SINIR KOŞULU SPEKTRAL PARAMETREYE BAĞLI BİR SINIF STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

FATMA AYÇA ÇETİNKAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

MERSİN
HAZİRAN – 2016

SINIR KOŞULU SPEKTRAL PARAMETREYE BAĞLI BİR SINIF STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

FATMA AYÇA ÇETİNKAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

DOKTORA TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

MERSİN
HAZİRAN– 2016

Fatma Ayça ÇETİNKAYA tarafından Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU danışmanlığında hazırlanan "Sınır Koşulu Spektral Parametreye Bağlı Bir Sınıf Sturm-Liouville Operatörü için Ters Problem" başlıklı bu çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından oy birliği ile Doktora Tezi olarak kabul edilmiştir.

İmza

Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

Prof. Dr. Ali HAVARE

Prof. Dr. Bünyamin YILDIZ

Prof. Dr. Kemal AYDIN

Yrd. Doç. Dr. Özgür MIZRAK

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 27../.06../2016.tarih ve ..2016.636/..24...... sayılı kararıyla onaylanmıştır.

T.C.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, çizelge ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

SINIR KOŞULU SPEKTRAL PARAMETREYE BAĞLI BİR SINIF STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

Fatma Ayça ÇETİNKAYA

ÖZ

Bu çalışmada parçalı sürekli katsayıya sahip ikinci mertebeden diferansiyel denklem ve spektral parametreye bağlı sınır koşullarından oluşan sınır değer problemleri için spektral analizin düz ve ters problemleri çözülmüştür. Ele alınan problemler için düz problem olarak,

1. Sınır değer probleminin özel çözümlerinin özellikleri incelenmiş,
2. Özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller bulunmuş,
3. Özel Hilbert uzaylarında sınır değer probleminin operatör formülasyonu verilmiş,
4. Rezolvent operatör inşa edilmiş ve özfonksiyonlara göre ayrışım formülü elde edilmiştir.

Ele alınan problemler için ters problem olarak,

1. Sınır değer problemlerine uygun Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonları tanımlanmış
2. Weyl fonksiyonuna ve spektral verilere göre teklik teoremleri ispat edilmiştir

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Operatörü, Ayrışım Formülü, Ters Problem, Weyl Fonksiyonu

Danışman: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

AN INVERSE PROBLEM FOR CLASS OF STURM-LIOUVILLE OPERATOR WITH SPECTRAL PARAMETER IN BOUNDARY CONDITIONS

Fatma Ayça ÇETİNKAYA

ABSTRACT

This work aims to examine the direct and inverse problem for boundary value problems which consist a second order differential equation with a piecewise continuous coefficient and a spectral parameter in boundary condition. When examining the direct problem,

1. The properties of the special functions of the boundary value problems have been investigated,
2. Asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions have been obtained,
3. The theoretic formulation of the boundary value problem in special Hilbert spaces has been given,
4. The resolvent operator has been constructed and the expansion formula with respect to eigenfunctions has been obtained.

When examining the inverse problem,

1. The evolution of the Weyl solution and Weyl function has been discussed.
2. Uniqueness theorems for the solution of the inverse problem with Weyl function and spectral data have been proven.

Key Words: Sturm – Liouville Operator, Expansion Formula, Inverse Problem, Weyl Function

Advisor: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında bilimsel anlamda hiçbir özveriden kaçınmayan çok değerli tez danışmanım Prof. Dr. Hanlar Reşidoğlu'na, ayrıca yüksek lisans ders ve tez aşamasında desteğini hiçbir zaman esirgemeyen bölümdeki hocalarıma ve araştırma görevlisi arkadaşlarıma, Mersin Üniversitesi BAP Koordinatörlüğüne teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

SİMGE ve KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
λ	Spektral parametre
$\Delta(\lambda)$	Karakteristik fonksiyon
$D(L)$	L operatörünün tanım bölgesi
W	Wronskiyen
$\dot{e}(\lambda, x)$	λ 'ya göre türev
$e'(\lambda, x)$	x 'e göre türev
R_λ	Rezolvent operatör
$\square$	İspatın bittiğini gösterir

1. GİRİŞ

Çalışmada ikinci mertebeden diferansiyel denklem ve spektral parametreye bağlı sınır koşulundan oluşan sınır değer problemleri ele alınmıştır. Bu problemler ile kısmi türevli diferansiyel denklemler teorisinde, sınır koşulları zamana göre türev içeren problemlerin çözümü sırasında karşılaşılır. Özel olarak, bir ucu sıvıda olan katı cisimde ısı difüzyon olayı, mekanikte bir ucunda yük olan çubuğun titreşimi ve benzeri problemlerin çözümü adi diferansiyel denklem için sınır koşulu spektral parametre içeren problemlerin incelenmesine indirgenir.

Örneğin, varsayalım ki, bir ucu orijine bağlı, diğer ucuna ise M kütleli yük bağlanmış tel dikey olarak OX ekseni boyunca aşağıya doğru yönlendirilmiş olsun. k, Young modülü olmak üzere telin gerilimi ku_x ile gösterilir. Bu durumda orijinde sınır koşulu $u(0,t)=0$ ve yer çekimi dikkate alınınca diğer uç nokta olan $x=1$ noktasında ise $Mu''_{tt}=-ku'_x$ koşulu sağlanır. Bu problemin matematiksel modeli

$$\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial x^2}=\frac{\partial^2 u(x,t)}{\partial t^2} \quad 0\le x\le 1,\ t>0$$

$$u(0,t)=0,\ k{u_x}'(1,t)+Mu''(1,t)=0$$

$$u(x,0)=\varphi(x),\ u'(x,0)=\psi(x)$$

biçiminde elde edilebilir, burada $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ yeterince düzgün verilmiş fonksiyonlardır. Problemi değişkenlerine ayırarak çözerken sınır koşulu λ parametresini içeren

$$y''+\lambda y=0$$

$$y(0)=0,\ y'(1)=d\lambda y(1)$$

problemi ile karşılaşılır, burada d, telin yoğunluğuyla belirlenmiş pozitif bir sayıdır.

Benzer problem homojen olmayan ortamda ve farklı dış kuvvetlerin etkisinde incelendiğinde

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u$$

biçiminde kısmi diferansiyel denklemle ifade edilebilir, burada $\rho(x)$ çubuğun yoğunluğudur. Bu durumda,

$$\left[p(x)y'\right]' + \left[\lambda\rho(x) - q(x)\right]y = 0$$

$$y(0) = 0,\ y'(1) = \lambda dy(1)$$

sınır değer problemi ile karşılaşılır, burada $\rho(x)$ parçalı sürekli fonksiyon, λ ise spektral parametredir. Dolayısıyla, birçok mekanik, jeofizik, fizik ve mühendislik olaylarında ortaya çıkan problemlerin çözümü için süreksiz değişken katsayılı denklem ve sınırda spektral parametre içeren özdeğer problemlerinin incelenmesi önem taşımaktadır. Bu biçimde problemler, matematiksel olarak, klasik L_2 uzayında ifade edilemezler. Bu tip problemlerin operatör biçimi basit bir durum için J. Walter [1] tarafından $L_2 \times \mathbb{C}$ uzaylarında verilmiştir.

Tezde

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x)y$$

biçiminde diferansiyel denklemden ve spektral parametre içeren sınır koşullarından oluşan sınır değer problemleri için sonlu aralıkta spektral analizin düz ve ters problemleri incelenmektedir. Burada $q(x) \in L_2[0,\pi]$ reel değerli bir fonksiyondur ve $0 < \alpha \neq 1$ olmak üzere, $\rho(x)$ katsayısı

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < a \\ \alpha^2, & a \le x \le \pi \end{cases}$$

biçiminde parçalı sürekli bir fonksiyon olarak tanımlanmaktadır.

Bölüm 4.1.1, 4.2.1 ve 4.3.1'de ele alınan sınır değer problemine uygun özel çözümler tanımlanmış ve özel çözümlerin biçimleri elde edilmiştir.

Bölüm 4.1.2, 4.2.2 ve 4.3.2'de ele alınan sınır değer problemine uygun olarak çalışılan iç çarpım uzayında operatörün teorik biçimi gösterilmiş ve normlaştırıcı sayılar tanımlanmıştır. Daha sonra özfonksiyonların dik olduğunu gösteren teoremler ispatlanmıştır.

Bölüm 4.1.3, 4.2.3. ve 4.3.3'de karakteristik fonksiyon tanımlanmış ve karakteristik fonksiyon ile ele alınan sınır değer probleminin sıfırları arasındaki ilişki incelenmiştir. Karakteristik fonksiyonun türevinin sıfırdan farklı olarak bulunmasından yola çıkılarak ele alınan sınır değer probleminin özdeğerlerinin basit olduğu gösterilmiştir.

Bölüm 4.1.4, 4.2.4 ve 4.3.4'de özdeğerlerin ve Bölüm 4.1.5, 4.2.5 ve 4.3.5'de ise özfonksiyonların özellikleri incelenmiş, ayrıca ele alınan sınır değer problemine uygun Green fonksiyonu tanımlanmış, problemin özfonksiyonlarının çalışılan özel Hilbert uzayında tam bir sistem oluşturdukları gösterilmiş ve özfonksiyonlara göre ayrışım formülü elde edilmiştir.

Son olarak Bölüm 4.1.6, 4.2.6 ve 4.3.6'da ise spektral analizin ters problemi incelenmiştir. Probleme uygun Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu tanımlandıktan sonra, potansiyel fonksiyonun Weyl fonksiyonuna ve spektral verilere göre tek türlü belirlenebileceği gösterilmiştir.

2.KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Sınır koşulu özdeğer içeren diferansiyel denklemlerden oluşan sınır değer problemlerinin operatör formülasyonu [1-7]'de verilmiştir. Süreksiz katsayılı ve çözümü aralık içinde süreksizliğe sahip sınır değer problemleri için benzer problemler [8-13] çalışmalarında incelenmiştir.

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde spektral analizin ters problemlerinin uygulamaları, fiziğin uygulamalı problemlerinde önemli yer tutmaktadır. Spektral analizin düz problemi olarak diferansiyel operatörün spektrumunun öğrenilmesi, özfonksiyonlara göre ayrışım ve bunlara ilişkin spektral özelliklerin incelenmesi, ters problem olarak ise, operatörün spektral karakteristiklere göre inşası anlaşılmaktadır.

Klasik

$$-y''+q(x)y=\lambda y,$$

$$y'(0)-hy(0)=0,\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0$$

Sturm-Liouville operatörü için ters problemin çözümünün tekliği, yani $q(x)$ potansiyel fonksiyonunun ve h,H reel sayılarının tek türlü inşası G. Borg [14] ve N. Levinson [15] tarafından gösterilmiştir.

Ters problemlerin çözümünde operatör dönüşümlerini ilk kez V. A. Marchenko [16, 17] uygulayarak Sturm-Liouville operatörünün spektral fonksiyona göre tek türlü inşasını göstermiştir. I. M. Gelfand ve B. M. Levitan [18] ters problemin çözümü için gerekli ve yeterli koşullar elde ederek, spektral fonksiyona göre operatörün inşası algoritmasını göstermişlerdir. M. G. Gasymov ve B. M. Levitan [19] çalışmasında ise iki spektruma göre ters problemin tam çözümü verilmiştir.

M. G. Gasymov'un [20] çalışmasında

$$-y''+q(x)y=\lambda^2\rho(x)y,\ 0<x<+\infty \tag{2.1}$$

$$y(0)=0$$

sınır değer problemi için yarı eksende saçılma teorisinin ters problemi ele alınır, burada $xq(x)\in L_2(0,\infty)$ olmak üzere $q(x)$ reel değerli bir fonksiyon, λ kompleks parametre ve $0<\alpha\neq 1$ olmak üzere $\rho(x)$ ise parçalı sürekli fonksiyondur:

$$\rho(x)=\begin{cases}\alpha^2, 0\le x<a,\\ 1,\ a\le x<+\infty.\end{cases}$$

Bu sınır değer problemi için ters problemin çözümü $[0,a]$ ve $[a,+\infty)$ aralıklarında operatör dönüşümü kullanılmak suretiyle iki ters probleme indirilerek yapılmıştır. Bu yöntemle farklı sınır koşulu için ters problem A. A. Darwish'in [21] çalışmasında ele alınmıştır. Daha sonra bu problem farklı yöntemlerle [22-25] çalışmalarında incelenmiştir. (2.1) denklemi için sonlu aralıkta spektral analizin ters problemleri [26-29] çalışmalarında çözülmüştür.

Ayrıca, $\rho(x)\equiv 1$ olduğunda ve sınır koşulları spektral parametre içerdiğinde sonlu aralıkta ters problemler [30-36] çalışmalarında ele alınmaktadır. $\rho(x)\neq 1$ olduğunda benzer problemler [37-40] çalışmalarında yapılmıştır.

Spektral parametreye bağlı, yani sadece diferansiyel denklemde değil, sınır koşulunda da spektral parametre içeren Sturm – Liouville problemlerinin farklı yönlerdeki (özdeğer problemi, özfonksiyonlara göre ayrışım problemleri, vb.) spektral analizleri [41-43]'de gösterilmiştir. Süreksiz değişken katsayıya sahip Sturm – Liouville operatörlerinden oluşan benzer problemler ise [44-46]'da incelenmiştir.

Ayrıca, sonlu aralıkta, sınır koşulunda spektral parametre içeren Sturm-Liouville operatöründen oluşmuş sınır değer probleminin çözümünün tekliği [47-51]'de ele alınmıştır.

Sonlu aralıkta sınır koşulunda spektral parametre içermeyen ve diferansiyel denklemde süreksiz katsayıya sahip sınır değer probleminin düz ve Weyl fonksiyonuna göre ters problemi [28, 29, 40]'da ve ters problem için gerek ve yeter koşul [27]'de incelenmiştir.

Sturm-Liouville probleminin, özdeğerler kümesinin ve potansiyelinin çalışılan aralığın yarısındaki bilinenlerinden yola çıkılarak ele alınan ve literatürde yarı ters problemler olarak adlandırılan problemler [50, 51] çalışmalarında incelenmiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 STURM-LIOUVILLE PROBLEMİ

$Q=\{t>0, 0<x<l\}$ bölgesinde

$$\rho(x)\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial}{\partial x}\left(p(x)\frac{\partial u}{\partial x}\right)-q(x)u \tag{3.1.1}$$

l uzunluklu homojen olmayan telin titreşimi denklemi göz önüne alınsın, burada $\rho(x)>0$, $p(x)>0$, $q(x)\geq 0$ ve $\rho(x)\in C[0,l]$, $p(x)\in C^{(1)}[0,l]$, $q(x)\in C[0,l]$ dir.

(3.1.1) denklemi için

$$\alpha u(0,t)+\beta\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=0}=0,\ \gamma u(l,t)+\delta\left.\frac{\partial u}{\partial x}\right|_{x=l}=0\ \ (t\geq 0)$$

homojen koşullarla oluşan karışık problem biçimindedir, burada $\alpha,\beta,\gamma,\delta$ sabitlerdir ve $\alpha^2+\beta^2\neq 0,\ \gamma^2+\delta^2\neq 0$ dır. Özel olarak,

1. $\beta=\delta=0$ olduğunda $u(0,t)=0,\ u(l,t)=0$ koşulları uçları bağlı telin,
2. $\alpha=\gamma=0$ olduğunda $u_x(0,t)=0,\ u_x(l,t)=0$ koşulları uçları serbest telin,
3. $u_x(0,t)-h_0u(0,t)=0,\ u_x(l,t)+h_1u(l,t)=0$ koşulları ($h_0>0, h_1>0$) uçları esnek telin titreşimlerini ifade eder.

Basitlik için (3.1.1) denkleminin

$$u(0,t)=0,\ u(l,t)=0 \tag{3.1.2}$$

sınır koşullarını ve

$$u(x,0)=\varphi_0(x),\ \left.\frac{\partial u}{\partial t}\right|_{t=0}=\varphi_1(x) \tag{3.1.3}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümünü bulmak için Fourier yöntemi uygulanarak çözüm

$$u(x,t)=X(x)T(t)\neq 0$$

biçiminde aranır. Sonuçta,

$$T''(t)+\lambda T(t)=0, \tag{3.1.4}$$

$$\frac{d}{dx}\left(p(x)\frac{dX}{dx}\right)+\left[\lambda\rho(x)-q(x)\right]X(x)=0 \tag{3.1.5}$$

adi diferansiyel denklemleri ve

$$X(0)=0,\ X(l)=0 \tag{3.1.6}$$

sınır koşulları elde edilir.

Tanım 3.1.1. (3.1.5) denkleminin (3.1.6) sınır koşullarını sağlayan sıfırdan farklı çözümü olacak şekildeki λ değerlerinin bulunmasına Sturm-Liouville problemi denir. λ 'nın bu değerlerine özdeğerler, bu özdeğerlere karşılık gelen sıfırdan farklı çözümlere ise özfonksiyonlar denir.

(3.1.5), (3.1.6) probleminin

$$\int_0^l \rho(x) X_k^2(x)\,dx = 1,\ (k=1,2,\cdots) \tag{3.1.7}$$

koşulunu sağlayan $X_k(x)$ özfonksiyonlarına $\rho(x)$ çekirdek fonksiyonuna göre normlaştırılmıştır denir.

Önerme 3.1.1. Her bir özdeğere, sabit çarpanı ile sadece bir özfonksiyon karşılık gelir.

Önerme 3.1.2. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar $[0,l]$ aralığında $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortogonaldir:

$$\int_0^l \rho(x) X_m(x) X_n(x) dx = 0,$$

burada $X_m(x), X_n(x)$ farklı λ_m, λ_n özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlardır.

Önerme 3.1.3. (3.1.5), (3.1.6) probleminin sayılabilir sayıda

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \cdots < \lambda_n < \cdots,\ \lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty$$

özelliklerine sahip pozitif özdeğerleri vardır ve bu özdeğerlere

$$X_1(x), X_2(x), \cdots, X_n(x), \cdots$$

özfonksiyonları karşılık gelir.

(3.1.5) denklemini çözerek

$$T_k(t) = A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t$$

elde edilir. (3.1.1), (3.1.2) probleminin çözümünü

$$u(x,t) = \sum_{k=1}^{\infty} \left(A_k \cos\sqrt{\lambda_k}t + B_k \sin\sqrt{\lambda_k}t\right) X_k(x)$$

biçiminde arayarak ve (3.1.3) başlangıç koşullarını sağlatarak A_k, B_k Fourier katsayıları

$$A_k = \int_0^l \rho(x)\varphi_0(x)X_k(x)\,dx,$$

$$B_k = \frac{1}{\sqrt{\lambda_k}}\int_0^l \rho(x)\varphi_1(x)X_k(x)\,dx$$

bulunur. Burada $\left\{X_k(x)\right\}_{k=1}^{\infty}$ fonksiyonları $[0,l]$ aralığında $\rho(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre ortonormal dizi oluştururlar.

Kısmi diferansiyel denklemler teorisinde sınır koşulları zamana bağlı veya yöne bağlı türev içerdiğinde

$$-y'' + \left(q(x) - \lambda\rho(x)\right)y = 0$$

$$U_j(x,\lambda) \equiv \sum_{k=0}^{1}\left(a_{jk}(\lambda)y^{(k)}(0) + b_{jk}(\lambda)y^{(k)}(1)\right) = 0,\ j = 1,2$$

biçiminde spektral problem ile de karşılaşılır.

$y_1(x,\lambda), y_2(x,\lambda)$ denkleminin lineer bağımsız çözümleri olduğunda

$$\Delta(\lambda) \equiv \begin{vmatrix} U_1(y_1) & U_1(y_2) \\ U_2(y_1) & U_2(y_2) \end{vmatrix}$$

denklemine karakteristik denklem denir. $\Delta(\lambda)$'nın sıfırları spektral problemin özdeğerleridir.

$\Delta(\lambda)$, λ'ya bağlı analitik fonksiyon olduğundan spektral problemin ele alındığı D bölgesinde aşağıdaki durumlarla karşılaşılır:

1. D bölgesinde $\Delta(\lambda) \equiv 0$ ise, o halde her bir λ özdeğerdir.

2. $\Delta(\lambda) \neq 0$ ise, D bölgesinde sayılabilirden fazla olmayan sayıda ve D de sonlu limit noktasına sahip olmayan özdeğerler vardır. Ayrıca, diferansiyel denklemin sınır koşulundaki katsayılar λ'ya bağlı tam fonksiyonlar ise, o halde $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu tam fonksiyondur ve bundan dolayı özdeğerler sonlu limit noktasına sahip olmaz.

Dolayısıyla, spektral problemin özdeğerlerin bulunması $\Delta(\lambda)=0$ karakteristik denkleminin köklerinin incelenmesine indirgenir. Genel durumda bu köklerin dağılımının incelenmesi zordur. Bundan dolayı özel durumlar ele alınır. Denklemin ve sınır koşulundaki katsayıların λ'ya bağlı olduğu durumlarda katsayılar üzerine ek koşullar konularak veya özel Hilbert uzayları oluşturularak araştırmalar yapılır. Özdeğerler için kesin bilgi elde edilemese de onların asimptotik davranışları irdelenir. Bundan dolayı, denklemin temel çözümlerinin asimptotik biçimi veya herhangi bir gösterimi önemlidir.

Tanım 3.1.2. L operatörü

$$l(y)=p_0(x)\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+...+p_n(x)y$$

diferansiyel ifadesi ve

$$U_\nu(y)=0 \qquad \nu=1,2,...,n$$

sınır koşullarından oluşan diferansiyel operatör olsun, burada $\frac{1}{p_0(x)}, p_1(x),...,p_n(x)$ katsayıları $[0,1]$ aralığında süreklidir. Ayrıca $U_\nu(y)$ sınır koşulları aşağıdaki biçimde bir lineer form oluşturur:

$$U_\nu(y)=\alpha_0 y_a+\alpha_1 y_a{}'+...+\alpha_{n-1}y_a{}^{(n-1)}+\beta_0 y_b+\beta_1 y_b{}'+...+\beta_{n-1}y_b{}^{(n-1)}=0.$$

$\lambda=-\rho^n$ olsun. O halde $l(y)=\lambda y$ denklemi $l(y)+\rho^n y=0$ biçiminde yazılır. Sadelik için $p_0(x)=1$ alalım. Burada not edelim ki, $p_1(x)\neq 0$ olduğunda $y=e^{-\frac{1}{n}\int p_1(x)dx}$ değişken dönüşümü yapılarak, elde edilen denklemin $(n-1)-$nci mertebeden türevinin katsayısı sıfıra dönüştürülebilir.

Teorem 3.1.1. $p_2,\cdots,p_n$ katsayıları $[0,1]$ aralığında sürekli ise o halde ρ-kompleks düzleminin belirli bir bölgesinde

$$y^{(n)}+p_2 y^{(n-2)}+\cdots+p_{n-1}y'+p_n y+\rho^n y=0$$

denkleminin n tane lineer bağımsız ve $\rho\in T$ ye göre analitik çözümleri $|\rho|\to\infty$ iken aşağıdaki asimptotik biçime sahiptirler:

$$y_k=e^{\rho w_k x}\left[1+O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],$$

$$\frac{dy_k}{dx} = \rho e^{\rho w_k x}\left[w_k + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],\ \frac{d^{n-1}y_k}{\partial x^{n-1}} = \rho^{n-1}e^{\rho w_k x}\left[w_k^{n-1} + O\left(\frac{1}{\rho}\right)\right],\ \left(k = 1, 2, \cdots, n\right)$$

burada T bölgeleri ρ -kompleks düzlemini $2n$ dilime bölerek elde edilir.

Teorem 3.1.2. $\left[0,1\right]$ aralığında regüler sınır koşulları ile oluşan $n-$nci mertebeden bir diferansiyel operatörün özdeğerleri için aşağıdaki asimptotik formüller sağlanır:

Tek sayı $n = 4\nu - 1$ ler için

$$\lambda_k' = \left(-2k\pi i\right)^n \left\{1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$\lambda_k'' = \left(2k\pi i\right)^n \left\{1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},\ k = N, N+1, \cdots$$

ve tek sayı $n = 4\nu + 1$ için

$$\lambda_k' = \left(2k\pi i\right)^n \left\{1 + \frac{n \ln_0 \xi^{(1)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$\lambda_k'' = \left(-2k\pi i\right)^n \left\{1 - \frac{n \ln_0 \xi^{(2)}}{2k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},\ k = N, N+1, \cdots$$

çift sayı $n = 2\mu$ ler için

$$\lambda_k' = \left(-1\right)^\mu \left(2k\pi\right)^{2\mu} \left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi'}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},$$

$$\lambda_k'' = \left(-1\right)^\mu \left(2k\pi\right)^{2\mu} \left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi''}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^2}\right)\right\},\ k = N, N+1, \cdots$$

sağlanır, burada $\xi^{(1)}$ ve $\xi^{(2)}$ belirli sayılardır.

Ayrıca çift sayı $n = 2\mu$ ler için

$$\lambda_k' = \left(-1\right)^\mu \left(2k\pi\right)^{2\mu} \left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right\},$$

$$\lambda_k'' = \left(-1\right)^\mu \left(2k\pi\right)^{2\mu} \left\{1 \mp \frac{\mu \ln_0 \xi}{k\pi i} + O\left(\frac{1}{k^{3/2}}\right)\right\},\ k = n, n+1, \cdots$$

gerçeklenir. İlk üç durumda yeterince büyük modüllerin özdeğerleri basittir, dördüncü durumda ise basit veya iki katlıdırlar.

Tanım 3.1.3. H, bir Hilbert uzayı ve L, bu uzayda tanımlı bir operatör olmak üzere; $R_\lambda = (L-\lambda I)^{-1}$ ifadesi H uzayının tamamında mevcut ve sınırlı olacak biçimde bir $\lambda \in \mathbb{C}$ bulunabiliyorsa, bu λ değerine L operatörünün *regüler noktası* denir. R_λ operatörü ise L 'nin *rezolventi* olarak adlandırılır.

Tanım 3.1.4. Regüler olmayan tüm $\lambda \in \mathbb{C}$ noktalarına A operatörünün *spektrumu* denir. $L-\lambda I$ operatörünün uzayın tümünde tanımlı, $(L-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ değerlerine L operatörünün *özdeğerleri* denir. Bir operatörün özdeğerleri spektrum kümesine dahildir. Bütün özdeğerlerin kümesine operatörün *discrete spektrumu* denir. $(L-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olduğu ancak tüm uzayda tanımlı olmadığı veya $(L-\lambda I)^{-1}$ tersinin olduğu λ değerlerinin oluşturduğu kümeye operatörün *sürekli spektrumu* denir.

L^{-1} operatörü, sürekli çekirdeğe sahip bir integral operatördür. Bu çekirdek, L operatörünün *Green fonksiyonu* olarak adlandırılır.

Teorem 3.1.3. Eğer $Ly=0$ denklemi, sadece $y=0$ çözümüne sahipse, $[a,b]$ aralığında sürekli herhangi bir $f(x)$ fonksiyonu için $Ly=f$ denkleminin bir çözümü vardır ve bu çözüm

$$y(x)=\int_a^b G(x,\xi)f(\xi)d\xi$$

şeklinde ifade edilir, burada $G(x,\xi)$ L operatörünün Green fonksiyonudur.

Teorem 3.1.4. Eğer $f(x)\in L_1(0,\pi)$ ise; o halde,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|}\int_0^\pi f(x)\cos\lambda x dx = \lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda\pi|}\int_0^\pi f(x)\sin\lambda x dx = 0$$

sağlanır.

3.2. TERS PROBLEM

Spektral analizin ters problemi denildiğinde lineer operatörün spektral analize göre inşası anlaşılmaktadır. Bu spektral karakteristikler spektrum, spektral fonksiyon, saçılma verileri, Weyl fonksiyonu ve başka veriler olabilir. Ters problemin çözümünde

I. operatörün tek türlü inşa edilmesi,

II. spektral verilerin ele alınan problemin spektral verileri olması için gerekli ve yeterli koşulların bulunması

III. verilere göre operatörün inşası algoritmasının verilmesi

önemlidir.

$-y''+q(x)y=\lambda y,\ 0\le x\le\pi$ denklemi için aşağıdaki iki sınır koşulunu göz önüne alalım:

$$y'(0)-hy(0)=0,\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0, \tag{3.2.1}$$

$$y'(0)-hy(0)=0,\ y'(\pi)+H_1y(\pi)=0, \tag{3.2.2}$$

burada h,H,H_1 sonlu reel sayılar ve $q(x)$ reel değerli bir fonksiyondur. $\lambda_0<\lambda_1<\lambda_2<\cdots$ (3.2.1) sınır koşulları ve $\mu_0<\mu_1<\mu_2<\cdots$ ise (3.2.2) sınır koşulları ile oluşturulan sınır değer probleminin özdeğerleri olsun.

$\{\lambda_n\}_0^\infty$ ve $\{\mu_n\}_0^\infty$ dizilerinin $q(x)$ fonksiyonunu ve h,H,H_1 sayılarını tek türlü olarak belirlediği; yani, iki spektruma göre sınır problemindeki katsayıların tek türlü olarak inşa edildiği G. Borg tarafından gösterilmiştir.

Teorem 3.2.1. $\lambda<0$ olduğunda $u(x,\lambda)$

$$u''+\lambda\rho^2(x)u=0,\ x>0,$$

$$u(\infty)=0$$

sınır probleminin çözümü olsun, burada $\rho(x)$ parçalı analitik fonksiyondur ve $\rho(x)\ge\rho_0>0$ dır. $R(\lambda)=\dfrac{u'(0,\lambda)}{u(0,\lambda)}$ olmak üzere $\rho(x)$ fonksiyonu $R(\lambda)$'ya göre tek türlü olarak belirtilir.

$\varphi(x,\lambda)$, (3.2.1) sınır koşullarıyla oluşturulmuş sınır değer probleminin $\varphi(0,\lambda)=1$ ve $\varphi'(0,\lambda)=h$ başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun.

Teorem 3.2.2. Sturm-Liouville operatörü spektral fonksiyona göre tek türlü olarak belirlenir.

$q(x)$, $[0,\pi]$ aralığında toplanabilir reel değerli fonksiyon, h ve H reel sayılar olmak üzere

$$-y''+q(x)y=\lambda y, \tag{3.2.3}$$

$$y'(0)-hy(0)=0,\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0 \tag{3.2.4}$$

sınır değer probleminin özdeğerleri $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$, uygun özfonksiyonları $\varphi(x,\lambda_n)$ $(n=0,1,\cdots)$ ve normlaştırıcı sayıları $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ olsun.

Tanım 3.2.1. $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ sayılarına (3.2.3), (3.2.4) sınır değer probleminin spektral verileri denir.

Teorem 3.2.3. $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ ve $\{\alpha_n\}_{n=0}^{\infty}$ sayılarına (3.2.3), (3.2.4) sınır değer probleminin spektral verileri olması için gerek ve yeter koşul aşağıdaki asimptotik formüllerin

$$\sqrt{\lambda_n}=n+\frac{a_0}{n}+o\left(\frac{1}{n}\right),\ \alpha_n=\frac{\pi}{2}+o\left(\frac{1}{n}\right)\ (\,n\neq m \text{ için } \lambda_n\neq\lambda_m \text{ ve } \alpha_n>0\,)$$

sağlanması ve

$$F(x,t)=\frac{1}{\alpha_0}\cos\sqrt{\lambda_0}x\cos\sqrt{\lambda_0}t-\frac{1}{\pi}+\sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{\cos\sqrt{\lambda_n}x\cos\sqrt{\lambda_n}t}{\alpha_n}-\frac{2}{\pi}\cos nx\cos nt\right]$$

fonksiyonunun $0\le x\le\pi,\ 0\le t\le\pi$ için $(m+1)-$ nci mertebeden toplanabilir türevlere sahip olmasıdır.

Ters problemlerin çözümünde dönüşüm operatörleri önemli bir yere sahiptir.

E, bir lineer topolojik uzay, $A:E\to E$, $B:E\to E$ lineer dönüşümler ve $E_1\subset E$, $E_2\subset E$ olsun.

Tanım 3.2.2. Tüm E uzayında tanımlı lineer, tersinir $X:E_1\to E_2$ operatörü aşağıdaki özellikleri sağlasın:

1. X ve onun tersi X^{-1} operatörü tüm E 'de süreklidir.
2. $AX=XB$ veya $A=XBX^{-1}$ operatör denklemi sağlanır.

X 'e, A ve B operatörler çiftinin dönüşüm operatörü denir.

Teorem 3.2.4. $\varphi_\lambda\in E_1$, B operatörünün λ sayısına karşılık gelen özvektörü olsun, yani $B\varphi_\lambda=\lambda\varphi_\lambda$ sağlansın. O halde $\psi_\lambda=X\varphi_\lambda$, A operatörünün λ sayısına karşılık gelen özvektörüdür.

$A=-\dfrac{d^2}{dx^2}+q(x)$ ve $B=-\dfrac{d^2}{dx^2}+r(x)$ biçiminde iki operatör olsun, burada $q(x)$ ve $r(x)$ sürekli fonksiyonlardır. Ayrıca; E, sürekli ve birinci mertebeden sürekli türevlere sahip fonksiyonlar uzayı, $E_1 \subset E$, $f'(0)-h_1 f(0)=0$ koşulunu sağlayan fonksiyon uzayı ve $E_2 \subset E$, $f''(0)-h_2 f(0)=0$ koşulunu sağlayan fonksiyon uzayı olsun, burada h_1 ve h_2 keyfi sonlu sayılardır. Bu durumda $X = X_{A,B} : E_1 \to E_2$ dönüşüm operatörü

$$Xf(x) = f(x) + \int_0^x K(x,t) f(t)\,dt$$

biçimine sahip olur. Burada $K(x,t)$ çekirdek fonksiyonu

$$\frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial x^2} - q(x)K(x,t) = \frac{\partial^2 K(x,t)}{\partial t^2} - r(t)K(x,t)$$

denklemini ve

$$K(x,x) = h_2 - h_1 + \frac{1}{2}\int_0^x \left[q(t)-r(t)\right]dt, \quad \left.\left[\frac{\partial K}{\partial t} - h_1 K\right]\right|_{t=0} = 0$$

koşullarını sağlar.

$\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.2.3) denkleminin (3.2.4) koşullarını sağlayan çözümü olsun. $M(\lambda) := \Phi(0,\lambda)$ alalım. $\Phi(x,\lambda)$ ve $M(\lambda)$ fonksiyonlarına sırasıyla (3.2.3), (3.2.4) sınır değer probleminin Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu denir.

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} = S(x,\lambda) + M(\lambda)\varphi(x,\lambda)$$

eşitliği sağlanır, burada $\psi(x,\lambda)$, $\varphi(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$ fonksiyonları (3.2.3) denkleminin sırasıyla

$$\psi(\pi,\lambda) = 1, \;\; \psi'(\pi,\lambda) = -H;$$

$$\varphi(0,\lambda) = 1, \;\; \varphi'(0,\lambda) = h;$$

ve

$$S(0,\lambda) = 0, \;\; S'(0,\lambda) = 1$$

koşullarını sağlayan özel çözümleri,

$$\Delta(\lambda) = \langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) \rangle := \psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda) - \psi'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)$$

(3.2.3), (3.2.4) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu,

$$\Delta^0(\lambda) := \psi(0,\lambda) = S'(\pi,\lambda) + HS(\pi,\lambda)$$

(3.2.3) denklemi ve $y(0)=0,\ y'(\pi)+Hy(\pi)=0$ sınır koşullarıyla oluşturulmuş L^0 sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu olmak üzere

$$M(\lambda)=-\frac{\Delta^0(\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{3.2.6}$$

ve $\langle \varphi(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle \equiv 1$ dir. Dolayısıyla, Weyl fonksiyonu $\lambda=\lambda_n,\ n\geq 0$ basit köklerine sahip meromorfik bir fonksiyondur.

Teorem 3.2.5. Aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$M(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}. \tag{3.2.7}$$

Weyl fonksiyonuna göre ters problem, verilmiş $M(\lambda)$ fonksiyonu yardımıyla, (3.2.1) denklemindeki $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu tek türlü inşa etmektir.

Teorem 3.2.6. $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise $q(x)=\tilde{q}(x)$ dir. Yani Weyl fonksiyonunun seçimi operatörü tek türlü inşa eder.

(3.2.7)'ye göre $M(\lambda)$ Weyl fonksiyonun seçimi, $\{\lambda_n,\alpha_n\}$ spektral verilerinin seçimine denktir. Diğer yandan (3.2.6)'ya göre Weyl fonksiyonunun sıfırları ve kutup noktaları sırasıyla (3.2.3), (3.2.4) ve L^0 sınır değer problemlerinin spektralarıyla çakışır. Sonuç olarak; $M(\lambda)$, Weyl fonksiyonun seçimi, $\{\lambda_n\}$ ve $\{\lambda_n^0\}$ iki spektrasının seçimine denk olur. Dolayısıyla, Sturm-Liouville denklemini spektral veriler ve iki spektraya göre inşa etmek, Sturm-Liouville denklemini Weyl fonksiyonuna göre inşa etmenin özel halleri olurlar.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. SINIR KOŞULU SPEKTRAL PARAMETREYE BAĞLI BİR SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN TERS PROBLEM

4.1.1. Özel Çözümler

$[0,\pi]$ aralığında tanımlı aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$-y''+q(x)y=\lambda^2\rho(x)y, \tag{4.1.1.1}$$

$$U_1(y):=y(0)=0, \tag{4.1.1.2}$$

$$U_2(y):=\beta_1 y(\pi)+\beta_2 y'(\pi)+\lambda^2\left(\beta_3 y(\pi)+\beta_4 y'(\pi)\right)=0, \tag{4.1.1.3}$$

burada $q(x)\in L_2[0,\pi]$, reel değerli bir fonksiyon; λ, spektral parametre; $0\neq\beta_i\ \left(i=\overline{1,4}\right)$, reel sayılar ve $\rho(x)$, $0<\alpha\neq 1$ olmak üzere

$$\rho(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<a\\ \alpha^2, & a\le x\le\pi\end{cases}$$

biçimindedir.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ ile (4.1.1.1) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=0,\ \ \varphi'(0,\lambda)=1 \tag{4.1.1.4}$$

$$\psi(\pi,\lambda)=-\left(\beta_2+\lambda^2\beta_4\right),\ \ \psi'(\pi,\lambda)=\beta_1+\lambda^2\beta_3 \tag{4.1.1.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan özel çözümlerini gösterelim.

(4.1.1.1) denkleminin çözümü için aşağıdaki integral gösterim sağlanır [40]:

$$e(x,\lambda)=e_0(x,\lambda)+\int_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)}K(x,t)e^{i\lambda t}dt, \tag{4.1.1.6}$$

burada $$e_0(x,\lambda)=\begin{cases}e^{i\lambda x}, & 0\le x<a,\\ \dfrac{1}{2}\left(1+\dfrac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^+(x)}+\dfrac{1}{2}\left(1-\dfrac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)e^{i\lambda\mu^-(x)}, & a<x\le\pi,\end{cases}$$

(4.1.1.7)

$K(x,\cdot)\in L_1\left(-\mu^+(x),\mu^+(x)\right)$, $\mu^\pm(x)=\pm x\sqrt{\rho(x)}+a\left(1\mp\sqrt{\rho(x)}\right)$ dır. Ayrıca, K'_x türevi mevcuttur ve aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\frac{d}{dx}K\left(x,\mu^{+}(x)\right)=\frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)q(x), \tag{4.1.1.8}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{K\left(x,\mu^{-}(x)+0\right)-K\left(x,\mu^{+}(x)-0\right)\right\}=\frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right)q(x), \tag{4.1.1.9}$$

$$K\left(x,-\mu^{+}(x)\right)=0. \tag{4.1.1.10}$$

Bu özelliklere ek olarak, $q(x)$'in diferansiyellenebilir fonksiyon olması durumunda aşağıdaki özellikler de geçerli olur:

$$\rho(x)K_{tt}''-K_{xx}''+q(x)K=0,\ |t|<\mu^{+}(x), \tag{4.1.1.11}$$

$$\int_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}\left|K(x,t)\right|dt\le C\left(\exp\left\{\int_{0}^{x}\left|q(t)\right|dt\right\}-1\right),\ 0<C=sabit. \tag{4.1.1.12}$$

Lemma 4.1.1.1. (4.1.1.1) denkleminin (4.1.1.4) koşullarını sağlayan özel çözümü

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_{0}^{\mu^{+}(x)}A(x,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt \tag{4.1.1.13}$$

biçimindedir, burada $A(x,t)=K(x,t)+K(x,-t)$ çekirdeği (4.1.1.8)-(4.1.1.12) özelliklerini gerçekler.

İspat: $\varphi_0(x,\lambda)=c_1e_0(x,\lambda)+c_2e_0(x,-\lambda)$ ifadesine (4.1.1.4) koşullarını sağlatarak $c_1=\frac{1}{2i\lambda},\ c_2=-\frac{1}{2i\lambda}$ buluruz, burada $e_0(x,\lambda)$ (4.1.1.7) eşitliğinde tanımlandığı biçimde kullanılmıştır. Dolayısıyla

$$\varphi_0(x,\lambda)=\frac{1}{2i\lambda}e_0(x,\lambda)-\frac{1}{2i\lambda}e_0(x,-\lambda)=\frac{1}{\lambda}\sin\lambda x \tag{4.1.1.14}$$

olur. $\varphi(x,\lambda)=c_1e(x,\lambda)+c_2e(x,-\lambda)$ eşitliğinde (4.1.1.6)'yı kullanarak (4.1.1.13)'e ulaşırız. □

4.1.2. (4.1.1.1) – (4.1.1.3) Sınır Değer Probleminin Operatör Gösterimi

İki bileşenli vektörlerden oluşan $\mathrm{H}_\rho=L_{2,\rho}[0,\pi]\oplus\mathbb{C}$ Hilbert uzayındaki iç çarpımı

$$(F,G):=\int_0^{\pi}F_1(x)\overline{G_1(x)}\rho(x)dx+\frac{F_2\overline{G_2}}{\chi}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada,

$F=\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \end{pmatrix}\in H_\rho,\quad G=\begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \end{pmatrix}\in H_\rho$'dur ve $\chi:=\beta_1\beta_3-\beta_2\beta_4>0$ biçiminde tanımlanır.

Tanım kümesi

$$D(A)=\left\{\begin{array}{l} F\in H_\rho : F_1(x), F_1'(x)\in AC[0,\pi], lF_1\in L_{2,\rho}[0,\pi], \\ F_1(0)=0, F_2=\beta_3F_1(\pi)+\beta_4F_1'(\pi) \end{array}\right\}$$

olan A operatörü

$$A:=\begin{pmatrix} lF_1(x) \\ -\left(\beta_1F_1(\pi)+\beta_2F_1'(\pi)\right) \end{pmatrix}$$

biçimindedir, burada $lF_1(x)=\dfrac{1}{\rho(x)}\left\{-F_1''(x)+q(x)F_1(x)\right\}$ dir ve (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer problemi $AY=\lambda^2Y$ ifadesine denktir. A operatörünün $\lambda=\lambda_n$'e uygun olan özfonksiyonları

$$\Phi(x,\lambda_n)=\Phi_n:=\begin{pmatrix} \varphi(x,\lambda_n) \\ \beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n) \end{pmatrix}\quad (n=0,1,2,\cdots)$$

dir.

(4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin normlaştırıcı sayıları

$$\gamma_n:=\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)\rho(x)dx+\frac{\left(\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right)^2}{\chi}$$

biçiminde tanımlanmıştır ve $\{\lambda_n,\gamma_n\}$ sayıları (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin *spektral verileri* olarak adlandırılır.

Teorem 4.1.2.1. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar diktir: $(\Phi_n,\Phi_m)=0,\quad n\neq m.$

İspat: $(\Phi_n,\Phi_m)=\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\rho(x)dx+$

$$\frac{\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right]\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_m)\right]}{\chi}=0 \qquad (4.1.2.1)$$

olduğunu göstermeliyiz. Φ_n ve Φ_m (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonları olduğundan

$$-\varphi''(x,\lambda_n)+q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n^2\rho(x)\varphi(x,\lambda_n)$$

$$-\varphi''(x,\lambda_m)+q(x)\varphi(x,\lambda_m)=\lambda_m^2\rho(x)\varphi(x,\lambda_m)$$

sağlanır. İlk eşitliği $\varphi(x,\lambda_m)$ ile ikinci eşitliği $-\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{d}{dx}\left\{\varphi(x,\lambda_n)\varphi'(x,\lambda_m)-\varphi'(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\right\}=\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\rho(x)\varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)$$

buluruz. Son ifadeye $[0,\pi]$ aralığında integral alma işlemi uygularsak,

$$\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\rho(x)\,dx=\left[\varphi(x,\lambda_n)\varphi'(x,\lambda_m)-\varphi'(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\right]_{x=0}^{x=\pi} \tag{4.1.2.2}$$

elde ederiz. Şimdi (4.1.1.3) sınır koşulunu ele alalım:

$$\lambda_n^2\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right]+\beta_1\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_2\varphi'(\pi,\lambda_n)=0,$$

$$\lambda_m^2\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_m)\right]+\beta_1\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_2\varphi'(\pi,\lambda_m)=0.$$

Burada, ilk eşitliği $\beta_3\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_m)$ ile ikinci eşitliği $-\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)-\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)$ ile çarptıktan sonra elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplayarak ve çeşitli düzenlemeler yaparak

$$\chi\left[\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)-\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)\right]+\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left\{\beta_3^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)+\right.$$
$$\left.\beta_4^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)-\beta_3\beta_4\left[\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right]\right\}=0 \tag{4.1.2.3}$$

buluruz.

(4.1.2.1) ifadesindeki, ikinci terimi düzenlersek,

$$\frac{\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right]\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_m)\right]}{\chi}=$$

$$\frac{1}{\chi}\left\{\beta_3^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)+\beta_3\beta_4\left[\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right]+\right.$$
$$\left.+\beta_4^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)\right\}$$

elde ederiz. (4.1.2.3) ifadesini

$$\left[\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)-\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)\right]=-\frac{1}{\chi}\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left\{\beta_3^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)+\right.$$
$$\left.+\beta_4^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_3\beta_4\left[\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)+\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)\right]\right\}$$

(4.1.2.4)

biçiminde yeniden yazarsak, (4.1.2.2)'nin sağ tarafı ile (4.1.2.4)'in sol tarafının birbirine eşit olduğunu görürüz. Bu durumda, (4.1.2.2) ve (4.1.2.4)'den

$$\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\int_0^\pi\varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\rho(x)\,dx+\frac{1}{\chi}\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left\{\beta_3^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)+\right.$$
$$\left.+\beta_4^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_3\beta_4\left[\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)+\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)\right]\right\}=0$$

ve dolayısıyla

$$\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left[\int_0^\pi\varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\rho(x)\,dx+\frac{1}{\chi}\left\{\beta_3^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)+\beta_4^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\right.\right.$$
$$\left.\left.+\beta_3\beta_4\left[\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)+\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)\right]\right\}\right]=0$$

buluruz. Burada $n\neq m$ olduğundan, son ifadeden $(\Phi_n,\Phi_m)=0$ olduğu görülür. □

4.1.3. Spektral Verilerin Özellikleri

(4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonunu

$$\Delta(\lambda):=\langle\varphi(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\rangle=\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda) \qquad (4.1.3.1)$$

şeklinde tanımlayalım. (4.1.3.1)'de $x=0$ ve $x=\pi$ yazarak ve (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır koşullarını göz önünde bulundurarak

$$\Delta(\lambda)=-U_1(\psi)=U_2(\varphi) \qquad (4.1.3.2)$$

elde ederiz.

(4.1.1.4) ve (4.1.1.5) koşulları $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının, sabitlenmiş x'ler için, λ'nın tam fonksiyonları olduğunu gösterir. Buradan $\Delta(\lambda)$'nın λ'nın bir tam fonksiyonu olduğu sonucu çıkar.

Teorem 4.1.3.1. Karakteristik fonksiyonun sayılabilir sayıdaki $\{\lambda_n\}$ sıfırlarının kareleri, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleriyle çakışır, ayrıca her λ_n özdeğeri için

$$\psi(x,\lambda_n)=k_n\varphi(x,\lambda_n) \quad (k_n\neq 0) \tag{4.1.3.3}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $\{k_n\}$ dizisi vardır, burada $\psi(x,\lambda_n)$ ve $\varphi(x,\lambda_n)$, λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlardır.

İspat: Gerçekten, λ_0 'ın $\Delta(\lambda)$'nın bir sıfırı olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\Delta(\lambda_0)=\begin{vmatrix}\varphi(x,\lambda_0) & \psi(x,\lambda_0)\\ \varphi'(x,\lambda_0) & \psi'(x,\lambda_0)\end{vmatrix}=0$$

sağlanır, yani $\psi(x,\lambda_0)$ ve $\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır: $\psi(x,\lambda_0)=k_0\varphi(x,\lambda_0)$. Ayrıca, (4.1.3.2)'den $\psi(x,\lambda_0)$ ve $\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonlarının (4.1.1.2) ve (4.1.1.3) koşullarını sağladığını söyleyebiliriz. Dolayısıyla, λ_0^2 bir özdeğer ve $\psi(x,\lambda_0)$ ve $\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlardır.

Şimdi tersine, λ_0^2 ın (4.1.1.1) diferansiyel ifadesi ve (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır koşullarıyla oluşturulmuş A operatörünün bir özdeğeri olduğunu ve $y_0(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0)$ fonksiyonlarının bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar olduğunu varsayalım. O halde, $y_0(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0)$ fonksiyonları $y_0'(0,\lambda_0)=1$ ve $y_0'(0,-\lambda_0)=1$ koşullarını sağlarsa $y_0(x,\lambda_0)\equiv\varphi(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0)\equiv\varphi(x,-\lambda_0)$ olur. Ayrıca, (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır koşulları yardımıyla

$$\Delta(\lambda_0)=U_2(\varphi(x,\lambda_0))=U_2(y_0(x,\lambda_0))=0$$
$$\Delta(-\lambda_0)=U_2(\varphi(x,-\lambda_0))=U_2(y_0(x,-\lambda_0))=0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla, λ_0^2 karakteristik fonksiyonun bir köküdür.

Benzer şekilde, $y_0'(\pi,\lambda_0)=\beta_1+\lambda_0^2\beta_3$ ve $y_0'(\pi,-\lambda_0)=\beta_1+\lambda_0^2\beta_3$ koşullarının sağlandığını kabul edersek, o halde $y_0(x,\lambda_0)\equiv\psi(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0)\equiv\psi(x,-\lambda_0)$ olur. (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır koşullarını tekrar kullanırsak

$$\Delta(\lambda_0)=-U_1(\psi(x,\lambda_0))=-U_1(y_0(x,\lambda_0))=0$$
$$\Delta(-\lambda_0)=-U_1(\psi(x,-\lambda_0))=-U_1(y_0(x,-\lambda_0))=0$$

buluruz. Dolayısıyla, her bir λ_0^2 özdeğerine (sabit çarpan farkıyla) yalnız bir özfonksiyon karşılık gelir. □

Lemma 4.1.3.1. Aşağıdaki bağıntı gerçeklenir:

$$\dot{\Delta}(\lambda_n) = -2\lambda_n k_n \gamma_n, \tag{4.1.3.4}$$

burada k_n (4.1.3.3)'de tanımlanan dizi ve $\dot{\Delta}(\lambda) = \dfrac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$ dır.

İspat: İspat için, öncelikle

$$-\varphi''(x,\lambda_n) + q(x)\varphi(x,\lambda_n) = \lambda_n^2 \rho(x)\varphi(x,\lambda_n)$$

$$-\psi''(x,\lambda) + q(x)\psi(x,\lambda) = \lambda^2 \rho(x)\psi(x,\lambda)$$

denklemlerini ele alıp, bu denklemlerden ilkini $-\psi(x,\lambda)$ ile ikincisini $\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpıp elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplayalım. Bu durumda,

$$\frac{d}{dx}\langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\rangle = (\lambda_n^2 - \lambda^2)\rho(x)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) \tag{4.1.3.5}$$

elde ederiz. Burada $[0,\pi]$ aralığında integralleme işlemi yaparsak,

$$\langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\rangle\Big|_{x=0}^{x=\pi} = (\lambda_n^2 - \lambda^2)\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\rho(x)\,dx$$

buluruz. Şimdi, son eşitliğin sol tarafını ele alalım ve (4.1.3.2)'yi göz önünde bulunduralım:

$$\begin{aligned}\langle \psi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda_n)\rangle\Big|_{x=0}^{x=\pi} &= -(\beta_2 + \lambda^2\beta_4)\varphi'(\pi,\lambda_n) - (\beta_1 + \lambda^2\beta_3)\varphi(\pi,\lambda_n) - \psi(0,\lambda)\\ &= U_1(\psi)\\ &= \Delta(\lambda).\end{aligned} \tag{4.1.3.6}$$

(4.1.3.5) ve (4.1.3.6)'yı birlikte ele alırsak,

$$\Delta(\lambda) = (\lambda_n^2 - \lambda^2)\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\rho(x)\,dx$$

elde ederiz. Bu ifadenin her iki tarafına

$\dfrac{[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n) + \beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)][\beta_3\psi(\pi,\lambda) + \beta_4\psi'(\pi,\lambda)]}{\chi}$ ekleyip, (4.1.3.3)'ü göz önüne alırsak,

$$-\frac{\Delta(\lambda_n)}{\lambda-\lambda_n}=(\lambda+\lambda_n)\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\rho(x)dx+$$
$$\frac{\left[\beta_3\psi(\pi,\lambda)+\beta_4\psi'(\pi,\lambda)\right]\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right]}{\chi}-\frac{\chi}{k_n}$$

buluruz. Burada tekrar (4.1.3.3)'ü göz önüne alıp, $\lambda\to\lambda_n$ iken limite geçersek, gerekli düzenlemeleri yaptıktan sonra, (4.1.3.4) e ulaşırız. □

$\lambda_n\neq 0, k_n\neq 0, \gamma_n\neq 0$ olduğundan Lemma 4.1.3.1'in aşağıdaki sonucunu verebiliriz:

Sonuç 4.1.3.1. $\Delta(\lambda)$'nın tüm sıfırları basittir.

4.1.4. (4.1.1.1) – (4.1.1.3) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin ve Karakteristik Fonksiyonunun Özellikleri

Bu bölümde (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotik biçimlerini bulacağız.

1. $q(x)\equiv 0$ iken, (4.2.1.1) – (4.2.1.3) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı

Önce [52]'den faydalanarak, (4.1.1.1) denkleminde $q(x)\equiv 0$ iken, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotik biçimini bulalım.

Teorem 4.1.4.1. $q(x)\equiv 0$ iken, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri aşağıdaki asimptotik biçime sahiptir:

$$\left(\lambda_n^0\right)^2=n+\psi(n),\quad \sup_n\left|\psi(n)\right|<+\infty. \tag{4.1.4.1}$$

İspat: (4.1.3.1)'de $x=\pi$ yazıp, (4.1.1.5) koşullarını ve (4.1.1.14) ifadelerini ele alırsak,

$$\Delta_0(\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left[i\alpha\lambda\left(\beta_2+\lambda^2\beta_4\right)+\left(\beta_1+\lambda^2\beta_3\right)\right]e^{i\lambda\mu^+(\pi)}+$$
$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left[-i\alpha\lambda\left(\beta_2+\lambda^2\beta_4\right)+\left(\beta_1+\lambda^2\beta_3\right)\right]e^{i\lambda\mu^-(\pi)}=0 \tag{4.1.4.2}$$

buluruz, burada $\Delta_0(\lambda)$fonksiyonunun $q(x)\equiv 0$ iken, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonudur. [52, 53] yardımıyla (4.1.4.1)'e ulaşırız. □

Lemma 4.1.4.1. $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun λ_n^0 kökleri ayrıktır, yani

$$\inf_{n\neq k}\left|\lambda_n^0-\lambda_k^0\right|=\tau>0 \tag{4.1.4.3}$$

sağlanır.

İspat: Tersini kabul edelim. O halde, $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları için

$\lambda_k^{0'}\neq\lambda_k^{0''},\ \lambda_k^{0'}\to+\infty,\ \lambda_k^{0''}\to+\infty$

ve

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\lambda_k^{0'}-\lambda_k^{0''}\right]=0 \tag{4.1.4.4}$$

sağlanacak biçimde $\left\{\lambda_k^{0'}\right\}$ ve $\left\{\lambda_k^{0''}\right\}$ dizileri mevcuttur.

(4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının diklik özelliğinden,

$$0=\lambda_k^{0'}\lambda_k^{0''}\int_0^\pi\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0''}\right)\rho(x)\,dx=$$

$$=\int_0^\pi\lambda_k^{0'}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\lambda_k^{0''}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0''}\right)\rho(x)\,dx-\int_0^\pi\lambda_k^{0'2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\rho(x)\,dx$$

$$+\int_0^\pi\lambda_k^{0'2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\rho(x)\,dx$$

$$=\int_0^\pi\lambda_k^{0'}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\left[\lambda_k^{0''}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0''}\right)-\lambda_k^{0'}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\right]\rho(x)\,dx+\int_0^\pi\lambda_k^{0'2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\rho(x)\,dx$$

$$=I_k+\int_0^\pi\lambda_k^{0'2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\rho(x)\,dx$$

$$\geq I_k+\int_0^a\lambda_k^{0'2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\rho(x)\,dx$$

$$=I_k+\int_0^a\sin^2\lambda_k^{0'}x\,dx=I_k+\int_0^a\left(\frac{1-\cos2\lambda_k^{0'}x}{2}\right)dx=I_k+\frac{a}{2}-\frac{\sin2\lambda_k^{0'}a}{4\lambda_k^{0'}}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$0\geq I_k+\frac{a}{2}-\frac{\sin2\lambda_k^{0'}a}{4\lambda_k^{0'}} \tag{4.1.4.5}$$

buluruz.

Şimdi, $k \to +\infty$ iken, $I_k \to 0$ olduğunu gösterelim.

$$\left|\lambda_k^{0''}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0''}\right)-\lambda_k^{0'}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\right| \le C\left|\lambda_k^{0''}-\lambda_k^{0'}\right|$$

olduğunu ve (4.1.4.4)'ü birlikte ele alırsak her $x \in [0,\pi]$ için,

$$\lim_{k\to+\infty}\left|\lambda_k^{0''}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0''}\right)-\lambda_k^{0'}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\right| = 0$$

eşitliğinin sağlandığını söyleyebiliriz. O halde (4.1.4.5)'de $k \to +\infty$ iken limite geçersek, $0 \ge \frac{a}{2}$ buluruz. Bu ise (4.1.1.1) denklemindeki $\rho(x)$ katsayısının tanımıyla çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. □

2. (4.1.1.1) – (4.1.1.3) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı

Şimdi (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotik biçimini verelim. Bunun için önce, asimptotik formülleri elde ederken kullanacağımız eşitsizlikleri gösterelim.

Lemma 4.1.4.2. $|\lambda| \to \infty$ iken aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir:

$$\left|\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right| \le C(\lambda)e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}. \tag{4.1.4.6}$$

İspat: (4.1.1.13)'ü (4.1.3.1)'de yazarsak

$$\Delta(\lambda)=\left(\beta_1+\lambda^2\beta_4\right)\left[\varphi_0(\pi,\lambda)+\int_0^{\mu^+(\pi)}A(\pi,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt\right]$$

$$+\left(\beta_2+\lambda^2\beta_3\right)\left[\varphi_0'(\pi,\lambda)+\int_0^{\mu^+(\pi)}A_x'(\pi,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt+\alpha A\left(\pi,\mu^+(\pi)\right)\frac{\sin\lambda\mu^+(\pi)}{\lambda}\right]$$

buluruz. Burada gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)=\left(\frac{\beta_2}{\lambda}+\lambda\beta_3\right)\int_0^{\mu^+(\pi)}A_x'(\pi,t)\sin\lambda t dt$$

$$+\alpha\left(\frac{\beta_2}{\lambda}+\lambda\beta_3\right)A\left(\pi,\mu^+(\pi)\right)\sin\lambda\mu^+(\pi)+\left(\frac{\beta_1}{\lambda}+\lambda\beta_4\right)\int_0^{\mu^+(\pi)}A(\pi,t)\sin\lambda t dt$$

elde ederiz. Son ifadede, (4.1.1.8) - (4.1.1.12) özelliklerini ve $\sin\lambda\mu^+(\pi)=O\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}\right)$ olduğunu dikkate alırsak, (4.1.4.6)'ya ulaşırız. □

Lemma 4.1.4.3. $|\lambda|\to\infty$ iken aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir:

$$\left|\Delta_0(\lambda)\right|\le C\left(\lambda^2\right)e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\pi}. \tag{4.1.4.7}$$

İspat: (4.1.1.14) ve (4.1.3.1)'den

$$\Delta_0(\lambda)=\left(\beta_1+\lambda^2\beta_4\right)\frac{\sin\lambda\pi}{\lambda}+\left(\beta_2+\lambda^2\beta_3\right)\cos\lambda\pi$$

elde ederiz. Bu ifadeyi sınırlandırırsak ve $\sin\lambda\pi=O\left(e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\pi}\right)$ ve $\cos\lambda\pi=O\left(e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\pi}\right)$ olduğunu göz önünde bulundurursak (4.1.4.7)'ye ulaşırız. □

Lemma 4.1.3.2 ve Lemma 4.1.3.3'den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.1.4.1. $|\lambda|\to\infty$ iken,

$$\left|\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right|\le\left|\Delta_0(\lambda)\right| \tag{4.1.4.8}$$

sağlanır.

Teorem 4.1.4.2. (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin basit $\left\{\lambda_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerleri sayılabilirdir ve

$$\lambda_n=\lambda_n^0+\frac{d_n}{\lambda_n^0}+\frac{\eta_n}{n},\quad \lambda>0$$

biçimindedir. Burada, λ_n^0, $\Delta_0(\lambda)$ karakteristik fonksiyonun sıfırları;

$$d_n=\frac{1}{4\lambda_n^0\dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)}\left\{\int_0^{\pi}\frac{q(t)}{\sqrt{\rho(t)}}\left[\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\cos\lambda_n^0\mu^+(\pi)-\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\cos\lambda_n^0\mu^-(\pi)\right]dt\right\}$$

biçiminde sınırlı bir dizi ve $\{\eta_n\}\in l_2$ dir.

İspat: $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun herhangi bir λ için (4.1.1.2) koşulunu sağladığı açıktır. Dolayısıyla özdeğerleri, $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunu (4.1.1.3) koşulunda yazarak bulacağız.

(4.1.1.3)'den $\left(\lambda^2\beta_3+\beta_2\right)\varphi'(\pi,\lambda)+\left(\lambda^2\beta_4+\beta_1\right)\varphi(\pi,\lambda)=\Delta(\lambda)\big|_{x=\pi}$

yazabiliriz. Burada $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (4.1.1.13) gösterimini göz önünde bulundurursak,

$$\Delta(\lambda)=\Delta_0(\lambda)+\int_0^{\mu^+(\pi)}A(\pi,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt \tag{4.1.4.9}$$

elde ederiz. $\sigma << \dfrac{\tau}{2}$ (bknz. Lemma 4.1.4.1) yeterince küçük pozitif bir sayı olmak üzere olmak üzere $G_\sigma = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \lambda_n^0 \right| \geq \sigma \right\}$ alalım. [54] Teorem 12.4 kullanılarak

$$\left| \Delta_0(\lambda) \right| \geq C_\sigma \frac{1}{\lambda} e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu^+(\pi)}, \ \lambda \in G_\sigma$$

elde edilir. Diğer taraftan, Teorem 3.1.4. ve [52]'den

$$\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|} e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu^+(\pi)} \right), \ |\lambda| \to \infty$$

olur. Dolayısıyla, yeterince büyük n ler için genişleyen $\Gamma_n = \left\{ \lambda : |\lambda| = \left|\lambda_n^0\right| + \dfrac{\tau}{2} \right\}$ eğrileri üzerinde $\left| \Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda) \right| \leq \left| \Delta_0(\lambda) \right|$ eşitsizliği sağlanır.

Rouche teoreminden, Γ_n eğrisi içinde $\left[\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda) \right] + \Delta_0(\lambda) = \Delta(\lambda)$ fonksiyonuyla, $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısının aynı olduğunu söyleyebiliriz.

Rouche teoremini, $\nu_n(\sigma) = \left\{ \lambda : \left| \lambda - \lambda_n^0 \right| \leq \sigma \right\}$ eğrisine uygulayarak, yeterince büyük n ler için $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun $\nu_n(\sigma)$ eğrisi içinde tek bir λ_n sıfırı olduğunu elde ederiz.

Şimdi bu λ_n leri bulalım. Herhangi bir $\sigma > 0$ sayısı için

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \varepsilon_n, \ \varepsilon_n = o(1), \ n \to \infty \tag{4.1.4.10}$$

yazabiliriz. (4.1.4.10) u (4.1.4.9) da yazarsak

$$\Delta\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) = \Delta_0\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) + \int_0^{\mu^+(\pi)} A(\pi, t) \frac{\sin\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right)t}{\lambda_n^0 + \varepsilon_n} dt = 0 \tag{4.1.4.11}$$

buluruz.

$$\Delta_0(\lambda_n) = \Delta_0\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) = \Delta_0\left(\lambda_n^0\right) + \dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)\varepsilon_n + \ddot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)\frac{\varepsilon_n^2}{2!} + \cdots = \dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)\varepsilon_n + o\left(\varepsilon_n^2\right)$$

bağıntısında, $\Delta_0\left(\lambda_n^0\right) = 0$ eşitliğini ve (4.1.1.11)'i birlikte ele alırsak,

$\Delta_0(\lambda_n)\varepsilon_n + \int_0^{\mu^+(\pi)} A(\pi,t)\dfrac{\sin(\lambda_n^0+\varepsilon_n)t}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}dt \approx 0$ buluruz. Burada, kısmi integrasyon işlemi yaparsak,

$$\varepsilon_n \approx -\frac{1}{\lambda_n^0\dot{\Delta}(\lambda_n^0)}\left[-A(\pi,t)\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)t}{(\lambda_n^0+\varepsilon_n)}\Bigg|_0^{\mu^+(\pi)} + \int_0^{\mu^+(\pi)} A_t'(\pi,t)\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)}{(\lambda_n^0+\varepsilon_n)}dt\right]$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^0\dot{\Delta}(\lambda_n^0)}\left\{A(\pi,\mu^+(\pi))\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)\mu^+(\pi)}{(\lambda_n^0+\varepsilon_n)}\right.$$

$$-\left[A(\pi,\mu^-(\pi)+0)-A(\pi,\mu^-(\pi)-0)\right]\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)\mu^-(\pi)}{(\lambda_n^0+\varepsilon_n)}$$

$$\left.-\int_0^{\mu^+(\pi)} A_t'(\pi,t)\frac{\cos(\lambda_n^0+\varepsilon_n)t}{(\lambda_n^0+\varepsilon_n)}dt\right\}$$

elde ederiz. Burada (4.1.1.9) ve (4.1.1.10) özelliklerini kullanırsak ve $n\to\infty$ iken $\varepsilon_n = o(1)$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\varepsilon_n \approx \frac{1}{\lambda_n^0\dot{\Delta}(\lambda_n^0)}\left\{\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\frac{\cos(\lambda_n^0\mu^+(\pi))}{\lambda_n^0}q(t)dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\frac{\cos(\lambda_n^0\mu^-(\pi))}{\lambda_n^0}q(t)dt-\int_0^{\mu^+(\pi)}A_t'(\pi,t)\frac{\cos(\lambda_n^0 t)}{\lambda_n^0}dt\right\}$$

$$= \frac{1}{\lambda_n^0\dot{\Delta}(\lambda_n^0)}\left\{d_n+\frac{\tilde{\eta}_n}{\lambda_n^0}\right\}$$

buluruz, burada $\{\tilde{\eta}_n\} := \int_0^{\mu^+(\pi)} A_t'(\pi,t)\cos(\lambda_n^0)tdt \in l_2$ dir.

4.1.5. Ayrışım Formülü

Bu bölümde, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının tamlığını göstereceğiz ve daha sonra özfonksiyonlara göre ayrışım formülünü elde edeceğiz.

$$G(x,t,\lambda) := -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\varphi(t,\lambda)\psi(x,\lambda), & t\le x,\\ \psi(t,\lambda)\varphi(x,\lambda), & t>x,\end{cases}$$

olsun.

$$y(x,\lambda)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)\,f(t)\rho(t)\,dt+\frac{f_2}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda)$$

$$=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)\,f(t)\rho(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)\,f(t)\rho(t)\,dt-f_2\varphi(x,\lambda)\right]$$

(4.1.5.1)

fonksiyonunu ele alalım. $G(x,t,\lambda)$ fonksiyonuna, Bölüm 4.1.2 de tanımlanmış olan A operatörünün *Green fonksiyonu* denir. $G(x,t,\lambda)$, A operatörünün ters operatörünün çekirdeğidir, yani $y(x,\lambda)$ fonksiyonu $-y''+q(x)y=\lambda^2\rho(x)y+f(x)\rho(x),\quad U_1(y)=0,\quad U_2(y)=f_2$ sınır değer probleminin çözümüdür.

Teorem 4.1.5.1. (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin $\{\Phi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonları $L_{2,\rho}[0,\pi]\oplus\mathbb{C}$ de bir tam sistem oluşturur.

İspat: (4.1.3.3) ve (4.1.3.4)'den

$$\psi(x,\lambda_n)=-\frac{\dot{\Delta}(\lambda_n)}{2\lambda_n\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n) \tag{4.1.5.2}$$

yazabiliriz. (4.1.3.3)'ü göz önüne alıp, Sonuç 4.1.3.1'i kullanırsak

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y(x,\lambda)=-\frac{1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\left[-\frac{\dot{\Delta}(\lambda_n)}{2\lambda_n\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n)\int_0^\pi\varphi(t,\lambda_n)\,f(t)\rho(t)\,dt\right]+\frac{f_2}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\varphi(x,\lambda_n)$$

buluruz. Yukarıdaki son terimde, (4.1.3.3)'ü tekrar göz önüne alıp, gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y(x,\lambda)=\frac{1}{2\lambda_n\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n)\left[\int_0^\pi\varphi(t,\lambda_n)\,f(t)\rho(t)\,dt-\frac{f_2}{k_n}\right] \tag{4.1.5.3}$$

elde ederiz.

Şimdi, $f(x)\in L_{2,\rho}[0,\pi]\oplus\mathbb{C}$ alalım ve

$$\left(\Phi(x,\lambda_n),\,f(x)\right)=\int_0^\pi\varphi(x,\lambda_n)\overline{f_1(x)}\rho(x)\,dx+\frac{\left(\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right)\overline{f_2}}{\chi}=0$$

olduğunu kabul edelim. Bu ifadede, (4.1.1.5) sınır koşulları ve (4.1.3.3)'ü birlikte ele alırsak,

$$\left(\Phi\left(x,\lambda_n\right),\, f\left(x\right)\right)=\int_0^{\pi}\varphi\left(x,\lambda_n\right)\overline{f_1\left(x\right)}\rho\left(x\right)dx+\beta_3\overline{f_2}\frac{\psi'\left(\pi,\lambda_n\right)}{\chi k_n}+\beta_4\overline{f_2}\frac{\psi\left(\pi,\lambda_n\right)}{\chi k_n}$$

$$=\int_0^{\pi}\varphi\left(x,\lambda_n\right)\overline{f_1\left(x\right)}\rho\left(x\right)dx+\beta_3\overline{f_2}\frac{\left(\beta_1+\lambda_n^2\beta_4\right)}{\chi k_n}-\beta_4\overline{f_2}\frac{\left(\beta_2+\lambda_n^2\beta_3\right)}{\chi k_n}$$

$$=\int_0^{\pi}\varphi\left(x,\lambda_n\right)\overline{f_1\left(x\right)}\rho\left(x\right)dx+\frac{\overline{f_2}}{\chi k_n}\left(\lambda_n^2\beta_3\beta_4+\beta_3\beta_1-\lambda_n^2\beta_3\beta_4-\beta_3\beta_1\right)$$

$$=\int_0^{\pi}\varphi\left(x,\lambda_n\right)\overline{f_1\left(x\right)}\rho\left(x\right)dx+\frac{\overline{f_2}}{\chi k_n}\left(-\chi\right)$$

olur. Buradan ise

$$\left(\Phi\left(x,\lambda_n\right),\, f\left(x\right)\right)=\int_0^{\pi}\varphi\left(x,\lambda_n\right)\overline{f_1\left(x\right)}\rho\left(x\right)dx-\frac{\overline{f_2}}{k_n}=0 \tag{4.1.5.4}$$

bulunur. (4.1.5.3) ve (4.1.5.4)'ü birlikte göz önünde bulundurursak, $\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y\left(x,\lambda\right)=0$ elde ederiz ve buradan sabitlenmiş her $x\in\left[0,\pi\right]$ için $y\left(x,\lambda\right)$ nın $\lambda-$ ya göre tamlığından bahsedebiliriz. Teorem 3.1.4'den her $f\left(x\right)\in L_1\left[0,\pi\right]$ için

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{x\in[0,\pi]}\left\{e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda|x}\left|\int_0^x f\left(t\right)\cos\lambda t dt\right|\right\}=\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{x\in[0,\pi]}\left\{e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda|x}\left|\int_0^x f\left(t\right)\sin\lambda t dt\right|\right\}=0$$

eşitliklerinin sağlandığını söyleyebiliriz.

Ayrıca, $|\lambda|\to\infty$ için

$$\varphi\left(x,\lambda\right)=\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu^+(x)}\right), \tag{4.1.5.5}$$

$$\varphi'\left(x,\lambda\right)=\varphi_0'\left(x,\lambda\right)+O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu^+(x)}\right)=O\left(e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu^+(x)}\right), \tag{4.1.5.6}$$

$$\psi\left(x,\lambda\right)=\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\left(\mu^+(\pi)-\mu^+(x)\right)}\right), \tag{4.1.5.7}$$

$$\psi'\left(x,\lambda\right)=\psi_0'\left(x,\lambda\right)+\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\left(\mu^+(\pi)-\mu^+(x)\right)}\right)=O\left(e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\left(\mu^+(\pi)-\mu^+(x)\right)}\right) \tag{4.1.5.8}$$

sağlanır.

(4.1.5.5) – (4.1.5.6)'dan

$$\left|\Delta(\lambda)\right| \geq C_\sigma \cdot \frac{1}{|\lambda|} \cdot e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu^+(\pi)}, \quad \lambda \in G_\sigma \tag{4.1.5.9}$$

olur.

(4.1.5.1)'den sabitlenmiş $\sigma > 0$ ve yeterince büyük $\lambda^* > 0$ için $\left|y(x,\lambda)\right| \leq \dfrac{C_\sigma}{|\lambda|}$, $\lambda \in G_\sigma$, $|\lambda| \geq \lambda^*$ elde ederiz. Analitik fonksiyonlar için maksimum modül prensibi ve Liouville teoreminden $y(x,\lambda) \equiv 0$ olduğu sonucuna varırız. Buradan $[0,\pi]$ aralığında hemen hemen her yerde $f(x) \equiv 0$ olur. Böylece $\{\Phi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonları $L_{2,\rho}[0,\pi] \oplus \mathbb{C}$ de bir tam sistem oluşturur. □

Teorem 4.1.5.2. Eğer $f(x) \in D(A)$ ise,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \varphi(x,\lambda_n) \tag{4.1.5.10}$$

ayrışım formülü geçerlidir, burada $a_n = \dfrac{1}{\gamma_n} \displaystyle\int_0^\pi \varphi(t,\lambda_n) f(t) \rho(t)\, dt$ dir ve seriler $x \in [0,\pi]$'ye göre düzgün yakınsaktır. $f(x) \in L_{2,\rho}[0,\pi]$ için seriler $L_{2,\rho}[0,\pi]$'de yakınsaktır ve $\displaystyle\int_0^\pi \left|f(x)\right|^2 \rho(x)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n |a_n|^2$ Parseval eşitliği sağlanır.

İspat: Keyfi $f(x) \in AC[0,\pi]$ alalım. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer çözümleri olduğundan, (4.1.1.1) ve (4.1.5.1)' den

$$y(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} \left\{ \psi(x,\lambda) \int_0^x \left[-\varphi''(t,\lambda) + q(t)\varphi(t,\lambda)\right] f(t)\, dt \right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} \left\{ \varphi(x,\lambda) \int_x^\pi \left[-\psi''(t,\lambda) + q(t)\psi(t,\lambda)\right] f(t)\, dt \right\} + \frac{f_2}{\Delta(\lambda)} \varphi(x,\lambda)$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi düzenlersek,

$$y(x,\lambda) = -\frac{1}{\lambda^2 \Delta(\lambda)} \left\{ -\psi(x,\lambda) \int_0^x \varphi''(t,\lambda)\, f(t)\, dt + \psi(x,\lambda) \int_0^x \varphi(t,\lambda) q(t)\, f(t)\, dt \right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{-\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi''(t,\lambda)\,f(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi(t,\lambda)q(t)f(t)\,dt\right\}+\frac{f_2}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda)$$

elde ederiz. Burada kısmi integrasyon yaparsak,

$$y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{-\psi(x,\lambda)\left[\varphi'(t,\lambda)\,f(t)\Big|_0^x-\int_0^x \varphi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt\right]\right.$$

$$\left.+\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{-\varphi(x,\lambda)\left[\psi'(t,\lambda)\,f(t)\Big|_x^\pi-\int_x^\pi \psi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt\right]+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}$$

$$+\frac{f_2}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda)$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt-\psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)\,f(x)+\psi(x,\lambda)\varphi'(0,\lambda)\,f(0)\right.$$

$$\left.+\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt-\varphi(x,\lambda)\psi'(\pi,\lambda)\,f(\pi)+\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)\,f(x)\right.$$

$$\left.+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}+\frac{f_2}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda)$$

buluruz. Şimdi (4.1.1.2) ve (4.1.1.3) sınır koşullarını dikkate alarak,

$$y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt\right\}$$

$$+\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\,f(x)\left[\psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)\right]-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\psi(x,\lambda)\,f(0)$$

$$+\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\left(\beta_1+\lambda^2\beta_4\right)f(\pi)-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}+\frac{f_2}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda)$$

elde ederiz. Buradan,

$$y(x,\lambda)=-\frac{f(x)}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}\left\{Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\right\}+\frac{f_2}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda) \qquad (4.1.5.11)$$

bulunur. Burada,

$$Z_1(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt\right\}$$

ve

$$Z_2(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big\{\psi(x,\lambda)\,f(0)-\varphi(x,\lambda)\left(\beta_1+\lambda^2\beta_4\right)f(\pi)$$

$$\left.+\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}$$

dır.

Şimdi,

$$I_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\lambda y(x,\lambda)\,d\lambda \qquad (4.1.5.12)$$

integralini ele alalım. Burada, $\Gamma_n=\left\{\lambda:|\lambda|=\left|\lambda_n^0\right|+\frac{\tau}{2}\right\}$ saat yönünde yönlendirilmiş bir eğri ve n yeterince büyük bir doğal sayıdır. (4.1.5.11)'den

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\lambda y(x,\lambda)\,d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{f(x)}{\lambda}\,d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{\left\{Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\right\}}{\lambda}\,d\lambda$$

$$+\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{\lambda f_2}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\,d\lambda \qquad (4.1.5.13)$$

yazabiliriz. Diğer taraftan; rezidü teorisinden, $I_n(x)=2\sum_{n=1}^{N}\lambda\,\mathrm{Res}\,y(x,\lambda)$ olur. (4.1.5.3) ve (4.1.5.13)'den

$$-f(x)+\varepsilon_n(x)+\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n f_2}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\varphi(x,\lambda_n)=-\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)}{\gamma_n}\left\{\int_0^\pi \varphi(t,\lambda_n)\,f(t)\rho(t)\,dt\right\}$$

$$+\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n f_2}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\varphi(x,\lambda_n) \qquad (4.1.5.14)$$

bulunur. Burada, $\varepsilon_n(x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\left\{Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\right\}d\lambda$ dir. (4.1.5.14)' den

$-f(x)+\varepsilon_n(x)=-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n)\left\{\int_0^\pi \varphi(t,\lambda_n)\,f(t)\rho(t)\,dt\right\}$ olduğu görülür.

Şimdi,

$$\lim_{N\to\infty}\max_{x\in[0,\pi]}\left|\varepsilon_n(x)\right|=0 \tag{4.1.5.15}$$

olduğunu gösterelim. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümlerinin ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun asimptotik formüllerinden sabitlenmiş $\sigma>0$ ve yeterince büyük $\lambda^*>0$ için

$$\max_{x\in[0,\pi]}\left|Z_2(x,\lambda)\right|\le\frac{C_2}{|\lambda|},\quad \lambda\in G_\sigma,\quad |\lambda|\ge\lambda^* \tag{4.1.5.16}$$

olur. $\lim\limits_{\substack{|\lambda|\to\infty\\ \lambda\in G_\sigma}}\max\limits_{x\in[0,\pi]}\left|Z_1(x,\lambda)\right|=0$ olduğunu göstermek için önce $f'(t)\in AC[0,\pi]$ olduğunu kabul edersek ve $Z_1(x,\lambda)$ ifadesinde kısmi integrasyon yaparsak,

$$Z_1(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)f''(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)f''(t)\,dt\right\}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $Z_2(x,\lambda)$ ’ya benzer şekilde

$$\max_{x\in[0,\pi]}\left|Z_1(x,\lambda)\right|\le\frac{C_1}{|\lambda|},\quad \lambda\in G_\sigma,\quad |\lambda|\ge\lambda^* \tag{4.1.5.17}$$

buluruz. (4.1.5.16) ve (4.1.5.17) den (4.1.5.15) un doğru olduğu kolayca görülür. Genel durum, [55]’deki yöntem kullanılarak gösterilebilir. O halde $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n)\left\{\int_0^\pi\varphi(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)\,dt\right\}$ yazabiliriz. Bu ifadede $a_n=\sum\limits_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\left\{\int_0^\pi\varphi(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)\,dt\right\}$ alırsak, ayrışım formülünü $f(x)=\sum\limits_{n=1}^{\infty}a_n\varphi(x,\lambda_n)$ şeklinde yazabiliriz. $\{\Phi(x,\lambda)\}_{n\ge1}$ sistemi $L_{2,\rho}[0,\pi]\oplus\mathbb{C}$ ’de ortogonal bir baz oluşturur, dolayısıyla Parseval eşitliği sağlanır. □

4.1.6 Weyl Çözümü ve Weyl Fonksiyonu

$\Phi(x,\lambda)$ ile (4.1.1.1) denkleminin $U_1(\Phi)=1$ ve $U_2(\Phi)=0$ koşullarını sağlayan çözümü gösterilsin. $c(x,\lambda)$ ve $s(x,\lambda)$ ile de (4.1.1.1) denkleminin

$$c(0,\lambda)=1,\quad c'(0,\lambda)=0,\quad s(0,\lambda)=0,\quad s'(0,\lambda)=1$$

koşullarını sağlayan çözümü işaretlensin. O halde $\psi(x,\lambda)$ çözümü

$$\psi(x,\lambda)=\psi'(0,\lambda)s(x,\lambda)-\Delta(\lambda)c(x,\lambda) \tag{4.1.6.1}$$

veya

$$-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=c(x,\lambda)-\frac{\psi'(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}s(x,\lambda). \tag{4.1.6.2}$$

gösterimlerine sahiptir.

Şimdi,

$$M(\lambda):=\frac{\psi'(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{4.1.6.3}$$

ile işaretlensin. Açıktır ki,

$$\Phi(x,\lambda)=c(x,\lambda)+M(\lambda)s(x,\lambda) \tag{4.1.6.4}$$

biçiminde yazılabilir.

$\Phi(x,\lambda)$ ve $M(\lambda)=\Phi'(0,\lambda)$ fonksiyonları sırasıyla, (4.1.1.1)-(4.1.1.3) sınır değer probleminin Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu olarak adlandırılır. Weyl fonksiyonu, (4.1.1.1)-(4.1.1.3) sınır değer probleminin λ_n özdeğerler noktalarında basit kutuplara sahip meromorfik bir fonksiyondur. (4.1.6.2) ve (4.1.6.4) eşitliklerinden

$$\Phi(x,\lambda)=-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{4.1.6.5}$$

yazabiliriz. Wronskiyen x den bağımsız olduğundan $\langle s(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle=s(x,\lambda)\Phi'(x,\lambda)-s'(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)$ eşitliğinden $\langle s(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle=-1$ elde edilir.

Şimdi ters problem için teklik teoremini ispat edelim.

Teorem 4.1.6.1. Eğer $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise o halde, $A=\tilde{A}$ dır. Yani; (4.1.1.1) - (4.1.1.3) sınır değer problemi Weyl fonksiyonu tarafından tek olarak belirlenir.

İspat: $P(x,\lambda)=\left[P_{jk}(x,\lambda)\right]_{j,k=1,2}$ matrisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\begin{pmatrix} P_{11}(x,\lambda) & P_{12}(x,\lambda) \\ P_{21}(x,\lambda) & P_{22}(x,\lambda)\end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{s}(x,\lambda) & \tilde{\Phi}(x,\lambda) \\ \tilde{s}'(x,\lambda) & \tilde{\Phi}'(x,\lambda)\end{pmatrix}=\begin{pmatrix} s(x,\lambda) & \Phi(x,\lambda) \\ s'(x,\lambda) & \Phi'(x,\lambda)\end{pmatrix}. \tag{4.1.6.6}$$

Buradan

$$\begin{aligned} s(x,\lambda)&=P_{11}(x,\lambda)\tilde{s}(x,\lambda)+P_{12}(x,\lambda)\tilde{s}'(x,\lambda),\\ \Phi(x,\lambda)&=P_{11}(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda)+P_{12}(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda),\end{aligned} \tag{4.1.6.7}$$

veya

$$P_{11}(x,\lambda)=\tilde{s}'(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)-s(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda),$$
$$P_{12}(x,\lambda)=s(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda)-\tilde{s}(x,\lambda)\Phi(x,\lambda), \tag{4.1.6.8}$$

yazabiliriz. (4.1.6.5)'i (4.1.6.8)'de dikkate alırsak,

$$P_{11}(x,\lambda)=1-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\psi(x,\lambda)\left(s'(x,\lambda)-\tilde{s}(x,\lambda)\right)+\frac{1}{\Delta(\lambda)}s(x,\lambda)\left(\tilde{\psi}'(x,\lambda)-\psi(x,\lambda)\right),$$
$$P_{12}(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left(\tilde{s}(x,\lambda)\psi(x,\lambda)-s(x,\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda)\right) \tag{4.1.6.9}$$

elde ederiz.

$\left|\varphi'(x,\lambda)-\tilde{\varphi}(x,\lambda)\right|=O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^{+}(x)}\right),\ |\lambda|\to\infty$ ve

$\left|\psi'(x,\lambda)-\tilde{\psi}(x,\lambda)\right|=O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^{+}(\pi)-\mu^{+}(x)\right)}\right),\ |\lambda|\to\infty$ bağıntılarından ve (4.1.6.9)'dan $\lambda\in G_\sigma$ için

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}\left|P_{11}(x,\lambda)-1\right|=\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}\left|P_{12}(x,\lambda)\right|=0 \tag{4.1.6.10}$$

bulunur. (4.1.6.4)'ü (4.1.6.8)'de dikkate alırsak,

$$P_{11}(x,\lambda)=\tilde{s}'(x,\lambda)c(x,\lambda)-s(x,\lambda)\tilde{c}'(x,\lambda)+\tilde{s}'(x,\lambda)s(x,\lambda)\left[M(\lambda)-\tilde{M}(\lambda)\right]$$
$$P_{12}(x,\lambda)=s(x,\lambda)\tilde{c}(x,\lambda)-\tilde{s}(x,\lambda)c(x,\lambda)+s(x,\lambda)\tilde{s}(x,\lambda)\left[\tilde{M}(\lambda)-M(\lambda)\right]$$

olur. Dolayısıyla eğer, $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise $P_{11}(x,\lambda)$ ve $P_{12}(x,\lambda)$ sabitlenmiş her x için tam fonksiyonlar olurlar. (4.1.6.10)'dan $P_{11}(x,\lambda)=1$ ve $P_{12}(x,\lambda)=0$ olduğu açıktır. Sonuç olarak, her x ve her λ için, $\varphi(x,\lambda)\equiv\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ ve $\Phi(x,\lambda)\equiv\tilde{\Phi}(x,\lambda)$ olur. Buradan ise $q(x)\equiv\tilde{q}(x)$ bulunur. □

Teorem 4.1.6.2. Aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$M(\lambda)=M(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\lambda_n^2\gamma_n(\lambda^2-\lambda_n^2)}. \tag{4.1.6.11}$$

İspat: (4.1.6.3)'den rezidü hesaplarsak,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n}M(\lambda)=\frac{\psi'(0,\lambda)}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}=\frac{k_n}{-2\lambda_n k_n\gamma_n}=-\frac{1}{2\lambda_n\gamma_n} \tag{4.1.6.12}$$

buluruz. (4.1.6.3)'de $\Delta(\lambda)$'nın asimptotik ifadesini göz önüne alırsak $M(\lambda) \le \dfrac{C_\sigma}{|\lambda|^2}$, $\lambda \in G_\sigma$, $|\lambda| \ge \lambda^*$ eşitsizliğini, buradan limite geçerek ise,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} |M(\lambda)| = 0 \qquad (4.1.6.13)$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi aşağıdaki kontür integralini ele alalım: $J_N(\lambda) = \dfrac{1}{2\pi i} \displaystyle\int_{\Gamma_N} \dfrac{M(\mu)}{\mu-\lambda} d\mu$, $\lambda \in Int\Gamma_N$, burada, $\Gamma_N = \left\{ \mu : |\mu| = |\lambda_N^0| + \dfrac{\tau}{2} \right\}$ saat yönünün tersi yönünde yönlendirilmiş bir kontürdür. Bu durumda, (4.1.6.13) ifadesinden $\lim_{N\to\infty} |J_N(\lambda)| = 0$ elde edilir. Diğer taraftan, rezidü teoremini tekrar kullanarak, $\lambda_{-n} = -\lambda_n$ eşitliğini dikkate alarak ve (4.1.6.12)'yi göz önünde bulundurarak (4.1.6.11)'i elde ederiz. □

Teorem 4.1.6.3. Eğer $\forall n \in Z$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ ise o halde, $A = \tilde{A}$ dır. Yani, (4.1.1.1) - (4.1.1.3) sınır değer problemi spektral veriler tarafından tek türlü belirlenir.

İspat Her $n \in Z$ için $\lambda_n = \tilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n = \tilde{\alpha}_n$ olduğundan ayrıca, (4.1.6.11) formülü sağlandığından, $M(\lambda) = \tilde{M}(\lambda)$ elde ederiz. Dolayısıyla, Teorem 4.1.6.2'den $L = \tilde{L}$ buluruz. □

4.2. SÜREKSİZ KATSAYILI ve SINIR KOŞULU SPEKTRAL PARAMETRE BULUNDURAN STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN TERS PROBLEM

4.2.1. Özel Çözümler

$[0,\pi]$ aralığında tanımlı aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x) y \qquad (4.2.1.1)$$

$$U(y) := \alpha_1 y(0) + \alpha_2 y'(0) + \lambda^2 \left[\alpha_3 y(0) + \alpha_4 y'(0) \right] = 0, \qquad (4.2.1.2)$$

$$V(y) := \beta_1 y(\pi) + \beta_2 y'(\pi) + \lambda^2 \left[\beta_3 y(\pi) + \beta_4 y'(\pi) \right] = 0, \qquad (4.2.1.3)$$

burada $q(x) \in L_2[0,\pi]$, reel değerli bir fonksiyon; λ, spektral parametre; α_i, β_j $\left(i = \overline{1,4},\ j = \overline{1,4} \right)$ reel sayılar ve $\rho(x)$, $0 < \alpha \ne 1$ olmak üzere

$$\rho(x)=\begin{cases}1\ , & 0\le x<a,\\ \alpha^2, & a\le x\le \pi,\end{cases}$$

biçimindedir.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ ile (4.2.1.1) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda)=-\left(\alpha_2+\lambda^2\alpha_4\right),\ \varphi'(0,\lambda)=\alpha_1+\lambda^2\alpha_3, \tag{4.2.1.4}$$

$$\psi(\pi,\lambda)=-\left(\beta_2+\lambda^2\beta_4\right),\ \psi'(\pi,\lambda)=\beta_1+\lambda^2\beta_3 \tag{4.2.1.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan özel çözümlerini gösterelim.

Lemma 4.2.1.1. (4.2.1.1) denkleminin (4.2.1.4) koşullarını sağlayan özel çözümü

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\left(\alpha_1+\lambda^2\alpha_3\right)\int_0^{\mu^+(x)}A(x,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt+\left(\alpha_2+\lambda^2\alpha_4\right)\int_0^{\mu^+(x)}\tilde{A}(x,t)\cos\lambda t dt, \tag{4.2.1.6}$$

biçimindedir; burada, $A(x,t)=K(x,t)+K(x,-t)$ ve $\tilde{A}(x,t)=K(x,-t)-K(x,t)$ çekirdekleri (4.1.1.8)-(4.1.1.12) özelliklerini gerçekler.

İspat: $\varphi_0(x,\lambda)=c_1e_0(x,\lambda)+c_2e_0(x,-\lambda)$ ifadesine (4.2.1.4) koşullarını sağlatarak $c_1=\frac{\left(\alpha_1+\lambda^2\alpha_3\right)}{2i\lambda}-\frac{\left(\alpha_2+\lambda^2\alpha_4\right)}{2},\ c_2=-\frac{\left(\alpha_1+\lambda^2\alpha_3\right)}{2i\lambda}-\frac{\left(\alpha_2+\lambda^2\alpha_4\right)}{2}$, buluruz, burada $e_0(x,\lambda)$ (4.1.1.7) eşitliğinde tanımlandığı biçimde kullanılmıştır. Dolayısıyla

$$\varphi_0(x,\lambda)=\left(\alpha_1+\lambda^2\alpha_3\right)\frac{\sin\lambda x}{\lambda}-\left(\alpha_2+\lambda^2\alpha_4\right)\cos\lambda x \tag{4.2.1.7}$$

olur. $\varphi(x,\lambda)=c_1e(x,\lambda)+c_2e(x,-\lambda)$ eşitliğinde (4.1.1.6) yı kullanarak (4.2.1.6)'ya ulaşırız. □

4.2.2. (4.2.1.1) – (4.2.1.3) Sınır Değer Probleminin Operatör Gösterimi

İki bileşenli vektörlerden oluşan $H_\rho=L_{2,\rho}(0,\pi)\oplus\mathbb{C}^2$ Hilbert uzayındaki iç çarpımı

$$(F,G):=\int_0^{\pi}F_1(x)\overline{G_1(x)}\rho(x)dx+\frac{F_2\overline{G_2}}{\chi_1}+\frac{F_3\overline{G_3}}{\chi_2}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada,

$$F=\begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix}\in H_\rho, \qquad G=\begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix}\in H_\rho \text{'dur} \qquad \text{ve} \qquad \chi_1=:\alpha_1\alpha_4-\alpha_2\alpha_3>0,$$

$\chi_2:=\beta_1\beta_4-\beta_2\beta_3>0$ biçiminde tanımlıdır.

Tanım kümesi

$$D(A)=\left\{\begin{matrix} F\in H_\rho : F_1(x), F_1'(x)\in AC[0,\pi], lF_1\in L_{2,\rho}(0,\pi) \\ F_2=\alpha_3F_1(0)+\alpha_4F_1'(0), F_3=\beta_3F_1(\pi)+\beta_4F_1'(\pi) \end{matrix}\right\}$$

olan A operatörü

$$A:=\begin{pmatrix} lF_1(x) \\ -\left(\alpha_1F_1(0)+\alpha_2F_1'(0)\right) \\ -\left(\beta_1F_1(\pi)+\beta_2F_1'(\pi)\right) \end{pmatrix}$$

biçimindedir, burada $lF_1(x)=\dfrac{1}{\rho(x)}\left\{-F_1''(x)+q(x)F_1(x)\right\}$ dir ve (4.2.1.1)–(4.2.1.3) sınır değer problemi $AY=\lambda^2Y$ ifadesine denktir. A operatörünün $\lambda=\lambda_n$'e uygun olan özfonksiyonları

$$\Phi(x,\lambda_n)=\Phi_n:=\begin{pmatrix} \varphi(x,\lambda_n) \\ \alpha_3\varphi(0,\lambda_n)+\alpha_4\varphi'(0,\lambda_n) \\ \beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n) \end{pmatrix}, \quad (n=0,1,2,\cdots)$$

dir.

(4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin normlaştırıcı sayıları

$$\gamma_n=\int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)\rho(x)\,dx+\frac{\left(\alpha_3\varphi(0,\lambda_n)+\alpha_4\varphi'(0,\lambda_n)\right)^2}{\chi_1}+\frac{\left(\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right)^2}{\chi_2}$$

biçiminde tanımlanmıştır ve $\{\lambda_n,\gamma_n\}$ sayıları (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin *spektral verileri* olarak adlandırılır.

Teorem 4.2.2.1. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar diktir: $(\Phi_n,\Phi_m)=0,\quad n\neq m.$

İspat: $\lambda_n\neq\lambda_m$ alalım ve

$$(\Phi_n,\Phi_m)=\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\rho(x)\,dx+\frac{1}{\chi_1}\left[\alpha_4\varphi'(0,\lambda_n)\right]\left[\alpha_4\varphi'(0,\lambda_m)\right]$$

$$+\frac{\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right]\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_m)\right]}{\chi_2}=0 \quad (4.2.2.1)$$

olduğunu gösterelim.

Φ_n ve Φ_m (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonları olduğundan

$$-\varphi''(x,\lambda_n)+q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n^2\rho(x)\varphi(x,\lambda_n)$$

$$-\varphi''(x,\lambda_m)+q(x)\varphi(x,\lambda_m)=\lambda_m^2\rho(x)\varphi(x,\lambda_m)$$

sağlanır. İlk eşitliği $\varphi(x,\lambda_m)$ ile ikinci eşitliği $-\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpıp taraf tarafa toplarsak,

$$\frac{d}{dx}\left\{\varphi(x,\lambda_n)\varphi'(x,\lambda_m)-\varphi'(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\right\}=\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\rho(x)\varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)$$

buluruz. Son ifadeye $[0,\pi]$ aralığında integral alma işlemi uygularsak,

$$\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\int_0^{\pi}\varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\rho(x)\,dx=\left[\varphi(x,\lambda_n)\varphi'(x,\lambda_m)-\varphi'(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\right]_{x=0}^{x=\pi} \quad (4.2.2.2)$$

elde ederiz.

Şimdi sırasıyla (4.2.1.2) ve (4.2.1.3) sınır koşullarını ele alalım.

(4.2.1.2)'den

$$\alpha_1\varphi(0,\lambda_n)+\alpha_2\varphi'(0,\lambda_n)+\lambda_n^2\left(\alpha_3\varphi(0,\lambda_n)+\alpha_4\varphi'(0,\lambda_n)\right)=0$$

$$\alpha_1\varphi(0,\lambda_m)+\alpha_2\varphi'(0,\lambda_m)+\lambda_m^2\left(\alpha_3\varphi(0,\lambda_m)+\alpha_4\varphi'(0,\lambda_m)\right)=0$$

yazabiliriz. Bu eşitliklerin ilkini $\alpha_3\varphi(0,\lambda_m)+\alpha_4\varphi'(0,\lambda_m)$, ikincisini $-\left(\alpha_3\varphi(0,\lambda_n)+\alpha_4\varphi'(0,\lambda_n)\right)$ ile çarpıp elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplarsak,

$$\begin{aligned}&\chi_1\left[\varphi(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)-\varphi'(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)\right]\\&+\alpha_3\alpha_4\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left[\varphi'(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)+\varphi(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)\right]\\&+\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left\{\alpha_3^2\varphi(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)+\alpha_4^2\varphi'(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)\right\}=0 \qquad (4.2.2.3)\end{aligned}$$

elde ederiz.

(4.2.1.3) sınır koşulundan ise,

$$\beta_1\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_2\varphi'(\pi,\lambda_n)+\lambda_n^2\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right]=0$$

$$\beta_1\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_2\varphi'(\pi,\lambda_m)+\lambda_m^2\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_m)\right]=0$$

olur. Bu eşitliklerin ilkini $\beta_3\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_m)$, ikincisini $-\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)-\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)$ ile çarpıp, elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplarsak ve düzenlersek,

$$\chi_2\left[\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)-\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)\right]$$
$$+\beta_3\beta_4\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left[\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right]$$
$$+\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left\{\beta_3^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right\}=0 \qquad (4.2.2.4)$$

olur. Burada (4.2.2.1)'deki ikinci ve üçüncü terimi ele alıp, bu ifadeleri düzenlersek, sırasıyla

$$\frac{1}{\chi_1}\left[\alpha_3^2\varphi(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)+\alpha_3\alpha_4\left(\varphi'(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)+\varphi(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)\right)\right.$$
$$\left.+\alpha_4^2\varphi'(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)\right] \qquad (4.2.2.5)$$

ve

$$\frac{1}{\chi_2}\left[\beta_3^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_3\beta_4\left(\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right)\right.$$
$$\left.+\beta_4^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right] \qquad (4.2.2.6)$$

bulunur. Buradan (4.2.2.3)'deki $\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)$ ifadesinin katsayısının (4.2.2.5) ile ve benzer şekilde (4.2.2.4)'deki $\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)$ ifadesinin katsayısının (4.2.2.6) ile aynı olduğunu görürüz.

(4.2.2.3) den

$$-\chi_1\left[\varphi(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)-\varphi'(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)\right]$$
$$=\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left\{\alpha_3{}^2\varphi(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)+\alpha_4{}^2\varphi'(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)\right) \qquad (4.2.2.7)$$

olur. (4.2.2.4)'den ise

$$-\chi_2\left[\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)-\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)\right]$$
$$=\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left\{\beta_3{}^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4{}^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right)$$
$$+\beta_3\beta_4\left[\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right]\Big\} \qquad (4.2.2.8)$$

olur.

Şimdi (4.2.2.7)'nin her tarafını $-\chi_1$'ye ve (4.2.2.8)'nin her tarafını χ_2'ye bölersek,

$$\varphi(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)-\varphi'(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)=\frac{1}{\chi_1}\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\cdot$$
$$\cdot\left\{\alpha_3^2\varphi'(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)+\alpha_4^2\varphi(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)\right.$$
$$\left.+\alpha_3\alpha_4\left[\varphi'(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)+\varphi(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)\right]\right\} \tag{4.2.2.9}$$

ve

$$\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)-\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)=-\frac{1}{\chi_2}\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\cdot$$
$$\cdot\left\{\beta_3^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)+\beta_4^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)\right.$$
$$\left.+\beta_3\beta_4\left[\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right]\right\} \tag{4.2.2.10}$$

eşitliklerini elde ederiz. (4.2.2.9) ve (4.2.2.10)'u taraf tarafa toplarsak

$$\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)-\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)-\varphi(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)+\varphi'(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)=$$
$$\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left\{-\frac{1}{\chi_1}\cdot\left[\alpha_3^2\varphi'(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)+\alpha_4^2\varphi(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)\right.\right.$$
$$\left.+\alpha_3\alpha_4\left(\varphi'(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)+\varphi(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)\right)\right]$$
$$-\frac{1}{\chi_2}\left[\beta_3\beta_4\left(\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right)\right.$$
$$\left.\left.+\beta_3^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right]\right\} \tag{4.2.2.11}$$

buluruz. Burada (4.2.2.2) ile (4.2.2.11)'i birlikte ele alırsak, (4.2.2.2)'nin sağ tarafı ile (4.2.2.11)'in sol tarafının birbirine eşit olduğunu görürüz. Dolayısıyla,

$$\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\int_0^\pi\varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\rho(x)dx=$$
$$\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\left\{-\frac{1}{\chi_1}\left[\alpha_3^2\varphi'(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)+\alpha_4^2\varphi(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)+\right.\right.$$

$$+\alpha_3\alpha_4\left(\varphi'(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)+\varphi(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)\right)\Big]$$
$$-\frac{1}{\chi_2}\Big[\beta_3\beta_4\left(\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right)$$
$$+\beta_3^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\Big]\Big\}$$

yazabiliriz. Buradan,

$$\left(\lambda_n^2-\lambda_m^2\right)\Bigg\{\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\varphi(x,\lambda_m)\rho(x)\,dx$$
$$+\frac{1}{\chi_1}\Big[\alpha_3^2\varphi'(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)+\alpha_4^2\varphi(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)$$
$$+\alpha_3\alpha_4\left(\varphi'(0,\lambda_n)\varphi(0,\lambda_m)+\varphi(0,\lambda_n)\varphi'(0,\lambda_m)\right)\Big]$$
$$+\frac{1}{\chi_2}\Big[\beta_3\beta_4\left(\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\right)$$
$$+\beta_3^2\varphi(\pi,\lambda_n)\varphi(\pi,\lambda_m)+\beta_4^2\varphi'(\pi,\lambda_n)\varphi'(\pi,\lambda_m)\Big]\Bigg\} \tag{4.2.2.12}$$

buluruz. $\lambda_n \neq \lambda_m$ olduğundan (4.2.2.12)'nin parantez içi sıfıra eşit olmalıdır. Bu ise, (4.2.2.1)'i göz önüne aldığımızda $(\Phi_n,\Phi_m)=0$ demektir. □

4.2.3. Spektral Verilerin Özellikleri

(4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonunu

$$\Delta(\lambda):=\left\langle \varphi(x,\lambda),\psi(x,\lambda)\right\rangle=\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda) \tag{4.2.3.1}$$

şeklinde tanımlayalım. (4.2.3.1)'de $x=0$ ve $x=\pi$ yazarak ve (4.2.1.2), (4.2.1.3) sınır koşullarını göz önünde bulundurarak

$$\Delta(\lambda)=-U_1(\psi)=U_2(\varphi) \tag{4.2.3.2}$$

elde ederiz.

(4.2.1.4) ve (4.2.1.5) koşulları $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının, sabitlenmiş x'ler için, λ'nın tam fonksiyonları olduğunu gösterir. Buradan $\Delta(\lambda)$'nın λ'nın bir tam fonksiyonu olduğu sonucu çıkar.

Teorem 4.2.3.1. Karakteristik fonksiyonun sayılabilir sayıdaki $\{\lambda_n\}$ sıfırlarının kareleri, (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleriyle çakışır, ayrıca her λ_n özdeğeri için

$$\psi(x,\lambda_n)=k_n\varphi(x,\lambda_n)\quad (k_n\neq 0) \tag{4.2.3.3}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $\{k_n\}$ dizisi vardır, burada $\psi(x,\lambda_n)$ ve $\varphi(x,\lambda_n)$ λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlardır.

İspat: Gerçekten, λ_0 'ın $\Delta(\lambda)$'nın bir sıfırı olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\Delta(\lambda_0)=\begin{vmatrix}\varphi(x,\lambda_0) & \psi(x,\lambda_0)\\ \varphi'(x,\lambda_0) & \psi'(x,\lambda_0)\end{vmatrix}=0$$

sağlanır, yani $\psi(x,\lambda_0)$ ve $\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır: $\psi(x,\lambda_0)=k_0\varphi(x,\lambda_0)$. Ayrıca, (4.2.3.2)'den $\psi(x,\lambda_0)$ ve $\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonlarının (4.2.1.2) ve (4.2.1.3) koşullarını sağladığını söyleyebiliriz. Dolayısıyla, λ_0^2 bir özdeğer ve $\psi(x,\lambda_0)$, $\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlardır.

Şimdi tersine, λ_0^2'ın (4.2.1.1) diferansiyel ifadesi ve (4.2.1.2), (4.2.1.3) sınır koşullarıyla oluşturulmuş A operatörünün bir özdeğeri olduğunu ve $y_0(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0)$ fonksiyonlarının bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar olduğunu varsayalım. O halde, $y_0(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0)$ fonksiyonları $y_0'(0,\lambda_0)=\alpha_1+\lambda_0^2\alpha_3$ ve $y_0'(0,-\lambda_0)=\alpha_1+\lambda_0^2\alpha_3$ koşullarını sağlarsa $y_0(x,\lambda_0)\equiv\varphi(x,\lambda_0)$ ve $y_0(x,-\lambda_0)\equiv\varphi(x,-\lambda_0)$ olur. Ayrıca, (4.2.1.2), (4.2.1.3) sınır koşulları yardımıyla

$$\Delta(\lambda_0)=U_2(\varphi(x,\lambda_0))=U_2(y_0(x,\lambda_0))=0$$
$$\Delta(-\lambda_0)=U_2(\varphi(x,-\lambda_0))=U_2(y_0(x,-\lambda_0))=0$$

olduğu görülür. Dolayısıyla; λ_0^2, karakteristik fonksiyonun bir köküdür.

Benzer şekilde, $y_0'(\pi,\lambda_0)=\beta_1+\lambda_0^2\beta_3$ ve $y_0'(\pi,-\lambda_0)=\beta_1+\lambda_0^2\beta_3$ olduğunu kabul edersek, $y_0(x,\lambda_0)\equiv\psi(x,\lambda_0)$, $y_0(x,-\lambda_0)\equiv\psi(x,-\lambda_0)$ olur. (4.2.1.2), (4.2.1.3) sınır koşullarını tekrar kullanırsak

$$\Delta(\lambda_0)=-U_1(\psi(x,\lambda_0))=-U_1(y_0(x,\lambda_0))=0$$
$$\Delta(-\lambda_0)=-U_1(\psi(x,-\lambda_0))=-U_1(y_0(x,-\lambda_0))=0$$

buluruz. Dolayısıyla, her bir λ_0^2 özdeğerine (sabit çarpan farkıyla) yalnız bir özfonksiyon karşılık gelir. □

Lemma 4.2.3.1. Aşağıdaki bağıntı gerçeklenir:

$$\dot{\Delta}(\lambda_n) = -2\lambda_n k_n \gamma_n, \tag{4.2.3.4}$$

burada k_n (4.2.3.3)'de tanımlanan dizi ve $\dot{\Delta}(\lambda) = \dfrac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$ dır.

İspat: İspat için, öncelikle

$$-\varphi''(x,\lambda_n) + q(x)\varphi(x,\lambda_n) = \lambda_n^2 \rho(x)\varphi(x,\lambda_n)$$

$$-\psi''(x,\lambda) + q(x)\psi(x,\lambda) = \lambda^2 \rho(x)\psi(x,\lambda)$$

denklemlerini ele alıp, bu denklemlerden ilkini $\psi(x,\lambda)$ ile ikincisini $-\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpıp elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplayalım. Bu durumda,

$$\frac{d}{dx}\langle \varphi(x,\lambda_n), \psi(x,\lambda)\rangle = (\lambda_n^2 - \lambda^2)\rho(x)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda) \tag{4.2.3.5}$$

elde ederiz. Burada $[0,\pi]$ aralığında integralleme işlemi yaparsak,

$$\langle \varphi(x,\lambda_n), \psi(x,\lambda)\rangle\Big|_{x=0}^{x=\pi} = (\lambda_n^2 - \lambda^2)\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\rho(x)\,dx$$

buluruz. Şimdi, son eşitliğin sol tarafını ele alalım ve (4.2.3.2)'yi göz önünde bulunduralım:

$$\begin{aligned}
\langle \varphi(x,\lambda_n), \psi(x,\lambda)\rangle\Big|_{x=0}^{x=\pi} &= (\beta_1 + \lambda^2\beta_4)\varphi(\pi,\lambda_n) + (\beta_2 + \lambda^2\beta_3)\varphi'(\pi,\lambda_n) + \\
&\quad + (\alpha_2 + \lambda_n^2\alpha_4)\psi'(0,\lambda) + (\alpha_1 + \lambda_n^2\alpha_3)\psi(0,\lambda) \\
&= -U_2(\varphi) + U_1(\psi) \\
&= -\Delta(\lambda_n) + \Delta(\lambda).
\end{aligned} \tag{4.2.3.6}$$

(4.2.3.5) ve (4.2.3.6)'yı birlikte ele alırsak,

$$\Delta(\lambda_n) - \Delta(\lambda) = (\lambda_n^2 - \lambda^2)\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\rho(x)\,dx$$

elde ederiz. Bu ifadenin her iki tarafına

$$\frac{[\alpha_3\varphi(0,\lambda_n) + \alpha_4\varphi'(0,\lambda_n)][\alpha_3\psi(0,\lambda) + \alpha_4\psi'(0,\lambda)]}{\chi_1}$$

$$+\frac{[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n) + \beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)][\beta_3\psi(\pi,\lambda) + \beta_4\psi'(\pi,\lambda)]}{\chi_2}$$

ekleyip, (4.2.3.3)'ü göz önüne alırsak,

$$-\frac{\Delta(\lambda_n)}{\lambda-\lambda_n}=(\lambda+\lambda_n)\int_0^{\pi}\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\rho(x)dx$$

$$+\frac{\left[\alpha_3\varphi(0,\lambda_n)+\alpha_4\varphi'(0,\lambda_n)\right]\left[\alpha_3\psi(0,\lambda)+\alpha_4\psi'(0,\lambda)\right]}{\chi_1}$$

$$+\frac{\left[\beta_3\psi(\pi,\lambda)+\beta_4\psi'(\pi,\lambda)\right]\left[\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right]}{\chi_2}-\chi_1k_n-\frac{\chi_2}{k_n}$$

buluruz. Burada tekrar (4.2.3.3)'ü göz önüne alıp, $\lambda\to\lambda_n$ iken limite geçersek, gerekli düzenlemeleri yaptıktan sonra, (4.2.3.4) e ulaşırız. □

$\lambda_n\neq 0, k_n\neq 0, \gamma_n\neq 0$ olduğundan Lemma 4.2.3.1'in aşağıdaki sonucunu verebiliriz:

Sonuç 4.2.3.1. $\Delta(\lambda)$ nın tüm sıfırları basittir.

4.2.4. (4.2.1.1) – (4.2.1.3) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin ve Karakteristik Fonksiyonunun Özellikleri

Bu bölümde (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotik biçimlerini bulacağız.

1. $q(x)\equiv 0$ iken (4.2.1.1) – (4.2.1.3) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı

Önce [52]'den faydalanarak, (4.1.1.1) denkleminde $q(x)\equiv 0$ iken, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotik biçimini bulalım.

Teorem 4.2.4.1. $q(x)\equiv 0$ iken, (4.3.1.1) – (4.3.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri aşağıdaki asimptotik biçime sahiptir:

$$\left(\lambda_n^0\right)^2=n+\psi(n),\quad \sup_n|\psi(n)|<+\infty. \tag{4.2.4.1}$$

İspat: (4.2.3.1)'de $x=\pi$ yazıp, (4.2.1.5) koşullarını ve (4.2.1.14) ifadelerini ele alırsak,

$$\Delta_0(\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left[i\alpha\lambda\left(\beta_2+\lambda^2\beta_4\right)+\left(\beta_1+\lambda^2\beta_3\right)\right]e^{i\lambda\mu^+(\pi)}$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left[-i\alpha\lambda\left(\beta_2+\lambda^2\beta_4\right)+\left(\beta_1+\lambda^2\beta_3\right)\right]e^{i\lambda\mu^-(\pi)}=0 \tag{4.2.4.2}$$

buluruz, burada $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonu $q(x)\equiv 0$ iken, (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonudur. [52, 53]'den (4.1.4.1) e ulaşırız. □

Lemma 4.2.4.1. $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun λ_n^0 kökleri ayrıktır, yani

$$\inf_{n\neq k}\left|\lambda_n^0-\lambda_k^0\right|=\tau>0 \tag{4.2.4.3}$$

sağlanır.

İspat: Tersini kabul edelim. O halde $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları için

$$\lambda_k^{0\prime}\neq\lambda_k^{0\prime\prime},\ \lambda_k^{0\prime}\to+\infty,\ \lambda_k^{0\prime\prime}\to+\infty$$

ve

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\lambda_k^{0\prime}-\lambda_k^{0\prime\prime}\right]=0 \tag{4.2.4.4}$$

olacak biçimde $\left\{\lambda_k^{0\prime}\right\}$ ve $\left\{\lambda_k^{0\prime\prime}\right\}$ dizileri mevcuttur.

(4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının diklik özelliğinden,

$$0=\lambda_k^{0\prime}\lambda_k^{0\prime\prime}\int_0^\pi\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0\prime}\right)\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0\prime\prime}\right)\rho(x)\,dx=$$

$$=\int_0^\pi\lambda_k^{0\prime}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0\prime}\right)\lambda_k^{0\prime\prime}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0\prime\prime}\right)\rho(x)\,dx-\int_0^\pi\lambda_k^{0\prime 2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0\prime}\right)\rho(x)\,dx+\int_0^\pi\lambda_k^{0\prime 2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0\prime}\right)\rho(x)\,dx$$

$$=\int_0^\pi\lambda_k^{0\prime}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0\prime}\right)\left[\lambda_k^{0\prime\prime}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0\prime\prime}\right)-\lambda_k^{0\prime}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0\prime}\right)\right]\rho(x)\,dx+\int_0^\pi\lambda_k^{0\prime 2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0\prime}\right)\rho(x)\,dx$$

$$=I_k+\int_0^\pi\lambda_k^{0\prime 2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0\prime}\right)\rho(x)\,dx$$

$$\geq I_k+\int_0^a\lambda_k^{0\prime 2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0\prime}\right)\rho(x)\,dx$$

$$=I_k+\int_0^a\sin^2\lambda_k^{0\prime}x\,dx=I_k+\int_0^a\left(\frac{1-\cos 2\lambda_k^{0\prime}x}{2}\right)dx=I_k+\frac{a}{2}-\frac{\sin 2\lambda_k^{0\prime}a}{4\lambda_k^{0\prime}}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$0\geq I_k+\frac{a}{2}-\frac{\sin 2\lambda_k^{0\prime}a}{4\lambda_k^{0\prime}} \tag{4.2.4.5}$$

buluruz.

Şimdi, $k \to +\infty$ iken $I_k \to 0$ olduğunu gösterelim. $\left|\lambda_k^{0''}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0''}\right)-\lambda_k^{0'}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\right| \le C\left|\lambda_k^{0''}-\lambda_k^{0'}\right|$ olduğunu ve (4.2.4.4) ü birlikte ele alırsak her $x \in [0,\pi]$ için, $\lim\limits_{k\to+\infty}\left|\lambda_k^{0''}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0''}\right)-\lambda_k^{0'}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\right|=0$ sağlandığını söyleyebiliriz. O halde (4.2.4.5) de $k \to +\infty$ iken limite geçersek, $0 \ge \frac{a}{2}$ buluruz. Bu ise (4.2.1.1) denklemindeki $\rho(x)$ katsayısının tanımıyla çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. □

2. (4.1.1.1) – (4.1.1.3) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı

Şimdi (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotik biçimini verelim. Bunun için önce, asimptotik formülleri elde ederken kullanacağımız eşitsizlikleri gösterelim.

Lemma 4.2.4.2. $|\lambda| \to \infty$ iken aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir:

$$\left|\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right| \le C\left(\lambda^4\right)e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}. \tag{4.2.4.6}$$

İspat: (4.2.1.13)'ü (4.2.3.1)'de yazarsak

$$\begin{aligned}\Delta(\lambda)=&\left(\beta_1+\lambda^2\beta_3\right)\Bigg[\varphi_0(\pi,\lambda)+\left(\alpha_1+\lambda^2\alpha_3\right)\int_0^{\mu^+(\pi)}A(\pi,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt\\&+\left(\alpha_2+\lambda^2\alpha_4\right)\int_0^{\mu^+(\pi)}\tilde{A}(\pi,t)\cos\lambda t dt\Bigg]+\left(\beta_2+\lambda^2\beta_4\right)\Bigg\{\varphi_0'(\pi,\lambda)\\&+\left(\alpha_1+\lambda^2\alpha_3\right)\left[\int_0^{\mu^+(\pi)}A_x'(\pi,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt+\alpha A\left(\pi,\mu^+(\pi)\right)\frac{\sin\lambda\mu^+(\pi)}{\lambda}\right]\\&+\left(\alpha_2+\lambda^2\alpha_4\right)\left[\int_0^{\mu^+(\pi)}\tilde{A}_x'(\pi,t)\cos\lambda t dt+\alpha\tilde{A}\left(\pi,\mu^+(\pi)\right)\cos\lambda\mu^+(\pi)\right]\Bigg\}\end{aligned}$$

buluruz. Burada gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)=\left(\frac{\alpha_1\beta_2}{\lambda}+\lambda(\alpha_3\beta_2+\alpha_1\beta_4)+\lambda^3\alpha_3\beta_4\right)\left[\int_0^{\mu^+(\pi)} A'_x(\pi,t)\sin\lambda t dt+\right.$$

$$\left.+\alpha A(\pi,\mu^+(\pi))\sin\lambda\mu^+(\pi)\right]$$

$$\left(\alpha_2\beta_2+\lambda^2(\alpha_4\beta_2+\alpha_2\beta_4)+\lambda^4\alpha_4\beta_4\right)\left[\int_0^{\mu^+(\pi)} \tilde{A}'_x(\pi,t)\cos\lambda t dt\right.$$

$$\left.+\alpha\tilde{A}(\pi,\mu^+(\pi))\cos\lambda\mu^+(\pi)\right]+\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{\lambda}+\lambda(\alpha_3\beta_1+\alpha_1\beta_3)+\lambda^3\alpha_3\beta_3\right)\int_0^{\mu^+(\pi)} A(\pi,t)\sin\lambda t dt$$

$$+\left(\alpha_2\beta_1+\lambda^2(\alpha_4\beta_1+\alpha_2\beta_3)+\lambda^4\alpha_4\beta_3\right)\int_0^{\mu^+(\pi)} \tilde{A}(\pi,t)\cos\lambda t dt$$

elde ederiz. Son ifadede, (4.2.1.8) - (4.2.1.12) özelliklerini ve $\cos\lambda\mu^+(\pi)=O\left(e^{|\mathrm{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}\right)$, $\sin\lambda\mu^+(\pi)=O\left(e^{|\mathrm{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}\right)$ olduğunu dikkate alırsak, (4.2.4.6)'ya ulaşırız. □

Lemma 4.2.4.3. $|\lambda|\to\infty$ iken aşağıdaki eşitsizlik gerçeklenir:

$$\left|\Delta_0(\lambda)\right|\geq C\left(\lambda^4\right)e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi}. \qquad (4.2.4.7)$$

İspat: (4.2.1.14) ve (4.2.3.1)'den

$$\Delta_0(\lambda)=\left(\frac{\alpha_1\beta_1}{\lambda}+\lambda(\alpha_1\beta_3+\alpha_2\beta_2+\alpha_3\beta_1)+\lambda^3(\alpha_3\beta_3+\alpha_4\beta_2+\alpha_2\beta_4)+\lambda^5\alpha_4\beta_4\right)\sin\lambda\pi+$$
$$+\left(\alpha_1\beta_2-\alpha_2\beta_1+\lambda^2(\alpha_1\beta_4+\alpha_3\beta_2-\alpha_2\beta_3-\alpha_4\beta_1)+\lambda^4(\alpha_3\beta_4-\alpha_4\beta_3)\right)\cos\lambda\pi$$

elde ederiz. Bu ifadeyi sınırlandırırsak ve $\sin\lambda\pi=O\left(e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi}\right)$ ve $\cos\lambda\pi=O\left(e^{|\mathrm{Im}\lambda|\pi}\right)$ olduğunu göz önünde bulundurursak (4.2.4.7) ye ulaşırız. □

Lemma 4.2.3.2 ve Lemma 4.2.3.3'den aşağıdaki sonucu verebiliriz.

Sonuç 4.2.4.1. $|\lambda|\to\infty$ iken

$$\left|\Delta(\lambda)-\Delta_0(\lambda)\right|\leq\left|\Delta_0(\lambda)\right| \qquad (4.2.4.8)$$

sağlanır.

Teorem 4.2.4.2 (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\lambda_n=\lambda_n^0+\frac{d_n}{\lambda_n^0}+\frac{\eta_n}{n},\quad \lambda>0$$

biçimindedir. Burada, λ_n^0, $\Delta_0(\lambda)$ karakteristik fonksiyonun sıfırları;

$$d_n = \frac{1}{4\left(\lambda_n^0\right)^3 \dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)} \left\{ \int_0^\pi \frac{q(t)}{\sqrt{\rho(t)}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right) \left(\alpha_1 \cos \lambda_n^0 \mu^-(\pi) + \alpha_4 \sin \lambda_n^0 \mu^-(\pi)\right) dt \right\}$$

$$\alpha_1 A(\pi,0) + \alpha_1 A\left(\pi, \mu^+(\pi)\right) \cos \lambda_n^0 \mu^+(\pi) - \alpha_4 \tilde{A}\left(\pi, \mu^+(\pi)\right) \sin \lambda_n^0 \mu^+(\pi)$$

biçiminde sınırlı bir dizi ve $\{\eta_n\} \in l_2$ dir.

İspat: $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun herhangi bir λ için (4.2.1.2) koşulunu sağladığı açıktır. Dolayısıyla özdeğerleri, $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunu (4.2.1.3) koşulunda yazarak bulacağız.

(4.2.1.3)'den $\varphi(\pi,\lambda)\left(\beta_1 + \lambda^2\beta_3\right) + \varphi'(\pi,\lambda)\left(\beta_2 + \lambda^2\beta_4\right) = \Delta(\lambda)\big|_{x=\pi}$ yazabiliriz. Burada $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (4.2.1.13) gösterimini göz önünde bulundurursak

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \left(\alpha_1 + \lambda^2\alpha_3\right) \int_0^{\mu^+(\pi)} A(\pi,t) \frac{\sin \lambda t}{\lambda} dt + \left(\alpha_2 + \lambda^2\alpha_4\right) \int_0^{\mu^+(\pi)} \tilde{A}(\pi,t) \cos \lambda t dt, \tag{4.2.4.10}$$

elde ederiz. $\sigma << \frac{\tau}{2}$ (bknz. Lemma 4.1.4.1) yeterince küçük pozitif bir sayı olmak üzere olmak üzere $G_\sigma = \left\{\lambda : \left|\lambda - \lambda_n^0\right| \geq \sigma\right\}$ alalım. [54] Teorem 12.4 kullanılarak

$$\left|\Delta_0(\lambda)\right| \geq C_\sigma \frac{1}{\lambda} e^{|\mathrm{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}, \ \lambda \in G_\sigma$$

elde edilir. Diğer taraftan, Teorem 3.1.4. ve [52]'den

$$\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|} e^{|\mathrm{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}\right), \ |\lambda| \to \infty$$

olur. Dolayısıyla, yeterince büyük n ler için genişleyen $\Gamma_n = \left\{\lambda : |\lambda| = \left|\lambda_n^0\right| + \frac{\tau}{2}\right\}$ eğrileri üzerinde $\left|\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right| \leq \left|\Delta_0(\lambda)\right|$ eşitsizliği sağlanır.

Rouche teoreminden, Γ_n eğrisi içinde $\left[\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right] + \Delta_0(\lambda) = \Delta(\lambda)$ fonksiyonuyla, $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısını aynı olduğunu söyleyebiliriz.

Rouche teoremini, $\nu_n(\sigma)=\left\{\lambda : \left|\lambda-\lambda_n^0\right| \le \sigma\right\}$ eğrisine uygulayarak, yeterince büyük n ler için $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun $\nu_n(\sigma)$ eğrisi içinde tek bir λ_n sıfırı olduğunu söyleyebiliriz.

Şimdi bu λ_n leri bulalım. Herhangi bir $\sigma>0$ sayısı için

$$\lambda_n=\lambda_n^0+\varepsilon_n,\ \varepsilon_n=o(1),\ n\to\infty \tag{4.2.4.10}$$

yazabiliriz. (4.2.4.10)'u (4.2.4.9)'da yazarsak

$$\Delta\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)=\Delta_0\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)+\left(\alpha_1+\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)^2\alpha_3\right)\int_0^{\mu^+(\pi)}A(\pi,t)\frac{\sin\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}dt+$$

$$+\left(\alpha_2+\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)^2\alpha_4\right)\int_0^{\mu^+(\pi)}\tilde{A}(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t\,dt=0 \tag{4.2.4.11}$$

buluruz.

$$\Delta_0(\lambda_n)=\Delta_0\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)=\Delta_0\left(\lambda_n^0\right)+\dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)\varepsilon_n+\ddot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)\frac{\varepsilon_n^2}{2!}+\cdots=\dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)\varepsilon_n+o\left(\varepsilon_n^2\right)$$

bağıntısında, $\Delta_0\left(\lambda_n^0\right)=0$ eşitliğini ve (4.2.4.11)'i birlikte ele alırsak,

$$\dot{\Delta}_0(\lambda_n)\varepsilon_n+\left(\alpha_1+\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)^2\alpha_3\right)\int_0^{\mu^+(\pi)}A(\pi,t)\frac{\sin\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t}{\lambda_n^0+\varepsilon_n}dt+$$

$$+\left(\alpha_2+\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)^2\alpha_4\right)\int_0^{\mu^+(\pi)}\tilde{A}(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t\,dt\approx 0$$

buluruz. Burada, kısmi integrasyon işlemi yaparsak,

$$\varepsilon_n\approx-\frac{1}{\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)^3\dot{\Delta}\left(\lambda_n^0\right)}\left\{\alpha_1\left[A(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t\Big|_0^{\mu^+(\pi)}-\int_0^{\mu^+(\pi)}A_t'(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t\,dt\right]\right.$$

$$\left.+\alpha_4\left[-\tilde{A}(\pi,t)\sin\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t\Big|_0^{\mu^+(\pi)}-\int_0^{\mu^+(\pi)}\tilde{A}_t'(\pi,t)\sin\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t\,dt\right]\right\}$$

$$=-\frac{1}{\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)^3\dot{\Delta}\left(\lambda_n^0\right)}\left\{\alpha_1\left[A(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t\Big|_0^{\mu^-(\pi)-0}-A(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t\Big|_{\mu^-(\pi)+0}^{\mu^+(\pi)}\right]\right.$$
$$+\alpha_4\left[-\tilde{A}(\pi,t)\sin\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t\Big|_0^{\mu^-(\pi)-0}+\tilde{A}(\pi,t)\sin\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)t\Big|_{\mu^-(\pi)+0}^{\mu^+(\pi)}\right]$$
$$\left.-\alpha_1\int_0^{\mu^+(\pi)}A_t'(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)tdt-\alpha_4\int_0^{\mu^+(\pi)}\tilde{A}_t'(\pi,t)\sin\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)tdt\right\}$$

$$=-\frac{1}{\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)^3\dot{\Delta}\left(\lambda_n^0\right)}\left\{\alpha_1\left[\left(A\left(\pi,\mu^-(\pi)-0\right)-A\left(\pi,\mu^-(\pi)+0\right)\right)\cos\lambda_n^0\mu^-(\pi)\right.\right.$$
$$\left.-A(\pi,0)-A\left(\pi,\mu^+(\pi)\right)\cos\lambda_n^0\mu^+(\pi)\right]$$
$$+\alpha_4\left[\left(\tilde{A}\left(\pi,\mu^-(\pi)-0\right)-\tilde{A}\left(\pi,\mu^-(\pi)+0\right)\right)\sin\lambda_n^0\mu^-(\pi)\right.$$
$$\left.\left.+\tilde{A}\left(\pi,\mu^+(\pi)\right)\sin\lambda_n^0\mu^+(\pi)\right]-\alpha_1\int_0^{\mu^+(\pi)}A_t'(\pi,t)\cos\lambda_n^0tdt-\alpha_4\int_0^{\mu^+(\pi)}\tilde{A}_t'(\pi,t)\sin\lambda_n^0tdt\right\}$$

elde ederiz. Burada (4.2.1.9) ve (4.2.1.10) özelliklerini kullanırsak ve $n\to\infty$ iken $\varepsilon_n=o(1)$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\varepsilon_n\approx-\frac{1}{\left(\lambda_n^0\right)^3\dot{\Delta}\left(\lambda_n^0\right)}\left\{-\frac{\alpha_1}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\cos\lambda_n^0\mu^-(\pi)q(t)dt-\alpha_1A(\pi,0)\right.$$
$$-\alpha_1A\left(\pi,\mu^+(\pi)\right)\cos\lambda_n^0\mu^+(\pi)-\frac{\alpha_4}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\sin\lambda_n^0\mu^-(\pi)q(t)dt$$
$$\left.+\alpha_4\tilde{A}\left(\pi,\mu^+(\pi)\right)\sin\lambda_n^0\mu^+(\pi)-\alpha_1\int_0^{\mu^+(\pi)}A_t'(\pi,t)\cos\lambda_n^0tdt-\alpha_4\int_0^{\mu^+(\pi)}\tilde{A}_t'(\pi,t)\sin\lambda_n^0tdt\right\}$$
$$=\frac{1}{\left(\lambda_n^0\right)^3\dot{\Delta}\left(\lambda_n^0\right)}\left\{d_n+\tilde{\eta}_n\right\}$$

buluruz, burada

$$\left\{\tilde{\eta}_n\right\}:=\alpha_1\int_0^{\mu^+(\pi)}A_t'(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0\right)tdt+\alpha_4\int_0^{\mu^+(\pi)}\tilde{A}_t'(\pi,t)\sin\left(\lambda_n^0\right)tdt\in l_2 \text{ dir.}$$

4.2.5. Ayrışım Formülü

Bu bölümde, (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının tamlığını göstereceğiz ve daha sonra özfonksiyonlara göre ayrışım formülünü elde edeceğiz.

$$G(x,t,\lambda):=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\varphi(t,\lambda)\psi(x,\lambda), & t\le x,\\ \psi(t,\lambda)\varphi(x,\lambda), & t>x,\end{cases}$$

olsun.

$$y(x,\lambda)=\int_0^\pi G(x,t,\lambda)f(t)\rho(t)dt-\frac{f_1\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\frac{f_2\varphi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

$$=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\Big[\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)f(t)\rho(t)dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)f(t)\rho(t)dt$$

$$+f_1\psi(x,\lambda)+f_2\varphi(x,\lambda)\Big] \tag{4.2.5.1}$$

fonksiyonunu ele alalım. $G(x,t,\lambda)$ fonksiyonuna, Bölüm 4.2.2 de tanımlanan A operatörünün *Green fonksiyonu* denir. $G(x,t,\lambda)$, A operatörünün ters operatörünün çekirdeğidir, yani $y(x,\lambda)$ fonksiyonu $-y''+q(x)y=\lambda^2\rho(x)y+f(x)\rho(x)$, $U_1(y)=f_1$, $U_2(y)=f_2$ sınır değer probleminin çözümüdür.

Teorem 4.2.5.1. (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin $\{\Phi(x,\lambda_n)\}_{n\ge0}$ özfonksiyonları $L_{2,\rho}[0,\pi]\oplus\mathbb{C}^2$ de bir tam sistem oluşturur.

İspat: (4.2.3.3) ve (4.2.3.4)'den

$$\psi(x,\lambda_n)=-\frac{\dot\Delta(\lambda_n)}{2\lambda_n\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n) \tag{4.2.5.2}$$

yazabiliriz. (4.2.3.3)'ü göz önüne alıp, Sonuç 4.2.3.1 i kullanırsak

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y(x,\lambda)=-\frac{1}{\dot\Delta(\lambda_n)}\left[-\frac{\dot\Delta(\lambda_n)}{2\lambda_n\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n)\int_0^\pi\varphi(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)dt\right]-\frac{f_1\psi(x,\lambda_n)}{\dot\Delta(\lambda_n)}-\frac{f_2\varphi(x,\lambda_n)}{\dot\Delta(\lambda_n)}$$

buluruz. Yukarıdaki son iki terimde, (4.2.3.3)'ü tekrar göz önüne alıp, gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y(x,\lambda)=\frac{1}{2\lambda_n\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n)\left[\int_0^\pi\varphi(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)dt+f_1+\frac{f_2}{k_n}\right] \tag{4.2.5.3}$$

elde ederiz.

Şimdi, $f(x)\in L_{2,\rho}[0,\pi]\oplus\mathbb{C}^2$ alalım ve

$$\left(\Phi(x,\lambda_n),\,f(x)\right)=\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\overline{f_1(x)}\rho(x)\,dx$$
$$+\frac{\left(\alpha_3\varphi(0,\lambda_n)+\alpha_4\varphi'(0,\lambda_n)\right)\overline{f_2}}{\chi_1}+\frac{\left(\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n)+\beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right)\overline{f_3}}{\chi_2}=0$$

olduğunu kabul edelim. Bu ifadede, (4.2.1.4), (4.2.1.5) koşulları ve (4.2.3.3)'ü birlikte ele alırsak,

$$\left(\Phi(x,\lambda_n),\,f(x)\right)=\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\overline{f_1(x)}\rho(x)\,dx-\frac{\alpha_3\left(\alpha_2+\lambda_n\alpha_4\right)}{\chi_1}\overline{f_2}+\frac{\alpha_4\left(\alpha_1+\lambda_n\alpha_3\right)}{\chi_1}\overline{f_2}$$
$$+\beta_3\overline{f_3}\frac{\psi(\pi,\lambda_n)}{\chi_2 k_n}+\beta_4\overline{f_3}\frac{\psi'(\pi,\lambda_n)}{\chi_2 k_n}$$
$$=\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\overline{f_1(x)}\rho(x)\,dx+\overline{f_2}+\frac{1}{\chi_2 k_n}\left(-\beta_3\left(\beta_2+\lambda_n^2\beta_4\right)+\beta_4\left(\beta_1+\lambda_n^2\beta_3\right)\right)\overline{f_3}$$
$$=\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\overline{f_1(x)}\rho(x)\,dx+\overline{f_2}+\frac{\overline{f_3}}{\chi_2 k_n}\left(-\beta_3\beta_1-\lambda_n^2\beta_3\beta_4+\beta_4\beta_1+\lambda_n^2\beta_3\beta_4\right)$$
$$=\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\overline{f_1(x)}\rho(x)\,dx+\overline{f_2}+\frac{\overline{f_3}}{k_n}$$

olur. Buradan ise

$$\left(\Phi(x,\lambda_n),\,f(x)\right)=\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\overline{f_1(x)}\rho(x)\,dx+\overline{f_2}+\frac{\overline{f_3}}{k_n}=0 \tag{4.2.5.4}$$

bulunur. (4.2.5.3) ve (4.2.5.4)'ü birlikte göz önünde bulundurursak, $\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y(x,\lambda)=0$ elde ederiz ve buradan sabitlenmiş her $x\in[0,\pi]$ için $y(x,\lambda)$ nın $\lambda-$ ya göre tamlığından bahsedebiliriz. Teorem 3.1.4.'den her $f(x)\in L_1[0,\pi]$ için

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{x\in[0,\pi]}\left\{e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda|x}\left|\int_0^x f(t)\cos\lambda t\,dt\right|\right\}=\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{x\in[0,\pi]}\left\{e^{-|\mathrm{Im}\,\lambda|x}\left|\int_0^x f(t)\sin\lambda t\,dt\right|\right\}=0$$

eşitliklerinin sağlandığını söyleyebiliriz.

Ayrıca, $|\lambda|\to\infty$ için

$$\varphi(x,\lambda)=\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^{+}(x)}\right), \tag{4.2.5.5}$$

$$\varphi'(x,\lambda)=\varphi_0'(x,\lambda)+O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^{+}(x)}\right)=O\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^{+}(x)}\right), \tag{4.2.5.6}$$

$$\psi(x,\lambda)=\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^{+}(\pi)-\mu^{+}(x)\right)}\right), \tag{4.2.5.7}$$

$$\psi'(x,\lambda)=\psi_0'(x,\lambda)+\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^{+}(\pi)-\mu^{+}(x)\right)}\right)=O\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^{+}(\pi)-\mu^{+}(x)\right)}\right) \tag{4.2.5.8}$$

sağlanır.

(4.2.5.5) – (4.2.5.6)'dan

$$|\Delta(\lambda)|\geq C_\delta\cdot\frac{1}{|\lambda|}\cdot e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^{+}(\pi)},\quad \lambda\in G_\delta \tag{4.2.5.9}$$

sağlanır.

(4.2.5.1)'den sabitlenmiş $\sigma>0$ ve yeterince büyük $\lambda^*>0$ için $|y(x,\lambda)|\leq\frac{C_\sigma}{|\lambda|},\quad \lambda\in G_\sigma,\quad |\lambda|\geq\lambda^*$ elde ederiz. Analitik fonksiyonlar için maksimum modül prensibi ve Liouville teoreminden $y(x,\lambda)\equiv 0$ olduğu sonucuna varırız. Buradan $[0,\pi]$ aralığında hemen hemen her yerde $f(x)\equiv 0$ diyebiliriz. Böylece $\{\Phi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonları $L_{2,\rho}[0,\pi]\oplus\mathbb{C}^2$ de bir tam sistem oluşturur. □

Teorem 4.2.5.2. Eğer $f(x)\in D(A)$ ise,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi(x,\lambda_n) \tag{4.2.5.10}$$

ayrışım formülü geçerlidir, burada $a_n=\frac{1}{\gamma_n}\int_0^{\pi}\varphi(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)\,dt$ dir ve seriler $x\in[0,\pi]$'ye göre düzgün yakınsaktır. $f(x)\in L_{2,\rho}[0,\pi]$ için seriler $L_{2,\rho}[0,\pi]$ de yakınsaktır ve $\int_0^{\pi}|f(x)|^2\rho(x)\,dx=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n|a_n|^2$ Parseval eşitliği sağlanır.

İspat: Keyfi $f(x)\in AC[0,\pi]$ alalım. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$, (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer çözümleri olduğundan, (4.2.1.1) ve (4.2.5.1) den

$$y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\left[-\varphi''(t,\lambda)+q(t)\varphi(t,\lambda)\right]f(t)\,dt\right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\left[-\psi''(t,\lambda)+q(t)\psi(t,\lambda)\right]f(t)\,dt\right\}-\frac{f_1\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\frac{f_2\varphi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi düzenlersek,

$$y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{-\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi''(t,\lambda)\,f(t)\,dt+\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{-\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi''(t,\lambda)\,f(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)q(t)f(t)\,dt\right\}$$

$$-\frac{f_1\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\frac{f_2\varphi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

elde ederiz. Burada kısmi integrasyon yaparsak,

$$y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{-\psi(x,\lambda)\left[\varphi'(t,\lambda)\,f(t)\Big|_0^x-\int_0^x\varphi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt\right]\right.$$

$$\left.+\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{-\varphi(x,\lambda)\left[\psi'(t,\lambda)\,f(t)\Big|_x^\pi-\int_x^\pi\psi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt\right]+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}$$

$$-\frac{f_1\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\frac{f_2\varphi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt-\psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)\,f(x)+\psi(x,\lambda)\varphi'(0,\lambda)\,f(0)\right.$$

$$\left.+\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt-\varphi(x,\lambda)\psi'(\pi,\lambda)\,f(\pi)+\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)\,f(x)\right.$$

$$\left.+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}-\frac{f_1\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\frac{f_2\varphi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

buluruz. Şimdi (4.2.1.2) ve (4.2.1.3) sınır koşullarını ele alırsak,

$$y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt\right\}$$

$$+\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\,f(x)\left[\psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)\right]$$

$$+\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\psi(x,\lambda)\left(\alpha_2+\lambda^2\alpha_4\right)f(0)+\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\left(\beta_1+\lambda^2\beta_3\right)f(\pi)$$

$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}$$

$$-\frac{f_1\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\frac{f_2\varphi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

elde ederiz. Buradan,

$$y(x,\lambda)=-\frac{f(x)}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}\left\{Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\right\}-\frac{f_1\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}-\frac{f_2\varphi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\tag{4.2.5.11}$$

bulunur. Burada,

$$Z_1(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi'(t,\lambda)\,f'(t)\,dt\right\}$$

ve

$$Z_2(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{-\psi(x,\lambda)\left(\alpha_2+\lambda^2\alpha_4\right)f(0)-\varphi(x,\lambda)\left(\beta_1+\lambda^2\beta_3\right)f(\pi)\right.$$

$$\left.+\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)q(t)\,f(t)\,dt\right\}$$

dır.

Şimdi,

$$I_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\lambda y(x,\lambda)\,d\lambda\tag{4.2.5.12}$$

integralini ele alalım. Burada, $\Gamma_n=\left\{\lambda:|\lambda|=\left|\lambda_n^0\right|+\frac{\tau}{2}\right\}$ saat yönünde yönlendirilmiş bir eğri ve n yeterince büyük bir doğal sayıdır. (4.2.5.11)'den

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\lambda y(x,\lambda)\,d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{f(x)}{\lambda}\,d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{\left\{Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\right\}}{\lambda}\,d\lambda$$

$$-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{\lambda f_1}{\Delta(\lambda)}\psi(x,\lambda)\,d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{\lambda f_2}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\,d\lambda \tag{4.2.5.13}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan rezidü teorisinden $I_n(x)=2\sum_{n=1}^{N}\lambda\operatorname{Res}y(x,\lambda)$ dir. (4.2.5.3) ve (4.2.5.13)'den

$$-f(x)+\varepsilon_n(x)-\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n f_1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\psi(x,\lambda_n)-\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n f_2}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\varphi(x,\lambda_n)$$
$$=-\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)}{\gamma_n}\left\{\int_0^{\pi}\varphi(t,\lambda_n)\,f(t)\rho(t)\,dt\right\}-\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n f_1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\psi(x,\lambda_n)-\sum_{n=1}^{N}\frac{\lambda_n f_2}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\varphi(x,\lambda_n)$$
$$\tag{4.2.5.14}$$

bulunur. Burada, $\varepsilon_n(x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\{Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\}d\lambda$ dir. (4.2.5.14)'den

$-f(x)+\varepsilon_n(x)=-\sum_{n=1}^{N}\frac{1}{\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n)\left\{\int_0^{\pi}\varphi(t,\lambda_n)\,f(t)\rho(t)\,dt\right\}$ olduğu görülür.

Şimdi,

$$\lim_{N\to\infty}\max_{x\in[0,\pi]}|\varepsilon_n(x)|=0 \tag{4.2.5.15}$$

olduğunu gösterelim. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümlerinin ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun asimptotik formüllerinden sabitlenmiş $\sigma>0$ ve yeterince büyük $\lambda^*>0$ için

$$\max_{x\in[0,\pi]}|Z_2(x,\lambda)|\le\frac{C_2}{|\lambda|^2},\quad \lambda\in G_\sigma,\quad |\lambda|\ge\lambda^* \tag{4.2.5.16}$$

olur. $\lim_{\substack{|\lambda|\to\infty\\ \lambda\in G_\sigma}}\max_{x\in[0,\pi]}|Z_1(x,\lambda)|=0$ olduğunu göstermek için önce $f'(t)\in AC[0,\pi]$ olduğunu kabul edip, $Z_1(x,\lambda)$ ifadesinde kısmi integrasyon yaparsak,

$$Z_1(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^{x}\varphi(t,\lambda)f''(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^{\pi}\psi(t,\lambda)f''(t)\,dt\right\}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $Z_2(x,\lambda)$ ye benzer şekilde

$$\max_{x\in[0,\pi]}|Z_1(x,\lambda)|\le\frac{C_1}{|\lambda|^2},\quad \lambda\in G_\sigma,\quad |\lambda|\ge\lambda^* \tag{4.2.5.17}$$

buluruz. (4.2.5.16) ve (4.2.5.17)'den (4.2.5.15)'un doğru olduğu kolayca görülür. Genel durum, [55]'deki yöntem kullanılarak gösterilebilir. O halde $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n)\left\{\int_0^{\pi}\varphi(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)dt\right\}$ yazabiliriz. Bu ifadede $a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\left\{\int_0^{\pi}\varphi(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)dt\right\}$ alırsak, ayrışım formülünü $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi(x,\lambda_n)$ şeklinde yazabiliriz. $\{\Phi(x,\lambda)\}_{n\geq 1}$ sistemi $L_{2,\rho}[0,\pi]\oplus\mathbb{C}^2$'de ortogonal bir baz oluşturur, dolayısıyla Parseval eşitliği sağlanır. □

4.2.6. Weyl Çözümü ve Weyl Fonksiyonu

$\Phi(x,\lambda)$ (4.2.1.1) denkleminin $U(\Phi)=1$ ve $V(\Phi)=0$ koşullarını sağlayan çözümü olsun. $c(x,\lambda)$ ve $s(x,\lambda)$ ile (4.2.1.1) denkleminin sırasıyla $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$, $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$ başlangıç ve $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları ile de (4.2.1.1) denkleminin (4.2.1.4), (4.2.1.5) sınır koşullarını sağlayan çözümlerini gösterelim. $M(\lambda):=\frac{\psi(0,\lambda)}{\varphi(0,\lambda)\Delta(\lambda)}$ olsun. $\Phi(x,\lambda)$ ve $M(\lambda)$ sırasıyla (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu olarak adlandırılır. Weyl fonksiyonu, (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin λ_n özdeğerlerinde basit kutup noktalarına sahip meromorfik bir fonksiyondur.

$W(x):=\langle\Phi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\rangle$ Wronskiyeni x e bağlı değildir. Burada $x=0$ alırsak, $W(0)=\Phi(0,\lambda)\varphi'(0,\lambda)-\Phi'(0,\lambda)\varphi(0,\lambda)=1$ olur ve böylece

$$W(x)=\langle\Phi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\rangle=1 \tag{4.2.6.1}$$

yazabiliriz. (4.2.1.4), (4.2.1.5) koşullarını göz önünde bulundurursak $\lambda\neq\lambda_n$ için

$$\Phi(x,\lambda)=-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{4.2.6.2}$$

yazabiliriz. Son eşitlikten $\Delta^0(\lambda) = -\psi(0,\lambda)$, $L_0 := \begin{cases} ly = \lambda^2 y, \ 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \ V(y) = 0 \end{cases}$ sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $M(\lambda) = -\dfrac{\Delta^0(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ yazılabilir ve

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{1}{\varphi(0,\lambda)}\big(s(x,\lambda) - M(\lambda)\varphi(x,\lambda)\big) \tag{4.2.6.3}$$

olur.

Şimdi ters problem için teklik teoremini ispat edelim.

Teorem 4.2.6.1. (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer problemi $M(\lambda)$ Weyl fonksiyonuyla tek türlü belirlenebilir. (Eğer, $\tilde{M}(\lambda) = M(\lambda)$ ise $\tilde{q}(x) = q(x)$ dir.)

İspat: $P(x,\lambda) = \big[P_{jk}(x,\lambda)\big]_{j,k=1,2}$ matrisini

$$\begin{pmatrix} P_{11}(x,\lambda) & P_{12}(x,\lambda) \\ P_{21}(x,\lambda) & P_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{s}(x,\lambda) & \tilde{\Phi}(x,\lambda) \\ \tilde{s}'(x,\lambda) & \tilde{\Phi}'(x,\lambda) \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} s(x,\lambda) & \Phi(x,\lambda) \\ s'(x,\lambda) & \Phi'(x,\lambda) \end{pmatrix} \tag{4.2.6.4}$$

eşitliği sağlanacak biçimde seçelim. eşitliği sağlanacak biçimde seçelim. O halde,

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda) \\ \Phi(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda) + P_{12}(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda) \end{aligned} \tag{4.2.6.5}$$

veya

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= \tilde{\varphi}'(x,\lambda)\Phi(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda) \\ P_{12}(x,\lambda) &= \varphi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda) - \tilde{\varphi}(x,\lambda)\Phi(x,\lambda) \end{aligned} \tag{4.2.6.6}$$

yazılabilir. (4.2.6.2)'yi (4.2.6.6)'da yazarsak,

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= 1 + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\psi(x,\lambda)\big(\varphi'(x,\lambda) - \tilde{\varphi}'(x,\lambda)\big) + \frac{1}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda)\big(\tilde{\psi}'(x,\lambda) - \psi'(x,\lambda)\big), \\ P_{12}(x,\lambda) &= \frac{1}{\Delta(\lambda)}\big(\tilde{\varphi}(x,\lambda)\psi(x,\lambda) - \varphi(x,\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda)\big) \end{aligned} \tag{4.2.6.7}$$

elde ederiz.

$$\left|\frac{\varphi'(x,\lambda) - \tilde{\varphi}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right| = O\left(\frac{1}{|\lambda|^2}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu^+(x)}\right), \ |\lambda| \to \infty$$

ve

$$\left|\frac{\psi'(x,\lambda)-\tilde{\psi}(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\right| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^{+}(\pi)-\mu^{+}(x)\right)}\right),\ |\lambda|\to\infty$$ bağıntılarından ve

(4.2.6.7)'den $\lambda \in G_\delta$ için

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}\left|P_{11}(x,\lambda)-1\right| = \lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}\left|P_{12}(x,\lambda)\right| = 0 \tag{4.2.6.8}$$

buluruz. (4.2.6.3)'ü (4.2.6.6)'da yazarsak

$$P_{11}(x,\lambda)=\varphi(x,\lambda)\frac{\tilde{s}'(x,\lambda)}{\varphi(0,\lambda)}-\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\frac{s(x,\lambda)}{\varphi(0,\lambda)}+\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\left[\tilde{M}(\lambda)-M(\lambda)\right]$$
$$P_{12}(x,\lambda)=\tilde{\varphi}(x,\lambda)\frac{s(x,\lambda)}{\varphi(0,\lambda)}-\varphi(x,\lambda)\frac{\tilde{s}(x,\lambda)}{\varphi(0,\lambda)}+\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)\left[M(\lambda)-\tilde{M}(\lambda)\right]$$

olur. Dolayısıyla eğer, $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise

$$P_{11}(x,\lambda)=c(x,\lambda)\tilde{s}'(x,\lambda)-\tilde{c}'(x,\lambda)s(x,\lambda)$$
$$P_{12}(x,\lambda)=\tilde{c}(x,\lambda)s(x,\lambda)-c(x,\lambda)\tilde{s}(x,\lambda)$$

olur. Dolayısıyla sabitlenmiş her x için $P_{11}(x,\lambda)$ ve $P_{12}(x,\lambda)$ tam fonksiyonlardır. (4.2.6.7)'den $P_{11}(x,\lambda)=1$ ve $P_{12}(x,\lambda)=0$ olduğu açıktır. Sonuç olarak, her x ve λ için $\varphi(x,\lambda)\equiv\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ ve $\Phi(x,\lambda)\equiv\tilde{\Phi}(x,\lambda)$ olur. Buradan ise $q(x)\equiv\tilde{q}(x)$ bulunur. □

4.3. BİR ÖZEL DURUM

Bu bölümde, Bölüm 4.2 de ele alınan sınır değer probleminin bir özel durumu olan

$$-y''+q(x)y=\lambda^2\rho(x)y, \tag{4.3.1}$$

$$U(y):=\alpha_1 y(0)+\lambda^2\alpha_4 y'(0)=0, \tag{4.3.2}$$

$$V(y):=\beta_1 y(\pi)+\beta_2 y'(\pi)+\lambda^2\left[\beta_3 y(\pi)+\beta_4 y'(\pi)\right]=0 \tag{4.3.3}$$

problemi ele alınacaktır ve daha önceki bölümde elde edilen sonuçlar ispatsız verilecektir Burada; λ, spektral parametre; $q(x)\in L_2(0,\pi)$, reel değerli bir fonksiyon; α_i,β_j ($i=1,4,\ j=\overline{1,4}$) reel sayılar ve $\rho(x)$ $0<\alpha\neq 1$ olmak üzere

$$\rho(x)=\begin{cases}1, 0\le x<a,\\ \alpha^2, a\le x\le\pi\end{cases}$$

biçimindedir.

4.3.1. Özel Çözümler

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ (4.3.1) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = -\lambda^2\alpha_4,\ \varphi'(0,\lambda) = \alpha_1, \tag{4.3.1.1}$$

$$\psi(\pi,\lambda) = -\left(\beta_2 + \lambda^2\beta_4\right),\ \psi'(\pi,\lambda) = \beta_1 + \lambda^2\beta_3 \tag{4.3.1.2}$$

koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

Lemma 4.2.1.1. (4.3.1) denkleminin (4.3.1.1) koşullarını sağlayan özel çözümü

$$\varphi(x,\lambda) = \varphi_0(x,\lambda) + \alpha_1 \int_0^{\mu^+(x)} A(x,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt + \lambda^2\alpha_4 \int_0^{\mu^+(x)} \tilde{A}(x,t)\cos\lambda t dt, \tag{4.3.1.3}$$

biçimindedir, burada $A(x,t) = K(x,t) + K(x,-t)$ ve $\tilde{A}(x,t) = K(x,-t) - K(x,t)$ çekirdekleri (4.1.1.8)-(4.1.1.12) özelliklerini gerçekler.

4.3.2. (4.3.1)-(4.3.3) Sınır Değer Probleminin Operatör Gösterimi

İki bileşenli vektörlerden oluşan $H_\rho = L_{2,\rho}(0,\pi) \oplus \mathbb{C}^2$ Hilbert uzayındaki iç çarpımı

$$(F,G) := \int_0^\pi F_1(x)\overline{G_1(x)}\rho(x)dx + \frac{F_2\overline{G_2}}{\chi_1} + \frac{F_3\overline{G_3}}{\chi_2}$$

şeklinde tanımlayalım. Burada,

$$F = \begin{pmatrix} F_1(x) \\ F_2 \\ F_3 \end{pmatrix} \in H_\rho, \qquad G = \begin{pmatrix} G_1(x) \\ G_2 \\ G_3 \end{pmatrix} \in H_\rho \text{'dur} \qquad \text{ve} \qquad \chi_1 =: \alpha_1\alpha_4 > 0,$$

$\chi_2 := \beta_1\beta_4 - \beta_2\beta_3 > 0$ şeklinde tanımlıdır.

Tanım kümesi

$$D(A) = \left\{ \begin{array}{l} F \in H_\rho : F_1(x), F_1'(x) \in AC[0,\pi], lF_1 \in L_{2,\rho}(0,\pi) \\ F_2 = \alpha_4 F_1'(0), F_3 = \beta_3 F_1(\pi) + \beta_4 F_1'(\pi) \end{array} \right\}$$

olan A operatörü

$$A := \begin{pmatrix} lF_1(x) \\ -\alpha_1 F_1(0) \\ -\left(\beta_1 F_1(\pi) + \beta_2 F_1'(\pi)\right) \end{pmatrix}$$

biçimindedir, burada $lF_1(x) = \dfrac{1}{\rho(x)}\left\{-F_1''(x) + q(x)F_1(x)\right\}$ dir ve (4.3.1) – (4.3.3) sınır değer problemi $AY = \lambda^2 Y$ ifadesine denktir. A operatörünün $\lambda = \lambda_n$ özdeğerlerine uygun özfonksiyonları

$$\Phi(x,\lambda_n) = \Phi_n := \begin{pmatrix} \varphi(x,\lambda_n) \\ \alpha_4\varphi'(0,\lambda_n) \\ \beta_3\varphi(\pi,\lambda_n) + \beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n) \end{pmatrix}, \quad (n = 0,1,2,\cdots)$$

biçimindedir.

(4.3.1) – (4.3.2) sınır değer probleminin normlaştırıcı sayıları

$$\gamma_n = \int_0^\pi \varphi^2(x,\lambda_n)\rho(x)\,dx + \frac{\left(\alpha_4\varphi'(0,\lambda_n)\right)^2}{\chi_1} + \frac{\left(\beta_3\varphi(\pi,\lambda_n) + \beta_4\varphi'(\pi,\lambda_n)\right)^2}{\chi_2}$$ biçiminde

tanımlanmıştır ve $\{\lambda_n, \gamma_n\}$ sayıları (4.2.1.1) – (4.2.1.3) sınır değer probleminin *spektral verileri* olarak adlandırılır.

Teorem 4.3.2.1. Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar diktir: $(\Phi_n, \Phi_m) = 0, \quad n \neq m.$

4.3.3. Spektral Verilerin Özellikleri

(4.3.1) – (4.3.2) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonunu

$$\Delta(\lambda) := \langle \varphi(x,\lambda), \psi(x,\lambda) \rangle = \varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda) - \varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda) \quad (4.3.3.1)$$

şeklinde tanımlayalım. (4.3.3.1)'de $x = 0$ ve $x = \pi$ yazarak ve (4.3.1.1), (4.3.1.2) sınır koşullarını göz önünde bulundurarak

$$\Delta(\lambda) = -U_1(\psi) = U_2(\varphi) \quad (4.3.3.2)$$

elde ederiz.

(4.3.1.1) ve (4.3.1.2) koşulları $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonlarının; sabitlenmiş x'ler için, λ'nın tam fonksiyonları olduğunu gösterir. Buradan $\Delta(\lambda)$'nın λ'nın bir tam fonksiyonu olduğu sonucu çıkar.

Teorem 4.3.3.1. Karakteristik fonksiyonun sayılabilir sayıdaki $\{\lambda_n\}$ sıfırlarının kareleri, (4.3.1) – (4.3.2) sınır değer probleminin özdeğerleriyle çakışır, ayrıca her λ_n özdeğeri için

$$\psi(x,\lambda_n)=k_n\varphi(x,\lambda_n) \quad (k_n\neq 0) \tag{4.3.3.3}$$

eşitliği sağlanacak şekilde bir $\{k_n\}$ dizisi vardır, burada $\psi(x,\lambda_n)$ ve $\varphi(x,\lambda_n)$, λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlardır.

Lemma 4.3.3.1. Aşağıdaki bağıntı gerçeklenir:

$$\dot{\Delta}(\lambda_n)=-2\lambda_n k_n \gamma_n, \tag{4.3.3.4}$$

burada k_n (4.3.3.3)'de tanımlanan dizi ve $\dot{\Delta}(\lambda)=\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$ dır.

$\lambda_n\neq 0, k_n\neq 0, \gamma_n\neq 0$ olduğundan Lemma 4.3.3.1'in aşağıdaki sonucunu verebiliriz:

Sonuç 4.3.3.1. $\Delta(\lambda)$ nın tüm sıfırları basittir.

4.3.4. (4.3.1) – (4.3.3) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin ve Karakteristik Fonksiyonunun Özellikleri

1. $q(x)\equiv 0$ iken (4.3.1) – (4.3.3) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı

Teorem 4.3.4.1. $q(x)\equiv 0$ iken (4.3.1) – (4.3.3) sınır değer probleminin özdeğerleri aşağıdaki asimptotik biçime sahiptir:

$$\left(\lambda_n^0\right)^2=n+\psi(n), \quad \sup_n|\psi(n)|<+\infty. \tag{4.3.4.1}$$

Lemma 4.3.4.1. $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun λ_n^0 kökleri ayrıktır, yani

$$\inf_{n\neq k}\left|\lambda_n^0-\lambda_k^0\right|=\tau>0 \tag{4.3.4.2}$$

sağlanır.

2. (4.3.1)-(4.3.2) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı

Teorem 4.3.4.2. (4.3.1) – (4.3.3) sınır değer probleminin basit $\{\lambda_n^2\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerleri sayılabilirdir ve

$$\lambda_n=\lambda_n^0+\frac{d_n}{\lambda_n^0}+\frac{\eta_n}{n}, \quad \lambda>0$$

biçimindedir. Burada, λ_n^0, $\Delta_0(\lambda)$karakteristik fonksiyonun sıfırları;

$$d_n = \frac{1}{4\left(\lambda_n^0\right)^3 \dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)} \left\{ \int_0^\pi \frac{q(t)}{\sqrt{\rho(t)}} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right) \left(\alpha_1 \cos \lambda_n^0 \mu^-(\pi) + \alpha_4 \sin \lambda_n^0 \mu^-(\pi)\right) dt \right\}$$

$$\alpha_1 A(\pi, 0) + \alpha_1 A\left(\pi, \mu^+(\pi)\right) \cos \lambda_n^0 \mu^+(\pi) - \alpha_4 \tilde{A}\left(\pi, \mu^+(\pi)\right) \sin \lambda_n^0 \mu^+(\pi)$$

biçiminde sınırlı bir dizi ve $\{\eta_n\} \in l_2$ dir.

4.3.5. Ayrışım Formülü

Bu bölümde, (4.3.1) – (4.3.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının tamlığını göstereceğiz ve daha sonra özfonksiyonlara göre ayrışım formülünü elde edeceğiz.

$$G(x,t,\lambda) = -\frac{1}{\Delta(\lambda)} \begin{cases} \varphi(t,\lambda)\psi(x,\lambda), & t \le x, \\ \psi(t,\lambda)\varphi(x,\lambda), & t > x, \end{cases}$$

olduğunu kabul edelim ve

$$y(x,\lambda) = \int_0^\pi G(x,t,\lambda) f(t)\rho(t)dt - \frac{f_1\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} - \frac{f_2\varphi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$$

$$= -\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\psi(x,\lambda)\int_0^x \varphi(t,\lambda) f(t)\rho(t)dt + \varphi(x,\lambda)\int_x^\pi \psi(t,\lambda) f(t)\rho(t)dt + f_1\psi(x,\lambda) + f_2\varphi(x,\lambda)\right] \tag{4.3.5.1}$$

fonksiyonunu ele alalım. $G(x,t,\lambda)$ fonksiyonuna, Bölüm 4.3.2 de tanımlanan A operatörünün *Green fonksiyonu* denir. $G(x,t,\lambda)$, A operatörünün ters operatörünün çekirdeğidir, yani $y(x,\lambda)$ fonksiyonu $-y'' + q(x)y = \lambda^2\rho(x)y + f(x)\rho(x)$, $U_1(y) = f_1$, $U_2(y) = f_2$ sınır değer probleminin çözümüdür.

Teorem 4.2.5.1. (4.3.1)–(4.3.3) sınır değer probleminin $\{\Phi(x,\lambda_n)\}_{n\ge 0}$ özfonksiyonları $L_{2,\rho}[0,\pi] \oplus \mathbb{C}^2$ de bir tam sistem oluşturur.

Teorem 4.3.5.2. Eğer $f(x) \in D(A)$ ise,

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty a_n \varphi(x,\lambda_n) \tag{4.3.5.2}$$

ayrışım formülü geçerlidir, burada $a_n = \dfrac{1}{\gamma_n}\int_0^{\pi} \varphi(t,\lambda_n) f(t)\rho(t)\,dt$ dir ve seriler $x \in [0,\pi]$ 'ye göre düzgün yakınsaktır. $f(x) \in L_{2,\rho}[0,\pi]$ için seriler $L_{2,\rho}[0,\pi]$ 'de yakınsaktır ve $\int_0^{\pi} |f(x)|^2 \rho(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \gamma_n |a_n|^2$ Parseval eşitliği sağlanır.

4.3.6 Weyl Çözümü ve Weyl Fonksiyonu

$c(x,\lambda)$ ve $s(x,\lambda)$ ile (4.3.1) denkleminin sırasıyla $c(0,\lambda)=1$, $c'(0,\lambda)=0$, $s(0,\lambda)=0$, $s'(0,\lambda)=1$ başlangıç, $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları ile de (4.3.1) denkleminin (4.3.2.1), (4.3.2.2) sınır koşullarını sağlayan çözümlerini gösterelim. Ayrıca $\Phi(x,\lambda)$ (4.3.1) denkleminin $U(\Phi)=1$ ve $V(\Phi)=0$ koşullarını sağlayan çözümü olsun. $M(\lambda) := \dfrac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ ile işaret edelim. $\Phi(x,\lambda)$ ve $M(\lambda)$ sırasıyla (4.3.1) – (4.3.3) sınır değer probleminin Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu olarak adlandırılır. Weyl fonksiyonu, (4.3.1) – (4.3.3) sınır değer probleminin λ_n özdeğerlerinde basit kutup noktalarına sahip meromorfik bir fonksiyondur. $W(x) := \langle \Phi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) \rangle$ Wronskiyeni x e bağlı değildir. Burada $x=0$ alırsak, $W(0) = \Phi(0,\lambda)\varphi'(0,\lambda) - \Phi'(0,\lambda)\varphi(0,\lambda) = 1$ olur ve böylece

$$W(x) = \langle \Phi(x,\lambda), \varphi(x,\lambda) \rangle = 1 \tag{4.3.6.1}$$

yazabiliriz. (4.3.2.1), (4.3.2.2) koşullarını göz önünde bulundurursak $\lambda \neq \lambda_n$ için

$$\Phi(x,\lambda) = -\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \tag{4.3.6.2}$$

yazabiliriz. Son eşitlikten $\Delta^0(\lambda) = -\psi(0,\lambda)$, $L_0 := \begin{cases} ly = \lambda^2 y, \ 0 < x < \pi \\ y(0) = 0, \ V(y) = 0 \end{cases}$ sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu olmak üzere $M(\lambda) = -\dfrac{\Delta^0(\lambda)}{\Delta(\lambda)}$ yazılabilir ve

$$\Phi(x,\lambda) = s(x,\lambda) + M(\lambda)\varphi(x,\lambda) \tag{4.2.6.3}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.6.1. (4.3.1) – (4.3.3) sınır değer problemi $M(\lambda)$ Weyl fonksiyonuyla tek türlü belirlenebilir. (Eğer, $\tilde{M}(\lambda)=M(\lambda)$ ise $\tilde{q}(x)=q(x)$ dir.)

5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Tezde, sonlu aralıkta Sturm-Liouville operatörü ile oluşturulmuş süreksiz katsayılı diferansiyel denklem ve spektral parametre içeren sınır koşullarından meydana gelen sınır değer problemlerinin düz ve ters problemleri ele alınmıştır. Bu sınır değer problemleri için,

1) Sınır değer problemlerine uygun özel çözümler tanımlanmış ve özel çözümlerin biçimleri elde edilmiştir.
2) Sınır değer problemlerine uygun olarak çalışılan iç çarpım uzayında operatörün teorik biçimi gösterilmiş ve normlaştırıcı sayılar tanımlanmıştır. Daha sonra özfonksiyonların dik olduğunu gösteren teoremler ispatlanmıştır.
3) Sınır değer problemlerine uygun karakteristik fonksiyon tanımlanmış ve karakteristik fonksiyon ile ele alınan sınır değer probleminin sıfırları arasındaki ilişki incelenmiştir. Buna ek olarak, karakteristik fonksiyonun türevinin sıfırdan farklı olarak bulunmasından yola çıkılarak ele alınan sınır değer probleminin özdeğerlerinin basit olduğu gösterilmiştir.
4) Sınır değer problemlerinin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiş, ele alınan sınır değer problemine uygun Green fonksiyonu tanımlanmış, problemin özfonksiyonlarının çalışılan iç çarpım uzayında tam bir sistem oluşturdukları gösterilmiş ve özfonksiyonlara göre ayrışım formülü elde edilmiştir.
5) Sınır değer problemlerine uygun Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu tanımlandıktan sonra, ele alınan sınır değer problemlerinin Weyl fonksiyonuna ve spektral verilere göre tek türlü belirlenebileceği gösterilmiştir.

5.2 Öneriler

Tezde incelenen sınır değer problemlerinin ters problemi değişik karakteristiklere göre incelenerek literatüre katkıda bulunulabilir.

KAYNAKLAR

[1] Walter, J. “Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition”, Math. Z., 133:301-312, (1973).

[2] Hinton, D. B., “An expansion theorem for an eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the boundary condition”, Q. J. Math., 30:33-42, (1979).

[3] Fulton, C. T., “Two-point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions”, Proc. R. Soc. Edinb., 77: 293-308, (1977).

[4] Russakovskij, E. M., “Operator treatment of boundary value problems with spectral parameters entering via polynomials in the boundary conditions”, Funct. Anal. Appl., 9:358-359, (1975) (Translation from Funkc. Anal. Prilozh., 9(4): 1-92, (1975))

[5] Dijksma A., “Eigenfunction expansions for a class of J-selfadjoint ordinary differential operators with boundary conditions containing the eigenvalue parameter”, Proc. Roy. Soc. Edingburgh Ser. A, 87:1-27, (1980).

[6] Dijksma, A., Langer, H. and de Snoo, H. S. V., “Symmetric Sturm-Liouville operators with eigenvalue depending boundary conditions”, Canad. Math. Soc. Conf. Proc., 8:87-116, (1987).

[7] Shkalikov, A. A., “Boundary value problems for ordinary differential equations with a spectral parameter in the boundary conditions”, Tr. Semin. Im. I.G. Petrovskogo, 9:190-229, (1983).

[8] Mukhtarov, O. S., “Discontinuous boundary value problem with spectral parameter in boundary conditions”, Turk. J. Math., 18:183-192, (1994).

[9] Demirci, M., Akdogan, Z. and Mukhtarov. O. S., “Asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunctions of one discontinuous boundary value problem”, Int. J. Comput. Cogn., 2(3):101-113, (2004).

[10] Altinisik, N., Kadakal, M. and Mukhtarov, O. S., “Eigenvalues and eigenfunctions of discontinuous Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions”, Acta Math. Hung., 102(1-2):159-175, (2004).

[11] Mamedov, Kh. R., “On a basis problem for a second order differential equation with a discontinuous coefficient and a spectral parameter in the boundary conditions”, Geometry, Integrability and Quantization, 7: 218-225, (2006).

[12] Mamedov, Kh. R. and Cetinkaya, F. A., “Boundary value problem for a Sturm-Liouville operator with piecewise continuous coefficient”, Hacettepe Journal of Mathematics and Statistics, 44(4):867-874, (2015).

[13] Mamedov, Kh. R. and Cetinkaya, F. A., “On a spectral expansion formula for a class of second order differential equation with discontinuous coefficient”, Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 24(4):451-457, (2014).

[14] Borg, G. “Eine umkehrung der Sturm-Liouville eigenwertaufgabe”, Acta Math. 76:1–96, (1946).

[15] Levinson, N., “The Inverse Sturm-Liouville Prolems”, Nauka, Moscow, (1984); English transl., VNU Sci. Press, Utrecht, (1987).

[16] Marchenko, V. A., “Concerning the theory of a differential operator of second order” Dokl. Akad. Nauk. SSR 72:457–470, (1950).

[17] Marchenko, V. A., “Sturm-Liouville Operators and Their Applications” AMS, Providence (2011).

[18] Gel’fand, I. M. and Levitan, B. M., “On the determination of a differential equation from its spectral function”, Trans. Amer. Math. Soc., 1:253–304, (1955).

[19] Levitan, B. M. and Gasymov, M. G., “Determination of a differential equation by two of its spectra”, Uspekhi Mat. Nauk, 19(2:116):3–63, (1964).

[20] Gasymov, M. G., “The direct and inverse problem of spectral analysis for a class of equations with a discontinuous coefficient” Non-Classical Methods in Geophysics, M. M. Lavrent’ev, Ed. Nauka, Novosibirsk, Russia, 37–44, (1977).

[21] Darwish, A. A., “The inverse problem for a singular boundary value problem”, New Zeland Journal of Mathematics, 22:37–66, (1993).

[22] Guseinov, I. M. and Pashaev, R. T., “On an inverse problem for a second-order differential equation”, Uspekhi Matematicheskikh Nauk, 57(3:345):147–148, (2002).

[23] Mamedov, Kh. R., "On an inverse scattering problem for a discontinuous Sturm-Liouville equation with a spectral parameter in boundary condition", Bound. Value Probl., 2010, Article ID 171967 (2010).

[24] Mamedov, Kh. R. and Kosar Palamut, N., "Inverse scattering problem for Sturm-Liouville operator with nonlinear dependence on the spectral parameter in the boundary condition", Math. Methods Appl. Sci., 34(2):231-241, (2011).

[25] Mamedov, Kh. R., Kosar Palamut, N.., Cetinkaya, F. A., "Inverse scattering problem for a piecewise continuous Sturm-Liouville equation with eigenparameter dependence in the boundary condition", Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 41(1):16-24, (2015).

[26] Akhmedova, E. N., "The definition of one class of Sturm-Liouville operators with discontinuous coefficients by Weyl function", Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 22(30):3-8, (2005).

[27] Akhmedova, E. N. and Huseynov, H. M., "On solution of the inverse Sturm-Liouville problem with discontinuous coefficients", Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb. 32-44, (2007).

[28] Karahan, D. and Mamedov, Kh. R., "Uniqueness of the solution of the inverse problem for one class of Sturm-Liouville operator", Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 40(Special Issue):1-12, (2014).

[29] Mamedov, Kh. R. and Karahan, D., "On an inverse spectral problem for Sturm-Liouville operator with discontinuous coefficient", Ufimsk. Mat. Zh., 7(3):125-137, (2015).

[30] Mamedov, S.G., "Determination of a second order differential equation with respect to two spectra with a spectral parameter entering into the boundary conditions" (Russian), Izv. Akad. Nauk Azerb. SSR, Ser. Fiz.-Tekh. Mat. Nauk., 3:15-22, (1982).

[31] Guliyev, N. J., "Inverse eigenvalue problems for Sturm-Liouville equations with spectral parameter linearly contained in one of the boundary conditions", Inverse Problems, 21(4):1315–1330, (2005).

[32] Guliyev, N. J., “A uniqueness theorem for Sturm–Liouville equations with a spectral parameter linearly contained in the boundary conditions”, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., 25:35-40, (2006).

[33] Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B. A., “Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter II”, J. Comput. Appl. Math., 148(1):147-168, (2002).

[34] Binding, P., Hryniv, R. and Langer H., “Elliptic eigenvalue problems with eigenparameter dependent boundary conditions”, J. Differ. Equ., 174:30-54, (2001).

[35] Binding, P. A., Browne, P. J. and Watson, B.A., “Inverse spectral problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions”, J. Lond. Math. Soc., 62(1):161-182, (2000).

[36] Chugunova, M. V., “Inverse spectral problem for the Sturm-Liouville operator with eigenvalue parameter dependent boundary conditions” in Operator Theory, System Theory and Related Topics (Beer- Sheva/Rehovot, 1997), vol. 123 of Operator Theory Advances and Applications, 187–194, Birkh¨auser, Basel, Switzerland, (2001).

[37] Mamedov, Kh. R. and Cetinkaya, F. A., “Eigenparameter dependent inverse boundary value problem for a class of Sturm-Liouville operator”, Bound. Value Probl., 2014(194), (2014).

[38] Mamedov, Kh. R. and Cetinkaya, F. A., “A uniqueness theorem for a Sturm-Liouville equation with spectral parameter in boundary conditions”, Appl. Math. Inf. Sci, 9(2):981-988, (2015).

[39] Mamedov, Kh. R. and Cetinkaya, F. A., “Inverse problem for a class of Sturm-Liouville operator with spectral parameter in boundary condition”, Bound. Value Probl., 2013(183), (2013).

[40] Akhmedova, E. N., “On representation of solution of Sturm-Liouville equation with discontinuous coefficients”, Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerb., XVI(XXIV):5-9, (2002).

[41] Tikhonov, A. N. and Samarskii, A. A., “Equations of Mathematical Physics”, Dover Books on Physics and Chemistry, Dover, New York, (1990).

[42] Kapustin, N. Y. and Moisseev, E. I., “On a spectral problem with spectral parameter in boundary condition”, Differ. Equ., 33:115-119, (1997).

[43] Wang, A., Sun, J., Hao, X. and Yao S., “Completeness of eigenfunctions of Sturm-Liouville problems with transmission conditions”, Methods Appl. Anal., 16(3):299-312, (2009).

[44] Yang, Q. and Wang, W., “Asymptotic behaviour of a discontinuous differential operator with transmission conditions”, Math. Appl., 24(1):15-24, (2011).

[45] Benedek, A. and Panzone, R., “On inverse eigenvalue problem for a second order differential equation with parameter contained in the boundary conditions”, Notas Algebra Analysis, 9:1-13, (1980).

[46] Browne, P. J. and Sleeman, B. D., “Inverse nodal problems for Sturm-Liouville equations with eigenparameter dependent boundary conditions”, Inverse Probl., 12(4):377-381, (1996).

[47] Yurko, V. A., “Method of Spectral Mapping in the Inverse Problem Theory”, VSP, Utrecht, 305 s., (2002).

[48] McCarthy, C.M. and Rundell, W., “Eigenparameter dependent inverse Sturm-Liouville problems”, Numer. Funct. Anal. Optim., 24(1-2):85-105, (2003).

[49] Chernozhukova, A. and Freiling, G., “A uniqueness theorem for the boundary value problems with non-Linear dependence on the spectral parameter in the boundary conditions”, Inverse Problems in Science and Engineering, 17:777-785, (2009).

[50] Yang, Chuan-Fu and Huang, Zhen-You, “A half inverse problem with eigenparameter dependent boundary conditions”, Numer. Funct. Anal. Optim., 31(6):754 – 762, (2010).

[51] Buterin, S. A., “On half inverse problem for differential pencils with the spectral parameter in boundary conditions”, Tamkang Journal of Mathematics, 42(3):355-364, (2011).

[52] Zhdanovich, V. F. , “Formulae for zeros of Dirichlet polynomials and quasipolynomials”, DAN SSSR, 135(5):1046-1049, (1960).

[53] Krein, M. G. and Levin, B. Ya., "On entire almost periodic functions of exponential type", DAN SSSR, 64(3), (1949).

[54] Bellman, R. and Kuk, K. L., "Difference-Differential Equations", M. Mir., (1967).

[55] Levitan, B. M. and Sargsjan I. S., "Sturm-Liouville and Dirac Operators", Kluwer Academic Publishers, (1991).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Fatma Ayça Çetinkaya

Doğum Tarihi: 28/05/1984

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise	Fen-Matematik	Adana ÇEAŞ Seyhan Anadolu Lisesi	1999–2002
Lisans	Matematik	Ankara Üniversitesi	2002–2008
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2009–2012
Doktora	Matematik	Mersin Üniversitesi	2012-2016

(Varsa) Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Araştırma Görevlisi	Mersin Üniversitesi Fen-Edebiyat Fakültesi	2009-2016

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

SCI, SCI – EXP kapsamında taranan dergilerde yayımlanmış makaleler

1) Mamedov, Kh. R., Cetinkaya F. A., “Inverse Problem for a Class of Sturm-Liouville Operator with Spectral Parameter in Boundary Condition”, Boundary Value Problems, 2013:183, doi:10.1186/1687-2770-2013-183, (2013).

2) Mamedov, Kh. R., Çetinkaya F. A., “Eigenparameter Dependent Inverse Boundary Value Problem for a Class of Sturm-Liouville Operator”, Boundary Value Problems, 2014:194, doi:10.1186/s13661-014-0194-3, (2014).

3) Mamedov, Kh. R., Çetinkaya F. A., “A Uniqueness Theorem for a Sturm-Liouville Equation with Spectral Parameter in Boundary Conditions”, Applied Mathematics and Information Sciences, 9(2), 981-988, (2015).

4) Mamedov, Kh. R., Çetinkaya F. A., “Boundary Value Problem for a Sturm-Liouville Operator With Piecewise Continuous Coefficient”, Hacettepe Journal of Mathematics, 44(4), 867-874, (2015).

Diğer veri tabanları kapsamında taranan dergilerde yayımlanan makaleler

1) Mamedov, Kh. R., Çetinkaya F. A., "On a Spectral Expansion Formula for a Class of Second Order Differential Equation with Discontinuous Coefficient", Advanced Studies in Contemporary Mathematics, 24(4), 451-457, (2014).
2) Mamedov, Kh. R., Koşar Palamut, N., Çetinkaya F. A., "Inverse Scattering Problem for a Piecewise Continuous Sturm - Liouville Equation with Eigenparameter Dependence in the Boundary Conditon", Proceedings of the Institute of Mathematics and Mechanics, 41 (1), 16-24, (2015).

Uluslararası bilimsel toplantılarda sunulan bildiriler

1) Mamedov, Kh. R., Çetinkaya F. A., "On a Spectral Expansion Formula for a Class of Second Order Differential Equation with Discontinuous Coefficient", International Conference of Applied Analysis and Algebra, 29 June-2 July 2011, Yıldız Teknik University, Istanbul, TURKEY.

2) Mamedov, Kh. R., Çetinkaya F. A., "Expansion Formula for a Class of Sturm-Liouville Operators with Piecewise Continuous Coefficient and Spectral Parameter in Boundary Condition", Mathematical Analysis, Differential Equations and Their Applications, 4–9 September 2012, Mersin, TURKEY.

3) Mamedov, Kh. R., Çetinkaya, F. A., Akçay, Ö., "Inverse Problem for a Class of Sturm-Liouville Operators with Spectral Parameter in Boundary Condition", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 2-5 June 2013, Istanbul, TURKEY.

4) Mamedov, Kh. R., Akçay, Ö. Çetinkaya, F. A., "On the Inverse Problem by Weyl Function for a Class of Dirac Operators", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modeling, 2-5 June 2013, Istanbul, TURKEY.

5) Mamedov, Kh. R., Çetinkaya, F. A., "Inverse Scattering Problem for a Piecewise Continuous Sturm-Liouville Equation with Eigenparameter Dependence in the

Boundary Condition”, 19th International Conference Mathematical Modelling and Analysis 2014, 26-29 May 2014, Druskininkai, LITHUANIA.

6) Çetinkaya F. A., Mamedov, Kh. R., “Asymptotic Behaviour of Eigenvalues and Eigenfunctions of a Boundary Value Problem with Retarded Argument”, The International Conference 'Mathematical and Computational Modeling in Science and Technology'(ICMCMST’2015), 02-07 July 2015, İzmir, TURKEY.

7) Çetinkaya F. A., Mamedov, Kh. R., Akçay, Ö., “Boundary Value Problem for a Sturm-Liouville Operator With Piecewise Continuous Coefficient”, International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2015), 25-28 August 2015, Van, TURKEY.

8) Mamedov Kh. R., Akçay, Ö., Çetinkaya, F. A., “On the Inverse Problem for a Class of Dirac Operators”, International Conference on Pure and Applied Mathematics (ICPAM 2015), 25-28 August 2015, Van, TURKEY.

9) Mamedov Kh. R., Çetinkaya, F. A., Akçay, Ö., “Uniqueness Theorems for the Solution of the Inverse Problem for a Sturm-Liouville Operator”, International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, 05-07 November 2015, Antalya, TURKEY.

10) Mamedov Kh. R., Akçay, Ö., Çetinkaya, F. A., “On the Inverse Problem for a Class of Dirac Operators by Spectral Data”, International Conference on Advancement in Mathematical Sciences, 05-07 November 2015, Antalya, TURKEY.

11) Mamedov Kh. R., Çetinkaya, F. A., “The Main Equation for a Sturm-Liouville Operator with a Piecewise Continuous Coefficient”, 15th Panhellenic Conference on Mathematical Analysis, 27-29 May 2016, Crete, GREECE.

12) Mamedov Kh. R., Çetinkaya, F. A., “The Levinson Formula of a Boundary Value Problem”, 2nd International Conference on Pure & Applied Sciences, 1-5 June 2016, İstanbul, TURKEY.

13) Mamedov Kh. R., Çetinkaya, F. A., "A Boundary Value Problem with Retarded Argument and Spectral Parameter in One Boundary Condition", 2nd International Conference on Pure & Applied Sciences, 1-5 June 2016, İstanbul, TURKEY.

Ulusal bilimsel toplantılarda sunulan bildiriler

1) Mamedov Kh. R., Çetinkaya, F. A., "Bir Sınıf Sturm-Liouville Operatörünün Spektral Özellikleri Üzerine", XXIV. Ulusal Matematik Sempozyumu, 07-10 Eylül 2011, Uludağ Üniversitesi, Bursa.

2) Mamedov Kh. R., Çetinkaya, F. A., Akçay, Ö., "Sınır Koşulu Spektral Parametreye Bağlı Bir Sınıf Süreksiz Katsayılı İkinci Mertebeden Diferansiyel Denklem Üzerine", 8. Ankara Matematik Günleri, 13-14 Haziran 2013, Çankaya Üniversitesi, Ankara, TÜRKİYE.

3) Mamedov Kh. R., Akçay, Ö., Çetinkaya, F. A., "Sınır Koşulu Spektral Parametre İçeren Bir Sınıf Süreksiz Katsayılı Dirac Operatörünün Ters Problemi İçin Teklik Teoremi Üzerine", 8. Ankara Matematik Günleri, 13-14 Haziran 2013, Çankaya Üniversitesi, Ankara, TÜRKİYE.