SINIR KOŞULLARI SPEKTRAL PARAMETRE İÇEREN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

EMİR ALİ MARİS

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Nazim B. KERİMOV

MERSİN
ŞUBAT – 2016

Emir Ali MARİS tarafından Prof. Dr. Nazim B. KERİMOV danışmanlığında hazırlanan " Sınır Koşulları Spektral Parametre İçeren Bir Sınır Değer Probleminin Bazı Spektral Özellikleri" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

	İmza
Prof. Dr. Nazim B. KERİMOV	....
Prof. Dr. Fahreddin ABDULLAYEV	....
Prof. Dr. Rauf AMİROV	....
Yrd. Doç. Dr. Orkun COŞKUNTUNCEL	....
Yrd. Doç. Dr. Ufuk KAYA	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26/02/2016 tarih ve 2016.8/310 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir

SINIR KOŞULLARI SPEKTRAL PARAMETRE İÇEREN BİR SINIR DEĞER PROBLEMİNİN BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Emir Ali MARİS

ÖZ

Bu tezde, λ spektral parametre, $q(x) \in L_1(0,1)$ kompleks değerli bir fonksiyon ve d sıfırdan farklı bir kompleks sayı olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1,$$
$$y(0) = 0,\ y'(0) - d\lambda y(1) = 0$$

sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri alınmış, seçilmiş özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında minimalliği ve tabanlığı ispatlanmış ve bu tabanın $p = 2$ için koşulsuz olduğu gösterilmiş, sürekli fonksiyonların söz konusu problemin seçilmiş özfonksiyonlar sistemi üzere Fourier ayrışımlarının $[0,b]$ $(0 < b < 1)$ ve $[0,1]$ aralıklarında düzgün yakınsaklık şartları elde edilmiştir.

Ayrıca, yine de λ spektral parametre, $q(x) \in C[0,1]$ reel değerli bir fonksiyon ve $a_1,\ b_0,\ b_1,\ c_1,\ d_0,\ d_1$ sayıları $|b_0| + |d_0| \neq 0,\ \sigma = a_1 d_1 - b_1 c_1 > 0$ şartlarını sağlayan reel sayılar olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1,$$
$$b_0 y(0) = d_0 y'(0),\ (a_1\lambda + b_1)y(1) = (c_1\lambda + d_1)y'(1)$$

probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri kesinleştirilmiş ve sürekli fonksiyonların bakılan problemin seçilmiş özfonksiyonlar sistemi üzere Fourier ayrışımlarının $[0,b]$ $(0 < b < 1)$ ve $[0,1]$ aralıklarında düzgün yakınsaklık şartları elde edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Özdeğer ve özfonksiyon, asimptotik formül, kök fonksiyonlar sistemi, minimal sistem ve taban, Fourier serisi ve düzgün yakınsaklık.

Danışman: Prof. Dr. Nazim B. KERİMOV, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

SOME SPECTRAL PROPERTIES OF A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH SPECTRAL PARAMETER IN THE BOUNDARY CONDITIONS

Emir Ali MARİS

ABSTRACT

In this thesis, we establish asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions, obtain minimality and basicity of the selected eigenfunctions system in $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ and prove that this basis is unconditional for $p=2$, verify uniformly convergent Fourier series for the continuous function in the selected eigenfunctions system on $[0,b]$ $(0<b<1)$ and $[0,1]$ of the boundary value problem

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\ 0<x<1,$$
$$y(0)=0,\ y'(0)-d\lambda y(1)=0,$$

where λ is a spectral parameter, $q(x)\in L_1(0,1)$ is a complex-valued function and $d\neq 0$ is a complex number.

Further, we calculate the sharpened asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions and obtain uniformly convergent Fourier series for the continuous function in the selected eigenfunctions system on $[0,b]$ $(0<b<1)$ and $[0,1]$ of the boundary value problem

$$-y''+q(x)y=\lambda y,\ 0<x<1,$$
$$b_0 y(0)=d_0 y'(0),\ (a_1\lambda+b_1)y(1)=(c_1\lambda+d_1)y'(1),$$

where λ is a spectral parameter, $q(x)\in C[0,1]$ is a real-valued function and the numbers $a_1, b_0, b_1, c_1, d_0, d_1$ are the real constants which satisfy the conditions $|b_0|+|d_0|\neq 0,\ \sigma=a_1d_1-b_1c_1>0$.

Keywords: Eigenvalue and eigenfunction, asymptotic formulae, the system of root functions, minimal system and basis, Fourier series and uniform convergence.

Advisor: Prof. Dr. Nazim B. KERİMOV, Mersin University, Department of Mathematics

TEŞEKKÜR

Bu tezin konusunun tespitinde ve hazırlanmasında benden değerli fikirlerini esirgemeyen tez danışmanım Prof. Dr. Nazim B. KERİMOV'a ve tezime maddi destek sağlayan "Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu – TÜBİTAK'a" teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	$\{1,2,3,...\}$ doğal sayılar kümesi
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{R}^n$	$\mathbb{R}$ ’nin kendisiyle n kez kartezyen çarpımı
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$k=\overline{1,n}$	$k=1,2,...,n$
$C[a,b]$	$\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: f,[a,b]\text{'de süreklidir}\}$
$C^{\alpha}[a,b]$	$\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:\exists M>0:\ \forall x_1,x_2\in[a,b]\ \lvert f(x_1)-f(x_2)\rvert\le M\lvert x_1-x_2\rvert^{\alpha}\ (0<\alpha\le 1)\}$
$C^{(n)}[a,b]$	$f: a,b \to\mathbb{R}: a,b$ 'de f in n mertebeden türevi süreklidir
$W_p^n(a,b)$	$\{f:[a,b]\to\mathbb{R}: f,$ $n.$ mertebeden türevlenebilir ve $f^{(n)}(x)\in L_p(a,b)\ (1\le p<\infty)\ (n=0,1,...)\}$
$\Delta(\lambda)$	Karakteristik determinant
$rankU$	U matrisinin rankı
$\det U$	U matrisinin determinantı
I	Birim operatör
W	Wronskiyen
$\sum_{j=1}^{n} a_j$	$a_1+a_2+...+a_n$
$L_p(0,1)$	$\left\{f:\int_0^1 \lvert f(x)\rvert^p dx<\infty\right\}$
$\overline{z}$	z kompleks sayısının eşleniği
(f,g)	f ile g vektörlerinin bulundukları uzayda iç çarpımı
$(0,1)$	Uç noktaları 0 ve 1 olan açık aralık
$(a,b]$	Uç noktaları a ve b olan yarı açık aralık
$O(a_n)$	Landau sembolü
$1\le k\le n$	$k=1,2,...,n$

1. GİRİŞ

Lineer diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde sınır koşullarının spektral parametreyle bağlı olduğu problemler, önemli bir sınıf oluşturur. Bu teorinin temelleri geçen yüzyılın başlarında verilmiştir. Son yıllarda bu teorinin önemli bir kısmını, denklemin ve sınır koşullarının aynı spektral parametreyi içerdiği sınır değer probleminin kök fonksiyonlarının farklı fonksiyonel uzaylarda tabanlık özelliklerinin ve kök fonksiyonlara göre spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklık şartlarının incelenmesi oluşturur.

Aşağıdaki sınır değer problemlerini göz önüne alalım:

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda y,\ 0 < x < 1, \tag{1.1}$$

$$y(0) = 0, \tag{1.2}$$

$$y'(0) - d\lambda y(1) = 0, \tag{1.3}$$

burada λ spektral parametre, $q(x)$ $L_1(0,1)$ uzayından kompleks değerli bir fonksiyon ve d sıfırdan farklı bir kompleks sayıdır;

$$-y'' + q(x)\,y = \lambda y,\ 0 < x < 1, \tag{1.4}$$

$$b_0 y(0) = d_0 y'(0), \tag{1.5}$$

$$(a_1\lambda + b_1)\,y(1) = (c_1\lambda + d_1)\,y'(1), \tag{1.6}$$

burada λ spektral parametre, $q(x)$ $[0,1]$ aralığında sürekli reel değerli bir fonksiyon ve $a_1,\ b_0,\ b_1,\ c_1,\ d_0,\ d_1$ sayıları

$$|b_0| + |d_0| \neq 0,\ \sigma = a_1 d_1 - b_1 c_1 > 0$$

şartlarını sağlayan reel sayılardır.

Tezde, (1.1)-(1.3) ve (1.4)-(1.6) sınır değer problemlerinin bazı spektral özellikleri (özdeğerlerin ve özfonksiyonların yapısı ve asimptotları, kök fonksiyonlar sisteminin farklı fonksiyonel uzaylarda tabanlık özellikleri, seçilmiş kök fonksiyonlar sistemi üzere ayrışımların düzgün yakınsaklık koşulları) araştırılacaktır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Lineer diferansiyel operatörlerin genel spektral özellikleri [1,2] monografilerinde verilmiştir.

Tezde incelenen problemlerin fiziksel uygulamalarına ilişkin bazı çalışmalar [3,4,5] makalelerinde yapılmıştır.

Diferansiyel operatörün spektral özelliklerinin incelenmesine dair pek çok çalışma mevcuttur. Örneğin, diferansiyel operatörün özdeğerlerinin varlığı, bu özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotik ifadelerinin elde edilmesi, özdeğerlerin reel olup olmaması ve katlılık durumunun incelenmesi, katlı özdeğerlere uygun ek fonksiyonların kurulması gibi problemler ile lineer diferansiyel operatörün tabanlık özelliklerine dair bazı sonuçlar [6,7,8,9,10,11-20,21] makalelerinde bulunabilir. Bu özelliklerin arasında, operatörün kök fonksiyonlar sisteminin tamlığının ve minimalliğinin araştırılması, bu sistemin farklı fonksiyonel uzaylarda (özellikle $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzaylarında) taban olup olmaması gibi problemler önem taşımaktadır.

Doktora tez problemlerimizle yakından ilişkili olması nedeniyle tabanlık özellikleri ile ilgili bazı sonuçların kısa özetini verelim:

[9] makalesinde, a , b ve d pozitif sayılar olmak üzere

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ 0<x<1, \\ y(1)=0,\ (a-\lambda)y'(0)+\lambda b y(0)=0, \end{cases} \tag{2.1}$$

sınır değer probleminin seçilmiş özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında taban olduğu ve bu tabanın $p=2$ için Riesz tabanı olduğu ve

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ 0<x<1, \\ y(0)=0,\ y'(1)=d\lambda y(1), \end{cases} \tag{2.2}$$

sınır değer problemlerinin seçilmiş özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında taban olduğu gösterilmiştir.

[16] makalesinde, (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin özfonksiyonlarından birini atmakla oluşturulan sisteminin $L_2(0,1)$ uzayında Riesz tabanı olduğu ispatlanmıştır. Kaydedelim ki, $\sigma=a_1d_1-b_1c_1>0$ koşulu bu problemin spektral özelliklerinin incelenmesinde önemli role sahiptir. $\sigma>0$ koşulu sağlandığında,

(1.4)-(1.6) sınır değer problemini öz eşlenik bir operatöre dönüştürmek mümkündür [5]. Söz konusu durumda, (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin tüm özdeğerleri reel ve basit olur, problemin kök fonksiyonlar sistemi ise yalnızca öz fonksiyonlardan oluşur. Belirtelim ki, $q(x) \equiv 0$, $\sigma > 0$ durumunda, (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin özfonksiyonlar sistemine göre biortogonal ayrışımın düzgün yakınsaklığı, Fourier metodunu kullanarak kısmi diferansiyel denklemlerin klasik çözümlerini bulmak için kullanılmıştır [22,23]. $\sigma < 0$ olduğunda özdeğerlerin bazıları reel olmayabilir veya çok katlı olabilir, bu durumda (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sistemi ek fonksiyonları da içerebilir [6,8]. Örneğin, [6] makalesinde,

$$\begin{cases} y'' + q(x) y = \lambda y, \ 0 < x < 1, \\ y'(0)\sin\beta = y(0)\cos\beta, \ 0 \le \beta < \pi, \\ y'(1) = (a\lambda + b) y(1) \end{cases}$$

sınır değer problemi incelenmiştir, burada $q(x)$ reel değerli sürekli bir fonksiyon, a ve b reel sabitler ve $a < 0$ dır. Belirtelim ki, bu problem için $\sigma = a < 0$ olur. Bu makalede, katlı özdeğerlere uygun ek fonksiyonlar kurulup, kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında tabanlık koşulları incelenmiştir.

[21] makalesinde,

$$\begin{cases} y'' + \lambda y = 0, \ 0 < x < 1, \\ y(0) = 0, \\ y'(0) - d\lambda y(1) = 0, \ d > 0 \end{cases} \tag{2.3}$$

sınır değer probleminin seçilmiş özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında minimalliği ve tabanlığı gösterilmiştir. Kaydedelim ki, (2.3) sınır değer problemi, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin $q(x) \equiv 0$ ve $d > 0$ özel durumudur.

Sınır koşulları spektral parametre içeren lineer diferansiyel operatörün kök fonksiyonlar sistemine göre spektral ayrışımlarının farklı fonksiyonel uzaylarda (sürekli fonksiyonlar uzayı, Hölder uzayları, Sobolev uzayları vs.) yakınsaklığının incelenmesine dair bazı çalışmalar [24,25,26,27,28-30,31] makalelerinde bulunabilir.

[26,27] makalelerinde, bazı fiziksel uygulamalardan (homojen telin titreşimi, bir kasnağın ısı yayılımı, bir ucu topraklanmış kablodaki akım vs.) kaynaklanan

(2.1) ve (2.2) sınır değer problemlerinin, sürekli fonksiyonların ve $C^{\alpha}[0,1]\ (0<\alpha\le 1)$ Hölder sınıfına ait fonksiyonların seçilmiş özfonksiyonlar sistemi üzere Fourier ayrışımlarının $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaklık şartları incelenmiştir. Ayrıca, $W_2^m(0,1)\ (m=1,2,...)$ Sobolev uzaylarına ait fonksiyonların, bu uzaylardaki norma göre, Fourier ayrışımlarının yakınsaklık şartları elde edilmiştir.

[31] makalesinde, sürekli fonksiyonların (2.3) sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sistemine göre Fourier ayrışımının düzgün yakınsaklık koşulları elde edilmiştir.

[24,25] makalelerinde, $b\neq 0$ ve $d>0$ olmak üzere

$$\begin{cases} y''+\lambda y=0,\ 0<x<1, \\ y'(0)=by(0),\ y'(1)=d\lambda y(1), \end{cases}$$

sınır değer probleminin özfonksiyonlar sistemi üzere sürekli fonksiyonların ve $C^{\alpha}[0,1]\ (0<\alpha\le 1)$ Hölder sınıfına ait fonksiyonların spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklığı araştırılmış, $W_2^m(0,1)\ (m=1,2,...)$ Sobolev uzaylarına ait fonksiyonların, bu uzaylardaki norma göre, Fourier ayrışımlarının yakınsaklık şartları verilmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu kısımda, bulgular ve tartışmalar kısmında yararlanılacak bazı tanım ve temel teoremler verilecektir.

3.1. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖR

Tanım 3.1.1 [2]. $p_j(x) \in C[a,b], \quad j=\overline{0,n}$ ve $\dfrac{1}{p_0} \in C[a,b]$ olmak üzere,

$l : C^n[a,b] \to C[a,b]$,

$$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + \ldots + p_n(x)y \tag{3.1}$$

şeklindeki ifadeye *lineer diferansiyel ifade* denir. $p_j(x), \quad j=\overline{0,n}$ fonksiyonlarına lineer diferansiyel ifadenin katsayıları, n sayısına *mertebe*si denir.

(3.1) ile tanımlı l dönüşümü iyi tanımlıdır ve türev operatörünün lineerliğinden, l dönüşümünün lineer bir dönüşüm olduğu açıkça elde edilir.

Belirtelim ki, ileride $p_j(x), \quad j=\overline{0,n}$ fonksiyonlarına daha az koşullar yüklenecektir (örneğin, $p_j(x) \in L_1(a,b), \ j=\overline{0,n}$).

Tanım 3.1.2 [2]. $U(y)$**,**

$$y(a),\quad y'(a),\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(a),\quad y(b),\quad y'(b),\quad \ldots,\quad y^{(n-1)}(b)$$

değişkenlerine bağlı lineer bir ifade, yani,

$$U(y) = \sum_{k=0}^{n-1} \alpha_k y^{(k)}(a) + \sum_{k=0}^{n-1} \beta_k y^{(k)}(b) \tag{3.2}$$

olsun. Burada, $\alpha_k, \beta_k \in \mathbb{C}, \ k=\overline{0,n-1}$ dir. Eğer (3.2) şeklinde birkaç tane $U_j(y), \quad j=\overline{1,m}$ ifadeleri verilmişse,

$$U_j(y) = 0, \quad j=\overline{1,m} \tag{3.3}$$

koşullarına *sınır koşulları* denir.

$$D = \left\{ y \in C^{(n)}[a,b] : \ U_j(y) = 0, \quad j=\overline{1,m} \right\} \tag{3.4}$$

kümesini tanımlayalım. D, $C^{(n)}[a,b]$ uzayının lineer bir alt uzayıdır. Eğer (3.3) koşulları yoksa (veya (3.3) koşullarının tüm katsayıları sıfırsa), o zaman $D=C^{(n)}[a,b]$ olur.

Tanım 3.1.3 [2]. $l(y)$ (3.1) ile, D ise (3.4) ile tanımlansın. Bu durumda

$$L:D\to C[a,b],\quad L(y)=l(y)$$

şeklinde tanımlanan L operatörüne, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve $U_j(y)=0,\quad j=\overline{1,m}$ sınır koşullarıyla tanımlanan bir *lineer diferansiyel operatör* denir.

Belirtmek gerekir ki, $U_j(y),\quad j=\overline{1,m}$ ifadelerinin her birini bu ifadelerin katsayılarından oluşmuş ve $\mathbb{C}^{2n}$ uzayından olan $(\alpha_{j,0},...,\alpha_{j,n-1},\beta_{j,0},...,\beta_{j,n-1})$, $j=\overline{1,m}$ şeklindeki bir vektörle eşleştirebiliriz. Tersine, $\mathbb{C}^{2n}$ uzayından olan bir vektörle bir $U(y)$ lineer ifadesi tanımlayabiliriz. Biz $U_j(y),\quad j=\overline{1,m}$ ifadelerinin lineer bağımsız olduğunu kabul edeceğiz. O zaman $\mathbb{C}^{2n}$ uzayının boyutu $2n$ olduğundan, lineer bağımsız sınır koşullarının sayısı en çok $2n$ olur. Ayrıca lineer bağımsız sınır koşullarının sayısı $2n$ ise bu koşulların katsayılar matrisinin rankı $2n$ olacağından sınır koşulları,

$$y(a)=0,\ y'(a)=0,...,\ y^{(n-1)}(a)=0,\ y(b)=0,\ y'(b)=0,...,\ y^{(n-1)}(b)=0$$

koşullarına denk olur [2].

3.2. HOMOJEN SINIR DEĞER PROBLEMİ

Tanım 3.2.1 [2]. L diferansiyel operatörü, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.3) sınır koşullarıyla tanımlansın. Bu durumda

$$L(y)=0 \tag{3.5}$$

şeklindeki probleme *homojen sınır değer problemi* denir.

Homojen sınır değer problemi daha açık olarak,

$$\begin{cases} l(y)=0, \\ U_j(y)=0, \quad j=\overline{1,m} \end{cases}$$

şeklinde yazılabilir.

(3.5) problemini sağlayan her bir fonksiyona bu problemin bir *çözümü* denir. Açıktır ki, $y \equiv 0$ fonksiyonu (3.5) probleminin çözümüdür. Bu çözüme homojen sınır değer probleminin *aşikar çözümü* denir.

Şimdi homojen sınır değer probleminin aşikardan farklı çözümlerinin varlığını araştıralım.

y_k, $k=\overline{1,n}$ fonksiyonları $l(y)=0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsunlar. Lineer diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği gibi, $l(y)=0$ denkleminin her bir çözümü ve bundan dolayı, homojen sınır değer probleminin her bir çözümü,

$$y=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k$$

şeklindedir. Burada c_k, $k=\overline{1,n}$ keyfi sabitlerdir. Bu çözüm (3.3) sınır koşullarını sağladığından $c_1, c_2, ..., c_n$ sabitlerine göre

$$\sum_{k=1}^{n} c_k U_j(y_k)=0, \quad j=\overline{1,m} \tag{3.6}$$

homojen lineer denklemler sistemi elde edilir.

$$U=\begin{pmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_m(y_1) & \cdots & U_m(y_n) \end{pmatrix} \tag{3.7}$$

matrisinin rankı r olsun. O zaman (3.6) homojen lineer denklemler sisteminin tam $n-r$ sayıda lineer bağımsız çözüm vardır. Bunlar sınır değer probleminin $n-r$ sayıda lineer bağımsız çözümüne uygundur. Böylece şu sonuçlara varılabilir [2]:

1. $r<n$ ise ve yalnız böyle ise (3.5) probleminin aşikardan farklı çözümü vardır.

2. $m<n$ ise, (3.5) probleminin aşikardan farklı çözümü vardır.

3. $n=m$ ise (3.5) probleminin aşikardan farklı çözümünün olması için gerek ve yeter şart $\det U=0$ olmasıdır; burada U (3.7) ile tanımlanmış matristir.

U matrisinin rankına, sınır değer probleminin *rankı* denir.

3.3. EŞLENİK DİFERANSİYEL İFADE

$l(y) = p_0(x)y^{(n)} + p_1(x)y^{(n-1)} + ... + p_n(x)y$ diferansiyel ifadesinin $p_k(x)$ katsayıları, $p_k \in C^{(n-k)}[a,b]$, $k = \overline{0,n}$ koşullarını sağlasınlar. $y, z \in C^{(n)}[a,b]$ keyfi iki fonksiyon olsun. k kez kısmi integrasyon ile,

$$\int_a^b p_{n-k}\overline{z}y^{(k)}dx = \left[p_{n-k}\overline{z}y^{(k-1)} - \left(p_{n-k}\overline{z}\right)' y^{(k-2)} + ... + (-1)^{k-1}\left(p_{n-k}\overline{z}\right)^{(k-1)} y \right]\Bigg|_a^b + (-1)^k \int_a^b y\left(p_{n-k}\overline{z}\right)^{(k)} dx \tag{3.8}$$

elde ederiz. (3.8)'de $k = n, n-1, ..., 1, 0$ alıp elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\int_a^b l(y)\overline{z}\,dx = P(\eta,\zeta) + \int_a^b y\overline{l^*(z)}dx \tag{3.9}$$

elde ederiz, burada

$$l^*(z) = (-1)^n \left(\overline{p_0}z\right)^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\overline{p_1}z\right)^{(n-1)} + ... + \overline{p_n}z \tag{3.10}$$

ve $P(\eta,\zeta)$,

$$\begin{aligned} \eta &= \left(y(a), y'(a), ..., y^{(n-1)}(a), y(b), y'(b), ..., y^{(n-1)}(b)\right) \\ \zeta &= \left(z(a), z'(a), ..., z^{(n-1)}(a), z(b), z'(b), ..., z^{(n-1)}(b)\right) \end{aligned} \tag{3.11}$$

değişkenlerine bağlı bilineer bir ifadedir [2].

Tanım 3.3.1 [2]. (3.10) ile tanımlı $l^*(z)$ ifadesine, $l(y)$ diferansiyel ifadesinin *eşleniği*, (3.9) formülüne ise *Lagrange formülü* denir.

$$\int_a^b l^*(z)\overline{y}dx$$

ifadesine kısmi integrasyon uygulanırsa,

$$\int_a^b l^*(z)\overline{y}\,dx = Q(\eta,\zeta) + \int_a^b z\overline{l(y)}dx$$

şeklinde bir eşitlik elde ederiz, burada $Q(\eta,\zeta)$ yine de (3.11) değişkenlerine bağlı bilineer bir ifadedir. Böylece $l(y)$, $l^*(z)$'nin eşleniği olur. Yani, $l^{**}(y)=l(y)$ dir [2].

Eşlenik ifadenin (3.10) tanımından, hemen,

$$(l_1+l_2)^* = l_1^* + l_2^* \tag{3.12}$$

$$(\lambda l)^* = \overline{\lambda} l^* \tag{3.13}$$

elde edilir [2].

Eğer, $l^* = l$ ise $l(y)$'ye *özeşlenik diferansiyel ifade* denir.

(3.12) ve (3.13)'den şu sonuçlara varılır [2]:

1. Özeşlenik diferansiyel ifadelerin toplamı da özeşleniktir.

2. Özeşlenik bir diferansiyel ifadenin bir reel sayıyla çarpımı da özeşleniktir.

Aşağıdaki teorem özeşlenik bir diferansiyel ifadenin en genel şeklini verir:

Teorem 3.3.1 [2]. Herhangi bir özeşlenik diferansiyel ifade,

$$l_{2\upsilon}(y)=\left(py^{(\upsilon)}\right)^{(\upsilon)},\quad l_{2\upsilon-1}(y)=\frac{1}{2}\left[\left(ipy^{(\upsilon-1)}\right)^{(\upsilon)}+\left(ipy^{(\upsilon)}\right)^{(\upsilon-1)}\right]$$

şeklindeki özeşlenik diferansiyel ifadelerin toplamıdır. Burada p, $[a,b]$ aralığında reel değerli bir fonksiyondur.

Sonuç [2]: Reel katsayılı bir özeşlenik diferansiyel ifade,

$$l(y)=\left(p_0y^{(\mu)}\right)^{(\mu)}+\left(p_1y^{(\mu-1)}\right)^{(\mu-1)}+\ldots+\left(p_{\mu-1}y'\right)'+p_\mu y$$

şeklinde yazılabilir. Burada p_k, $k=\overline{0,\mu}$ reel değerli fonksiyonlardır.

3.4. EŞLENİK SINIR KOŞULLARI ve EŞLENİK DİFERANSİYEL OPERATÖR

$U_\upsilon(y)$, $\upsilon=\overline{1,m}$ lineer bağımsız ifadeleri verilsin. Burada $m\le 2n$ dir. Lineer uzaylar teorisinden bilindiği gibi bu ifadeleri, $2n$ sayıda lineer bağımsız ifadeye tamamlayabiliriz. Bu ifadeleri (3.9) Lagrange formülünde yazarsak,

$$\int_a^b l(y)\overline{z}\,dx = U_1(y)V_{2n}(z)+U_2(y)V_{2n-1}(z)+\ldots+U_{2n}(y)V_1(z)+\int_a^b y\overline{l^*(z)}\,dx \tag{3.14}$$

eşitliğini elde ederiz. Yani $P(\eta,\zeta)$ ifadesinin katsayıları $U_\upsilon(y)$, $\upsilon=\overline{1,2n}$ dir.

İspat edilebilir ki, $V_\upsilon(z)$, $\upsilon = \overline{1,2n}$ ifadeleri lineer bağımsızdır.

Tanım 3.4.1 [2].

$$V_j(z) = 0, \quad j = \overline{1,2n-m} \tag{3.15}$$

sınır koşullarına (veya bunlara denk sınır koşullarına)

$$U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1,m} \tag{3.16}$$

sınır koşullarının *eşlenik sınır koşulları* denir. Eğer, (3.15) koşulları (3.16) koşullarına denkse, o zaman (3.15) koşullarına *özeşlenik sınır koşulları* denir.

L, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.16) sınır koşullarıyla belirlensin. $l^*(z)$ eşlenik diferansiyel ifadesi ve (3.15) eşlenik sınır koşullarıyla belirlen operatöre, L'nin *eşlenik operatör*ü denir ve L^* ile gösterilir.

$$(y,z) = \int_a^b y\overline{z}\,dx$$

işaretlemesini yaparsak, (3.14), (3.15) ve (3.16)'den,

$$\int_a^b Ly\overline{z}\,dx = \int_a^b y\overline{Lz}\,dx \tag{3.17}$$

veya,

$$(Ly,z) = (y,L^*z) \tag{3.18}$$

elde edilir.

Belirtelim ki, eşlenik operatörlerin tanımından L, L^* operatörünün eşleniği olur. Başka bir deyişle, $L^{**} = L$ olur.

Eğer, $L^* = L$ ise L operatörüne *özeşlenik operatör* denir. Bir L operatörünün özeşlenik operatör olması için gerek ve yeter koşul bu operatörün özeşlenik diferansiyel ifade ve özeşlenik sınır koşullarıyla tanımlanmasıdır.

L özeşlenik ise (3.18) eşitliği,

$$(Ly,z) = (y,Lz) \tag{3.19}$$

şeklini alır.

3.5. EŞLENİK SINIR DEĞER PROBLEMİ

Tanım 3.5.1 [2]. L^*, L 'ye eşlenik operatör ise,

$$L^* z = 0 \tag{3.20}$$

homojen sınır değer problemine,

$$Ly = 0 \tag{3.21}$$

sınır değer probleminin *eşlenik sınır değer problemi* denir.

(3.20) problemi daha açık şekilde,

$$\begin{cases} l^*(z) = 0 \\ V_j(z) = 0, \quad j = \overline{1, 2n-m} \end{cases} \tag{3.22}$$

olarak yazılabilir.

Eşlenik sınır değer problemlerinin rankları arasındaki bağıntıyı bulalım [2].

z_k, $k = \overline{1,n}$, $l^*(z) = 0$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri ve r', (3.20) probleminin rankı olsun. O zaman bu problemin tam $n - r'$ sayıda lineer bağımsız çözümü vardır.

Öte yandan y, (3.21) probleminin keyfi bir çözümüyse, $z = z_k$, $k = \overline{1,n}$ fonksiyonları için (3.14) Lagrange formülünün sol tarafı sıfır olur. $U_j(y) = 0$, $j = \overline{1,m}$ olduğundan (3.14)'ten,

$$U_{m+1}(y) V_{2n-m}(z_k) + \ldots + U_{2n}(y) V_1(z_k) = 0, \quad k = \overline{1,n} \tag{3.23}$$

homojen denklemler sistemini elde ederiz. Eğer (3.21) probleminin rankı r ise, (3.23) sisteminin en azından $n - r$ sayıda lineer bağımsız çözümü vardır. Bu yüzden (3.20) probleminin rankı r', $2n - m - (n - r) = n - m + r$ sayısından büyük değildir. Yani,

$$r' \le n - m + r \tag{3.24}$$

dır. Hatırlatalım ki, (3.20) ve (3.21) problemleri karşılıklı eşlenik olduğundan, rankların rolleri değiştirilirse,

$$r \le n - (2n - m) + r'$$

ve dolayısıyla,

$$r \le m - n + r' \tag{3.25}$$

elde edilir. Sonuçta (3.24) ve (3.25)'den,

$$r' = n - m + r \tag{3.26}$$

bulunur.

Böylece aşağıdaki sonuçlara varabiliriz [2]:

1. Bir homojen sınır değer probleminde, sınır koşullarının sayısı diferansiyel ifadenin mertebesine eşitse, bu problemin rankı eşleniğinin rankına eşittir.

2. Bir homojen sınır değer probleminde, sınır koşullarının sayısı diferansiyel ifadenin mertebesine eşitse ve bu problemin yalnızca aşikar çözümü varsa, o zaman, bu problemin eşleniğinin de yalnızca aşikar çözümü vardır.

3.6. LİNEER DİFERANSİYEL OPERATÖRÜN ÖZDEĞERLERİ ve ÖZFONKSİYONLARI

Tanım 3.6.1 [2]. $\lambda \in \mathbb{C}$ bir parametre olsun. Eğer,

$$L(y) = \lambda y \tag{3.27}$$

denklemini sağlayan aşikardan farklı bir y çözümü varsa, λ parametresine L operatörünün bir *özdeğer*i, y fonksiyonuna da λ'ya uygun bir *özfonksiyon* denir.

Tanımdan açıkça denilebilir ki, bir L operatörünün özdeğerleri λ parametresinin öyle değerleridir ki,

$$l(y) = \lambda y, \quad U_j(y) = 0, \quad j = \overline{1, m} \tag{3.28}$$

homojen sınır değer problemi aşikar olmayan çözüme sahiptir. Her bir aşikardan farklı çözüm ise, λ'ya ait bir özfonksiyondur.

Aynı λ özdeğerine ait özfonksiyonların bir lineer kombinasyonu da λ'ya ait bir özfonksiyondur, yani $L(y_1) = \lambda y_1$ ve $L(y_2) = \lambda y_2$ ise, $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \lambda(c_1 y_1 + c_2 y_2)$ dir; burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

$l(y) = \lambda y$ diferansiyel denklemi, verilen bir λ parametresi için n'den çok lineer bağımsız çözüme sahip değildir. O halde aynı λ özdeğerine ait tüm lineer bağımsız özfonksiyonlar sistemi, $l(y) = \lambda y$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümlerinin gerdiği uzaydan, boyutu n'den büyük olmayan bir alt uzay ayırır. Bu uzayın boyutu, verilen λ özdeğeri için (3.28) probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır. Bu sayıya λ özdeğerinin *geometrik katı* denir.

Şimdi verilen bir λ parametresi için, (3.28) probleminin aşikardan farklı çözümlerinin varlığını araştıralım.

$y_k(x,\lambda),\ \ k=\overline{1,n}$ fonksiyonları, $l(y)=\lambda y$ diferansiyel denkleminin,

$$y_k^{(j-1)}(a,\lambda)=\begin{cases}0, & k\neq j\\ 1, & k=j\end{cases} \qquad k,j=\overline{1,n} \tag{3.29}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerinin temel bir sistemi olsun. Lineer diferansiyel denklemler teorisinden belirtelim ki, $[a,b]$ aralığında sabitlenmiş her bir x değeri için, $y_k(x,\lambda),\ \ k=\overline{1,n}$ fonksiyonları, λ'nın tam fonksiyonlarıdır. Bölüm 3.2'nin sonuçlarına göre, (3.28) probleminin aşikardan farklı bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart,

$$U=\begin{pmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n)\\ \vdots & \ddots & \vdots\\ U_m(y_1) & \cdots & U_m(y_n)\end{pmatrix}$$

matrisinin r rankının n'den küçük olmasıdır. Ayrıca belirtmek gerekir ki, U matrisinin tüm karesel alt matrislerinin determinantları, λ'nın tam fonksiyonlarıdır [2].

Bu bilgiler ışığında aşağıdaki sonuçlar verilebilir [2]:

1. U'nun, derecesi n olan tüm alt matrislerinin determinantları özdeş olarak sıfırsa, λ parametresinin her bir değeri özdeğer olur.

2. U'nun, derecesi n olan en az bir alt matrisinin determinantı özdeş olarak sıfır olmasın. Bu durumda λ'nın, U matrisinin derecesi n olan tüm alt matrislerinin determinantlarını sıfır yapan değerlerinin her biri özdeğerdir.

Böylece L operatörünün özdeğerleri için olası iki durum mevcuttur [2]:

a) Her bir λ sayısı L operatörünün özdeğeridir.

b) L operatörü en fazla sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir ve bu özdeğerler sonlu yığılma noktalarına sahip değildir.

$m=n$ durumu ayrıca incelenmesi gereken bir durumdur.

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{3.30}$$

ile tanımlı determinanta, L operatörünün *karakteristik determinantı* denir. Yukarıdaki tartışmadan bu determinantın, λ'nın tam fonksiyonu olduğu söylenebilir. $\Delta(\lambda)$ için aşağıdaki sonuçlar verilebilir [2]:

1. L operatörünün özdeğerleri, $\Delta(\lambda)$'nın sıfırlardır. $\Delta(\lambda)$, özdeş olarak sıfırsa, her bir λ sayısı L operatörünün özdeğeridir.

2. $\Delta(\lambda)$ özdeş olarak sıfır değilse, L operatörü en fazla sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir ve bu özdeğerler sonlu yığılma noktalarına sahip değildir. Üstelik bu özdeğerler , $\Delta(\lambda)$'nın sıfırlarıdır.

Eğer $\Delta(\lambda)$'nın hiç sıfırı yoksa, L operatörünün de hiç özdeğeri yoktur.

3. Eğer λ_0, $\Delta(\lambda)$'nın υ katlı sıfırıysa, o zaman λ_0'ın geometrik katı υ'den büyük değildir.

4. Eğer λ_0, $\Delta(\lambda)$'nın basit sıfırıysa, o zaman λ_0'ın geometrik katı bire eşittir. Yani λ_0'a bir tek lineer bağımsız özfonksiyon karşılık gelir.

Tanım 3.6.2 [2]. λ_0 $\Delta(\lambda)$'nın basit sıfırıysa, λ_0 özdeğerine *basit özdeğer* denir.

$Ly=0$ homojen sınır değer probleminde, diferansiyel ifadenin katsayıları ve sınır koşullarının katsayıları, λ parametresinin tam fonksiyonları olabilirler. Bu durumda incelenen özdeğer problemi, (3.29) probleminden daha geneldir. Yine de, böyle genelleştirilmiş özdeğer problemleri için yukarıda elde edilen sonuçların tümü geçerlidir.

Teorem 3.6.1 [2]. λ L operatörünün geometrik katı p olan bir özdeğeriyse, $\overline{\lambda}$ L^* eşlenik operatörünün geometrik katı p olan bir özdeğeridir.

Gerçekten, λ L operatörünün geometrik katı p olan bir özdeğeriyse, o zaman, $Ly=\lambda y$ probleminin p sayıda lineer bağımsız çözümü vardır. Bölüm 3.5.'in sonuçlarıyla, $L^*z=\overline{\lambda}z$ eşlenik probleminin de p sayıda lineer bağımsız çözümü vardır. Buradan, $\overline{\lambda}$ parametresinin L^* operatörünün geometrik katı p olan bir özdeğeri olduğu anlaşılır.

Uyarı : Teorem3.6.1’in, sadece, sınır koşullarının sayısının diferansiyel ifadenin mertebesine eşit olduğu durumda geçerli olduğunu belirtelim.

Teorem 3.6.2 [2]. L ve L^* eşlenik operatörlerinin sırasıyla, λ ve μ özdeğerlerine uygun özfonksiyonları, $\lambda \neq \overline{\mu}$ ise ortogonaldir.

Teorem 3.6.2 [2]. Özeşlenik bir operatörün özdeğerleri reeldir.

Teorem 3.6.1 ve teorem 3.6.2’den aşağıdaki gibi bir sonuç elde edilir:

Sonuç [2]: Bir özeşlenik diferansiyel operatörün farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları ortogonaldir.

Aynı özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonlardan Schmidt ortogonalleştirme yöntemiyle ortogonal özfonksiyonlar elde edebiliriz. Böylece, aynı özdeğere ait olan özfonksiyonların oluşturduğu uzayda ortogonal bir taban seçebiliriz.

3.7. L_p UZAYLARI

Tanım 3.7.1 [32]. $L_p(0,1)=\left\{ f : \int_0^1 |f(x)|^p \, dx < \infty \right\}$ kümesi, fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre bir lineer uzaydır. (Buradaki integral Lebesque anlamında integraldir.)

$1 \leq p < \infty$ ise, $L_p(0,1)$ uzayında $\|f\|_p = \left\{ \int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right\}^{\frac{1}{p}}$ ile tanımlı $\|\cdot\|_p$ ifadesi bir normdur. $L_p(0,1)$ $(1 \leq p < \infty)$ uzayı bu norma göre normlu lineer uzaydır [32].

Teorem 3.7.1 (Hölder Eşitsizliği) [32]. $f \in L_p(0,1)$ $(1 \leq p < \infty)$ ve $g \in L_q(0,1)$ ise, o zaman $f \cdot g \in L_1(0,1)$ dir ve

$$\left|\int_0^1 f(x)g(x)dx\right| \le \|f\|_p \|g\|_q$$

eşitsizliği doğrudur, burada $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı α ve β sayıları ve hemen hemen her $x \in [0,1]$ için $\alpha|f(x)|^p = \beta|g(x)|^q$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.7.2 (Minkowski Eşitsizliği) [32]. $f, g \in L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ ise,

$$\|f+g\|_p \le \|f\|_p + \|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.7.3 (Riesz-Fischer Teoremi) [32]. $L_p\ 0,1\ \ 1 \le p < \infty$ uzayı tamdır (Banach uzayıdır).

Teorem 3.7.3 (Riesz Temsil Teoremi) [32]. F, $L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ uzayında tanımlı sınırlı lineer bir fonksiyonel olsun. O zaman, öyle bir $g \in L_q(0,1)$ fonksiyonu vardır ki

$$F(f) = \int_0^1 f(x)g(x)dx$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, $\|F\| = \|g\|_q$ olur, burada $\|F\| = \sup\limits_{\|f\|_p \neq 0} \frac{|F(f)|}{\|f\|_p}$ dır.

3.8. HİLBERT UZAYLARINDA TABANLAR

Tanım 3.8.1 [33]. B bir Banach uzayı, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzaydaki vektörlerin bir dizisi olsun. Eğer her bir $x \in B$ vektörü için,

$$x = \sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j \tag{3.31}$$

şeklinde tek yolla belirli, B uzayındaki norma göre yakınsak olan bir seri ayrışımı varsa, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine B uzayının bir *tabanı* denir.

(3.31) ayrışımında c_j katsayıları, $x \in B$ vektörüne bağlı lineer fonksiyonellerdir:

$$c_j = \psi_j(x) \tag{3.32}$$

Bu tanım bir H Hilbert uzayı için uygulanırsa (3.32) eşitliği,

$$c_j = (x, \psi_j) \ (\psi_j \in H;\ j = 1, 2, ...) \tag{3.33}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca $x = \phi_k \ (k = 1, 2, ...)$ yazılırsa,

$$(\phi_k, \psi_j) = \delta_{kj} \ (k, j = 1, 2, ...)$$

elde edilir, burada δ_{kj} Kronecker deltasıdır.

Tanım 3.8.2 [33]. $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ ve $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$, H Hilbert uzayının elemanlarından oluşan iki dizi olsun. Eğer,

$$(x_k, \omega_j) = \delta_{kj} \ (k, j = 1, 2, ...)$$

ise, bu dizilere *biortogonal* diziler denir.

H Hilbert uzayının $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ tabanına biortogonal olan $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi tek şekilde tanımlıdır [33].

(3.31) ve (3.33) eşitliklerinden $\psi_j \ (j = 1, 2, ...)$ vektörlerinin her birine ortogonal olan herhangi bir f vektörünün özdeş olarak sıfır olduğu söylenir. Sonuçta herhangi bir tabana biortogonal olan dizi, H Hilbert uzayında tamdır [33].

Teorem 3.8.1 [33]. H Hilbert uzayının herhangi bir tabanına biortogonal olan dizi de bu uzayın bir tabanıdır.

Tanım 3.8.3 [34]. B bir Banach uzayı, $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer,

$$x_1 \notin span\{x_2, x_3, ...\}$$

$$x_k \notin span\{x_1, x_2, ..., x_{k-1}, x_{k+1}, ...\} \ (k = 2, 3, ...)$$

ise, $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine bu uzayda *minimal* bir dizi denir, burada $span\{\omega_1, \omega_2, ...\}$ uzayı, $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisinin B uzayından gerdiği alt uzaydır.

Teorem 3.8.2 [34]. B bir Banach uzayı, $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisinin minimal olması için gerek ve yeter şart bu diziye biortogonal olan bir $\{\omega_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisinin var olmasıdır.

Tanım 3.8.4 [34]. B bir Banach uzayı, $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ ve $\{f_j\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzayda iki dizi olsun. Eğer,

$$\sum_{j=1}^{\infty} \left\| g_j - f_j \right\|^2 < \infty$$

ise, bu dizilere *karesel yakın* diziler denir, burada $\|.\|$ B uzayındaki normdur.

Tanım 3.8.5 [33]. B bir Banach uzayı, $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer,

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j g_j = 0$$

eşitliği,

$$0 < \sum_{j=1}^{\infty} \left\| c_j \right\|^2 \left\| g_j \right\|^2 < \infty$$

koşulu altında sağlanmıyorsa, $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine ω*-lineer bağımsız* dizi denir.

Teorem 3.8.3 [34]. Bir Banach uzayında bir dizi minimal ise bu dizi ω-lineer bağımsızdır.

$\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H Hilbert uzayının ortonormal bir tabanı, A sınırlı ve tersi olan lineer bir operatör olsun. Bu durumda keyfi bir $f \in H$ vektörü için,

$$A^{-1} f = \sum_{j=1}^{\infty} \left(A^{-1} f, \phi_j \right) \phi_j = \sum_{j=1}^{\infty} \left(f, A^{*^{-1}} \phi_j \right) \phi_j$$

ayrışımı doğrudur. Sonuçta,

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}\left(f,\chi_j\right)\psi_j$$

yazılır, burada,

$$\psi_j = A\phi_j,\ \chi_j = A^{*^{-1}}\phi_j\ \left(j=1,2,...\right) \tag{3.34}$$

dir. Açıkça,

$$\left(\psi_j,\chi_k\right)=\delta_{jk}\ \left(j,k=1,2,...\right)$$

dir. O halde, eğer,

$$f=\sum_{j=1}^{\infty}c_j\psi_j \tag{3.35}$$

ise,

$$c_j=\left(f,\chi_j\right)\ \left(j=1,2,...\right)$$

dir. Üstelik c_j katsayıları (3.35) ayrışımında tek türlü belirlidir.

Böylece her sınırlı ve terslenebilir lineer operatör H Hilbert uzayının herhangi bir ortonormal tabanını bu uzayın başka bir tabanına dönüştürür.

Tanım 3.8.6 [33] (Riesz Tabanı). H Hilbert uzayının yukarıdaki dönüşümle elde edilen $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ tabanına *ortonormal bir tabana denk tabanı* veya *Riesz tabanı* denir.

Teorem 3.8.4 [33] (Bari, N.K.). Aşağıdakiler denktir:

1) $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H Hilbert uzayının bir Riesz tabanıdır.

2) $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayının $\left(f,g\right)$ iç çarpımına topolojik denk olan uygun bir $\left(f,g\right)_1$ iç çarpımının oluşturduğu uzayda ortonormal bir tabandır.

3) $\left\{\psi_j\right\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayında tamdır ve öyle a_1, a_2 pozitif sayıları vardır ki, herhangi bir n doğal sayısı ve herhangi $\gamma_1, \gamma_2,..., \gamma_n$ kompleks sayıları için,

$$a_2\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_j\right|^2 \le \left|\sum_{j=1}^{n}\gamma_j\psi_j\right|^2 \le a_1\sum_{j=1}^{n}\left|\gamma_j\right|^2$$

eşitsizliği doğrudur.

4) $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayında tamdır ve onun $\left\|(\psi_j,\psi_k)\right\|_{j,k=1}^{\infty}$ Gram matrisi, l_2 dizi uzayında sınırlı ve terslenebilir bir lineer operatör üretir.

5) $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayında tamdır, bu diziye biortogonal olan $\{\chi_j\}_{j=1}^{\infty}$ tam dizisi vardır ve herhangi bir $f \in H$ vektörü için,

$$\sum_{j=1}^{\infty}\left|(f,\psi_j)\right|^2 < \infty,\ \sum_{j=1}^{\infty}\left|(f,\chi_j)\right|^2 < \infty$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Teorem 3.8.5 [33] (Bari, N.K.). H Hilbert uzayının $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ Riesz tabanına karesel yakın olan ω-lineer bağımsız $\{g_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi de bu uzayın bir Riesz tabanıdır.

Son teoremden sonuç olarak aşağıdaki önerme verilebilir [33]:

H Hilbert uzayının ω-lineer bağımsız $\{\chi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi bu uzayın ortonormal bir tabanına karesel yakın ise, bu dizi H uzayında bir tabandır.

3.9. FONKSİYON DİZİLERİNİN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI

Bu bölümde I ile reel sayıların bir alt kümesi gösterilecektir.

Tanım 3.9.1 [35]. $(f_n)\ (n\in\mathbb{N})$ I üzerinde tanımlı kompleks değerli fonksiyonların bir dizisi ve $f: I \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Eğer her bir $x \in I$ için $(f_n(x))$ dizisi $\mathbb{C}$ içinde $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak ise, o zaman "(f_n) dizisi I aralığında f fonksiyonuna noktasal yakınsaktır" denir ve $f_n \underset{x\in I}{\to} f\ (n\to\infty)$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre (f_n) dizisinin f fonksiyonuna noktasal yakınsak olması, her bir $x \in I$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_\varepsilon = n(x,\varepsilon)$ doğal sayısının varlığıdır ki, $n \ge n_\varepsilon$ olduğunda $\left|f_n(x) - f(x)\right| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Yukarıdaki tanımda eğer $n_\varepsilon = n(\varepsilon)$ ise, yani n_ε sayısı $x \in I$ noktasından bağımsız olarak sadece ε sayısına bağlı seçilebiliyor ise, o zaman "(f_n) dizisi I aralığında f fonksiyonuna düzgün yakınsaktır" denir ve $f_n \underset{x\in I}{\rightarrow} f\ (\mathrm{n} \to \infty)$ ile gösterilir.

Açıktır ki, düzgün yakınsak bir fonksiyon dizisi aynı zamanda noktasal yakınsaktır, fakat bu hükmün tersi doğru değildir.

Teorem 3.9.1 (Cauchy Kriteri) [35]. Aşağıdakiler denktir:

(i) (f_n) fonksiyonlar dizisi I aralığında düzgün yakınsaktır.

(ii) $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $n_\varepsilon = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki $n, m \ge n_\varepsilon$ olduğunda

$$\sup_{x\in I} \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$$

dır.

$s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ olsun. Açıktır ki, (s_n) fonksiyonlar dizisi I üzerinde tanımlı kompleks değerli fonksiyonların bir dizisidir. O zaman aşağıdaki tanımlar verilebilir [35]:

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi I aralığında noktasal yakınsaktır.:$\Leftrightarrow$

$(s_n(x))$ dizisi I aralığında noktasal yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi I aralığında düzgün yakınsaktır.:$\Leftrightarrow$

$(s_n(x))$ dizisi I aralığında düzgün yakınsaktır.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi I aralığında mutlak yakınsaktır.:$\Leftrightarrow$

Her bir $x \in I$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f_n(x) \right| < \infty$ dır.

$\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi norm yakınsaktır.:$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \left\| f_n \right\|_\infty < \infty$ dır.

Bu tanımlardan norm yakınsak bir fonksiyonel serinin mutlak ve düzgün yakınsak olduğu açıktır.

Teorem 3.9.2 (Weierstrass Majorant Kriteri) [35]. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : I \to \mathbb{C}$ sınırlı fonksiyon ve $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ $\mathbb{R}$ içinde yakınsak bir seri olmak üzere her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\| f_n \|_{\infty} < a_n$ koşulu sağlansın. Bu durumda $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi norm yakınsaktır.

3.10. ORTOGONAL DİZİLER VE FOURİER SERİLERİ

Tanım 3.10.1 [36]. $\varphi_n(x) \in L_2(a,b)$ $(n = 1, 2, ...)$ sistemi için

$$\int_a^b \varphi_n(x) \overline{\varphi_m(x)} dx = 0 \ (m \neq n;\ n, m = 1, 2, ...)$$

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx \neq 0 \ (n = 1, 2, ...)$$

koşullarını sağlıyorsa bu sisteme ortogonal sistem denir.

$$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty} \tag{3.36}$$

trigonometrik sistemi $[-\pi, \pi]$ aralığında ortogonal bir sistemdir.

Eğer, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonal sistemi için

$$\int_a^b |\varphi_n(x)|^2 dx = 1 \ (n = 1, 2, ...)$$

ise bu sisteme ortonormal sistem denir.

$$\left\{ \frac{1}{\sqrt{2\pi}} \right\} \cup \left\{ \frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty} \cup \left\{ \frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}} \right\}_{n=1}^{\infty} \tag{3.37}$$

sistemi $[-\pi, \pi]$ aralığında ortonormal bir sistemdir.

Tanım 3.10.2 [36]. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $[0,1]$ aralığında ortogonal sistem olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{3.38}$$

serisine ortogonal seri denir, burada c_n sabit katsayılardır.

Herhangi bir $f(x)$ fonksiyonunu ele alalım.

$$c_n = \int_0^1 f(x)\overline{\varphi_n(x)}dx \tag{3.39}$$

olmak üzere (3.38) serisine $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonal sistemine göre $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi denir, burada (3.41) integralinin olduğunu varsayacağız.

(3.36) trigonometrik sistemine göre $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty}(a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.40}$$

şeklindedir, burada

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx \;\; (n = 0,1,2,...), \tag{3.41}$$

$$b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \;\; (n = 1,2,...) \tag{3.42}$$

dir.

Tanım 3.10.3 [36]. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$, $[0,1]$ aralığında tanımlı bir fonksiyonlar sistemi ve $f(x) \in L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ olsun.

$$\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx = 0 \;\; (n = 1,2,...) \tag{3.43}$$

eşitlikleri sadece $f(x) = 0$ (hemen hemen her $x \in [0,1]$ için) fonksiyonu için sağlanıyorsa, bu sisteme $L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ uzayında tamdır denir. (Bu tanım $f(x) \in C[0,1]$ fonksiyonu için verilirse “hemen hemen her” sözü yerine “her” kelimesi gelmelidir.)

Kaydedelim ki, (3.43) integralinin $f(x) \in L(0,1)$ olduğunda var olabilmesi için $\varphi_n(x)$ $(n = 1,2,...)$ fonksiyonlarının $[0,1]$ aralığında sınırlı olması gerekir ve yeter. Şayet, $f(x) \in L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ ise (3.43) integrali $\varphi_n(x) \in L_q(0,1)$ $(n = 1,2,...)$ olduğunda vardır, burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

(3.36) trigonometrik sistemi $L(-\pi,\pi)$ ve $C[-\pi,\pi]$ uzaylarında tamdır.

$1 \le p < p' < \infty$ olsun. O halde $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi $L_p(0,1)$ uzayında tam ise $L_{p'}(0,1)$ uzayında da tam olur. Buradan (3.36) trigonometrik sisteminin $1 \le p < \infty$ için $L_p(-\pi,\pi)$ uzayında tam olduğu söylenebilir.

(3.36) trigonometrik sisteminin $C[-\pi,\pi]$ uzayında tam olması aşağıdaki sonucu verir:

Teorem 3.10.1 [36]. $f(x)$ sürekli fonksiyonunun (3.40) ile tanımlı Fourier serisi düzgün yakınsak ise, bu serinin toplamı $f(x)$'in kendisidir.

Teorem 3.10.2 [36] (Bessel Eşitsizliği). $f(x) \in L_2(0,1)$ ve $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $[0,1]$ aralığında ortonormal bir sistem olsun. O zaman,

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \le \|f\|_{L_2}^2 \tag{3.44}$$

dir, burada c_n sayıları (3.39) ile tanımlıdır.

Teorem 3.10.3 [36]. $L_2(0,1)$ uzayında herhangi bir fonksiyonun, herhangi bir ortonormal sisteme göre Fourier serisi $L_2(0,1)$ uzayında yakınsaktır.

Tanım 3.10.4 [36]. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi verilsin ve her bir $f(x) \in C[0,1]$(veya $f(x) \in L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$) fonksiyonu ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon \ (0 \le x \le 1)$$

(veya $\left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p} < \varepsilon$)

olacak şekilde $n \in \mathbb{N}$ ve $\alpha_1, \alpha_2, ..., \alpha_n \in \mathbb{C}$ sayıları var olsun. Bu durumda "$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi $C[0,1]$ uzayında (veya $L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ uzayında) kapalıdır" denir.

$L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında (veya $C[0,1]$ uzayında) kapalı olan bir sistem, $L_q(0,1)$ uzayında (veya $L(0,1)$ uzayında) tamdır; tersine, $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında tam olan bir sistem, $L_q(0,1)$ uzayında kapalıdır, burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Teorem 3.10.4 [36]. $L_2(0,1)$ uzayında tamlık ve kapalılık denktir.

$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi, $L_2(0,1)$ uzayında kapalı ve $f(x)\in L_2(0,1)$ olsun. O halde, $\forall\varepsilon>0\ \exists\ \alpha_1,\ \alpha_2,...,\ \alpha_n$:

$$\left\| f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)\right\|_{L_2}<\varepsilon.$$

Öte yandan, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre bütün n dereceli polinomlardan $f(x)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom $\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)$ ile verildiğinden

$$\left\| f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right\|_{L_2}<\varepsilon$$

olur, burada $c_k\ \left(k=\overline{1,n}\right)$ $f(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi ortonormal olduğundan

$$\left\| f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right\|_{L_2}^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$$

şeklinde hesaplanır. Buradan

$$0\le\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2<\varepsilon^2$$

elde edilir. $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan $n\to\infty$ için limite geçersek,

$$\|f\|_{L_2}^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \tag{3.45}$$

bulunur. (3.45) eşitliğine Parseval eşitliği denir.

Teorem 3.10.5 (Riesz-Fischer) [36]. $c_n\ (n=1,2,...)$ dizisi $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<\infty$ koşulunu sağlayan herhangi bir sayı dizisi ve $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal bir sistem olsun. Bu durumda öyle bir $f(x)\in L_2(0,1)$ fonksiyonu vardır ki, c_n sayıları $f(x)$ fonksiyonunun bu sisteme göre Fourier katsayılarıdır. Ayrıca, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi tam ise, o zaman $f(x)$ fonksiyonu tek türlü belirlidir.

Teorem 3.10.6 (Mercer) [36]. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(0 \le x \le 1)$ ortonormal sistemi düzgün sınırlı ise, yani

$$\exists M > 0;\ \forall n \in \mathbb{N}\ \ \forall x \in [0,1]:\ \ |\varphi_n(x)| \le M,$$

koşulu sağlanıyorsa, o zaman herhangi bir toplanabilir fonksiyonun bu sisteme göre Fourier katsayılarının dizisi sıfıra yakınsar.

Böylece her bir toplanabilir fonksiyonun (3.36) trigonometrik sistemine göre Fourier katsayıları sıfıra yakınsar.

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.46}$$

trigonometrik serisini göz önüne alalım. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty \tag{3.47}$$

ise, (3.46) serisi $[-\pi, \pi]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsaktır. (3.47) koşulu (3.46) serisinin mutlak yakınsaması için gerek ve yeter koşuldur.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu ikinci mertebeden toplanabilir bir türeve sahip ise, o zaman bu fonksiyonun Fourier serisi düzgün yakınsar.

Teorem 3.10.7 [36]. $F(x)$ mutlak sürekli bir fonksiyon ve onun $F'(x) = f(x)$ türevi karesi integrallenebilir bir fonksiyon ise, o zaman $F(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Teorem 3.10.8 [36]. (a_n) monoton azalan ve sıfıra yakınsak bir dizi ise, o zaman

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

serisi $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ noktaları haricinde her yerde yakınsaktır, ayrıca her bir $0 < \delta < \pi$ için $\delta \le x \le 2\pi - \delta$ aralığında düzgün yakınsaktır.

(b_n) monoton azalan ve sıfıra yakınsak bir dizi ise, o zaman

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

serisi her yerde yakınsaktır, ayrıca her bir $0<\delta<\pi$ için $\delta \le x \le 2\pi-\delta$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Tanım 3.10.5 [36]. Trigonometrik serilerin yakınsaklığının incelenmesinde önemli bir rolü olan Dirichlet çekirdeği aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+...+\cos nx. \tag{3.48}$$

Trigonometrik özdeşliklerden kolayca elde edilebilir ki, (3.48) eşitliği

$$D_n(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}} \tag{3.49}$$

şeklinde yazılabilir.

$$\sigma(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right) \tag{3.50}$$

ve

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right) \tag{3.51}$$

olsun. (3.51) kısmi toplamlar dizisini, Fourier katsayıları ve Dirichlet çekirdeğinden yararlanarak

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)D_n(u)du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(u+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du \tag{3.52}$$

şeklinde yazabiliriz [36]. (3.52) eşitliği

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta} f(u+x)\frac{\sin nu}{u}du+o(1) \tag{3.53}$$

biçimine dönüştürülebilir, burada $o(1)$ $n\to\infty$ iken sıfıra yakınsar. (3.53) eşitliği, Riemann yerelleştirme prensibi diye bilinen son derece önemli bir özelliği açıklar [36]:

$f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinin x noktasındaki yakınsaklığı veya ıraksaklığı bu fonksiyonun x noktasının komşuluğundaki davranışına bağlıdır.

Değişken değişimi yapılarak (3.53) eşitliğini

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin nt}{t}dt+o(1) \tag{3.54}$$

olarak da yazabiliriz. $\sigma(f)$ trigonometrik Fourier serisinin kısmi toplamlar dizisinin (3.54) ile verilen şeklinden, bu serinin toplamı ile ilgili aşağıdaki testler elde edilir [36]:

Teorem 3.10.9 [36]. $\sigma(f)$ serisinin x noktasında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\left(f(x+u)+f(x-u)-2f(x)\right)\frac{\sin nu}{u}du=0$$

olmasıdır, burada $\delta>0$ dır.

Tanım 3.10.6 [36]. $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında sonlu sağ ve sol limitleri var ise ve bu fonksiyonun o noktasındaki değeri sağ ve sol limitlerin aritmetik ortalamasına eşitse, yani

$$f(x_0)=\frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

ise x_0 noktasına $f(x)$ fonksiyonunun regüler noktası denir.

Teorem 3.10.10 (Dini) [36]. $\int_0^{\delta}\left(f(x+u)+f(x-u)-2f(x)\right)\frac{du}{u}$ integrali var olsun. Bu durumda, $\sigma(f)$ serisi her x regüler noktasında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar.

Teorem 3.10.11 (Jordan) [36]. $f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında sınırlı salınımlı ise, o zaman bu fonksiyonun Fourier serisi (a,b) aralığında her noktada yakınsaktır. Bu serinin toplamı süreklilik noktasında $f(x)$, süreksizlik noktasında $\frac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ dir. Son olarak, $f(x)$ fonksiyonu (a',b') aralığında sürekli ise, o zaman $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi (a',b') aralığında düzgün yakınsaktır, burada $a<a'<b'<b$ dir.

Teorem 3.9.11'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir [36]:

$f(x)$ fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ aralığında sürekli, sınırlı salınımlı ve $f(-\pi)=f(\pi)$ ise, o zaman bu fonksiyonun Fourier serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

Herhangi bir periyodik mutlak sürekli fonksiyonun Fourier serisi $\mathbb{R}$ üzerinde kendine düzgün yakınsaktır.

4. BULGULAR ve TARTIŞMALAR

Bu bölümde (1.1)-(1.3) ve (1.4)-(1.6) sınır değer problemlerinin özdeğerleri ve özfonksiyonları için elde edilen bazı özellikleri ve bu özelliklerin ispatlarını vereceğiz.

4.1. (1.1)-(1.3) SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİNİN VE ÖZFONKSİYONLARININ BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

$u(x,\lambda)$, (1.1) diferansiyel denkleminin

$$u(0,\lambda)=0,\ u'(0,\lambda)=1 \tag{4.1}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri, $F(\lambda)=1-d\lambda u(1,\lambda)$ tam fonksiyonunun sıfırlarıdır, yani

$$1-d\lambda u(1,\lambda)=0 \tag{4.2}$$

denkleminin kökleridir. $F(0)=1$ olduğundan, bu fonksiyon sıfıra özdeş değildir.

$d\neq 0$ olduğundan, $F'(\lambda)=0$ denklemi,

$$u(1,\lambda)+\lambda\cdot\frac{\partial u(1,\lambda)}{\partial\lambda}=0 \tag{4.3}$$

denklemine denktir. E kümesi, (4.3) denkleminin köklerinin kümesi olsun. Bu küme, $F(\lambda)$ fonksiyonu tam olduğundan, sayılabilir bir kümedir.

$$D=\{d\in\mathbb{C}:\exists\,\lambda\in E,\ 1-d\lambda u(1,\lambda)=0\}$$

olsun. Açıktır ki, D kümesi de sayılabilir bir kümedir. Bundan sonra $d\notin D$ olduğunu varsayacağız.

(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları için elde edilen spektral özellikler aşağıdaki gibidir:

Teorem 4.1.1. d 'nin, sayılabilir sayıda değeri hariç, tüm değerleri için (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin tüm özdeğerleri basittir ve sonlu yığılma noktalarına sahip olmayan λ_n, $n = 0,1,2,...$ sonsuz dizisi şeklindedir. Dahası, n 'nin yeterince büyük değerleri için,

$$\lambda_n = (n\pi)^2 + O(1), \tag{4.4}$$

$$u_n(x) = u(x,\lambda_n) = \frac{\sin n\pi x}{n\pi} + O(n^{-2}) \tag{4.5}$$

asimptotik formüller doğrudur ; burada, $u_n(x)$ λ_n özdeğerine uygun özfonksiyondur.

Teorem 4.1.2. $q(x) \in L_1(0,1)$, $[0,1]$ aralığında hemen hemen her yerde $q(x) = q(1-x)$ $(0 \le x \le 1)$ ve r keyfi kaydedilmiş negatif olmayan bir tamsayı olsun. Bu durumda $u_n(x)(n = 0,1,...;n \ne r)$ sistemi $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayının bir tabanıdır, bu taban $p = 2$ için koşulsuzdur (Riesz tabanıdır).

Teorem 4.1.3. $q(x) \in L_2(0,1)$, $[0,1]$ aralığında hemen hemen her yerde $q(x) = q(1-x)$ $(0 \le x \le 1)$ ve r keyfi kaydedilmiş negatif olmayan bir tamsayı olsun. $f \in C[0,1]$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $\left\{\sqrt{2}\sin n\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre Fourier ayrışımı düzgün yakınsak ise, o zaman bu fonksiyon $[0,b]$ $(0 < b < 1)$ aralığında $u_n(x)$ $(n = 0,1,...;n \ne r)$ sistemine göre düzgün yakınsak Fourier serisine ayrıştırılabilir. Bu ayrışımın $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\left(f, \overline{u_r(1-x)}\right) = 0$ olmasıdır.

4.1.1. Teorem 4.1.1'in İspatı

Belirtelim ki, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri λ 'ya göre tam bir fonksiyonun ($F(\lambda) = 1 - d\lambda u(1,\lambda)$ fonksiyonunun) sıfırları olduğundan, analitik fonksiyonun teklik teoremi gereği, özdeğerlerin sonlu yığılma noktalarına sahip olmayan bir dizi şeklinde olacağı açıktır. Ayrıca d sayısının seçiminden ($d \notin D$)

d 'nin, sayılabilir sayıda değeri hariç, tüm değerlerinde bu problemin özdeğerlerinin tümünün basit olduğu söylenebilir.

$\lambda = s^2$ ve $s = \sigma + it$ olsun. O zaman

$$u(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(e^{|t|x}|s|^{-2}\right) \tag{4.6}$$

eşitliği doğrudur, burada $O\left(e^{|t|x}|s|^{-2}\right)$ fonksiyonu her bir kaydedilmiş $x \in [0,1]$ için s değişkeninin tam fonksiyonudur ve $0 \le x \le 1$ için x 'e göre düzgündür [1, s.6].

Böylece, (4.6) eşitliğine göre (4.2) denklemini

$$s \cdot \sin s + O\left(e^{|t|}\right) = 0 \tag{4.7}$$

şeklinde yazabiliriz. Kaydedelim ki, $|t|$ 'nin yeterince büyük değerleri için

$$|s \cdot \sin s| \ge \frac{1}{4} e^{|t|} |t|$$

olur. Buradan $|t| \to \infty$ iken, (4.7) denkleminin sol tarafının modülünün $+\infty$ 'a ıraksadığı görülür. Demek ki, (4.7) denkleminin köklerinin tümü kompleks düzlemde bir yatay şeridin içinde yerleşir. Yani, öyle bir $M > 0$ sayısı vardır ki, (4.7) denkleminin herhangi bir s çözümü için $|t| \le M$ sağlanır. Sonuçta, (4.7) denklemi

$$s \cdot \sin s + O(1) = 0 \tag{4.8}$$

denklemine denktir.

Belirtelim ki, $\lambda = 0$ değeri (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğeri değildir. Böylece, $s = 0$ değeri de (4.8) denkleminin kökü olamaz. Ayrıca (4.7) denkleminin köklerinin basit olduğu açıktır. Aksi taktirde, (4.2) denkleminin bazı λ kökleri katlı olurdu ki, bu $d \notin D$ seçimi ile çelişir.

$f(s) = s \sin s + O\left(e^{|t|}\right)$ olsun. O zaman öyle bir $C > 0$ sayısı vardır ki $|f(s) - s \sin s| \le Ce^{|t|}$ eşitsizliği sağlanır. H sayısını öyle seçelim ki, (4.7) denkleminin tüm kökleri $\{s = \sigma + it \in \mathbb{C} : |t| < H\}$ şeridinde yerleşsin ve $H > 4C$, $\sinh H \ge \frac{1}{4} e^H$ koşulları sağlansın. Şimdi, $n\pi + \frac{\pi}{2} > Ce^H$ koşulunu sağlayan n 'nin keyfi kaydedilmiş bir tamsayı değerleri için, (4.7) denkleminin

$R_n^{(1)}=\left\{s=\sigma+it\in\mathbb{C}:|t|\le H,\ |\sigma|\le n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}$ bölgesi içindeki sıfırlarının sayısını bulalım. Belirtelim ki, $s=\sigma+it\in\mathbb{C}$ için $|\sin s|^2=\sin^2\sigma+\sinh^2 t$ eşitliği sağlanır. Buradan

$$|\sin s|\ge|\sin\sigma|,\quad |\sin s|\ge|\sinh t| \tag{4.9}$$

elde edilir. (4.9) eşitsizliklerinden, $s=\sigma\pm iH$, $-\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\le\sigma\le n\pi+\dfrac{\pi}{2}$ ise, o zaman $|s\sin s|\ge H\sinh H\ge\dfrac{H}{4}e^H\ge\dfrac{H}{4C}\left|f(s)-s\sin s\right|>\left|f(s)-s\sin s\right|$ dir ve $s=\pm\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)+it$, $-H\le t\le H$ ise, o zaman $|s\sin s|\ge\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\left|\sin\left(n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right)\right|=$ $=n\pi+\dfrac{\pi}{2}>Ce^H>\left|f(s)-s\sin s\right|$ dir. Rouch'e teoreminden [37, s.99], $R_n^{(1)}$ bölgesinde (4.7) denkleminin köklerinin sayısı, $s\cdot\sin s=0$ denkleminin köklerinin sayısı kadardır, yani $2n+2$ sayıdadır. $\lambda=s^2$ olduğundan, (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri için (4.8) denkleminin $D_1=\left\{s\in\mathbb{C}:-\dfrac{\pi}{2}<\arg s\le\dfrac{\pi}{2}\right\}$ bölgesinde yerleşen köklerini ele almak yeterlidir. (4.8) denkleminin $R_n^{(2)}=\left\{s\in\mathbb{C}:-\dfrac{\pi}{2}<\arg s\le\dfrac{\pi}{2},\operatorname{Re}s\le n\pi+\dfrac{\pi}{2}\right\}$ bölgesindeki sıfırlarının sayısının $n+1$ olduğu açıktır.

Rouch'e teoremini tekrar kullanarak, n'nin yeterince büyük değerleri için, (4.8) denkleminin $n\pi\,(n\in\mathbb{N})$ sayısının $O\left(n^{-1}\right)$ komşuluğunda yalnızca bir kökünün olduğuna kolayca hükmedebiliriz.

(4.8) denkleminin $s\in D_1$ koşulunu sağlayan köklerini $\operatorname{Re}s$'nin azalmayan sırasına göre dizelim: $s_0,s_1,s_2,...,s_n,...$ Bu tartışmalardan, n'nin yeterince büyük değerleri için, aşağıdaki asimptotik formülü elde ederiz:

$$s_n=n\pi+O\left(n^{-1}\right). \tag{4.10}$$

(4.4) ve (4.5) formülleri $\lambda_n=s_n^{\,2}$, (4.6) ve (4.10) eşitliklerinden kolayca görülür.

Teorem 4.1.1 ispatlandı.

4.1.2. Teorem 4.1.2'nin İspatı

Teorem 4.1.2'nin ispatında kullanılacağı için iki yardımcı önermeyi ifade ve ispat edelim:

Lemma 4.1.2.1. n 'nin yeterince büyük değerleri için

$$\lambda_n \frac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial \lambda} = \frac{(-1)^n}{2} + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.11}$$

eşitliği doğrudur.

İspat. Belirtelim ki,

$$u(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)u(\tau,\lambda)\sin s(x-\tau)\,d\tau \tag{4.12}$$

eşitliği doğrudur [1, s.6]. (4.12) eşitliğinde $x=1$ yazıp s değişkenine göre türev alırsak,

$$\frac{\partial u(1,\lambda)}{\partial s} = \frac{\cos s}{s} - \frac{\sin s}{s^2} - \frac{1}{s^2}\int_0^1 q(\tau)u(\tau,\lambda)\sin s(1-\tau)\,d\tau +$$
$$+\frac{1}{s}\int_0^1 (1-\tau)q(\tau)u(\tau,\lambda)\cos s(1-\tau)\,d\tau +$$
$$+\frac{1}{s}\int_0^1 q(\tau)\frac{\partial u(\tau,\lambda)}{\partial s}\sin s(1-\tau)\,d\tau$$

eşitliğini elde ederiz. (4.5) ve (4.10) eşitliklerini son ifadeye uygularsak

$$\frac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial s} = \frac{(-1)^n}{n\pi} + \frac{1}{s_n}\int_0^1 q(\tau)\frac{\partial u(\tau,\lambda_n)}{\partial s}\sin s_n(1-\tau)\,d\tau + O\left(n^{-2}\right) \tag{4.13}$$

eşitliğini elde ederiz. $M_n = \max\limits_{0\le x\le 1}\left|\frac{\partial u(x,\lambda_n)}{\partial s}\right|$ olsun. $\max\limits_{n\in\mathbb{N}}\max\limits_{0\le\tau\le 1}\left|\sin s_n(1-\tau)\right| < \infty$ olduğundan (4.13) eşitliğine göre

$$M_n \le C_1\left(\frac{M_n}{|s_n|} + \frac{1}{n^2}\right)$$

eşitsizliği sağlanır, burada C_1 n 'ye bağlı olmayan bir sabittir. Buradan ve (4.10) eşitliğinden, n 'nin yeterince büyük değerleri için, $M_n = O\left(n^{-2}\right)$ olduğu görülür. Böylece, (4.13) eşitliğini

$$\frac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial s}=\frac{(-1)^n}{n\pi}+O\left(n^{-2}\right)$$

şeklinde yazabiliriz. Son eşitliği ve (4.10) eşitliğini kullanarak

$$\lambda_n\frac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial \lambda}=\frac{\lambda_n}{2s_n}\cdot\frac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial s}=\frac{(-1)^n}{2}+O\left(n^{-1}\right)$$

olduğunu elde ederiz.

Lemma 4.1.2.1 ispatlandı.

Lemma 4.1.2.2. Aşağıdaki eşitlikler doğrudur:

$$\int_0^1 u_n(x)\cdot u_m(1-x)\,dx=\frac{1}{d\lambda_n\lambda_m}\quad (n\neq m;\ n,m=0,1,2,...), \tag{4.14}$$

$$\int_0^1 u_n(x)\cdot u_n(1-x)\,dx=-\frac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial \lambda}\quad (n=0,1,...). \tag{4.15}$$

İspat: $u_m(x)$ (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin λ_m özdeğerine uygun özfonksiyonu olduğundan, $u_m(1-x)$ fonksiyonu

$$-y''(1-x)+q(1-x)y(1-x)=\lambda_m y(1-x),\ 0\leq x\leq 1$$

diferansiyel denklemini sağlar. Böylece, $0\leq x\leq 1$ olduğunda $u_n(x)$ ve $u_m(1-x)$ özfonksiyonları için

$$-u_n''(x)+q(x)u_n(x)=\lambda_n u_n(x), \tag{4.16}$$

$$-u_m''(1-x)+q(1-x)u_m(1-x)=\lambda_m u_m(1-x) \tag{4.17}$$

eşitlikleri doğrudur. (4.16) ve (4.17) eşitliklerini sırasıyla $-u_m(1-x)$ ve $u_n(x)$ fonksiyonları ile çarpıp taraf tarafa toplarsak, ayrıca $q(x)=q(1-x)$ $(0\leq x\leq 1)$ koşulunu da göz önüne alırsak, $0\leq x\leq 1$ için

$$\frac{d}{dx}\left\{u_n'(x)u_m(1-x)+u_n(x)u_m'(1-x)\right\}=(\lambda_m-\lambda_n)u_n(x)u_m(1-x)$$

eşitliği elde ederiz. Bu eşitliği $x=0$’dan $x=1$’e kadar integre edersek

$$(\lambda_m-\lambda_n)\int_0^1 u_n(x)u_m(1-x)dx=\left(u_n'(x)u_m(1-x)+u_n(x)u_m'(1-x)\right)\Big|_0^1$$

buluruz. Son eşitlikten, (4.1) başlangıç koşulları ve (1.2) , (1.3) sınır koşullarını göz önüne alırsak, (4.14) eşitliğini elde ederiz.

Benzer yolla, $\lambda \neq \lambda_n$ için

$$\frac{d}{dx}\left\{u_n'(x)u(1-x,\lambda)+u_n(x)u'(1-x,\lambda)\right\}=(\lambda-\lambda_n)u_n(x)u(1-x,\lambda)$$

eşitliğini görmek zor değildir. (4.1) başlangıç koşullarını kullanarak, son eşitlikten

$$\int_0^1 u_n(x)u(1-x,\lambda)dx=\frac{u_n(1)-u(1,\lambda)}{\lambda-\lambda_n}$$

buluruz. Buradan $\lambda \to \lambda_n$ için limite geçersek her bir n için (4.15) eşitliğinin doğruluğunu elde ederiz.

Lemma 4.1.2.2 ispatlandı.

Şimdi teorem 4.1.2'nin ispatına dönelim. Öncelikle, teoremin ikinci kısmını, yani $u_n(x)(n=0,1,...;n\neq r)$ sisteminin $L_2(0,1)$ uzayında koşulsuz taban olduğunu gösterelim. Kaydedelim ki, $u_n(x)(n=0,1,...;n\neq r)$ sistemi $L_2(0,1)$ uzayında minimaldir. Gerçekten, bu iddianın doğruluğunu ispatlamak için $u_n(x)(n=0,1,...;n\neq r)$ sistemine biortogonal olan $v_n(x)(n=0,1,...;n\neq r)$ sisteminin varlığını göstermek yeterlidir.

Her bir n için, λ_n (4.2) denkleminin basit kökü olduğundan (4.3) eşitliği sağlamaz, yani

$$\lambda_n\frac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial\lambda}+u(1,\lambda_n)\neq 0$$

veya

$$\lambda_n\frac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial\lambda}+\frac{1}{d\lambda_n}\neq 0$$

olur.

$v_n(x)$ $(n=0,1,...;n\neq r)$ sisteminin elemanlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$\overline{v_n(x)}=-\frac{\lambda_n u_n(1-x)-\lambda_r u_r(1-x)}{\lambda_n\frac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial\lambda}+\frac{1}{d\lambda_n}}. \tag{4.18}$$

$n\neq m,\ n\neq r,\ m\neq r$ olsun. (4.14), (4.15) ve (4.18) eşitliklerinden

$$\left(u_n, v_m\right) = -\frac{\lambda_m \int_0^1 u_n(x) u_m(1-x)dx - \lambda_r \int_0^1 u_n(x) u_r(1-x)dx}{\lambda_m \dfrac{\partial u(1,\lambda_m)}{\partial \lambda} + \dfrac{1}{d\lambda_m}} = 0$$

olduğunu kolayca görebiliriz.

$n \neq r$ olsun. Benzer şekilde,

$$\left(u_n, v_n\right) = -\frac{\lambda_n \int_0^1 u_n(x) u_n(1-x)dx - \lambda_r \int_0^1 u_n(x) u_r(1-x)dx}{\lambda_n \dfrac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial \lambda} + \dfrac{1}{d\lambda_n}} =$$

$$= -\frac{-\lambda_n \dfrac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial \lambda} - \lambda_r \dfrac{1}{d\lambda_r \lambda_n}}{\lambda_n \dfrac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial \lambda} + \dfrac{1}{d\lambda_n}} = 1$$

eşitliği doğrudur. Yani, $u_n(x)\ (n = 0,1,...; n \neq r)$ ve $v_n(x)\ (n = 0,1,...; n \neq r)$ sistemleri biortogonal eşlenik sistemlerdir.

$y_n(x)\ (n = 0,1,...)$ sisteminin elemanlarını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

$$y_n(x) = \sqrt{2} s_n u_n(x). \tag{4.19}$$

$y_n(x)\ (n = 0,1,...; n \neq r)$ sistemi $L_2(0,1)$ uzayında minimal sistemdir. Gerçekten, elemanları

$$\psi_n(x) = \frac{1}{s_n \sqrt{2}} v_n(x) \quad (n = 0,1,...; n \neq r) \tag{4.20}$$

ile tanımlı $\psi_n(x)\ (n = 0,1,...; n \neq r)$ sistemi, $y_n(x)\ (n = 0,1,...; n \neq r)$ sisteminin biortogonal eşleniği olur.

(4.5) ve (4.10) asimptotik formüllerinden

$$y_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.21}$$

olduğu kolayca görülür. Yine, (4.5), (4.10) ve (4.11) asimptotik formülleri ile (4.18) eşitliğini kullanarak

$$\psi_n(x) = \sqrt{2} \sin n\pi x + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.22}$$

şeklinde hesaplanabilir.

Şimdi $y_n(x)\ (n=0,1,...;n\neq r)$ sistemi ile $L_2(0,1)$ uzayının ortonormal bir tabanı olan $\left\{\sqrt{2}\sin n\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemini karşılaştıralım. (4.21)'e göre,

$$\left\|y_n(x)-\sqrt{2}\sin n\pi x\right\|\leq C_2\cdot n^{-1},$$

eşitsizliği sağlanır, burada C_2 n 'ye bağlı olmayan bir sabittir. Bu eşitsizlikten

$$\sum_{n=1}^{r}\left\|y_{n-1}(x)-\sqrt{2}\sin n\pi x\right\|^2+\sum_{n=r+1}^{\infty}\left\|y_n(x)-\sqrt{2}\sin n\pi x\right\|^2$$

serisinin yakınsak olduğunu elde ederiz ($r=0$ için ilk toplam yoktur). Yani, $y_n(x)\ (n=0,1,...;n\neq r)$ sistemi $\left\{\sqrt{2}\sin n\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine karesel yakındır. Sonuçta, $y_n(x)\ (n=0,1,...;n\neq r)$ sistemi $L_2(0,1)$ uzayında minimal olduğundan, bu sistem $L_2(0,1)$ uzayının bir Riesz tabanı olur.

Böylece teorem 4.1.2'nin ikinci kısmı ispatlandı.

Şimdi, $u_n(x)\ (n=0,1,...;n\neq r)$ sisteminin $L_p(0,1)\ (1<p<\infty)$ uzayında bir taban olduğunu gösterelim. Aslında elemanları (4.19) ile tanımlı $y_n(x)\ (n=0,1,...;n\neq r)$ sisteminin $L_p(0,1)\ (1<p<\infty)$ uzayında bir taban olduğunu göstermek yeterlidir. $y_n(x)\ (n=0,1,...;n\neq r)$ sistemi ile elemanları (4.20) ile tanımlı $\psi_n(x)\ (n=0,1,...;n\neq r)$ sisteminin biortogonal eşlenik olduğunu hatırlatalım.

$$\varphi_n(x)=\sqrt{2}\sin n\pi x\quad (n=1,2,...) \tag{4.23}$$

olsun. Kaydedelim ki, (4.23) sistemi $L_p(0,1)\ (1<p<\infty)$ uzayının bir tabanıdır [38, Chapter VIII, §20, Theorem 2]; ve, $p=2$ için bu taban ortonormaldır. Demek ki, öyle bir $M_p>0$ sayısı vardır ki, herhangi bir $f\in L_p(0,1)$ fonksiyonu için

$$\left\|\sum_{n=1}^{N}(f,\varphi_n)\varphi_n\right\|_p\leq M_p\|f\|_p,\ \ N=1,2,... \tag{4.24}$$

eşitsizliği sağlanır, burada $\|.\|_p$ normu $L_p(0,1)\ (1<p<\infty)$ uzayındaki normdur [39, Chapter I, §4, Theorem 6].

(4.21)-(4.23) eşitliklerinden

$$y_n(x) = \varphi_n(x) + O\left(n^{-1}\right),\ \psi_n(x) = \varphi_n(x) + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.25}$$

olduğu kolayca görülebilir.

$1 < p < 2$ ve p kaydedilmiş olsun. $y_n(x)$ $(n = 0,1,...; n \neq r)$ sistemi $L_2(0,1)$ uzayında tam olduğundan, $L_p(0,1)$ uzayında da tamdır. Böylece, bu sistemin $L_p(0,1)$ uzayında taban olduğunu ispatlamak için, tüm $f \in L_p(0,1)$ fonksiyonları için,

$$\left\| \sum_{n=0, n\neq r}^{N} (f, \psi_n) y_n \right\|_p \leq M \|f\|_p,\ N = 1,2,... \tag{4.26}$$

eşitsizliğini sağlayan $M > 0$ sayısının varlığını göstermek yeterlidir [39, Chapter I, §4, Theorem 6].

Kolayca görülür ki, $r \geq 1$ olduğunda her bir $f \in L_p(0,1)$ için

$$\left\| \sum_{n=0}^{r-1} (f, \psi_n) y_n \right\|_p \leq M_1 \|f\|_p$$

eşitsizliği sağlanır, burada M_1 pozitif bir sabittir. Demek ki, (4.26) eşitsizliği,

$$E_N(f) = \left\| \sum_{n=r+1}^{N} (f, \psi_n) y_n \right\|_p \leq M_2 \|f\|_p,\ N = r+1, r+2,... \tag{4.27}$$

eşitsizliğine denk olur, burada M_2 pozitif bir sabittir. (4.25) eşitliklerini kullanarak (4.27) eşitsizliğini

$$E_N(f) \leq E_{N,1}(f) + E_{N,2}(f) + E_{N,3}(f) + E_{N,4}(f) \tag{4.28}$$

biçiminde yazabiliriz, burada $N = r+1, r+2,...$ ve

$$E_{N,1}(f) = \left\| \sum_{n=r+1}^{N} (f, \varphi_n) \varphi_n \right\|_p,\ E_{N,2}(f) = \left\| \sum_{n=r+1}^{N} (f, \varphi_n) O\left(n^{-1}\right) \right\|_p,$$

$$E_{N,3}(f) = \left\| \sum_{n=r+1}^{N} \left(f, O\left(n^{-1}\right)\right) \varphi_n \right\|_p,\ E_{N,4}(f) = \left\| \sum_{n=r+1}^{N} \left(f, O\left(n^{-1}\right)\right) O\left(n^{-1}\right) \right\|_p$$

dır. (4.24) ile,

$$E_{N,1}(f) \leq M_3 \|f\|_p \tag{4.29}$$

olur, burada M_3 pozitif bir sabittir. Riesz teoreminden [40, Chapter XII, §2, Theorem 2.8],

$$E_{N,2}(f) \le M_4 \sum_{n=r+1}^{N} \left|(f,\varphi_n)\right| n^{-1} \le M_4 \left(\sum_{n=r+1}^{N} \left|(f,\varphi_n)\right|^q \right)^{\frac{1}{q}} \left(\sum_{n=r+1}^{N} n^{-p} \right)^{\frac{1}{p}} \le \le M_5 \|f\|_p \tag{4.30}$$

elde edilir, burada M_4, M_5 pozitif sayılardır ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir. Dahası,

$$\begin{aligned} E_{N,3}(f) &\le \left\| \sum_{n=r+1}^{N} \left(f, O\left(n^{-1}\right)\right)\varphi_n \right\|_2 = \left(\sum_{n=r+1}^{N} \left|\left(f, O\left(n^{-1}\right)\right)\right|^2 \right)^{\frac{1}{2}} \le \\ &\le M_6 \|f\|_1 \left(\sum_{n=r+1}^{N} n^{-2} \right)^{\frac{1}{2}} \le M_7 \|f\|_p \end{aligned} \tag{4.31}$$

ve

$$E_{N,4}(f) \le M_8 \|f\|_1 \sum_{n=r+1}^{N} n^{-2} \le M_9 \|f\|_p \tag{4.32}$$

değerlendirmeleri doğrudur, burada $M_j \left(j=\overline{6,9}\right)$ pozitif sayılardır. (4.27) eşitsizliği, (4.28)-(4.32) eşitsizliklerinin sonucudur. Böylece, $y_n(x)$ $(n=0,1,...;n\ne r)$ sisteminin $1<p<2$ için $L_p(0,1)$ uzayında tabanlığı ispatlandı.

$2<p<\infty$ ve $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ olsun. Belirtelim ki, $1<q<2$ ve $y_n(x)$ $(n=0,1,...;n\ne r)$ sistemi $L_q(0,1)$ uzayında bir tabandır; o halde bu sistemin biortogonal eşleniği olan $\psi_n(x)$ $(n=0,1,...;n\ne r)$ sistemi $L_p(0,1)$ uzayının tabanı olur. Sonuçta, $\psi_n(x)$ $(n=0,1,...;n\ne r)$ sistemi $L_q(0,1)$ uzayında tam sistem olur. Yukarıdaki yöntem kullanılarak, $\psi_n(x)$ $(n=0,1,...;n\ne r)$ sisteminin $L_q(0,1)$ uzayının bir tabanı olduğunu söyleyebiliriz. Nihayet, $y_n(x)$ $(n=0,1,...;n\ne r)$ sistemi de $L_p(0,1)$ uzayının bir tabanı olur.

Teorem 4.1.2'nin ispatı tamamlandı.

4.1.3. Teorem 4.1.3'ün İspatı

(1.1)-(1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlar sistemine göre Fourier ayrışımının düzgün yakınsaklığını araştırmak için, bu problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadelerini kesinleştirmek gerekir. Aşağıdaki yardımcı önerme bununla ilgilidir:

Lemma 4.1.3.1. n'nin yeterince büyük değerleri için aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur:

$$s_n = n\pi + \frac{(-1)^n + c_0}{dn\pi} + O\left(\frac{\delta_n}{n}\right), \tag{4.33}$$

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \frac{\sin n\pi x}{n\pi}\left[1 + \frac{1}{2n\pi}\int_0^x q(\tau)\sin 2n\pi\tau\, d\tau\right] + \\ &+ \frac{\cos n\pi x}{2(n\pi)^2}\left[2A_n x - \int_0^x q(\tau)d\tau + \int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau\, d\tau\right] + O\left(\frac{\delta_n}{n^2}\right), \end{aligned} \tag{4.34}$$

burada

$$c_0 = \frac{d}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau, \quad A_n = \frac{(-1)^n + c_0}{d}, \tag{4.35}$$

$$\delta_n = \left|\int_0^1 q(\tau)\cos 2n\pi\tau\, d\tau\right| + \frac{1}{n} \tag{4.36}$$

dır.

İspat: (4.6) eşitliği ile

$$u(x,\lambda_n) = \frac{\sin s_n x}{s_n} + O\left(s_n^{-2}\right)$$

olduğu kolayca görülür. Son eşitlik (4.12) formülüne uygulanırsa

$$\begin{aligned} u(x,\lambda_n) &= \frac{\sin s_n x}{s_n} - \frac{\cos s_n x}{2s_n^2}\int_0^x q(\tau)d\tau + \frac{\cos s_n x}{2s_n^2}\int_0^x q(\tau)\cos 2s_n\tau\, d\tau + \\ &+ \frac{\sin s_n x}{2s_n^2}\int_0^x q(\tau)\sin 2s_n\tau\, d\tau + O\left(s_n^{-3}\right) \end{aligned} \tag{4.37}$$

ifadesini buluruz.

$$\cos s_n x = \cos n\pi x + O\left(n^{-1}\right), \ \sin s_n x = \sin n\pi x + O\left(n^{-1}\right)$$

eşitliklerini kullanarak (4.37) ifadesini

$$u(x,\lambda_n)=\frac{\sin s_n x}{s_n}-\frac{\cos n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)d\tau+\frac{\cos n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau d\tau+$$
$$+\frac{\sin n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\sin 2n\pi\tau d\tau+O(n^{-3}) \tag{4.38}$$

şeklinde yazabiliriz. (4.38) ifadesinde $x=1$ yazıp (4.35) ve (4.36) eşitliklerini dikkate alırsak,

$$u(1,\lambda_n)=\frac{\sin s_n}{s_n}-\frac{(-1)^n c_0}{d(n\pi)^2}+O\left(\frac{\delta_n}{n^2}\right) \tag{4.39}$$

elde ederiz.

$s_n=n\pi+\varepsilon_n$ olsun. (4.10) ile $\varepsilon_n=O(n^{-1})$ olduğu açıktır. Böylece $\frac{\sin s_n}{s_n}=\frac{(-1)^n\varepsilon_n}{n\pi}+O(n^{-4})$ olduğu görülebilir. Bu eşitliği göz önüne alıp (4.39) ifadesini $1-d\lambda_n u(1,\lambda_n)=0$ karakteristik denkleminde yerine yazarsak

$$1-d\left[(n\pi)^2+O(1)\right]\left[\frac{(-1)^n\varepsilon_n}{n\pi}-\frac{(-1)^n c_0}{d(n\pi)^2}+O\left(\frac{\delta_n}{n^2}\right)\right]=0$$

denklemini elde ederiz. Son denklemden

$$\varepsilon_n=\frac{(-1)^n+c_0}{dn\pi}+O\left(\frac{\delta_n}{n}\right)$$

eşitliğini buluruz. Sonuçta, (4.33) formülü doğrudur.

(4.33) ile

$$\frac{\sin s_n x}{s_n}=\frac{\sin n\pi x}{n\pi}+\frac{A_n x\cos n\pi x}{(n\pi)^2}+O\left(\frac{\delta_n}{n^2}\right)$$

ifadesi elde edilebilir, burada A_n (4.35) ile tanımlıdır. Son ifadeyi (4.38) formülünde dikkate alırsak (4.34) asimptotik formülünün doğruluğunu elde ederiz.

Lemma 4.1.3.1 ispatlandı.

Şimdi teorem 4.1.3'ün ispatına dönelim. $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $u_n(x)$ $(n=0,1,...;n\neq r)$ sistemine göre Fourier serisi

$$F(x)=\sum_{n=0,n\neq r}^{\infty}(f,v_n)u_n(x) \tag{4.40}$$

şeklindedir.

$$d_n = -\frac{1}{\lambda_n \dfrac{\partial u(1,\lambda_n)}{\partial \lambda} + \dfrac{1}{d\lambda_n}}$$

olsun. O zaman

$$\overline{v_n(x)} = d_n\left(\lambda_n u_n(1-x) - \lambda_r u_r(1-x)\right) \tag{4.41}$$

dır. (4.4) ve (4.11) ile

$$d_n = (-1)^{n-1}\cdot 2 + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.42}$$

eşitliğini görmek kolaydır.

Kaydedelim ki, (4.40) serisinin düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$F_1(x) = \sum_{n=r+1}^{\infty} (f, v_n) u_n(x) \tag{4.43}$$

serisinin düzgün yakınsak olmasıdır.

$\{S_N(x)\}_{N=r+1}^{\infty}$ ile (4.43) serisinin kısmi toplamlar dizisini gösterelim. (4.41) eşitliğine göre

$$S_N(x) = S_{N,1}(x) + S_{N,2}(x)$$

olduğunu elde ederiz, burada

$$S_{N,1}(x) = \sum_{n=r+1}^{N} d_n \lambda_n \left(f, \overline{u_n(1-x)}\right) u_n(x), \tag{4.44}$$

$$S_{N,2}(x) = -\lambda_r \left(f, \overline{u_r(1-x)}\right) \sum_{n=r+1}^{N} d_n u_n(x) \tag{4.45}$$

dır.

Öncelikle, (4.44) dizisinin düzgün yakınsaklığını analiz edelim. (4.33) ve (4.34) asimptotik formüllerine göre

$$\begin{aligned} s_n u_n(x) = {} & \sin n\pi x\left[1 + \frac{1}{2n\pi}\int_0^x q(\tau)\sin 2n\pi\tau\, d\tau\right] + \frac{\cos n\pi x}{2n\pi}\Big[2A_n x - \\ & - \int_0^x q(\tau)d\tau + \int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau\, d\tau\Big] + O\left(\frac{\delta_n}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.46}$$

eşitliğini elde ederiz.

$$\alpha_n(x)=\int_0^x q(\tau)\sin 2n\pi\tau d\tau,\ \beta_n(x)=\int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau d\tau,$$
$$\gamma_n(x)=2A_n x-\int_0^x q(\tau)d\tau,\ d_n=(-1)^{n-1}\cdot 2+\frac{\tau_n}{n} \tag{4.47}$$

olduğunu varsayalım. Kaydedelim ki, $\{\alpha_n(x)\}_{n=r+1}^{\infty}$, $\{\beta_n(x)\}_{n=r+1}^{\infty}$ ve $\{\gamma_n(x)\}_{n=r+1}^{\infty}$ düzgün sınırlı fonksiyon dizileri, $\{d_n\}_{n=r+1}^{\infty}$ ve $\{\tau_n\}_{n=r+1}^{\infty}$ sınırlı sayısal dizilerdir. (4.46) ile

$$d_n\lambda_n\left(f,\overline{u_n(1-x)}\right)u_n(x)=d_n\left(f,\overline{s_n u_n(1-x)}\right)s_n u_n(x)=$$
$$=-2(f,\sin n\pi x)\sin n\pi x+B_n(x)$$

eşitliğini elde ederiz, burada

$$\begin{aligned}B_n(x)&=\frac{(-1)^n\tau_n}{n}(f,\sin n\pi x)\sin n\pi x+\\&+\frac{(-1)^n d_n}{2n\pi}\left(f,\overline{\alpha_n(1-x)}\sin n\pi x\right)\sin n\pi x+\\&+\frac{(-1)^n d_n A_n}{n\pi}\left(f,(1-x)\cos n\pi x\right)\sin n\pi x+\\&+\frac{(-1)^{n-1} d_n}{2n\pi}\left(f,\int_0^{1-x}\overline{q(\tau)}d\tau\cdot\cos n\pi x\right)\sin n\pi x+\\&+\frac{(-1)^n d_n}{2n\pi}\left(f,\overline{\beta_n(1-x)}\cos n\pi x\right)\sin n\pi x+\\&+\frac{(-1)^n d_n\alpha_n(x)}{2n\pi}(f,\sin n\pi x)\sin n\pi x+\\&+\frac{(-1)^n d_n\gamma_n(x)}{2n\pi}(f,\sin n\pi x)\cos n\pi x+\\&+\frac{(-1)^n d_n\beta_n(x)}{2n\pi}(f,\sin n\pi x)\cos n\pi x+O\left(\frac{\delta_n}{n}\right)\end{aligned} \tag{4.48}$$

dır. Böylece

$$S_{N,1}(x)=-2\sum_{n=r+1}^{N}(f,\sin n\pi x)\sin n\pi x+\sum_{n=r+1}^{N}B_n(x)$$

şeklinde yazılabilir.

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}B_N(x) \tag{4.49}$$

serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır. Gerçekten, (4.48) eşitliğinden

$$\begin{aligned}
\left|B_n(x)\right| \le \frac{C_3}{n}\Big[&\left|\left(f,\sin n\pi x\right)\right| + \left|\left(f,\overline{\alpha_n(1-x)}\sin n\pi x\right)\right| + \\
&+\left|\left(f,(1-x)\cos n\pi x\right)\right| + \left|\left(f,\int_0^{1-x}\overline{q(\tau)}\,d\tau\cdot\cos n\pi x\right)\right| + \\
&+\left|\left(f,\overline{\beta_n(1-x)}\cos n\pi x\right)\right| + \delta_n\Big] \le C_4\Big[\left|\left(f,\sin n\pi x\right)\right|^2 + \\
&+\left|\left((1-x)f(x),\cos n\pi x\right)\right|^2 + \left|\left(f(x)\int_0^{1-x}q(\tau)d\tau,\cos n\pi x\right)\right|^2 + \\
&+\left(\int_0^1\left|f(x)\alpha_n(1-x)\right|dx\right)^2 + \left(\int_0^1\left|f(x)\beta_n(1-x)\right|dx\right)^2 + \frac{\delta_n}{n}\Big]
\end{aligned} \tag{4.50}$$

değerlendirmesi yapılabilir, burada C_3 ve C_4 belirli sabitlerdir.

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\left(f,\sin n\pi x\right)\right|^2,\quad \sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\left((1-x)f(x),\cos n\pi x\right)\right|^2,$$

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\left(f(x)\int_0^{1-x}q(\tau)d\tau,\cos n\pi x\right)\right|^2,\quad \sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{\delta_n}{n}$$

nümerik serileri yakınsaktır. Öte yandan Bessel eşitsizliği ve (4.47)'den

$$\begin{aligned}
\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\alpha_n(1-x)\right|dx\right)^2 &\le \|f\|^2\sum_{n=r+1}^{\infty}\int_0^1\left|\alpha_n(1-x)\right|^2dx \le \\
&\le \|f\|^2\int_0^1\left(\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\int_0^{1-x}\overline{q(\tau)}\sin 2n\pi\tau\,d\tau\right|^2\right)dx \le \\
&\le C_5\|f\|^2\int_0^1\int_0^{1-x}\left|q(\tau)\right|^2d\tau dx \le C_6\|f\|^2\|q\|^2
\end{aligned}$$

değerlendirmesi yapılabilir, burada C_5 ve C_6 belirli sabitlerdir. Benzer biçimde,

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\beta_n(1-x)\right|dx\right)^2 \le C_7\|f\|^2\|q\|^2$$

değerlendirmesini elde edebiliriz, burada C_7 belirli bir sabittir. Sonuçta, (4.49) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Teoremin koşuluna göre

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(f,\sin n\pi x\right)\sin n\pi x$$

serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Dolayısıyla, (4.44) serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olur. $\left(f,\overline{u_r(1-x)}\right)=0$ koşulu sağlanırsa, (4.43) serisinin kısmi toplamlar dizisi $\left\{S_N(x)\right\}_{N=r+1}^{\infty}$, $\left\{S_{N,1}(x)\right\}_{N=r+1}^{\infty}$ dizisinin kendisi olur. Yani, (4.43) serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olur. Böylece, teorem 4.1.3'ün ikinci kısmı ispatlandı.

$\left(f,\overline{u_r(1-x)}\right)\neq 0$ olsun. Bu durumda, (4.45) serisinin düzgün yakınsaklığını analiz edelim. (4.5) ve (4.42) eşitliklerine göre

$$\sum_{n=r+1}^{N} d_n u_n(x) = -\frac{2}{\pi}\sum_{n=r+1}^{N}\frac{\sin n\pi(x+1)}{n}+\sum_{n=1}^{N}O\left(n^{-2}\right)$$

ifadesini elde ederiz. Belirtelim ki,

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\sin nt}{n} \tag{4.51}$$

serisi her bir $[\delta,2\pi-\delta]$ aralığında düzgün yakınsaktır, burada $0<\delta<\pi$ dir [36, Chapter I, §30, Theorem 1]. Bu yüzden,

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{\sin n\pi(x+1)}{n}$$

serisi $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığında düzgün yakınsaktır. O halde, $\left\{S_{N,2}(x)\right\}_{N=r+1}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığında düzgün yakınsak olur.

Teorem 4.1.3'ün ispatı tamamlandı.

4.2. (1.4)-(1.6) SINIR DEĞER PROBLEMİNİN ÖZDEĞERLERİNİN VE ÖZFONKSİYONLARININ BAZI SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

(1.4)-(1.6) sınır değer probleminin bu tezde elde edilen spektral özelliklerini vermeden önce, bu problemin özdeğerleri ve özfonksiyonları için daha evvel ispatlanmış asimptotik formülleri, salınım özelliklerini ve tabanlıkla bağlı özelliklerini bilmemiz gerekir.

(1.4)-(1.6) sınır değer problemi ile birlikte

$$\begin{cases} -y'' + q(x)y = \lambda y, & 0 < x < 1, \\ b_0 y(0) = d_0 y'(0), & y(1) = 0 \end{cases} \tag{4.52}$$

problemini ele alalım. Bu problemin özdeğerlerini λ_n^D $(n = 0,1,...)$ ile gösterelim ve $c_1 \neq 0$ durumunda N sayısını aşağıdaki gibi tanımlayalım [7]:

$$\lambda_{N-1}^D < -\frac{d_1}{c_1} \leq \lambda_N^D,$$

burada $\lambda_{-1}^D = -\infty$ olduğu varsayılır. O halde, (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin özdeğerleri sınırsız artan λ_n $(n = 0,1,...)$ dizisini oluşturur: $\lambda_0 < \lambda_1 < ... < \lambda_n < ...$. Dahası,

(a) $c_1 \neq 0$ ise, o zaman λ_n özdeğerine uygun $u_n(x)$ özfonksiyonunun $(0,1)$ aralığında $n \leq N$ için tam n tane, $n > N$ için tam $n-1$ tane basit sıfırı vardır.

(b) $c_1 = 0$ ise, o zaman λ_n özdeğerine uygun $u_n(x)$ özfonksiyonunun $(0,1)$ aralığında tam n tane basit sıfırı vardır [7, Theorem 3.1 ve Corollary 5.2].

Bundan başka, n'nin yeterince büyük değerleri için, aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur [7, Corollaries 3.6 ve 5.4]:

$$\lambda_n = \left[\pi(n+\upsilon)\right]^2 + O(1),$$

burada

$$\upsilon = \begin{cases} 0 & \text{eğer } c_1 = 0,\ d_0 = 0 \text{ ise;} \\ \dfrac{1}{2} & \text{eğer } c_1 \neq 0,\ d_0 = 0 \text{ ise;} \\ -\dfrac{1}{2} & \text{eğer } c_1 = 0,\ d_0 \neq 0 \text{ ise;} \\ -1 & \text{eğer } c_1 \neq 0,\ d_0 \neq 0 \text{ ise} \end{cases}$$

dır. Buradan, n'nin yeterince büyük değerleri için

$$\sqrt{\lambda_n} = \pi(n+\upsilon) + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.53}$$

olduğu açıktır.

Belirtelim ki, $n \geq 0$ ve $\lambda \in \left(\lambda_{n-1}^D, \lambda_n^D\right]$ ise, o zaman (1.4), (1.6) başlangıç değer probleminin aşikar olmayan her bir çözümünün $(0,1)$ aralığında n tane basit sıfırı vardır [7, Lemma 2.2]. Buradan ve (4.52) probleminin salınım özelliklerinden, $c_1 \neq 0$ ve $\lambda_n = -\dfrac{d_1}{c_1}$ ise, o zaman $\lambda_n = \lambda_{N+1} = \lambda_N^D = -\dfrac{d_1}{c_1}$ olur [16].

r keyfi tespit edilmiş negatif olmayan bir tamsayı olsun. O zaman, $u_n(x)$ $(n = 0,1,...;n \neq r)$ sistemi $L_2(0,1)$ uzayının koşulsuz bir tabanıdır. Ek olarak, $u_n(x)$ $(n = 0,1,...;n \neq r)$ sisteminin biortogonal eşleniği olan $v_n(x)$ $(n = 0,1,...;n \neq r)$ sisteminin elemanları aşağıdaki gibi tanımlanır [16]:

(a) $c_1 = 0$ ise, o zaman

$$v_n(x) = \frac{u_n(x) - \dfrac{u_n(1)}{u_r(1)} u_r(x)}{\|u_n\|^2 + \dfrac{a_1 u_n^2(1)}{d_1}} \tag{4.54}$$

dır.

(b) $c_1 \neq 0$ ve $\lambda_{N+1} \neq -\dfrac{d_1}{c_1}$ ise, o zaman

$$v_n(x) = \frac{u_n(x) - \dfrac{(c_1\lambda_r + d_1)u_n(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)u_r(1)} u_r(x)}{\|u_n\|^2 + \dfrac{\sigma u_n^2(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)^2}} \tag{4.55}$$

dır.

(c) $c_1 \neq 0$, $\lambda_{N+1} = -\dfrac{d_1}{c_1}$ ve $r = N+1$ ise, o zaman

$$v_n(x) = \frac{u_n(x) + \dfrac{\sigma u_n(1)}{c_1(c_1\lambda_n + d_1)u'_{N+1}(1)} u_{N+1}(x)}{\|u_n\|^2 + \dfrac{\sigma u_n^2(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)^2}}$$

dır.

(d) $c_1 \neq 0$, $\lambda_{N+1} = -\dfrac{d_1}{c_1}$ ve $r \neq N+1$ ise, o zaman $n \neq N+1$ için $v_n(x)$ elemanları (4.54) ile, $n = N+1$ için

$$v_n(x)=v_{N+1}(x)=\frac{u_n(x)+\dfrac{c_1(c_1\lambda_r+d_1)u_{N+1}{}'(1)}{\sigma u_r(1)}u_r(x)}{\|u_{N+1}\|^2+\dfrac{c_1^2u_{N+1}'^2(1)}{\sigma}}$$

ile tanımlanır.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$, (1.4) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=1,\ \varphi'(0,\lambda)=h, \tag{4.56}$$

$$\psi(0,\lambda)=0,\ \psi'(0,\lambda)=1 \tag{4.57}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar, burada h tespit edilmiş keyfi bir reel sayıdır.

Teorem 4.2.1. $\lambda_n=s_n^2$ olsun. n 'nin yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur:

(i) $c_1=0$ ve $d_0=0$ ise, o zaman

$$s_n=n\pi+\frac{A_1}{n\pi}+O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n}\right), \tag{4.58}$$

$$\begin{aligned}u_n(x)=\psi(x,\lambda_n)&=\frac{\sin n\pi x}{n\pi}+\frac{A_1x\cos n\pi x}{(n\pi)^2}-\frac{\cos n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)d\tau+\\&+\frac{\cos n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau d\tau+\\&+\frac{\sin n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\sin 2n\pi\tau d\tau+O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n^2}\right)\end{aligned} \tag{4.59}$$

dır, burada $A_1=\dfrac{d_1}{a_1}+\dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^1 q(\tau)d\tau$ ve $\delta_n^{(1)}=\left|\displaystyle\int_0^1 q(\tau)\cos 2n\pi\tau d\tau\right|+\dfrac{1}{n}$ dir.

(ii) $c_1\neq 0$ ve $d_0=0$ ise, o zaman

$$s_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi+\frac{A_2}{\left(n-\dfrac{1}{2}\right)\pi}+O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right), \tag{4.60}$$

$$
\begin{aligned}
u_n(x) &= \psi(x,\lambda_n) = \\
&= \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{A_2 x\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2} - \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{2\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2}\int_0^x q(\tau)d\tau + \\
&+ \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{2\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2}\int_0^x q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau d\tau + \\
&+ \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{2\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2}\int_0^x q(\tau)\sin(2n-1)\pi\tau d\tau + O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n^2}\right)
\end{aligned}
\tag{4.61}
$$

dır, burada $A_2 = -\frac{a_1}{c_1} + \frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau$ ve $\delta_n^{(2)} = \left|\int_0^1 q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau d\tau\right| + \frac{1}{n}$ dir.

(iii) $c_1 = 0$ ve $d_0 \neq 0$ ise, o zaman

$$
s_n = \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi + \frac{A_3}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} + O\left(\frac{\delta_n^{(3)}}{n}\right), \tag{4.62}
$$

$$
\begin{aligned}
u_n(x) &= \varphi(x,\lambda_n) = \\
&= \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x + \frac{h - A_3 x + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x + \\
&+ \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau d\tau - \\
&- \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\sin(2n-1)\pi\tau d\tau + O\left(\frac{\delta_n^{(3)}}{n}\right)
\end{aligned}
\tag{4.63}
$$

dır, burada $h = \frac{b_0}{d_0}$, $A_3 = h + \frac{d_1}{a_1} + \frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau$ ve $\delta_n^{(3)} = \left|\int_0^1 q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau d\tau\right| + \frac{1}{n}$ dır.

(iv) $c_1 \neq 0$ ve $d_0 \neq 0$ ise, o zaman

$$s_n = (n-1)\pi + \frac{A_4}{(n-1)\pi} + O\left(\frac{\delta_n^{(4)}}{n}\right), \tag{4.64}$$

$$\begin{aligned} u_n(x) &= \varphi(x, \lambda_n) = \\ &= \cos(n-1)\pi x + \frac{h - A_4 x + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau}{(n-1)\pi}\sin(n-1)\pi x + \\ &+ \frac{\sin(n-1)\pi x}{2(n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\cos 2(n-1)\pi\tau d\tau - \\ &- \frac{\cos(n-1)\pi x}{2(n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\sin 2(n-1)\pi\tau d\tau + O\left(\frac{\delta_n^{(4)}}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.65}$$

dır, burada $h = \frac{b_0}{d_0}$, $A_4 = h - \frac{a_1}{c_1} + \frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau$ ve $\delta_n^{(4)} = \left|\int_0^1 q(\tau)\cos 2(n-1)\pi\tau d\tau\right| + \frac{1}{n}$ dır.

Teorem 4.2.2. r tespit edilmiş keyfi negatif olmayan bir tamsayı ve $f \in C[0,1]$ olsun.

(i) $c_1 = 0$ ve $d_0 = 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $\left\{\sqrt{2}\sin n\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre Fourier ayrışımı düzgün yakınsak ise, o zaman bu fonksiyon $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığında $u_n(x)$ $(n = 0,1,...; n \neq r)$ sistemine göre düzgün yakınsak Fourier serisine ayrıştırılabilir. Bu ayrışımın $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $(f, u_r) = 0$ olmasıdır.

(ii) $c_1 \neq 0$ ve $d_0 = 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $\left\{\sqrt{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre Fourier ayrışımı düzgün yakınsak ise, o zaman bu fonksiyon aynı aralıkta $u_n(x)$ $(n = 0,1,...; n \neq r)$ sistemine göre düzgün yakınsak Fourier serisine ayrıştırılabilir.

(iii) $c_1 = 0$ ve $d_0 \neq 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $\left\{\sqrt{2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre Fourier ayrışımı düzgün yakınsak ise, o zaman bu fonksiyon $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığında $u_n(x)$ $(n=0,1,...;n\neq r)$ sistemine göre düzgün yakınsak Fourier serisine ayrıştırılabilir. Bu ayrışımın $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $(f,u_r)=0$ olmasıdır.

(iv) $c_1\neq 0$ ve $d_0\neq 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $\left\{\sqrt{2}\cos(n-1)\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre Fourier ayrışımı düzgün yakınsak ise, o zaman bu fonksiyon aynı aralıkta $u_n(x)$ $(n=0,1,...;n\neq r)$ sistemine göre düzgün yakınsak Fourier serisine ayrıştırılabilir.

4.2.1. Teorem 4.2.1'in İspatı

(i) $c_1=0$ ve $d_0=0$ olsun. $\lambda=s^2$ ve $s=\sigma+it$ ise, o zaman (4.57) başlangıç koşulları ve (4.6), (4.12) eşitliklerinden

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+\frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\sin s(x-\tau)d\tau, \tag{4.66}$$

$$\psi(x,\lambda)=\frac{\sin sx}{s}+O\left(e^{|t|x}|s|^{-2}\right) \tag{4.67}$$

ifadeleri yazılabilir, burada $O\left(e^{|t|x}|s|^{-2}\right)$ fonksiyonu her bir kaydedilmiş $x\in[0,1]$ için s değişkeninin tam fonksiyonudur ve $0\leq x\leq 1$ için x'e göre düzgündür [1, s.6].

$c_1=0$ ve $d_0=0$ olduğundan (4.53) eşitliğini

$$s_n=\sqrt{\lambda_n}=n\pi+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.68}$$

biçiminde yazabiliriz. (4.66)-(4.68) eşitliklerinden aşağıdaki ifadeyi elde ederiz:

$$\begin{aligned}\psi(x,\lambda_n)=&\frac{\sin s_n x}{s_n}-\frac{\cos s_n x}{2s_n^{\,2}}\int_0^x q(\tau)d\tau+\\&+\frac{\cos s_n x}{2s_n^{\,2}}\int_0^x q(\tau)\cos 2s_n\tau d\tau+\frac{\sin s_n x}{2s_n^{\,2}}\int_0^x q(\tau)\sin 2s_n\tau d\tau+O\left(n^{-3}\right).\end{aligned} \tag{4.69}$$

$$\cos s_n x=\cos n\pi x+O\left(n^{-1}\right),\ \sin s_n x=\sin n\pi x+O\left(n^{-1}\right)$$

eşitliklerini (4.69) ifadesinde uygulayarak

$$\psi(x,\lambda_n)=\frac{\sin s_n x}{s_n}-\frac{\cos n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)d\tau+ \\ +\frac{\cos n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau d\tau+\frac{\sin n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\sin 2n\pi\tau d\tau+O\left(n^{-3}\right) \tag{4.70}$$

formülünü yazabiliriz. Ek olarak, (4.66) eşitliğinden x'e göre türev alırsak (4.68) eşitliğini de uygularsak

$$\psi'(x,\lambda_n)=\cos s_n x+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.71}$$

ifadesini elde ederiz.

Belirtelim ki, $c_1=0$ ve $d_0=0$ olduğundan (1.5), (1.6) sınır koşulları

$$y(0)=0,\ (a_1\lambda+b_1)y(1)=d_1y'(1)$$

biçimine dönüşür. Dolayısıyla, (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$(a_1\lambda_n+b_1)\psi(1,\lambda_n)-d_1\psi'(1,\lambda_n)=0 \tag{4.72}$$

denklemini sağlar. (4.70) ve (4.71) eşitlikleri kullanılarak

$$\psi(1,\lambda_n)=\frac{\sin s_n}{s_n}-\frac{(-1)^n}{2(n\pi)^2}\int_0^1 q(\tau)d\tau+O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n^2}\right), \tag{4.73}$$

$$\psi'(1,\lambda_n)=(-1)^n+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.74}$$

ifadelerini elde ederiz.

$s_n=n\pi+\varepsilon_n$ olsun.

$$\frac{\sin s_n}{s_n}=\frac{(-1)^n\varepsilon_n}{n\pi}+O\left(n^{-4}\right) \tag{4.75}$$

eşitliğini görmek kolaydır. (4.73)-(4.75) eşitliklerini, (4.72) denkleminde yerine yazarsak

$$\frac{\varepsilon_n}{n\pi}-\frac{1}{2(n\pi)^2}\int_0^1 q(\tau)d\tau-\frac{d_1}{a_1(n\pi)^2}+O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n^2}\right)=0$$

denklemini elde ederiz. Bu denklemden (4.58) formülünün sağlandığı kolayca görülebilir.

(4.58) formülü ile

$$\frac{\sin s_n x}{s_n}=\frac{\sin n\pi x}{n\pi}+\frac{A_1 x\cos n\pi x}{(n\pi)^2}+O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n^2}\right)$$

ifadesi elde edilir. Bu ifade ve (4.70) eşitliğinden (4.59) asimptotik formülünün doğruluğu görülür.

İlk durum ispatlandı.

(ii) $c_1 \neq 0$ ve $d_0 = 0$ olsun. Bu durumda (4.53) eşitliği

$$s_n = \sqrt{\lambda_n} = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.76}$$

şeklinde yazılabilir. (4.66), (4.67) ve (4.76) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\psi\left(x,\lambda_n\right) = \frac{\sin s_n x}{s_n} - \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{2\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2}\int_0^x q(\tau)d\tau +\\ +\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{2\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2}\int_0^x q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau d\tau +\\ +\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{2\left(\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi\right)^2}\int_0^x q(\tau)\sin(2n-1)\pi\tau d\tau + O\left(n^{-3}\right)\end{aligned} \tag{4.77}$$

olur. Öte yandan, (4.66) eşitliğinden x 'e göre türev alırsak

$$\begin{aligned}\psi'(x,\lambda) = \cos sx + \frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(\tau)d\tau - \frac{\sin sx}{2s}\int_0^x q(\tau)\cos 2s\tau d\tau +\\ +\frac{\cos sx}{2s}\int_0^x q(\tau)\sin 2s\tau d\tau + O\left(s^{-2}\right)\end{aligned} \tag{4.78}$$

elde ederiz.

Kaydedelim ki, $c_1 \neq 0$ ve $d_0 = 0$ olduğundan (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\left(a_1\lambda_n + b_1\right)\psi\left(1,\lambda_n\right) - \left(c_1\lambda_n + d_1\right)\psi'\left(1,\lambda_n\right) = 0 \tag{4.79}$$

denklemini sağlar.

$s_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_n$ olsun. O zaman, (4.77) ve (4.78) eşitliklerinden

$$\psi(1,\lambda_n)=\frac{(-1)^{n-1}}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}+O\left(n^{-2}\right),$$

$$\psi'(1,\lambda_n)=(-1)^n\varepsilon_n+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}\int_0^1 q(\tau)d\tau+O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right)$$

eşitliklerini elde ederiz. Bu eşitlikleri (4.79) denkleminde yerine yazarak

$$(-1)^{n-1}\varepsilon_n+\frac{(-1)^n}{(2n-1)\pi}\int_0^1 q(\tau)d\tau+\frac{a_1(-1)^{n-1}}{c_1\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}+O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right)=0$$

denklemini elde ederiz. Son denklemden (4.60) formülünün doğruluğu görülür.

(4.60) formülünü (4.77) eşitliğinin sağındaki ilk terime uygularsak (4.61) formülünü elde ederiz.

İkinci durum ispatlandı.

(iii) $c_1=0$ ve $d_0\neq 0$ olsun. $\lambda=s^2$ ve $s=\sigma+it$ ise, o zaman (4.56) başlangıç koşulundan

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\sin s(x-\tau)d\tau, \tag{4.80}$$

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O\left(e^{|t|x}|s|^{-1}\right) \tag{4.81}$$

ifadeleri yazılabilir, burada $O\left(e^{|t|x}|s|^{-1}\right)$ fonksiyonu her bir kaydedilmiş $x\in[0,1]$ için s değişkeninin tam fonksiyonudur ve $0\leq x\leq 1$ için x 'e göre düzgündür [1, s.6].

$c_1=0$ ve $d_0\neq 0$ olduğundan (4.53) eşitliği

$$s_n=\sqrt{\lambda_n}=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.82}$$

şeklinde olur. (4.80)-(4.82) ifadeleri kullanılarak

$$\varphi(x,\lambda_n)=\cos s_n x+\frac{h\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)d\tau+$$
$$+\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau\, d\tau- \tag{4.83}$$
$$-\frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\sin(2n-1)\pi\tau\, d\tau+O\left(n^{-2}\right)$$

olarak yazılabilir. Ayrıca, (4.80) eşitliğinden x'e göre türev alıp (4.82) eşitliğini uygularsak

$$\varphi'(x,\lambda_n)=-s_n\sin s_n x+O(1) \tag{4.84}$$

elde ederiz.

Kaydedelim ki, $c_1=0$ ve $d_0\neq 0$ olduğundan (1.5), (1.6) sınır koşulları

$$y'(0)=hy(0),\ (a_1\lambda+b_1)y(1)=d_1y'(1)$$

şekline dönüşür, burada $h=\frac{b_0}{d_0}$ dır. Böylece, (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$(a_1\lambda_n+b_1)\varphi(1,\lambda_n)-d_1\varphi'(1,\lambda_n)=0 \tag{4.85}$$

denklemini sağlar. (4.83) ve (4.84) formülleri kullanılarak

$$\varphi(1,\lambda_n)=\cos s_n+\frac{2h(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}+\frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}\int_0^1 q(\tau)d\tau+O\left(\frac{\delta_n^{(3)}}{n}\right),$$

$$\varphi'(1,\lambda_n)=(-1)^n\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi+O(1)$$

eşitlikleri elde edilir.

$s_n=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi+\varepsilon_n$ olsun. O halde, son iki eşitlik (4.85) denkleminde yerine yazılırsa

$$\varepsilon_n-\frac{2h}{(2n-1)\pi}-\frac{1}{(2n-1)\pi}\int_0^1 q(\tau)d\tau-\frac{d_1}{a_1\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}+O\left(\frac{\delta_n^{(3)}}{n}\right)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden (4.62) eşitliği görülebilir.

(4.62) formülünü (4.83) eşitliğinin sağ tarafındaki ilk terime uygularsak (4.63) formülünü elde edebiliriz.

Üçüncü durum ispatlandı.

(iv) $c_1 \neq 0$ ve $d_0 \neq 0$ olsun. Bu durumda (4.53) eşitliği

$$s_n = \sqrt{\lambda_n} = (n-1)\pi + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.86}$$

şeklinde yazılabilir. (4.80), (4.81) ve (4.86) eşitliklerinden

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda_n) = \cos s_n x + \frac{h\sin(n-1)\pi x}{(n-1)\pi} + \frac{\sin(n-1)\pi x}{2(n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)d\tau + \\ + \frac{\sin(n-1)\pi x}{2(n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\cos 2(n-1)\pi\tau d\tau - \\ - \frac{\cos(n-1)\pi x}{2(n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\sin 2(n-1)\pi\tau d\tau + O\left(n^{-2}\right)\end{aligned} \tag{4.87}$$

olduğu görülür. Öte yandan, (4.80) ifadesi x'e göre türev alırsak ve (4.81), (4.86) eşitliklerini uygularsak

$$\begin{aligned}\varphi'(x,\lambda_n) = -s_n \sin s_n x + h\cos s_n x + \frac{\cos s_n x}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau + \\ + \frac{\cos s_n x}{2}\int_0^1 q(\tau)\cos 2s_n\tau d\tau + \frac{\sin s_n x}{2}\int_0^1 q(\tau)\sin 2s_n\tau d\tau + O\left(n^{-1}\right)\end{aligned} \tag{4.88}$$

ifadesini elde ederiz.

Belirtelim ki, $c_1 \neq 0$ ve $d_0 \neq 0$ durumunda (1.4)-(1.6) sınır değer probleminin özdeğerleri için

$$(a_1\lambda_n + b_1)\varphi(1,\lambda_n) - (c_1\lambda_n + d_1)\varphi'(1,\lambda_n) = 0 \tag{4.89}$$

denklemi sağlanır. $s_n = (n-1)\pi + \varepsilon_n$ olsun. Böylece, (4.87) ve (4.88) kullanılarak

$$\varphi(1,\lambda_n) = (-1)^{n-1} + O\left(n^{-1}\right),$$

$$\varphi'(1,\lambda_n) = (-1)^n (n-1)\pi\varepsilon_n + (-1)^{n-1}\left(h + \frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau\right) + O\left(\delta_n^{(4)}\right)$$

eşitlikleri elde edilir. Son iki eşitliği (4.89) denkleminde yerine yazarsak

$$(n-1)\pi\varepsilon_n + \frac{a_1}{c_1} - h - \frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau + O\left(\delta_n^{(4)}\right) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemden (4.65) asimptotik formülünün doğruluğu görülür.

(4.65) formülünü (4.87) eşitliğinin sağındaki ilk ifadede yerine yazarsak (4.66) asimptotik formülünü doğrudan elde ederiz.

Dördüncü durum ispatlandı.

Teorem 4.2.1'in ispatı tamamlandı.

4.2.2. Teorem 4.2.2'nin İspatı

Teorem 4.2.2'ispatında teorem 4.1.3'ün ispatında izlenilen yöntemler kullanılacaktır.

(i) $c_1 = 0$ ve $d_0 = 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $u_n(x)$ $(n = 0,1,...;n \neq r)$ sistemine göre Fourier serisi

$$F(x) = \sum_{n=0,n\neq r}^{\infty} (f,v_n)u_n(x) \tag{4.90}$$

olsun, burada $v_n(x)$ $(n = 0,1,...;n \neq r)$ sisteminin elemanları (4.54) ile tanımlıdır.

$$d_n^{(1)} = \left(\frac{\|u_n\|^2}{u_n(1)} + \frac{a_1 u_n(1)}{d_1} \right)^{-1} \tag{4.91}$$

olsun. O zaman, (4.54) eşitliğine göre

$$v_n(x) = d_n^{(1)} \left(\frac{u_n(x)}{u_n(1)} - \frac{u_r(x)}{u_r(1)} \right) \tag{4.92}$$

elde ederiz. (4.59) formülünden

$$u_n(1) = \frac{(-1)^n d_1}{a_1 (n\pi)^2} + O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n^2} \right), \tag{4.93}$$

$$\|u_n\|^2 = \frac{1}{2(n\pi)^2} + O\left(n^{-3}\right) \tag{4.94}$$

eşitliklerini elde ederiz. (4.93) ve (4.94) kullanılarak, (4.91) eşitliğini

$$d_n^{(1)} = \frac{2(-1)^n d_1}{a_1} + O\left(\delta_n^{(1)}\right) \tag{4.95}$$

şeklinde yazabiliriz.

Kaydedelim ki, (4.90) serisinin $\left[0,1\right]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$F_1(x)=\sum_{n=r+1}^{\infty}(f,v_n)u_n(x) \tag{4.96}$$

serisinin bu aralıkta düzgün yakınsak olmasıdır.

$\left\{S_m(x)\right\}_{m=r+1}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi (4.96) serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. (4.92) eşitliği kullanılarak

$$S_m(x)=S_{m,1}(x)+S_{m,2}(x)$$

olduğu görülür, burada

$$S_{m,1}(x)=\sum_{n=r+1}^{m}\frac{d_n^{(1)}}{u_n(1)}(f,u_n)u_n(x), \tag{4.97}$$

$$S_{m,2}(x)=-\frac{(f,u_r)}{u_r(1)}\sum_{n=r+1}^{m}d_n^{(1)}u_n(x) \tag{4.98}$$

dır.

Öncelikle (4.97) dizisinin düzgün yakınsaklığını analiz edelim. (4.93) ve (4.95) eşitliklerinden

$$\frac{d_n^{(1)}}{u_n(1)}(f,u_n)u_n(x)=2(f,n\pi u_n)n\pi u_n(x)+(f,n\pi u_n)O\left(\delta_n^{(1)}\right) \tag{4.99}$$

elde edilir. (4.59) formülü ile

$$\begin{aligned} n\pi u_n(x)=\psi(x,\lambda_n)=\sin n\pi x+\frac{A_1 x\cos n\pi x}{n\pi}-\frac{\cos n\pi x}{2n\pi}\int_0^x q(\tau)d\tau+ \\ +\frac{\cos n\pi x}{2n\pi}\int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau d\tau+ \\ +\frac{\sin n\pi x}{2n\pi}\int_0^x q(\tau)\sin 2n\pi\tau d\tau+O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.100}$$

olur. (4.100) formülünden, (4.99) eşitliğini

$$\frac{d_n^{(1)}}{u_n(1)}(f,u_n)u_n(x)=2(f,\sin n\pi x)\sin n\pi x+B_n^{(1)}(x) \tag{4.101}$$

şeklinde yazabiliriz, burada

$$
\begin{aligned}
& B_n^{(1)}(x)= \\
& =\frac{2\alpha_1(x)}{n\pi}(f,\sin n\pi x)\cos n\pi x+\frac{\alpha_n^{(1)}(x)}{n\pi}(f,\sin n\pi x)\cos n\pi x+ \\
& +\frac{\beta_n^{(1)}(x)}{n\pi}(f,\sin n\pi x)\sin n\pi x+\frac{2}{n\pi}(\alpha_1(x)f(x),\cos n\pi x)\sin n\pi x+ \\
& +\frac{1}{n\pi}\left(f,\alpha_n^{(1)}(x)\cos n\pi x\right)\sin n\pi x+\frac{1}{n\pi}\left(f,\beta_n^{(1)}(x)\sin n\pi x\right)\sin n\pi x+ \\
& +(f,\sin n\pi x)O\left(\delta_n^{(1)}\right)+O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n}\right),
\end{aligned}
\tag{4.102}
$$

$$
\begin{gathered}
\alpha_1(x)=A_1x-\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau,\ \alpha_n^{(1)}(x)=\int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau d\tau, \\
\beta_n^{(1)}(x)=\int_0^x q(\tau)\sin 2n\pi\tau d\tau
\end{gathered}
\tag{4.103}
$$

dır.

Belirtelim ki, $\left\{\delta_n^{(1)}\right\}_{n=r+1}^{\infty}\in l_2$, $\alpha_1(x)\in C[0,1]$ ve $\left\{\alpha_n^{(1)}(x)\right\}_{n=r+1}^{\infty}$, $\left\{\beta_n^{(1)}(x)\right\}_{n=r+1}^{\infty}$ fonksiyonel dizileri düzgün sınırlıdır. Sonuçta,

$$
S_{m,1}(x)=\sum_{n=r+1}^{m}\left(f,\sqrt{2}\sin n\pi x\right)\sqrt{2}\sin n\pi x+\sum_{n=r+1}^{m}B_n^{(1)}(x)
$$

eşitliği sağlanır.

$$
\sum_{n=r+1}^{\infty}B_n^{(1)}(x)
\tag{4.104}
$$

serisi $[0,1]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsaktır. Gerçekten, (4.102) eşitliği ile,

$$
\begin{aligned}
& \left|B_n^{(1)}(x)\right|\le \\
& \le\frac{\text{const.}}{n}\left\{\left|(\alpha_1(x)f(x),\cos n\pi x)\right|+\left|\left(f,\alpha_n^{(1)}(x)\cos n\pi x\right)\right|+\right. \\
& \left.+\left|\left(f,\beta_n^{(1)}(x)\sin n\pi x\right)\right|+\left|(f,\sin n\pi x)\right|+\delta_n^{(1)}\right\}+ \\
& +\text{const.}\left|(f,\sin n\pi x)\right|\delta_n^{(1)}\le\text{const.}\left\{\left|(\alpha_1(x)f(x),\cos n\pi x)\right|^2+\right. \\
& \left.+\left(\int_0^1\left|f(x)\alpha_n^{(1)}(x)\right|dx\right)^2+\left(\int_0^1\left|f(x)\beta_n^{(1)}(x)\right|dx\right)^2+\left|(f,\sin n\pi x)\right|^2+\frac{\delta_n^{(1)}}{n}\right\}+ \\
& +\text{const.}\left|(f,\sin n\pi x)\right|\delta_n^{(1)}
\end{aligned}
\tag{4.105}
$$

değerlendirmesi doğrudur.

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\left(f,\sin n\pi x\right)\right|^2,\quad \sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\left(\alpha_1(x)f(x),\cos n\pi x\right)\right|^2,$$

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{\delta_n^{(1)}}{n},\quad \sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\left(f,\sin n\pi x\right)\right|\delta_n^{(1)}$$

sayısal serileri yakınsaktır. (4.103) tanımlamalarını göz önüne alarak, Bessel eşitsizliğine göre

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\alpha_n^{(1)}(x)\right|dx\right)^2\le\|f\|^2\sum_{n=r+1}^{\infty}\int_0^1\left|\alpha_n^{(1)}(x)\right|^2dx\le$$

$$\le\|f\|^2\int_0^1\left[\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau\, d\tau\right|^2\right]dx\le$$

$$\le\text{const.}\|f\|^2\int_0^1\int_0^x\left|q(\tau)\right|^2d\tau dx\le\text{const.}\|f\|^2\|q\|^2$$

değerlendirmesini elde ederiz. Benzer biçimde,

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\beta_n^{(1)}(x)\right|dx\right)^2\le\text{const.}\|f\|^2\|q\|^2$$

olur. Böylece, (4.104) serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Teoremin koşuluna göre

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(f,\sqrt{2}\sin n\pi x\right)\sqrt{2}\sin n\pi x$$

serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan, $\left\{S_{m,1}(x)\right\}_{m=r+1}^{\infty}$ dizisinin bu aralıkta düzgün yakınsak olduğuna hükmedilir. $(f,u_r)=0$ ise, o zaman (4.96) serisinin $\left\{S_m(x)\right\}_{m=r+1}^{\infty}$ kısmi toplamlar dizisi, $\left\{S_{m,1}(x)\right\}_{m=r+1}^{\infty}$ fonksiyon dizisine eşit olur. Sonuçta, teorem 4.2.2'nin ikinci kısmı ispatlandı.

$(f,u_r)\ne 0$ olsun. Şimdi, (4.98) serisinin düzgün yakınsaklığını analiz edelim. (4.59) ve (4.93) eşitliklerini kullanarak

$$\sum_{n=r+1}^{m}d_n^{(1)}u_n(x)=\frac{2d_1}{a_1\pi}\sum_{n=r+1}^{m}\frac{\sin n\pi(1+x)}{n}+\sum_{n=r+1}^{m}O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n}\right)$$

elde ederiz. (4.51) serisi, $0<\delta<\pi$ için $[\delta,2\pi-\delta]$ aralığında düzgün yakınsak olduğundan

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} \frac{\sin n\pi(1+x)}{n}$$

serisi $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığında düzgün yakınsak olur. Yani, $\{S_{m,2}(x)\}_{m=r+1}^{\infty}$ fonksiyon dizisi $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığında düzgün yakınsak olur.

İlk durum ispatlandı.

(ii) $c_1 \neq 0$ ve $d_0 = 0$ olsun. $\lambda_{N+1} \neq -\frac{d_1}{c_1}$ olduğunu varsayalım. $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $u_n(x)$ $(n=0,1,...;n\neq r)$ sistemine göre Fourier serisi

$$T(x) = \sum_{n=0,n\neq r}^{\infty} (f,v_n)u_n(x) \tag{4.106}$$

olsun, burada $v_n(x)$ $(n=0,1,...;n\neq r)$ sisteminin elemanları (4.55) ile tanımlıdır.

Belirtelim ki, (4.106) serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$T_1(x) = \sum_{n=r+1}^{\infty} (f,v_n)u_n(x) \tag{4.107}$$

serisinin bu aralıkta düzgün yakınsak olmasıdır.

$\{T_m(x)\}_{m=r+1}^{\infty}$ fonksiyon dizisi, (4.107) serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. (4.55) eşitliğini kullanarak

$$T_m(x) = T_{m,1}(x) + T_{m,2}(x)$$

eşitliğini elde ederiz, burada

$$T_{m,1}(x) = \sum_{n=r+1}^{m} d_n^{(2)} (f,u_n(x)) u_n(x), \tag{4.108}$$

$$T_{m,2}(x) = -\frac{(c_1\lambda_r + d_1)(f,u_r(x))}{u_r(1)} \sum_{n=r+1}^{m} \frac{d_n^{(2)} u_n(1)}{c_1\lambda_n + d_1} u_n(x), \tag{4.109}$$

$$d_n^{(2)} = \left(\|u_n\|^2 + \frac{\sigma u_n^2(1)}{(c_1\lambda_n + d_1)^2} \right)^{-1} \tag{4.110}$$

dır. (4.60), (4.61) ve (4.110) kullanılarak

$$d_n^{(2)} = 2\left(n - \frac{1}{2}\right)^2 + O(n) \tag{4.111}$$

eşitliğini elde ederiz. (4.60), (4.61) ve (4.111) eşitliklerinden

$$\frac{d_n^{(2)} u_n(1)}{c_1 \lambda_n + d_1} u_n(x) = O\left(n^{-2}\right)$$

değerlendirmesini buluruz. Yani, (4.109) serisi $[0,1]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Şimdi (4.108) dizisinin düzgün yakınsaklığını araştıralım. (4.61) ve (4.110) eşitlikleri kullanılarak

$$d_n^{(2)}\left(f, u_n(x)\right) u_n(x) = \left(f, \sqrt{2}\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right)\sqrt{2}\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x + B_n^{(2)}(x)$$

olduğu elde edilir, burada

$$\begin{aligned} B_n^{(2)}(x) = {} & \left(f, \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right) O\left(n^{-1}\right) + \\ & + \left(\alpha_2(x) f(x), \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right) O\left(n^{-1}\right) + \\ & + \left(f, \alpha_n^{(2)}(x)\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right) O\left(n^{-1}\right) + \\ & + \left(f, \beta_n^{(2)}(x)\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right) O\left(n^{-1}\right) + O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right), \end{aligned}$$

$$\alpha_2(x) = A_2 x - \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau,\ \alpha_n^{(2)}(x) = \int_0^x q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau\,d\tau,$$

$$\beta_n^{(2)}(x) = \int_0^x q(\tau)\sin(2n-1)\pi\tau\,d\tau$$

dır. Bu eşitliklerden

$$\begin{aligned} \left|B_n^{(2)}(x)\right| \le \text{const.}\Bigg\{ & \left|\left(f, \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right|^2 + \left|\left(\alpha_2(x) f(x), \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right|^2 + \\ & + \left(\int_0^1 \left|f(x)\alpha_n^{(2)}(x)\right| dx\right)^2 + \left(\int_0^1 \left|f(x)\beta_n^{(2)}(x)\right| dx\right)^2 + \frac{\delta_n^{(2)}}{n}\Bigg\} \end{aligned}$$

değerlendirmelerini yapabiliriz.

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\left(f,\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right|^2,\ \sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\left(\alpha_2(x)f(x),\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right|^2,\ \sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{\delta_n^{(2)}}{n}$$

sayısal serileri yakınsaktır. Ayrıca, Bessel eşitsizliği kullanılarak

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\alpha_n^{(2)}(x)\right|dx\right)^2 \le \text{const.}\|f\|^2\|q\|^2,\ \sum_{n=r+1}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\beta_n^{(2)}(x)\right|dx\right)^2 \le \text{const.}\|f\|^2\|q\|^2$$

değerlendirmelerin doğru olduğu görülür. Yani,

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}B_n^{(2)}(x)$$

serisi $[0,1]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Öte yandan, teoremin koşuluna göre

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(f,\sqrt{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\sqrt{2}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x$$

serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olduğunu hatırlarsak, sonuçta (4.108) dizisinin bu aralıkta düzgün yakınsak olduğunu söyleyebiliriz.

$\lambda_{N+1}=-\dfrac{d_1}{c_1}$ olduğunda ispat tamamen benzerdir.

İkinci durum ispatlandı.

(iii) $c_1=0$ ve $d_0\neq 0$ olsun. $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $u_n(x)$ $(n=0,1,...;n\neq r)$ sistemine göre Fourier serisi

$$G(x)=\sum_{n=0,n\neq r}^{\infty}(f,v_n)u_n(x) \tag{4.112}$$

gibidir, burada $v_n(x)$ $(n=0,1,...;n\neq r)$ sistemi (4.54) ile tanımlıdır.

Belirtelim ki, (4.112) serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$G_1(x)=\sum_{n=r+1}^{\infty}(f,v_n)u_n(x) \tag{4.113}$$

serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olmasıdır.

$\{G_m(x)\}_{m=r+1}^{\infty}$ dizisi (4.113) serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. (4.54) eşitliğini kullanarak

$$G_m(x) = G_{m,1}(x) + G_{m,2}(x)$$

elde ederiz, burada

$$G_{m,1}(x) = \sum_{n=r+1}^{m} \frac{d_n^{(3)}}{u_n(1)} \left(f, u_n(x)\right) u_n(x),$$

$$G_{m,2}(x) = -\frac{\left(f, u_r(x)\right)}{u_r(1)} \sum_{n=r+1}^{m} d_n^{(3)} u_n(x),$$

$$d_n^{(3)} = \left(\frac{\|u_n\|^2}{u_n(1)} + \frac{a_1 u_n(1)}{d_1} \right)^{-1}$$

dır. (4.63) formülünü kullanarak

$$d_n^{(3)} = \frac{4(-1)^n d_1}{a_1(2n-1)\pi} + O\left(n^{-2}\right) \tag{4.114}$$

buluruz. Buradan ve (4.63) formülünden

$$d_n^{(3)} u_n(x) = \frac{4d_1}{a_1\pi} \cdot \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi(1+x)}{2n-1} + O\left(n^{-2}\right)$$

ifadesini elde ederiz.

$$\left| \sum_{n=r+1}^{m} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi(1+x) \right| = \frac{\left|\cos r\pi(1+x) - \cos m\pi(1+x)\right|}{2\sin\frac{\pi(1+x)}{2}} \leq$$

$$\leq \frac{1}{\sin\frac{\pi(1+x)}{2}} \leq \frac{1}{\sin\frac{\pi(1+b)}{2}},\ 0 \leq x \leq b < 1$$

olduğundan $\left(f, u_r\right) \neq 0$ ise, o zaman $\left\{G_{m,2}(x)\right\}_{m=r+1}^{\infty}$ dizisi $[0,b]\,(0 < b < 1)$ aralığında düzgün yakınsak olur [36, Introductory Material, Abel’s Lemma].

(4.63) ve (4.114) eşitliklerini kullanarak

$$\frac{d_n^{(3)}}{u_n(1)}\left(f, u_n(x)\right) u_n(x) = \left(f, \sqrt{2}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x\right)\sqrt{2}\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x + B_n^{(3)}(x),$$

elde ederiz, burada

$$B_n^{(2)}(x) = \left(f, \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x \right) O\left(\delta_n^{(3)}\right) +$$
$$+ \left(\alpha_3(x) f(x), \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x \right) O\left(\delta_n^{(3)}\right) +$$
$$+ \left(f, \alpha_n^{(3)}(x) \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x \right) O\left(\delta_n^{(3)}\right) +$$
$$+ \left(f, \beta_n^{(3)}(x) \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x \right) O\left(\delta_n^{(3)}\right) + O\left(\frac{\delta_n^{(3)}}{n}\right),$$

$$\alpha_3(x) = h - A_3 x - \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau,\ \alpha_n^{(3)}(x) = \int_0^x q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau d\tau,$$
$$\beta_n^{(3)}(x) = \int_0^x q(\tau)\sin(2n-1)\pi\tau d\tau$$

dır. Demek ki,

$$\left|B_n^{(3)}(x)\right| \le \text{const.}\left\{ \left|\left(f, \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x \right)\right|^2 + \left|\left(\alpha_3(x) f(x), \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x \right)\right|^2 + \right.$$
$$\left. + \left(\int_0^1 \left| f(x)\alpha_n^{(3)}(x) \right| dx \right)^2 + \left(\int_0^1 \left| f(x)\beta_n^{(3)}(x) \right| dx \right)^2 + \left(\delta_n^{(3)}\right)^2 \right\}$$

değerlendirmesi doğrudur. O halde,

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} B_n^{(3)}(x)$$

serisi mutlak ve düzgün yakınsak olur. Sonuçta, $\left\{G_{m,1}(x)\right\}_{m=r+1}^{\infty}$ dizisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Böylece, $(f, u_r) = 0$ olduğunda (4.113) serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olur.

Üçüncü durum ispatlandı.

(iv) $c_1 \neq 0$ ve $d_0 \neq 0$ olsun. $\lambda_{N+1} \neq -\dfrac{d_1}{c_1}$ olduğunu varsayalım. $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $u_n(x)$ $(n = 0,1,...; n \neq r)$ sistemine göre Fourier serisi

$$H(x) = \sum_{n=0, n\neq r}^{\infty} (f, v_n) u_n(x) \tag{4.115}$$

şeklindedir, burada $v_n(x)\ (n=0,1,...;n\neq r)$ sisteminin elemanları (4.55) ile tanımlıdır.

Belirtelim ki, (4.115) serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$H_1(x)=\sum_{n=r+1}^{\infty}(f,v_n)u_n(x) \tag{4.116}$$

serisinin bu aralıkta düzgün yakınsak olmasıdır.

$\{H_m(x)\}_{m=r+1}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi, (4.116) serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. (4.55) eşitliğini kullanarak

$$H_m(x)=H_{m,1}(x)+H_{m,2}(x)$$

eşitliğini elde ederiz, burada

$$H_{m,1}(x)=\sum_{n=r+1}^{m}d_n^{(4)}(f,u_n(x))u_n(x), \tag{4.117}$$

$$H_{m,2}(x)=-\frac{(c_1\lambda_r+d_1)(f,u_r(x))}{u_r(1)}\sum_{n=r+1}^{m}\frac{d_n^{(4)}u_n(1)}{c_1\lambda_n+d_1}u_n(x), \tag{4.118}$$

$$d_n^{(4)}=\left(\|u_n\|^2+\frac{\sigma u_n^2(1)}{(c_1\lambda_n+d_1)^2}\right)^{-1} \tag{4.119}$$

dır. (4.64), (4.65) ve (4.119) kullanılarak

$$d_n^{(4)}=2+O(n^{-1}), \tag{4.120}$$

$$\frac{d_n^{(4)}u_n(1)}{c_1\lambda_n+d_1}u_n(x)=O(n^{-2})$$

elde ederiz. Dolayısıyla, (4.118) serisi $[0,1]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Şimdi (4.117) dizisinin düzgün yakınsaklığını araştıralım. (4.64) ve (4.120) eşitlikleri kullanılarak

$$d_n^{(4)}(f,u_n(x))u_n(x)=\left(f,\sqrt{2}\cos(n-1)\pi x\right)\sqrt{2}\cos(n-1)\pi x+B_n^{(4)}(x)$$

olduğu elde edilir, burada

$$B_n^{(4)}(x) = \left(f, \cos(n-1)\pi x\right) O\left(n^{-1}\right) +$$
$$+\left(\alpha_4(x) f(x), \sin(n-1)\pi x\right) O\left(n^{-1}\right) +$$
$$+\left(f, \alpha_n^{(4)}(x) \sin(n-1)\pi x\right) O\left(n^{-1}\right) +$$
$$+\left(f, \beta_n^{(4)}(x) \cos(n-1)\pi x\right) O\left(n^{-1}\right) + O\left(\frac{\delta_n^{(4)}}{n}\right),$$

$$\alpha_4(x) = h - A_4 x + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau,\ \alpha_n^{(4)}(x) = \int_0^x q(\tau)\cos 2(n-1)\pi\tau d\tau,$$
$$\beta_n^{(4)}(x) = \int_0^x q(\tau)\sin 2(n-1)\pi\tau d\tau$$

dır. Bu eşitliklerden

$$\sum_{n=r+1}^{\infty} B_n^{(4)}(x)$$

serisinin $[0,1]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsak olduğu görülür.

Sonuçta, teoremin koşuluna göre (4.117) dizisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olduğu elde edilir.

$\lambda_{N+1} = -\dfrac{d_1}{c_1}$ olduğunda ispat tamamen benzerdir.

Dördüncü durum ispatlandı.

Teorem 4.2.2'nin ispatı tamamlandı.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu bölümde, tez problemlerinde ele alınan sonuçlar özetlenecek, bu konu ile ilgili başka nelerin yapılabileceğine dair öneriler verilecektir.

5.1. SONUÇLAR

Bu tezde, (1.1)-(1.3) sınır değer problemi için aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

(i) Problemin sonlu yığılma noktalarına sahip olmayan sayılabilir sayıda özdeğerinin varlığı gösterilmiş, özdeğerlerin ve uygun özfonksiyonların asimptotik ifadeleri elde edilmiş ve bu ifadeler kesinleştirilmiştir.

(ii) Problemin seçilmiş özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ uzayında minimalliği gösterilmiş ve tabanlığı ispatlanmıştır, bu tabanın $p=2$ için koşulsuz olduğu elde edilmiştir.

(iii) Sürekli fonksiyonların, $[0,1]$ ve $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralıklarında problemin seçilmiş özfonksiyonlar sistemine göre Fourier ayrışımlarının düzgün yakınsaklık şartları incelenmiştir.

(1.4)-(1.6) sınır değer problemi için de aşağıdaki sonuçlara ulaşılmıştır:

(i) Problemin özdeğerlerinin ve uygun özfonksiyonlarının asimptotik formülleri kesinleştirilmiştir.

(ii) Sürekli fonksiyonların, $[0,1]$ ve $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralıklarında problemin seçilmiş özfonksiyonlar sistemine göre Fourier ayrışımlarının düzgün yakınsaklık şartları incelenmiştir.

Bu sonuçlar Bulgular ve Tartışma bölümünde verilmiştir. Özelliklerin ispatlanması için gerekli tanımlar, lemmalar ve teoremler Materyal ve Yöntem başlığı altında verilmiştir.

5.2. ÖNERİLER

Tezde, (1.1)-(1.3) ve (1.4)-(1.6) sınır değer problemlerinin spektral özellikleri, bu problemlerin özdeğerlerinin basit olduğu durumda incelenmiştir. Daha açık bir ifade ile, tezde araştırılan problemlerin kök fonksiyonlar sistemi yalnızca özfonksiyonlardan oluşur. O halde,

(i) (1.1)-(1.3) sınır değer probleminin ikinci sınır koşulundaki d sayısının, $d \in D$ olduğunda bazı özdeğerleri katlı olacaktır. Bu durumda kök fonksiyonlar sisteminde özfonksiyonların haricinde ek fonksiyonlar da olacaktır.

(ii) (1.4)-(1.6) sınır değer problemi için $\sigma = a_1 d_1 - b_1 c_1 < 0$ olduğunda, problemin kök fonksiyonlar sisteminde ek fonksiyonlar da mevcuttur.

Şu halde, kök fonksiyonlar sisteminde ek fonksiyonların da olduğu durumda spektral ayrışımların düzgün yakınsaklığı incelenebilir.

(iii) Tez problemlerinde yalnızca sürekli fonksiyonların spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklığı incelenmiştir; fonksiyonunların dahil olduğu sınıflar değiştiğinde ayrışımların yakınsaklığına dair koşullar incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Levitan, B.M. and Sargsyan, I.S. “Sturm – Liouville and Dirac Operators”, Kluwer Academic Publishers, London, 350 s., (1991).

[2] Naimark, M.A. “Linear Differential Operators” 2nd ed., Nauka, Moskow, (1969) (in Russian); English Trans. of 1st ed., Parts I,II, Ungar, New York, 129 s., (1967), (1968).

[3] Fulton, C.T. “Two point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions”, Proc. Roy. Soc. Endinburg Sect. A., 77: 293-308, (1977).

[4] Hinton, D.B. “An expansion theorem for an eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the baundary condition”, Quart. J. Math. Oxford, Ser.(2), 30(2): 33-42, (1979).

[5] Walter, J. “Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition”, Math. Z., Bd. 133(4): 301-312, (1973).

[6] Aliyev, Y.N. “On the basis properties of Sturm-Liouville problems with decreasing affine boundary conditions”, Proc. Of IMM of NAS of Azerbaijan, 24: 35-52, (2006).

[7] Binding, P.A. Browne, P.J. and Seddighi, K. “Sturm-Liouville problems with eigenparameter depent boundary conditions”, Proc. Edinburgh Math. Soc. (2), 37(1): 57-72, (1993).

[8] Binding, P.A., Browne, P.J., Code, W.J. and Watson, B.A. “Transformations of Sturm-Liouville problems with decreasing affine boundary conditions”, Proc. Edinburgh Math. Soc., 47:533-552, (2004).

[9] Kapustin N. Yu. and Moiseev E. I. “The basis property in Lp of the systems of eigenfunctions corresponding to two problems with a spectral parameter in the boundary condition”, Diff. Equations, 36(10): 1498-1501, (2000).

[10] Kapustin, N.Y. and Moiseev, E.I. “On the singularities of the root space of one spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition”, Dokl. Akad. Nauk, 385(1):20-24 (in Russian), (2002), English trans. Doklady Mathematics, 66(1): 14-18, (2002).

[11] Kerimov, N.B. and Allakhverdiyev, T.I. "On a baundary value problem I", Differen. Uravn., 29(1):54-60 (in Russian), (1993), Trans. in Differential Equations 29(1): 45-50, (1993).

[12] Kerimov, N.B. and Allakhverdiyev, T.I. "On a baundary value problem II", Differen. Uravn., 29(6):952-960 (in Russian), (1993), Trans. in Differential Equations, 29(6): 814-821, (1993).

[13] Kerimov, N.B. and Mamedov, K.R. "On one boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions", Siberian Math. J., 40(2): 325-335, (1999).

[14] Kerimov, N.B. "A boundary value problem for the Dirac system with a spectral parameter in the boundary conditions", Diff. Equations, 38(2):164-174, (2002), Trans.from Diff. Uravneniya , 38(2): 155-164 (2002).

[15] Kerimov, N.B.and Mukhtarov, F.S. "On the oscillation properties and minimality of a system of root functions of a boundary value problem", Trans. Acad. Sci. Azerb. Ser. Phys.-Tech. Math. Sci., 23(1): 109-118, (2003).

[16] Kerimov N. B. and Mirzoev V. S. "On the basis properties of one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition", Siberian Math. J., 44(5): 813-816, (2003).

[17] Kerimov, N.B. and Poladov, R.G. "On basisity in $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ of the system of eigenfunctions of one boundary value problem I", Proc. of Institue of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan, 22: 53-64, (2005).

[18] Kerimov, N.B. and Poladov, R.G. "On basisity in $L_p(0,1)$ $(1<p<\infty)$ of the system of eigenfunctions of one boundary value problem II", Proc. of Institue of Math. and Mech. of NAS of Azerbaijan, 23: 65-76, (2005).

[19] Kerimov, N.B. and Aliyev, Y.N. "The basis property in L_p of the boundary value problem rationally dependent on the eigenparameter", Studia Math., 174(2): 201-212, (2006).

[20] Kerimov, N.B. and Poladov, R.G. "Basis properties of the system of eigenfunctions in the Sturm-Liouville problem with a spectral parameter in the boundary conditions", Doklady Mathematics, 85(1): 8-13, (2012).

[21] Marchenkov, D.B. "Basis property in $L_p(0,1)(1<p<\infty)$ of the system of eigenfunctions corresponding to a problem with a spectral parameter in the boundary condition.", Diff. Equations, 42(6): 905-908, (2006).

[22] Hazanee A., Lesnic, D., Ismailov, M.I. and Kerimov, N. B. "An inverse time dependent source problem for the heat equation with a non-classical boundary condition", App. Math. Mod., DOI:10.16/j.apm.2015.01.058, (2015).

[23] Kerimov, N.B. and Ismailov, M.I. "Direct and inverse problems for the heat equation with a dynamic type boundary condition", IMA Journal of App. Math., DOI:10.1093/imamat/hxv005, (2015).

[24] Gulyaev D. A., "On the uniform convergence of spectral expansions for a spectral problem with boundary conditions of the third kind one of which contains the spectral parameter", Differential Equations, 47(10): 1503-1507, (2011).

[25] Gulyaev D. A., "On the uniform convergence in W_2^m of spectral expansions for a spectral problem with boundary conditions of the third kind one of which contains the spectral parameter", Differential Equations, 48(10): 1450-1453, (2012).

[26] Kapustin N. Yu. and Moiseev E. I., "Convergence of spectral expansions for functions of the Hölder Class for two problems with a spectral parameter in the boundary condition", Differential Equations, 36(8): 1182-1188, (2000).

[27] Kapustin N. Yu. and Moiseev E. I., "A remark on the convergence problem for spectral expansions corresponding to a classical problem with spectral parameter in the boundary condition", Differential Equations, 37(12): 1677-1683, (2001).

[28] Kapustin N. Yu., "On the uniform convergence of the Fourier Series for a spectral problem with squared spectral parameter in a boundary condition", Differential Equations, 46(10): 1504-1507, (2010).

[29] Kapustin N. Yu., "On the uniform convergence in C^1 of Fourier Series for a spectral problem with squared spectral parameter in a boundary condition", Differential Equations, 47(10): 1394-1399, (2011).

[30] Kapustin N. Yu., "On the spectral problem arising in the solution of a mixed problem for the heat equation with a mixed derivative in the boundary conditions", Differential Equations, 48(5): 694-699, (2012).

[31] Marchenkov D.B., "On the convergence of spectral expansions of functions for problems with a spectral parameter in a boundary condition", Differential Equations, 41(10): 1496-1500, (2005).

[32] Royden, H.L. "Real Analysis" The Macmillan Company, New York, 348 s., (1968).

[33] Gohberg, I.C. and Krein, M.G. "Introduction to The Theory of Linear Nonselfadjoint Operators", American Math. Soc., Providence, Rhode Island 02904, 378 s., (1969).

[34] Singer, I. "Bases in Banach Spaces I", Springer-Verlag Berlin, Heidelberg, New York, 688 s., (1970).

[35] Amann H. and Esher J., "Analysis I", Birkhauser Verlag, Berlin, 426s., (2005).

[36] Bari N.K., "A Treatise on Trigonometric Series, Vol. I", Macmillan, New York, 553 s., (1964).

[37] Evgrafov M.A., "Analytic Function" [in Russian], Nauka, Moskow (1965); trans. W.B. Saunders Comp., Philadelphia and London, 336 s., (1966).

[38] Bari N.K., "A Treatise on Trigonometric Series, Vol. II", Macmillan, New York, 505 s., (1964).

[39] Kashin B.S. and Saakyan A.A., "Orthogonal Series", Transl. Math. Monogr., 75, American Math. Soc., Providence, 378 s., (1989).

[40] Zygmund A., "Trigonometric Series, II, 2nd ed.", Cambridge University Press, New York, 331 s., (1959).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Emir Ali MARİS

Doğum Tarihi: 18/10/1982

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Lise / Üniversite	Yıl
Lise	Elektronik Bölümü	Karşıyaka EML	1996-1999
Lisans	Matematik Bölümü	Mersin Üniversitesi	2001-2005
Yüksek Lisans	Matematik Bölümü	Mersin Üniversitesi	2005-2008

Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Öğretim Görevlisi	Teknik Bilimler Meslek Yüksekokulu	2008-devam

ESERLER

1. Kerimov, N.B. ve Maris, E.A. "Sınır koşulu spektral parametre içeren bir sınır değer probleminin kök fonksiyonlarına göre ayrışımların bazı özellikleri", Ankara Matematik Günleri Özet Kitapçığı-AMG 9, Ankara, p.69, (2014).

2. Kerimov, N.B. and Maris, E.A. "On the uniform convergence of the Fourier Series for one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition", Proceeding Book of Int. Conf. on Recent Advances in Pure and App. Math.-ICRAPAM 2014, Antalya, p.157, (2014).

3. Kerimov, N.B. and Maris, E.A."On the basis properties and convergence of expansions in terms of eigenfunctions for a spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition", Proc. NAS of Azerbaijan, 40, Sp. Issue: 245-258, (2014).

4. Kerimov, N.B. and Maris, E.A. "On the uniform convergence of the Fourier Series for one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition", Math. Meth. in the App. Sci., DOI: 10.1002/mma.3640, (2015).