfırdan farklı çözümü olsun ve $t\in(x,\pi)$ için $g(t)=0$ olsun. O halde, (4.1.2.1) ve (4.1.2.16)'dan

$$\int_0^x\left[g_1^2\left(\mu(t)\right)+g_2^2\left(\mu(t)\right)\right]\rho(t)dt+$$

$$+\int_0^x\int_0^{\mu(x)}g(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n\xi\\-\cos\lambda_n\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T(t,\lambda_n)-\frac{1}{\alpha_n^0}\begin{pmatrix}\sin\lambda_n^0\xi\\-\cos\lambda_n^0\xi\end{pmatrix}\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)\right]g^T\left(\mu(t)\right)\rho(t)d\xi dt=0.$$

Burada, (4.1.2.9) kullanılarak

$$\int_0^x\left[g_1^2\left(\mu(t)\right)+g_2^2\left(\mu(t)\right)\right]\rho(t)dt+$$

$$+\int_0^x\int_0^a g(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g^T\left(\mu(t)\right)\rho(t)d\xi dt-$$

$$-\int_0^x\int_0^a g(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)g^T\left(\mu(t)\right)\rho(t)d\xi dt+$$

$$+\int_0^x\int_0^{\alpha x-\alpha a+a}g(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha},\lambda_n\right)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g^T\left(\mu(t)\right)\rho(t)d\xi dt-$$

$$-\int_0^x\int_0^{\alpha x-\alpha a+a}g(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha},\lambda_n^0\right)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)g^T\left(\mu(t)\right)\rho(t)d\xi dt=0$$

elde edilir. Son iki integralde $\dfrac{\xi}{\alpha}+a-\dfrac{a}{\alpha}=\xi'$ değişken dönüşümü yapılarak ve sonra ξ' değişkeni ξ değişkeni ile değiştirilerek

$$\int_0^x\left[g_1^2\left(\mu(t)\right)+g_2^2\left(\mu(t)\right)\right]\rho(t)dt+$$

$$+\int_0^x\int_0^a g(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g^T\left(\mu(t)\right)\rho(t)d\xi dt-$$

$$-\int_0^x\int_0^a g(\xi)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)g^T\left(\mu(t)\right)\rho(t)d\xi dt+$$

$$+\alpha\int_0^x\int_a^x g\left(\alpha\xi-\alpha a+a\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0\left(\xi,\lambda_n\right)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g^T\left(\mu(t)\right)\rho(t)d\xi dt-$$

$$-\alpha\int_0^x\int_a^x g\left(\alpha\xi-\alpha a+a\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0\left(\xi,\lambda_n^0\right)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)g^T\left(\mu(t)\right)\rho(t)d\xi dt$$

$$=\int_0^x\left[g_1^2\left(\mu(t)\right)+g_2^2\left(\mu(t)\right)\right]\rho(t)dt+$$

$$+\int_0^x\int_0^x g\left(\mu(\xi)\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(\xi,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)g^T\left(\mu(t)\right)\rho(t)\rho\left(\xi\right)d\xi dt-$$

$$-\int_0^x\int_0^x g\left(\mu(\xi)\right)\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0(\xi,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)g^T\left(\mu(t)\right)\rho(t)\rho\left(\xi\right)d\xi dt=0 \qquad (4.1.2.17)$$

elde edilir. (4.1.2.17)'de

$$\left\|g\left(\mu(t)\right)\right\|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\left(\int_0^x g\left(\mu(t)\right)\varphi_0\left(t,\lambda_n^0\right)\rho(t)dt\right)^2$$

Parseval eşitliği kullanılarak,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^x g\left(\mu(t)\right)\varphi_0\left(t,\lambda_n\right)\rho(t)dt\right)^2=0$$

bulunur. $\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ sistemi $L_{2,\rho}(0,\pi;\mathbb{C}^2)$ uzayında tam olduğundan, $g(\mu(t))=0$, yani $(L_x g)(t)=0$ elde edilir. Böylece, L_x operatörünün $L_2(0,\pi)$ uzayında sınırlı tersi olduğundan, $A(x,.)=0$ bulunur. Lemma ispatlandı. □

4.1.3 Spektral Verilere Göre Ters Problem İçin Teklik Teoremi

Tanım 4.1.3.1 $\{\lambda_n,\alpha_n\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ sayılarına (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin spektral verileri denir.

$\{\lambda_n,\alpha_n\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ spektral verileri verildiğinde, (4.1.1.1) denklemindeki $\Omega(x)$ fonksiyonunu tek türlü tanımlamak mümkün müdür?

(4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer problemi $L(\Omega(x))$ problemi olarak işaretlensin. $\tilde{L}(\tilde{\Omega}(\mathrm{x}))$ problemi, L problemi ile benzer biçime sahip ancak farklı $\tilde{\Omega}(x)$ potansiyeline sahip olsun. Ayrıca, herhangi s sembolü L problemine ait iken, $\tilde{s}$ sembolü $\tilde{L}$ problemine ait olsun.

Teorem 4.1.3.2 $L(\Omega(x))$ ve $\tilde{L}(\tilde{\Omega}(x))$ iki farklı sınır değer problemi olsun. Eğer

$$\lambda_n=\tilde{\lambda}_n, \qquad \alpha_n=\tilde{\alpha}_n,\ (n\in\mathbb{Z})$$

ise, o halde

$$\Omega(x)=\tilde{\Omega}(x), \quad hhhy\ (0,\pi).$$

İspat. $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n=\tilde{\alpha}_n$ olduğundan, (4.1.2.1) ve (4.1.2.3) ifadelerine göre $F_0(x,t)=\tilde{F}_0(x,t)$ ve $F(x,t)=\tilde{F}(x,t)$ bulunur. O halde, (4.1.2.4) temel denkleminden,

$A(x,t)=\tilde{A}(x,t)$ elde edilir. (4.1.1.5) formülü kullanılarak, $\Omega(x,t)=\tilde{\Omega}(x,t)$ $hhhy\ (0,\pi)$ sonucuna varılır. Teorem ispatlandı. □

Sonuç olarak, Teorem 4.1.3.2 den, (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin spektral verilere göre tek türlü belirli olduğu elde edilir.

4.1.4 Ters Problemin Çözümü İçin Gerek ve Yeter Koşul

Teorem 4.1.4.1 (Temel Teorem) $\{\lambda_n,\alpha_n\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ reel sayılarının belli bir $L(\Omega(x))$, $\Omega(x)\in L_2(0,\pi)$ probleminin spektral verileri olması için gerek ve yeter koşul (4.1.1.11) ve (4.1.1.12) bağıntılarının sağlanmasıdır.

Teorem 4.1.4.1'in gerekliliği 4.1.1 kısmında verildi. Bu bölümde Teorem 4.1.4.1'in yeterliliği ispatlanacaktır.

$\{\lambda_n,\alpha_n\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ reel sayıları (4.1.1.11) ve (4.1.1.12)

$$\lambda_n=\lambda_n^0+\varepsilon_n,\qquad \{\varepsilon_n\}\in l_2,$$

$$\alpha_n=\alpha_n^0+\delta_n,\qquad \{\delta_n\}\in l_2$$

biçiminde verilsin. Bu reel sayılar kullanılarak $F_0(x,t)$ ve $F(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla (4.1.2.1) ve (4.1.2.3) biçiminde inşa edilsin. $A(x,t)$, (4.1.2.4) temel denkleminin çözümü olsun. Sırasıyla $\varphi(x,\lambda)$ ve $\Omega(x)$ ifadeleri aşağıdaki şekilde inşa edilsin:

$$\varphi(x,\lambda):=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^{\mu(x)}A(x,t)\begin{pmatrix}\sin\lambda t\\ -\cos\lambda t\end{pmatrix}dt,$$

$$\Omega(x):=\rho(x)\left[A(x,\mu(x))B-BA(x,\mu(x))\right].$$

4.1.4.1 Diferansiyel Denklemin Elde Edilmesi

Lemma 4.1.4.1.1 Aşağıdaki bağıntılar sağlanır:

$$B\varphi'(x,\lambda)+\Omega(x)\varphi(x,\lambda)=\lambda\rho(x)\varphi(x,\lambda), \tag{4.1.4.1.1}$$

$$\varphi_1(0,\lambda)=0, \qquad \varphi_2(0,\lambda)=-1. \tag{4.1.4.1.2}$$

İspat. (4.1.2.4) temel denkleminin x ’e göre türevi:

$$A_x(x,\mu(t))+F_x(x,t)+\rho(x)A(x,\mu(t))F_0(\mu(x),t)+\int_0^{\mu(x)}A_x(x,\xi)F_0(\xi,t)d\xi=0. \tag{4.1.4.1.3}$$

(4.1.2.4) temel denkleminin t ’ye göre türevi:

$$\rho(t)A_t(x,\mu(t))+F_t(x,t)+\int_0^{\mu(x)}A(x,\xi)F_{0t}(\xi,t)d\xi=0. \tag{4.1.4.1.4}$$

$F_0(x,t)$ ’nin (4.1.2.1) ifadesinden

$$\rho(t)\frac{d}{dx}BF_0(x,t)+\frac{d}{dt}F_0(x,t)B=0 \tag{4.1.4.1.5}$$

bulunur. Buradan ve $F(x,t)$ ’nin (4.1.2.3) ifadesinden

$$\rho(x)\frac{d}{dt}F(x,t)B+\rho(t)\frac{d}{dx}BF(x,t)=0 \tag{4.1.4.1.6}$$

sağlanır. Ayrıca, (4.1.2.1) ve (4.1.2.3)’den

$$F_0(x,0)B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=0, \qquad F(x,0)B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=0$$

elde edilir. (4.1.2.4) temel denkleminde bu eşitlikler kullanılarak

$$A(x,0)B\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix}=0 \quad \text{veya} \quad A_{11}(x,0)=A_{21}(x,0)=0 \tag{4.1.4.1.7}$$

bulunur. (4.1.4.1.3) denklemi soldan $\rho(t)B$ ile çarpılarak

$$\rho(t)BA_x(x,\mu(t))+\rho(t)BF_x(x,t)+\rho(x)\rho(t)BA(x,\mu(t))F_0(\mu(x),t)+$$

$$+\rho(t)\int_0^{\mu(x)} BA_x(x,\xi)F_0(\xi,t)d\xi=0 \tag{4.1.4.1.8}$$

elde edilir. Benzer şekilde, (4.1.4.1.4) denklemi sağdan $\rho(x)B$ ile çarpılarak

$$\rho(t)\rho(x)A_t(x,\mu(t))B+\rho(x)F_t(x,t)B+\rho(x)\int_0^{\mu(x)} A(x,\xi)F_{0t}(\xi,t)Bd\xi=0 \tag{4.1.4.1.9}$$

bulunur. (4.1.4.1.8) ve (4.1.4.1.9) eşitlikleri toplanarak ve (4.1.4.1.6) ifadesi kullanılarak

$$\rho(t)BA_x(x,\mu(t))+\rho(x)\rho(t)BA(x,\mu(t))F_0(\mu(x),t)+\rho(t)\int_0^{\mu(x)} BA_x(x,\xi)F_0(\xi,t)d\xi=$$

$$=-\rho(t)\rho(x)A_t(x,\mu(t))B-\rho(x)\int_0^{\mu(x)} A(x,\xi)F_{0t}(\xi,t)Bd\xi\equiv I(x,t). \tag{4.1.4.1.10}$$

Şimdi, $I(x,t)$ ifadesi ele alınsın: (4.1.4.1.5) eşitliğinden

$$I(x,t)=-\rho(t)\rho(x)A_t(x,\mu(t))B+\rho(x)\rho(t)\int_0^{\mu(x)} A(x,\xi)BF_{0\xi}(\xi,t)d\xi$$

elde edilir. Kısmi integralleme yapılarak ve (4.1.4.1.7) kullanılarak

$$I(x,t)=-\rho(t)\rho(x)A_t(x,\mu(t))B+\rho(x)\rho(t)A(x,\mu(x))BF_0(\mu(x),t)-$$

$$-\rho(x)\rho(t)\int_0^{\mu(x)} A_\xi(x,\xi)BF_0(\xi,t)d\xi$$

bulunur. Son bulunan ifade (4.1.4.1.10)'da yerine yazılarak ve $\rho(t)\neq 0$'ye bölünerek

$$BA_x\left(x,\mu(t)\right)+\rho(x)BA\left(x,\mu(t)\right)F_0\left(\mu(x),t\right)+$$

$$+\rho(x)A_t\left(x,\mu(t)\right)B-\rho(x)A\left(x,\mu(t)\right)BF_0\left(\mu(x),t\right)+$$

$$+\int_0^{\mu(x)}\left[BA_x(x,\xi)+\rho(x)A_\xi(x,\xi)B\right]F_0(\xi,t)d\xi=0 \qquad (4.1.4.1.11)$$

elde edilir. (4.1.2.4) temel denklemi soldan $\Omega(x)$ ile çarpılarak

$$\Omega(x)A\left(x,\mu(t)\right)+\Omega(x)F\left(x,t\right)+\int_0^{\mu(x)}\Omega(x)A\left(x,\xi\right)F_0\left(\xi,t\right)d\xi=0 \qquad (4.1.4.1.12)$$

bulunur. (4.1.4.1.11) ve (4.1.4.1.12) eşitlikleri toplanarak ve $F(x,t)=F_0(\mu(x),t)$ eşitliği ile $\Omega(x)$ fonksiyonunun biçimi kullanılarak

$$BA_x\left(x,\mu(t)\right)+\rho(x)A_t\left(x,\mu(t)\right)B+\Omega(x)A\left(x,\mu(t)\right)+$$

$$+\int_0^{\mu(x)}\left[BA_x(x,\xi)+\rho(x)A_\xi(x,\xi)B+\Omega(x)A\left(x,\xi\right)\right]F_0(\xi,t)d\xi=0 \qquad (4.1.4.1.13)$$

elde edilir.

$$J(x,t):=BA_x\left(x,t\right)+\rho(x)A_t\left(x,t\right)B+\Omega(x)A\left(x,t\right)$$

olarak tanımlansın. Böylece, (4.1.4.1.13) denklemi

$$J\left(x,\mu(t)\right)+\int_0^{\mu(x)}J\left(x,\xi\right)F_0\left(\xi,t\right)d\xi=0 \qquad (4.1.4.1.14)$$

biçiminde yazılabilir. Lemma 4.1.2.3'den, (4.1.4.1.14) homojen denklemi sadece sıfır çözüme sahiptir, yani

$$BA_x(x,t)+\rho(x)A_t(x,t)B+\Omega(x)A(x,t)=0, \qquad 0<t<x \tag{4.1.4.1.15}$$

elde edilir. Şimdi,

$$\varphi(x,\lambda)=\begin{pmatrix}\sin\lambda\mu(x)\\ -\cos\lambda\mu(x)\end{pmatrix}+\int_0^{\mu(x)}A(x,t)\begin{pmatrix}\sin\lambda t\\ -\cos\lambda t\end{pmatrix}dt \tag{4.1.4.1.16}$$

fonksiyonunun x 'e göre türevi alınsın ve sonra soldan B ile çarpılsın:

$$B\varphi'(x,\lambda)=\lambda\rho(x)B\begin{pmatrix}\cos\lambda\mu(x)\\ \sin\lambda\mu(x)\end{pmatrix}+\rho(x)BA(x,\mu(x))\begin{pmatrix}\sin\lambda\mu(x)\\ -\cos\lambda\mu(x)\end{pmatrix}+$$

$$+\int_0^{\mu(x)}BA_x(x,t)\begin{pmatrix}\sin\lambda t\\ -\cos\lambda t\end{pmatrix}dt\,. \tag{4.1.4.1.17}$$

(4.1.4.1.16) fonksiyonu $\lambda\rho(x)$ ile çarpılarak ve kısmi integralleme yapılarak

$$\lambda\rho(x)\varphi(x,\lambda)=\lambda\rho(x)\begin{pmatrix}\sin\lambda\mu(x)\\ -\cos\lambda\mu(x)\end{pmatrix}-\rho(x)A(x,t)\begin{pmatrix}\cos\lambda\mu(x)\\ \sin\lambda\mu(x)\end{pmatrix}+\rho(x)\int_0^{\mu(x)}A_t(x,t)\begin{pmatrix}\cos\lambda t\\ \sin\lambda t\end{pmatrix}dt$$

bulunur. $\begin{pmatrix}\cos\lambda t\\ \sin\lambda t\end{pmatrix}=-B\begin{pmatrix}\sin\lambda t\\ -\cos\lambda t\end{pmatrix}$ olduğu kullanılarak

$$\lambda\rho(x)\varphi(x,\lambda)=\lambda\rho(x)\begin{pmatrix}\sin\lambda\mu(x)\\ -\cos\lambda\mu(x)\end{pmatrix}+\rho(x)A(x,\mu(x))B\begin{pmatrix}\sin\lambda\mu(x)\\ -\cos\lambda\mu(x)\end{pmatrix}-$$

$$-\rho(x)\int_0^{\mu(x)}A_t(x,t)B\begin{pmatrix}\sin\lambda t\\ -\cos\lambda t\end{pmatrix}dt \tag{4.1.4.1.18}$$

elde edilir. (4.1.4.1.17) ve (4.1.4.1.18) eşitliklerinden

$$\lambda\rho(x)\varphi(x,\lambda)=B\varphi'(x,\lambda)-\rho(x)\left[BA(x,\mu(x))-A(x,\mu(x))B\right]\begin{pmatrix}\sin\lambda\mu(x)\\ -\cos\lambda\mu(x)\end{pmatrix}-$$

$$-\int_0^{\mu(x)}\left[BA_x(x,t)+\rho(x)A_t(x,t)B\right]\begin{pmatrix}\sin\lambda t\\ -\cos\lambda t\end{pmatrix}dt=0.$$

Böylece, bu eşitlikte $\Omega(x)=\rho(x)\left[A(x,\mu(x))B-BA(x,\mu(x))\right]$ olduğu, (4.1.4.1.15) ve (4.1.4.1.16) ifadeleri kullanılarak

$$B\varphi'(x,\lambda)+\Omega(x)\varphi(x,\lambda)=\lambda\rho(x)\varphi(x,\lambda)$$

elde edilir. Ayrıca, (4.1.4.1.16) fonksiyonunda $x=0$ için, $\varphi_1(0,\lambda)=0$ ve $\varphi_2(0,\lambda)=-1$ bulunur. Lemma ispatlandı. □

4.1.4.2 Parseval Eşitliğinin Elde Edilmesi

Lemma 4.1.4.2.1 Her $g(x)\in L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)$ fonksiyonu için aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$\int_0^{\pi}\left\{g_1^2(x)+g_2^2(x)\right\}\rho(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^{\pi}\varphi^T(t,\lambda_n)g(t)\rho(t)dt\right)^2. \quad (4.1.4.2.1)$$

İspat.

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^{\mu(x)}A(x,t)\begin{pmatrix}\sin\lambda t\\ -\cos\lambda t\end{pmatrix}dt$$

fonksiyonunda (4.1.2.9) eşitliği kullanılarak,

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^{a}A(x,t)\varphi_0(x,\lambda)dt+\int_a^{\alpha x-\alpha a+a}A(x,t)\varphi_0\left(\frac{t}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha},\lambda\right)dt$$

bulunur. Burada $\frac{t}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha}=\xi$ dönüşümü yapılarak ve sonra ξ değişkeni t değişkeni ile değiştirilerek

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^a A(x,t)\varphi_0(x,\lambda)dt+\alpha\int_a^x A(x,\alpha t-\alpha a+a)\varphi_0\left(t,\lambda\right)dt$$

elde edilir, yani

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_0^x A(x,\mu(t))\varphi_0(x,\lambda)\rho(t)dt\,. \qquad (4.1.4.2.2)$$

$F(x,t)=F_0(\mu(x),t)$ olduğundan,

$$F_0(x,t)=\begin{cases}F(x,t), & x<a,\\ F\left(\dfrac{x}{\alpha}+a-\dfrac{a}{\alpha},t\right), & x>a\end{cases}$$

biçimindedir. (4.1.2.4) temel denkleminde bu biçim kullanılarak

$$A(x,\mu(t))+F(x,t)+\int_0^a A(x,\xi)F(\xi,t)d\xi+\int_a^{\alpha x-\alpha a+a} A(x,\xi)F\left(\frac{\xi}{\alpha}+a-\frac{a}{\alpha},t\right)d\xi=0$$

bulunur. Bu eşitlikte son integralde $\dfrac{\xi}{\alpha}+a-\dfrac{a}{\alpha}=\xi'$ dönüşümü yapılarak ve sonra ξ' değişkeni ξ değişkeni ile değiştirilerek

$$A(x,\mu(t))+F(x,t)+\int_0^x A\left(x,\mu\left(\xi\right)\right)F(\xi,t)\rho(\xi)d\xi=0 \qquad (4.1.4.2.3)$$

elde edilir. (4.1.4.2.2) ifadesinden

$$\varphi_0(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)+\int_0^x H\left(x,\mu(t)\right)\varphi(x,\lambda)\rho(t)dt \qquad (4.1.4.2.4)$$

yazılabilir, burada

$$H^T\left(x,\mu(t)\right)=F(t,x)+\int_0^t A(t,\mu(\xi))F(\xi,x)\rho(\xi)d\xi \qquad (4.1.4.2.5)$$

sağlanır.

$$Q(\lambda) := \int_0^\pi \varphi^T(t,\lambda) g(t)\rho(t)dt \tag{4.1.4.2.6}$$

olarak tanımlansın. Burada $\varphi^T(t,\lambda)$ fonksiyonu yerine yazılarak,

$$Q(\lambda) = \int_0^\pi \left[\varphi_0^T(t,\lambda) + \int_0^t \varphi_0^T(s,\lambda) A^T(t,\mu(s))\rho(s)ds \right] g(t)\rho(t)dt$$

$$= \int_0^\pi \varphi_0^T(t,\lambda) g(t)\rho(t)dt + \int_0^\pi \left[\int_0^t \varphi_0^T(s,\lambda) A^T(t,\mu(s))\rho(s)ds \right] g(t)\rho(t)dt$$

$$= \int_0^\pi \varphi_0^T(t,\lambda) g(t)\rho(t)dt + \int_0^\pi \int_s^\pi \varphi_0^T(t,\lambda) A^T(t,\mu(s)) g(t)\rho(s)\rho(t)dsdt$$

$$= \int_0^\pi \varphi_0^T(t,\lambda) g(t)\rho(t)dt + \int_0^\pi \varphi_0^T(t,\lambda) \left[\int_t^\pi A^T(s,\mu(t)) g(s)\rho(s)ds \right] \rho(t)dt$$

bulunur. Böylece,

$$Q(\lambda) = \int_0^\pi \varphi_0^T(t,\lambda) h(t)\rho(t)dt \tag{4.1.4.2.7}$$

elde edilir, burada

$$h(t) = g(t) + \int_t^\pi A^T\left(s,\mu(t)\right) g(s)\rho(s)ds. \tag{4.1.4.2.8}$$

Benzer şekilde,

$$g(t) = h(t) + \int_t^\pi H^T\left(s,\mu(t)\right) h(s)\rho(s)ds. \tag{4.1.4.2.9}$$

(4.1.4.2.8) ifadesi kullanılarak,

$$\int_0^{\pi} F(x,t)h(t)\rho(t)dt = \int_0^{\pi} F(x,t)\left[g(t) + \int_t^{\pi} A^T(s,\mu(t))g(s)\rho(s)ds \right]\rho(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi} F(x,t)g(t)\rho(t)dt + \int_0^{\pi} F(x,t)\left[\int_t^{\pi} A^T(s,\mu(t))g(s)\rho(s)ds \right]\rho(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi} F(x,t)g(t)\rho(t)dt + \int_0^{\pi}\int_0^{s} F(x,t)A^T(s,\mu(t))g(s)\rho(s)\rho(t)dtds$$

$$= \int_0^{\pi} F(x,t)g(t)\rho(t)dt + \int_0^{\pi}\left[\int_0^{t} F(x,s)A^T(t,\mu(s))\rho(s)ds \right]g(t)\rho(t)dt$$

$$= \int_0^{\pi}\left[F(x,t) + \int_0^{t} F(x,s)A^T(t,\mu(s))\rho(s)ds \right]g(t)\rho(t)dt$$

$$= \int_0^{x}\left[F(x,t) + \int_0^{t} F(x,s)A^T(t,\mu(s))\rho(s)ds \right]g(t)\rho(t)dt$$

$$= \int_x^{\pi}\left[F(x,t) + \int_0^{t} F(x,s)A^T(t,\mu(s))\rho(s)ds \right]g(t)\rho(t)dt \qquad (4.1.4.2.10)$$

elde edilir. (4.1.2.4) temel denkleminden

$$A^T(x,\mu(t)) + F^T(x,t) + \int_0^{x} F^T(\xi,t)A^T(x,\mu(\xi))\rho(\xi)d\xi = 0$$

ve $F^T(x,t) = F(t,x)$ olduğundan

$$-A^T(x,\mu(t)) = F(t,x) + \int_0^{x} F(t,\xi)A^T(x,\mu(\xi))\rho(\xi)d\xi$$

bulunur. Şimdi, x ile t'nin yeri değiştirilerek ve ξ yerine s yazılarak

$$-A^T(t,\mu(x)) = F(x,t) + \int_0^t F(x,s)A^T(t,\mu(s))\rho(s)ds \qquad (4.1.4.2.11)$$

elde edilir. (4.1.4.2.5) ifadesinden,

$$H(x,\mu(t)) = F(x,t) + \int_0^t F(x,s)A^T(t,\mu(s))\rho(s)ds\ . \qquad (4.1.4.2.12)$$

(4.1.4.2.10) eşitliğinde, (4.1.4.2.11) ve (4.1.4.2.12) ifadeleri kullanılarak,

$$\int_0^\pi F(x,t)h(t)\rho(t)dt = \int_0^x H(x,\mu(t))\rho(t)dt - \int_x^\pi A^T(t,\mu(x))\rho(t)dt \qquad (4.1.4.2.13)$$

bulunur.

$$\int_0^\pi \left\{h_1^2(t)+h_2^2(t)\right\}\rho(t)dt + \int_0^\pi h^T(x)\left(\int_0^\pi F(x,t)h(t)\rho(t)dt\right)\rho(x)dx$$

ifadesi ele alınsın. Burada $F(x,t)$ 'nin (4.1.2.3) biçimi ve Parseval eşitliği kullanılarak

$$\int_0^\pi \left\{h_1^2(t)+h_2^2(t)\right\}\rho(t)dt + \int_0^\pi h^T(x)\left(\int_0^\pi F(x,t)h(t)\rho(t)dt\right)\rho(x)dx$$

$$= \int_0^\pi \left\{h_1^2(t)+h_2^2(t)\right\}\rho(t)dt +$$

$$+\int_0^\pi h^T(x)\left(\int_0^\pi \sum_{n=-\infty}^{\infty}\left[\frac{1}{\alpha_n}\varphi_0(x,\lambda_n)\varphi_0^T(x,\lambda_n) - \frac{1}{\alpha_n^0}\varphi_0(x,\lambda_n^0)\varphi_0^T(x,\lambda_n^0)\right]h(t)\rho(t)dt\right)\rho(x)dx$$

$$= \int_0^\pi \left\{h_1^2(t)+h_2^2(t)\right\}\rho(t)dt + \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi\int_0^\pi h^T(t)\varphi_0(t,\lambda_n)\varphi_0^T(t,\lambda_n)h(t)\rho(t)\rho(t)dtdt -$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\int_0^\pi\int_0^\pi h^T(t)\varphi_0(t,\lambda_n^0)\varphi_0^T(t,\lambda_n^0)h(t)\rho(t)\rho(t)dtdt$$

$$=\int_0^\pi \left\{h_1^2(t)+h_2^2(t)\right\}\rho(t)dt+\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^\pi \varphi_0^T(t,\lambda_n)h(t)\rho(t)dt\right)^2-$$

$$-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n^0}\left(\int_0^\pi \varphi_0^T(t,\lambda_n^0)h(t)\rho(t)dt\right)^2$$

$$=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^\pi \varphi_0^T(t,\lambda_n)h(t)\rho(t)dt\right)^2$$

elde edilir. Buradan ve (4.1.4.2.7)'den,

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^\pi \varphi_0^T(t,\lambda_n)h(t)\rho(t)dt\right)^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n}$$

bulunur. Böylece,

$$\int_0^\pi \left\{h_1^2(t)+h_2^2(t)\right\}\rho(t)dt+\int_0^\pi h^T(x)\left(\int_0^\pi F(x,t)h(t)\rho(t)dt\right)\rho(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n}$$

eşitliği elde edilir. Eşitliğin sağ kısmındaki ikinci integralde (4.1.4.2.13) ifadesi kullanılarak

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n}=\int_0^\pi \left\{h_1^2(t)+h_2^2(t)\right\}\rho(t)dt+\int_0^\pi h^T(x)\left(\int_0^x H(x,\mu(t))g(t)\rho(t)dt\right)\rho(x)dx-$$

$$-\int_0^\pi h^T(x)\left(\int_x^\pi A^T(t,\mu(x))g(t)\rho(t)dt\right)\rho(x)dx$$

bulunur. (4.1.4.2.8) ve (4.1.4.2.9) eşitliklerinden

$$\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n}=\int_0^\pi \left\{h_1^2(t)+h_2^2(t)\right\}\rho(t)dt+\int_0^\pi\left(\int_t^\pi h^T(x)H(x,\mu(t))\rho(x)dx\right)g(x)\rho(x)dx-$$

$$-\int_0^\pi h^T(x)\left(\int_x^\pi A^T(t,\mu(x))g(t)\rho(t)dt\right)\rho(x)dx=$$

$$=\int_0^\pi \left\{h_1^2(t)+h_2^2(t)\right\}\rho(t)dt+\int_0^\pi \left[g^T(t)-h^T(t)\right]g(t)\rho(t)dt-\int_0^\pi h^T(x)\left[h(x)-g(x)\right]\rho(x)dx$$

$$=\int_0^\pi \left\{g_1^2(t)+g_2^2(t)\right\}\rho(t)dt$$

yani

$$\int_0^\pi \left\{g_1^2(t)+g_2^2(t)\right\}\rho(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{Q^2(\lambda_n)}{\alpha_n}.$$

Buradan ve (4.1.4.2.6) eşitliğinden

$$\int_0^\pi \left\{g_1^2(t)+g_2^2(t)\right\}\rho(t)dt=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^\pi \varphi^T(t,\lambda_n)g(t)\rho(t)dt\right)^2$$

sonucuna varılır. Lemma ispatlandı. □

Sonuç 4.1.4.2.2 Her $f(x)\in L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)$ ve $g(x)\in L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)$ için

$$\int_0^\pi g^T(x)f(x)\rho(x)dx=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^\pi g^T(t)\varphi(t,\lambda_n)\rho(t)dt\right)\left(\int_0^\pi \varphi^T(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)dt\right) \quad (4.1.4.2.14)$$

sağlanır.

Lemma 4.1.4.2.3

$$\int_0^\pi \varphi^T(t,\lambda_n)\varphi(t,\lambda_k)\rho(t)dt=\begin{cases}0, & n\neq k,\\ \alpha_n, & n=k\end{cases}$$

sağlanır.

İspat.

1) Herhangi $f(x) \in W_2^1[0,\pi]$ olsun.

$$f^*(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n \varphi(x,\lambda_n) \tag{4.1.4.2.15}$$

serisi ele alınsın, burada

$$c_n := \frac{1}{\alpha_n} \int_0^{\pi} \varphi^T(x,\lambda_n) f(x) \rho(x) dx . \tag{4.1.4.2.16}$$

Lemma 4.1.4.1.1'den, $\varphi(x,\lambda)$ için

$$\varphi^T(x,\lambda) = \frac{1}{\lambda_n \rho(x)} \left\{ -\frac{\partial}{\partial x} \varphi^T(x,\lambda_n) B + \varphi^T(x,\lambda_n) \Omega(x) \right\}$$

yazılabilir. Bu ifade (4.1.4.2.16) eşitliğinde yerine yazılarak ve kısmi integralleme yapılarak

$$c_n = \frac{1}{\alpha_n \lambda_n} \int_0^{\pi} \left[-\frac{\partial}{\partial x} \varphi^T(x,\lambda_n) B + \varphi^T(x,\lambda_n) \Omega(x) \right] f(x) dx$$

$$= \frac{1}{\alpha_n \lambda_n} \left[-f(\pi) \varphi^T(\pi,\lambda_n) B + f(0) \varphi^T(0,\lambda_n) B \right] +$$

$$+ \frac{1}{\alpha_n \lambda_n} \int_0^{\pi} \varphi^T(\pi,\lambda_n) \left[Bf'(x) + \Omega(x) f(x) \right] dx \tag{4.1.4.2.17}$$

elde edilir. $|\lambda| \to \infty$ iken, x'e göre düzgün olarak $\varphi(x,\lambda)$ için aşağıdaki asimptotik formüller sağlanır:

$$\varphi_1(x,\lambda) = \sin \lambda \mu(x) + O\left(\frac{1}{|\lambda|} e^{|\mathrm{Im}\lambda| \mu(x)} \right),$$

$$\varphi_2(x,\lambda) = -\cos\lambda\mu(x) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu(x)}\right).$$

(4.2.4.1.17) eşitliğinde, bu asimptotik formüller, $\alpha_n = \mu(\pi)+\delta_n$, $\{\delta_n\}\in l_2$ ve $\lambda_n = \dfrac{n\pi}{\mu(\pi)} + \varepsilon_n$, $\{\varepsilon_n\}\in l_2$ kullanılarak, $n\to\infty$ iken $x\in[0,\pi]$'e göre düzgün olarak $c_n = O\left(\dfrac{1}{n}\right)$ elde edilir. Böylece, $\{c_n\}\in l_2$ bulunur. Sonuç olarak, (4.1.4.2.15) serisi $[0,\pi]$ üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. (4.1.4.2.14) ve (4.1.4.2.16) kullanılarak

$$\int_0^\pi g^T(x) f(x)\rho(x)dx = \sum_{n=-\infty}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n}\left(\int_0^\pi g^T(t)\varphi(t,\lambda_n)\rho(t)dt\right)\left(\int_0^\pi \varphi^T(t,\lambda_n) f(t)\rho(t)dt\right)$$

$$= \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left(\int_0^\pi g^T(t)\varphi(t,\lambda_n)\rho(t)dt\right) = \int_0^\pi g^T(t)\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\varphi(t,\lambda_n)\rho(t)dt = \int_0^\pi g^T(t) f^*(t)dt$$

elde edilir. $g(x)$ keyfi fonksiyon olduğundan, $f(x) = f^*(x)$ sonucuna varılır, yani

$$f(x) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\varphi(x,\lambda_n). \qquad (4.1.4.2.18)$$

2) $k\in\mathbb{Z}$ sabitlensin ve $f(x) = \varphi(x,\lambda_k)$ olsun. O halde, (4.1.4.2.18)'den

$$\varphi(x,\lambda_k) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\varphi(x,\lambda_n)$$

elde edilir, burada

$$c_{nk} = \frac{1}{\alpha_n}\int_0^\pi \varphi^T(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_k)\rho(x)dx. \qquad (4.1.4.2.19)$$

$\{\varphi_0(x,\lambda_n)\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ sistemi $L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)$ uzayında ortagonaldir. O halde $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun biçiminden $\{\varphi(x,\lambda_n)\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ sistemi $L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)$ uzayında ortagonaldir. Böylece $c_{nk}=\delta_{nk}$ elde edilir. O halde, (4.1.4.2.19) eşitliğinden

$$\int_0^\pi \varphi^T(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_k)\rho(x)dx=\begin{cases}0, & n\neq k,\\ \alpha_n, & n=k\end{cases}$$

sonucuna varılır. Lemma ispatlandı. □

4.1.4.3 Sınır Koşulunun Elde Edilmesi

Lemma 4.1.4.3.1 Her $n\in\mathbb{Z}$ için

$$\varphi_1\left(\pi,\lambda_n\right)=0$$

sağlanır.

İspat. Lemma 4.1.4.1.1 kullanılarak $\varphi\left(x,\lambda_n\right)$ ve $\varphi\left(x,\lambda_m\right)$ için

$$\varphi_2'\left(x,\lambda_n\right)+\left[p(x)\varphi_1\left(x,\lambda_n\right)+q(x)\varphi_2\left(x,\lambda_n\right)\right]=\lambda_n\rho(x)\varphi_1\left(x,\lambda_n\right),$$

$$-\varphi_1'\left(x,\lambda_n\right)+\left[q(x)\varphi_1\left(x,\lambda_n\right)-p(x)\varphi_2\left(x,\lambda_n\right)\right]=\lambda_n\rho(x)\varphi_2\left(x,\lambda_n\right),$$

$$\varphi_2'\left(x,\lambda_m\right)+\left[p(x)\varphi_1\left(x,\lambda_m\right)+q(x)\varphi_2\left(x,\lambda_m\right)\right]=\lambda_m\rho(x)\varphi_1\left(x,\lambda_m\right),$$

$$-\varphi_1'\left(x,\lambda_m\right)+\left[q(x)\varphi_1\left(x,\lambda_m\right)-p(x)\varphi_2\left(x,\lambda_m\right)\right]=\lambda_m\rho(x)\varphi_2\left(x,\lambda_m\right)$$

yazılabilir. Bu eşitlikler sırasıyla $\varphi_1\left(x,\lambda_m\right)$, $\varphi_2\left(x,\lambda_m\right)$, $-\varphi_1\left(x,\lambda_n\right)$ ve $-\varphi_2\left(x,\lambda_n\right)$ ile çarpılarak ve sonra toplanarak

$$\frac{\partial}{\partial x}\left\{\varphi_2\left(x,\lambda_n\right)\varphi_1\left(x,\lambda_m\right)-\varphi_1\left(x,\lambda_n\right)\varphi_2\left(x,\lambda_m\right)\right\}=$$

$$=\left(\lambda_n-\lambda_m\right)\rho\left(x\right)\left\{\varphi_1\left(x,\lambda_n\right)\varphi_1\left(x,\lambda_m\right)+\varphi_2\left(x,\lambda_n\right)\varphi_2\left(x,\lambda_m\right)\right\}$$

elde edilir. Son eşitlik $(0,\pi)$ aralığı üzerinde integrallenerek

$$\left(\lambda_n-\lambda_m\right)\int_0^{\pi}\left\{\varphi_1\left(x,\lambda_n\right)\varphi_1\left(x,\lambda_m\right)+\varphi_2\left(x,\lambda_n\right)\varphi_2\left(x,\lambda_m\right)\right\}\rho\left(x\right)dx=$$

$$=\varphi_2\left(\pi,\lambda_n\right)\varphi_1\left(\pi,\lambda_m\right)-\varphi_1\left(\pi,\lambda_n\right)\varphi_2\left(\pi,\lambda_m\right)$$

bulunur. $n\neq m$ için $\int_0^{\pi}\varphi^T\left(x,\lambda_n\right)\varphi\left(x,\lambda_m\right)\rho(x)dx=0$ olduğundan,

$$\varphi_2\left(\pi,\lambda_n\right)\varphi_1\left(\pi,\lambda_m\right)-\varphi_1\left(\pi,\lambda_n\right)\varphi_2\left(\pi,\lambda_m\right)=0 \qquad (4.1.4.3.1)$$

elde edilir. Gösterilmelidir ki herhangi n için $\varphi_2(\pi,\lambda_n)\neq 0$. Aksi kabul edilsin, yani öyle bir m vardır ki $\varphi_2(\pi,\lambda_m)=0$. O halde, $n\neq m$ için (4.1.4.3.1) eşitliğinden $\varphi_2(\pi,\lambda_n)=0$ elde edilir. Diğer taraftan

$$\varphi_2\left(x,\lambda\right)=-\cos\lambda\mu\left(x\right)+O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu(x)}\right),\quad |\lambda|\to\infty$$

olduğundan

$$\varphi_2\left(\pi,\lambda_n\right)=(-1)^{n+1}+O\left(\frac{1}{n}\right),\quad n\to\infty. \qquad (4.1.4.3.2)$$

Buradan $\varphi_2\left(\pi,\lambda_n\right)\neq 0$ bulunur. Bu ise $n\neq m$ için $\varphi_2(\pi,\lambda_n)=0$ olması ile çelişir. Böylece herhangi n için $\varphi_2(\pi,\lambda_n)\neq 0$ sonucuna varılır. (4.1.4.3.1)'den

$$\frac{\varphi_1\left(\pi,\lambda_n\right)}{\varphi_2\left(\pi,\lambda_n\right)}=\frac{\varphi_1\left(\pi,\lambda_m\right)}{\varphi_2\left(\pi,\lambda_m\right)}=H$$

yazılabilir, yani herhangi n için

$$\varphi_1(\pi,\lambda_n) = H\varphi_2(\pi,\lambda_n) \qquad (4.1.4.3.3)$$

elde edilir.

$$\varphi_1(x,\lambda) = \sin\lambda\mu(x) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu(x)}\right), \quad |\lambda|\to\infty$$

olduğundan,

$$\varphi_1(\pi,\lambda_n) = O\left(\frac{1}{n}\right), \quad n\to\infty \qquad (4.1.4.3.4)$$

biçimindedir. (4.1.4.3.3) eşitliğinde, (4.1.4.3.2) ve (4.1.4.3.4) asimptotik ifadeleri kullanılarak $H=0$ elde edilir. Böylece, (4.1.4.3.3)'den, $\varphi_1(\pi,\lambda_n)=0$ sonucuna varılır. Lemma ispatlandı. □

Teorem 4.1.4.1'in İspatı.

Yeterlilik: [49] çalışmasında ispat edilir, yani (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin $\{\lambda_n,\alpha_n\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ spektral verilerinin (özdeğerlerinin ve normlaştırıcı sayılarının) (4.1.1.11) ve (4.1.1.12) biçiminde olduğu elde edilir.

Gereklilik: $\{\lambda_n,\alpha_n\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ reel sayıları (4.1.1.11) ve (4.1.1.12) biçiminde verilsin. Lemma 4.1.4.1.1, Lemma 4.1.4.2.3 ve Lemma 4.1.4.3.1'den, $\{\lambda_n,\alpha_n\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ sayılarının inşa edilen (4.1.1.1), (4.1.1.2) sınır değer probleminin spektral verileri olduğu elde edilir. Teorem ispatlandı. □

Algoritma 4.1.4.2 $\{\lambda_n,\alpha_n\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ spektral verilerine göre $\Omega(x)$ potansiyelini inşa etme algoritması aşağıdaki şekildedir:

1. $\{\lambda_n, \alpha_n\}$, $(n \in \mathbb{Z})$ sayıları kullanılarak $F_0(x,t)$ ve $F(x,t)$ fonksiyonları sırasıyla (4.1.2.1) ve (4.1.2.2)

$$F_0(x,t) = \sum_{n=-\infty}^{\infty} \left[\frac{1}{\alpha_n} \begin{pmatrix} \sin\lambda_n x \\ -\cos\lambda_n x \end{pmatrix} \varphi_0^T(t,\lambda_n) - \frac{1}{\alpha_n^0} \begin{pmatrix} \sin\lambda_n^0 x \\ -\cos\lambda_n^0 x \end{pmatrix} \varphi_0^T(t,\lambda_n^0) \right],$$

$$F(x,t) = F_0(\mu(x),t)$$

biçiminde inşa edilir.

2. $A(x,t)$ fonksiyonu (4.1.2.4)

$$A(x,\mu(t)) + F(x,t) + \int_0^{\mu(x)} A(x,\xi) F_0(\xi,t)\, d\xi = 0, \quad 0 < t < x$$

temel denkleminden bulunur.

3. $\Omega(x)$ fonksiyonu (4.1.1.5)

$$\Omega(x) = \rho(x)\left[A(x,\mu(x))B - BA(x,\mu(x)) \right]$$

eşitliğinden elde edilir.

4.2. SÜREKSİZ KATSAYILI ve SINIR KOŞULU SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN DIRAC OPERATÖRÜ İÇİN TERS SPEKTRAL PROBLEM

4.2.1. Probleme Giriş

Sonlu aralıkta, süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi için sınır koşulu spektral parametre bulunduran aşağıdaki sınır değer problemi ele alınır:

$$By'+\Omega(x)y=\lambda\rho(x)y, \qquad 0<x<\pi\ , \tag{4.2.1.1}$$

$$\begin{gathered} U(y):=y_1(0)=0, \\ V(y):=\lambda\left(b_1y_2(\pi)+b_2y_1(\pi)\right)+a_1y_1(\pi)+a_2y_2(\pi)=0, \end{gathered} \tag{4.2.1.2}$$

burada,

$$B=\begin{pmatrix}0 & 1\\ -1 & 0\end{pmatrix},\ \Omega(x)=\begin{pmatrix}p(x) & q(x)\\ q(x) & -p(x)\end{pmatrix},\ y(x)=\begin{pmatrix}y_1(x)\\ y_2(x)\end{pmatrix}$$

$p(x)\in L_2(0,\pi)$ ve $q(x)\in L_2(0,\pi)$ reel değerli ölçülebilir fonksiyonlar, λ spektral parametre, a_1, a_2, b_1 ve b_2 reel sayılar, $1\neq\alpha>0$ olmak üzere

$$\rho(x)=\begin{cases}1, & 0\le x\le a,\\ \alpha, & a<x\le\pi.\end{cases}$$

$k:=a_2b_2-a_1b_1>0$ olduğu kabul edilsin.

4.2.2. Sınır Probleminin Operatör Biçimi ve Bazı Spektral Özellikleri

$H_\rho = L_{2,\rho}(0,\pi;\mathbb{C}^2)\oplus\mathbb{C}$ Hilbert uzayında iç çarpım aşağıdaki biçimde tanımlanır:

$$\langle Y, Z\rangle := \int_0^\pi \left\{ y_1(x)\overline{z_1(x)} + y_2(x)\overline{z_2(x)} \right\} \rho(x)dx + \frac{1}{k} y_3\overline{z_3}\,, \tag{4.2.2.1}$$

burada

$$Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y_3 \end{pmatrix} \in H_\rho \text{ ve } Z = \begin{pmatrix} z(x) \\ z_3 \end{pmatrix} \in H_\rho.$$

Tanım kümesi

$$D(\hat{L}) = \left\{ \begin{array}{l} Y \mid Y = \left(y(x), y_3 \right)^T \in H_\rho,\ y(x)\in AC[0,\pi],\ y_1(0)=0, \\ \quad y_3 = b_1 y_2(\pi) + b_2 y_1(\pi),\ l(y)\in L_{2,\rho}(0,\pi;\mathbb{C}^2) \end{array} \right\}$$

olan $\hat{L}$ operatörü

$$\hat{L}(Y) := \begin{pmatrix} l(y) \\ -a_1 y_1(\pi) - a_2 y_2(\pi) \end{pmatrix}, \qquad l(y) = \frac{1}{\rho(x)} \left\{ \begin{array}{l} y_2' + p(x)y_1 + q(x)y_2 \\ -y_1' + q(x)y_1 - p(x)y_2 \end{array} \right\}$$

biçimindedir. Böylece, (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer problemi $\hat{L}Y = \lambda Y$ operatör denklemine denktir.

Tanım 4.2.2.1 $\hat{L}Y = \lambda Y$ denklemi $Y = \begin{pmatrix} y(x) \\ y_3 \end{pmatrix} \neq 0$ çözümüne sahip ise λ sayısına özdeğer, Y fonksiyonuna ise bu özdeğere karşılık gelen vektör-değerli özfonksiyon denir.

Lemma 4.2.2.2 Farklı $\lambda_1 \neq \lambda_2$ özdeğerlerine uygun $Y(x,\lambda_1)$ ve $Z(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları diktir.

İspat. $Y(x,\lambda_1)$ ve $Z(x,\lambda_2)$ (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin özfonksiyonları olduğundan

$$y_2'(x,\lambda_1)+p(x)y_1(x,\lambda_1)+q(x)y_2(x,\lambda_1)=\lambda_1\rho(x)y_1(x,\lambda_1),$$

$$-y_1'(x,\lambda_1)+q(x)y_1(x,\lambda_1)-p(x)y_2(x,\lambda_1)=\lambda_1\rho(x)y_2(x,\lambda_1),$$

$$z_2'(x,\lambda_2)+p(x)z_1(x,\lambda_2)+q(x)z_2(x,\lambda_2)=\lambda_2\rho(x)z_1(x,\lambda_2),$$

$$-z_1'(x,\lambda_2)+q(x)z_1(x,\lambda_2)-p(x)z_2(x,\lambda_2)=\lambda_2\rho(x)z_2(x,\lambda_2)$$

sağlanır. Bu eşitlikler sırasıyla $z_1(x,\lambda_2)$, $z_2(x,\lambda_2)$, $-y_1(x,\lambda_1)$ ve $-y_2(x,\lambda_1)$ ile çarpılarak ve daha sonra toplanarak

$$\frac{d}{dx}\left\{z_1(x,\lambda_2)y_2(x,\lambda_1)-y_1(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\right\}=$$

$$=\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\rho(x)\left\{y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\right\}$$

elde edilir. Son eşitlik 0'dan π'ye kadar integrallenerek

$$\left(\lambda_1-\lambda_2\right)\int_0^{\pi}\left[y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\right]\rho(x)dx=$$

$$=z_1(\pi,\lambda_2)y_2(\pi,\lambda_1)-y_1(\pi,\lambda_1)z_2(\pi,\lambda_2) \qquad (4.2.1.2)$$

bulunur. (4.2.1.2) sınır koşullarından

$$\lambda_1\left(b_1y_2(\pi,\lambda_1)+b_2y_1(\pi,\lambda_1)\right)=-a_1y_1(\pi,\lambda_1)-a_2y_2(\pi,\lambda_1),$$

$$\lambda_2\left(b_1z_2(\pi,\lambda_2)+b_2z_1(\pi,\lambda_2)\right)=-a_1z_1(\pi,\lambda_2)-a_2z_2(\pi,\lambda_2)$$

yazılabilir. Bu eşitlikler sırasıyla $b_1 z_2(\pi,\lambda_2)+b_2 z_1(\pi,\lambda_2)$ ve $b_1 y_2(\pi,\lambda_1)+b_2 y_1(\pi,\lambda_1)$ ile çarpılarak ve daha sonra elde edilen eşitlikler birbirinden çıkarılarak:

$$(\lambda_1-\lambda_2)\left[b_1 y_2(\pi,\lambda_1)+b_2 y_1(\pi,\lambda_1)\right]\left[b_1 z_2(\pi,\lambda_2)+b_2 z_1(\pi,\lambda_2)\right]=$$

$$=(a_2 b_2-a_1 b_1)\left[z_2(\pi,\lambda_1)\,y_1(\pi,\lambda_1)-z_1(\pi,\lambda_1)\,y_2(\pi,\lambda_1)\right]$$

elde edilir, yani

$$\left[z_2(\pi,\lambda_1)\,y_1(\pi,\lambda_1)-z_1(\pi,\lambda_1)\,y_2(\pi,\lambda_1)\right]=$$

$$=(\lambda_1-\lambda_2)\frac{1}{k}\left[b_1 y_2(\pi,\lambda_1)+b_2 y_1(\pi,\lambda_1)\right]\left[b_1 z_2(\pi,\lambda_2)+b_2 z_1(\pi,\lambda_2)\right].$$

Bu eşitlik (4.2.2.2)'de kullanılarak,

$$(\lambda_1-\lambda_2)\left\{\int_0^\pi\left[y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\right]\rho(x)dx+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{k}\left[b_1 y_2(\pi,\lambda_1)+b_2 y_1(\pi,\lambda_1)\right]\left[b_1 z_2(\pi,\lambda_2)+b_2 z_1(\pi,\lambda_2)\right]\right\}=0$$

bulunur. $y_3=b_1 y_2(\pi,\lambda_1)+b_2 y_1(\pi,\lambda_1)$, $z_3=b_1 z_2(\pi,\lambda_2)+b_2 z_1(\pi,\lambda_2)$ ve $\lambda_1\neq\lambda_2$ olduğundan

$$\int_0^\pi\left[y_1(x,\lambda_1)z_1(x,\lambda_2)+y_2(x,\lambda_1)z_2(x,\lambda_2)\right]\rho(x)dx+\frac{1}{k}y_3 z_3=0$$

elde edilir. Lemma ispatlandı. □

Lemma 4.2.2.3 $\hat{L}$ operatörünün özdeğerleri reeldir.

İspat. Aksi varsayılsın, yani λ kompleks özdeğer ve $Y(x,\lambda)$ uygun özfonksiyon olsun. $\Omega(x)$ reel değerli matris olduğundan, $\bar{\lambda}$'de özdeğerdir ve uygun özfonksiyon $\overline{Y}(x,\lambda)$ dır. O halde, Lemma 4.2.2.2 kullanılarak

$$\int_0^{\pi}\left\{|y_1(x,\lambda)|^2+|y_2(x,\lambda)|^2\right\}\rho(x)dx+\frac{1}{k}|b_1y_2(\pi,\lambda_1)+b_2y_1(\pi,\lambda_1)|^2=0$$

elde edilir. Buradan $y_1(x,\lambda)=y_2(x,\lambda)=y_3=0$ bulunur. Bu ise $Y(x,\lambda)$'nın özfonksiyon olması ile çelişir. Böylece, $\hat{L}$ operatörünün özdeğerlerinin reel olduğu sonucuna varılır. Lemma ispatlandı. □

$S(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$, (4.2.1.1) sisteminin sırasıyla aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun:

$$S(0,\lambda)=\begin{pmatrix}0\\-1\end{pmatrix},\qquad \psi(\pi,\lambda)=\begin{pmatrix}\lambda b_1+a_2\\-\lambda b_2-a_1\end{pmatrix}.$$

O halde,

$$U(S):=S_1(0,\lambda)=0,$$

$$V(\psi):=\lambda\left(b_1\psi_2(\pi,\lambda)+b_2\psi_1(\pi,\lambda)\right)+a_1\psi_1(\pi,\lambda)+a_2\psi_2(\pi,\lambda)=0.$$

(4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu aşağıdaki şekilde tanımlansın:

$$\Delta(\lambda)=W[S(x,\lambda),\psi(x,\lambda)]=S_2(x,\lambda)\psi_1(x,\lambda)-S_1(x,\lambda)\psi_2(x,\lambda), \tag{4.2.2.3}$$

burada $W[S(x,\lambda),\psi(x,\lambda)]$, $S(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ vektör fonksiyonlarının Wronskianıdır. Wronskian x'e bağlı değildir. O halde (4.2.2.3) kullanılarak

$$\Delta(\lambda)=V(S)=-U(\psi), \tag{4.2.2.4}$$

veya

$$\Delta(\lambda)=\lambda\left(b_1S_2(\pi,\lambda)+b_2S_1(\pi,\lambda)\right)+a_1S_1(\pi,\lambda)+a_2S_2(\pi,\lambda)=-\psi_1(0,\lambda)$$

elde edilir. $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonun λ_n sıfırları, (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakışır. $S(x,\lambda_n)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ özfonksiyonlardır ve öyle bir β_n dizisi vardır ki

$$\psi(x,\lambda_n)=\beta_n S(x,\lambda_n), \quad \beta_n \neq 0, \tag{4.2.2.5}$$

sağlanır.

Tanım 4.2.2.4 (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n := \int_0^\pi \left\{ \left|S_1(x,\lambda_n)\right|^2 + \left|S_2(x,\lambda_n)\right|^2 \right\} \rho(x)dx + \frac{1}{k}\left|b_1 S_2(\pi,\lambda_n)+b_2 S_1(\pi,\lambda_n)\right|^2 \tag{4.2.2.6}$$

biçimindedir.

Lemma 4.2.2.5 Aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$\alpha_n \beta_n = \dot{\Delta}(\lambda_n), \tag{4.2.2.7}$$

burada $\dot{\Delta}(\lambda)=\dfrac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$.

İspat. $S(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (4.2.1.1), (4.2.1.2) probleminin çözümleri olduğu için,

$$\psi_2^{'}(x,\lambda)+p(x)\psi_1(x,\lambda)+q(x)\psi_2(x,\lambda)=\lambda\rho(x)\psi_1(x,\lambda),$$

$$-\psi_1^{'}(x,\lambda)+q(x)\psi_1(x,\lambda)-p(x)\psi_2(x,\lambda)=\lambda\rho(x)\psi_2(x,\lambda),$$

$$S_2^{'}(x,\lambda_n)+p(x)S_1(x,\lambda_n)+q(x)S_2(x,\lambda_n)=\lambda_n\rho(x)S_1(x,\lambda_n),$$

$$-S_1^{'}(x,\lambda_n)+q(x)S_1(x,\lambda_n)-p(x)S_2(x,\lambda_n)=\lambda_n\rho(x)S_2(x,\lambda_n)$$

sağlanır. Bu eşitlikler sırasıyla $S_1^{'}(x,\lambda_n)$, $S_2^{'}(x,\lambda_n)$, $-\psi_1^{'}(x,\lambda)$ ve $-\psi_2^{'}(x,\lambda)$ ile çarpılarak ve sonra toplanarak,

$$\frac{d}{dx}\left\{S_1(x,\lambda_n)\psi_2(x,\lambda)-\psi_1(x,\lambda)S_2(x,\lambda_n)\right\}=$$

$$=(\lambda-\lambda_n)\rho(x)\left\{S_1(x,\lambda_n)\psi_1(x,\lambda)+\psi_2(x,\lambda)S_2(x,\lambda_n)\right\}$$

bulunur. Son eşitlik 0'dan π'ye integrallenerek ve (4.2.1.2) sınır koşulları kullanılarak,

$$\int_0^\pi \left\{S_1(x,\lambda_n)\psi_1(x,\lambda)+\psi_2(x,\lambda)S_2(x,\lambda_n)\right\}\rho(x)dx+$$

$$+\frac{1}{k}\left[b_1S_2(\pi,\lambda_n)+b_2S_1(\pi,\lambda_n)\right]\left[b_1\psi_2(\pi,\lambda)+b_2\psi_1(\pi,\lambda)\right]=\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}$$

elde edilir. $\psi(x,\lambda_n)=\beta_nS(x,\lambda_n)$ olduğundan, son eşitlik

$$\beta_n\left\{\int_0^\pi \left\{S_1^2(x,\lambda_n)+S_2^2(x,\lambda_n)\right\}\rho(x)dx+\frac{1}{k}\left[b_1S_2(\pi,\lambda_n)+b_2S_1(\pi,\lambda_n)\right]^2\right\}=\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda-\lambda_n}.$$

biçiminde yazılabilir. Burada, $\lambda\to\lambda_n$ iken limite geçilerek, $\beta_n\alpha_n=\dot{\Delta}(\lambda_n)$ elde edilir. Lemma ispatlandı. □

4.2.3. Sınır Probleminin Özdeğerlerinin, Özfonksiyonlarının ve Normlaştırıcı Sayılarının Asimptotik Biçimleri

Lemma 4.2.3.1 $S(x,\lambda)$ çözümü aşağıdaki integral gösterime sahiptir:

$$\begin{aligned} S_1(x,\lambda)&=\sin\lambda\mu(x)+\int_0^{\mu(x)}\left[A_{11}(x,t)\sin\lambda t-A_{12}(x,t)\cos\lambda t\right]dt,\\ S_2(x,\lambda)&=-\cos\lambda\mu(x)+\int_0^{\mu(x)}\left[A_{21}(x,t)\sin\lambda t-A_{22}(x,t)\cos\lambda t\right]dt, \end{aligned} \tag{4.2.3.1}$$

burada $A_{ij}(x,.)\in L_2(0,\pi),\quad i,j=1,2$ ve

$$A_{i1}(x,t) = K_{i1}(x,t) + K_{i1}(x,-t),$$

$$A_{i2}(x,t) = K_{i2}(x,t) - K_{i2}(x,-t), \quad i = 1,2.$$

İspat. $S(x,\lambda)$ çözümünün integral gösteriminin elde edilmesi için (4.2.1.1) sisteminin çözümünün integral gösterimi ([45]) kullanılır. O halde, $S(x,\lambda)$ çözümünün biçimini bulmak için $S(x,\lambda) = E(x,\lambda)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$ eşitliği kullanılır. Böylece

$$E(x,\lambda) = e^{-\lambda B\mu(x)} + \int_{-\mu(x)}^{\mu(x)} K(x,t) e^{-\lambda Bt} dt$$

ifadesi yerine yazılarak

$$S(x,\lambda) = e^{-\lambda B\mu(x)}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} + \int_{-\mu(x)}^{\mu(x)} K(x,t) e^{-\lambda Bt}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} dt, \qquad (4.2.3.2)$$

bulunur. Şimdi, eşitliğin sağ kısmındaki ifadeler ele alınsın:

$$e^{-\lambda B\mu(x)}\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix} = \left(I - \lambda B\mu(x) + \frac{(-\lambda B\mu(x))^2}{2!} + \frac{(-\lambda B\mu(x))^3}{3!} + \ldots \right)\begin{pmatrix} 0 \\ -1 \end{pmatrix}$$

$$= \begin{pmatrix} \lambda\mu(x) - \dfrac{(\lambda\mu(x))^3}{3!} + \ldots \\ -1 + \dfrac{(\lambda\mu(x))^2}{2!} + \ldots \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sin\lambda\mu(x) \\ -\cos\lambda\mu(x) \end{pmatrix}$$

elde edilir. Benzer şekilde $e^{-\lambda Bt} = \begin{pmatrix} \sin\lambda t \\ -\cos\lambda t \end{pmatrix}$ biçimindedir. Bu ifadeler (4.2.3.2)'de yerine yazılarak

$$S_1(x,\lambda) = \sin\lambda\mu(x) + \int_{-\mu(x)}^{\mu(x)} \left[K_{11}(x,t)\sin\lambda t - K_{12}(x,t)\cos\lambda t \right] dt,$$

$$S_2(x,\lambda) = -\cos\lambda\mu(x) + \int_{-\mu(x)}^{\mu(x)} \left[K_{21}(x,t)\sin\lambda t - K_{22}(x,t)\cos\lambda t\right]dt,$$

bulunur. Şimdi, integrallerde değişken dönüşümü yapılarak:

$$S_1(x,\lambda) = \sin\lambda\mu(x) + \int_0^{\mu(x)} \left[\left(K_{11}(x,t)+K_{11}(x,-t)\right)\sin\lambda t - \left(K_{12}(x,t)-K_{12}(x,-t)\right)\cos\lambda t\right]dt,$$

$$S_2(x,\lambda) = -\cos\lambda\mu(x) + \int_0^{\mu(x)} \left[K_{21}(x,t)+K_{21}(x,-t)\sin\lambda t - (K_{22}(x,t)-K_{22}(x,-t))\cos\lambda t\right]dt$$

elde edilir ve

$$A_{11}(x,t) := K_{11}(x,t)+K_{11}(x,-t),$$

$$A_{12}(x,t) := K_{12}(x,t)-K_{12}(x,-t),$$

$$A_{21}(x,t) := K_{21}(x,t)+K_{21}(x,-t)\,,$$

$$A_{22}(x,t) := K_{22}(x,t)-K_{22}(x,-t)$$

biçiminde işaretlenerek (4.2.3.1) bulunur, ayrıca $A_{ij}(x,.)\in L_2(0,\pi),\quad i,j=1,2$. Lemma ispatlandı. □

$|\lambda|\to\infty$ iken $x\in[0,\pi]$'e göre düzgün olarak, $S(x,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki asimptotik formüller sağlanır:

$$\begin{aligned} S_1(x,\lambda) &= \sin\lambda\mu(x) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu(x)}\right), \\ S_2(x,\lambda) &= -\cos\lambda\mu(x) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu(x)}\right). \end{aligned} \tag{4.2.3.3}$$

$S(x,\lambda)$ çözümünün (4.2.3.1) integral gösteriminde kısmi integralleme yapılarak ve $\left|\sin\lambda\mu(x)\right| \le e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu(x)}$, $\left|\cos\lambda\mu(x)\right| \le e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu(x)}$ eşitsizlikleri kullanılarak (4.2.3.3) asimptotik formülleri elde edilir.

Teorem 4.2.3.2 (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin λ_n, $\left(n\in\mathbb{Z}\right)$ özdeğerleri

$$\lambda_n = \tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n, \tag{4.2.3.4}$$

biçimindedir, burada $\tilde{\lambda}_n = \left(n\pi + \arctan\dfrac{b_1}{b_2}\right)\dfrac{1}{\mu(\pi)}$, $\{\varepsilon_n\}\in l_2$ ve özdeğerler basittir.

İspat. $\Delta(\lambda) = \lambda\left(b_1S_2(\pi,\lambda)+b_2S_1(\pi,\lambda)\right)+a_1S_1(\pi,\lambda)+a_2S_2(\pi,\lambda)$ karakteristik fonksiyonunda $S(x,\lambda)$ çözümünün (4.2.3.1) integral gösterimi yazılarak:

$$\Delta\left(\lambda\right) = \lambda\left(b_2\sin\lambda\mu(\pi) - b_1\cos\lambda\mu(\pi)\right) + a_1\sin\lambda\mu(\pi) - a_2\cos\lambda\mu(\pi) +$$

$$+\lambda\int_0^{\mu(\pi)}\left[b_2A_{11}(\pi,t)+b_1A_{21}(\pi,t)\right]\sin\lambda t dt - \lambda\int_0^{\mu(\pi)}\left[b_2A_{12}(\pi,t)+b_1A_{22}(\pi,t)\right]\cos\lambda t dt +$$

$$+\int_0^{\mu(\pi)}\left[a_1A_{11}(\pi,t)+a_2A_{21}(\pi,t)\right]\sin\lambda t dt - \int_0^{\mu(\pi)}\left[a_1A_{12}(\pi,t)+a_2A_{22}(\pi,t)\right]\cos\lambda t dt$$

bulunur. $\lambda\neq 0$ için $\tilde{\Delta}\left(\lambda\right) := \dfrac{\Delta\left(\lambda\right)}{\lambda}$ olarak tanımlansın. O halde,

$$\tilde{\Delta}\left(\lambda\right) = b_2\sin\lambda\mu(\pi) - b_1\cos\lambda\mu(\pi) + \frac{a_1\sin\lambda\mu(\pi)}{\lambda} - \frac{a_2\cos\lambda\mu(\pi)}{\lambda} +$$

$$+\int_0^{\mu(\pi)}\left[b_2A_{11}(\pi,t)+b_1A_{21}(\pi,t)\right]\sin\lambda t dt - \int_0^{\mu(\pi)}\left[b_2A_{12}(\pi,t)+b_1A_{22}(\pi,t)\right]\cos\lambda t dt +$$

$$+\frac{1}{\lambda}\int_0^{\mu(\pi)}[a_1A_{11}(\pi,t)+a_2A_{21}(\pi,t)]\sin\lambda t dt-\frac{1}{\lambda}\int_0^{\mu(\pi)}[a_1A_{12}(\pi,t)+a_2A_{22}(\pi,t)]\cos\lambda t dt \quad (4.2.3.5)$$

biçimindedir. $\chi(\lambda):=b_2\sin\lambda\mu(\pi)-b_1\cos\lambda\mu(\pi)$ olsun.

$$G_\delta:=\left\{\lambda:\left|\lambda-\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}\right|\geq\delta,\quad n=0,\pm1,\pm2,...\right\}$$

bölgesi tanımlansın, burada δ yeterince küçük pozitif sayıdır. $\lambda\in G_\delta$ için

$$|\chi(\lambda)|\geq C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu(\pi)} \quad (4.2.3.6)$$

sağlanır, burada C_δ pozitif sayıdır. Bu eşitsizlik [48], Lemma 1.3.2'ye benzer şekilde elde edilir. Ayrıca, bu eşitsizlikten $|\Delta(\lambda)|\geq C_\delta|\lambda|e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu(\pi)}$ sağlanır. (4.2.3.5) eşitliğinde, [48], Lemma 1.3.1 kullanılarak $|\operatorname{Im}\lambda|\to\infty$ iken

$$\tilde{\Delta}(\lambda)-\chi(\lambda)=O\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu(\pi)}\right) \quad (4.2.3.7)$$

bulunur.

$$\Gamma_n:=\left\{\lambda:|\lambda|=\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}+\frac{\pi}{2\mu(\pi)},\quad n=0,\pm1,\pm2,...\right\}$$

sonsuz genişleyen konturları üzerinde, yeterince büyük n değerleri için, (4.2.3.6) ve (4.2.3.7) kullanılarak

$$\left|\tilde{\Delta}(\lambda)-\chi(\lambda)\right|<|\chi(\lambda)|,\qquad \lambda\in\Gamma_n$$

elde edilir. Rouche teoremi uygulanarak, Γ_n konturunun içerisinde, $\left\{\tilde{\Delta}(\lambda)-\chi(\lambda)\right\}+\chi(\lambda)=\tilde{\Delta}(\lambda)$ fonksiyonu ile $\chi(\lambda)$ fonksiyonun sıfırlarının sayısının aynı olduğu elde edilir. Ayrıca, Rouche teoremi uygulanarak, yeterince büyük n değerleri için,

$$\gamma_n(\delta) = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \left(n\pi + \arctan\frac{b_1}{b_2} \right) \frac{1}{\mu(\pi)} \right| < \delta \right\}$$

yuvarlarının her birinde $\tilde{\Delta}(\lambda)$ fonksiyonunun yalnız bir λ_n sıfırının var olduğu sonucuna varılır. Böylece, $\delta > 0$ keyfi olduğundan

$$\lambda_n = \left(n\pi + \arctan\frac{b_1}{b_2} \right) \frac{1}{\mu(\pi)} + \varepsilon_n, \qquad \lim_{n\to\pm\infty} \varepsilon_n = 0\,, \tag{4.2.3.8}$$

elde edilir.

Şimdi, $\{\varepsilon_n\} \in l_2$ olduğu gösterilsin: $\Delta(\lambda)$ karakteristik fonksiyonunda, (4.2.3.8) özdeğerleri yazılarak

$$\begin{aligned}
0 = \Delta(\lambda_n) &= \left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) \chi\left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) + a_1 \sin\left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) \mu(\pi) - a_2 \cos\left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) \mu(\pi) + \\
&+ \left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) \int_0^{\mu(\pi)} b_2 A_{11}(\pi,t) \sin\left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) t dt + \left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) \int_0^{\mu(\pi)} b_1 A_{21}(\pi,t) \sin\left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) t dt \\
&- \left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) \int_0^{\mu(\pi)} b_2 A_{12}(\pi,t) \cos\left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) t dt - \left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) \int_0^{\mu(\pi)} b_1 A_{22}(\pi,t) \cos\left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) t dt \\
&+ \int_0^{\mu(\pi)} a_1 A_{11}(\pi,t) \sin\left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) t dt + \int_0^{\mu(\pi)} a_2 A_{21}(\pi,t) \sin\left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) t dt \\
&- \int_0^{\mu(\pi)} a_1 A_{12}(\pi,t) \cos\left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) t dt - \int_0^{\mu(\pi)} a_2 A_{22}(\pi,t) \cos\left(\tilde{\lambda}_n + \varepsilon_n\right) t dt
\end{aligned} \tag{4.2.3.9}$$

bulunur. $\chi\left(\tilde{\lambda}_n\right) = 0$ olduğundan

$$\chi\left(\lambda_n\right)=\chi\left(\tilde{\lambda}_n+\varepsilon_n\right)=\chi\left(\tilde{\lambda}_n\right)+\dot{\chi}\left(\tilde{\lambda}_n\right)\varepsilon_n+\ddot{\chi}\left(\tilde{\lambda}_n\right)\frac{\varepsilon_n^2}{2!}+\dots$$

yazılabilir. Buradan, $\chi\left(\tilde{\lambda}_n+\varepsilon_n\right)=\dot{\chi}\left(\tilde{\lambda}_n\right)\varepsilon_n+o\left(\varepsilon_n\right)=\varepsilon_n\left(\dot{\chi}\left(\tilde{\lambda}_n\right)+o(1)\right)$ biçimindedir. (4.2.3.9) ifadesinde, bu eşitlik ve [48], sf. 67'ye göre

$$\left\{\int_0^{\mu(\pi)}A_{i1}(\pi,t)\sin\lambda_n t dt\right\}\in l_2,\qquad \left\{\int_0^{\mu(\pi)}A_{i2}(\pi,t)\cos\lambda_n t dt\right\}\in l_2\qquad i=1,2$$

ifadeleri kullanılarak $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\varepsilon_n\right|^2<\infty$ yani $\left\{\varepsilon_n\right\}\in l_2$ elde edilir.

Şimdi, özdeğerlerin basit olduğu gösterilsin: $\dot{\Delta}(\lambda_n)=\alpha_n\beta_n$ eşitliğinde $\alpha_n\neq 0,\quad \beta_n\neq 0$ olduğundan, $\dot{\Delta}(\lambda_n)\neq 0$ elde edilir. Teorem ispatlandı. □

Teorem 4.2.3.3 (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin özfonksiyonları

$$S_1(x,\lambda_n)=\sin\left[\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}\right]\mu(x)+\zeta_n(x),$$

(4.2.3.10)

$$S_2(x,\lambda_n)=-\cos\left[\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}\right]\mu(x)+\xi_n(x)$$

biçimindedir, burada her $x\in[0,\pi]$ için $\left\{\zeta_n(x)\right\}\in l_2$, $\left\{\xi_n(x)\right\}\in l_2$.

İspat. (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin (4.2.3.4) özdeğerleri, $S(x,\lambda)$ çözümünün (4.2.3.1) integral gösteriminde yazılarak,

$$S_1(x,\lambda_n)=\sin\left(\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}+\varepsilon_n\right)\mu(x)+\right.$$

$$+\int_0^{\mu(x)}A_{11}(x,t)\sin\left(\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}+\varepsilon_n\right)tdt-\right.$$

$$-\int_0^{\mu(x)} A_{12}(x,t)\cos\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}+\varepsilon_n\right)tdt$$

bulunur ve bu eşitliğe $\sin\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}\right)\mu(x)$ ifadesi eklenip çıkarılarak

$$S_1(x,\lambda_n)=\sin\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}\right)\mu(x)+\zeta_n(x)$$

elde edilir, burada

$$\zeta_n(x)=\sin\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}\right)\mu(x)\left\{\cos\varepsilon_n\mu(x)-1\right\}+$$

$$+\cos\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}\right)\mu(x)\sin\varepsilon_n\mu(x)+$$

$$+\int_0^{\mu(x)} A_{11}(x,t)\sin\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}+\varepsilon_n\right)tdt-$$

$$-\int_0^{\mu(x)} A_{12}(x,t)\cos\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}+\varepsilon_n\right)tdt$$

biçimindedir. Benzer şekilde

$$S_2(x,\lambda_n)=-\cos\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}\right)\mu(x)+\xi_n(x),$$

bulunur, burada

$$\xi_n(x)=-\cos\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}\right)\mu(x)\left\{\cos\varepsilon_n\mu(x)-1\right\}+$$

$$+\sin\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}\right)\mu(x)\sin\varepsilon_n\mu(x)+$$

$$+\int_0^{\mu(x)} A_{21}(x,t)\sin\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}+\varepsilon_n\right)tdt-$$

$$-\int_0^{\mu(x)} A_{22}(x,t)\cos\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}+\varepsilon_n\right)tdt$$

biçimindedir. $\{\varepsilon_n\}\in l_2$ ve [48], sf. 67'ye göre

$$\left\{\int_0^{\mu(\pi)} A_{11}(\pi,t)\sin\lambda_n tdt\right\}\in l_2 \qquad \left\{\int_0^{\mu(\pi)} A_{12}(\pi,t)\cos\lambda_n tdt\right\}\in l_2$$

olduğundan $\sup\limits_{0\le x\le\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|\zeta_n(x)|^2<\infty$ ve $\sup\limits_{0\le x\le\pi}\sum\limits_{n=-\infty}^{\infty}|\xi_n(x)|^2<\infty$ elde edilir, yani $\{\zeta_n\}\in l_2$ ve $\{\xi_n\}\in l_2$. Teorem ispatlandı. □

Teorem 4.2.3.4 (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin normlaştırıcı sayıları

$$\alpha_n=\mu(\pi)+\tau_n, \qquad \{\tau_n\}\in l_2$$

biçimine sahiptir.

İspat. (4.2.3.10) özfonksiyonları, (4.2.2.6) normlaştırıcı sayılarının tanımında yerine yazılarak:

$$\alpha_n=\int_0^{\pi}\left\{S_1^2(x,\lambda_n)+S_2^2(x,\lambda_n)\right\}\rho(x)dx+\frac{1}{k}\left[b_1S_2(\pi,\lambda_n)+b_2S_1(\pi,\lambda_n)\right]^2=$$

$$=\int_0^{\pi}\left\{\sin^2\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{\mu(x)}{\mu(\pi)}+\cos^2\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{\mu(x)}{\mu(\pi)}\right\}\rho(x)dx+$$

$$+2\int_0^\pi \sin\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{\mu(x)}{\mu(\pi)}\right)\zeta_n(x)\rho(x)dx-$$

$$-2\int_0^\pi \cos\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{\mu(x)}{\mu(\pi)}\right)\mu(x)\xi_n(x)\rho(x)dx+$$

$$+\int_0^\pi \left\{\zeta_n^2(x)+\xi_n^2(x)\right\}\rho(x)dx+\frac{1}{k}\left[b_1\xi_n(\pi)+b_2\zeta_n(\pi)\right]^2$$

$$=\int_0^a dx+\int_a^\pi dx+\tau_n=\alpha\pi-\alpha a+a+\tau_n=\mu(\pi)+\tau_n$$

elde edilir, burada

$$\tau_n=2\int_0^\pi \sin\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{\mu(x)}{\mu(\pi)}\right)\zeta_n(x)\rho(x)dx-$$

$$-2\int_0^\pi \cos\left(\left(n\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{\mu(x)}{\mu(\pi)}\right)\mu(x)\xi_n(x)\rho(x)dx+$$

$$+\int_0^\pi \left\{\zeta_n^2(x)+\xi_n^2(x)\right\}\rho(x)dx+\frac{1}{k}\left[b_1\xi_n(\pi)+b_2\zeta_n(\pi)\right]^2.$$

$\left\{\zeta_n(x)\right\}\in l_2$ ve $\left\{\xi_n(x)\right\}\in l_2$ olduğundan, $\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left|\tau_n\right|^2<\infty$, yani $\left\{\tau_n\right\}\in l_2$ bulunur. Teorem ispatlandı. □

4.2.4 Ayrışım Formülü

Lemma 4.2.4.1 λ, $\hat{L}$ operatörünün özdeğeri olmasın. O halde, rezolvent operatör vardır ve aşağıdaki biçime sahiptir:

$$y(x,\lambda)=\int_0^{\pi} R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)dt-\frac{f_3}{\Delta(\lambda)}S(x,\lambda)\,, \tag{4.2.4.1}$$

burada

$$R_\lambda(x,t)=\frac{-1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\psi(x,\lambda)S^T(t,\lambda), & t\le x,\\ S(x,\lambda)\psi^T(t,\lambda), & t\ge x.\end{cases} \tag{4.2.4.2}$$

İspat. $F(x)=\begin{pmatrix} f(x)\\ f_3\end{pmatrix}\in D(\hat{L})$, $f(x)=\begin{pmatrix} f_1(x)\\ f_2(x)\end{pmatrix}$ olsun. Rezolvent operatörün inşa edilmesi için aşağıdaki problem çözülür:

$$By'+\Omega(x)y=\lambda\rho(x)y+\rho(x)f(x), \tag{4.2.4.3}$$

$$\begin{gathered} y_1(0)=0,\\ \lambda\left(b_1y_2(\pi)+b_2y_1(\pi)\right)+a_1y_1(\pi)+a_2y_2(\pi)=-f_3. \end{gathered} \tag{4.2.4.4}$$

Sabitlerin değişimi yöntemi uygulanarak, (4.2.4.3), (4.2.4.4) probleminin çözümü

$$y(x,\lambda)=c_1(x,\lambda)S(x,\lambda)+c_2(x,\lambda)\psi(x,\lambda)\,, \tag{4.2.4.5}$$

biçiminde bulunacaktır, burada $S(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ homojen problemin çözümleridir. (4.2.4.5) çözümü (4.2.4.3) denkleminde yerine yazılarak

$$\begin{gathered} c_1'\left(x,\lambda\right)\psi^T(x,\lambda)BS\left(x,\lambda\right)=\psi^T(x,\lambda)f\left(x\right)\rho\left(x\right),\\ c_2'\left(x,\lambda\right)S^T(x,\lambda)B\psi\left(x,\lambda\right)=S^T(x,\lambda)f\left(x\right)\rho\left(x\right) \end{gathered} \tag{4.2.4.6}$$

elde edilir. (4.2.4.6) bağıntıları kullanılarak

$$c_1(x,\lambda)=c_1(\pi,\lambda)-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_x^{\pi}\psi^T(t,\lambda)f(t)\rho(t)dt,$$

$$c_2(x,\lambda)=c_2(0,\lambda)-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\int_0^{x}S^T(t,\lambda)f(t)\rho(t)dt$$

bulunur. Bulunan ifadeler (4.2.4.5)'de yerine yazılarak

$$y(x,\lambda)=\int_0^{\pi}R_\lambda(x,t)f(t)\rho(t)dt+c_2(0,\lambda)\psi(x,\lambda)+c_1(\pi,\lambda)S(x,\lambda), \quad (4.2.4.7)$$

elde edilir, burada

$$R_\lambda(x,t)=\frac{-1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\psi(x,\lambda)S^T(t,\lambda), & t\le x,\\ S(x,\lambda)\psi^T(t,\lambda), & t\ge x.\end{cases}$$

(4.2.4.4) sınır koşulları kullanılarak,

$$c_2(0,\lambda)=0, \qquad c_1(\pi,\lambda)=-\frac{f_3}{\Delta(\lambda)}$$

bulunur ve (4.2.4.7)'de yerine yazılarak (4.2.4.1) rezolvent operatörü elde edilir. Lemma ispatlandı. □

Teorem 4.2.4.2 (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin $\{S(x,\lambda_n)\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ özfonksiyonlarının sistemi $L_{2,\rho}(0,\pi;\mathbb{C}^2)\oplus\mathbb{C}$ uzayında tamdır.

İspat. (4.2.2.5) ve (4.2.2.7) ifadelerinden

$$\psi(x,\lambda_n)=\frac{\dot{\Delta}(\lambda_n)}{\alpha_n}S(x,\lambda_n) \quad (4.2.4.8)$$

bağıntısı sağlanır. Bu bağıntıdan ve (4.2.4.1) rezolvent operatöründen

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y(x,\lambda) = -\frac{1}{\alpha_n} S(x,\lambda_n) \int_0^{\pi} S^T(t,\lambda_n) f(t)\,dt - \frac{f_3}{\dot{\Delta}(\lambda_n)} S(x,\lambda_n) \qquad (4.2.4.9)$$

bulunur. $F(x) = (f(x), f_3)^T \in L_{2,\rho}(0,\pi;\mathbb{C}^2) \oplus \mathbb{C}$ olsun öyle ki

$$\langle F(x), S(x,\lambda_n) \rangle = \int_0^{\pi} S^T(t,\lambda_n) f(t)\rho(t)\,dt + \frac{f_3}{k}\left(b_1 S_2(\pi,\lambda_n) + b_2 S_1(\pi,\lambda_n)\right) = 0 \qquad (4.2.4.10)$$

sağlansın. (4.2.4.8) ifadesinden,

$$S_1(\pi,\lambda_n) = \frac{\lambda b_1 + a_2}{\beta_n}, \qquad S_2(\pi,\lambda_n) = \frac{-\lambda b_2 - a_1}{\beta_n}$$

elde edilir. Bu eşitlikler (4.2.4.10) ifadesinde yerine yazılarak, (4.2.4.9)'dan $\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y(x,\lambda) = 0$ elde edilir. Sonuç olarak, $y(x,\lambda)$ sabitlenmiş $x \in [0,\pi]$ için λ'nın tam fonksiyonudur.

$$|\Delta(\lambda)| \geq |\lambda| C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda \mu(\pi)|}$$

eşitsizliği ve

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \max_{0\le x\le\pi} e^{-|\operatorname{Im}\lambda|\mu(x)} \left| \int_0^x S^T(t,\lambda) f(t)\rho(t)\,dt \right| = 0, \qquad (4.2.4.11)$$

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \max_{0\le x\le\pi} e^{-|\operatorname{Im}\lambda|(\mu(\pi)-\mu(x))} \left| \int_x^{\pi} \psi^T(t,\lambda) f(t)\rho(t)\,dt \right| = 0, \qquad (4.2.4.12)$$

ifadeleri ([48], [49]) kullanılarak

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} \max_{0\le x\le\pi} |y(x,\lambda)| = 0$$

bulunur. Böylece, $y(x,\lambda) \equiv 0$ elde edilir ve (4.2.4.3), (4.2.4.4)'den $F(x) = 0$, *hhhy* $(0,\pi)$ sonucuna varılır. Teorem ispatlandı. □

Teorem 4.1.4.3 $F(x)=\left(f(x),\, f_3\right)^T \in D(\hat{L})$ olsun. O halde aşağıdaki ayrışım formülü sağlanır:

$$f(x)=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n S\left(x,\lambda_n\right), \qquad (4.1.4.13)$$

$$f_3=\sum_{n=-\infty}^{\infty} c_n\left[b_1 S_2\left(\pi,\lambda_n\right)+b_2 S_1\left(\pi,\lambda_n\right)\right],$$

burada

$$c_n=\frac{1}{\alpha_n}\left\langle f(x), S\left(x,\lambda_n\right)\right\rangle .$$

(4.2.4.13) serisi $x\in\left[0,\pi\right]$'e göre düzgün yakınsaktır. $f(x)\in L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)$ için, (4.2.4.13) serisi $L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)$ uzayında yakınsaktır ve Parseval eşitliği sağlanır:

$$\|f\|^2=\sum_{n=-\infty}^{\infty}\alpha_n\left|c_n\right|^2 . \qquad (4.2.4.14)$$

İspat. $S\left(x,\lambda\right)$ ve $\psi\left(x,\lambda\right)$ (4.2.1.1), (4.2.1.2) probleminin çözümleri olduğundan,

$$y(x,\lambda)=-\frac{\psi(x,\lambda)}{\lambda\Delta(\lambda)}\int_0^x\left\{-\frac{\partial}{\partial t}S^T\left(t,\lambda\right)B+S^T\left(t,\lambda\right)\Omega(t)\right\}f\left(t\right)dt-$$

$$-\frac{S(x,\lambda)}{\lambda\Delta(\lambda)}\int_x^{\pi}\left\{-\frac{\partial}{\partial t}\psi^T\left(t,\lambda\right)B+\psi^T\left(t,\lambda\right)\Omega(t)\right\}f\left(t\right)dt-\frac{f_3}{\Delta(\lambda)}S\left(x,\lambda\right)$$

yazılabilir. Kısmi integralleme yapılarak ve (4.2.2.3) Wronskianın ifadesi kullanılarak,

$$y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda}f\left(x\right)-\frac{1}{\lambda}Z(x,\lambda)-\frac{f_3}{\Delta(\lambda)}S\left(x,\lambda\right), \qquad (4.2.4.15)$$

bulunur, burada

$$Z(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\psi(x,\lambda)\int_0^x S^T(t,\lambda)Bf'(t)dt+\frac{1}{\Delta(\lambda)}S(x,\lambda)\int_x^\pi \psi^T(t,\lambda)Bf'(t)dt+$$

$$+\frac{1}{\Delta(\lambda)}\psi(x,\lambda)\int_0^x S^T(t,\lambda)\Omega(t)f(t)dt+\frac{1}{\Delta(\lambda)}S(x,\lambda)\int_x^\pi \psi^T(t,\lambda)\Omega(t)f(t)dt.$$

(4.2.4.11) ve (4.2.4.12) den

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{0\le x\le o}\left|Z(x,\lambda)\right|=0,\qquad \lambda\in G_\delta. \tag{4.2.4.16}$$

Şimdi, $y(x,\lambda)$ ifadesi λ'ya göre Γ_n konturu boyunca integrallensin:

$$I_N(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N} y(x,\lambda)d\lambda\,,$$

burada

$$\Gamma_N=\left\{\lambda:|\lambda|=\left(N\pi+\arctan\frac{b_1}{b_2}\right)\frac{1}{\mu(\pi)}+\frac{\pi}{2\mu(\pi)}\right\},$$

N yeterince büyük sayıdır. Rezidü teoremi uygulanarak,

$$I_N(x)=\sum_{n=-N}^{N}\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y(x,\lambda)=$$

$$=\sum_{n=-N}^{N}-\frac{1}{\alpha_n}S(x,\lambda_n)\int_0^\pi S^T(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)dt-\sum_{n=-N}^{N}\frac{f_3}{\dot\Delta(\lambda_n)}S(x,\lambda_n) \tag{4.2.4.17}$$

bulunur. Diğer taraftan, (4.2.4.15) eşitliğinden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N} y(x,\lambda)d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{1}{\lambda}f(x)d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{1}{\lambda}Z(x,\lambda)d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{f_3}{\Delta(\lambda)}S(x,\lambda)d\lambda$$

$$=-f(x)-\sum_{n=-N}^{N}\frac{f_3}{\dot\Delta(\lambda_n)}S(x,\lambda_n)-\varepsilon_N(x) \tag{4.2.4.18}$$

elde edilir. Böylece, (4.2.4.17) ve (4.2.4.18)'den

$$f(x)=\sum_{n=-N}^{N}c_n S\left(x,\lambda_n\right)+\varepsilon_N(x) \tag{4.2.4.19}$$

sonucuna varılır, burada

$$\varepsilon_N(x)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N}\frac{1}{\lambda}Z(x,\lambda)d\lambda\,, \qquad c_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}S^T\left(t,\lambda_n\right)f\left(t\right)\rho\left(t\right)dt\,.$$

(4.2.4.16) ifadesi kullanılarak, $\lim\limits_{|\lambda|\to\infty}\max\limits_{0\le x\le\pi}\left|\varepsilon_N(x)\right|=0$ bulunur. Böylece, (4.2.4.19) eşitliğinde $N\to\infty$ iken (4.2.4.13) ayrışım formülü elde edilir. $\{S(x,\lambda_n)\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ sistemi $L_{2,\rho}(0,\pi;\mathbb{C}^2)\oplus\mathbb{C}$ uzayında tam ve ortagonal olduğundan (4.2.4.14) Parseval eşitliği sağlanır.

4.2.5 Ters Spektral Problemin Weyl Fonksiyonuna Göre Tekliği

(4.2.1.1) sisteminin

$$\Phi_1(0,\lambda)=1,$$

$$\lambda\left(b_1\Phi_2(\pi,\lambda)+b_2\Phi_1(\pi,\lambda)\right)+a_1\Phi_1(\pi,\lambda)+a_2\Phi_2(\pi,\lambda)=0$$

koşullarını sağlayan çözümü $\Phi(x,\lambda)$ olarak tanımlansın.

Tanım 4.2.5.1 $\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonuna, (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin Weyl çözümü denir.

$C(x,\lambda)$, (4.2.1.1) sisteminin

$$C_1(0,\lambda)=1, \qquad C_2(0,\lambda)=0$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. Lemma 4.2.3.1'e benzer şekilde, $C(x,\lambda)$ çözümü, $|\lambda|\to\infty$ iken $x\in[0,\pi]$'e göre düzgün olarak aşağıdaki asimptotik biçime sahiptir:

$$C_1(x,\lambda)=\cos\lambda\mu(x)+O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu(x)}\right),$$

$$C_2(x,\lambda)=\sin\lambda\mu(x)+O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu(x)}\right).$$

$\psi(x,\lambda)$ çözümü, $S(x,\lambda)$ ve $C(x,\lambda)$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu şeklinde yazılabilir:

$$\psi(x,\lambda)=k_1(\lambda)C(x,\lambda)+k_2(\lambda)S(x,\lambda).$$

Buradan, $k_1(\lambda)=\psi_1(0,\lambda)=-\Delta(\lambda)$ ve $k_2(\lambda)=-\psi_2(0,\lambda)$ elde edilir. Bu ifadeler yerine yazılarak

$$-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=C(x,\lambda)+\frac{\psi_2(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}S(x,\lambda) \tag{4.2.5.1}$$

bulunur.

$$M(\lambda):=\frac{\psi_2(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{4.2.5.2}$$

olarak tanımlansın. Benzer şekilde, $\Phi(x,\lambda)$ çözümü, $S(x,\lambda)$ ve $C(x,\lambda)$ fonksiyonlarının lineer kombinasyonu biçiminde yazılabilir:

$$\Phi(x,\lambda)=t_1(\lambda)C(x,\lambda)+t_2(\lambda)S(x,\lambda).$$

Buradan, $t_1(\lambda)=\Phi_1(0,\lambda)=1$ ve $t_2(\lambda)=-\Phi_2(0,\lambda)$ bulunur ve

$$\Phi(x,\lambda) = C(x,\lambda) - \Phi_2\left(0,\lambda\right) S(x,\lambda). \tag{4.2.5.3}$$

(4.2.5.1) ve (4.2.5.3)'den

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}, \tag{4.2.5.4}$$

$$M(\lambda) = \frac{\psi_2(0,\lambda)}{\Delta\left(\lambda\right)} = -\Phi_2\left(0,\lambda\right)$$

elde edilir.

Tanım 4.2.5.2 $M(\lambda) = -\Phi_2(0,\lambda)$ fonksiyonuna, (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin Weyl fonksiyonu denir.

Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin $\lambda_n \ \left(n \in \mathbb{Z}\right)$ özdeğerlerinde basit kutup noktalarına sahip meramorf fonksiyonlardır.

L problemi olarak, (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer problemi gösterilsin. (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminde $\Omega(x) \equiv 0$ olduğunda uygun problem L^0 olsun. Bu durumda L^0 problemi

$$\Delta_0(\lambda) = \lambda\left(b_2 \sin\lambda\mu\left(\pi\right) - b_1 \cos\lambda\mu\left(\pi\right)\right) + a_1 \sin\lambda\mu\left(\pi\right) - a_2 \cos\lambda\mu\left(\pi\right)$$

karakteristik fonksiyonuna,

$$M_0(\lambda) = -\frac{\psi_{0,2}(0,\lambda)}{\psi_{0,1}(0,\lambda)} \tag{4.1.5.5}$$

Weyl fonksiyonuna, α_n^0 normlaştırıcı sayılarına ve λ_n^0 özdeğerlerine sahiptir.

Teorem 4.1.5.3 $M(\lambda)$ Weyl fonksiyonu aşağıdaki biçime sahiptir:

$$M(\lambda) = -\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n^0\lambda_n^0} + \frac{1}{\alpha_n\left(\lambda-\lambda_n\right)}\right). \tag{4.1.5.6}$$

İspat. $C(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümlerinin Wronskianı

$$W\left[C(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\right] = -\psi_2(0,\lambda) = \left(\lambda b_1 + a_2\right)C_2(\pi,\lambda) + \left(\lambda b_2 + a_1\right)C_1(\pi,\lambda)$$

olduğundan, (4.2.5.2) ve (4.2.2.5) ifadeleri

$$M(\lambda) = -\frac{\left(\lambda b_1 + a_2\right)C_2(\pi,\lambda) + \left(\lambda b_2 + a_1\right)C_1(\pi,\lambda)}{\left(\lambda b_1 + a_2\right)S_2(\pi,\lambda) + \left(\lambda b_2 + a_1\right)S_1(\pi,\lambda)}$$

$$= -\frac{\left(\lambda b_1 + a_2\right)C_2(\pi,\lambda) + \left(\lambda b_2 + a_1\right)C_1(\pi,\lambda)}{\Delta\left(\lambda\right)}, \tag{4.2.5.7}$$

$$M_0(\lambda) = -\frac{\left(\lambda b_1 + a_2\right)C_{0,2}(\pi,\lambda) + \left(\lambda b_2 + a_1\right)C_{0,1}(\pi,\lambda)}{\left(\lambda b_1 + a_2\right)S_{0,2}(\pi,\lambda) + \left(\lambda b_2 + a_1\right)S_{0,1}(\pi,\lambda)}$$

$$= -\frac{\left(\lambda b_1 + a_2\right)\sin\lambda\mu(\pi) + \left(\lambda b_2 + a_1\right)\cos\lambda\mu(\pi)}{-\left(\lambda b_1 + a_2\right)\cos\lambda\mu(\pi) + \left(\lambda b_2 + a_1\right)\sin\lambda\mu(\pi)}$$

$$= -\frac{\left(\lambda b_1 + a_2\right)\sin\lambda\mu(\pi) + \left(\lambda b_2 + a_1\right)\cos\lambda\mu(\pi)}{\Delta_0(\lambda)} \tag{4.2.5.8}$$

biçiminde yazılabilir. (4.2.5.7) ve (4.2.5.8) ifadelerinde, $C(x,\lambda)$ ve $S(x,\lambda)$ çözümlerinin asimptotik biçimleri ile $\left|\Delta\left(\lambda\right)\right| \geq |\lambda| C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda\mu(\pi)|}$ ve $\left|\Delta_0\left(\lambda\right)\right| \geq |\lambda| C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda\mu(\pi)|}$ eşitsizlikleri kullanılarak, $|\lambda| \to \infty$ iken

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\left|M(\lambda) - M_0(\lambda)\right| = 0, \quad \lambda \in G_\delta \tag{4.2.5.9}$$

elde edilir. $S(x,\lambda_n)$ $\left(S_0(x,\lambda_n^0)\right)$ ve $\psi(x,\lambda_n)$ $\left(\psi_0(x,\lambda_n^0)\right)$ fonksiyonları L $\left(L^0\right)$ sınır değer probleminin özfonksiyonlarıdır. β_n $\left(\beta_n^0\right)$ sabiti vardır öyleki

$$\psi(x,\lambda_n)=\beta_n S\left(x,\lambda_n\right)\ \left(\psi_0(x,\lambda_n^0)=\beta_n^0 S_0\left(x,\lambda_n^0\right)\right)$$

sağlanır. Bu eşitliklerden

$$\beta_n=-\psi_2\left(0,\lambda_n\right)\ \left(\beta_n^0=-\psi_{0,2}\left(0,\lambda_n^0\right)\right),\quad \alpha_n\beta_n=\dot{\Delta}\left(\lambda_n\right)\ \left(\alpha_n^0\beta_n^0=\dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)\right)$$

biçimindedir. Bu bağıntılar kullanılarak

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda)=\frac{\psi_2(0,\lambda_n)}{\dot{\Delta}\left(\lambda_n\right)}=-\frac{1}{\alpha_n},$$

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n^0} M_0(\lambda)=\frac{\psi_{0,2}(0,\lambda_n^0)}{\dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)}=-\frac{1}{\alpha_n^0}$$

bulunur.

$$I_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_N(\lambda)}\frac{M(\xi)-M_0(\xi)}{\xi-\lambda}d\xi,\quad \xi\in\operatorname{int}\Gamma_N$$

kontur integrali ele alınsın. (4.2.5.9) ifadesi kullanılarak, $\lim_{N\to\infty} I_N(\lambda)=0$ elde edilir. $\frac{M(\xi)}{\xi-\lambda}$, $\xi=\lambda$ ve $\xi=\lambda_n$, $\left(n\in\mathbb{Z}\right)$ noktalarında basit kutup yerlerine sahiptir. O halde

$$\operatorname*{Res}_{\xi=\lambda}\frac{M(\xi)}{\xi-\lambda}=\lim_{\xi\to\lambda}\left(\xi-\lambda\right)\frac{M(\xi)}{\xi-\lambda}=M(\lambda),$$

$$\operatorname*{Res}_{\xi=\lambda_n}\frac{M(\xi)}{\xi-\lambda}=\lim_{\xi\to\lambda_n}\left(\xi-\lambda_n\right)\frac{M(\xi)}{\xi-\lambda}=-\frac{1}{\alpha_n\left(\lambda_n-\lambda\right)}.$$

Benzer şekilde, $\dfrac{M_0(\xi)}{\xi-\lambda}$, $\xi=\lambda$ ve $\xi=\lambda_n^0$, $\left(n\in\mathbb{Z}\right)$ noktalarında basit kutup yerlerine sahiptir. O halde,

$$\operatorname*{Res}_{\xi=\lambda}\frac{M_0(\xi)}{\xi-\lambda}=\lim_{\xi\to\lambda}\left(\xi-\lambda\right)\frac{M_0(\xi)}{\xi-\lambda}=M_0(\lambda),$$

$$\operatorname*{Res}_{\xi=\lambda_n^0}\frac{M_0(\xi)}{\xi-\lambda}=\lim_{\xi\to\lambda_n}\left(\xi-\lambda_n^0\right)\frac{M_0(\xi)}{\xi-\lambda}=-\frac{1}{\alpha_n^0\left(\lambda_n^0-\lambda\right)}.$$

Diğer taraftan, rezidü teoreminden

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{M\left(\xi\right)}{\xi-\lambda}d\xi=M\left(\lambda\right)-\sum_{\lambda_n\in\operatorname{int}\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n\left(\lambda_n-\lambda\right)},$$

$$\frac{1}{2\pi i}\int_{\Gamma_n}\frac{M_0\left(\xi\right)}{\xi-\lambda}d\xi=M_0\left(\lambda\right)-\sum_{\lambda_n^0\in\operatorname{int}\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n^0\left(\lambda_n^0-\lambda\right)}$$

elde edilir. O halde

$$I_N(\lambda)=M(\lambda)-M_0(\lambda)+\sum_{\lambda_n^0\in\operatorname{int}\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n^0\left(\lambda_n^0-\lambda\right)}-\sum_{\lambda_n\in\operatorname{int}\Gamma_n}\frac{1}{\alpha_n\left(\lambda_n-\lambda\right)}$$

bulunur. Son ifadede $N\to\infty$ iken $\lim\limits_{N\to\infty}I_N(\lambda)=0$ olduğundan

$$M(\lambda)=M_0(\lambda)-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n\left(\lambda-\lambda_n\right)}-\frac{1}{\alpha_n^0\left(\lambda-\lambda_n^0\right)}\right) \tag{4.2.5.10}$$

sonucuna varılır. $M_0(\lambda)$ fonksiyonu aşağıdaki biçime sahiptir:

$$M_0(\lambda)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n^0\left(\lambda-\lambda_n^0\right)}+\frac{1}{\alpha_n^0\lambda_n^0}\right).$$

Son eşitlik, (4.2.5.10) ifadesinde yerine yazılarak, Weyl fonksiyonu

$$M(\lambda)=-\sum_{n=-\infty}^{\infty}\left(\frac{1}{\alpha_n^0\lambda_n^0}+\frac{1}{\alpha_n\left(\lambda-\lambda_n\right)}\right)$$

biçiminde elde edilir. Teorem ispatlandı. □

Şimdi, L probleminin Weyl fonksiyonuna ve spektral verilere göre $\{\lambda_n,\alpha_n\}$, $\left(n\in\mathbb{Z}\right)$ tek türlü belirli olduğu gösterilecektir. Bunun için farklı $\tilde{L}$ problemi ele alınsın, burada $\tilde{L}$ problemi, L ile benzer biçime sahip ancak farklı katsayılara sahip olsun. Ayrıca, herhangi s sembolü L problemine ait iken, $\tilde{s}$ sembolü $\tilde{L}$ problemine ait olsun.

Teorem 4.2.5.4 $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise, o halde $L=\tilde{L}$, yani (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer problemi Weyl fonksiyonuna göre tek türlü belirlidir.

İspat. $P(x,\lambda)=\left[P_{ij}(x,t)\right]_{i,j=1,2}$ matrisi

$$P(x,\lambda)\begin{pmatrix}\tilde{S}_1 & \tilde{\Phi}_1\\ \tilde{S}_2 & \tilde{\Phi}_2\end{pmatrix}=\begin{pmatrix}S_1 & \Phi_1\\ S_2 & \Phi_2\end{pmatrix} \tag{4.2.5.11}$$

formülü ile tanımlansın. $\tilde{S}(x,\lambda)$ ve $\tilde{\Phi}(x,\lambda)$ çözümlerinin Wronskianı

$$W[\tilde{S}(x,\lambda),\tilde{\Phi}(x,\lambda)]=\tilde{S}_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda)-\tilde{S}_1(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda)=-1. \tag{4.2.5.12}$$

(4.2.5.11) eşitliğinin her iki tarafı sağdan $\begin{pmatrix}-\tilde{\Phi}_2 & \tilde{\Phi}_1\\ \tilde{\varphi}_2 & -\tilde{\varphi}_1\end{pmatrix}$ ile çarpılarak,

$$\begin{aligned}
P_{11}(x,\lambda)&=S_1(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2\left(x,\lambda\right)-\Phi_1\left(x,\lambda\right)\tilde{S}_2(x,\lambda),\\
P_{12}(x,\lambda)&=\Phi_1\left(x,\lambda\right)\tilde{S}_1(x,\lambda)-S_1(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1\left(x,\lambda\right),\\
P_{21}(x,\lambda)&=S_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2\left(x,\lambda\right)-\Phi_2\left(x,\lambda\right)\tilde{S}_2(x,\lambda),\\
P_{22}(x,\lambda)&=\Phi_2\left(x,\lambda\right)\tilde{S}_1(x,\lambda)-S_2(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1\left(x,\lambda\right)
\end{aligned} \tag{4.2.5.13}$$

elde edilir ve (4.2.5.11) ifadesi açılarak

$$\begin{aligned}
S_1(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\tilde{S}_1(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{S}_2(x,\lambda),\\
S_2(x,\lambda) &= P_{21}(x,\lambda)\tilde{S}_1(x,\lambda) + P_{22}(x,\lambda)\tilde{S}_2(x,\lambda),\\
\Phi_1(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda),\\
\Phi_2(x,\lambda) &= P_{21}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_1(x,\lambda) + P_{22}(x,\lambda)\tilde{\Phi}_2(x,\lambda)
\end{aligned} \tag{4.2.5.14}$$

bulunur. (4.2.5.13) eşitliklerinde, $\Phi(x,\lambda) = -\dfrac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ ve (4.2.5.12) kullanılarak

$$P_{11}(x,\lambda) - 1 = \tilde{S}_2(x,\lambda)\left[\frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}\right] - \frac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}\left[S_1(x,\lambda) - \tilde{S}_1(x,\lambda)\right],$$

$$P_{12}(x,\lambda) = \frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\left[S_1(x,\lambda) - \tilde{S}_1(x,\lambda)\right] + S_1(x,\lambda)\left[\frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} - \frac{\psi_1(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right],$$

$$P_{21}(x,\lambda) = \frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\left[\tilde{S}_2(x,\lambda) - S_2(x,\lambda)\right] + S_2(x,\lambda)\left[\frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \frac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}\right],$$

$$P_{22}(x,\lambda) - 1 = \tilde{S}_1(x,\lambda)\left[\frac{\tilde{\psi}_2(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)} - \frac{\psi_2(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right] - \frac{\tilde{\psi}_1(x,\lambda)}{\tilde{\Delta}(\lambda)}\left[\tilde{S}_2(x,\lambda) - S_2(x,\lambda)\right]$$

elde edilir. $S(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümlerinin biçiminden ve $|\Delta(\lambda)| \geq |\lambda| C_\delta e^{|\operatorname{Im}\lambda\mu(\pi)|}$ eşitsizliğinden,

$$\begin{aligned}
&\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \lambda\in G_\delta}} \max_{0\leq x\leq\pi} |P_{11}(x,\lambda) - 1| = 0, \qquad && \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \lambda\in G_\delta}} \max_{0\leq x\leq\pi} |P_{12}(x,\lambda)| = 0,\\
&\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \lambda\in G_\delta}} \max_{0\leq x\leq\pi} |P_{21}(x,\lambda)| = 0, && \lim_{\substack{|\lambda|\to\infty \\ \lambda\in G_\delta}} \max_{0\leq x\leq\pi} |P_{22}(x,\lambda) - 1| = 0
\end{aligned} \tag{4.2.5.15}$$

sonucuna varılır. $\Phi(x,\lambda) = C(x,\lambda) + M(\lambda)S(x,\lambda)$ olduğundan, bu eşitlik (4.2.5.13)'de kullanılarak

$$P_{11}(x,\lambda) = S_1(x,\lambda)\tilde{C}_2(x,\lambda) - C_1(x,\lambda)\tilde{S}_2(x,\lambda) + S_1(x,\lambda)\tilde{S}_2(x,\lambda)\left[\tilde{M}(\lambda) - M(\lambda)\right],$$

$$P_{12}(x,\lambda)=C_1(x,\lambda)\tilde{S}_1(x,\lambda)-S_1(x,\lambda)\tilde{C}_1(x,\lambda)+S_1(x,\lambda)\tilde{S}_1(x,\lambda)\left[M(\lambda)-\tilde{M}(\lambda)\right],$$

$$P_{21}(x,\lambda)=S_2(x,\lambda)\tilde{C}_2(x,\lambda)-C_2(x,\lambda)\tilde{S}_2(x,\lambda)+S_2(x,\lambda)\tilde{S}_2(x,\lambda)\left[\tilde{M}(\lambda)-M(\lambda)\right],$$

$$P_{22}(x,\lambda)=C_2(x,\lambda)\tilde{S}_1(x,\lambda)-S_2(x,\lambda)\tilde{C}_1(x,\lambda)+S_2(x,\lambda)\tilde{S}_1(x,\lambda)\left[M(\lambda)-\tilde{M}(\lambda)\right]$$

elde edilir. Böylece, eğer $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise, sabitlenmiş her $x\in[0,\pi]$ için $P_{ij}(x,\lambda)_{i,j=1,2}$ λ'nın tam fonksiyonudur. O halde, (4.2.5.15)'den

$$P_{11}(x,\lambda)\equiv 1,\quad P_{12}(x,\lambda)\equiv 0,\quad P_{21}(x,\lambda)\equiv 0,\quad P_{22}(x,\lambda)\equiv 1$$

bulunur. Son ifadeler (4.2.5.14)'de yerine yazılarak, her $x\in[0,\pi]$ ve λ için

$$S_1(x,\lambda)\equiv\tilde{S}_1(x,\lambda),\qquad S_2(x,\lambda)\equiv\tilde{S}_2(x,\lambda),$$

$$\Phi_1(x,\lambda)\equiv\tilde{\Phi}_1(x,\lambda),\qquad \Phi_1(x,\lambda)\equiv\tilde{\Phi}_1(x,\lambda)$$

elde edilir. Böylece, $L\equiv\tilde{L}$ sonucuna varılır. Teorem ispatlandı. □

Teorem 4.2.5.5 Eğer her $n\in\mathbb{Z}$ için $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n=\tilde{\alpha}_n$ ise, o halde $L=\tilde{L}$, yani (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer problemi spektral verilere göre tek türlü belirlidir.

İspat. $M(\lambda)$ Weyl fonksiyonunun (4.2.5.6) gösterimi incelendiğinde bu fonksiyonun biçiminin $\{\lambda_n,\alpha_n\}$, $(n\in\mathbb{Z})$ spektral verilerine bağlı olduğu görülür. Her $n\in\mathbb{Z}$ için $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n=\tilde{\alpha}_n$ olduğundan ve (4.1.5.6) gösteriminden $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ elde edilir. Böylece, Teorem 4.2.5.4 kullanılarak, $L=\tilde{L}$ sonucuna varılır. Teorem ispatlandı. □

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 SONUÇLAR

Bulgular ve Tartışma bölümünde iki farklı problem ele alınmıştır.

Birinci problemde, sonlu aralıkta süreksiz katsayılı Dirac operatörünün ters problemi spektral verilere göre tamamen çözülmüştür, yani ters problemin çözülebilmesi için spektral veriler üzerine gerek ve yeter koşul bulunmuştur ve potansiyeli tek türlü inşa etme algoritması verilmiştir. Bunun için;

1. Gelfand-Levitan yöntemi kullanılarak temel denklem inşa edilmiştir,
2. Temel denklemin tek bir çözüme sahip olduğu gösterilmiştir,
3. Problemin spektral verileri tanımlanmıştır. Sınır değer probleminin ters problemi için teklik teoremi spektral verilere göre ispatlanmıştır.
4. Ters problemin çözümü için spektral veriler üzerine gerek ve yeter koşul ile ilgili temel teorem ispat edilmiştir. Yeterlilik kısmının ispatında, diferansiyel denklem ve Parseval eşitliği temel denklem kullanılarak inşa edilmiştir ve daha sonra sınır koşulları inşa edilmiştir.
5. Spektral verilere göre $\Omega(x)$ potansiyelini inşa etme algoritması verilmiştir.

İkinci problemde süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi ile sınır koşulu spektral parametre bulunduran bir sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu sınır değer problemi için spektral analizin ters problemi Weyl fonksiyonuna göre çözülmüştür. Bunun için;

1. Sınır değer probleminin $H_\rho = L_{2,\rho}\left(0,\pi;\mathbb{C}^2\right)\oplus\mathbb{C}$ Hilbert uzayında operatör biçimi verilmiştir. Problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları tanımlanmıştır.

Farklı özdeğerlere uygun özfonksiyonların dik olduğu ve operatörün özdeğerlerinin reel olduğu ispatlanmıştır.

2. Sınır değer probleminin özdeğerlerinin, özfonksiyonlarının ve normlaştırıcı sayılarının asimptotik biçimleri incelenmiştir. Problemin özdeğerlerinin basit olduğu elde edilmiştir.
3. Rezolvent operatör inşa edilmiştir. Özfonksiyonlara göre tamlık teoremi ispatlanmıştır. Kontur üzeri integralleme yöntemi kullanılarak özfonksiyonlara göre ayrışım formülü ve Parseval eşitliği elde edilmiştir.
4. Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu tanımlanmıştır. Weyl fonksiyonun biçimi elde edilmiştir.
5. Weyl fonksiyonuna göre sınır değer probleminin ters probleminin çözümünün tekliği ispatlanmıştır.
6. Sınır değer probleminin ters probleminin çözümünün tekliği spektral verilere göre gösterilmiştir.

5.2 ÖNERİLER

1. Birinci mertebeden süreksiz katsayılı Dirac denklemler sistemi ve farklı sınır koşulları ile oluşan sınır değer problemlerinin ters problemleri farklı spektral karakteristiklere göre incelenebilir.
2. Süreksiz katsayının sonlu sayıda ya da sayılabilir sayıda süreksizlik noktasına sahip olduğu durumlarda Dirac denklemler sistemi için spektral analizin düz ve ters problemleri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Ablowitz, M. J., Kaup, D. J., Newell, A. C. and Segur, H. “Nonlinear-evolution equations of physical significance”, Phys. Rev. Lett., 31: 125-127, (1973).

[2] Gasymov, M. G. and Dzabiev, T. T. “Solution of inverse problem by two spectra for the Dirac equation on a infinite interval”, Dokl. Akad. Nauk SSR, 22(7): 3–6, (1966).

[3] Dzabiev, T. T. “The inverse problem for the Dirac equation with a singularity”, Dokl. Akad. Nauk SSR, 22(11): 8–12, (1966).

[4] Mamedov, S. G. “The inverse boundary value problem on a finite interval for Dirac's system of equation”, Azerbaidzan. Gos. Univ. Ucen. Zap. Ser. Fiz-Mat. Nauk, (5): 61-67, (1975) (Russian).

[5] Misyura, T. V. “Characteristics of spektrums of periodical and antiperiodical boundary value problems generated by Dirac operation”, II. Teoriya funktsiy, funk. analiz i ikh prilozheiniya. Kharkov, 31: 102-109, (1979).

[6] Nabiev, I. M. “Solution of the inverse quasiperiodic problem for the Dirac system”, Mathematical Notes, 80(5-6): 845-852, (2011).

[7] Albeverio, S., Hryniv, R., and Mykytyuk, Ya. “Inverse spectral problems for Dirac operators with summable potentials”, Russ. J. Math. Phys., 12(4): 406-423, (2005).

[8] Malamud, M. M. “Questions of uniqueness in inverse problems for systems of differential equations on a finite interval”, Trans. Moscow Math. Soc., 60: 204-262, (1999).

[9] Latifova, A. R. “The inverse problem of one class of Dirac operators with discontinuous coefficients by the Weyl function”, Proceeding of IMM of NAS of Azerbaijan, 22: 65–70, (2005).

[10] Mamedov, Kh. R. and Akçay, Ö. "Inverse problem for a class of Dirac operator", Taiwanese Journal of Mathematics, 18(3): 753-772, (2014).

[11] Mamedov, Kh. R. and Akcay, O. " Inverse eigenvalue problem for a class of Dirac operators with discontinuous coefficient", Boundary Value Problems, 2014:110, doi:10.1186/1687-2770-2014-110, (2014).

[12] Mamedov, Kh. R. and Akcay, O. "Necessary and sufficient conditions for the solvability of inverse problem for a class of Dirac operators", Miskolc Mathematical Notes, 16(1): 257-275, (2015).

[13] Guo, Y. and Wei G. "Inverse nodal problem for Dirac equations with boundary conditions polynomially dependent on the spectral parameter", Results in Mathematics, 67: 95-110, (2015).

[14] Yang, C.-F. and Huang, Z.-Y. "Reconstruction of the Dirac operator from nodal data", Integral Equations and Operator Theory, 66: 539-551, (2010).

[15] Yang C.-F. and Pivovarchik, V. N. "Inverse nodal problem for Dirac system with spectral parameter in boundary conditions", Complex Analysis and Operator Theory, 7: 1211-1230, (2011).

[16] Puyda, D. V. "Numerical solution of inverse spectral problems for Dirac operators on a finite intervals in some special cases", Journal of National University Lvivska Politechnika Physical and mathematical sciences, 768: 53-58, (2013).

[17] Amirov, R. Kh. "On system of Dirac differential equations with discontinuity conditions inside an interval", Ukrainian Math. J., 57(5): 712-727, (2005).

[18] Huseynov, H. M. and Latifova, A. R. "The main equation for the system of Dirac equation with discontinuity conditions interior to interval", Transactions of NAS of Azerbaijan, 28(1): 63-76, (2008).

[19] Yang, C.-F. "Inverse problems for Dirac equations polynomially depending on the spectral parameter", Applicable Analysis, DOI: 10.1080/00036811.2015.1061654, (2015).

[20] Yang, C.-F. and Yuan, G.-L. "Determination of Dirac operator with eigenvalue-dependent boundary and jump conditions", Applicable Analysis, 94(7): 1460-1478, (2015).

[21] Guo, Y., Wei, G. and Yao, R. "Inverse problem for interior spectral data of discontinuous Dirac operator", Applied Mathematics and Computation, 268: 775-782, (2015).

[22] Tharwat, M. M. "On sampling theories and discontinuous Dirac systems with eigenparameter in the boundary conditions", Boundary Value Problems, 2013:65, doi:10.1186/1687-2770-2013-65, (2013).

[23] Tharwat, M. M., Yıldırım, A. and Bhrawy, A. H. "Sampling of discontinuous Dirac systems", Numerical Functional Analysis and Optimization, 34(3): 323-348, (2013).

[24] Kerimov, N. B. "A boundary value problem for the Dirac system with a spectral parameter in the boundary conditions", Differential Equations, 38(2): 164-174, (2002).

[25] Gasymov, M. G. and Levitan, B. M. "The inverse problem for the Dirac system," Dokl. Akad. Nauk SSSR, 167: 967-970, (1966).

[26] Gasymov, M. G. "Inverse problem of the scattering theory for Dirac system of order $2n$", Transactions of the Moscow Mathematical Society, 19: 41–112, (1968).

[27] Çöl, A. and Mamedov, Kh. R. "On an inverse scattering problem for a class of Dirac operators with spectral parameter in the boundary condition", Journal of Mathematical Analysis and Applications, 393(2): 470–478, (2012).

[28] Mamedov, Kh. R. and Çöl, A. "On an inverse scattering problem for a class Dirac operator with discontinuous coefficient and nonlinear dependence on the spectral

parameter in the boundary condition", Mathematical Methods in the Applied Sciences, 35(14): 1712–1720, (2012).

[29] Çöl, A. "Inverse spectral problem for Dirac operator with discontinuous coefficient and polynomials in boundary condition", Inverse Problems in Science and Engineering, 24(2): 234-246, (2016).

[30] Mamedov, Kh. R. and Akçay, Ö. "On the spectral expansion formula for a class of Dirac differential equations with piecewise continuous coefficient", International Journal of Science and Technology, 2(12): 865-870, (2012).

[31] Sakhnovich, A. "Skew-self-adjoint discrete and continuous Dirac-type systems: inverse problems and Borg-Marchenko theorems", Inverse Problems, 22(6): 2083-2101, (2006).

[32] Fritzsche, B., Kirstein, B., Roitberg, I. Ya. and Sakhnovich, A. "Skew-self-adjoint Dirac system with a rectangular matrix potential: Weyl theory, direct and inverse problems", Integral Equations and Operator Theory, 74(2): 163-187, (2012).

[33] Ablowitz, M. J. and Segur, H. "Solutions and The Inverse Scattering Transform", SIAM Studies in Applied Mathematics, 4. Society for Industrial and Applied Mathematics, Philadelphia, (1981).

[34] Newton, R. G. and Jost, R. "The construction of potentials from the s-matrix for systems of equations", Nuova Cimento, 1(4): 590-622, (1955).

[35] Faddeev, L. D. and Takhtajan, L. A. "Hamiltonian Methods in the Theory of Solitons", Springer, Berlin, (1987).

[36] Nizhnik, L. P. "Inverse Scattering Problems for Hyperbolic Equations", Naukova Dumka, Kiev, (1991).

[37] Nizhnik, L. P. and Vu, Ph. L. "The inverse scattering problem on the semi-axis with nonselfadjoint potential matrix", Ukranian Math. J. 26: 384-398, (1975); also: Ukrain. Math. Zh. 26: 469-486, (1974).

[38] Nizhnik, L. P. “The inverse scattering problem for hyperbolic equations and their application to nonlinear integrable systems”, Rep. Math. Phys., 26(2): 261-283, (1988).

[39] Kruger, R. J. “Inverse Problems for nonabsorbing media with discontinuous material properties”, J. Math. Phys., 23(3): 396-404, (1982).

[40] Shepelsky, D. G. “An inverse spectral problem for a Dirac-type operator with sewing”, Dynamical Systems and Complex Analysis, Naukova Dumka, Kiev, 104-112, (1992) (Russian).

[41] Shepelsky, D. G. “The inverse problem of reconstruction of the medium’s conductivity in a class of discontinuous and increasing function”, Advances in Soviet Math., 19: 209-231, (1994).

[42] Thaller, B. “The Dirac Equation”, Springer, Berlin, (1992).

[43] Watson, B. A. “Inverse spectral problems for weighted Dirac system”, Inverse Problems, 15(3): 793-805, (1999).

[44] Levitan, B. M. and Sargsjan, “Sturm-Liouville and Dirac Operators,” Kluwer Academic Publishers, Dordrecht, Boston, London, (1991).

[45] Latifova, A. R. “On the representation of solution with initial conditions for Dirac equations system with discontinuous coefficients”, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 16: 64-68, (2002).

[46] Başkan, T. “Kompleks Fonksiyonlar Teorisi”, Nobel Yayın, Ankara, (2005).

[47] Markushevich, A. I. “Theory of Functions of a Complex Variables”, vol I and II, Prentice-Hall, USA, (1965).

[48] Marchenko, V. A. “Sturm-Liouville Operators and Applications”, AMS Chelsea Publishing, Providence, Rhode Island, (2011).

[49] Huseynov, H. M. and Latifova, A. R. "On eigenvalues and eigenfunctions of one class of Dirac operators with discontinuous coefficients", Trans. Natl. Acad. Sci. Azerb., 24(1): 103-112, (2004).

[50] Freiling, G. and Yurko, V. "Inverse Strum-Liouville Problems and Their Applications," Nova Science Publishers, Huntington, New York, (2008).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Özge AKÇAY

Doğum Tarihi: 21/06/1987

Öğrenim Durumu:

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lise	Matematik-Fen	Erdemli Anadolu Lisesi	2001-2005
Lisans	Matematik	Akdeniz Üniversitesi	2005-2009
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2009-2012

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. Kh. R. Mamedov and Ö. Akçay, "On the spectral expansion formula for a class of Dirac differential equations with piecewise continuous coefficient", *International Journal of Science and Technology*, 2(12), (2012), 865-870.

2. Kh. R. Mamedov and Ö. Akçay, "Inverse problem for a class of Dirac operator", *Taiwanese Journal of Mathematics*, 18(3), (2014), 753-772.

3. Kh. R. Mamedov and O. Akcay, "Inverse eigenvalue problem for a class of Dirac operators with discontinuous coefficient", *Boundary Value Problems*, 2014:110, doi:10.1186/1687-2770-2014-110

4. Kh. R. Mamedov and O. Akcay, "Necessary and sufficient conditions for the solvability of inverse problem for a class of Dirac operators", *Miskolc Mathematical Notes*, 16(1), (2015), 257-275.

5. "On the Expansion Formula for a Class of Dirac Operator with Discontinuous Coefficient", *International Conference of Applied Analysis and Algebra*, 29 June-2 July 2011, Yıldız Technical University, İstanbul, Turkey (with Kh. R. Mamedov and Y. Altun).

6. “Expansion Formula for a Class of Dirac Operators with Piecewise Continuous Coefficient and Spectral Parameter in Boundary Condition”, *Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications*, 04-09 September, 2012, Mersin, Turkey (with Kh. R. Mamedov).

7. “On the Inverse Problem by Weyl Function for a Class of Dirac Operators”, *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling*, 2-5 June, 2013, Yıldız Technical University, İstanbul, Turkey (with Kh. R. Mamedov and F. A. Cetinkaya).

8. “Inverse Problem for a Class of Sturm-Liouville Operators with Spectral Parameter in Boundary Condition” *International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling*, 2-5 June, 2013, Yıldız Technical University, İstanbul, Turkey (with Kh. R. Mamedov and F. A. Cetinkaya).

9. “Necessary and Sufficient Conditions for the Solvability of Inverse Problem for a Class of Dirac Operators” *International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics*, 6-9 November 2014, Antalya, Turkey (with Kh. R. Mamedov).

10. "Boundary Value Problem for a Sturm-Liouville Operator With Piecewise Continuous Coefficient", *International Conference on Pure and Applied Mathematics* (ICPAM 2015), 25-28 August 2015, Van, Turkey (with Kh. R. Mamedov ve F. A. Cetinkaya).

11. “On the Inverse Problem for a Class of Dirac Operators”, *International Conference on Pure and Applied Mathematics* (ICPAM 2015), 25-28 August 2015, Van, Turkey (with Kh. R. Mamedov and F. A. Cetinkaya).

12. “On the Inverse Problem for a Class of Dirac Operators by Spectral Data”, *International Conference on Advancement in Mathematical Science,*5-7 November 2015, Antalya, Turkey (with Kh. R. Mamedov and F. A. Cetinkaya).

13. “Uniqueness Theorems for the Solution of the Inverse Problem for a Sturm-Liouville Operator”, *International Conference on Advancement in Mathematical Science,*5-7 November 2015, Antalya, Turkey (with Kh. R. Mamedov and F. A. Cetinkaya).

14. “Sınır Koşulu Spektral Parametre İçeren Bir Sınıf Süreksiz Katsayılı Dirac Operatörünün Ters Problemi İçin Teklik Teoremi Üzerine” *8. Ankara Matematik Günleri*, 13-14 Haziran 2013, Ankara, Türkiye (Kh. R. Mamedov ve F. A. Cetinkaya ile).

15. “Sınır Koşulu Spektral Parametreye Bağlı Bir Sınıf Süreksiz Katsayılı İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklem Üzerine” *8. Ankara Matematik Günleri*, 13-14 Haziran 2013, Ankara, Türkiye (Kh. R. Mamedov ve F. A. Cetinkaya ile).

16. “Sınır Koşulu Spektral Parametre İçeren Bir Sınıf Dirac Operatörü İçin Ayrışım Formülü” *14. Matematik Sempozyumu, Kanatlandıran Matematik*, Niğde Üniversitesi, 14-16 Mayıs 2015, Niğde, Türkiye (Kh. R. Mamedov ile).