SEYREK CESÀRO MATRİSLERİ VE ÖZELLİKLERİ

ALİ ARPACIOĞLU

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
MAYIS – 2016

SEYREK CESÀRO MATRİSLERİ VE ÖZELLİKLERİ

ALİ ARPACIOĞLU

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ

MERSİN
MAYIS – 2016

Ali ARPACIOĞLU tarafından Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ danışmanlığında hazırlanan "Seyrek Cesàro Matrisleri ve Özellikleri" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN ....

Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ ....

Yrd. Doç. Dr. Cem KOŞAR ....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27./.06./2016 tarih ve 2016.674../..24...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

T.C.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

SEYREK CESÀRO MATRİSLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Ali ARPACIOĞLU

ÖZ

Bu çalışmada, ıraksak dizilerin hangi koşullar altında Cesàro yakınsak bir uzamaya sahip olduğu ve hangi şartlar altında Cesàro yakınsak bir uzamaya sahip olmadığı incelenmiş ve bu konuda yapılan çalışmalarla ilgili örnekler verilmiştir. Ayrıca Seyrek Cesàro Matrisi tanımlanmış ve bilinen bazı önemli toplanabilme metotlarının hangi koşullar altında Seyrek Cesàro Matrisi olduğu incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Serilerin seyrelmesi, Dizilerin uzaması, Cesàro yakınsaklık, Riesz ortalaması.

Danışman: Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

DILUTED CESÀRO MATRICES AND THEIR PROPERTIES

Ali ARPACIOGLU

ABSTRACT

In this study, we analyzed and presented examples concerning under which conditions divergent sequences could have a convergent elongation and under which conditions divergent sequences would not have a convergent elongation. Also, Diluted Cesàro Matrix has been defined and we analyzed under which conditions certain important methods of summabilty would be Diluted Cesàro Matrix.

Keywords: Dilution of series, Elongation of seqeunces, Cesàro convergence, Riesz means.

Advisor: Assist. Prof. Dr. Tuncay TUNC, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Çalışmam sırasında hem bilimsel hem de manevî olarak destek olan; insanî, değerleri ile de örnek edindiğim, yanında çalışmaktan onur duyduğum; ayrıca tecrübelerinden yararlanırken göstermiş olduğu hoşgörü ve sabırdan dolayı değerli tez danışmanım Yrd. Doç. Dr. Tuncay TUNÇ'a,

Lisans ve yüksek lisans eğitimim boyunca bilgi ve tecrübelerini benden esirgemeyen, başta Mersin Üniversitesi Matematik Bölümü öğretim üyelerinden Prof. Dr. Nazım KERİMOV'a ve bölüm öğretim üyelerine,

Yüksek Lisans eğitimim boyunca işlerim konusunda bana yardımcı olan başta Mersin Üniversitesi Şehir ve Bölge Planlama Bölüm Başkanı Yrd. Doç. Dr. Yasemin SARIKAYA LEVENT'e, Mersin Üniversitesi Mimarlık Fakülte Sekreteri N. Nihal GÜROL'a, oda arkadaşım Zeynep MİKE'ye ve Mersin Üniversitesi Mimarlık Fakültesi akademik ve idari personeline,

Mersin Üniversitesi Matematik Bölümü doktora öğrencisi Ersin ŞİMŞEK'e,

Son olarak, maddi ve manevi her zaman bana destek olan, bugünlere gelmemde büyük fedakârlıklar gösteren aileme teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

Sayfa

SİMGELER VE KISALTMALAR DİZİNİ

$\mathbb{N}$	: Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{N}_0$	: $\mathbb{N}\cup\{0\}$
$\mathbb{R}$	: Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	: Kompleks sayılar kümesi
C_1	: Birinci mertebeden Cesàro toplanabilme
C_1x	: x dizisinin C_1 ortalamasıyla oluşan dizi
$\lim_{C_1} x$	: x dizisinin C_1 ortalamasının limiti
$\tilde{x}$	: x dizisinin bir uzaması
ω	: Tüm dizilerin kümesi (uzayı)
c	: Yakınsak diziler kümesi
c_0	: Sıfıra yakınsak dizilerin kümesi
ℓ_∞	: Sınırlı diziler kümesi
$\lim x_n$	: $\lim\limits_{n\to\infty} x_n$
$A=(a_{nm})$	: *A* sonsuz matrisi
$\|A\|$	: *A* matrisinin normu
$\lim_A x$	: x dizisinin *A*-dönüşümü altındaki limiti
$Z_{1/2}$	: Zweier dönüşümü
(R,p)	: Riesz dönüşümü

$(x_n)_{n=0}^{\infty}$	: (x_n) dizisi
$(A)\sum_{n=0}^{\infty} x_n$	: $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ serisinin A-toplamı
SCM_N	: N üzerinde Seyrek Cesàro Matrisi
SCM	: Seyrek Cesàro Matrisi
$DSCM_N$	: N üzerinde Düzgün Seyrek Cesàro Matrisi
DSCM	: Düzgün Seyrek Cesàro Matrisi
■	: İspat tamamlandı

1. GİRİŞ

Verilen bir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

serisinin terimleri arasına belli sayıda sıfırların eklenmesiyle oluşan yeni seriye seyreltilmiş seri denir. Dikkat edilirse, seyrelmiş serinin kısmi toplamlar dizisi orijinal serinin kısmi toplamlar dizisinin bir uzamasıdır, yani $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ orijinal serinin kısmi toplamlar dizisi ise seyrelmiş serinin kısmi toplamlar dizisi $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisinin terimlerinin belli sayıda tekrarlanmasıyla oluşur. Yakınsak olan bir serinin seyrelmesi (bir dizinin uzaması) o serinin toplamını (o dizinin limitini) değiştirmez. Ancak toplanabilme metotları için bu durum geçerli değildir. Yakınsak olmayan, sınırlı bir dizinin uzatılmasından elde edilen yeni dizinin hangi şartlar altında, hangi sayılara Cesàro toplanabilir olduğu geçmiş dönemlerde birçok matematikçinin inceleme konusu olmuştur. Verilen bir serinin karakterini onun kısmi toplamlar dizisi belirlediğinden aynı durum serilerin seyrelmesi için de geçerlidir. Ayrıca benzer çalışmalar regüler matris metotları için de ele alınmış; hangi matris dönüşümlerin seyrelme özelliğine sahip olduğu incelenmiştir.

Bu çalışmada, yukarıda bahsi geçen tüm sonuçlar derlenmiş, önemli sonuçlar için düz ve ters örnekler verilmiştir. Bu veriler tezin 'Bulgular ve Tartışma' bölümünün ilk üç kısmında yer almıştır.

Kuvvet serileri ve Faber serileri gibi bazı fonksiyon serilerinin yakınsaklık bölgeleri dışında yakınsak olan bir alt dizisinin varlığının, yani üstyakınsaklığının bu serilerin seyrelmesinin Cesàro toplanabilmesi ile ilişkisi son yıllarda ilgi odağı haline gelmiştir. Cesàro matrisleri yerine farklı regüler matrisler alınarak daha genel sonuçların elde edilmesi neticesinde, doğal olarak bu sonuçların ne tür regüler matrislere genişletilebileceği merak konusu olmuştur. Bu bağlamda Seyrek Cesàro Matrisleri tanıtılmış ve bilinen önemli toplanabilme yöntemlerinden bazılarının hangi koşullar altında Seyrek Cesàro Matrisi olduğu 'Bulgular ve Tartışma' bölümünün son kısmında incelenmiştir.

Bu çalışmanın ikinci bölümünde konuyla ilgili kaynak araştırmasının yapıldığı 'Kaynak Araştırması', üçüncü bölümünde gerekli tanım ve notasyonların yer aldığı 'Materyal ve Yöntem', dördüncü bölümde ise elde edilen bulguların derlendiği ve örneklendirildiği 'Bulgular ve Tartışma', beşinci ve son bölümde yapılan çalışmayla ilgili çıkartılan sonuçların ve önerilerin bulunduğu 'Sonuç ve Öneriler' kısmı yer almaktadır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

$\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ kompleks ya da reel terimli bir seri ve $s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$ ise onun *n-inci* kısmi toplamı olsun. Bu serinin terimleri arasına belli sayıda sıfırlar serpiştirerek elde edilen yeni

$$a_0 + 0 + \cdots + 0 + a_1 + 0 + \cdots + 0 + a_2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} a_k'$$

serisine seyrelmiş seri denir. Bir seri seyreldiğinde serinin toplamında ya da yakınsaklık karakterinde bir değişim olmaz. Ancak ıraksak serilerin seyrelmesi Cesàro toplanabilirliğinin karakterinde değişimlere neden olabilir. Bu sebeptendir ki ıraksak seriler yüz yıllardır matematikçilerin ilgi alanı içerisindedir. Seyrelmiş seri kavramı ilk olarak 1911 yılında Chapman [1] tarafından tanımlanmıştır. Ayrıca, Chapman, seriler seyreldiğinde toplanabilme özelliklerinin nasıl etkilediğini de incelemiştir. Hardy [2] ise 1908 yılında ıraksak seriler seyreldiğinde Cesàro toplanabilirliğinin değiştiğine dair bir örnek vermiştir. Benzer çalışmalar yirminci yüzyılın başlarında Bromwich [3] tarafından da ele alınmıştır. 1967 yılında Vlasenko [4] verilen bir serinin kısmi toplamlar dizisinin bir limit noktasına, yine verilen bir regüler matris dönüşümü altında, bu limit noktasına toplanabilen seyrelmişinin bulunabilmesine dair bir kriter vermiştir. Aynı yıl içinde Vlasenko [5] verilen kompleks seriye karşılık bir regüler matrisin varlığını ispatladı öyle ki serinin, kısmi toplamlar dizisinin limit noktalarının konveks kabuğundaki herhangi bir noktaya bu dönüşüm altında toplanabilen seyrelmişi bulunabilir.

Seyrelmiş serinin kısmi toplamlar dizisinin, orijinal serinin kısmi toplamlar dizisinin terimlerinin belli sayıda tekrar edilmesinden elde edildiği görülür. Bu durum uzamış dizi kavramının ortaya çıkma nedenidir. Yakınsak bir dizi ile onun herhangi bir uzamışının limiti aynıdır. Ancak bu durum dizilerin toplanabilmesinde farklıdır. Hardy, Cesàro toplanabilir bir dizinin Cesàro limiti ile bu dizinin uzamışının Cesàro limitinin farklı olabileceğine dair bir örnek vermiştir [6]. 1969 yılında Gaier [7] ıraksak dizilerin hangi koşullar altında bir matris dönüşümü altında, dizinin bir limit noktasına yakınsak olan dizi uzatmasına sahip olduğunu incelemiştir. 1973 yılında Dawson [8] dizilerin uzamasının toplanabilmesi ile dizinin yakınsaklığı arasında bir bağıntıyı incelemiştir. Dawson sonraki yıllarda dizilerin uzaması ile ilişkili bazı problemlerle de ilgilenmiştir [9], [10]. 1974 yılında Isbell [11] ve 1975 yılında ise Drobot [12] verilen ıraksak dizilerin hangi koşullar altında ve hangi noktalara Cesàro toplanabilen dizi uzatmasına sahip olduğuna dair kriterler vermiştir. Keagy ise 1983 yılındaki [13] ve 1987 yılındaki [14] çalışmasında Gaier ve Dawson'un sonuçlarını geliştirmeye çalışmıştır. 2001 yılında Patterson [15] Dawson'un çalışmalarının benzerini çift dizilere uygulamıştır.

Serilerin seyrelmesinin ve dizilerin uzamasının bazı kompleks fonksiyon serilerinin üstyakınsaklığı ile yakından bir ilişkisi vardır. 1970 yılında V. Drobot [16] şu sonucu ispatlamıştır: *yakınsaklık yarıçapı 1 olan bir kuvvet serisinin yakınsaklık bölgesi dışında yakınsak olan bir alt dizisinin varlığı için gerek ve yeter koşulun serinin kısmi toplamlar dizisinin bir uzamasının Cesàro yakınsak olmasıdır.* Benzer bir sonucu farklı bir ispat yöntemiyle 2011 yılında T. L. Gharibyan ve W. Luh [17] da elde etmiştir. Aynı problemi yakınsaklık yarıçapı sıfır olan kuvvet serileri için de 2011 yılında W. Luh ve A. Stepanyan [18] incelemiştir. Kuvvet serileri yerine daha genel olan Faber serilerini alan W. Luh ve M. Niess [19], sonuçlarını 2013 yılında yayımlamışlardır. Ayrıca yukarıda verilen teoremde Cesàro matrisi yerine Riesz matrisi alarak farklı bir genelleştirilme de 2014 yılında Tunç ve Küçükaslan [20] tarafından yapılmıştır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümün ilk kısmında, matematiksel analizde sıkça kullanılan diziler, seriler ve kuvvet serileri tanımlanıp onların bazı temel özellikleri üzerinde durulacaktır. İkinci kısmında, genel matris dönüşümleri, özel olarak da Zweier matris dönüşümleri, Cesàro matris dönüşümleri ve Riesz matris dönüşümleri tanımlanıp bazı önemli özellikleri verilecektir.

3.1. REEL SAYI DİZİ VE SERİLERİ

3.1.1. Diziler

Doğal sayılar kümesi üzerinde tanımlı herhangi bir fonksiyona *dizi* adı verilir. Diziler değer kümesine göre adlandırılır. Örneğin, değer kümesi reel sayılar olan dizi reel terimli dizi, kompleks sayılar olan dizi kompleks terimli dizi olarak adlandırılır. Bir dizi $\left(x_n\right)_{n=0}^{\infty}$ ya da kısaca $\left(x_n\right)$ biçiminde gösterilebilir. x_n ifadesine $\left(x_n\right)$ dizisinin *n. terimi* ya da *genel terimi* denir. Bu tezde aksi belirtilmedikçe ele alınan diziler reel terimli diziler olacaktır. Tüm reel dizilerin oluşturduğu aile ω ile gösterilir:

$$\omega=\left\{\, x=\left(x_n\right): \ \ \forall n\in\mathbb{N}_0\,,\ x_n\in\mathbb{R}\,\right\}.$$

α ve β birer reel sayı olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n\le\alpha$ ise $\left(x_n\right)$ dizisine *üstten sınırlı;* her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n\ge\beta$ ise $\left(x_n\right)$ dizisine *alttan sınırlıdır* denir. α sayısına bu dizinin bir *üst sınırı*; β sayısına ise bir *alt sınırı* adı verilir. Bir dizi hem alttan hem de üstten sınırlı ise bu diziye *sınırlı dizi* denir. Sınırlı diziler şu şekilde de tanımlanabilir: Bir $M\ge 0$ sayısı, her $n\in\mathbb{N}$ için $\left|x_n\right|\le M$ olacak şekilde bulunabiliyorsa $\left(x_n\right)$ dizisine *sınırlıdır* denir. Tüm sınırlı diziler ailesi ℓ_∞ ile gösterilir:

$$\ell_\infty=\left\{\, x=\left(x_n\right)\in\omega\ :\ \left(x_n\right)\text{ sınırlı dizidir}\,\right\}.$$

(x_n) dizisinin en küçük üst sınırına *supremum* adı verilir ve $\sup_n x_n$ ile gösterilir. Eğer (x_n) dizisi üstten sınırlı değilse $\sup_n x_n = +\infty$ kabul edilir. Benzer biçimde (x_n) dizisinin en büyük alt sınırına *infimum* adı verilir ve $\inf_n x_n$ ile gösterilir. Eğer (x_n) dizisi alttan sınırlı değilse $\inf_n x_n = -\infty$ kabul edilir. Supremum ve infimum tanımlarına göre verilen (x_n) dizisi için aşağıdaki önermeler doğrudur.

3.1.1.1. Önerme.

A. $\sup_n x_n = \beta$ olması için gerek ve yeter koşul

i. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \le \beta$

ii. Her bir $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $x_N > \beta - \varepsilon$ sağlanır.

B. $\inf_n x_n = \alpha$ olması için gerek ve yeter koşul

i. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \ge \alpha$

ii. Her bir $\varepsilon > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $x_N < \alpha + \varepsilon$ sağlanır.

Özel olarak $\sup_n a_n = +\infty$ olması için gerek ve yeter koşul her $M > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $x_N > M$ sağlanmasıdır. Benzer şekilde $\inf_n x_n = -\infty$ olması için gerek ve yeter koşul her $M > 0$ için bir $N \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $x_N < -M$ sağlanmasıdır.

3.1.1.2. Tanım. Bir (x_n) dizisi verilsin.

i. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \le x_{n+1}$ ise (x_n) dizisine *monoton artan*,

ii. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n < x_{n+1}$ ise (x_n) dizisine *(kesin) artan*,

iii. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \ge x_{n+1}$ ise (x_n) dizisine *monoton azalan*,

iv. Her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n > x_{n+1}$ ise (x_n) dizisine *(kesin) azalan*

dizi denir.

3.1.1.3. Tanım. (x_n) dizisi ve bir a reel sayısı verilsin. Keyfi bir $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n \geq N$ için $|x_n - a| < \varepsilon$ olacak şekilde bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (x_n) *dizisi* a *'ya yakınsaktır* denir ve bu durum $\lim_{n\to\infty} x_n = a$, $x_n \to a$ $(n \to \infty)$ ya da kısaca $\lim x_n = a$ ile gösterilir. Yakınsak olmayan dizilere *ıraksaktır* denir. Tüm yakınsak dizilerin ailesi c ile, 0'a yakınsak tüm dizilerin ailesi ise c_0 ile gösterilir:

$$c = \left\{ x = (x_n) \in \omega : \ (x_n) \text{ yakınsak} \right\};$$

$$c_0 = \left\{ x = (x_n) \in \omega \ : \ \lim_{n\to\infty} x_n = 0 \right\}.$$

Buradan $c_0 \subset c \subset \ell_\infty \subset \omega$ olduğu açıktır.

3.1.1.4. Teorem.

i. Monoton artan bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul dizinin üstten sınırlı olmasıdır.

ii. Monoton azalan bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul dizinin alttan sınırlı olmasıdır [21].

3.1.1.5. Tanım. (x_n) dizisi verildiğinde $k_0 < k_1 < \cdots < k_n < \cdots$ artan doğal sayı dizisi olmak üzere (x_{k_n}) dizisine, (x_n) *dizisinin bir alt dizisi* denir.

3.1.1.6. Teorem. (x_n) dizisinin a'ya yakınsak olması için gerek ve yeter koşul (x_n) dizisinin her alt dizisinin a'ya yakınsak olmasıdır [21].

3.1.1.7. Tanım. (x_n) dizisinin alt dizilerinin limitlerinin kümesini E ile gösterelim. $\sup E$ sayısına (x_n) dizisinin *üst limiti* ve $\inf E$ sayısına ise (x_n) dizisinin *alt limiti* denir. (x_n) dizisinin üst limiti $\limsup x_n$ ya da $\overline{\lim}\, x_n$, alt limiti ise $\liminf x_n$ ya da $\underline{\lim}\, x_n$ ile gösterilir.

Bir dizi yakınsak ise limiti tektir. Dolayısıyla eğer bir dizinin iki farklı limiti varsa, yani farklı noktalara yakınsayan iki alt diziye sahip ise bu dizi ıraksaktır.

Böylece bir dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul o dizinin alt ve üst limitinin birbirine eşit olmasıdır. Ayrıca yakınsak her dizi sınırlıdır. Ancak sınırlı bir dizi yakınsak olmak zorunda değildir. [21].

3.1.1.8. Teorem. (x_n) ve (y_n) yakınsak dizileri için $\lim x_n = a$ ve $\lim y_n = b$ olsun. Bu durumda aşağıdaki ifadeler doğrudur [21]:

i. Her $c \in \mathbb{R}$ için (cx_n) yakınsaktır ve $\lim cx_n = ca$;

ii. $(x_n)+(y_n)=(x_n+y_n)$ yakınsaktır ve $\lim(x_n+y_n)=a+b$;

iii. $(x_n)(y_n)=(x_n y_n)$ yakınsaktır ve $\lim(x_n y_n)=ab$;

iv. Her $n \in \mathbb{N}$ için $y_n \neq 0$ ve $b \neq 0$ ise (x_n/y_n) yakınsaktır ve $\lim(x_n/y_n)=a/b$.

Bir dizinin ıraksak olması aşağıdaki gibi tanımlanabilir:

3.1.1.9. Tanım. (x_n) bir dizi ve $a \in \mathbb{R}$ olsun.

i. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve her $N \in \mathbb{N}$ için bir $n \geq N$ doğal sayısı, $|x_n - a| \geq \varepsilon$ olacak şekilde varsa bu dizi a'ya ıraksaktır. Bir dizi her reel sayıya ıraksak ise bu diziye *ıraksaktır* denir.

ii. Keyfi bir $K > 0$ sayısı verildiğinde bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki her $n \geq N$ için $x_n > K$ ise bu dizi $+\infty$'a ıraksaktır denir ve $\lim x_n = +\infty$ ile gösterilir.

iii. Keyfi bir $K > 0$ sayısı verildiğinde bir $N \in \mathbb{N}$ bulunabilir öyle ki her $n \geq N$ için $x_n < -K$ ise bu dizi $-\infty$'a ıraksaktır denir ve $\lim x_n = -\infty$ ile gösterilir.

3.1.1.10. Tanım. Keyfi $\varepsilon > 0$ sayısı verildiğinde her $n, m \geq N$ için $|x_n - x_m| \leq \varepsilon$ olacak şekilde ε sayısına bağlı bir $N = N(\varepsilon)$ doğal sayısı varsa (x_n) dizisine *Cauchy dizisi* denir.

3.1.1.11. Teorem (*Cauchy Yakınsaklık Kriteri*). Bir reel dizinin yakınsak olması için gerek ve yeter koşul bu dizinin bir Cauchy dizisi olmasıdır.

3.1.1.12. Teorem (*Sandviç Teoremi*). (x_n), (y_n) ve (z_n) dizileri ve $a \in \mathbb{R}$ sayısı verilsin. $\lim x_n = \lim z_n = a$ ve her $n \in \mathbb{N}$ için $x_n \le y_n \le z_n$ ise $\lim y_n = a$ 'dır. [21].

3.1.1.13. Teorem (*Bolzano-Weierstrass Teoremi*). Reel sayıların sınırlı ve sonsuz her alt kümesinin en az bir yığılma noktası vardır.

3.1.1.14. Sonuç. Reel sayılarda her sınırlı dizinin yakınsak bir alt dizisi vardır.

3.1.2. Seriler

(a_n) bir dizi olmak üzere

$$\sum_{k=0}^{\infty} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n + \cdots$$

ifadesine bir *seri*, her $n \in \mathbb{N}$ için a_n sayısına ise bu serinin *n. genel terimi* denir.

$$s_n = \sum_{k=0}^{n} a_k = a_0 + a_1 + \cdots + a_n$$

ifadesine serinin *n. kısmi toplamı*, (s_n) dizisine de bu serinin *kısmi toplamlar dizisi* denir. (s_n) kısmi toplamlar dizisi yakınsak ve $\lim s_n = s$ ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ *serisi yakınsaktır* denir ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n = s$ şeklinde gösterilir. Yakınsak bir serinin genel terimi sıfıra yakınsar. Eğer $\sum_{n=0}^{\infty} |a_n|$ serisi yakınsak ise $\sum_{n=0}^{\infty} a_n$ serisine *mutlak yakınsaktır* denir. Her mutlak yakınsak seri yakınsaktır; ancak keyfi terimlere sahip bir seri yakınsak olsa bile mutlak yakınsak olmayabilir. Örneğin, $a_n = (-1)^{n+1} / n^{\alpha}$ $(\alpha > 0)$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi her $\alpha > 0$ için yakınsak iken sadece $\alpha > 1$ durumu için mutlak yakınsaktır. Reel sayılarda mutlak yakınsak her seri yakınsaktır.

İspatlarda sıkça kullanılan bir formül olan Abel Kısmi Toplamlar Formülü aşağıda verilmiştir: (a_n) ve (b_n) reel diziler ve $x_n = \sum_{k=0}^{n} a_k$, $x_{-1} := 0$ olmak üzere aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$\sum_{k=p}^{n+p} a_k b_k = \sum_{k=p}^{n+p} x_k \left(b_k - b_{k+1}\right) - x_{p-1} b_p + x_{n+p} b_{n+p+1}$$

Özel olarak $p = 0$ alınırsa

$$\sum_{k=0}^{n} a_k b_k = \sum_{k=0}^{n} x_k \left(b_k - b_{k+1}\right) + x_n b_{n+1}$$

elde edilir [22].

3.1.3. Kuvvet Serileri

x_0 ve her $n \in \mathbb{N}$ için a_n reel sayılar olmak üzere

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \tag{3.1}$$

şeklindeki serilere *kuvvet serileri* denir. Açıktır ki bu seri $x = x_0$ noktasında yakınsaktır.

3.1.3.1. Teorem (Abel Teoremi). [23]

(i) (3.1) serisi bir $x_1 \neq x_0$ noktasında yakınsak ise bu seri $|x - x_0| < |x_1 - x_0|$ koşulunu sağlayan her x için mutlak yakınsaktır.

(ii) (3.1) serisi bir $x_1 \neq x_0$ noktasında ıraksak ise bu seri $|x - x_0| > |x_1 - x_0|$ koşulunu sağlayan her x için ıraksaktır.

$R = \sup\left\{|x - x_0| : \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(x - x_0\right)^n \text{ yakınsaktır}\right\}$ şeklinde bir R sayısı tanımlayalım. R'in tanımından $0 \leq R \leq \infty$ olduğu açıktır. Kolayca görülür ki $R = 0$ olması için gerek ve yeter koşul (3.1) serisinin sadece x_0'da yakınsak olmasıdır.

$0 < R \leq \infty$ ve $|x - x_0| < R$ olsun. Supremumun özelliğinden $|x - x_0| < |x_1 - x_0| < R$ olacak şekilde bir x_1 sayısı vardır öyle ki (3.1) serisi x_1'de yakınsaktır. Abel Teoreminden (3.1) serisi $|x-x_0|<R$ koşulunu sağlayan her x için mutlak yakınsaktır. $0<R<\infty$ ve $|x-x_0|>R$ olsun. $|x-x_0|>|x_1-x_0|>R$ olacak şekilde bir x_1 sayısı vardır öyle ki (3.1) serisi x_1'de ıraksaktır. Yine Abel Teoreminden $|x-x_0|>R$ koşulunu sağlayan her x için (3.1) serisi ıraksaktır [23]. Dolayısıyla yukarıda verilen R sayısı tektir. Bu sayıya (3.1) serisinin *yakınsaklık yarıçapı* adı verilir.

3.1.3.2. Teorem. R'nin $\sum_{n=0}^{\infty} a_n (x-x_0)^n$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı olması için gerek ve yeter koşul

$$R=\frac{1}{\overline{\lim\limits_{n\to\infty}}\sqrt[n]{|a_n|}}$$

dir. Kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı

$$R^{-1}=\lim_{n\to\infty}\left|\frac{a_{n+1}}{a_n}\right|$$

formülüyle de hesaplanabilir [23].

3.2. MATRİS DÖNÜŞÜMLERİ

Reel ya da kompleks sayılar üzerinde tanımlı $A=(a_{nm})$ sonsuz matrisi ve $x=(x_n)$ dizisi verilsin. Bu taktirde $n=0,1,2,\cdots$ için

$$t_n=\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}x_m$$

şeklinde tanımlanan (t_n) dizisine, (x_n) *dizisinin A-dönüşüm dizisi* denir. Burada (t_n) dizisi Ax şeklinde ve $\lim t_n$ de $A-\lim x$ ya da $\lim_A x$ şeklinde gösterilir. A matrisine de *diziden diziye bir dönüşüm* adı verilir. Bu dönüşümün var olması için

$$\sum_{m=0}^{\infty} a_{nm}x_m$$

serisinin her n için yakınsak olması gerekir. Eğer her $n \in \mathbb{N}$ için (t_n) dizisi yakınsak ve

$$\lim_{n\to\infty} x_n = \lim_{n\to\infty} \sum_{m=0}^{\infty} a_{nm} x_m$$

eşitliği sağlanıyorsa yani dönüşüm limiti koruyorsa $A=(a_{nm})$ matrisine *regülerdir* denir [22].

3.2.1. Teorem (Silverman-Teoplitz). $A=(a_{nm})$ matrisinin regüler olması için gerek ve yeter koşul:

i. Bir $K>0$ sabiti vardır öyle ki her $n \in \mathbb{N}$ için $\sum_{m=1}^{\infty} |a_{nm}| < K$

ii. Her $m \in \mathbb{N}$ için $\lim_{n\to\infty} a_{nm} = 0$

iii. $\lim_{n\to\infty} \sum_{m=1}^{\infty} a_{nm} = 1$

koşullarının sağlanmasıdır. [24]

$A=(a_{nm})$ bir sonsuz matris olsun. $\sup_n \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}|$ sayısına *A matrisinin normu* adı verilir ve $\|A\|$ ile gösterilir.

$A=(a_{nm})$ sonsuz matrisi sınırlı dizileri sınırlı dizilere dönüştürüyorsa; yani $x=(x_k)\in \ell_\infty$ iken $n \in \mathbb{N}$ için $(t_n)\in \ell_\infty$ ise bu matrise bir *limitleme matrisi* denir. Bir sonsuz matrisin limitleme matrisi olması için gerek ve yeter koşul normunun sonlu yani

$$\|A\| = \sup_n \sum_{m=0}^{\infty} |a_{nm}| < \infty$$

olmasıdır. [24].

Tezde kullanılan ve aşağıda ayrıntıları verilen Zweier Matrisleri, Cesàro Matrisleri ve Riesz Matrisleri en sık karşılaşılan limitleme matrislerine örnektir.

3.2.1. Zweier Dönüşümü

Verilen $x=(x_n)$ dizisini

$$z_n=\frac{x_{n-1}+x_n}{2}, \qquad x_{-1}:=0$$

ile tanımlı (z_n) dizisine dönüştüren matrise *Zweier dönüşümü* denir ve $Z_{1/2}$ ile gösterilir. Eğer (z_n) dizisi yakınsak ise (x_n) dizisine *Zweier yakınsak* ya da kısaca $Z_{1/2}$*-yakınsak* denir ve bu yakınsaklık $\lim z_n$, $Z_{1/2}-\lim x$ ya da $\lim_{Z_{1/2}} x$ ile gösterilir. Zweier dönüşümünün matris gösterimi

$$Z_{1/2}=\begin{pmatrix} 1/2 & 0 & 0 & \cdots \\ 1/2 & 1/2 & 0 & \cdots \\ 0 & 1/2 & 1/2 & \cdots \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots \end{pmatrix}$$

şeklindedir. [22]

Zweier yakınsak olan diziler sınırlı olmak zorunda değildir. Gerçekten

$$a_n=\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}, \qquad b_n=\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}$$

olmak üzere (x_n) dizisi her $n\in\mathbb{N}$, $x_n=(-1)^{n-1}a_n+b_{n-1}$ olarak tanımlansın. Bu dizinin sonsuza ıraksak bir alt dizisinin olduğu açıktır. Dolayısıyla $x=(x_n)$ dizisi sınırlı değildir. Ancak aşağıda görüldüğü gibi (x_n) dizisi $\ln 2$ sayısına $Z_{1/2}-$ yakınsaktır:

$$\begin{aligned}\frac{x_n+x_{n+1}}{2}&=\frac{(-1)^{n-1}\left(\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{k}-\sum_{k=1}^{n+1}\frac{1}{k}\right)+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}+\sum_{k=1}^{n}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}}{2}\\ &=\frac{(-1)^{n}}{2(n+1)}+\frac{(-1)^{n-1}}{2n}+\sum_{k=1}^{n-1}(-1)^{k-1}\frac{1}{k}\to\ln 2, \quad n\to\infty.\end{aligned}$$

3.2.1.1. Teorem. Bir $x=(x_n)$ dizisi verilsin. $Z_{1/2}x$ dizisi yakınsak ise $\lim(x_n/n)=0$ 'dır.

İspatına yardımcı olacak bir yardımcı teorem verelim.

3.2.1.2. Lemma. Bir (x_n) dizisi verilsin. Eğer $\lim x_n = a$ ise

$$\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\, x_k = 0 .$$

İspat. Burada iki durum söz konusudur. İlk olarak $n = 2N$ olsun. Bu durumda

$$\frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k} x_k = \frac{-x_1 + x_2 - x_3 + x_4 - \cdots - x_{2N-1} + x_{2N}}{2N}$$
$$= \frac{1}{2}\left(\frac{x_2 + x_4 + \cdots + x_{2N}}{N} - \frac{x_1 + x_3 + \cdots + x_{2N-1}}{N}\right)$$

eşitliği elde edilir. $\lim x_n = a$ olduğundan tüm alt dizileri de aynı sayıya yakınsaktır, böylece $\lim x_{2N} = \lim x_{2N-1} = a$. Yakınsak bir dizinin aritmetik ortalaması da aynı sayıya yakınsak olduğundan $\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\, x_k = 0$ elde edilir.

$n = 2N + 1$ durumu benzer şekilde yapılır. ■

Teorem 3.2.1.1'in ispatı. $z_n = (x_{n-1} + x_n)/2$ ve $\lim_{n\to\infty} z_n = z$ olsun. Bu durumda (x_n) dizisi aşağıdaki şekilde gösterilebilir:

$$x_n = 2z_n - x_{n-1} = 2z_n - 2z_{n-1} + x_{n-2} = \cdots = 2\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\, z_k + (-1)^n\, x_0 .$$

Lemma 3.2.1.2'den

$$\lim \frac{x_n}{n} = 2\lim \frac{1}{n}\sum_{k=1}^{n}(-1)^{n-k}\, z_k + x_0 \lim \frac{(-1)^n}{n} = 0 . \ ■$$

3.2.2. Cesàro Ortalaması

$x = (x_n)$ bir dizi olmak üzere

$$\mathrm{t}_n = \frac{x_0 + x_1 + \cdots + x_n}{n+1}$$

ifadesine (x_n) dizisinin *n. aritmetik* veya *Cesàro ortalaması* denir. (x_n) dizisini (t_n) dizisine dönüştüren metoda ise *Cesàro Dönüşümü* adı verilir ve C_1 ile gösterilir. (t_n) dizisi yakınsak ise (x_n) dizisine *Cesàro yakınsaktır* ya da kısaca C_1-*yakınsaktır* denir bu yakınsaklık $\lim_{C_1} x$ ya da $C_1 - \lim x$ ile gösterilir. Eğer bir serinin kısmi toplamlar dizisi C_1-yakınsak ise bu seriye C_1-*toplanabilir* denir.

Cesàro metodu terimleri aşağıda verilen bir matris ile temsil edilir:

$$a_{nm} = \begin{cases} \dfrac{1}{n+1}, & m \le n \\ 0, & m > n \end{cases}$$

ile tanımlı (a_{nm}) matrisine *Cesàro Matrisi* denir.

Her sınırlı dizi Cesàro yakınsak olmak zorunda değildir.

3.2.2.1. Örnek. $x = (1,0,1,1,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,\cdots)$ dizisi sınırlı olmasına rağmen C_1-yakınsak değildir. Gerçekten x dizisinin Cesàro ortalaması olan

$$C_1 x = (a_n) = \left(1, \frac{1}{2}, \frac{2}{3}, \frac{3}{4}, \frac{3}{5}, \frac{3}{6}, \frac{4}{7}, \frac{5}{8}, \frac{6}{9}, \frac{7}{10}, \frac{7}{11}, \cdots\right)$$

dizisinin iki alt dizisini ele alalım. $k_n = 2^{n+1} - 2$ ve $k'_n = 3.2^n - 3$ doğal sayı dizileri için

$$\lim_{n\to\infty} a_{k_n} = \frac{1}{2} \qquad \text{ve} \qquad \lim_{n\to\infty} a_{k'_n} = \frac{2}{3}$$

elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty} a_{k_n} \neq \lim\limits_{n\to\infty} a_{k'_n}$ olduğundan $\lim_{C_1} x$ yoktur.

3.2.2.2. Teorem. Bir dizi yakınsak ise aynı zamanda C_1-yakınsaktır [25].

Bu teoremin tersinin doğru olmadığını aşağıdaki örnekle gösterelim.

3.2.2.3. Örnek. $x = (1,0,1,0,1,\cdots)$ dizisinin yakınsak olmadığı açıktır. Ancak bu dizi $1/2$'ye C_1-yakınsaktır. Gerçekten, x dizisinin Cesàro ortalama dizisi

$$C_1x=\left(a_n\right)=(1,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{2}{4},\frac{3}{5},\frac{3}{6},\cdots)$$

şeklindedir. Bu dizinin *n*. terimi

$$a_n=\frac{2n-(-1)^n+1}{4n}$$

şeklinde olur. Buradan

$$\lim_{C_1} x=\lim a_n=\lim_{n\to\infty}\frac{2n-(-1)^n+1}{4n}=\frac{1}{2}$$

elde edilir.

3.2.2.4. Teorem. Sonsuza ıraksak dizilerin Cesàro ortalamaları da sonsuza ıraksaktır.

İspat. $\left(x_n\right)$ Sonsuza ıraksak bir dizi ve $K>0$ olsun. $\lim_{n\to\infty} x_n=\infty$ olduğundan bir $n_k\in\mathbb{N}$ sayısı vardır öyle ki $\forall n\geq n_k$ için $x_n>2K$ eşitsizliği sağlanır. $N=2n_k$ seçilirse $\forall n\geq N$ için

$$t_n=\frac{x_0+x_1+\cdots+x_{n_k-1}}{n+1}+\frac{x_{n_k}+x_{n_k+1}+\cdots+x_n}{n+1}>\frac{n-n_k+1}{n+1}2K=\left(1-\frac{n_k}{n+1}\right)2K>K$$

elde edilir. Buradan da $\lim_{n\to\infty} t_n=\infty$ elde edilir. İspatta genelliği bozmayacağından her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n\geq 0$ kabul edilmiştir.

3.2.2.5. Teorem. [25] Bir $x=\left(x_n\right)$ dizisi C_1-yakınsak ise $\lim_{n\to\infty}\left(x_n/n\right)=0$.

3.2.2.6. Teorem. Bir $x=\left(x_n\right)$ dizisi verilsin. Eğer $\lim_{z_{1/2}} x=a$ ise $\lim_{C_1} x=a$ 'dır.

İspat. $\lim_{z_{1/2}} x=a$ ve her $n\in\mathbb{N}$ için $z_n=\dfrac{x_{n-1}+x_n}{2}$ olmak üzere

$$\begin{aligned}\frac{x_0+x_1+\cdots+x_{n-1}}{n}&=\frac{\frac{x_0}{2}+\frac{x_0+x_1}{2}+\frac{x_1+x_2}{2}+\cdots+\frac{x_{n-2}+x_{n-1}}{2}+\frac{x_{n-1}}{2}}{n}\\&=\frac{x_0}{2n}-\frac{x_n}{2n}+\frac{z_1+z_2+\cdots+z_{n-1}+z_n}{n}\end{aligned}$$

elde edilir. Buradan limite geçersek

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_0+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n}=\lim_{n\to\infty}\frac{x_0}{2n}-\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{2n}+\lim_{C_1} z_n$$

olur. Teorem 3.2.1.1'den

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_0+x_1+x_2+\cdots+x_{n-1}}{n}=a.$$

elde edilir. Bu ise ispatı bitirir. ■

Teoremin tersi doğru değildir. Gerçekten $x=(1,0,-1,1,0,-1,\cdots)$ dizisi için $\lim_{C_1} x=0$ ancak $\lim_{Z_{1/2}} x$ limiti yoktur.

3.2.3. Riesz Dönüşümü

$p_0>0$ ve $p_k\geq 0$, $k=1,2,3,\cdots$ olacak şekilde bir (p_k) dizisi ve herhangi bir $x=(x_k)$ dizisi verilsin.

$$P_n=p_0+p_1+\cdots+p_n=\sum_{k=0}^{n}p_k,$$

olmak üzere

$$t_n=\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n}p_k x_k$$

şeklinde tanımlanan (t_n) dizisine (x_n) dizisinin *Riesz ortalaması;* (x_n) dizisini (t_n) dizisine dönüştüren dönüşüme ise *Riesz dönüşümü* adı verilir ve (R,p_n), (R,p) ya da R_p sembollerinden birisi ile gösterilir. Riesz dönüşümüne karşılık gelen matris, elemanları her n ve k için

$$r_{nk}=\begin{cases}\dfrac{p_k}{P_n}, & k\leq n\\ 0, & k>n\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan (r_{nk}) matrisidir. Riesz dönüşümünde her $n \in \mathbb{N}_0$ için $p_n = 1$ alınırsa Cesàro ortalaması elde edilir [24].

3.2.3.1. Tanım. A ve B limitleme metotları verilsin. Her B-limitlenebilir dizi, aynı limite A-limitlenebilir ise A, B *'den daha güçlüdür* denir ve $A \supset B$ ile gösterilir [24].

3.2.3.2. Teorem. Bir $A = (a_{nm})$ regüler matrisinin (R, p) regüler Riesz matrisinden daha güçlü olması için gerek ve yeter koşul

i. Her m için $(a_{mn}/p_n) \to 0,\ n \to \infty$;

ii. Sabit bir K vardır öyle ki her m için $\sum_{n=1}^{\infty} \left| a_{mn}/p_n - a_{m(n+1)}/p_{n+1} \right| P_n < K$

koşullarının sağlanmasıdır [24].

3.2.3.3. Sonuç. Cesàro matrisinin Regüler (R, p) Riesz matrisinden daha güçlü olması için gerek ve yeter koşul K bir sabit olmak üzere her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\sum_{n=1}^{\infty} \left| \frac{1}{p_n} - \frac{1}{p_{n+1}} \right| P_n < K$$

koşulunun sağlanmasıdır.

3.2.3.4. Teorem. [25]

$$C_1 \supset R_p \iff \left(\frac{1}{m} \sum_{n=1}^{m-1} \frac{p_n - p_{n+1}}{p_n p_{n+1}} P_n + \frac{P_m}{m p_m} \right)_m \quad \text{sınırlıdır.}$$

Bu teoreme $p_n \searrow 0$ olacak şekilde bir örnek verelim.

3.2.3.5. Örnek. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n = \dfrac{1}{\sqrt{n+1}}$ şeklinde tanımlanan (p_n) dizisi için teoremin koşullarını inceleyelim. Burada $P_n = \sum_{k=1}^{n} 1/\sqrt{k+1}$ olur. (p_n) dizisi monoton azalan bir dizi olduğundan aşağıdaki eşitsizlikler doğrudur.

$$\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{\sqrt{k+1}} \le \int_0^n \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{1}{\sqrt{k+1}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{n+1}}+\int_0^n \frac{dx}{\sqrt{x+1}} \le P_n \le 1+\int_0^n \frac{dx}{\sqrt{1+x}}$$

$$\Rightarrow \qquad \frac{1}{\sqrt{n+1}}+2\sqrt{n+1}+2 \le P_n \le 3+2\sqrt{n+1}.$$

Buradan

$$0 \le \frac{P_m}{mp_m} \le \frac{3+2\sqrt{1+m}}{m\frac{1}{\sqrt{1+m}}} = \frac{3\sqrt{m+1}+2(1+m)}{m} \le 2$$

elde edilir. Yani $\left(P_m/(mp_m)\right)$ dizisi sınırlıdır. Ayrıca

$$\begin{aligned} 0 \ &\le \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{1}{p_{n+1}}-\frac{1}{p_n}\right)P_n \\ &\le \frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\sqrt{n+2}-\sqrt{n+1}\right)\left(3+2\sqrt{n+1}\right) \\ &\le \frac{3}{m}\left(\sqrt{m+1}-\sqrt{2}\right)+\frac{2}{m}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{\sqrt{n+1}}{\sqrt{n+1}+\sqrt{n+1}}\right) \\ &\le \frac{3}{m}\left(\sqrt{m+1}-\sqrt{2}\right)+\frac{2(m-1)}{m} \to 2,\ n\to\infty \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Bu ise $\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1}\left(\frac{1}{p_{n+1}}-\frac{1}{p_n}\right)P_n\right)_m$ dizisinin sınırlı olması demektir. Sonuç olarak $\left(\frac{1}{m}\sum_{n=1}^{m-1}\frac{p_n-p_{n+1}}{p_n p_{n+1}}P_n+\frac{P_m}{mp_m}\right)_m$ dizisinin sınırlı olduğu elde edilir.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümün ilk kısmında, verilen bir serinin seyrelmesi ile bir dizinin uzaması kavramları tanıtılacaktır. Verilen bir dizi uzatıldığında ya da bir seri seyreltildiğinde yakınsaklık karakterinde bir değişim olmaz. İkinci ve üçüncü kısımda ise bu durumun toplanabilirlik metotları için geçerli olmadığına dair örnekler verilecek, hangi durumlarda geçerli olduğu araştırılacak ve örneklerle açıklanacaktır. Son ve dördüncü kısımda Seyrek Cesàro Matrisleri tanımlanacak ve özellikleri incelenecektir.

4.1. SERİNİN SEYRELMESİ VE DİZİNİN UZAMASI

Reel ya da kompleks terimli bir

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n = a_0 + a_1 + a_2 + \cdots \tag{4.1}$$

serisi verilsin. Bu serinin terimleri arasına belli sayıda sıfırların eklenmesiyle oluşan

$$\sum_{n=0}^{\infty} a'_n = a_0 + 0 + 0 + \cdots + 0 + a_1 + 0 + \cdots + 0 + a_2 + \cdots$$

serisine (4.1) serisinin *seyrelmesi* adı verilir. Eklenecek sıfırların sayısı bir doğal sayı dizisi ile karakterize edilebilir.

4.1.1. Tanım. $m = \left(m_n\right)_{n=0}^{\infty}$ bir doğal sayı dizisi olmak üzere (4.1) serisindeki her bir n için a_n ile a_{n+1} terimleri arasına m_n tane sıfırın eklenmesiyle oluşan

$$a_0 + \overbrace{0 + 0 + \cdots + 0}^{m_0} + a_1 + \overbrace{0 + 0 + \cdots + 0}^{m_1} + a_2 + \overbrace{0 + 0 + \cdots + 0}^{m_2} + a_3 + \cdots$$

serisine (4.1) serisinin *m-seyrelmesi* adı verilir; özel olarak m bir sabit dizi ise bu seyrelme *düzgündür* denir [4].

$\left(s_n\right)_{n=0}^{\infty}$ (4.1) serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Bu durumda (4.1) serisinin bir seyrelmesinin kısmi toplamlar dizisi

$$\left(s_0, s_0, \cdots, s_0, s_1, s_1, \cdots, s_1, s_2, s_2, \cdots, s_2, s_3, \cdots\right)$$

şeklinde olur. Bu dizi $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir uzamasıdır. Böylece genel diziler için serilerin seyrelmesine paralel olarak dizilerin uzaması kavramı tanımlanabilir.

4.1.2. Tanım. $x=(x_n)_{n=0}^{\infty}$ herhangi bir reel ya da kompleks dizi ve $m=(m_n)_{n=0}^{\infty}$ ise bir doğal sayı dizisi olmak üzere yeniden düzenlenmiş

$$x' = (\overbrace{x_0, x_0, \cdots, x_0}^{m_0}, \overbrace{x_1, x_1, \cdots, x_1}^{m_1}, \cdots, \overbrace{x_k, x_k, \cdots, x_k}^{m_k}, \cdots)$$

dizisine x dizisinin *m-uzaması* denir. Özel olarak m bir sabit dizi ise bu uzama *düzgündür* denir [4].

Eğer bir dizi yakınsak ise bu dizinin herhangi bir uzamasının aynı limite yakınsak olduğu kolayca gösterilebilir. Her dizi herhangi bir uzamasının bir alt dizisidir. Dolayısıyla uzaması yakınsak olan dizinin kendisi de yakınsaktır. Bu durum aşağıdaki teorem ile ifade edilir.

4.1.3. Teorem. Bir $x=(x_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisinin bir a sayısına yakınsak olması için gerek ve yeter koşul x dizisinin herhangi bir m-uzamasının a'ya yakınsak olmasıdır.

4.1.4. Sonuç. Bir serinin herhangi bir seyrelmesinin toplamı ile o serinin toplamı aynıdır.

4.2. UZATILMIŞ DİZİLERİN TOPLANABİLİRLİĞİ

4.2.1. Uzatılmış Dizilerin Cesàro Ortalaması

Bir dizi yakınsak ise bu dizinin herhangi bir uzaması aynı limite yakınsaktır. Bu durum uzatılmış dizinin Cesàro ortalaması için de söylenebilir.

4.2.1.1. Önerme. Yakınsak bir dizinin herhangi bir uzamasının Cesàro ortalaması aynı limite yakınsaktır.

İspat. Bir dizi yakınsak ise bu dizinin herhangi bir uzaması aynı limite yakınsaktır. Ayrıca Cesàro ortalaması regüler olduğundan limit korunur. Bu istenen sonuçtur. ■

Bir dizinin Cesàro ortalaması yakınsak ise o dizinin herhangi bir uzamasının Cesàro ortalaması aynı sayıya yakınsak olmak zorunda değildir.

4.2.1.2. Örnek. $(1,0,1,0,1,0,\cdots)$ dizisinin Cesàro ortalaması $1/2$ iken $m=(1,2,1,2,1,\cdots)$ olmak üzere bu dizinin $m-$uzaması olan $(1,0,0,1,0,0,1,\cdots)$ dizisinin Cesàro ortalaması $1/3$'tür.

Yukarıdaki örnekten görüldüğü gibi Teorem 4.1.3 genel toplanabilme metotları için geçerli değildir.

Teorem 4.1.3'den bir ıraksak dizinin her bir uzamasının da ıraksak olduğu görülür. Bazı ıraksak dizilerin Cesàro ortalamasının yakınsak olduğu da bir gerçektir. Ancak Cesàro ortalaması yakınsak olmayan ıraksak diziler de mevcuttur (Örnek 3.2.2.1.). V. Drobot [4] 1975 yılında her sınırlı dizinin limit noktalarına C_1-yakınsayan bir uzamasının varlığını göstermiştir. Aşağıda verilen bu teoremin ispatında [10]'daki Teorem 1'in ispatındaki metot kullanılmıştır.

4.2.1.3. Teorem. a sayısı $x=(x_n)$ dizisinin bir limit noktası ise bu dizinin a sayısına C_1-yakınsak bir uzaması vardır.

İspat. a sayısı $x=(x_0,x_1,x_2,\cdots,x_n,\cdots)$ dizisinin bir limit noktası olduğundan kesin artan (n_k) doğal sayı dizisi vardır öyle ki $\lim x_{n_k}=a$'dir. $k\geq 1$ olmak üzere m_k doğal sayıları

$$m_k \geq k(n_{k+1}+1)\max_{0\leq i\leq n_{k+1}} |x_i|$$

koşulunu sağlayacak şekilde seçilsin. $m=(m'_n)$ doğal sayı dizisi

$$m'_n=\begin{cases} m_k+1, & n=n_k \\ 1, & n\neq n_k \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\tilde{x}$, x dizisinin m-uzaması olsun. O halde uzatılmış dizi aşağıdaki gibi olur:

$$\tilde{x}=(x_0,x_1,\cdots,x_{n_1-1},\overbrace{x_{n_1},x_{n_1},\cdots,x_{n_1}}^{m_1+1},x_{n_1+1},x_{n_1+2},\cdots,x_{n_2-1},\overbrace{x_{n_2},x_{n_2},\cdots,x_{n_2}}^{m_2+1},x_{n_2+1},\cdots)$$

Aykırı bir durum oluşturmayacağından $n > n_1$ kabul edilebilir. Bu durumda n aşağıdaki iki şekilde olabilir:

(i) $\quad n = n_k + \sum_{i=1}^{k} m_i + \ell\,, \qquad 1 \le \ell \le n_{k+1} - n_k$

(ii) $\quad n = n_{k+1} + \sum_{i=1}^{k} m_i + \gamma\,, \qquad 1 \le \gamma \le m_{k+1}$

(i) durumu. $\tilde{x}$ dizisinin *n*. Cesàro ortalaması

$$
\begin{aligned}
\sigma_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n} \tilde{x}_i \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n_k+\ell} x_i + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{k} m_i x_{n_i} \\
&= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n_k+\ell} x_i + \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{k} m_i x_{n_i} + (n_k+\ell+1)\, x_{n_{k+1}}\right) - \frac{(n_k+\ell+1)}{n+1} x_{n_{k+1}}
\end{aligned}
$$

şeklinde yazılabilir. $\lim x_{n_k} = a$ olduğundan Önerme 4.2.1.1. gereğince

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{k} m_i x_{n_i} + (n_k+\ell+1)\, x_{n_{k+1}}\right) = a \tag{4.2}
$$

elde edilir. Diğer yandan m_k sayılarının seçiminden

$$
\begin{aligned}
\left|\frac{n_k+\ell+1}{n+1} x_{n_{k+1}}\right| &\le \frac{n_k+\ell+1}{n_k + \sum_{i=1}^{k} m_i + \ell + 1} \max_{0\le i\le n_{k+1}} |x_i| \\
&\le \frac{n_{k+1}+1}{m_k} \max_{0\le i\le n_{k+1}} |x_i| \\
&\le \frac{1}{k}
\end{aligned}
$$

elde edilir, dolayısıyla

$$
\lim_{n\to\infty} \frac{n_k+\ell+1}{n+1} x_{n_{k+1}} = 0 \tag{4.3}
$$

dir. Benzer şekilde

$$\begin{aligned}\left|\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n_k+\ell} x_i\right| &\le \frac{n_k+\ell+1}{n_k+\sum\limits_{i=1}^{k} m_k+\ell+1}\max_{0\le i\le n_{k+1}}|x_i| \\ &\le \frac{n_{k+1}+1}{m_k}\max_{0\le i\le n_{k+1}}|x_i| \le \frac{1}{k}\end{aligned}$$

olur. Böylece

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n_k+\ell} x_i = 0 \tag{4.4}$$

elde edilir.(4.2), (4.3) ve (4.4) eşitliklerinden istenen sonuca ulaşılır:

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\tilde{x}_i = a$$

(ii) durumu. $\tilde{x}$ dizisinin *n*. Cesàro ortalaması

$$\begin{aligned}\sigma_n &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\tilde{x}_i \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n_{k+1}} x_i + \frac{1}{n+1}\sum_{i=1}^{k} m_i x_{n_i} + \frac{\gamma}{n+1}x_{n_{k+1}} \\ &= \frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n_{k+1}} x_i - \frac{1+n_{k+1}}{n+1}x_{n_{k+1}} + \frac{1}{n+1}\left(\sum_{i=1}^{k} m_i x_{n_i} + \left(n+1-\sum_{i=1}^{k} m_i\right)x_{n_{k+1}}\right)\end{aligned}$$

şeklinde yazılabilir. (i) durumundaki benzer tartışmalar sonucunda

$$\lim_{n\to\infty}\sigma_n = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{i=0}^{n}\tilde{x}_i = a$$

elde edilir. Buradan ispat tamamlanır. ■

4.2.1.4. Sonuç. Her sınırlı dizinin C_1-yakınsak bir uzaması vardır.

İspat. Bolzano-Weierstrass Teoremi gereğince sınırlı dizinin bir limit noktası vardır. Teorem 4.2.1.3'ten dizinin bu limit noktasına C_1-yakınsak bir uzaması vardır. ■

C_1-yakınsak dizilerin herhangi bir uzaması C_1-yakınsak olmayabilir.

4.2.1.5. Örnek. $x=\left(1,0,1,0,1,\cdots\right)$ dizisinin C_1 limiti $1/2$ iken bu dizinin $m=\left(1,1,2,2,4,4,8,8,\cdots\right)$ uzaması olan $\tilde{x}=\left(1,0,1,1,0,0,1,1,1,1,0,0,0,0,1,\cdots\right)$ dizisinin C_1 limitinin olmadığı gösterilebilir: Gerçekten $\tilde{x}$ dizisinin Cesàro ortalamalarından oluşan

$$C_1\tilde{x}=\left(a_n\right)=\left(1,\frac{1}{2},\frac{2}{3},\frac{3}{4},\frac{3}{5},\frac{3}{6},\frac{4}{7},\frac{5}{8},\frac{6}{9},\frac{7}{10},\frac{7}{11},\cdots\right)$$

dizisinin iki alt dizisini ele alalım. $k_n=2^{n+1}-2$ ve $k_n'=3.2^n-3$ doğal sayı dizileri için

$$\lim_{n\to\infty}a_{k_n}=\frac{1}{2}\qquad \text{ve}\qquad \lim_{n\to\infty}a_{k_n'}=\frac{2}{3}$$

elde edilir. $\lim\limits_{n\to\infty}a_{k_n}\neq\lim\limits_{n\to\infty}a_{k_n'}$ olduğundan $\lim_{C_1}\tilde{x}$ yoktur.

Ancak dizilerin düzgün uzaması C_1-yakınsaklığı etkilemez.

4.2.1.6. Teorem. $m=\left(m_n\right)$ bir sabit doğal sayı dizisi ve $x=\left(x_n\right)_{n=1}^{\infty}$ C_1-yakınsak bir dizi olsun. $\tilde{x}=\left(\tilde{x}_n\right)_{n=1}^{\infty}$, x dizisinin m-uzaması ise $\lim_{C_1}x=\lim_{C_1}\tilde{x}$.

İspat. $\lim_{C_1}x=a$ olsun. $\left(x_n\right)$ dizisinin $m=(m_n)=(k)$ uzaması için

$$\begin{aligned}\left|\frac{kx_1+kx_2+\cdots+kx_{n-1}+\left(k-m\right)x_n}{(n-1)k+k-m}-a\right|&=\left|\frac{k(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{kn}.\frac{kn}{nk-m}-\frac{mx_n}{nk-m}-a\right|\\&\le\frac{kn}{nk-m}\left|\frac{k(x_1+x_2+\cdots+x_n)}{kn}-a\right|+\frac{m|a|}{nk-m}+\frac{m|x_n|}{nk-m}\end{aligned}$$

elde edilir, burada $m\in\{0,1,\cdots,k-1\}$'dir. $\lim_{C_1}x=a$ olduğundan ve Teorem 3.2.2.5'den

$$\begin{aligned}0&\le\lim_{n\to\infty}\left|\frac{kx_1+kx_2+\cdots+kx_{n-1}+\left(k-m\right)x_n}{(n-1)k+k-m}-a\right|\\&\le\left|\lim_{n\to\infty}\frac{x_1+x_2+\cdots+x_n}{n}-a\right|+\lim_{n\to\infty}\frac{|x_n|}{n}\frac{m}{k-m/n}\\&=0\end{aligned}$$

bulunur ki, bu ise $\lim_{C_1} \tilde{x}_n = a$ eşitliğinin ispatını verir.■

Hangi tür dizilerin, verilen bir noktaya C_1-yakınsak bir uzamaya sahip olmadığını belirleyen bir kavramı tanımlayalım. Nokta etrafında yavaş salınma adı verilen bu kavram 1975 yılında V. Drobot [4] tarafından verilmiştir.

4.2.1.7. Tanım. $(x_n)_{n=1}^{\infty}$ bir reel sayı dizisi ve a bir reel sayı olsun. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı ve kesin artan bir $(n_k)_{k=1}^{\infty}$ doğal sayı dizisi için

i. $n_{2k-1} \le j < n_{2k}$ için $x_j \ge a + \varepsilon$

ii. $n_{2k} \le j < n_{2k+1}$ için $x_j \le a - \varepsilon$

iii. $\liminf\limits_{p \to \infty} \dfrac{n_{p+1}}{n_p} \ge 1 + \lambda > 1$

koşulları sağlanıyorsa bu dizi a *etrafında yavaş salınımlıdır* denir.

4.2.1.8. Örnek. $(\underbrace{1}_{2^0}, \underbrace{0,0}_{2^1}, \underbrace{1,1,1,1}_{2^2}, \underbrace{0,0,0,0,0,0,0,0}_{2^3}, 1, \cdots)$ dizisi $a = 1/2$ etrafında yavaş salınımlıdır. Gerçekten $\varepsilon = 1/2$ alınırsa yukarıdaki tanımdaki koşulların sağlandığı görülür. $k = 1$ için $n_1 = 1$ ve $n_2 = 2$ olur ve $x_1 \ge a + \varepsilon$ koşulu sağlanır. Benzer olarak $k = 2$ için $n_3 = 4$ ve $n_4 = 8$ olur ve $n_3 \le j < n_4$ için $x_j \ge a + \varepsilon$ sağlanır. Aynı şekilde $n_2 \le j \le n_3$ için $x_j \le a - \varepsilon$ sağlanır. Bu şekilde devam edersek $n_p = 2^{p-1}$ dizisi istenen (i) ve (ii) koşullarını sağlar. Şimdi (iii) koşulunun sağlandığını gösterelim:

$$\liminf_{p \to \infty} \frac{n_{p+1}}{n_p} = \liminf_{p \to \infty} \frac{2^p}{2^{p-1}} = 2 > 1$$

olur. Yani bu dizi tanımdaki tüm koşulları sağladığından $a = 1/2$ etrafında yavaş salınımlıdır.

4.2.1.9. Teorem. Bir (x_n) reel sayılar dizisi a etrafında yavaş salınımlı ise bu dizi a'ya C_1-yakınsak olacak şekilde uzatılamaz [4].

Örnek 4.2.1.8'de ele alınan dizi $a = 1/2$ etrafında yavaş salınımlı olduğundan yukarıdaki teorem gereğince bu dizinin $1/2$ noktasına C_1-yakınsak bir uzaması yoktur. Ancak limit noktalarının dışındaki bir noktaya C_1-yakınsak olacak bir uzamaya sahip diziler vardır. Drobot [4] bu diziler için bir yeter koşul vermiştir.

4.2.1.10. Teorem. (x_n) bir reel sayı dizisi ve $a \in (\liminf x_n, \limsup x_n)$ olsun. Bir $\varepsilon > 0$ sayısı verilsin öyle ki yeterince büyük bir doğal sayıdan sonraki tüm n sayıları için $|x_n - a| \geq \varepsilon$ olsun.

$$0 \leq m_1 \leq n_1 < m_2 \leq n_2 < \cdots \leq \mathrm{n}_{k-1} < m_k \leq n_k < \cdots$$

olacak şekilde (n_k) ve (m_k) doğal sayı dizileri için

A. $n_{2k-2} < p \leq n_{2k-1}$ için $x_{m_{2k-1}} \leq x_p \leq a - \varepsilon,$

B. $n_{2k-1} < p \leq n_{2k}$ için $x_{m_{2k}} \geq x_p \geq a + \varepsilon$

bağıntıları sağlansın. $\nu_k = n_k - n_{k-1}$ ve $\gamma_k = \max\{|x_0|, |x_1|, \cdots, |x_k|\}$ olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\nu_k \gamma_{n_k}^2}{n_{k-1}} = 0$$

ise (x_n) dizisi a'ya C_1-yakınsak olacak şekilde uzatılabilir. [4].

4.2.1.11. Örnek. $(x_n) = (1,0,1,0,1,\cdots)$ dizisinin $a = 1/3$ noktasına C_1-yakınsak olan bir uzamasının var olduğunu gösterelim: (x_n) dizisi için $\liminf x_n = 0$ ve $\limsup x_n = 1$ olduğundan teoremdeki ilk koşullar sağlanır. $\varepsilon = 1/4$ seçilirse her n için $|x_n - a| \geq \varepsilon$ koşulu sağlanır. $m_k = n_k = k + 1$ olarak seçilirse A ve B bağıntıları doğrudur. Ayrıca $\nu_k = 1,\ \gamma_k = 1$ olduğundan

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\nu_k \gamma_{n_k}^2}{n_{k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{k} = 0$$

bulunur. Dolayısıyla bu dizinin $a = 1/3$ noktasına yakınsayan bir uzaması vardır.

Isbell [3], Drobot'un sonuçlarını $x_i - a$ ifadesinin işaret değişimine bağlı olarak elde etmiştir. (x_i) herhangi bir ıraksak dizi, a bu dizinin bir limit noktası olmayan herhangi bir sayı olsun. Ayrıca $x_i - a$'nın işareti sonsuz defa değişsin, yani (x_i) dizisi a'yı çevrelesin.

$$J = \left\{ j \in \mathbb{N}:\ \operatorname{sgn}(x_j - a) \neq \operatorname{sgn}(x_{j-1} - a) \right\} := \{i_1, i_2, \cdots\},$$

$$B_j = \left\{k:\ i_j \leq k < i_{j+1}\right\},$$

$$\alpha_j = \min\left\{|x_k - a|:\ k \in B_j\right\},$$

$$\beta_j = \sum_{k \in B_j} |x_k - a|$$

olarak tanımlansın.

4.2.1.12. Teorem. (x_i) dizisinin a noktasına C_1-yakınsak bir uzamasının olması için gerek ve yeter koşul

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\beta_k + p_k \alpha_k}{P_{k-1}} = 0$$

olacak şekilde pozitif p_k sayılarının olmasıdır, burada $P_k := p_1 + p_2 + \cdots + p_k$ [3].

Örnek 4.2.1.11, Isbell'in bu teoreminden faydalanarak çözülebilir:

$$J = \{1, 2, 3, \cdots\}, \qquad B_j = \{j\}\ , \qquad \alpha_j = \beta_j = \begin{cases} 2/3, & j \text{ tek} \\ 1/3, & j \text{ çift} \end{cases}$$

olur. Her $k \in \mathbb{N}$ için $p_k = 1$ olarak seçilirse

$$0 \leq \lim_{k\to\infty} \frac{\beta_k + p_k \alpha_k}{p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1}} \leq \lim_{k\to\infty} \frac{4}{3(k-1)} = 0$$

elde edilir. Dolayısıyla (x_n) dizisinin $a = 1/3$ noktasına C_1-yakınsak olan bir uzaması vardır. Ayrıca bu teorem Örnek 4.2.1.8 için uygulanırsa

$$J = \left\{2, 4, 8, \cdots, 2^k, \cdots\right\}, \qquad B_j = \left\{ k \in \mathbb{N}:\ 2^j \leq k < 2^{j+1} \right\}, \qquad \alpha_j = \frac{1}{2}\ ,\ \beta_j = 2^{j-1}$$

elde edilir. Her (p_k) pozitif reel sayı dizisi için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\beta_k + p_k\alpha_k}{p_1 + p_2 + \cdots + p_{k-1}} = \lim_{k\to\infty} \frac{2^{k-1} + p_k/2}{P_{k-1}} \neq 0$$

olduğunu gösterelim. Varsayalım ki bir (p_k) pozitif sayı dizisi için istenen limit sıfır olsun. O halde

$$\lim_{k\to\infty} \frac{2^{k-1}}{P_{k-1}} = 0 \qquad \text{ve} \qquad \lim_{k\to\infty} \frac{p_k}{2P_{k-1}} = 0.$$

olur. $\lim_{k\to\infty} p_k/P_{k-1} = 0$ ve $p_k = P_k - P_{k-1}$ olduğundan $\lim_{k\to\infty} P_k/P_{k-1} = 1$. Buradan $\sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}x^{k-1}$ kuvvet serisinin yakınsaklık yarıçapı 1'dir. Dolayısıyla $x = 1/2$ için bu kuvvet serisi yakınsaktır:

$$\sum_{k=1}^{\infty} P_{k-1}\left(\frac{1}{2}\right)^{k-1} < \infty .$$

Yakınsak serinin genel terimi sıfıra gittiğinden $\lim_{k\to\infty} P_{k-1}/2^{k-1} = 0$ elde edilir. Bu ise $\lim_{k\to\infty} 2^{k-1}/P_{k-1} = 0$ olmasına çelişkidir. Sonuç olarak yukarıdaki teorem gereğince bu dizinin $1/2$ noktasına C_1-yakınsak bir uzaması yoktur.

4.2.1.13. Teorem. (β_j) dizisi artan ve $\alpha_i \log(\beta_i/\beta_{i-1})$ sıfırdan uzakta sınırlı ise (x_i) dizisinin a'ya C_1-yakınsak olan bir uzaması yoktur [3].

4.2.1.14. Örnek $(\overbrace{1}^{2^0},\overbrace{0,0}^{2^1},\overbrace{1,1,1,1}^{2^2},\overbrace{0,0,0,0,0,0,0,0}^{2^3},1,\cdots)$ dizisinin $a = 1/2$ noktasına C_1-yakınsak olan bir uzaması yoktur.

Çözüm. Daha önce bu dizinin $a = 1/2$ noktasına C_1-yakınsak bir uzamasının olmadığını Drobot'un teoreminden biliyoruz. Şimdi bu dizinin Isbell'in son teoreminin koşullarını sağladığını gösterelim. Bu dizi ve $a = 1/2$ için

$$J = \{2,4,8,\cdots,2^k,\cdots\}, \qquad B_j = \{\, k \mid 2^j \le k < 2^{j+1} \}, \qquad \alpha_j = \frac{1}{2}\ ,\ \beta_j = 2^{j-1}$$

olur. Buradan açıktır ki (β_j) dizisi artan ve

$$\alpha_i \log\left(\frac{\beta_i}{\beta_{i-1}}\right) = \frac{\log 2}{2} > 0$$

elde edilir. Yani $\alpha_i \log\left(\beta_i / \beta_{i-1}\right)$ sınırlıdır. Dolayısıyla bu dizinin $a = 1/2$ noktasına C_1-yakınsak olan bir uzaması yoktur.

4.2.2. Uzatılmış Dizilerin *A*-Toplanabilirliği

Bir önceki bölümdeki Cesàro matrisi yerine daha genel olan pozitif terimli regüler matrisler yazılarak benzer sonuçlar derlenip incelenecektir. Bu bölümdeki sonuçlar 1967 yılında Vlasenko [2] tarafından elde edilmiştir.

4.2.2.1. Teorem. (x_n) reel terimli bir dizi, a bu dizinin bir limit noktası ve $A = (a_{nk})$ negatif olmayan bir regüler matris olsun. (x_n) dizisinin a'ya A-toplanabilir bir uzamasının olması için gerek ve yeter koşul doğal sayıların aşağıdaki özelliğe sahip bir $[l_\nu, m_\nu]$ $(\nu = 1, 2, 3, \cdots)$ sisteminin olmasıdır.

i. $l_\nu < m_\nu \leq l_{\nu+1}$

ii. $\lim\limits_{\nu\to\infty}(m_\nu - l_\nu) = \infty$

iii. $\lambda_n = \max\limits_{\substack{l_\nu \leq k \leq m_\nu \\ (\nu=1,2,\ldots)}} a_{nk} \to 0 \ (n \to \infty)$.

Bu teoremin koşullarını sağlayan pozitif regüler matrise *seyrelme özelliğine sahiptir* denir. Örneğin Cesàro Matrisi seyrelme özelliğine sahiptir. Gerçekten, Teorem 4.2.2.1'de $l_\nu = \nu^2$ ve $m_\nu = \nu^2 + \nu$ seçilirse teoremdeki üç koşulun sağlandığı görülür.

Uyarı. Seyrelme özelliğine sahip bir regüler matris (x_n) dizisinin bir uzamasını limit noktasından farklı bir sayıya toplayabilir. Örneğin; Cesàro Matrisi.

4.3. SEYREK SERİLERİN TOPLANABİLİRLİĞİ

Bir önceki bölümde verilen tüm sonuçlar seyrelmiş serilerin Cesàro toplanabilirliğine uyarlanabilir. Verilen bir serinin bir regüler matrise göre toplanabilirliği tanımlanmış ve ilgili bazı önemli sonuçlar ispatsız olarak aşağıda verilmiştir.

$\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ bir reel seri ve $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ bu serinin kısmi toplamlar dizisi olsun. Bir $A=(a_{nk})$ regüler matrisi verilsin. Verilen bir serinin A-toplanabilir olması onun kısmi toplamlar dizisinin A-toplanabilir olmasıdır. Eğer seri bir s sayısına A-toplanabilir ise bu durum

$$(A)\sum_{k=0}^{\infty} x_k = s$$

ile gösterilir. Bu durumda

$$\begin{aligned}(A)\sum_{k=0}^{\infty} x_k = s \quad &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty} a_{nk}s_k = s \\ &\Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{\infty}\left(\sum_{i=k}^{\infty} a_{ni}\right)x_k = s\end{aligned}$$

Özel olarak Cesàro matrisi ele alınırsa bir serinin C_1-toplanabilirliği aşağıdaki gibi tanımlanır:

$$(C_1)\sum_{k=0}^{\infty} x_k = s \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n\to\infty}\sum_{k=0}^{n}\left(1-\frac{k}{n+1}\right)x_k = s.$$

4.3.1. Önerme. Yakınsak bir serinin herhangi bir seyrelmesinin C_1-toplamı serinin toplamına eşittir.

İspat. Önerme 4.2.1.1’den açıktır.

4.3.2. Teorem. $m=(m_n)$ bir sabit doğal sayı dizisi ve $\sum_{k=0}^{\infty} x_k$ C_1-toplanabilir bir seri olsun. Bu serinin *m* seyrelmesi olan $\sum_{k=0}^{\infty} x'_k$ serisi için aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$(C_1)\sum_{k=0}^{\infty} x_k = (C_1)\sum_{k=0}^{\infty} x_k'.$$

İspat. Teorem 4.2.1.6’dan açıktır.

4.3.3. Tanım. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ bir reel seri ve $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ bu serinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere bu serinin kısmi toplamlar dizisi Tanım 4.2.1.7’ın koşullarını sağlarsa bu seri *a ’yı yavaş sarıyor* denir.

4.3.4. Teorem. Bir $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ reel sayı serisi a ’yı yavaş sarıyor ise bu seri a ’ya C_1-toplanabilir olacak şekilde seyreltilemez.

İspat. Teorem 4.2.1.9’dan açıktır.

4.3.5. Teorem. $\sum_{n=0}^{\infty} x_n$ bir reel seri ve $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ bu serinin kısmi toplamlar dizisi olmak üzere $(s_n)_{n=0}^{\infty}$ dizisi Teorem 4.2.1.10’un koşullarını sağlarsa bu seri, C_1-toplamı a olacak şekilde seyreltilebilir.

İspat. Teorem 4.2.1.10’dan açıktır.

4.4. SEYREK CESÀRO MATRİSLERİ

Uzatılmışı C_1-yakınsak olan bir dizi C_1-yakınsak olmak zorunda değildir. Gerçekten

$$x = (\overbrace{1}^{2^0}, \overbrace{0}^{2^0}, \overbrace{1,1}^{2^1 \text{ tane}}, \overbrace{0,0}^{2^1 \text{ tane}}, \overbrace{1,1,1,1}^{2^2 \text{ tane}}, \overbrace{0,0,0,0}^{2^2 \text{ tane}}, \cdots)$$

dizisi ele alınırsa bu dizinin C_1-yakınsak olmadığı Örnek 3.2.2.1’de gösterildi. Bu dizi sınırlı olduğundan Sonuç 4.2.1.4 gereğince C_1-yakınsak bir uzaması vardır. Aşağıdaki teorem, uzatılmışı C_1-yakınsak olan bir dizinin hangi koşullar altında C_1-yakınsak olması ile ilgilidir. Bu teoremden önce bir yardımcı teorem verilmiştir.

4.4.1. Lemma. $m = (m_n)$ bir doğal sayı dizisi ve $M_n = m_1 + m_2 + \cdots + m_n$ olsun. Bu durumda

$$\sum_{k=1}^{n-1} M_k \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k+1}} \right) = n - \frac{M_n}{m_n}$$

İspat.

$$\begin{aligned} \sum_{k=1}^{n-1} M_k \left(\frac{1}{m_k} - \frac{1}{m_{k+1}} \right) &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{M_k}{m_k} - \frac{M_{k+1} - m_{k+1}}{m_{k+1}} \right) \\ &= \sum_{k=1}^{n-1} \left(\frac{M_k}{m_k} - \frac{M_{k+1}}{m_{k+1}} \right) + n - 1 \\ &= n - \frac{M_n}{m_n}. \ \blacksquare \end{aligned}$$

4.4.2. Teorem. (x_n) dizisinin bir m-uzaması bir a sayısına C_1-yakınsak olsun. $M_n = m_0 + m_1 + \cdots + m_n$ olmak üzere

i. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M_n}{n m_n} = \alpha < \infty$

ii. $\sup\limits_{n} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} M_k \left| \dfrac{1}{m_k} - \dfrac{1}{m_{k+1}} \right| < \infty$

koşulları sağlanırsa (x_n) dizisi de a sayısına C_1-yakınsaktır.

İspat. (x_n) dizisinin m-uzaması $(\overline{x}_n)$ ve bu uzatılmış dizinin ilk n teriminin Cesàro ortalaması $\overline{\sigma}_n$ olsun. O halde $(\overline{\sigma}_n)$ dizisi a sayısına yakınsaktır. Her alt dizisi de bu sayıya yakınsak olacağından $n_k = M_k$ olmak üzere

$$\lim_{k\to\infty} \overline{\sigma}_{n_k} = \lim_{k\to\infty} \frac{1}{M_k} \sum_{i=1}^{k} m_i x_i = a .$$

(x_n) dizisinin ilk k teriminin Cesàro ortalaması σ_k olsun. Abel Kısmi Toplamlar Formülünden

$$\begin{aligned}\sigma_k = \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k} x_k &= \frac{1}{k}\sum_{i=1}^{k}\frac{1}{m_i} m_i x_i \\ &= \frac{1}{k}\left\{\frac{1}{m_k}\sum_{i=1}^{k} m_i x_i + \sum_{i=1}^{k-1}\left(\frac{1}{m_i}-\frac{1}{m_{i+1}}\right)\sum_{j=1}^{i} m_j x_j\right\} \\ &= \frac{M_k}{k m_k}\bar{\sigma}_{n_k} + \sum_{i=1}^{k-1}\frac{M_i}{k}\left(\frac{1}{m_i}-\frac{1}{m_{i+1}}\right)\bar{\sigma}_{n_i}\end{aligned}$$

eşitliği bulunur.

$$a_{ki} = \begin{cases} \dfrac{M_i}{k}\left(\dfrac{1}{m_i}-\dfrac{1}{m_{i+1}}\right), & i<k \\ 0, & i \geq k \end{cases}$$

ile tanımlı $A=(a_{ki})$ matrisi teoremin (i) ve (ii) koşullarından ve Lemma 4.4.1'den dolayı Silverman-Teoplitz koşullarını sağlar. Dolayısıyla

$$\lim_{k\to\infty}\sigma_k = \alpha a + (1-\alpha)a = a. \blacksquare$$

4.4.3. Tanım. $A=(a_{nk})$ yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştüren bir limitleme matrisi ve $N \subset \omega$ olmak üzere N üzerinde A-yakınsak her dizinin bir uzaması C_1-yakınsak ise bu matrise *N üzerinde Seyrek Cesàro Matrisi* (SCM_N) denir. Eğer $N=\ell_\infty$ ise *Seyrek Cesàro Matrisi* (SCM) adını alır.

Örneğin, her bir Schur matrisi [24] sınırlı dizileri yakınsak dizilere, dolayısıyla da C_1-yakınsak dizilere dönüştürdüğünden bir SCM'dir. Ayrıca, Sonuç 4.2.1.4'den her bir limitleme matrisinin bir SCM olduğu kolayca görülür.

4.4.4. Tanım. $A=(a_{nk})$ yakınsak dizileri yakınsak dizilere dönüştüren bir limitleme matrisi ve $N \subset \omega$ olmak üzere N üzerinde A-yakınsak her dizinin bir uzaması aynı limite C_1-yakınsak ise bu matrise *N üzerinde Düzgün Seyrek Cesàro Matrisi* ($DSCM_N$) denir. Eğer $N=\ell_\infty$ ise *Düzgün Seyrek Cesàro Matrisi* (DSCM) adını alır.

Tanımlardan her $DSCM_N$'nin aynı zamanda bir SCM_N olduğu kolayca görülür. Ancak tersi doğru değildir.

4.4.5. Örnek.

$$a_{nk} = \begin{cases} 1/2, & k = 4^n \\ 1/2, & k = 4^n - 1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlı $A = (a_{nk})$ matrisi Teoplitz-Silverman koşullarını sağladığından bir regüler matristir. Bu matris bir SCM'dir. Çünkü her sınırlı dizi limit noktalarına C_1-yakınsak olacak şekilde uzayabilir (Sonuç 4.2.1.4). Ancak bu matris bir DSCM değildir. Çünkü

$$x = (\underbrace{0}_{2^0}, \underbrace{1}_{2^0}, \underbrace{0,0}_{2^1 \text{ tane}}, \underbrace{1,1,1,1}_{2^2 \text{ tane}}, \underbrace{0,0,0,0,0,0,0,0}_{2^3 \text{ tane}}, \underbrace{1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1,1}_{2^4 \text{ tane}}, 0, \cdots)$$

dizisi için

$$\lim_A x = \frac{1}{2}$$

iken bu dizinin $1/2$'ye C_1-yakınsak olan bir uzaması yoktur (Örnek 4.2.1.14).

4.4.6. Önerme. $N \subset M \subset \omega$ olsun. Eğer $A \in \mathrm{SCM_M}$ ise $A \in \mathrm{SCM_N}$'dir.

İspat. Tanım 4.4.3'den görülür.

Her $\mathrm{DSCM_N}$ aynı zamanda bir $\mathrm{SCM_N}$ olduğundan bu önerme düzgün seyrek Cesàro matrisleri için de doğrudur. Ancak bu önermelerin tersi doğru değildir. Örneğin,

$$a_{nk} = \begin{cases} -1/2, & k = n \\ 1/2, & k = n+1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlı $A = (a_{nk})$ matrisi c_0 üzerinde bir DSCM'dir, ancak ℓ_∞ üzerinde değildir. Diğer yandan, bu matris c_0 üzerinde bir SCM'dir ancak ω üzerinde bir SCM değildir. Çünkü $x = (n)$ dizisini $\sigma = (1/2)$ sabit dizisine dönüştürür. Ancak x dizisinin tüm uzamalarının Cesàro ortalamaları sonsuza ıraksar (Teorem 3.2.2.4).

4.4.7. Önerme. Her bir DSCM ω bir regüler matris dönüşümüdür.

İspat. Yakınsak bir dizinin her uzaması aynı limite yakınsaktır. Ayrıca Cesàro ortalaması bir regüler matris dönüşümü tanımladığından herhangi bir DSCM ω regülerdir.

4.4.8. Sonuç. $c \subset N \subset \omega$ olmak üzere her bir DSCM$_N$ bir regüler matris dönüşümüdür.

Not. Regüler olmayan bir SCM$_N$ vardır.

4.4.9. Örnek.

$$a_{nk} = \begin{cases} -1/2, & k = n \\ 1/2, & k = n+1 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlı $A = (a_{nk})$ matrisi bir SCM'dir. Ancak regüler değildir. Çünkü bu matris her yakınsak diziyi sıfıra yakınsak olan bir diziye dönüştürür.

4.4.10. Örnekler.

(i) I birim matris ω üzerinde bir DSCM'dir.

(ii) Teorem 3.2.2.6'dan dolayı Zweier matrisi ω üzerinde bir DSCM'dir.

(iii) Cesàro matrisi ω üzerinde bir DSCM'dir.

Şimdi (R, p_n) Riesz Matrislerinin hangi koşullar altında bir SCM veya bir DSCM olduğunu inceleyelim. Öncelikle her regüler Riesz matrisinin bir DSCM olmak zorunda olmadığını bir örnekle verelim.

4.4.11. Örnek. $n \in \mathbb{N}$ ve

$$p_k = \begin{cases} 1, & k = 0 \\ 2^{2n-1}, & k = 2^{n+1} - 3 \\ 2^{2n}, & k = 2^{n+1} - 2 \\ 0, & \text{diğer durumlar} \end{cases}$$

ile tanımlı (p_k) dizisini ele alalım. Açıktır ki (R, p_n) bir regüler Riesz matrisidir. Ancak bir DSCM değildir; çünkü,

$$x=(\overbrace{1}^{2^0},\overbrace{0}^{2^0},\overbrace{1/2,1/2}^{2^1},\overbrace{0,0}^{2^1},\overbrace{1/2,1/2,1/2,1/2}^{2^2},\overbrace{0,0,0,0}^{2^2},\cdots)$$

dizisi $1/3$'e (R,p_n)-toplanabilir iken bu dizinin $1/3$ noktasına C_1-yakınsak bir uzaması yoktur (Teorem 4.2.1.9).

4.4.12. Teorem. (p_n) negatif olmayan reel sayıların bir azalan dizisi olmak üzere

i. $\lim_{n\to\infty} p_n = p \in \mathbb{N}$,

ii. $\left(n\left(p_n - [\![p_n]\!]\right)\right)$ dizisi sınırlıdır

koşulları sağlanıyorsa (R,p_n) bir DSCM'dir.

İspat. (i)'den (R,p_n) bir regüler matristir. $x=(x_n)\in m$ olsun. O halde

$$\exists M>0:\ \forall n\in\mathbb{N}\quad |x_n|\le M\,.$$

Ayrıca

$$\lim_{R_p} x = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{P_n}\sum_{k=0}^{n} p_k x_k = \alpha \tag{4.5}$$

olsun, burada $P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_n$. $m_n = [\![p_n]\!]$ olmak üzere (x_n) dizisinin $m=(m_n)$ uzaması

$$(y_n) = (\overbrace{x_0,x_0,\cdots,x_0}^{m_0 \text{ tane}},\overbrace{x_1,\cdots,x_1}^{m_1 \text{ tane}},\cdots,\overbrace{x_k,\cdots,x_k}^{m_k \text{ tane}},\cdots)$$

olsun. $y=(y_n)$ dizisi için

$$\lim_{C_1} y = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y_n = \alpha$$

olduğu gösterilirse ispat tamamlanır. (i)'den dolayı bir $N\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n\ge N$ için $m_n = p$'dir. $n\ge N$ olacak şekilde keyfi bir $n\in\mathbb{N}$ alalım. Bu durumda

$$n=\sum_{k=0}^{N-1} m_k + ip + s, \qquad i\in\mathbb{N}_0\,,\quad 0\le s\le p$$

şeklinde yazılabilir. Bu durumda y dizisinin *n*. Cesàro ortalaması

$$\tau_n = \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{n} y_k = \frac{1}{n+1}\left(\sum_{k=0}^{N+i-1} m_k x_k + s x_{N+i}\right)$$
$$= \frac{P_{N+i-1}}{n+1}\left(\frac{1}{P_{N+i-1}}\sum_{k=0}^{N+i-1} p_k x_k\right) - \frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N+i-1}\left(p_k - [\![p_k]\!]\right) x_k + \frac{s x_{N+i}}{n+1}$$

şeklinde yazılabilir. (ii) koşulu gereğince

$$\lim_{i\to\infty}\frac{P_{N+i-1}}{n+1} = \lim_{i\to\infty}\frac{P_{N+i-1}}{\sum_{k=0}^{N-1} m_k + ip + s + 1} = \lim_{i\to\infty}\frac{\left(N+i-1\right)p + \log\left(N+i-1\right)}{\sum_{k=0}^{N-1} m_k + ip + s + 1} = 1 ,$$

dolayısıyla (4.5) dikkate alınırsa

$$\lim_{i\to\infty}\frac{P_{N+i-1}}{n+1}\left(\frac{1}{P_{N+i-1}}\sum_{k=0}^{N+i-1} p_k x_k\right) = \alpha .$$

olur. Diğer yandan

$$0 \le \lim_{i\to\infty}\frac{1}{n+1}\sum_{k=0}^{N+i-1}\left|p_k - [\![p_k]\!]\right|\left|x_k\right| \le M \lim_{i\to\infty}\frac{\log\left(N+i-1\right)}{\sum_{k=0}^{N-1} m_k + ip + s + 1} = 0$$

ve

$$\lim_{i\to\infty}\frac{s\, x_{N+i}}{n+1} = 0$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\tau_n = \alpha$$

elde edilir. Bu ise istenen sonuçtur. ■

Dikkat edilirse yukarıdaki teorem $p = 0$ durumu için uygulanamaz. Bu durum için aşağıdaki teorem verilebilir. Bu teoremin ispatında kullanmak için önce yardımcı bir teorem verelim.

4.4.13. Lemma. (p_n) pozitif sayıların azalan bir dizisi olmak üzere $\left(\frac{P_n}{np_n}\right)$ bir sınırlı dizi ise $\left(\frac{1}{n}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k-p_{k+1}}{p_k p_{k+1}}P_k\right)$ dizisi de sınırlıdır, burada $P_n = p_0 + p_1 + \cdots + p_{n-1}$.

İspat.

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k-p_{k+1}}{p_k p_{k+1}}P_k &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k-p_{k+1}}{p_k p_{k+1}}P_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k-p_{k+1}}{p_k p_{k+1}}\left(P_{k+1}-P_k\right)\\ &= \sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k-p_{k+1}}{p_k p_{k+1}}P_{k+1} - \sum_{k=0}^{n-1}\left(1-\frac{p_{k+1}}{p_k}\right)\\ &\le \sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k-p_{k+1}}{p_k p_{k+1}}P_{k+1}\end{aligned}$$

eşitsizliğinin sağ tarafına Abel Kısmi Toplamlar Formülü uygulanırsa

$$\begin{aligned}\sum_{k=0}^{n-1}\frac{p_k-p_{k+1}}{p_k p_{k+1}}P_{k+1} &= P_n\sum_{k=0}^{n-1}\left(\frac{1}{p_{k+1}}-\frac{1}{p_k}\right) - \sum_{k=0}^{n-2}\left(P_{k+2}-P_{k+1}\right)\sum_{i=0}^{k}\left(\frac{1}{p_{i+1}}-\frac{1}{p_i}\right)\\ &= P_n\left(\frac{1}{p_n}-\frac{1}{p_1}\right) - \sum_{k=0}^{n-2}p_{k+2}\left(\frac{1}{p_{k+1}}-\frac{1}{p_1}\right)\\ &= \frac{P_n}{p_n}-\frac{P_n}{p_1}-\sum_{k=0}^{n-2}p_{k+2}\left(\frac{1}{p_{k+1}}-\frac{1}{p_1}\right)\\ &\le \frac{P_n}{p_n}\end{aligned}$$

elde edilir. Bu ise istenen sonucu verir. ■

4.4.14. Teorem. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n > 0$ ve (p_n) azalan dizi olsun.

i. $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$.

ii. $\sup_{n\in\mathbb{N}} P_n/(np_n) < \infty$

ise (R, p_n) bir DSCM'dir.

İspat. İstenen sonuç Lemma 4.4.13 ve Teorem 3.2.3.4'den görülür.■

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. SONUÇLAR

Bu tez çalışmasının sonucunda seyrek serilerin ve uzatılmış dizilerin aritmetik ortalamalarının yakınsaklığı üzerine araştırmaların detaylı bir derlemesi yapılmış oldu. Ayrıca ıraksak seriler teorisindeki uygulamalarda kendine yer bulabilecek bir kavram olan “Seyrek Cesàro Metodu” tanımlanmış aşağıda liste olarak verilen sonuçlar elde edilmiştir.

1. x dizisinin bir m-uzaması bir a sayısına C_1-yakınsak ve $M_n = m_0 + m_1 + \cdots + m_n$ olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa x dizisi de a sayısına C_1-yakınsaktır.

   i. $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{M_n}{nm_n} < \infty$,

   ii. $\sup\limits_{n} \dfrac{1}{n} \sum\limits_{k=1}^{n-1} M_k \left| \dfrac{1}{m_k} - \dfrac{1}{m_{k+1}} \right| < \infty$.

2. Her $\mathrm{DSCM}_{\mathrm{N}}$ aynı zamanda bir $\mathrm{SCM}_{\mathrm{N}}$’dir. Ancak tersi doğru değildir.

3. Her $\mathrm{DSCM}\,\omega$ bir regüler matristir.

4. (p_n) negatif olmayan reel sayıların bir azalan dizisi olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa (R, p_n) bir DSCM’dir.

   i. $\lim\limits_{n\to\infty} p_n = p \in \mathbb{N}$,

   ii. $\left(n\left(p_n - [\![p_n]\!]\right)\right)$ dizisi sınırlıdır.

5. Her $n \in \mathbb{N}$ için $p_n > 0$, (p_n) bir azalan dizi olmak üzere aşağıdaki koşullar sağlanırsa (R, p_n) bir DSCM’dir.

   i. $\lim_{n\to\infty} p_n = 0$,

   ii. $\sup_{n\in\mathbb{N}} P_n/(np_n) < \infty$.

5.2. ÖNERİLER

Tezde verilen bilgiler ışığında literatürde bilinen diğer toplanabilme metotlarının hangi koşullar altında Seyrek Cesàro Matrisi veya Düzgün Seyrek

Cesàro Matrisi olduğu incelenebilir. Bu matrislerin karakteristik özelliği araştırılabilir ve toplanabilme özellikleri incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1] Chapman, S., "On Non-integral Orders of Summability of Series and Integrals", London Mathematical Society, 2(1): 369-409, (1911).

[2] Hardy, G. H., "Generalisation of a Theorem in Theory of Divergent Series", London Mathematical Society, 2(1): 255-264, (1908).

[3] Bromwich, T. J. I., "An Introduction to the Theory of Infinite Series", Macmillan and company, 535 s., (1992).

[4] Vlasenko, V. F., "Summability of Diluted Series by Regular Positive Matrix Methods", Mathematicheskie Zametki, 19(3): 11-20, (1966).

[5] Vlasenko, V. F., "A Theorem on the Summing of Diluted Series", Mathematicheskie Zametki, 2(3): 257-266, (1967).

[6] Hardy, G. H., "Divergent Series", The Clarendon Press, Oxford, 396 s., (1963).

[7] Gaier, D., "Limitierung Gestreckter Folgen", Publ. Ramanujan Inst., No. 1: 223-234, (1969).

[8] Dawson, D. F., "Summability of Subsequences and Stretchings of Sequences", Pac. J. of Math., 44(2): 455-460, (1973).

[9] Dawson, D. F., "A Tauberian Theorem For Stretchings", Journal of the Mathematical London Mathematical Society, 2(1): 27-33, (1976).

[10] Dawson, D. F., "Summability of Matrix Transforms of Strechings and Subsequences", Pac. J. of Math., 77(1): 75-81, (1978).

[11] Isbell, J. R., "On Dilution and Cesàro Summation", American Mathematical Society, 45(3): 397-400, (1974).

[12] Drobot, V., "On the Dilution of Series", Annales Polonıcı Mathematıcı, 30(3): 323–331, (1975).

[13] Keagy, T. A., "Summability of Alterations Based on Stretchings of Sequences", Houston Journal of Mathematics, 9(3): 407-413, (1983).

[14] Keagy, T. A., "Matrix Methods and the Property of Stretchings", American Mathematical Society, 101(4): 667-670, (1987).

[15] Patterson, R. F., "Analogues of Some Tauberian Theorems for Stretchings", İnternational Journal of Mathematics and Mathematical Sciences, 27(2): 99-109, (2001).

[16] Drobot, V., “Overconvergence and (C,1) Summability”, American Mathematical Society, 25(1): 13-15, (1970).

[17] Gharibyan, T. L. and Luh, W., “Summability of Elongated Sequences”, Computational Methods and Function Theory, 11(1): 59-70, (2011).

[18] Luh, W. and Stepanyan, A., “Power Series With Radius of Convergence Zero-Overconvergence, Elongations, Summability”, Contemprary Mathematical Analysis, 46(4): 227-235, (2011).

[19] Luh, W. and Niess, M., “Elongating the Partial Sums of Faber Series”, J.Math. Anal. Appl., 398(1): 123-127, (2013).

[20] Tunç, T. and Küçükaslan, M., “On a Relation Between Overconvergence and Summability of Power Series”, Adv. Math. Sci. Journal, 3(1): 15-22, (2014).

[21] Balcı, M., “Matematik Analiz”, Balcı Yayınları, Ankara, 420 s., (1997).

[22] Boos, J., “Classical and Modern Methods in Summability”, Oxford Science Publications, New York, 586 s., (2006).

[23] Musayev, B., Alp, M., Mustafayev, N. and Ekincioğlu, İ., “Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz II, Tekağaç Eylül Yayıncılık, 1024 s., (2003).

[24] Petersen, G. M., “Regüler Matris Transformations”, Mc Grow-Hill Company Limited London, New York, 142 s., (1966).

[25] Peyerimhoff, A., “Lectures on Summability”, Springer–Verlag, New York, 111 s., (1969).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Ali ARPACIOĞLU

Doğum Tarihi: 07/10/1987

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Matematik-Fen	Pakize Kokulu Süper Lisesi	2001-2005
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2006-2010
Y. Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2011-…

(Varsa) Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Memur	Mersin Üniversitesi	2013-devam

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. Uzatılmış Dizilerin Toplanabilirliği Üzerine (T. Tunç ile), 14. Matematik Sempozyumu, 14-16 Mayıs 2015, Niğde