B-KONVEKS FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

İLKNUR YEŞİLCE

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

MERSİN
ARALIK – 2016

B-KONVEKS FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ

DOKTORA TEZİ

İLKNUR YEŞİLCE

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

İkinci Danışman
Prof. Dr. Gabil ADİLOV

MERSİN
ARALIK - 2016

ONAY

İlknur YEŞİLCE tarafından Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU danışmanlığında ve Prof. Dr. Gabil ADİLOV ikinci danışmanlığında hazırlanan "B-konveks Fonksiyonlar ve Özellikleri" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	Ünvanı, Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	
Üye	Prof. Dr. İlham ALİYEV	
Üye	Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN	
Üye	Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE	
Üye	Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ	

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 23/12/2016 tarih ve 2016/1315/47 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

Aralık 2016 / December 2016

İmza / Signature

Öğrenci Adı ve Soyadı / Student Name and Surname

İlknur YEŞİLCE

ÖZET

Bu tezde, öncelikle soyut konvekslik kavramı üzerine çalışılmış, farklı konvekslik sınıfları için bir literatür taraması yapılmış ve her bir konvekslik sınıfının tanımı ifade edilmiştir. Bunun yanı sıra soyut konvekslik biçimlerinden biri olan B-konvekslik incelenmiş, B-konveks kümeler ve özellikleri verilmiştir. Daha sonra, B-konveks fonksiyonlar tanımlanmıştır. Bu fonksiyonların özellikleri çalışılmış ve klasik konveks fonksiyonlar ile karşılaştırılmaları yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Konvekslik, Soyut Konvekslik, Soyut Konveks Fonksiyonlar, B-konvekslik, B-konveks Fonksiyonlar.

Danışman: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı, Mersin.

İkinci Danışman: Prof. Dr. Gabil ADİLOV, Akdeniz Üniversitesi, Ortaöğretim Fen ve Matematik Alanlar Eğitimi Bölümü, Antalya.

ABSTRACT

In this thesis, firstly the concept of abstract convexity is studied, a literature review for different types of convexity is done and definition of each convexity class is expressed. Additionally, B-convexity which is a class of abstract convexity is examined, B-convex sets and their properties are given. Then, B-convex functions are defined. Their properties are studied and compared with classic convex functions.

Key Words: Convexity, Abstract Convexity, Abstract Convex Functions, B-convexity, B-convex Functions.

Advisor: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.

Co-advisor: Prof. Dr. Gabil ADİLOV, Department of Science and Mathematics, University of Akdeniz, Antalya.

TEŞEKKÜR

İlk olarak, tüm lisansüstü öğrenimim boyunca bu aşamanın başında karşılaşmamın her zaman benim için çok büyük bir şans olduğunu düşündüğüm, minnet duygumun anlatılmasında sözcüklerin yetersiz kaldığı ve hayat ile ilgili de her türlü bilgiyi edinebildiğim, her daim elinden gelenin fazlasını yaptığından emin olduğum en değerli danışmanım, hocam Prof. Dr. Gabil ADİLOV'a teşekkür etmek isterim. Aynı zamanda, benim için en samimi duyguları besleyen, yolumu çizmemde ışık tutan, varlığından kuvvet aldığım, bana değer verdiğini, korumasını esirgemediğini bildiğim danışman hocam Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU'na teşekkür ederim. Sevgili hocam Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV'e, bu tezin ilk aşamasından beri incelemeleri ve yol göstermesiyle bana ilerleme kaydetmemde çok emek veren hocalarım Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ ve Doç. Dr. Gültekin TINAZTEPE'ye, bununla birlikte lisans dönemimde de, lisansüstü dönemimde de hayatla ilgili iyi ve kötü çok şey öğrendiğim tüm bölüm hocalarım ve benden desteklerini esirgemeyen tüm bölüm arkadaşlarıma teşekkür ederim. Bu dönemde tanıştığım ve her zaman sevgi ve saygı ile anacağım Doç. Dr. Sait AKBAŞLI, Doç Dr. Lütfi ÜREDİ ve Doç Dr. Oktay AYDOĞDU hocalarıma da en içten minnetlerimi sunarım.

Dünyanın en güzeli, en sabırlısı, en tatlısı, en güzel her şeyi olan anneme, emeğini ödeyemeyeceğim, bilgisi sonsuz olan ve daima beni her durumda aydınlatan babama, hayatımın en değerlisi, bir tanecik, dostum, arkadaşım, her şeyim olan kardeşime teşekkürlerimi ifade edecek bir sözcük bile bulamıyorum, çok teşekkür ederim.

Benim için önemlerini ve bendeki yerlerini ifade etmeye sözcük bulamadığım, daima yanımda olduklarını hissettiğim ve sayelerinde bu konuma geldiğim dedem ve bu yolun tamamında yanımda olamasa da hiçbir zaman unutmadığım sevgili anneanneme ve tüm aileme sonsuz teşekkürlerimi sunarım. Hayatımda çok önemli bir yer edinmiş, her zaman desteğini gördüğüm, en değerli, en güçlü ve bana da ayakta kalmamı, yolumu çizmemi, vazgeçmememi çok büyük emek vererek anlatan kalbimin köşesine de teşekkür ederim.

2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TUBITAK Bilim İnsani Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

Son olarak da, tezimi projeye dönüştürmemde destek veren Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi'ne teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

ŞEKİLLER DİZİNİ

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}_+$	Negatif Olmayan Reel Sayılar
$\mathbb{R}^n$	n Boyutlu Öklit Uzayı
$\mathbb{R}^n_+$	$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i \geq 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$
$\mathbb{R}^n_{++}$	$\{(x_1, x_2, \ldots, x_n) : x_i > 0,\ i = 1, 2, \ldots, n\}$
$\vee$	Koordinatlara Göre Maksimum
$\circ$	Fonksiyonların Bileşkesi
$\lVert \cdot \rVert$	Norm Fonksiyonu
$\lvert H \rvert$	H Matrisinin Determinantı
$f\rvert_A$	f Fonksiyonun A Kümesine Kısıtlanışı
C^m	$\underbrace{C \times C \times \ldots \times C}_{m \text{ tane}}$
$\langle \cdot\,, \cdot \rangle$	Minimum Tip Fonksiyon
$\langle \cdot\,, \cdot \rangle^+$	Maksimum Tip Fonksiyon
$epif$	Fonksiyonun Epigraf Kümesi
$hypf$	Fonksiyonun Hypograf Kümesi
$\operatorname{dom} f$	$\{x : f(x) < \infty\}$
$\operatorname{supp}(f, H)$	$\{h \in H \mid h \leq f\}$
$k = \overline{1, n}$	$k = 1, 2, \ldots, n$
$x \preceq y$	$\{x_i \leq y_i,\ \forall i = \overline{1, n}\}$
$x \preceq_j y$	$\{x_j \leq y_j \text{ ve } x_j y_i \leq y_j x_i\ ,\ i \in I\}$
D'	D Kümesinin Tümleyeni
$Co(C)$	C Kümesinin Konveks Kabuğu
$Co_H f$	f Fonksiyonun H-konveks Kabuğu
$Co^r(A)$	A Kümesinin r-konveks Kabuğu
$Co^\infty(A)$	A Kümesinin B-konveks Kombinasyonu
$\mathrm{B}[A]$	A Kümesinin B-konveks Kabuğu
$\max$	Maksimum
$\sup$	Üst Limitlerin En Küçüğü (Supremum)
$\inf$	Alt Limitlerin En Büyüğü (İnfimum)
$\limsup$	Üst Limit
$\liminf$	Alt Limit
Ls	Kuratowski-Painleve Anlamında Üst Limit
Li	Kuratowski-Painleve Anlamında Alt Limit

IPH	Artan Pozitif Homojen (Increasing Positively Homogeneous)
InR	Artan Radyant (Increasing Radiant)
ICR	Artan Ko-Radyant (Increasing Co-Radiant)
ICAR	Artan ve Işınlar Üzere Konveks (Increasing Convex Along Rays)
■	İspatın Bittiğini Gösterir

1. GİRİŞ

Konveks Analiz matematiğin en önemli alanlarından biridir. Özellikle son zamanlarda bu alanda yapılan çalışmalar daha da hızlanmıştır. Konvekslik kavramının çok sayıda hem günlük hayattaki hem de bilimsel çalışmalardaki kayda değer uygulamalarının varlığı önemini oldukça artırmıştır. Optimizasyon Teorisi ([1], [2], [3], [4], [5], [6]), Eşitsizlikler Teorisi ([7], [8], [9], [10], [11], [12], [13], [14], [15], [16], [17], [18]), Matematiksel Ekonomi ([19], [20]), Yöneylem Araştırması ([21], [22], [23], [24], [25], [26], [27]) gibi konveks analizin uygulama alanları hem teorik hem de pratik olarak büyük bir ilgi ve gereklilik içermektedir.

Bu tez çalışmasında da konu olan konveksliğin bir alt dalı soyut konveks analiz yakın zamanda oldukça popüler hale gelmiştir ([5], [21], [28], [29], [30], [31], [32], [33], [34], [35], [36], [37], [38]). Uygulama ve teorik çalışmaları konvekslik kavramının soyutlaştırılması zorunluluğunu beraberinde getirmiştir. Konveksliğin genelleştirilmesi topolojik soyut konvekslik, fonksiyonel soyut konvekslik ve bunlara ek farklı birkaç yöntemle gerçekleştirilmektedir.

Günümüze kadar çok sayıda soyut konvekslik biçimi elde edilmiştir. Bazıları yalnızca fonksiyon biçimlerinin elde edilmesi ve uygulamalarının gerçekleştirilmesi olarak çalışılmıştır. Örneğin,

Kuazikonveks fonksiyonlar [36]; $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \leq \max\left\{ f(x), f(y) \right\}$$

ise, f fonksiyonuna kuazikonveks fonksiyon denir.

Multiplikativ konveks fonksiyonlar [5]; $I, J \subset (0,\infty)$ olmak üzere, $f : I \to J$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(x^{1-\lambda} y^{\lambda}\right) \leq f(x)^{1-\lambda} f(y)^{\lambda}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise f fonksiyonuna multiplikativ konveks fonksiyon denir.

Birinci anlamda s-konveks fonksiyonlar [39]; $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $0 < s \leq 1$ olsun. Eğer, her $x, y \in \mathbb{R}_+$ ve $\alpha^s + \beta^s = 1$ olmak üzere $\alpha, \beta \geq 0$ için

$$f\left(\alpha x + \beta y\right) \leq \alpha^s f\left(x\right) + \beta^s f\left(y\right)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir.

Bu tip çalışmalar, fonksiyonlar tanımları verildikten sonra özellikle de eşitsizlikler teorisinde çok önemli bir uygulama olan Hermite-Hadamard eşitsizlikleri gibi eşitsizliklerin bu fonksiyonlar için ifade edilmesi üzerinde incelemelerin yoğunlaştığı çalışmalardır ([8], [10], [11], [12], [16], [28], [29], [33], v.b.).

Bazıları ise, hem küme hem fonksiyon teorileri, hem de uygulamaları ile birlikte çalışılmaktadır. Aslında, bu incelemeler klasik konveks teorideki mevcut çalışmaların ışığında yapılmaktadır denilebilir. Örneğin; monotonik analizde önemli bir yere sahip olan artan pozitif homojen fonksiyonlar ve bunların bağlantılı olduğu normal kümeler verilebilir:

Artan pozitif homojen (IPH) fonksiyonlar [5]; $\mathbb{R}^n_{++}$ da tanımlı bir f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlar ise, bu fonksiyona birinci dereceden artan pozitif homojen (IPH) fonksiyon denir:

a) $\forall x, y \in \mathbb{R}^n_{++}$ için $x \succeq y$ ise $f\left(x\right) \geq f\left(y\right)$ olsun, yani f artan fonksiyondur; burada, $x \succeq y \Leftrightarrow x_i \geq y_i,\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}$.

b) $\forall x \in \mathbb{R}^n_{++}$ ve $\lambda > 0$ için $f\left(\lambda x\right) = \lambda f\left(x\right)$, yani f birinci dereceden pozitif homojen fonksiyondur.

Normal küme [5]; boştan farklı bir $U \subset \mathbb{R}^n_+$ kümesi için eğer $x \in U$, $x' \in \mathbb{R}^n_+$ olmak üzere $x' \preceq x$ $\left(x' \preceq x \Leftrightarrow x'_i \leq x_i,\ \forall i \in \{1,\ldots,n\}\right)$ durumunda $x' \in U$ olur ise U ya normal küme denir.

B-konvekslik ise şimdiye kadar küme teorisi ve ekonomi yönündeki uygulamalarıyla ilgili çeşitli çalışmalar yapılmış bir genelleştirilmiş konvekslik biçimidir ([40], [41], [42], [43] v.b.). Bu tezde yapılan B-konveks fonksiyonların tanım ve özellikleri çalışması ile B-konvekslik de hem küme ve fonksiyon hem de uygulamalarıyla birlikte incelenen bir soyut konvekslik formu olacaktır.

Tezde ilk olarak B-konveks fonksiyonların tanımı ifade edilecektir. Bu tanım doğrultusunda B-konkav ve B-afin fonksiyonların ifadeleri de verilecektir. Daha sonra B-konveks, B-konkav ve B-afin fonksiyonlar için gerek ve yeter koşullar veren teoremler ifade edilecektir.

Bunların yanı sıra B-konveks olan ve olmayan fonksiyon örnekleri verilecektir. Bu örnekler yardımı ile konveks fonksiyonlar ve B-konveks fonksiyonların karşılaştırılmaları yapılacaktır. Ayrıca, B-konveks fonksiyonların toplamları, bileşkeleri, bir sabitle çarpımı, seviye kümelerinin B-konveksliği gibi özellikleri verilecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

B-konvekslik kavramı ilk olarak 2004 yılında W. Briec ve C. D. Horvath tarafından yayınlanan [41] makalesinde ortaya atılmıştır. $\forall r \in \mathbb{N}$ için; $\Phi_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\Phi_r\left(x_1,...,x_n\right) = \left(x_1^{2r+1},...,x_n^{2r+1}\right)$ homeomorfizmi aracılığı ile ifade edilen bir kümenin Co^r r-konveks kabuğunun Kuratowski-Painleve anlamda limiti alınarak bu kümenin B-konveks kombinasyonun verilmesi ile ilk temeller atılmıştır [44]. Boştan farklı sonlu bir $A = \left\{x^{(1)},\ldots,x^{(m)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için

$$Co^\infty(A) = \lim_{r\to\infty} Co^r(A)$$

biçiminde ifade edilen *A* kümesinin B-konveks kombinasyonu tanımından yararlanarak $\mathbb{R}^n$ kümesinde B-konveks kümenin tanımı, bir kümenin B-konveks kabuğu ve bu iki kavramın bazı özellikleri verilmiştir.

B-konveks küme teorisi bu kavramı ilk ortaya atan yazarların ekonomi üzerine yaptığı çalışmalarda duyduğu gereksinimlerden ötürü ortaya çıkmıştır. Ekonomide yapılan bu çalışmalar her zaman pozitif reel sayılar ile gerçekleştirildiğinden ve aynı zamanda bu uzayda B-konveks kombinasyon tanımının açık bir analitik gösterime sahip olmasından dolayı, bu alanda yapılan çalışmalar $\mathbb{R}_+^n$ uzayında devam ettirilmiştir ve bir $A \subset \mathbb{R}_+^n$ kümesinden alınan her $x_1, x_2 \in A$ ve her $t \in [0,1]$ için $tx_1 \vee x_2 \in A$ olması şartının *A* kümesinin B-konveks küme olması için gerek ve yeter koşul olduğu sonucuna ulaşılmıştır. B-konveks kümenin içi ve kapanışının B-konveks olduğu belirtilirken, B-konvekslikte Caratheodory, Helly Teoremi, Radon Teoremi ve B-konveks kümelerin topolojileri de bu makalede verilmiştir. Ayrıca makalede B-konveks dönüşümler ve bazı uygulamalara da yer verilmiştir.

2005 yılında W. Briec, C. D. Horvath ve A. M. Rubinov tarafından ayırma özelliklerinin ifade edildiği [43] makalesi yayınlanmıştır. Literatürde Cebirsel Hahn-Banach Teoremi olarak da geçen; C_1 ve C_2 kesişmeyen iki B-konveks küme ise $C_1 \subset D$ ve $C_2 \subset \mathbb{R}_+^n \setminus D$ olacak şekilde bu kümeleri içeren ve hem kendisi $D \subset \mathbb{R}_+^n$ hem de $\mathbb{R}_+^n \setminus D$ tümleyeni B-konveks olan kümenin varlığını veren Stone-Kakutani Ayırma Özelliği'nin verilmesinin yanı sıra bunun sonucu olarak, iyi bilinen Pash-Peano Özellikleri'nin de B-konvekslik için geçerli olduğunu göstermişlerdir. Bir dönüşüm aracılığıyla iki B-konveks kümenin ayrılması, "$A \subset \mathbb{R}^n$ B-konveks bir küme olmak üzere *A* kümesinin tümleyeni $A' = \mathbb{R}^n \setminus A$ da B-konveks ise bu kümeye B-konveks yarı uzay denir" biçiminde verilen B-konveks yarı uzay tanımı ve B-ölçülebilir dönüşümlerin verilmesiyle gerçekleştirilebilmiştir. Aynı zamanda makalede, bir nokta ile bir B-konveks kümenin ayrılması üzerine çalışmalar da yapılmıştır.

B-konveks kümelerle ilgili incelemeler [40] makalesinde G. Adilov ve A. M. Rubinov tarafından devam ettirilmiştir.

$K \subset \mathbb{R}^n$ bir uçlu koni ve $C \subset K$ bir koni olsun. C konisinin, K konisi tarafından belirlenen genelleştirilmiş $\leq_K$ kısmi sıralamasına sahip olduğunu varsayalım (yani, $x \leq_K y \Leftrightarrow y - x \in K$). Her bir $y \in C$ için,

$$l_y(x) = \sup\{\alpha > 0 : \alpha y \leq_K x\},\ x \in C$$

ile tanımlanmış $l_y : C \to \mathbb{R}_{+\infty}$ fonksiyonları tanımlanabilir (Burada, $\sup\varnothing = 0$'dır.).

Verilen kısmi sıralamaya göre monotonluk özellikleri $L = \{l_y \,|\, y \in C\}$ elemanter fonksiyonlar sınıfına dayalı soyut konveks fonksiyonların özellikleri ile paralel olarak incelenir.

Yukarıdaki yöntem doğrultusunda, ağırlıklı olarak da matematiksel teori kullanılarak yapılan çalışmalar ile [40] makalesinde L-konveks ve L(j)-konveks fonksiyonlar ifade edilmiştir. Bu fonksiyonların tanımlanması sırasında B-konveks yarı uzaylar ve bu uzaylarda geçerli çeşitli kısmi sıralamalar kullanılmıştır. Aynı zamanda artan pozitif homojen fonksiyonlar ve artan ışınlar üzere konveks fonksiyonlar ile makalede verilen fonksiyonlar arasındaki bağlantılar da gösterilmiştir. Ayrıca B-konveks fonksiyonlar için elemanter fonksiyonların oluşturulması işlemi de bu makalede gerçekleştirilmiştir ve tanımları ifade edilen fonksiyonların örnekleriyle, yapılan çalışmalar desteklenmiştir.

B-konveks kümelerde ayırma özellikleriyle ilgili çalışmalar [42] makalesinde devam ettirilmiştir. [43] makalesindeki sonuçlar genelleştirilerek genel Hahn-Banach teoreminin analoğu B-konvekslik için ifade edilmiştir:

Teorem 2.1. $C_1, C_2 \subset \mathbb{R}^n_+$ kümeleri $\inf_{(x,y)\in C_1\times C_2} \|x-y\| > 0$ koşulunu sağlayan B-konveks kümeler ise her $x \in C_1$ ve her $y \in C_2$ için

$$\max_{i\in I}\{a_i x_i\} - \max_{j\in J}\{a_j x_j, s\} < \max_{i\in I}\{a_i y_i\} - \max_{j\in J}\{a_j y_j, s\}$$

olacak biçimde $a \in \mathbb{R}_{+}^{n}$, $s \geq 0$ ve $\{1,2,...,n\}$ kümesinin iki kesişmeyen I ve J alt kümeleri vardır.

Daha çok topolojik özelliklerin üzerinde durulan makalede geometrik ve fonksiyonel ayırma özellikleri de çalışılmıştır. Şekillerle de desteklenen çalışmada kanonik yarı uzayların yapısı incelenmiştir.

2008 yılında yayınlanmış [45] makalesinde ise W. Briec ve C. D. Horvath tarafından, hem matematiksel analizde hem de ekonomide çok önemli bir yere sahip olan sabit nokta teorisi ile ilgili çalışmalar B-konvekslik kavramı için yapılmıştır. Bu incelemeler doğrultusunda Knaster-Kuratowski-Mazurkiewicz Teoremi'ni B-konvekslik için genelleştirmişler ve kompakt B-konveks kümelerin sürekli dönüşümler için sabit nokta özelliğine sahip olduğunu ispatlamışlardır. B-konvekslik için Fan-Browder Sabit Nokta Teoremi ve Kakutani Sabit Nokta Teoremi'ni ifade etmişlerdir. Soyut ekonomideki kararlılıkların varlığında önemli rollere sahip olan Ky-Fan Eşitsizliği ve Nash Kararlılıkları'nın Varlığı'nı ispat etmişlerdir. Berge Maksimum Prensibi'nden yararlanarak B-konvekslik için Shafer-Sonnenschein Teoremi'ni vermişlerdir.

B-konveks kümeler matematiksel ekonomide önemli uygulamalara sahip olduğu için bugüne kadar pek çok çalışmada hem teorik olarak hem de bu uygulamaları ile birlikte çalışılmıştır ([46], [47], [48], [49], [50] v.s). Ayrıca, 2015 yılında yayınlanan [51] makalesinde de W. Briec tarafından B-konvekslik kavramının uygulamaları ile birlikte çalışılmaya devam edildiği görülmektedir. Bu kavram çeşitli yeni işlemler tanımlanarak tüm $\mathbb{R}^{n}$ uzayında incelenmiştir. Bazı cebirsel özellikler verilmiş, üst yarı kafes yapısı incelenmiştir. B-konveksliğin genişletilmiş bir tanımı verilmiş, şekiller üzerinde görsel olarak yansıtılmıştır. İlaveten, topolojik özellikleri ile birlikte yeni ifade edilmiş kümelerin ayırma özellikleri yine bu makalede incelenen çalışmalardandır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. Temel Kavramlar

3.1.1. Klasik Konvekslikle İlgili Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 3.1.1.1. ([24]) $C \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : C \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. $y \in C$ olmak üzere

$$f(y) = \lim_{r \to 0} \sup \{ f(x) : \|x - y\| \le r \}$$

koşulu sağlanıyorsa f'ye y noktasında üstten yarı süreklidir denir. Eğer her $y \in C$ için bu koşul sağlanıyorsa f'ye C'de üstten yarı süreklidir denir.

Tanım 3.1.1.2. ([24]) $C \subset \mathbb{R}^n$, $f : C \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. $y \in C$ olmak üzere

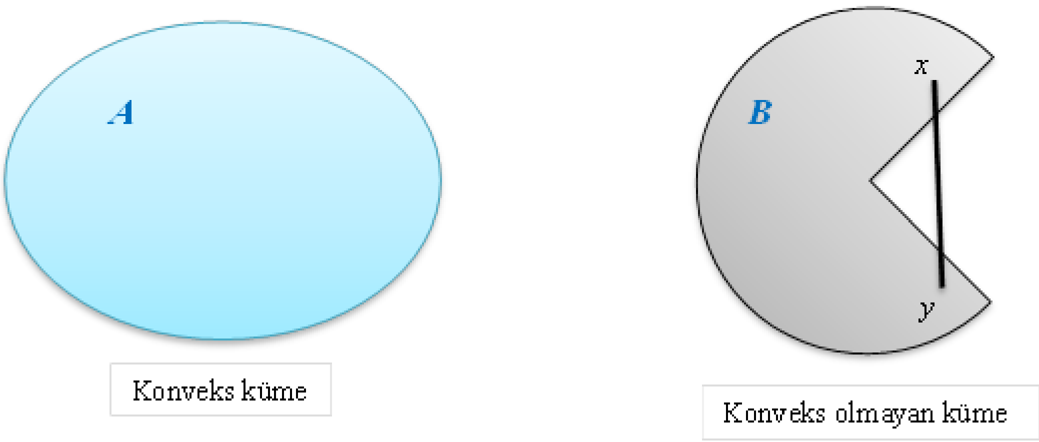
$$f(y) = \lim_{r \to 0} \inf \{ f(x) : \|x - y\| \le r \}$$

koşulu sağlanıyorsa f'ye y noktasında alttan yarı süreklidir denir. Eğer her $y \in C$ için bu koşul sağlanıyorsa f'ye C'de alttan yarı süreklidir denir.

Tanım 3.1.1.3. ([52]) C, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt kümesi olsun. Eğer, her $x, y \in C$ ve $0 \le \lambda \le 1$ için,

$$(1-\lambda)x + \lambda y \in C$$

ise, C kümesine konveks küme denir.



Şekil 3.1. Konveks olan ve konveks olmayan küme örnekleri

Şekil 3.1'deki A kümesi için kümenin herhangi iki noktasını birleştiren doğru parçası daima kümenin içinde kalır, böylece A kümesi konvekstir ancak şekildeki gibi bir B kümesinden alınan x ve y noktalarını birleştiren doğru parçası B kümesinde kalamayacağından B konveks küme değildir.

Bu tanım daha farklı şöyle verilir:

Teorem 3.1.1.1. ([52]) C, $\mathbb{R}^n$'nin bir alt kümesi ve $m \geq 2$ olsun. C kümesinin konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall x_1, x_2, \ldots, x_m \in C$, $\lambda_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{m} \lambda_i = 1$ için,

$$\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + \ldots + \lambda_m x_m \in C$$

olmasıdır.

Tanım 3.1.1.4. ([52]) $C \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{R}^n$'de, C kümesini içeren tüm konveks kümelerin kesişimine C'nin konveks kabuğu denir ve $Co(C)$ ile gösterilir.

Tanım 3.1.1.5. ([52]) $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme olsun. Eğer, C kümesinin tümleyeni $C' = \mathbb{R}^n \setminus C$ kümesi de konveks ise C kümesine konveks yarı-uzay denir.

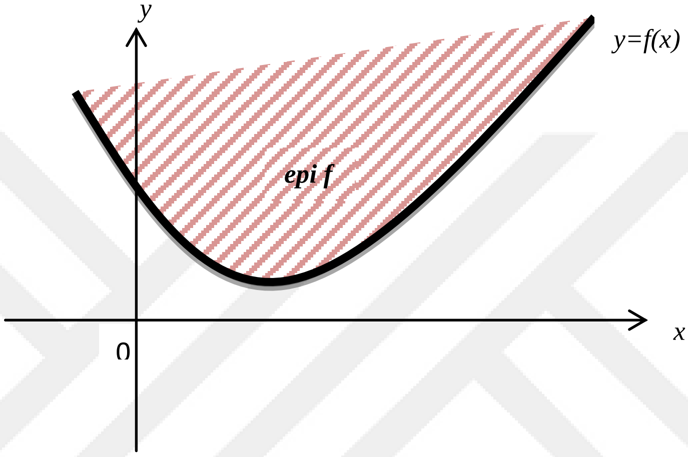
Tanım 3.1.1.6. ([52]) $K \subset \mathbb{R}^n$ olsun. Eğer, $\forall x \in K$ ve $\lambda > 0$ için $\lambda x \in K$ ise bu kümeye koni denir.

Teorem 3.1.1.2. ([52]) $K \subset \mathbb{R}^n$ konisinin konveks olması için gerek ve yeter koşul K'nın toplama ve pozitif bir skaler ile çarpma işlemine göre kapalı olmasıdır.

Tanım 3.1.1.7. ([52]) $C \subset \mathbb{R}^n, \quad f : C \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olmak üzere;

$$\{(x, \mu) | x \in C, \ \mu \in \mathbb{R}, \ f(x) \le \mu\}$$

biçiminde ifade edilen kümeye *f* fonksiyonunun epigrafı denir ve *epif* ile gösterilir. Özel olarak, $C \subset \mathbb{R}$ için *f* 'in epigrafı *f* 'nin grafiğinin üstünde kalan kümeyi belirtir.



Şekil 3.2. $C \subset \mathbb{R}$ için *f* 'nin epigrafı

Tanım 3.1.1.8. ([5]) $C \subset \mathbb{R}^n, \quad f : C \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olmak üzere;

$$\{(x, \mu) | x \in C, \ \mu \in \mathbb{R}, \ \mu \le f(x)\} \subseteq \mathbb{R}^{n+1}$$

biçiminde ifade edilen kümeye *f* fonksiyonunun hypografı denir ve *hypf* ile gösterilir.

Tanım 3.1.1.9. ([52]) $C \subset \mathbb{R}^n, \quad f : C \to \mathbb{R}$ olsun. *f* fonksiyonu için aşağıdaki gibi verilen kümeye *f* 'nin tanım kümesi denir ve *domf* ile gösterilir:

$$domf = \{x | \ \exists \mu, (x, \mu) \in epif\} = \{x | \ f(x) < \infty\}$$

Tanım 3.1.1.10. ([52]) $C \subset \mathbb{R}^n$, $f : C \to \mathbb{R}$ olsun. $epif \subset \mathbb{R}^{n+1}$;

$$epif = \{(x,\mu) \mid f(x) \leq \mu,\ \forall x \in C\}$$

kümesi konveks ise, *f* fonksiyonuna *C* kümesi üzerinde konveks fonksiyon denir.

Teorem 3.1.1.3. ([52]) $C \subset \mathbb{R}^n$ konveks bir küme ve $f : C \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ olsun. f 'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul $\forall x, y \in C$ ve $0 \leq \lambda \leq 1$ için,

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda) f(x) + \lambda f(y)$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.1.1.4. ([52]) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ bir fonksiyon olsun. f 'nin konveks olması için gerek ve yeter koşul $f(x) < \alpha$ ve $f(y) < \beta$ olduğunda, $0 \leq \lambda \leq 1$ için

$$f((1-\lambda)x + \lambda y) \leq (1-\lambda)\alpha + \lambda\beta$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.1.1.5. ([52]) (Jensen Eşitsizliği) $f : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun konveks fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul

$$f(\lambda_1 x_1 + \lambda_2 x_2 + ... + \lambda_m x_m) \leq \lambda_1 f(x_1) + \lambda_2 f(x_2) + ... + \lambda_m f(x_m)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır, burada, $\lambda_1 \geq 0, \ldots, \lambda_m \geq 0$ ve $\lambda_1 + \lambda_2 + \ldots + \lambda_m = 1$ dir.

Teorem 3.1.1.6. ([52]) $f : (\alpha, \beta) \to \mathbb{R}$ ikinci mertebeden sürekli türevlenebilen bir fonksiyon olsun. f 'nin (α, β) aralığı üzerinde konveks olması için gerek ve yeter koşul f 'nin ikinci mertebeden türevinin negatif olmamasıdır.

Teorem 3.1.1.7. ([52]) $C \subset \mathbb{R}^n$ açık küme ve $f : C \to \mathbb{R}$ ikinci mertebeden sürekli kısmi türevlere sahip bir fonksiyon olsun. *f, C* üzerinde konvekstir ancak ve ancak f ' in Hessian matrisi:

$$Q_x = \left(q_{ij}\left(x\right)\right), \qquad q_{ij}\left(x\right) = \frac{\partial^2 f}{\partial \xi_i \partial \xi_j}\left(\xi_1,...,\xi_n\right),$$

$\forall x \in C$ için pozitif yarı belirlidir.

Bir matrisin pozitif yarı belirli olması ile ilgili Sylvester Koşulları olarak isimlendirilen aşağıdaki teorem ifade edilebilir. Bunun için önce baş minörlerin tanımı verilmelidir.

Tanım 3.1.1.11. ([1]) $n \times n$ boyutlu karesel bir $A = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ matrisi için, 1. baş minörü: $A_1 = \left[a_{11}\right]$, 2. baş minörü: $A_2 = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} \\ a_{21} & a_{22} \end{bmatrix}$, ..., i. baş minörü: $A_i = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1i} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2i} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{i1} & a_{i2} & \cdots & a_{ii} \end{bmatrix}$,...,

n. baş minörü: $A_n = \begin{bmatrix} a_{11} & a_{12} & \cdots & a_{1n} \\ a_{21} & a_{22} & \cdots & a_{2n} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ a_{n1} & a_{n2} & \cdots & a_{nn} \end{bmatrix}$ biçimindedir.

Teorem 3.1.1.8. (Sylvester Koşulları) ([1]) $n \times n$ boyutlu karesel bir A matrisi verilsin. A marisinin;

a) pozitif belirli olması için gerek ve yeter koşul tüm baş minör determinantlarının pozitif olmasıdır.

b) pozitif yarı belirli olması için gerek ve yeter koşul baş minör determinantlarının negatif olmaması ve en az bir baş minör determinantının sıfır olmasıdır.

c) negatif belirli olması için gerek ve yeter koşul k. baş minör determinantının işaretinin $\left(-1\right)^k$ olmasıdır.

d) negatif yarı belirli olması için gerek ve yeter koşul k. baş minör determinantının işaretinin $\left(-1\right)^k$ olması ve en az bir baş minör determinantının sıfır olmasıdır.

Teorem 3.1.1.9. ([52]) C, $\mathbb{R}^{n+1}$ üzerinde bir konveks küme ve

$$f(x) = \inf\left\{\mu \,\middle|\, (x,\mu) \in C\right\}$$

olsun. O halde f fonksiyonu $\mathbb{R}^n$ 'de konvekstir.

Tanım 3.1.1.12. ([52]) f bir fonksiyon olsun. Eğer $-f$ konveks ise, bu f fonksiyonuna konkav fonksiyon denir.

Örneğin,

1. $-\infty < \alpha < +\infty$ olmak üzere $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f(x) = e^{\alpha x}$ fonksiyonu konvekstir.

2. $1 \le p < +\infty$ için $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f(x) = \begin{cases} x^p, & x \ge 0, \\ +\infty, & x < 0, \end{cases}$ fonksiyonu konvekstir.

3. $0 \le p \le 1$ için $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f(x) = \begin{cases} -x^p, & x \ge 0, \\ +\infty, & x < 0, \end{cases}$ fonksiyonu konvekstir.

4. $-\infty < p \le 0$ için $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f(x) = \begin{cases} x^p, & x > 0, \\ +\infty, & x \le 0, \end{cases}$ fonksiyonu konvekstir.

5. $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$, $f(x) = \begin{cases} -\log x, & x > 0, \\ +\infty, & x \le 0, \end{cases}$ fonksiyonu konvekstir.

6. $\forall i = \overline{1,n}$, $r_i \ge 1$ ve $a_i \ge 0$ olmak üzere $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = a_1 x_1^{r_1} + a_2 x_2^{r_2} + \ldots + a_n x_n^{r_n}$ fonksiyonu konvekstir.

7. $n \ge 1$ ve $a_i \ge 0$, $\forall i = \overline{1,n}$ için $f : \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+$, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = -(a_1 x_1 + a_2 x_2 + \ldots + a_n x_n)^{\frac{1}{n}}$ fonksiyonu konvekstir.

8. $\forall i=\overline{1,n}$, $\alpha_i \geq 0$ ve $\sum_{i=1}^{n} \alpha_i = 1$ olmak üzere $f:\mathbb{R}^n_{++} \to \mathbb{R}_{++}$, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \prod_{i=1}^{n} x_i^{\alpha_i}$ genelleştirilmiş geometrik ortalama fonksiyonu konkavdır.

9. $f:\mathbb{R}^n_{+} \to \mathbb{R}_{+}$, $f(x) = f(x_1, x_2, \ldots, x_n) = \max_{1\leq i\leq n}\{x_i\}$ fonksiyonu konvekstir.

Tanım 3.1.1.13. ([52]) Sonlu ve hem konveks hem de konkav olan fonksiyona afin fonksiyon denir.

Teorem 3.1.1.10. $f:C \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun kapalı konveks fonksiyon olması için gerekli ve yeterli koşul $h:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}$ afin fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \leq f\}, \qquad \forall x \in C$$

olmasıdır. Burada, $h \leq f \Leftrightarrow \forall x \in C$ için $h(x) \leq f(x)$.

3.1.2. Soyut Konvekslikle İlgili Temel Tanımlar ve Teoremler

Tanım 3.1.2.1. ([5]) *H, X* kümesi üzerinde tanımlı sonlu fonksiyonların bir kümesi ve $f:X \to \mathbb{R}\cup\{\pm\infty\}$ olsun. Eğer, H'nin

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in U\}, \qquad \forall x \in X$$

olacak biçimde bir *U* alt kümesi varsa, *f* fonksiyonu *H* 'ye göre soyut konvekstir (veya *H*-konvekstir) denir. Burada *H* fonksiyonlar sınıfına elemanter fonksiyonlar ailesi denir.

$H = \emptyset$ olması durumunda $f(x) = -\infty$ olarak kabul edilecektir.

Aşağıdaki tanımda ifade edilen süpremal üreteç sınıfı yardımı ile Tanım 3.1.2.1. farklı bir biçimde ifade edilebilir.

Tanım 3.1.2.2. ([5]) Y ile $f: X \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonlarının sınıfı gösterilsin ve $H \subset Y$ olsun. Eğer, her $f \in Y$ fonksiyonu *H*-konveks ise, *H* kümesine Y 'nin süpremal üreteç sınıfı denir.

Teorem 3.1.2.1. ([5]) *f* 'nin *H*-konveks olması için gerek ve yeter koşul bu fonksiyonun

$$f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in H,\ h \le f\},\ \forall x \in X$$

biçiminde gösterilebilmesidir.

Tanım 3.1.2.3. ([5]) $f: X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun.

$$\operatorname{supp}(f, H) = \{h \in H \mid h \le f\}$$

kümesine *f* 'nin destek kümesi denir. Burada *H* elemanter fonksiyonların kümesini gösterir.

Tanım 3.1.2.4. ([5]) $f: X \to \mathbb{R} \cup \{\pm\infty\}$ olsun. Aşağıdaki gibi tanımlanan $Co_H f$ fonksiyonuna;

$$Co_H f(x) = \sup\{h(x) \mid h \in \operatorname{supp}(f, H)\}, \quad x \in X$$

f 'nin *H*-konveks kabuğu denir.

Bu tanıma göre; *f* fonksiyonun *H*-konveks olması için gerekli ve yeterli koşul $f = Co_H f$ olmasıdır.

Konvekslik aşağıdaki biçimlerde soyutlaştırılabilir:

- Topolojik Soyut Konvekslik: *X* bir vektör uzay, $C \subset X$ olsun. $\forall m \ge 2$ tamsayısı için, $V_m \subset \mathbb{R}^m$ kümesi alalım. Bir $\phi_m : C^m \times V_m \to C$ fonksiyonlar ailesi verilsin. Eğer, $U \subset C$ için,

$$\left(x_1, \ldots, x_m \in U,\ (\alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in V_m\right) \Rightarrow \phi_m(x_1, \ldots, x_m, \alpha_1, \ldots, \alpha_m) \in U,\ m = 2, 3, \ldots$$

U kümesine ϕ_m fonksiyonlar ailesine göre soyut konvekstir denir.

- Fonksiyonel Soyut Konvekslik: X bir vektör uzay, $C \subset X$ ve L de $\ell : C \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının bir ailesi olsun. Eğer $U \subset C$ olmak üzere, $\forall x \notin U$ noktası L den bir fonksiyon ile U kümesinden ayrılabilir ise, yani öyle bir $\ell \in L$ vardır ki $\ell(x) > \sup_{u \in U} \ell(u)$ ise, U kümesine L ye göre soyut konveks küme denir.

3.2. Farklı Konvekslik Sınıfları

3.2.1. Log-konveks Fonksiyonlar

I, reel sayıların bir aralığı olsun.

Eğer bir $f : I \to \mathbb{R}_{++}$ fonksiyonu için $\log f$ konveks ise, ya da denk olarak her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanıyorsa [20, s.7]:

$$f\left(tx + (1-t)y\right) \leq \left[f(x)\right]^{t} \left[f(y)\right]^{1-t}$$

f fonksiyonuna log-konveks fonksiyon denir.

3.2.2. r-konveks Fonksiyonlar

Eğer $r \in \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : [a,b] \to \mathbb{R}_{+}$ fonksiyonu her $x, y \in [a,b]$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \leq \begin{cases} \left[\lambda f^{r}(x) + (1-\lambda) f^{r}(y)\right]^{\frac{1}{r}}, & r \neq 0 \\ f^{\lambda}(x) + f^{1-\lambda}(y), & r = 0 \end{cases}$$

eşitsizliğini sağlıyorsa *f* fonksiyonu $[a,b]$'de r-konveks fonksiyondur denir [53].

3.2.3. Godnova-Levin Fonksiyonları

1985'de, E.K. Godnova ve V.I. Levin ([11] ve [14, ss.410–433]) aşağıdaki fonksiyonlar sınıfını incelemişlerdir:

$I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere bir $f : I \to \mathbb{R}$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\lambda \in (0,1)$ için,

$$f\left(\lambda x + (1-\lambda) y\right) \le \frac{f(x)}{\lambda} + \frac{f(y)}{1-\lambda}$$

eşitsizliğini sağlarsa *f* fonksiyonuna Godnova-Levin fonksiyonu denir [54].

3.2.4. Jensen Kuazikonveks ve Wright Kuazikonveks Fonksiyonlar

Tanım 3.2.4.1. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x, y \in I$ için

$$f\left(\frac{x+y}{2}\right) \le \max\left\{ f(x), f(y) \right\}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise, f fonksiyonuna Jensen Kuazikonveks (veya kısaca J-Kuazikonveks) dönüşüm denir [55].

Tanım 3.2.4.2. $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere, $f : I \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her $x, y \in I$ ve $t \in [0,1]$ için

$$\frac{1}{2}\left[f\left(tx + (1-t) y\right) + f\left((1-t)x + ty\right) \right] \le \max\left\{ f(x), f(y) \right\},$$

eşitsizliği, ya da, denk olarak, her $x, y+\delta \in I$ olmak üzere $x < y$ ve $\delta > 0$ için;

$$\frac{1}{2}\left[f(y) + f(\delta) \right] \le \max\left\{ f(x), f(y+\delta) \right\}$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, f fonksiyonu Wright-Kuazikonvekstir (veya kısaca W-Kuazikonvekstir) denir [56].

3.2.5. P-fonksiyonlar, Kuazikonveks Fonksiyonlar

Eğer, $I \subset \mathbb{R}$ olmak üzere $p : I \to \mathbb{R}_+$ fonksiyonu her $x, y \in I$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$p\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq p(x)+p(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona P-tipi bir fonksiyon (ya da kısaca, P-fonksiyon) denir [36].

Tanım 3.2.5.1. ([36]) $I\subset\mathbb{R}$ olmak üzere $f:I\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y\in I$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$f\left(\lambda x+(1-\lambda)y\right)\leq \max\left\{f(x),f(y)\right\}$$

ise, f fonksiyonuna kuazikonveks fonksiyon denir.

3.2.6. Multiplikativ Konveks Fonksiyonlar

Tanım 3.2.6.1. ([5]) $I,J\subset(0,\infty)$ olmak üzere, $f:I\to J$ bir fonksiyon olsun. Eğer her $x,y\in I$, $\lambda\in[0,1]$ için

$$f\left(x^{1-\lambda}y^{\lambda}\right)\leq f(x)^{1-\lambda}f(y)^{\lambda}$$

eşitsizliği sağlanıyor ise *f* fonksiyonuna multiplikativ konveks fonksiyon denir.

3.2.7. Birinci Anlamda s-konveks Fonksiyonlar

$f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $0<s\leq 1$ olsun. Eğer her $x,y\in\mathbb{R}_+$ ve $\alpha^s+\beta^s=1$ olmak üzere $\alpha,\beta\geq 0$ için

$$f\left(\alpha x+\beta y\right)\leq \alpha^s f(x)+\beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, *f* fonksiyonuna birinci anlamda s-konveks fonksiyon denir [39].

3.2.8. İkinci Anlamda s-konveks Fonksiyonlar

[57] makalesinde, H. Hudzik ve L. Maligranda aşağıdaki fonksiyon sınıflarını incelemişlerdir:

Tanım 3.2.8.1. $f:\mathbb{R}_+ \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $s\in[0,1]$ olsun. Eğer her $x,y\geq 0$ ve $\alpha+\beta=1$ olmak üzere $\alpha,\beta\geq 0$ için

$$f(\alpha x+\beta y)\leq \alpha^s f(x)+\beta^s f(y)$$

eşitsizliği sağlanıyorsa, *f* fonksiyonuna ikinci anlamda s-konveks fonksiyon denir.

3.2.9. m-konveks Fonksiyonlar

[37] makalesinde, G.H. Toader m-konveksliği tanımlamıştır (ayrıca [12] ve [38] bakın):

Tanım 3.2.9.1. $m\in[0,1]$ ve $b>0$ olmak üzere, $f:[0,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu her $x,y\in[0,b]$ ve $t\in[0,1]$ için,

$$f(tx+m(1-t)y)\leq tf(x)+m(1-t)f(y)$$

eşitsizliğini sağlıyorsa, bu fonksiyona m-konveks fonksiyon denir.

3.2.10. Artan Pozitif Homojen (IPH) Fonksiyonlar

Tanım 3.2.10.1. ([5]) f fonksiyonu $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı fonksiyon olsun.

a) Eğer, her $x,y\in\mathbb{R}^n_{++}$ için $x\geq y$ iken $f(x)\geq f(y)$ ise, f fonksiyonu artan fonksiyondur denir. (Burada, $x\succeq y \Leftrightarrow x_i\geq y_i,\ \forall i\in\{1,\dots,n\}$.)

b) Eğer, $\forall x\in\mathbb{R}^n_{++}$ ve $\lambda>0$ için $f(\lambda x)=\lambda f(x)$ ise f fonksiyonuna homojen fonksiyon denir.

Tanım 3.2.10.2. ([5]) $\mathbb{R}^n_{++}$ da *f* fonksiyonu aşağıdaki durumları sağlar ise, bu fonksiyona birinci dereceden artan pozitif homojen (IPH) fonksiyon denir:

a) $\forall x,y\in\mathbb{R}^n_{++}$ için $x\succeq y$ ise $f(x)\geq f(y)$ olsun, yani *f* artan fonksiyondur;

b) $\forall x \in \mathbb{R}^n_{++}$ ve $\lambda > 0$ için $f(\lambda x) = \lambda f(x)$, yani f birinci dereceden pozitif homojen fonksiyondur.

Her $x, l \in \mathbb{R}^n_{++}$ için $\langle l, x \rangle = \min\limits_{1 \le i \le n} \frac{x_i}{l_i}$, $\langle x, l \rangle^+ = \max\limits_{1 \le i \le n} \frac{l_i}{x_i}$ ‘dir ve bu fonksiyonlara, sırasıyla, min-tip ve max-tip fonksiyonlar denir.

Teorem 3.2.10.1. $D \subset \mathbb{R}^n_{++}$ olmak üzere $f : D \to [0, +\infty]$ fonksiyonu verilsin. Bu durumda aşağıdakiler denktir:

i) f fonksiyonu $\langle l, . \rangle : D \to [0, +\infty]$ fonksiyonlar ailesine göre konvekstir,

ii) Her $l, x \in D$ için, $f(l) \langle l, x \rangle \le f(x)$ eşitsizliği doğrudur,

iii) f fonksiyonu D üzerinde IPH'dir.

3.2.11. Artan Radyant (InR) Fonksiyonlar

Tanım 3.2.11.1. ([5]) Q, $\mathbb{R}^n_+$ içinde konik küme ve $U \subset Q$ olsun. Eğer

$$(x \in U, \ \ 0 < \lambda \le 1) \Rightarrow \lambda x \in U$$

ise U kümesi Q'nun radyant alt kümesidir denir.

Tanım 3.2.11.2. ([5]) $Q \subset \mathbb{R}^n_+$ kapalı koni, V boş kümeden farklı ve $V \subset Q$ olsun. Eğer

$$(x \in V, \ \ \lambda \ge 1) \Rightarrow \lambda x \in V$$

ise V kümesi Q'nun ko-radyant alt kümesidir denir.

Tanım 3.2.11.3. ([58]) $Q \subset \mathbb{R}^n_+$ radyant küme olmak üzere, $f : Q \to [0, +\infty]$ bir fonksiyon olsun. Eğer f fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlıyorsa f artan radyant fonksiyondur denir:

a) Eğer $\forall x, y \in Q$ için $x \ge y$ ise $f(x) \ge f(y)$;

b) Eğer $\forall x \in Q$ ve $\lambda \in (0,1)$ için $f(\lambda x) \le \lambda f(x)$.

$\mathbb{R}^n_{++} \times \mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı ϕ fonksiyonu

$$\phi(u,x)=\begin{cases}0\ , & \text{eğer} \quad \langle u,x\rangle<1\\ \langle u,x\rangle, & \text{eğer} \quad \langle u,x\rangle\geq 1\end{cases}$$

ve $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı ϕ_u fonksiyonu $\phi_u(x)=\phi(u,x)$ olsun.

$$U=\left\{\frac{1}{c}\phi_u \,\middle|\, u\in\mathbb{R}^n_{++},\ c\in(0,+\infty]\right\}$$

kümesi $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı InR fonksiyonların süpremal üreteç sınıfıdır [54]. Burada, $c=+\infty$ ise $c\phi_u(x)=\sup\limits_{h>0}\left(h\phi_u(x)\right)$ olur.

3.2.12. Artan Ko-Radyant (ICR) Fonksiyonlar

Tanım 3.2.12.1. ([5]) $Q\subset\mathbb{R}^n_+$ co-radyant küme olmak üzere, $f:Q\to\mathbb{R}\cup\{+\infty\}$ bir fonksiyon olsun.

a) Eğer $\forall x\in Q$ ve $\lambda\in[0,1]$ için $f(\lambda x)\leq\lambda f(x)$ ise *f* fonksiyonu radyanttır denir.

b) Eğer $\forall x\in Q$ ve $\lambda\geq 1$ için $f(\lambda x)\leq\lambda f(x)$ ise *f* fonksiyonu ko-radyanttır denir.

$\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde verilen ψ_l fonksiyonu,

$$\psi_l(x)=\begin{cases}\langle l,x\rangle, & \langle l,x\rangle\leq 1 \ \text{ ise}\\ 1\ , & \langle l,x\rangle>1 \ \text{ ise}\end{cases}$$

olsun. Burada $l\in\mathbb{R}^n_{++}$'dir. *H* ile gösterilen,

$$H=\left\{c\psi_l \,\middle|\, l\in\mathbb{R}^n_{++},\ c\in[0,+\infty]\right\}$$

küme, $\mathbb{R}^n_{++}$ üzerinde tanımlı olan artan ko-radyant (ICR) fonksiyonların süpremal üreteç sınıfıdır [28].

Teorem 3.2.12.1. $f : D \to [0,+\infty]$ bir fonksiyon ve $D \subset \mathbb{R}^n_{++}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki iddialar denktir:

i) *f* fonksiyonu, $l \in D$, $c \in [0,+\infty]$ olmak üzere $c\psi_l : D \to [0,+\infty]$, fonksiyonlar ailesine göre soyut konvekstir,

ii) *f* fonksiyonu, *D* üzerinde artan ko-radyant fonksiyondur,

iii) Her $l,x \in D$ için $f(l)\psi_l(x) \le f(x)$'dir.

3.2.13. Artan ve Işınlar Üzere Konveks (ICAR) Fonksiyonlar

$K \subset \mathbb{R}^n$ bir konik küme ve $f : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ olsun. Eğer *f* 'nin sıfırdan başlayan ışın üzerine daraltılmışı bir değişkenli konveks bir fonksiyon ise, bu fonksiyona ışınlar üzere konveks fonksiyon denir. Başka bir deyişle, her bir $x \in K$ için,

$$f_x(t) = f(tx),\ t \ge 0$$

fonksiyonu konveks ise, $f : K \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonuna ışınlar üzere konveks fonksiyon denir.

Burada *Q*, $\mathbb{R}^n_+$ veya $\mathbb{R}^n_{++}$ olarak alınacaktır.

Tanım 3.2.13.1. ([5]) $f : Q \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $x \in \mathbb{R}^n_+$ için

$$f_x(\alpha) = f(\alpha x)$$

fonksiyonu $[0,+\infty)$ üzerinde konveks ise, *f* fonksiyonu ışınlar üzere konvekstir denir ve kısaca ICAR ile gösterilir.

Teorem 3.2.13.1. Aşağıdaki gibi tanımlanan *h* fonksiyonlarının sınıfı H_L olsun,

$$h(x) = \langle l, x \rangle - c$$

burada $\langle l, x \rangle$ min-tip fonksiyon ve $c \in \mathbb{R}$. Bir $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R} \cup \{+\infty\}$ fonksiyonunun H_L-konveks olması için gerek ve yeter koşul *f* 'nin alttan yarısürekli ve ICAR fonksiyon olmasıdır.

3.3. B-konveks Kümeler

B-konvekslik kavramında, $\forall r \in \mathbb{N}$ için; $\Phi_r : \mathbb{R}^n \to \mathbb{R}^n$ olmak üzere $\Phi_r\left(x_1,...,x_n\right) = \left(x_1^{2r+1},...,x_n^{2r+1}\right)$ homeomorfizmi ele alınır. Bu fonksiyon yardımı ile aşağıdaki ifadeler ve B-konveks küme tanımlanır. Daha sonra B-konveks kümelerin özellikleri verilerek üzerinde çalışmalar gerçekleştirilmiştir [41].

Tanım 3.3.1. Boştan farklı sonlu bir $A = \left\{x^{(1)},...,x^{(m)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ olsun.

$$Co^r(A) = \left\{ \Phi_r^{-1}\left(\sum_{i=1}^{m} t_i \Phi_r(x^{(i)}) \right) \middle| \, t_i \geq 0, \sum_{i=1}^{m} t_i = 1 \right\}$$

kümesine *A* kümesinin r-konveks kabuğu denir.

Tanım 3.3.2. Boştan farklı sonlu bir $A = \left\{x^{(1)},...,x^{(m)}\right\} \subset \mathbb{R}^n$ kümesi için

$$Co^\infty(A) = \lim_{r\to\infty} Co^r(A)$$

kümesine *A* kümesinin B-konveks kombinasyonu denir.

Burada limit Kuratowski-Painleve anlamında üst limittir. Yani, $\left\{P_r\right\}_{r\in\mathbb{N}}$ kümeler dizisinin Kuratowski-Painleve üst limiti, öyle *p* noktalarından oluşmuştur ki, artan bir $\left\{r_k\right\}$ dizisi ve $p_{r_k} \in P_{r_k}$ noktaları için $p = \lim_{k\to\infty} p_{r_k}$ olur ve $Ls_{r\to\infty}P_r$ ile gösterilir. $\left\{P_r\right\}_{r\in\mathbb{N}}$ kümeler dizisinin Kuratowski-Painleve alt limiti ise, öyle *p* noktalarından oluşmuştur ki, burada her bir *r* için $p_r \in P_r$ noktalar dizisi vardır ki $p = \lim_{r\to\infty} p_r$ olur ve $Li_{r\to\infty}P_r$ ile gösterilir. Ayrıca, $\mathbb{R}^n$'de bir $\left\{P_r\right\}_{r\in\mathbb{N}}$ alt kümeler dizisi için $Ls_{r\to\infty}P_r = Li_{r\to\infty}P_r$ koşulu sağlanıyorsa, bu kümeler dizisinin Kuratowski-Painleve anlamında limiti vardır denir [44].

Tanım 3.3.3. Bir $A \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin her sonlu alt kümesinin B-konveks kombinasyonu da *A*'nın alt kümesi ise *A* kümesine B-konveks küme denir.

Teorem 3.3.1. a) Boş küme, $\mathbb{R}^n$ ve tek nokta kümeleri B-konvekstir.

b) $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ kümesi B-konveks kümelerin keyfi bir ailesi olsun. Bu durumda, $\bigcap_\lambda L_\lambda$ B-konvekstir.

c) $\{L_\lambda \mid \lambda \in \Lambda\}$ bir B-konveks kümeler ailesi olsun. Her $\lambda_1, \lambda_2 \in \Lambda$ için $L_{\lambda_1} \bigcup L_{\lambda_2} \subset L_{\lambda_3}$ koşulunu sağlayan bir $\lambda_3 \in \Lambda$ varsa $\bigcup_\lambda L_\lambda$ kümesi B-konvekstir.

Özellikle de konveks analizin en önemli uygulamalarından biri olan ayırma teoremlerinde kullanılan yarı-uzay kavramını B-konvekslik için de ifade edelim.

Tanım 3.3.4. $A \subset \mathbb{R}^n$ B-konveks bir küme olsun. Eğer *A* kümesinin tümleyeni $A' = \mathbb{R}^n \setminus A$ de B-konveks ise *A* kümesine B-konveks yarı-uzay denir.

Tanım 3.3.5. $A \subset \mathbb{R}^n$ olsun. $\mathbb{R}^n$'de, *A* kümesini içeren tüm B-konveks kümelerin kesişimi kümesine *A*'nin B-konveks kabuğu denir ve $\mathrm{B}[A]$ ile gösterilir.

Teorem 3.3.2. Aşağıdaki özellikler sağlanır:

a) $\mathrm{B}[\varnothing] = \varnothing$, $\mathrm{B}[\mathbb{R}^n] = \mathbb{R}^n$ ve her $x \in \mathbb{R}^n$ için $\mathrm{B}[\{x\}] = \{x\}$ dir.

b) Her $A \subset \mathbb{R}^n$ için, $A \subset \mathrm{B}[A]$ ve $\mathrm{B}[\mathrm{B}[A]] = \mathrm{B}[A]$ olur.

c) Her $A_1, A_2 \subset \mathbb{R}^n$ için, eğer $A_1 \subset A_2$ ise $\mathrm{B}[A_1] \subset \mathrm{B}[A_2]$ sağlanır.

d) Her $S \subset \mathbb{R}^n$ için, $\mathrm{B}[S] = \bigcup \{\mathrm{B}[A] \mid A,\ S \text{ kümesinin sonlu bir altkümesi}\}$.

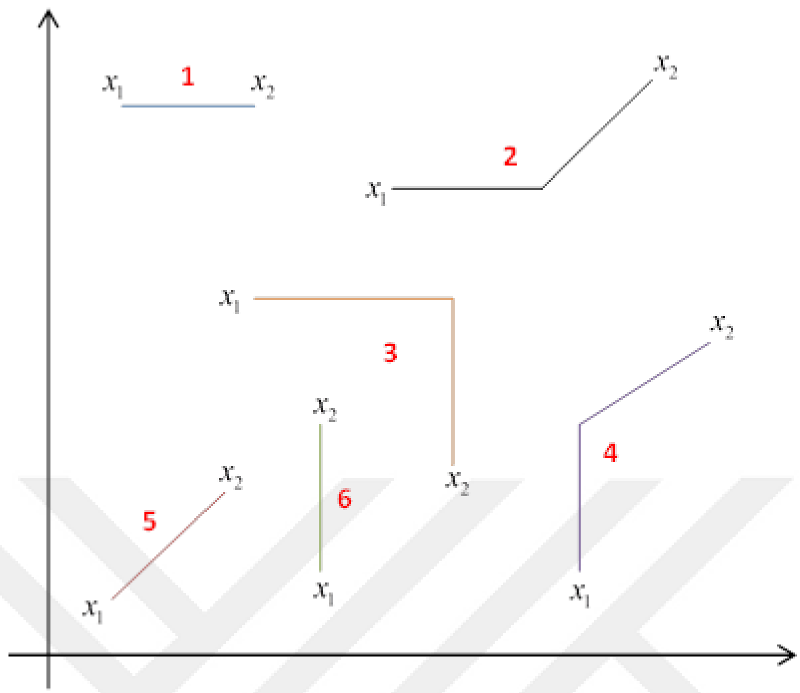
e) Bir $S \subset \mathbb{R}^n$ kümesinin B-konveks olması için gerekli ve yeterli koşul her bir sonlu $A \subset S$ için $\mathrm{B}[A] \subset S$ olmasıdır.

Eğer boştan farklı sonlu *A* kümesi özel olarak $A \subset \mathbb{R}^n_+$ ise *A*'nın B-konveks kombinasyonu

$$Co^\infty(A) = \lim_{r \to \infty} Co^r(A) = \left\{ \bigvee_{i=1}^{m} t_i x^{(i)} \,\middle|\, t_i \in [0,1], \max_{1 \le i \le m} \{t_i\} = 1 \right\}$$

biçiminde açık bir analitik gösterime sahip olur. Burada

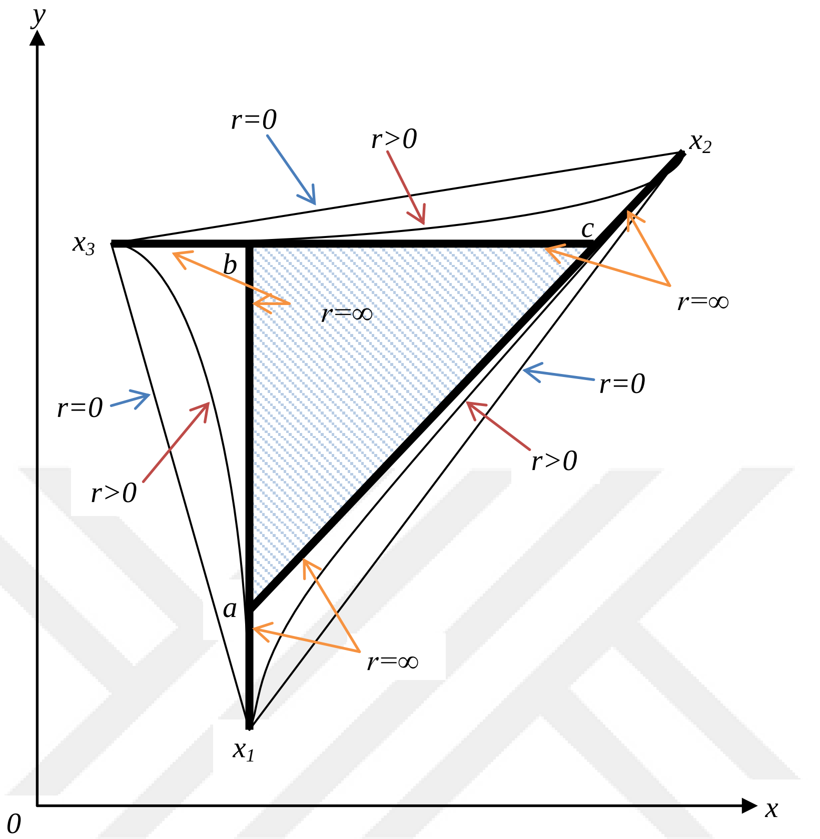
$$\bigvee_{i=1}^{m} x^{(i)} = \left(\max\left\{ x_1^{(1)}, \dots, x_1^{(m)} \right\}, \dots, \max\left\{ x_n^{(1)}, \dots, x_n^{(m)} \right\} \right)$$



Şekil 3.3. İki noktanın B-konveks kombinasyonunun biçimleri

$\mathbb{R}_+^2$ uzayındaki iki noktanın B-konveks kombinasyonu $Co^{\infty}(\{x_1, x_2\})$ kümesi yukarıdaki gibi açık analitik bir gösterime sahip olduğundan, bu iki noktanın durumlarına göre Şekil 3.3'deki formlardan biri olarak karşımıza çıkabilir. Şekildeki noktalar aşağıdaki gibidir:

1. $x_1 = (1,10)$, $x_2 = (2,10)$
2. $x_1 = (4,8)$, $x_2 = (11,11)$
3. $x_1 = (2,7)$, $x_2 = (5,5)$
4. $x_1 = (8,1)$, $x_2 = (12,6)$
5. $x_1 = (1,1)$, $x_2 = (2,2)$
6. $x_1 = (3,1)$, $x_2 = (3,5)$



Şekil 3.4. x_1, x_2, x_3 noktalarının B-konveks kombinasyonun oluşumu

Şekil 3.4'deki x_1, x_2, x_3 noktaları için $Co^{\infty}(\{x_1, x_2\})$ kümesi $[x_1, a, x_2]$ kırık doğrusu, $Co^{\infty}(\{x_1, x_3\})$ kümesi $[x_1, b, x_3]$ kırık doğrusu ve $Co^{\infty}(\{x_2, x_3\})$ kümesi ise $[x_2, c, x_3]$ kırık doğrusudur. $r = 0$ durumunda x_1, x_2, x_3 noktalarının klasik konveks kabuğu olan üçgen karşımıza çıkarken, $r \to \infty$ iken üçgenin kenarları içeri doğru bükülür ve $r = \infty$ olduğunda bu noktaların B-konveks kombinasyonunu verir.

$\mathbb{R}_+^n$'de B-konveks kümenin tanımı aşağıdaki gibi ifade edilebilir:

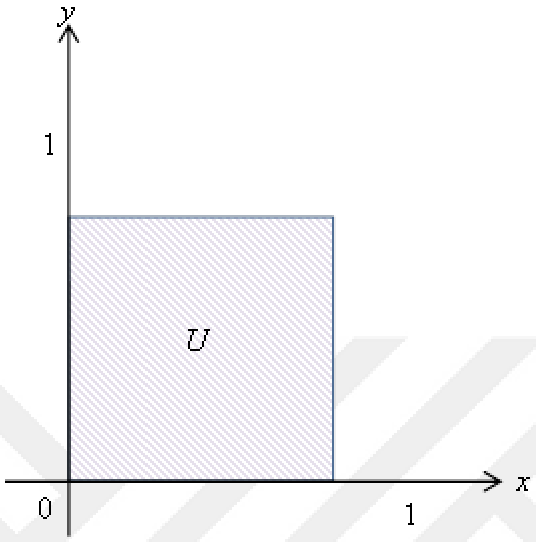
Tanım 3.3.6. $A \subset \mathbb{R}_+^n$ ve $m \geq 2$ olsun. $x^{(1)}, \ldots, x^{(m)} \in A$, ve $\max(\alpha_1, \ldots, \alpha_m) = 1$ için

$$\bigvee_{i=1}^{m} \alpha_i x^{(i)} \in A$$

sağlanıyorsa A kümesine B-konveks küme denir [41].

$\mathbb{R}_+^n$'de B-konveks küme tanımına denk olan aşağıdaki teoremi vermek mümkündür.

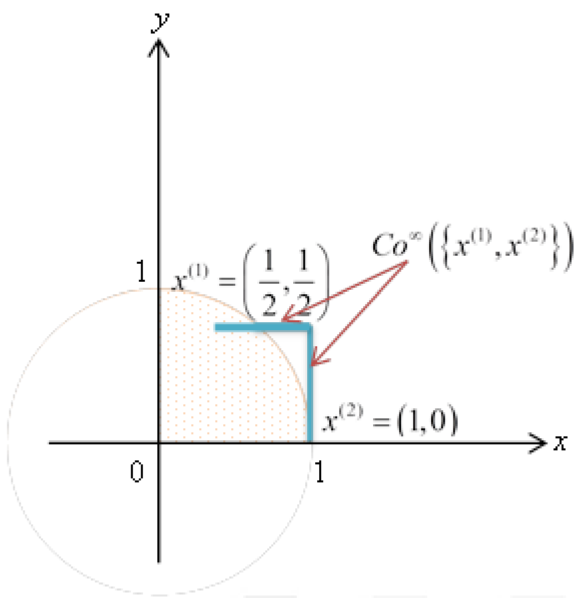
Teorem 3.3.3. Bir $A \subset \mathbb{R}_+^n$ kümesinden alınan her $x_1, x_2 \in A$ ve her $t \in [0,1]$ için $tx_1 \vee x_2 \in A$ olursa *A* kümesine B-konveks küme denir.



Şekil 3.5. $U = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\} \subset \mathbb{R}_+^2$ kümesi

Şekil 3.5'deki klasik anlamda konveks $U = \{(x, y) \mid 0 \le x \le 1, 0 \le y \le 1\} \subset \mathbb{R}_+^2$ kümesi aynı zamanda B-konveks bir kümedir. Gerçekten; herhangi $x^{(1)} = \left(x_1^{(1)}, x_2^{(1)}\right)$, $x^{(2)} = \left(x_1^{(2)}, x_2^{(2)}\right) \in U$ ve her $t \in [0,1]$ için $0 \le tx_1^{(1)} \vee x_1^{(2)} \le 1$ ve $0 \le tx_2^{(1)} \vee x_2^{(2)} \le 1$ olduğundan $tx^{(1)} \vee x^{(2)} \in U$ olur.

Ancak konveks bir küme her zaman B-konveks olmak zorunda değildir. Bunun için Şekil 3.6'daki $V = \{(x, y) \mid x, y \ge 0,\ x^2 + y^2 \le 1\} \subset \mathbb{R}_+^2$ kümesini ele alabiliriz. $x^{(1)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$, $x^{(2)} = (1,0) \in V$ ve $t = 1 \in [0,1]$ için $tx^{(1)} \vee x^{(2)} = \left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right) \vee (1,0) = \left(1, \frac{1}{2}\right)$ olur ki, $1^2 + \left(\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{5}{4} > 1$ olduğundan $tx^{(1)} \vee x^{(2)} \notin V$, yani *V* kümesi B-konveks değildir.



Şekil 3.6. $V = \left\{(x, y) \,\middle|\, x, y \geq 0,\ x^2 + y^2 \leq 1\right\} \subset \mathbb{R}_+^2$ kümesi

Bunlara ek olarak Şekil 3.4'deki $Co^{\infty}\left(\left\{x_1, x_2, x_3\right\}\right)$ B-konveks kümesinin konveks olmadığı da aşikardır.

Tüm bu sonuçlar ışığında, B-konveks kümeler ailesi ve konveks kümeler ailesinin birbirini içermediği görülmektedir.

Teorem 3.3.4. $\mathbb{R}_+^n$ da B-konveks bir kümenin kapanışı da B-konvekstir [41].

Önerme 3.3.1. $A \subset \mathbb{R}_+^n$ bir B-konveks küme olsun. Bu durumda, $U_{\infty}(A, \delta) := \left\{x \in \mathbb{R}_+^n \,\middle|\, \exists y \in A, \|x - y\|_{\infty} < \delta\right\}$ kümesi de B-konvekstir [41].

Yukarıdaki B-konveks bir kümenin δ-komşuluğunun da B-konveks olması önermesinden yararlanarak, aşağıdaki teoremi ifade etmek mümkündür.

Teorem 3.3.5. $\mathbb{R}_+^n$ da B-konveks bir kümenin içi de B-konveks kümedir [41].

$\mathbb{R}_+^n$ kümesini herhangi bir $z \in \mathbb{R}_{++}^n$ noktası için aşağıdaki gibi ifade edilen $n+1$ parçaya ayırmak mümkündür [43].

$$N_0(z) := \left\{x \in \mathbb{R}_{++}^n \,\middle|\, x_i \leq z_i,\quad i = \overline{1, n}\right\}$$

$$N_j(z) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n_{++} \,\middle|\, z_j \le x_j \quad \text{ve} \quad \forall i = \overline{1,n} \quad \text{için} \quad x_i z_j \le z_i x_j \right\}, \quad j = \overline{1,n}$$

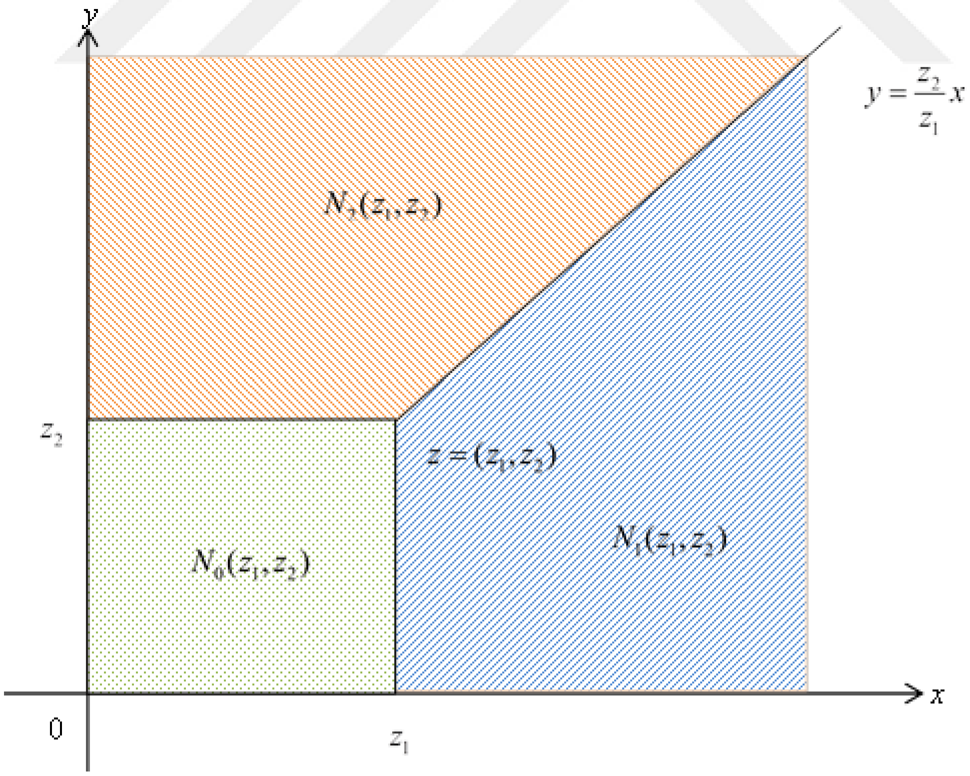
$N_0(z)$ kümesi kapalı, konveks ve radyant bir küme, $N_j(z)$ $\left(j = \overline{1,n}\right)$ kümeleri ise, kapalı, konveks ve ko-radyant kümelerdir. $j \in \{0,1,\ldots,n\}$ için

$$M_j(z) := \mathbb{R}^n_+ \setminus N_j(z)$$
$$U_j(z) := \left\{ x \in \mathbb{R}^n_+ \,\middle|\, z \in N_j(x) \right\}$$

olsun.

Teorem 3.3.6. Her $j = \overline{0,n}$ için $N_j(z)$ kümeleri kapalı ve B-konveks, $M_j(z)$ kümeleri ise açık ve B-konveks kümelerdir. Dolayısıyla, bu kümeler B-konveks yarı-uzaylarıdır [43].

Özel olarak, herhangi bir $z \in \mathbb{R}^2_{++}$ noktası için $\mathbb{R}^2_+$ kümesinde oluşan B-konveks yarı-uzayların biçimleri Şekil 3.7'de verildiği gibidir.



Şekil 3.7. $\mathbb{R}^2_+$ kümesinde oluşan B-konveks yarı-uzaylar

Teorem 3.3.7. Her $A \subset \mathbb{R}_+^n$ alt kümesi için,

a) $\mathrm{B}[A] = \left\{ z \in \mathbb{R}_+^n \,\middle|\, \forall j \in \{0,1,\dots,n\} \quad N_j(z) \cap A \neq \varnothing \right\}$ olur.

b) $\mathrm{B}[A] = \bigcap_{j=0}^{n} U_j(A) = \bigcap_{j=0}^{n} \bigcup_{a \in A} U_j(a)$ olur. Sonuç olarak, sonlu bir kümenin B-konveks kabuğu daima sonlu sayıda lineer politopların birleşimidir [43].

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. B-konveks Fonksiyonlar

Tanım 4.1.1. $U \subset \mathbb{R}^n$ ve $f : U \to \mathbb{R} \bigcup \{\pm\infty\}$ olsun. Eğer, *epif* kümesi B-konveks ise f fonksiyonuna B-konveks fonksiyon denir.

Teorem 4.1.1. $U \subset \mathbb{R}^n_+$, $f : U \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun B-konveks olması için gerekli ve yeterli koşul U kümesinin B-konveks olması ve her $x, y \in U$, $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x \vee y) \le \lambda f(x) \vee f(y) \tag{4.1}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. f B-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda, *epif* B-konveks kümedir, yani; $\forall (x,\mu),(y,\nu) \in epif$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için $\lambda(x,\mu) \vee (y,\nu) \in epif$ olur.

$$(x,\mu) \in epif \Rightarrow \begin{cases} x \in U & (4.2) \\ f(x) \le \mu & (4.3) \end{cases}$$

$$(y,\nu) \in epif \Rightarrow \begin{cases} y \in U & (4.4) \\ f(y) \le \nu & (4.5) \end{cases}$$

$$(\lambda x \vee y, \lambda\mu \vee \nu) \in epif \Rightarrow \begin{cases} \lambda x \vee y \in U & (4.6) \\ f(\lambda x \vee y) \le \lambda\mu \vee \nu & (4.7) \end{cases}$$

olması demektir. (4.2), (4.4) ve (4.6)'dan, U kümesi B-konveks olur. Diğer yandan, $\forall x, y \in U$ ve $\lambda \in [0,1]$ için (4.3), (4.5) ve (4.7)'den

$$f(\lambda x \vee y) \le \lambda f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliği elde edilir.

Yeterlilik kısmının ispatı için, $U \subset \mathbb{R}^n_+$ kümesinin B-konveks, $f : U \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonun $\forall x, y \in U$, $\lambda \in [0,1]$ için $f(\lambda x \vee y) \le \lambda f(x) \vee f(y)$ eşitsizliğini sağladığını varsayalım. f fonksiyonunun B-konveks olduğunu gösterelim. $(x,\mu),(y,\nu)\in epif$ olsun. Bu durumda,

$$(x,\mu)\in epif \Rightarrow \begin{cases} x\in U & (4.8) \\ f(x)\le \mu & (4.9) \end{cases}$$

$$(y,\nu)\in epif \Rightarrow \begin{cases} y\in U & (4.10) \\ f(y)\le \nu & (4.11) \end{cases}$$

olur. (4.8), (4.10) ve U kümesi B-konveks olduğundan her $\lambda\in[0,1]$ için

$$\lambda x\vee y\in U \tag{4.12}$$

dur. (4.9), (4.11), (4.12) ve (4.1)'den $\forall(x,\mu),(y,\nu)\in epif$ ve $\forall\lambda\in[0,1]$ için $\lambda(x,\mu)\vee(y,\nu)=(\lambda x\vee y,\lambda\mu\vee\nu)\in epif$ olur. Dolayısıyla $epif$ kümesi B-konveks olur ki bu da f fonksiyonun B-konveks olması demektir. ■

Not 4.1.1. Teorem 4.1.1'de (4.1) eşitsizliği cebirsel olarak da ifade edilebilir. $c,d\in\mathbb{R}$ için $\max\{c,d\}=\frac{1}{2}\left[c+d+|c-d|\right]$ olduğundan, $e_i=(0,\ldots,0,\underset{i.}{1},0,\ldots,0)\in\mathbb{R}^n$, $i=\overline{1,n}$ olmak üzere,

$$\lambda x\vee y=\sum_{i=1}^{n}e_i\frac{1}{2}\left[\lambda x_i+y_i+|\lambda x_i-y_i|\right]$$

olur. Bu durumda, (4.1) eşitsizliği

$$f\left(\frac{1}{2}\sum_{i=1}^{n}e_i\left[\lambda x_i+y_i+|\lambda x_i-y_i|\right]\right)\le\frac{1}{2}\left[\lambda f(x)+f(y)+|\lambda f(x)-f(y)|\right]$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem 4.1.2. (B-konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği) $U\subset\mathbb{R}_+^n$, $f:U\to\mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun B-konveks olması için gerekli ve yeterli koşul U kümesinin B-konveks olması ve $i=\overline{1,m}$ olmak üzere $\forall x_i\in U$ ve $\forall\lambda_i\in[0,1]$, $\max\limits_{i=\overline{1,m}}\{\lambda_i\}=1$ için

$$f\left(\mathop{\vee}_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right)\le \mathop{\vee}_{i=1}^{m}\lambda_i f\left(x_i\right) \tag{4.13}$$

eşitsizliğinin sağlanmasıdır.

İspat. f B-konveks fonksiyon olsun. U kümesi B-konveks olduğundan (Teorem 4.1.1'den) $i=\overline{1,m}$ olmak üzere $x_i\in U$ ve $\lambda_i\in[0,1]$, $\max\limits_{i=\overline{1,m}}\{\lambda_i\}=1$ için $\lambda_1x_1\vee\lambda_2x_2\vee\ldots\vee\lambda_mx_m\in U$ dur. Genelliği bozmadan, $\lambda_m=1$ olduğunu varsayabiliriz. O halde $y=\lambda_2x_2\vee\lambda_3x_3\vee\ldots\vee\lambda_mx_m$ olmak üzere $y\in U$ olur. f fonksiyonun B-konveksliğinden

$$f\left(\lambda_1x_1\vee y\right)\le\lambda_1 f\left(x_1\right)\vee f\left(y\right)$$

elde edilir. Benzer şekilde, $z=\lambda_3x_3\vee\lambda_4x_4\vee\ldots\vee\lambda_mx_m$ olmak üzere $z\in U$ olur. Yine f in B-konveksliğinden,

$$f\left(y\right)=f\left(\lambda_2x_2\vee\lambda_3x_3\vee\ldots\vee\lambda_mx_m\right)=f\left(\lambda_2x_2\vee z\right)\le\lambda_2 f\left(x_2\right)\vee f\left(z\right)$$

elde edilir ve dolayısıyla

$$f\left(\mathop{\vee}_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right)\le\lambda_1 f\left(x_1\right)\vee f\left(y\right)\le\lambda_1 f\left(x_1\right)\vee\lambda_2 f\left(x_2\right)\vee f\left(z\right)$$

eşitsizliği elde edilmiş olur. Tümevarımla,

$$f\left(\mathop{\vee}_{i=1}^{m}\lambda_i x_i\right)\le\lambda_1 f\left(x_1\right)\vee\lambda_2 f\left(x_2\right)\vee\ldots\vee\lambda_m f\left(x_m\right)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspatın yeterlilik kısmı için, (4.13) eşitsizliğinin sağlandığını kabul edelim. Eşitsizlik $m=2$ durumunda da sağlanacağından $\lambda_1,\lambda_2\in[0,1]$ ve $\max\{\lambda_1,\lambda_2\}=1$ olur. Genelliği bozmadan $\lambda_2=1$ kabul edersek;

$$f\left(\lambda_1x_1\vee x_2\right)\le\lambda_1 f\left(x_1\right)\vee f\left(x_2\right)$$

sağlanır. Bu durumda Teorem 4.1.1'den, f B-konveks fonksiyon olur. ■

$U \subset \mathbb{R}_+^n$ da fonksiyonun B-konkavlığının tanımı aşağıdaki gibi verilir.

Tanım 4.1.2. $f : U \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olsun. $hyp^+ f := \{(x,\mu) | x \in U,\ \mu \in \mathbb{R}_+,\ \mu \le f(x)\}$ kümesi B-konveks ise f fonksiyonuna B-konkav fonksiyon denir.

Teorem 4.1.3. $U \subset \mathbb{R}_+^n$, $f : U \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonun B-konkav olması için gerekli ve yeterli koşul U kümesinin B-konveks olması ve aşağıdaki eşitsizliğin sağlanmasıdır; her $x, y \in U$ ve $\lambda \in [0,1]$ için,

$$\lambda f(x) \vee f(y) \le f(\lambda x \vee y) \tag{4.14}$$

İspat. f B-konkav fonksiyon olsun. Tanımdan, $hyp^+ f$ B-konveks küme olur, yani; $\forall (x,\mu), (y,\nu) \in hyp^+ f$, $\forall \lambda \in [0,1]$ için $\lambda(x,\mu) \vee (y,\nu) \in hyp^+ f$ dir. Burada

$$(x,\mu) \in hyp^+ f \Rightarrow \begin{cases} x \in U & (4.15) \\ 0 \le \mu \le f(x) & (4.16) \end{cases}$$

$$(y,\nu) \in hyp^+ f \Rightarrow \begin{cases} y \in U & (4.17) \\ 0 \le \nu \le f(y) & (4.18) \end{cases}$$

$$(\lambda x \vee y, \lambda\mu \vee \nu) \in hyp^+ f \Rightarrow \begin{cases} \lambda x \vee y \in U & (4.19) \\ 0 \le \lambda\mu \vee \nu \le f(\lambda x \vee y) & (4.20) \end{cases}$$

dir. (4.15), (4.17) ve (4.19) göz önüne alındığında, U kümesinin B-konveks olduğu görülür. $\forall x, y \in U$ ve $\lambda \in [0,1]$ için (4.16), (4.18) ve (4.20) eşitsizliklerinden

$$\lambda f(x) \vee f(y) \le f(\lambda x \vee y)$$

elde edilir.

İspatın ikinci kısmı için $U \subset \mathbb{R}_+^n$ kümesinin B-konveks, $f : U \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonun $\forall x, y \in U$, $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda f(x) \vee f(y) \le f(\lambda x \vee y)$ eşitsizliğini sağladığını varsayalım. f fonksiyonun B-konkav olduğunu, dolayısıyla $hyp^{+} f$ kümesinin B-konveks olduğunu göstermeliyiz. $(x,\mu),(y,\nu)\in hyp^{+} f$ alalım. Bu durumda,

$$(x,\mu)\in hyp^{+} f \Rightarrow \begin{cases} x\in U & (4.21) \\ 0\le \mu \le f(x) & (4.22) \end{cases}$$

$$(y,\nu)\in hyp^{+} f \Rightarrow \begin{cases} y\in U & (4.23) \\ 0\le \nu \le f(y) & (4.24) \end{cases}$$

olur. (4.21), (4.23) ve U kümesi B-konveks olduğundan her $\lambda\in[0,1]$ için

$$\lambda x\vee y\in U \tag{4.25}$$

dur. Daha sonra (4.22), (4.24), (4.25) ve (4.14) göz önünde bulundurulduğunda $\forall(x,\mu),(y,\nu)\in hyp^{+} f$ ve $\forall\lambda\in[0,1]$ için $\lambda(x,\mu)\vee(y,\nu)\in hyp^{+} f$ elde edilir. Yani $hyp^{+} f$ B-konvekstir. ■

Tanım 4.1.3. Hem B-konveks hem de B-konkav olan fonksiyona B-afin fonksiyon denir.

B-afin fonksiyonun tanımı ile Teorem 4.1.1 ve Teorem 4.1.3 göz önüne alındığında, aşağıdaki teorem kolaylıkla ispatlanabilir.

Teorem 4.1.4. $U\subset\mathbb{R}_{+}^{n}$, $f:U\to\mathbb{R}_{+}\cup\{+\infty\}$ olsun. f fonksiyonunun B-afin olması için gerekli ve yeterli koşul U kümesinin B-konveks olması ve her $x,y\in U$, $\lambda\in[0,1]$ için,

$$f(\lambda x\vee y)=\lambda f(x)\vee f(y)$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 4.1.5. $U\subset\mathbb{R}_{+}^{n}$ ve $f:U\to\mathbb{R}_{+}\cup\{+\infty\}$ olsun. Bu durumda f fonksiyonunun B-konkav olması için gerekli ve yeterli koşul $i=\overline{1,m}$ olmak üzere $\forall x_i\in U$ ve $\forall\lambda_i\in[0,1]$, $\max\limits_{i=\overline{1,m}}\{\lambda_i\}=1$ için

$$\overset{m}{\underset{i=1}{\vee}} \lambda_i f(x_i) \leq f\left(\overset{m}{\underset{i=1}{\vee}} \lambda_i x_i \right) \tag{4.26}$$

eşitsizliğinin sağlanması ve U kümesinin B-konveks olmasıdır.

İspat. Gereklilik kısmı için, f fonksiyonun B-konkav olduğunu kabul edelim. Bu durumda, U B-konveks küme olduğundan (Teorem 4.1.3'den) $i = \overline{1,m}$ için $\forall x_i \in U$, $\lambda_i \in [0,1]$, $\max\limits_{i=\overline{1,m}} \{\lambda_i\} = 1$ için $\lambda_1 x_1 \vee \lambda_2 x_2 \vee \ldots \vee \lambda_m x_m \in U$ dur. Genelliği bozmadan, $\lambda_m = 1$ alabiliriz. O halde $y = \lambda_2 x_2 \vee \lambda_3 x_3 \vee \ldots \vee \lambda_m x_m$ olmak üzere $y \in U$ dur. f in B-konkavlığından

$$\lambda_1 f(x_1) \vee f(y) \leq f(\lambda_1 x_1 \vee y)$$

eşitsizliği elde edilir. Benzer şekilde, $z = \lambda_3 x_3 \vee \lambda_4 x_4 \vee \ldots \vee \lambda_m x_m$ olmak üzere $z \in U$ olur. Burada da, f fonksiyonun B-konkav olduğunu göz önüne alarak,

$$\lambda_2 f(x_2) \vee f(z) \leq f(\lambda_2 x_2 \vee z) = f(\lambda_2 x_2 \vee \lambda_3 x_3 \vee \ldots \vee \lambda_m x_m) = f(y)$$

yazabiliriz ve dolayısıyla

$$\lambda_1 f(x_1) \vee \lambda_2 f(x_2) \vee f(z) \leq \lambda_1 f(x_1) \vee f(y) \leq f\left(\overset{m}{\underset{i=1}{\vee}} \lambda_i x_i \right)$$

elde ederiz. Böyle devam edersek;

$$\lambda_1 f(x_1) \vee \lambda_2 f(x_2) \vee \ldots \vee \lambda_m f(x_m) \leq f\left(\overset{m}{\underset{i=1}{\vee}} \lambda_i x_i \right)$$

eşitsizliğinin sağlandığını ispat etmiş oluruz.

İspatın diğer kısmı için (4.26) eşitsizliğinin sağlandığını varsayalım. Bu eşitsizlik için, $m = 2$ durumunda; $\lambda_1, \lambda_2 \in [0,1]$ ve $\max\{\lambda_1, \lambda_2\} = 1$ olduğundan; genelliği bozmadan $\lambda_2 = 1$ kabul ettiğimizde;

$$\lambda_1 f(x_1) \vee f(x_2) \leq f(\lambda_1 x_1 \vee x_2)$$

olur. Bu durumda f fonksiyonu B-konkav olur. ■

4.2. B-konveks Fonksiyonların Bazı Özellikleri

Teorem 4.2.1. Herhangi bir $f:\mathbb{R}^n \to \mathbb{R}\bigcup\{\pm\infty\}$ B-konveks fonksiyonu ve herhangi bir $\alpha \in [-\infty,+\infty]$ için $\{x \mid f(x) \le \alpha\}$ ve $\{x \mid f(x) < \alpha\}$ seviye kümeleri B-konvekstir.

İspat. $\{x \mid f(x) \le \alpha\}$ kümesi, *epif* kümesi ile $\mathbb{R}^{n+1}$ deki $\{(x,\mu) \mid \mu = \alpha\}$ yatay hiperdüzleminin kesişiminin $\mathbb{R}^n$ üzerine izdüşümüdür. Bundan dolayı, $\{x \mid f(x) \le \alpha\}$ kümesine *epif* in bir yatay kesiti gibi bakmak mümkündür. Dolayısıyla, $\{x \mid f(x) \le \alpha\}$ iki B-konveks kümenin kesişimi olur. B-konveks kümelerin keyfi sayıdaki kesişimi B-konveks olduğundan ([41]), $\{x \mid f(x) \le \alpha\}$ seviye kümesi B-konvekstir.

$\{x \mid f(x) < \alpha\}$ kümesi ise $\left\{x \mid f(x) \le \alpha + \frac{1}{n}\right\}$ B-konveks kümelerinin keyfi kesişimi olarak yazılabilir. Buradan, $\{x \mid f(x) < \alpha\}$ seviye kümesinin de B-konveks küme olduğu görülür. ■

$U \subset \mathbb{R}^n_+$ olmak üzere herhangi bir $f:U \to \mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}$ fonksiyonu için seviye kümeleri ile ilgili yukarıdaki teoremin ispatını farklı şekilde vermemiz mümkündür.

Teorem 4.2.2. Herhangi bir $f:U \to \mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}$ B-konveks fonksiyonu ve herhangi bir $\alpha \in (0,+\infty]$ için $\{x \mid f(x) < \alpha\}$ ve $\{x \mid f(x) \le \alpha\}$ seviye kümeleri B-konvekstir.

İspat. $f:U \to \mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}$ B-konveks fonksiyon olsun. Bu durumda $\forall x, y \in U$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x \vee y) \le \lambda f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliği sağlanır. $x', y' \in \{x \mid f(x) < \alpha\}$ alalım. Açıktır ki $f(x') < \alpha$ ve $f(y') < \alpha$ dır. $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda x' \vee y' \in \{x \mid f(x) < \alpha\}$ olduğunu göstermeliyiz; f fonksiyonu B-konveks olduğundan;

$$f(\lambda x' \vee y') \leq \lambda f(x') \vee f(y') < \lambda \alpha \vee \alpha = \alpha$$
$$f(\lambda x' \vee y') < \alpha$$

olur. Dolayısıyla $\lambda x' \vee y' \in \{x \mid f(x) < \alpha\}$, yani $\{x \mid f(x) < \alpha\}$ kümesi B-konvekstir.

$\{x \mid f(x) \leq \alpha\}$ kümesinin B-konveksliği de benzer şekilde gösterilir. ■

Tanım 4.2.1. $\mathbb{R}^n$ de tanımlı bir f fonksiyonu, her $x \in \mathbb{R}^n$ için

$$f(\lambda x) = \lambda f(x), \qquad 0 < \lambda < +\infty$$

koşulunu sağlıyorsa, bu f fonksiyonuna (1. dereceden) pozitif homojen fonksiyondur denir.

Teorem 4.2.3. Pozitif homojen bir $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonunun B-konveks olması için gerekli ve yeterli koşul her $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ için,

$$f(x \vee y) \leq f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliğini sağlamasıdır.

İspat. Pozitif homojen $f : \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ fonksiyonu B-konveks olsun. Bu durumda; her $x, y \in \mathbb{R}^n_+$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x \vee y) \leq \lambda f(x) \vee f(y)$$

sağlanır. Bu eşitsizlik $\lambda = 1$ için de sağlanacağından;

$$f(x \vee y) \leq f(x) \vee f(y)$$

olur.

İspatın ikinci kısmında, pozitif homojen $f:\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonunun her $x,y \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$f(x \vee y) \le f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliğini sağladığını varsayalım. Her $\lambda \in [0,1]$ için $\lambda x \in \mathbb{R}_+^n$ olduğundan ve f in pozitif homojenliğinden;

$$f(\lambda x \vee y) \le f(\lambda x) \vee f(y) = \lambda f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliği elde edilir. Böylece f fonksiyonun B-konveks olduğu ispatlanmış olur. ■

Sonuç 4.2.1. Eğer $f:\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonu pozitif homojen B-konveks bir fonksiyon ise $\lambda_1, \lambda_2, \ldots, \lambda_m > 0$ için aşağıdaki eşitsizlik sağlanır:

$$f(\lambda_1 x_1 \vee \lambda_2 x_2 \vee \ldots \vee \lambda_m x_m) \le \lambda_1 f(x_1) \vee \lambda_2 f(x_2) \vee \ldots \vee \lambda_m f(x_m)$$

İspat. $f:\mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonun pozitif homojen B-konveks olduğunu kabul edelim. Bu durumda açıktır ki Teorem 4.2.3'den, her $x,y \in \mathbb{R}_+^n$ için

$$f(x \vee y) \le f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliği sağlanır. $i=\overline{1,m}$ olmak üzere $\lambda_i > 0$ sayıları ve $x_i \in \mathbb{R}_+^n$ ele alalım. Bu durumda $\forall i=\overline{1,m}$ için $\lambda_i x_i \in \mathbb{R}_+^n$ ve $\lambda_2 x_2 \vee \lambda_3 x_3 \vee \ldots \vee \lambda_m x_m \in \mathbb{R}_+^n$ dır. $y=\lambda_2 x_2 \vee \lambda_3 x_3 \vee \ldots \vee \lambda_m x_m$ olarak işaretleyelim. Yukarıdaki eşitsizlikten ve f in pozitif homojenliğinden;

$$f(\lambda_1 x_1 \vee y) \le f(\lambda_1 x_1) \vee f(y) = \lambda_1 f(x_1) \vee f(y)$$

olur. Benzer olarak; $z=\lambda_3 x_3 \vee \lambda_4 x_4 \vee \ldots \vee \lambda_m x_m \in \mathbb{R}_+^n$ olmak üzere

$$f(y)=f(\lambda_2x_2\vee\lambda_3x_3\vee\ldots\vee\lambda_mx_m)=f(\lambda_2x_2\vee z)\leq f(\lambda_2x_2)\vee f(z)=\lambda_2f(x_2)\vee f(z)$$

eşitsizliği elde edilir. Buradan,

$$\begin{aligned}f(\lambda_1x_1\vee\lambda_2x_2\vee\ldots\vee\lambda_mx_m)&=f(\lambda_1x_1\vee y)\leq\lambda_1f(x_1)\vee f(y)\\&\leq\lambda_1f(x_1)\vee f(\lambda_2x_2\vee\lambda_3x_3\vee\ldots\vee\lambda_mx_m)\\&\leq\lambda_1f(x_1)\vee\lambda_2f(x_2)\vee f(z)\end{aligned}$$

dir. Tümevarımla,

$$f(\lambda_1x_1\vee\lambda_2x_2\vee\ldots\vee\lambda_mx_m)\leq\lambda_1f(x_1)\vee\lambda_2f(x_2)\vee\ldots\vee\lambda_mf(x_m)$$

eşitsizliği sağlanır. ■

Teorem 4.2.4.

i) $U\subset\mathbb{R}^n_+$ ve $f:U\to\mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}$ B-konveks bir fonksiyon olsun. f in pozitif skaler ile çarpımı da B-konvekstir.

ii) $f:U\subset\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}$ B-konveks fonksiyon olsun. Her bir $A\subset U$ B-konveks alt kümesi için, f fonksiyonun A kümesine kısıtlanışı da B-konvekstir.

iii) Eğer $f:U\subset\mathbb{R}^n_+\to V\subset\mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}$ B-konveks fonksiyon ve $g:V\subset\mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}\to\mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}$ azalmayan B-konveks bir fonksiyon ise $g\circ f$ de B-konvekstir.

iv) $f:U\subset\mathbb{R}_+\to V\subset\mathbb{R}_+$ birebir, örten ve artan bir fonksiyon olsun. f in B-konveks olması için gerekli ve yeterli koşul f^{-1} fonksiyonun B-konkav olmasıdır. Eğer f azalan ise f ile f^{-1} fonksiyonu aynı konvekslik karakterindedir. Yani, f B-konveks ise f^{-1} de B-konvekstir, f B-konkav ise f^{-1} de B-konkavdır ve tersine.

İspat. i) $f:U\subset\mathbb{R}^n_+\to\mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}$ B-konveks olsun. Bu durumda, $\forall x,y\in U$, $\forall\lambda\in[0,1]$ için,

$$f(\lambda x\vee y)\leq\lambda f(x)\vee f(y)$$

eşitsizliği sağlanır. Herhangi bir $c>0$ için cf fonksiyonu

$$cf(\lambda x \vee y) = c\left[f(\lambda x \vee y)\right] \leq c\left[\lambda f(x) \vee f(y)\right] = c\left[\lambda f(x)\right] \vee c\left[f(y)\right]$$
$$= \lambda(cf)(x) \vee (cf)(y)$$

eşitsizliğini sağladığından, cf B-konveks olur.

ii) $f : U \subset \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonunun B-konveks olduğunu varsayalım. O halde, $\forall x, y \in U$, $\forall \lambda \in [0,1]$ için,

$$f(\lambda x \vee y) \leq \lambda f(x) \vee f(y)$$

sağlanır. Bu eşitsizlik $\forall x, y \in U$ için sağlandığından, her bir $A \subset U$ B-konveks kümesi üzerinde de sağlanır. Dolayısıyla $f\big|_A$ B-konveks fonksiyon olur.

iii) $f : U \subset \mathbb{R}^n_+ \to V \subset \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ B-konveks, $g : V \subset \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\} \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ azalmayan B-konveks bir fonksiyon olsun. Bu durumda, $\forall x, y \in U$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için f fonksiyonu

$$f(\lambda x \vee y) \leq \lambda f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliğini sağlar, g fonksiyonun B-konveksliğinden de $\forall z, t \in V$, $\forall \mu \in [0,1]$ için

$$g(\mu z \vee t) \leq \mu g(z) \vee g(t)$$

olur. Bu eşitsizlikleri kullanarak $\forall x, y \in U$, $\forall \lambda \in [0,1]$ için $g \circ f$ fonksiyonu

$$(g \circ f)(\lambda x \vee y) = g\left(f(\lambda x \vee y)\right) \leq g\left(\lambda f(x) \vee f(y)\right)$$
$$\leq \lambda g\left(f(x)\right) \vee g\left(f(y)\right)$$
$$= \lambda(g \circ f)(x) \vee (g \circ f)(y)$$

eşitsizliğini sağlar, bu ise $g \circ f$ fonksiyonun B-konveks olduğu anlamına gelir.

iv) $f : U \subset \mathbb{R}_+ \to V \subset \mathbb{R}_+$ birebir, örten ve artan bir fonksiyon olsun. Varsayalım f B-konvekstir. Bu durumda $\forall x, y \in U$, $\forall \lambda \in [0,1]$ için,

$$f\left(\lambda x \vee y\right) \leq \lambda f\left(x\right) \vee f\left(y\right)$$

eşitsizliği sağlanır. I_U ve I_V sırasıyla U ve V kümeleri üzerinde tanımlı birim fonksiyonlar olmak üzere, $f \circ f^{-1} = I_V$ ve $f^{-1} \circ f = I_U$ olur, buradan ve f in B-konveksliğinden,

$$f\left(f^{-1}\left(\lambda s \vee t\right)\right) = \lambda s \vee t = \lambda\left(f\left(f^{-1}\left(s\right)\right)\right) \vee \left(f\left(f^{-1}\left(t\right)\right)\right) \geq f\left(\lambda f^{-1}\left(s\right) \vee f^{-1}\left(t\right)\right)$$

yani

$$f\left(f^{-1}\left(\lambda s \vee t\right)\right) \geq f\left(\lambda f^{-1}\left(s\right) \vee f^{-1}\left(t\right)\right) \tag{4.27}$$

dir. f fonksiyonu artan olduğundan f^{-1} de artandır. f^{-1} fonksiyonun artan olmasından ve (4.27) eşitsizliğinden, $f^{-1}\left(\lambda s \vee t\right) \geq \lambda f^{-1}\left(s\right) \vee f^{-1}\left(t\right)$ elde edilir. Böylelikle f^{-1} B-konkavdır.

Şimdi, varsayalım f^{-1} B-konkav olsun. $\forall s, t \in V$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için,

$$f^{-1}\left(\lambda s \vee t\right) \geq \lambda f^{-1}\left(s\right) \vee f^{-1}\left(t\right) \tag{4.28}$$

eşitsizliği sağlanır. $f^{-1}\left(s\right) = x$, $f^{-1}\left(t\right) = y$ olsun. Buradan, $f\left(x\right) = s$, $f\left(y\right) = t$ olur. f fonksiyonun artanlığından ve (4.28) eşitsizliğinden

$$f^{-1}\left(\lambda f\left(x\right) \vee f\left(y\right)\right) \geq \lambda f^{-1}\left(f\left(x\right)\right) \vee f^{-1}\left(f\left(y\right)\right)$$
$$f\left(f^{-1}\left(\lambda f\left(x\right) \vee f\left(y\right)\right)\right) \geq f\left(\lambda x \vee y\right)$$
$$\lambda f\left(x\right) \vee f\left(y\right) \geq f\left(\lambda x \vee y\right)$$

elde edilir. Yani f B-konveks fonksiyon olur.

İkinci hipotez için, f fonksiyonun azalan olduğunu kabul edelim. İlk olarak, f in B-konveks olduğunu varsayalım. Bu durumda $\forall x, y \in U$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için

$$f\left(\lambda x \vee y\right) \leq \lambda f\left(x\right) \vee f\left(y\right)$$

eşitsizliği sağlanır. $f \circ f^{-1} = I_V$, $f^{-1} \circ f = I_U$ ve f B-konveks olduğundan

$$f\left(f^{-1}(\lambda s \vee t)\right) = \lambda s \vee t = \lambda\left(f\left(f^{-1}(s)\right)\right) \vee \left(f\left(f^{-1}(t)\right)\right) \geq f\left(\lambda f^{-1}(s) \vee f^{-1}(t)\right)$$

yani

$$f\left(f^{-1}(\lambda s \vee t)\right) \geq f\left(\lambda f^{-1}(s) \vee f^{-1}(t)\right)$$

olur. f azalan olduğundan, f^{-1} fonksiyonu da azalan olur ve son eşitsizlik göz önüne alındığında $f^{-1}(\lambda s \vee t) \leq \lambda f^{-1}(s) \vee f^{-1}(t)$ sağlanır. Böylece f^{-1} fonksiyonu B-konveks olur.

Diğer kısım için, f^{-1} in B-konveks olduğunu varsayalım. Bu durumda $\forall s,t \in V$, $\forall \lambda \in [0,1]$ için

$$f^{-1}(\lambda s \vee t) \leq \lambda f^{-1}(s) \vee f^{-1}(t) \tag{4.29}$$

eşitsizliği sağlanır. $f^{-1}(s) = x$, $f^{-1}(t) = y$ olsun. Buradan, $f(x) = s$, $f(y) = t$ olur. f fonksiyonun azalanlığından ve (4.29) eşitsizliğinden

$$f^{-1}\left(\lambda f(x) \vee f(y)\right) \leq \lambda f^{-1}\left(f(x)\right) \vee f^{-1}\left(f(y)\right)$$
$$f\left(f^{-1}\left(\lambda f(x) \vee f(y)\right)\right) \geq f(\lambda x \vee y)$$
$$\lambda f(x) \vee f(y) \geq f(\lambda x \vee y)$$

elde ederiz. Bu ise f fonksiyonun B-konveks olduğu anlamına gelir.

Aynı şekilde, f in azalan olduğu durum için, f ve f^{-1} fonksiyonlarının aynı zamanda B-konkav oldukları da gösterilir. ■

Teorem 4.2.5. $\left\{ f_\alpha \middle| f_\alpha : U \subset \mathbb{R}^n_+ \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\} \right\}$ B-konveks fonksiyonlar ailesi olsun. Bu durumda, $f(x) = \sup\left\{ f_\alpha(x) : \alpha \right\}$ ile tanımlı fonksiyon B-konvekstir.

İspat. $\left\{ f_\alpha \middle| f_\alpha : U \subset \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\} \right\}$ B-konveks fonksiyonlar ailesi olsun ve $f(x) = \sup\{f_\alpha(x) : \alpha\}$ olarak tanımlansın. Bu durumda, $epif = \bigcap_\alpha epi(f_\alpha)$ dır, yani $epif$ kümesi herhangi sayıda B-konveks kümenin kesişimi olarak yazılır. Böylece, B-konveks kümelerin özellikleri gereği, $epif$ kümesi de B-konveks olur, ki bu ise f in B-konveks fonksiyon olduğu anlamına gelir. ■

Teorem 4.2.6. Eğer $f : U \subset \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ ve $g : U \subset \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ azalan(artan) ve B-konveks ise $h(x) = f(x) g(x)$ fonksiyonu da azalan(artan) ve B-konvekstir.

İspat. $f : U \subset \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ ve $g : U \subset \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ azalan(artan) ve B-konveks olsun. $h(x) = f(x) g(x)$ olmak üzere $h : U \subset \mathbb{R}_+^n \to \mathbb{R}_+ \bigcup \{+\infty\}$ fonksiyonu azalan(artan) olduğu açıktır. h ın B-konveks olduğunu gösterelim. İlk olarak $x, y \in U$, $\lambda \in [0,1]$ olmak üzere $x \preceq y$ olduğunu kabul edelim (burada $\preceq$ koordinatlara göre kısmi sıralamadır, yani $x \preceq y \Leftrightarrow x_i \le y_i, \quad \forall i = \overline{1,n}$). Bu durumda, $f(y) \le f(x)$ ve $g(y) \le g(x)$ dir.

$$h(\lambda x \vee y) = f(\lambda x \vee y) g(\lambda x \vee y) \le \left[\lambda f(x) \vee f(y)\right]\left[\lambda g(x) \vee g(y)\right]$$

sağlanır. Burada dört durum söz konusudur.

1)

$$\left.\begin{aligned} \lambda f(x) \vee f(y) = \lambda f(x) \\ \lambda g(x) \vee g(y) = \lambda g(x) \end{aligned}\right\} \qquad \begin{aligned} h(\lambda x \vee y) &\le \lambda f(x) \lambda g(x) = \lambda^2 f(x) g(x) \\ &\le \lambda f(x) g(x) = \lambda h(x) \\ &\le \lambda h(x) \vee h(y) \end{aligned}$$

2)

$$\left.\begin{aligned} \lambda f(x) \vee f(y) = \lambda f(x) \\ \lambda g(x) \vee g(y) = g(y) \end{aligned}\right\} \begin{aligned} h(\lambda x \vee y) &\le \lambda f(x) g(y) \le \lambda f(x) g(x) = \lambda h(x) \\ &\le \lambda h(x) \vee h(y) \end{aligned}$$

3)

$$\left.\begin{array}{l}\lambda f(x)\vee f(y)=f(y)\\ \lambda g(x)\vee g(y)=\lambda g(x)\end{array}\right\} \quad \begin{aligned} h(\lambda x\vee y)&\le f(y)\lambda g(x)\le \lambda f(x)g(x)=\lambda h(x)\\ &\le \lambda h(x)\vee h(y)\end{aligned}$$

4)

$$\left.\begin{array}{l}\lambda f(x)\vee f(y)=f(y)\\ \lambda g(x)\vee g(y)=g(y)\end{array}\right\} \quad h(\lambda x\vee y)\le f(y)g(y)=h(y)\le \lambda h(x)\vee h(y)$$

Dolayısıyla, her durum için $h(\lambda x\vee y)\le \lambda h(x)\vee h(y)$ eşitsizliği sağlandığından; h fonksiyonu B-konvekstir.

Şimdi varsayalım $x \succeq y$ olsun. f, g ve h azalan olduğundan $f(x)\le f(y)$, $g(x)\le g(y)$ ve $h(x)\le h(y)$ olur. Bu durumda,

$$\begin{array}{l}\lambda f(x)\vee f(y)=f(y)\\ \lambda g(x)\vee g(y)=g(y)\\ \lambda h(x)\vee h(y)=h(y)\end{array}$$

dir ve buradan,

$$h(\lambda x\vee y)\le f(y)g(y)=h(y)=\lambda h(x)\vee h(y)$$

olur. Yani $h(\lambda x\vee y)\le \lambda h(x)\vee h(y)$ eşitsizliği sağlanır, böylece h B-konveks olur. ■

Teorem 4.2.6'nın hipotezinde ifade edilen, iki fonksiyonun aynı zamanda artan ya da aynı zamanda azalan olması şartı kaldırılamaz. Gerçekten; $\varphi:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $\varphi(x)=x^p$ fonksiyonu $p\in(-\infty,0]\cup[1,+\infty)$ için B-konveks fonksiyon iken, $p\in(0,1)$ için B-konveks değildir. Buna göre, $f:\mathbb{R}_+\to\mathbb{R}_+$, $f(x)=x^{\frac{3}{2}}$ artan, B-konveks fonksiyonunu ve $g:\mathbb{R}_{++}\to\mathbb{R}_+$, $g(x)=\dfrac{1}{x}$ azalan, B-konveks fonksiyonunu ele aldığımızda, $h(x)=f(x)g(x)=x^{\frac{1}{2}}$ fonksiyonun B-konveks fonksiyon olmadığını görürüz.

4.3. B-konveks Fonksiyon Örnekleri ve Konveks Fonksiyonlar ile B-konveks Fonksiyonların Karşılaştırılması

Örnek 4.3.1. $U=\{z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}^2_+ \mid z_1\geq z_2\}\subset\mathbb{R}^2_+$ olmak üzere $f:U\to\mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}$, $f(z)=f(z_1,z_2)=z_1-z_2$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur.

Gerçekten, $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in U$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$f(\lambda x\vee y)\leq\lambda f(x)\vee f(y)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$$f(\lambda x\vee y)=f(\lambda(x_1,x_2)\vee(y_1,y_2))=f(\lambda x_1\vee y_1,\lambda x_2\vee y_2)=(\lambda x_1\vee y_1)-(\lambda x_2\vee y_2)$$

olur. Bu durumda aşağıdaki dört ihtimal söz konusudur.

i) $\lambda x_1\vee y_1=\lambda x_1$, $\lambda x_2\vee y_2=\lambda x_2$ olur ise

$$f(\lambda x\vee y)=\lambda x_1-\lambda x_2=\lambda(x_1-x_2)\leq\max\{\lambda(x_1-x_2),(y_1-y_2)\}=\lambda f(x)\vee f(y)$$

ii) $\lambda x_1\vee y_1=\lambda x_1$, $\lambda x_2\vee y_2=y_2$ ise

$$f(\lambda x\vee y)=\lambda x_1-y_2\leq\lambda x_1-\lambda x_2=\lambda(x_1-x_2)\leq\max\{\lambda(x_1-x_2),(y_1-y_2)\}=\lambda f(x)\vee f(y)$$

iii) Eğer $\lambda x_1\vee y_1=y_1$, $\lambda x_2\vee y_2=\lambda x_2$ alınırsa,

$$f(\lambda x\vee y)=y_1-\lambda x_2\leq y_1-y_2\leq\max\{\lambda(x_1-x_2),(y_1-y_2)\}=\lambda f(x)\vee f(y)$$

iv) $\lambda x_1\vee y_1=y_1$, $\lambda x_2\vee y_2=y_2$ olursa,

$$f(\lambda x\vee y)=y_1-y_2\leq\max\{\lambda(x_1-x_2),(y_1-y_2)\}=\lambda f(x)\vee f(y)$$

Dolayısıyla, f fonksiyonunun B-konveks fonksiyon olduğunu göstermiş oluruz.

Aynı zamanda bu fonksiyonun $\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2_+$ ve $\forall\lambda\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned} f(\lambda x+(1-\lambda)y) &= \lambda x_1+(1-\lambda)y_1-\lambda x_2-(1-\lambda)y_2 \\ &= \lambda(x_1-x_2)+(1-\lambda)(y_1-y_2)=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y) \end{aligned}$$

eşitliğini de sağladığı görülür. Bu ise f fonksiyonun klasik anlamda afin yani hem konveks hem de konkav olduğu anlamına gelir.

Örnek 4.3.2. $f:\mathbb{R}^2_+\to\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$, $f(z)=f(z_1,z_2)=(z_1-z_2)^2$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur.

Yani $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}^2_+$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$f(\lambda x\vee y)\leq\lambda f(x)\vee f(y)$$

eşitsizliğini sağlar. Gerçekten

$$f(\lambda x\vee y)=f(\lambda(x_1,x_2)\vee(y_1,y_2))=f(\lambda x_1\vee y_1,\lambda x_2\vee y_2)=(\lambda x_1\vee y_1-\lambda x_2\vee y_2)^2$$

dir. Burada dört ihtimal ortaya çıkar.

i) $\lambda x_1\vee y_1=\lambda x_1$, $\lambda x_2\vee y_2=\lambda x_2$ olsun. Bu durumda

$$\begin{aligned} f(\lambda x\vee y) &= (\lambda x_1-\lambda x_2)^2=\lambda^2(x_1-x_2)^2 \\ &\leq\lambda(x_1-x_2)^2\leq\max\left\{\lambda(x_1-x_2)^2,(y_1-y_2)^2\right\}=\lambda f(x)\vee f(y) \end{aligned}$$

ii) $\lambda x_1\vee y_1=\lambda x_1$, $\lambda x_2\vee y_2=y_2$ ise bu durumda iki olasılık vardır:

a) $\lambda x_1>y_2$ olabilir

$$\begin{aligned} f(\lambda x\vee y) &= (\lambda x_1-y_2)^2\leq(\lambda x_1-\lambda x_2)^2=\lambda^2(x_1-x_2)^2 \\ &\leq\lambda(x_1-x_2)^2\leq\max\{\lambda(x_1-x_2),(y_1-y_2)\}=\lambda f(x)\vee f(y) \end{aligned}$$

b) $\lambda x_1\leq y_2$ olabilir, bu durumda

$$f(\lambda x \vee y) = (\lambda x_1 - y_2)^2 \le (y_1 - y_2)^2 \le \max\{\lambda(x_1 - x_2), (y_1 - y_2)\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

iii) $\lambda x_1 \vee y_1 = y_1$, $\lambda x_2 \vee y_2 = \lambda x_2$ olursa, aşağıdaki iki durum ile karşılaşılabilir:

a) $y_1 > \lambda x_2$ durumunda

$$f(\lambda x \vee y) = (y_1 - \lambda x_2)^2 \le (y_1 - y_2)^2 \le \max\{\lambda(x_1 - x_2), (y_1 - y_2)\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

b) $y_1 \le \lambda x_2$ durumunda ise

$$\begin{aligned} f(\lambda x \vee y) &= (y_1 - \lambda x_2)^2 \le (\lambda x_1 - \lambda x_2)^2 = \lambda^2 (x_1 - x_2)^2 \\ &\le \lambda (x_1 - x_2)^2 \le \max\{\lambda(x_1 - x_2), (y_1 - y_2)\} = \lambda f(x) \vee f(y) \end{aligned}$$

iv) $\lambda x_1 \vee y_1 = y_1$, $\lambda x_2 \vee y_2 = y_2$ olsun. O halde

$$f(\lambda x \vee y) = (y_1 - y_2)^2 \le \max\left\{\lambda(x_1 - x_2)^2, (y_1 - y_2)^2\right\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

sağlanır.

Böylelikle f in B-konveks fonksiyon olduğu gösterilmiş olur.

$\forall x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2$ ve $\forall \lambda \in [0,1]$ için

$$\begin{aligned} f(\lambda x + (1-\lambda) y) &= (\lambda x_1 + (1-\lambda) y_1 - \lambda x_2 - (1-\lambda) y_2)^2 \\ &= (\lambda(x_1 - x_2) + (1-\lambda)(y_1 - y_2))^2 \\ &= \lambda^2 (x_1 - x_2)^2 + 2\lambda(1-\lambda)(x_1 - x_2)(y_1 - y_2) + (1-\lambda)^2 (y_1 - y_2)^2 \\ &\le \lambda^2 (x_1 - x_2)^2 + \lambda(1-\lambda)\left((x_1 - x_2)^2 + (y_1 - y_2)^2\right) + (1-\lambda)^2 (y_1 - y_2)^2 \\ &= \left(\lambda^2 + \lambda(1-\lambda)\right)(x_1 - x_2)^2 + \left((1-\lambda)^2 + \lambda(1-\lambda)\right)(y_1 - y_2)^2 \\ &= \lambda(x_1 - x_2)^2 + (1-\lambda)(y_1 - y_2)^2 = \lambda f(x) + (1-\lambda) f(y) \end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır. Bu da f fonksiyonun klasik anlamda konveks fonksiyon olduğu anlamına gelir.

Örnek 4.3.3. $U=\{z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}_+^2 \mid z_1\geq z_2\}\subset\mathbb{R}_+^2$ olmak üzere $f:U\to\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$, $f(z)=f(z_1,z_2)=z_1^2-z_2^2$ olsun. f fonksiyonu B-konveks fonksiyondur.

Bu durumda $x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in U$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$f(\lambda x\vee y)\leq\lambda f(x)\vee f(y)$$

eşitsizliği sağlanır. Gerçekten;

$$f(\lambda x\vee y)=f(\lambda(x_1,x_2)\vee(y_1,y_2))=f(\lambda x_1\vee y_1,\lambda x_2\vee y_2)=(\lambda x_1\vee y_1)^2-(\lambda x_2\vee y_2)^2$$

dir. Aşağıdaki dört durum söz konusudur.

i) $\lambda x_1\vee y_1=\lambda x_1$, $\lambda x_2\vee y_2=\lambda x_2$ olabilir, ki bu durumda

$$\begin{aligned}f(\lambda x\vee y)&=(\lambda x_1)^2-(\lambda x_2)^2=\lambda^2(x_1^2-x_2^2)\\&\leq\lambda(x_1^2-x_2^2)\leq\max\{\lambda(x_1^2-x_2^2),(y_1^2-y_2^2)\}=\lambda f(x)\vee f(y)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) $\lambda x_1\vee y_1=\lambda x_1$, $\lambda x_2\vee y_2=y_2$ ihtimali söz konusu olduğunda

$$\begin{aligned}f(\lambda x\vee y)&=(\lambda x_1)^2-y_2^2\leq(\lambda x_1)^2-(\lambda x_2)^2=\lambda^2(x_1^2-x_2^2)\\&\leq\lambda(x_1^2-x_2^2)\leq\max\{\lambda(x_1^2-x_2^2),(y_1^2-y_2^2)\}=\lambda f(x)\vee f(y)\end{aligned}$$

elde edilir.

iii) Eğer $\lambda x_1\vee y_1=y_1$, $\lambda x_2\vee y_2=\lambda x_2$ olur ise bu durumda

$$f(\lambda x\vee y)=y_1^2-(\lambda x_2)^2\leq y_1^2-y_2^2\leq\max\{\lambda(x_1^2-x_2^2),(y_1^2-y_2^2)\}=\lambda f(x)\vee f(y)$$

olur.

iv) Son olarak $\lambda x_1\vee y_1=y_1$, $\lambda x_2\vee y_2=y_2$ durumu söz konusu ise

$$f(\lambda x \vee y) = y_1^2 - y_2^2 \le \max\left\{\lambda\left(x_1^2 - x_2^2\right), \left(y_1^2 - y_2^2\right)\right\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

sağlanır.

O halde, f fonksiyonunun B-konveks olduğu gösterilmiş olur.

Şimdi, f fonksiyonun klasik anlamda konveksliğini inceleyelim. $f(z) = z_1^2 - z_2^2$ olduğundan $\dfrac{\partial f}{\partial z_1} = 2z_1$ ve $\dfrac{\partial f}{\partial z_2} = -2z_2$ olur. Buradan,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_1} = 2, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} = 0, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_2} = -2,$$

olur. Böylece, Hessian matrisi

$$H = \begin{bmatrix} \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} \\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_2} \end{bmatrix} = \begin{bmatrix} 2 & 0 \\ 0 & -2 \end{bmatrix}$$

biçimindedir. Bu Hessian matrisine karşılık gelen birinci baş minör determinant $|2| = 2 > 0$ ve ikinci baş minör determinant $|H| = -4 < 0$ olduğundan f fonksiyonu ne konveks ne de konkav değildir.

Örnek 4.3.4. $f : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+ \cup \{+\infty\}$ olmak üzere $f(z) = f(z_1, z_2) = \dfrac{1}{z_1 z_2}$ fonksiyonu B-konveks fonksiyondur.

Gerçekten, f fonksiyonun her $x = (x_1, x_2), y = (y_1, y_2) \in \mathbb{R}_+^2$ ve $\lambda \in [0,1]$ için

$$f(\lambda x \vee y) \le \lambda f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliğinin sağlandığını gösterelim.

$$f(\lambda x \vee y) = f\left(\lambda(x_1, x_2) \vee (y_1, y_2)\right) = f(\lambda x_1 \vee y_1, \lambda x_2 \vee y_2) = \frac{1}{(\lambda x_1 \vee y_1)(\lambda x_2 \vee y_2)}$$

olur. Bu ise, aşağıdaki dört ihtimal dahilinde incelenmelidir.

i) $\lambda x_1 \vee y_1 = \lambda x_1$, $\lambda x_2 \vee y_2 = \lambda x_2$ olduğunda

$$f(\lambda x \vee y) = \frac{1}{\lambda x_1 \lambda x_2} \leq \frac{1}{y_1 y_2} \leq \max\left\{\lambda \frac{1}{x_1 x_2}, \frac{1}{y_1 y_2}\right\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

olur.

ii) $\lambda x_1 \vee y_1 = \lambda x_1$, $\lambda x_2 \vee y_2 = y_2$ olur ise

$$f(\lambda x \vee y) = \frac{1}{\lambda x_1 y_2} \leq \frac{1}{y_1 y_2} \leq \max\left\{\lambda \frac{1}{x_1 x_2}, \frac{1}{y_1 y_2}\right\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

sağlanır.

iii) $\lambda x_1 \vee y_1 = y_1$, $\lambda x_2 \vee y_2 = \lambda x_2$ durumunda

$$f(\lambda x \vee y) = \frac{1}{y_1 \lambda x_2} \leq \frac{1}{y_1 y_2} \leq \max\left\{\lambda \frac{1}{x_1 x_2}, \frac{1}{y_1 y_2}\right\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliği gerçekleşir.

iv) $\lambda x_1 \vee y_1 = y_1$, $\lambda x_2 \vee y_2 = y_2$ durumunda

$$f(\lambda x \vee y) = \frac{1}{y_1 y_2} \leq \max\left\{\lambda \frac{1}{x_1 x_2}, \frac{1}{y_1 y_2}\right\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

elde edilir.

Dolayısıyla, f fonksiyonunun B-konveks olduğunu göstermiş oluruz.

Aynı zamanda, f fonksiyonu klasik anlamda konveks fonksiyondur. Gerçekten; $f(z) = \frac{1}{z_1 z_2}$ olduğundan $\frac{\partial f}{\partial z_1} = -\frac{1}{{z_1}^2 z_2}$ ve $\frac{\partial f}{\partial z_2} = -\frac{1}{z_1 {z_2}^2}$ dir. Bu durumda,

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_1} = \frac{2}{{z_1}^3 z_2}, \qquad \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} = \frac{1}{{z_1}^2 {z_2}^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} = \frac{1}{{z_1}^2 {z_2}^2}, \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_2} = \frac{2}{z_1 {z_2}^3}$$

olur. Buradan, f fonksiyonun Hessian matrisi

$$H=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2\partial z_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2\partial z_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{2}{z_1{}^3 z_2} & \dfrac{1}{z_1{}^2 z_2{}^2}\\ \dfrac{1}{z_1{}^2 z_2{}^2} & \dfrac{2}{z_1 z_2{}^3}\end{bmatrix}$$

olur. Bu durumda $\forall z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}_+^2$ olmak üzere Hessian matrisine karşılık gelen birinci baş minör determinant $\left|\dfrac{2}{z_1{}^3 z_2}\right|=\dfrac{2}{z_1{}^3 z_2}>0$ dir, ikinci baş minör determinant ise $|H|=\dfrac{3}{z_1{}^4 z_2{}^4}>0$ olur ki, Hessian matrisi pozitif tanımlı demektir, bu da f fonksiyonun konveks olduğu anlamına gelir.

Örnek 4.3.5. $U=\left\{z=(z_1,z_2)\in\mathbb{R}_+^2 \,\middle|\, z_2\le\dfrac{1}{z_1}\right\}\subset\mathbb{R}_+^2$ olmak üzere $f:U\to\mathbb{R}_+\bigcup\{+\infty\}$, $f(z)=f(z_1,z_2)=\ln\dfrac{1}{z_1z_2}$ fonksiyonu B-konvekstir.

Yani f fonksiyonu her $x=(x_1,x_2),\, y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}_+^2$ ve $\lambda\in[0,1]$ için

$$f(\lambda x\vee y)\le\lambda f(x)\vee f(y)$$

eşitsizliğini sağlar. Gerçekten,

$$f(\lambda x\vee y)=f\left(\lambda(x_1,x_2)\vee(y_1,y_2)\right)=f(\lambda x_1\vee y_1,\lambda x_2\vee y_2)=\ln\frac{1}{(\lambda x_1\vee y_1)(\lambda x_2\vee y_2)}$$

dir. Bu durumda aşağıdaki dört ihtimal ortaya çıkacaktır.

i) $\lambda x_1\vee y_1=\lambda x_1$, $\lambda x_2\vee y_2=\lambda x_2$ olabilir, bu durumda $\ln$ fonksiyonun artanlığı da kullanılarak,

$$f(\lambda x\vee y)=\ln\frac{1}{\lambda x_1\lambda x_2}\le\ln\frac{1}{y_1y_2}\le\max\left\{\lambda\ln\frac{1}{x_1x_2},\ln\frac{1}{y_1y_2}\right\}=\lambda f(x)\vee f(y)$$

eşitsizliği sağlanır.

ii) $\lambda x_1 \vee y_1 = \lambda x_1$, $\lambda x_2 \vee y_2 = y_2$ olduğunda ise

$$f(\lambda x \vee y) = \ln \frac{1}{\lambda x_1 y_2} \leq \ln \frac{1}{y_1 y_2} \leq \max\left\{\lambda \ln \frac{1}{x_1 x_2}, \ln \frac{1}{y_1 y_2}\right\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

eşitsizliği sağlanır.

iii) Eğer $\lambda x_1 \vee y_1 = y_1$, $\lambda x_2 \vee y_2 = \lambda x_2$ ise

$$f(\lambda x \vee y) = \ln \frac{1}{y_1 \lambda x_2} \leq \ln \frac{1}{y_1 y_2} \leq \max\left\{\lambda \ln \frac{1}{x_1 x_2}, \ln \frac{1}{y_1 y_2}\right\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

elde edilir.

iv) $\lambda x_1 \vee y_1 = y_1$, $\lambda x_2 \vee y_2 = y_2$ olması durumunda da,

$$f(\lambda x \vee y) = \ln \frac{1}{y_1 y_2} \leq \max\left\{\lambda \ln \frac{1}{x_1 x_2}, \ln \frac{1}{y_1 y_2}\right\} = \lambda f(x) \vee f(y)$$

gerçekleşir.

Bu da bize f fonksiyonunun B-konveks olduğunu ifade eder.

Bu örnekte ele alınan f fonksiyonu klasik anlamda da konvekstir. Gerçekten; $\forall z = (z_1, z_2) \in \mathbb{R}^2_+$ olmak üzere $f(z) = \ln \frac{1}{z_1 z_2}$ fonksiyonu için birinci kısmi türevler $\frac{\partial f}{\partial z_1} = -\frac{1}{z_1}$ ve $\frac{\partial f}{\partial z_2} = -\frac{1}{z_2}$ biçimindedir. Buradan, ikinci kısmi türevleri

$$\frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_1} = \frac{1}{z_1^2}, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_1 \partial z_2} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_1} = 0, \quad \frac{\partial^2 f}{\partial z_2 \partial z_2} = \frac{1}{z_2^2}$$

olarak elde edilir. Böylelikle, Hessian matrisi

$$H=\begin{bmatrix}\dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_1\partial z_2}\\ \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2\partial z_1} & \dfrac{\partial^2 f}{\partial z_2\partial z_2}\end{bmatrix}=\begin{bmatrix}\dfrac{1}{z_1^{\,2}} & 0\\ 0 & \dfrac{1}{z_2^{\,2}}\end{bmatrix}$$

biçimini alır. Bu durumda baş minör determinantlar sırasıyla $\left|\dfrac{1}{z_1^{\,2}}\right|=\dfrac{1}{z_1^{\,2}}>0$ ve $|H|=\dfrac{1}{z_1^{\,2}z_2^{\,2}}>0$ olur. Böylece Hessian matrisi pozitif tanımlı yani f fonksiyonu konveks olur.

Tüm bu örneklerden de görüldüğü gibi, B-konveks bir fonksiyon her zaman konveks olmak zorunda değildir. Ayrıca aşağıda da B-konveks olmayan bir konveks fonksiyon örneği verilecektir. Böylece B-konveks fonksiyonlar ve konveks fonksiyonların birbirini kapsamadığı sonucuna ulaşılır.

Örnek 4.3.6. $f:\mathbb{R}_+^2\to\mathbb{R}_+\cup\{+\infty\}$ olmak üzere $f(z)=f(z_1,z_2)=(z_1+z_2)^2$ fonksiyonu konveks fonksiyondur. Gerçekten, $\forall x=(x_1,x_2), y=(y_1,y_2)\in\mathbb{R}_+^2$ ve $\forall\lambda\in[0,1]$ için

$$\begin{aligned}f(\lambda x+(1-\lambda)y)&=(\lambda x_1+(1-\lambda)y_1+\lambda x_2+(1-\lambda)y_2)^2\\&=(\lambda(x_1+x_2)+(1-\lambda)(y_1+y_2))^2\\&=\lambda^2(x_1+x_2)^2+2\lambda(1-\lambda)(x_1+x_2)(y_1+y_2)+(1-\lambda)^2(y_1+y_2)^2\\&\le\lambda^2(x_1+x_2)^2+\lambda(1-\lambda)\left((x_1+x_2)^2+(y_1+y_2)^2\right)+(1-\lambda)^2(y_1+y_2)^2\\&=\left(\lambda^2+\lambda(1-\lambda)\right)(x_1+x_2)^2+\left((1-\lambda)^2+\lambda(1-\lambda)\right)(y_1+y_2)^2\\&=\lambda(x_1+x_2)^2+(1-\lambda)(y_1+y_2)^2=\lambda f(x)+(1-\lambda)f(y)\end{aligned}$$

eşitsizliği sağlandığından f fonksiyonun klasik anlamda konveks fonksiyon olduğu görülür.

Bunun yanı sıra, f fonksiyonu için $x=(1,5), y=(3,2)\in\mathbb{R}_+^2$ ve $\lambda=1$ alındığında,

$$f(\lambda x\vee y)=f((1,5)\vee(3,2))=f(3,5)=8^2=64$$

$$\lambda f(x)\vee f(y)=f(1,5)\vee f(3,2)=\max\{6^2,5^2\}=36$$

olur. Bu durumda $f(\lambda x\vee y)>\lambda f(x)\vee f(y)$ elde edilir, bu ise f fonksiyonun B-konveks olmadığının kanıtıdır.

İki B-konveks fonksiyonun toplamı B-konveks fonksiyon olmak zorunda değildir. Örneğin, $f, g : \mathbb{R}_+^2 \to \mathbb{R}_+$ olmak üzere $f(z_1, z_2) = z_1$, $g(z_1, z_2) = z_2$ fonksiyonlarının B-konveks olduğu açıktır. Ancak $(f+g)(z_1, z_2) = z_1 + z_2$ fonksiyonu için $x = (1,5), y = (3,2) \in \mathbb{R}_+^2$ ve $\lambda = 1$ olmak üzere,

$$(f+g)(\lambda x \vee y) = (f+g)((1,5) \vee (3,2)) = (f+g)(3,5) = 8$$

$$\lambda(f+g)(x) \vee (f+g)(y) = (f+g)(1,5) \vee (f+g)(3,2) = 6 \vee 5 = 6$$

olur. Yani $(f+g)(\lambda x \vee y) > \lambda(f+g)(x) \vee (f+g)(y)$ dir. Buradan, $f+g$ B-konveks değildir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Konveks Analiz'in son zamanlarda popülerlik kazanan alt dallarından biri de Soyut Konveks Analiz'dir. Bu alanda çok sayıda genelleştirilmiş konvekslik formu elde edilmekte ve bunlar üzerinde çalışmalar yapılmaktadır. Tezde ele alınan B-konvekslik de bu soyut konvekslik biçimlerinden biridir. Şimdiye kadar B-konveks küme teorisi üzerine yapılan çalışmalar doğrultusunda, B-konveks fonksiyonlar üzerine incelemeler yapılmış olan bu tezde:

1. B-konveks fonksiyon, B-konkav fonksiyon ve B-afin fonksiyon kavramları tanımlanarak literatüre üç yeni kavram daha eklenmiş (Tanım 4.1.1, Tanım 4.1.2 ve Tanım 4.1.3);

2. Bir fonksiyonun B-konveks, B-konkav ve ya B-afin fonksiyon olması için gerek ve yeter koşul veren teoremler ispatlanmış (Teorem 4.1.1, Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4);

3. B-konveks fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği (Teorem 4.1.2) ve B-konkav fonksiyonlar için Jensen Eşitsizliği (Teorem 4.1.5) veren teoremlerin ispatlanması ile konvekslik için çok değerli olan bu eşitsizliğin B-konvekslik formu gösterilmiş;

4. B-konveks bir fonksiyonun seviye kümelerinin de B-konveks olduğu ispatlanmış (Teorem 4.2.1, Teorem 4.2.2);

5. Pozitif homojen ve B-konveks olan bir fonksiyon için sağlanan bazı eşitsizlikler gösterilmiş (Teorem 4.2.3 ve Sonuç 4.2.1);

6. B-konveks bir fonksiyonun pozitif skaler ile çarpımının ve bir B-konveks kümeye kısıtlanışının B-konveks olduğu gösterilmiş, iki fonksiyonun bileşkesinin B-konveksliği incelenmiş ve B-konveks bir fonksiyonun tersi ile arasındaki ilişki irdelenmiş (Teorem 4.2.4);

7. B-konveks fonksiyonlar ailesinin supremumunun da B-konveks olduğu, iki B-konveks fonksiyonun çarpımlarının davranışı ispatlanmış ve örneklendirilmiş (Teorem 4.2.5 ve Teorem 4.2.6);

8. Son olarak da, B-konveks olan fonksiyon örnekleri verilmiş ve bu fonksiyonların klasik anlamda konveks olup olmadıkları araştırılmış, bunlara ek olarak bir konveks fonksiyon örneği verilerek bu fonksiyonun B-konveks olmadığı ispatlanmıştır. Böylelikle, bu veriler doğrultusunda konveks fonksiyonlar sınıfı ile B-konveks fonksiyonlar sınıfının birbirlerini kapsamadıkları gösterilmiştir.

Böylece yeni bir soyut konvekslik sınıfı için fonksiyon biçimi tanımlanmış, genel ve en temel hatları ile incelenerek literatüre yadsınamaz bir katkı sağlanmıştır.

5.2. Öneriler

Klasik konveks fonksiyonların ve özelliklerinin ışığında, B-konveks fonksiyonlar için tezde verilen tanım ve elde edilmiş olan özelliklerinden de yararlanarak, B-konveks fonksiyonlar için yeni özelliklerin elde edilmesi açık bir problemdir.

Konveks fonksiyonların en önemli uygulama alanlarından biri olan Eşitsizlikler Teorisi çerçevesindeki uygulamalardan Hermite-Hadamard Eşitsizliği, Ostrowski Eşitsizliği, Fejer Eşitsizliği gibi çok sayıda eşitsizlik B-konveks fonksiyonlar için de elde edilebilir.

Son zamanlarda popüler olan kesirli integralleri içeren eşitsizliklerin de B-konveks fonksiyonlar için incelenmesi bir diğer araştırma sorusu olarak karşımıza çıkar.

KAYNAKLAR

[1] Berkovitz, L. D., *Convexity and Optimization in* $\mathbb{R}^n$. Wiley, New York, 2002.

[2] Bertsekas, D. P.; Nedic, A., *Convex Analysis and Optimization*, Athena Scientic, 2003.

[3] Borwein, J. M.; Lewis, A. S., *Convex Analysis and Nonlinear Optimization, Theory and Examples*, Canadian Mathematical Society Books in Mathematics Springer, New York, 2000.

[4] Boyd, S.; Vandenberghe, L., *Convex Optimization*, Cambridge University Press, Cambridge, MA, 2004.

[5] Rubinov, A., *Abstract Convexity and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers, Boston Dordrecht-London, 2000.

[6] Tuy, H., *Convex Analysis and Global Optimization*, Kluwer Academic Publishers Dordrecht, 1998.

[7] Adilov, G.; Tinaztepe, G., The Sharpening Some Inequalities via Abstract Convexity. *Mathematical Inequalities and Applications* **2009**, 12, 33-51.

[8] Adilov, G.; Yesilce, I., Some Inequalities for L(j)-convex Functions. *Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications Proceeding Book* **2010**, 19-24.

[9] Beckenbach, E. F.; Bellman, R., *Inequalities*, Springer, Berlin, 1961.

[10] Dragomir, S. S.; Pearce, C. E. M., *Selected Topics on Hermite-Hadamard Inequalities and Applications*, RGMIA Monographs, Victoria University [ON-LINE:http://rgmia.vu.edu.au/monographs], 2000.

[11] Dragomir, S. S.; Pecaric, J. E.; Presson, L. E., Some Inequalities of Hadamard Type. *Soochow J. Of Math.* **1995,** 21, 335-341.

[12] Dragomir, S. S.; Toader, G. H., Some Inequalities for m−convex Functions. *Studia Univ. Babe¸s-Bolyai, Math.* **1993***,* 38, (1), 21-28.

[13] Hardy, G. H.; Littlewood, J. E.; Polya, G., *Inequalities*, Cambridge University Press, Cambridge, England, 1934.

[14] Mitrinovic, D. S.; Pecaric, J. E.; Fink, A. M., *Classical and New Inequalities in Analysis*, Kluwer Academic Publishers, Dordrecht/Boston/London.

[15] Niculescu, C. P., A Multiplicative Mean Value and its Applications, in Inequality Theory and Applications. (Y.J. Cho, J.K. Kim and S.S. Dragomir(Ed.s)), *Nova Science Publishers* **2001**, 249-261.

[16] Niculescu, C. P.; Persson, L. - E., Old and New on the Hermite-Hadamard Inequality. *Real Anal. Exchange* **2003**, 29, 2, 663-685.

[17] Pecaric, J.; Beesack, P. R., On Jessen's Inequality for Convex Functions II. *J. Math. Anal. Appl.* **1986**, 118, 125-144.

[18] Vasic, P. M.; Lackovic, I. B., Some Complements to the Paper: "On an Inequality for Convex Functions". *Univ. Beograd Publ. Elek. Fak., Ser. Mat. Fiz.* **1976**, No. 544-576, 59-62.

[19] Niculescu, C. P.; Persson, L. - E., *Convex Functions and their Applications. A Contemporary Approach.* CMS Books in Mathematics vol. 23, Springer-Verlag, New York, 2006.

[20] Pečarić, J.; Proschan, F.; Tong, Y. L., *Convex Functions, Partial Orderings and Statistical Applications*. Academic Press Inc., 1992.

[21] Rubinov, A. M., Abstract Convexity: Examples and Applications. *Optimization* **2000***,* 47, 1-13.

[22] Dutta, J.; Martinez-Legaz, J. E.; Rubinov, A.M., Monotonic Analysis Over Cones: I. *Optimization* **2004**, 53, 2, 129-146.

[23] Dutta, J.; Martinez-Legaz, J. E.; Rubinov, A. M., Monotonic Analysis Over Cones: II. *Optimization* **2004**, 53, 5-6, 529-547.

[24] Minoux, M., *Mathematical Programming: Theory and Algorithms*. Wiley, Chichester, 1986, pp. 489.

[25] Rado, T., On Convex Functions. *Trans. Amer. Math. Soc.* **1935**, 37, 266-285.

[26] Rubinov, A. M.; Kutateladze, S. S., *Minkowski Duality and its Applications*. Russian Mathematical Surveys 27, 1972.

[27] Van de Vel, M., *Theory of Convex Structures*. Vol. 50. North Holland Mathematical Library, Elsevier, 1993.

[28] Adilov, G., Increasing Co-radiant Functions and Hermite-Hadamard Type Inequalities. *Mathematical Inequalities and Applications* **2011,** 14, 1, 45-60.

[29] Adilov, G.; Kemali, S., Abstract Convexity and Hermite-Hadamard Type İnequalities. *Journal of İnequalities and Applications* **2009***,* 2009, Article ID 943534, 13pages, doi:10.1155/953534.

[30] Beckenbach, E. F., Convex Functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **1948***,* 54, 439-460.

[31] Beckenbach, E. F., Generalized Convex Functions. *Bull. Amer. Math. Soc.* **1937**, 43, 363-371.

[32] Ben-Tal, A., On Generalized Means and Generalized Convex Functions. *Journal of Optimization Theory and Applications* **1977**, 21, (1), 1-13.

[33] Bessenyei, M., Hermite-Hadamard-Type Inequalities For Generalized Convex Functions. *Journal of Inequalities In Pure and Applied Mathematics* **2008**, 9.

[34] Roberts, A. W.; Varberg, P. E., *Convex Functions*. Academic Press, 1973.

[35] Rubinov, A. M., Some Properties of Increasing Convex-along-rays Functions. *Processings of the Centre for Mathematics and its Applications* **1999,** 19, 593-614.

[36] Singer, I., *Abstract Convex Analysis.* Wiley-Interscience Publication, New York, 1997.

[37] Toader, G. H., Some generalisations of the convexity. *Proc. Colloq. Approx. Optim, Cluj-Napoca (Romania)* **1984**, 329-338.

[38] Toader, G. H., On a generalisation of the convexity. *Mathematica* **1988**, 30, (53), 83-87.

[39] Orlicz, W., A note on modular spaces. I. *Bull. Acad. Polon. Sci. Ser. Sci. Math. Astronom. Phys.* **1961**, 9, 157–162.

[40] Adilov, G.; Rubinov, A., B-Convex Sets and Functions. *Numerical Functional Analysis and Optimization* **2006***,* 27, (3-4), 237-257.

[41] Briec, W.; Horvath, C. D., B-convexity. *Optimization* **2004**, 53, 103-127.

[42] Briec, W.; Horvath, C. D., Halfspaces and Hahn-Banach Like Properties in B-convexity and Max-Plus Convexity. *Pacific J. Optimiz.* **2008**, 4, (2), 293-317.

[43] Briec, W.; Horvath, C. D.; Rubinov, A. M., Separation in B-convexity. *Pacific J. Optimiz.* **2005**, 1, 13–30.

[44] Kuratowski, K., *Topology*. Vol. 2, Academic Press, New York, 1968.

[45] Briec W.; Horvath, C. D., Nash points, Ky Fan Inequality and Equilibria of Abstract Economies in Max-Plus and B-convexity. *J. Math. Anal. Appl.* **2008**, 341, (1), 188–199.

[46] Barros, C. P.; Liang, Q. B.; Peypoch, N., The Technical Efficiency of US Airlines. *Transp. Res. Part A Policy Pract.* **2013**, 50, 139–148.

[47] Briec, W.; Horvath, C. D., A B-convex Production Model for Evaluating Performance of Firms. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **2009**, 355, 131–144.

[48] Briec, W.; Horvath, C. D., On the Separation of Convex Sets in Some Idempotent Semimodules. *Linear Algebra and its Applications* **2011**, 435, 1542-1548.

[49] Briec, W.; Liang, Q. B., On Some Semilattice Structures for Production Technologies. *European Journal of Operational Research* **2011**, 215, 740–749.

[50] Suo, H., Some Properties of B-convexity. *J. Nonlinear Sci. Appl.* **2009**, 2, 2, 71–77.

[51] Briec, W., Some Remarks on an Idempotent and Non-Associative Convex Structure. *Journal of Convex Analysis* **2015**, 22, 1, 259-289.

[52] Rockafellar, R. Tyrrell, *Convex Analysis*. Princeton University Press, Princeton, New Jersey, 1970.

[53] Avriel, M., r-convex Functions. *Mathematical Programming* **1972**, 2, 309-323.

[54] Godunova, E. K.; Levin, V. I., Inequalities For Functions of a Broad Class That Contains Convex, Monotone and Some Other Forms of Functions. *Numerical Mathematics and Mathematical Physics (Moskov. Gos. Ped. Inst, Moscow)* **1985**, 166, 138–142 (in Russian).

[55] Jensen, J. L. W. V., Om konvekse Funktioner og Uligheder imellem Middelvaerdier. *Nyt Tidsskrift Mat. B* **1905**, 16, 49-68.

[56] Wright, E. M., An inequality for convex functions. *Amer. Math. Monthly* **1954**, 61, 620-622.

[57] Hudzik, H.; Maligranda, L., Some remarks on s−convex functions. *Aequationes Math.* **1994**, 48, 100-111.

[58] Sharikov, E. V., Hermite-Hadamard Type Inequalities for Increasing Radiant Functions. *Journal of Inequalities in Pure and Applied Mathematics* **2003**, 4, 2, Article 47.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı **:** İlknur YEŞİLCE

Doğum Tarihi **:** 07/09/1986

E-mail : ilknuryesilce@mersin.edu.tr

Öğrenim Durumu **:**

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Fen-Matematik	Eryaman Yabancı Dil Ağırlıklı Lise	2000-2004
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2005-2009
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2009-2012

(Varsa) Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Arş. Gör.	Mersin Üniversitesi	2009-

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. G.Adilov, İ.Yesilce, ”Some inequalities for L(j)-convex functions”, Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications Konferansı Tam Metin Kitabı, Sunny Beach, 19-24, (2010).
2. G.Adilov, İ.Yeşilce, “B-measurable and B^{-1}-measurable Maps”, International Conference on Applied Analysis and Algebra, 29 June – 2 July 2011, İstanbul, TURKEY.
3. G.Adilov, G.Tınaztepe, İ.Yeşilce, “Separation of B^{-1}-convex Sets by B^{-1}-measurable Maps”, The 8th Congress of the International Society for Analysis, its Application and Computation, 22-27 August 2011, Moscow, RUSSIA.
4. G.Adilov, İ.Yeşilce, “Konvekslik kavramının soyutlaştırılması üzerine”, 6. Ankara Matematik Günleri, 2-3 Haziran 2011, Hacettepe Üniversitesi, Ankara.
5. G.Adilov, İ.Yeşilce, “B^{-1}-convex Sets and B^{-1}-measurable Maps”, Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 33, No 2, p. 131-141, (2012). (SCI-Expanded)
6. G.Adilov, İ.Yeşilce, “On Generalizations of the Concept of Convexity”, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, Vol. 41(5), p. 723-730, (2012). (SCI-Expanded)
7. G.Adilov, İ.Yeşilce, “B^{-1}-convex Sets and Functions”, Constructive Nonsmooth Analysis end Related Topics, 18-23 June 2012, Saint Petersburg, Russia, p. 14.
8. G.Adilov, İ.Yeşilce, S. Kemali, “The Comparison B-convexity and B^{-1}-convexity Concepts”, Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications, 04-09 September 2012, Mersin, Turkey, p. 15.
9. G.Adilov, İ.Yeşilce, “S(j)-konveks Fonksiyonlar”, 8. Ankara Matematik Günleri, 13-14 Haziran 2013, Çankaya Üniversitesi, Ankara, s. 95.
10. G.Adilov, İ.Yeşilce, “Separation in B^{-1}-convexity”, International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 2-5 June 2013, İstanbul, Turkey, p. 175.

11. G.Tinaztepe, İ.Yeşilce, G.Adilov, "Separation of B^{-1}-convex Sets by B^{-1}-measurable Maps", Journal of Convex Analysis, Vol. 21, No 2, p. 571-580, (2014). (SCI-Expanded)
12. G.Adilov, İ.Yeşilce, "B^{-1}-convex Functions and Some Important Properties", 19th International Conference Mathematical Modelling and Analysis, 26-29 May 2014, Druskininkai, Lithuania, p. 1.
13. G.Adilov, İ.Yeşilce, "On B^{-1}-convex Functions and Some Inequalities", International Congress in Honour of Professor Ravi P. Agarwal, 23-26 June 2014, Bursa, Turkey, p. 115.
14. G.Adilov, İ.Yeşilce, "On Some Properties of the B-convex Functions", International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics, 6-9 November 2014, Antalya, Turkey, p. 247.
15. S.Kemali, İ.Yeşilce, G.Adilov, "B-convexity, B^{-1}-convexity and Their Comparison", Numerical Functional Analysis and Optimization, Vol. 36, No 2, p. 133-146, (2015). (SCI-Expanded)
16. İ.Yeşilce, G.Adilov, "Relationship between Convex and B-convex Functions", The International Conference "Mathematical and Computational Modelling in Science and Technology". 2-7 August 2015, İzmir, Turkey, p. 144.
17. G.Adilov, İ.Yeşilce, "The Comparison of B-convex, B-1-convex and Convex Functions", The 5th International Conference on Control and Optimization with Industrial Applications. 27-29 August 2015, Baku, Azerbaijan, p. 377.
18. G.Adilov, İ.Yeşilce, G.Tinaztepe, "The Relation between B-1-convex and Convex Functions", 4th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications. 31 August-3 September 2015, Athens, Greece, p. 64.
19. G.Adilov, İ.Yeşilce, "B-konvekslik ve Max-Plus Konvekslik Kavramlarının Karşılaştırılması", 28. Ulusal Matematik Sempozyumu. 7-9 Eylül 2015, Akdeniz Üniversitesi, Antalya, s. 32.
20. İ.Yeşilce, G.Adilov, "Comparing B-1-convexity with Tropical Convexity", International Conference on Advancements in Mathematical Sciences. 5-7 November 2015, Antalya, Turkey, p. 229.
21. İ.Yeşilce, G.Adilov, "Hermite-Hadamard Inequalities for L(j)-convex Functions and S(j)-convex Functions", Malaya Journal of Matematik. Vol. 3, No 3, 2015, p. 346-359. (DOAJ, Zentralblatt MATH)
22. G.Adilov, İ.Yeşilce, "The Operations on B-convex Sets and B-convex Functions", 15th Panhellenic Conference of Mathematics Analysis. 27-29 May 2016, Crete, Greece.
23. G.Adilov, İ.Yeşilce, "Hermite-Hadamard Inequality for B-convex Functions", 2nd International Conference on Pure and Applied Sciences. 1-5 June 2016, Istanbul, Turkey, p. 158.
24. G.Adilov, İ.Yeşilce, "Operations on B-1-convex Sets and B-1-convex Functions", International Conference on Analysis and Its Applications (ICAA-2016). 12-15 July 2016, Kirsehir, Turkey, p. 152.
25. G.Adilov, İ.Yeşilce, "On New Inequalities of Hermite-Hadamard Type for B-1-convex Functions", 5th International Eurasian Conference on Mathematical Sciences and Applications (IECMSA-2016). 16-19 August 2016, Belgrade, Serbia, p. 42.
26. G.Adilov, İ.Yeşilce, "Applications of Hermite-Hadamard Inequalities For B-convex Functions and B-1-convex Functions", 3rd International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference. 29 August – 1 September 2016, Mersin, Turkey, p. 99.
27. İ.Yeşilce, G.Adilov, "Some Operations on B-1-convex Sets", Journal of Mathematical Sciences: Advances and Applications. Vol. 39, No 1, 2016, p. 99-104. (Mathematical Reviews, Zentralblatt MATH)
28. G.Adilov, İ.Yeşilce, "Caratheodory's Theorem for B-1-convex Sets", Malaya Journal of Matematik. Vol. 4, No 3, 2016, p. 444-447. (DOAJ, Zentralblatt MATH)
29. G.Adilov, İ.Yeşilce, "B-1-convex Functions", Journal of Convex Analysis. Vol. 24, No 2, 2017 (SCI-Expanded).