GECİKEN ARGÜMANLI BİR BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ ÜZERİNE

GİZEM ÇERÇİ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MERSİN
OCAK – 2017

GECİKEN ARGÜMANLI BİR BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ ÜZERİNE

GİZEM ÇERÇİ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANA BİLİM DALI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

Danışman
Prof. Dr. Hanlar Reşidoğlu

MERSİN
OCAK– 2017

ONAY

Gizem ÇERÇİ tarafından Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU danışmanlığında hazırlanan "Geciken Argümanlı Bir Başlangıç Değer Problemi Üzerine" başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 12 Ocak 2017 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği ile Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	Ünvanı, Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	Prof.Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	
Üye	Prof.Dr. Bünyamin YILDIZ	
Üye	Yrd. Doç.Dr.Fatma Ayça ÇETİNKAYA	

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 10.02.2017 tarih ve 2017 07/285 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

12 Ocak 2017 / 12 January 2017

İmza / Signature

Öğrenci Adı ve Soyadı / Student Name and Surname

GİZEM GERCİ

GECİKEN ARGÜMANLI BİR BAŞLANGIÇ DEĞER PROBLEMİ ÜZERİNE

Gizem ÇERÇİ

ÖZ

Bu çalışmada sonlu ve yarı sonsuz aralıklarda, diferansiyel denklemde gecikme argümanı içeren iki adet sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu sınır değer problemlerinin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sınır Değer Problemi, Geciken Argüman, Özdeğer ve Özfonksiyon Özellikleri

Danışman: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

ON A BOUNDARY VALUE PROBLEM WITH RETARDED ARGUMENT

Gizem ÇERÇİ

ABSTRACT

This work is devoted to examine two boundary value problems. While, one of these problems is defined on a finite interval, the other one is defined on half axis. The properties of eigenvalues and eigenfunctions of these problems are investigated.

Key Words: Boundary Value Problem, Retarded Argument, Properties of Eigenvalues and Eigenfunctions

Advisor: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın konusunun belirlenmesinde ve hazırlanmasında bilimsel anlamda hiçbir özveriden kaçınmayan çok değerli tez danışmanım Prof. Dr. Hanlar Reşidoğlu'n ve 2016-2-TP2-1933 kodlu proje ile yüksek lisans tezime destek olan Mersin Üniversitesi BAP Koordinatörlüğüne teşekkürü bir borç bilirim

İÇİNDEKİLER

SİMGE ve KISALTMALAR

$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
λ	Reel parametre
E_0	Başlangıç kümesi
$F(\lambda)$	Karakteristik fonksiyon
W	Wronskiyen
$u_s'(x,\lambda)$	λ ya göre türev
$u'(x,\lambda)$	x e göre türev
$\square$	İspatın bittiğini gösterir

1. GİRİŞ

Doğadaki olayları tasvir eden yasaların hemen hepsi bir veya daha fazla büyüklüğün diğer bir takım büyüklüklere göre değişim hızlarını içerir. Bu değişim hızları matematik olarak türev işlemi ile ifade edilir.

Birçok probleme adi diferansiyel denklem karşılık getirilerek çözüm arandığı diferansiyel denklemler teorisinden bilinir. Bu problemlerde işlemin değişme hızı ancak değişme anındaki durumuna bağlıdır. Bundan dolayı alınan diferansiyel denklemin bilinmeyen fonksiyonun kendisi ve türevleri bağımsız değişkenin o andaki değerine bağlıdır. Fakat öyle fiziki problemler vardır ki işlemin değişme hızı işlemin o andaki durumuyla değil de onun geçmişteki durumuyla ilişkilidir. Bu tür zaman gecikmelerine doğadan verilebilecek en güzel örneklerden biri ormanlık alanların ağaçlandırılmasıdır. Bir ağaç kesildikten sonra yerine dikilen ağacın olgunluğa erişmesi yirmi yıl gibi bir sürede gerçekleşmektedir. Benzer şekilde hasta olan bir insana tedavisi için verilen ilacın etkisini hemen göstermemesi de zaman gecikmesi içeren olaylara örnek olarak gösterilebilir. Bu süreci inceleyen herhangi bir matematiksel model, zaman gecikmesini içermek zorundadır. Böyle işlemlere karşılık gelen diferansiyel denklemlere geciken argümanlı diferansiyel denklemler denir.

Bilinmeyen fonksiyonu ve türevlerini bağımsız değişkenin farklı değerlerinde içeren denklemlere geciken argümanlı denklemler denir ve bu denklemler genel olarak

$$F\Big(t, x(t), x'(t), \cdots, x^{(m_0)}(t), x\big(h_1(t)\big), x'\big(h_1(t)\big), \cdots, x^{(m_1)}\big(h_1(t)\big), \cdots$$
$$\cdots x\big(h_n(t)\big), x'\big(h_n(t)\big), \cdots, x^{(m_n)}\big(h_n(t)\big)\Big) = 0 \qquad (1.1)$$

biçiminde yazılır, burada t bağımsız değişken, $h_1(t), \cdots, h_n(t)$ verilen fonksiyonlar, $x^{(j)}\big(h_i(t)\big)$ ise $x(t)$ fonksiyonunun $j-$ nci mertebeden türevinin $z = h_i(t)$ noktasındaki değeridir.

Özel olarak, $h_i(t) = t - \tau_i(t)$ ve $\tau_i(t) \geq 0$ ($i = 1, 2, \cdots, n$) olduğunda (1.1) denklemi geciken argümanlı denkleme dönüşür ve $\tau_i(t)$ ye argümanın gecikmesi denir. $\tau_i\left(t\right)$ bir sabite eşit olduğunda bu denklem diferansiyel fark denklemine dönüşür.

(1.1) denklemi türeve göre çözülen olduğunda

$$x^{(m_n)}\left(t\right)=f\left(t,x\left(t\right),x'\left(t\right),\cdots,x^{(m_0-1)}\left(t\right),x\left(t-\tau_1\left(t\right)\right),x'\left(t-\tau_1\left(t\right)\right),\cdots\right.$$
$$\left.\cdots,x^{(m_1)}\left(t-\tau_1\left(t\right)\right),\cdots,x\left(t-\tau_n\left(t\right)\right),x'\left(t-\tau_n\left(t\right)\right),\cdots,x^{(m_n)}\left(t-\tau_n\left(t\right)\right)\right) \tag{1.2}$$

biçiminde denklem ele alınabilir.

Birinci mertebeden

$$x'\left(t\right)=f\left(t,x\left(t\right),x\left(t-\tau\right)\right),\ \tau>0 \tag{1.3}$$

denklemini göz önüne alalım, burada f , $G\subset\mathbb{R}$ bölgesinde tanımlı fonksiyondur.

Bir $\left(t_0,T\right)$ aralığında türevlenebilir $\varphi\left(t\right)$ fonksiyonu için

1) $\left(t,\varphi\left(t\right),\varphi\left(t-\tau\right)\right)\in G,\ t\in\left(t_0,T\right)$

2) $\varphi'\left(t\right)=f\left(t,\varphi\left(t\right),\varphi\left(t-\tau\right)\right),\ t\in\left(t_0,T\right)$

koşulları sağlanırsa, $x=\varphi\left(t\right)$ fonksiyonuna (1.3) denkleminin $\left(t_0,T\right)$ aralığındaki çözümü denir. Açıktır ki, t değişkeni $\left(t_0,T\right)$ ($t_0+\tau<\tau$) aralığında değiştiğinde, $t-\tau$ argümenti $\left(t_0-\tau,T-\tau\right)$ aralığında değişir. Bu nedenle, (3) denkleminin $\left(t_0,T\right)$ aralığında çözümü olan $x=\varphi\left(t\right)$ fonksiyonunun da $\left(t_0-\tau,t_0\right]$ yarı aralığında tanımlı olması gerekir. Dolayısıyla, (1.3) denkleminin $\left(t_0,T\right)$ aralığında bir çözümünü bulmak için $\left(t_0-\tau,t_0\right]$ yarı aralığında ek koşul verilmesi gerekir.

$\left(t_0-\tau,t_0\right]$ aralığında verilen $\varphi_0\left(t\right)$ fonksiyonuna eşit olan ve $\left(t_0,T\right)$ aralığında (1.3) denklemini sağlayan fonksiyonun bulunması problemine başlangıç değer problemi, t_0 noktasına başlangıç noktası, $\left(t_0-\tau,t_0\right]$ yarı aralığına başlangıç kümesi, $\varphi_0\left(t\right)$ fonksiyonuna ise başlangıç fonksiyonu denir.

(1.2) denklemini göz önüne alalım ve $E_i=\left\{z:z=t-\tau_i\left(t\right)<t_0,t_0<t<T\right\}$ ($i=1,2,\cdots,n$) olsun. $\bigcup\limits_{i=1}^{n}E_i$ kümesine başlangıç kümesi, bu kümede tanımlı ve

$p = \max_{1 \le i \le n} \{m_i\}$ mertebeden türevlenebilen $\varphi_0(t)$ fonksiyonuna başlangıç fonksiyonu denir.

Ek olarak $t = t_0$ noktasında

$$x(t_0) = x_0, x'(t_0) = x_1, \cdots, x^{(m_0 - 1)}(t_0) = x_{m_0 - 1} \qquad (1.4)$$

koşulları verilsin. Başlangıç kümesinde $\varphi_0(t)$ fonksiyonuna eşit olan, t_0 noktasında (1.4) koşullarını ve (t_0, T) aralığında (1.2) denklemini sağlayan fonksiyonun bulunması problemine başlangıç değer problemi denir.

Özel olarak, $\bigcup_{i=1}^{n} E_i = \varnothing$ olduğunda, (1.2) denklemi için başlangıç değer problemi bu denklemin (1.4) koşullarını sağlayan çözümünü bulmaktır.

(1.2) denklemine

1) $m_0 > p$ olduğunda geciken argümanlı denklem,

2) $m_0 = p$ olduğunda nötr tipli denklem,

3) $m_0 < p$ olduğunda ise ilerleyen argümanlı diferansiyel denklem denir.

Örneğin, $x'(t) = x(t-1)$ geciken argümanlı, $x'(t) = x(t) - x'(t-1)$ nötr tipli, $x'(t) = x''(t-1) + x(t)$ ilerleyen argümanlı denklemlerdir.

$\tau(t) = \tau > 0$ olduğunda sabit gecikmesi olan

$$x'(t) + a(t)x(t) + b(t)x(t-\tau) = f(t), \; t > t_0 \qquad (1.5)$$

lineer denklemi için

$$x(t) = \varphi_0(t), \; t \in E_{t_0} = [t_0 - \tau, t_0] \qquad (1.6)$$

koşulunu göz önüne alalım, burada $\tau > 0$ sabit gecikmedir, $\varphi_0(t)$ başlangıç fonksiyonu $[t_0 - \tau, t_0]$ aralığında, $a(t), b(t), f(t)$ fonksiyonları ise $[t_0, +\infty)$ aralığında süreklidir. Özel olarak (1.5) denkleminde katsayılar reel sabitler ve $f(t) \equiv 0$ olduğunda

$$L[x] \equiv x'(t) + ax(t) + bx(t-\tau) = 0 \qquad (1.7)$$

denklemine sabit katsayılı geciken argümanlı lineer denklem denir. Bu denklemin çözümünü $e^{\lambda t}$ biçiminde arayalım. Açıktır ki, $h(\lambda) = \lambda + a + be^{-\lambda\tau}$ alırsak

$L\left[e^{\lambda t}\right]=h(t)e^{\lambda t}$ olur. Buradan elde edilir ki, $e^{\lambda t}$ fonksiyonunun (1.7) nin çözümü olması için λ nın

$$\lambda+a+be^{-\lambda\tau}=0 \tag{1.8}$$

denkleminin çözümü olması gerekli ve yeterlidir.

(1.8) e karakteristik denklem, $h(\lambda)$ fonksiyonuna ise karakteristik kuvazi polinom denir. Karakteristik denklemin bir basit λ köküne (1.7) denkleminin $e^{\lambda t}$ çözümü karşılık gelir ve farklı köklere uygun çözümler lineer bağımsızdır. Ayrıca, karakteristik denklemin $\lambda=\alpha+i\beta$ ($\beta\neq 0$) kompleks köküne (1.7) nin lineer bağımsız $e^{\alpha t}\cos\beta t, e^{\alpha t}\sin\beta t$ çözümleri karşılık gelir. Öte yandan

$$h'(\lambda)=1-b\tau e^{-\lambda\tau},\ h^{(k)}(\lambda)=(-1)^k b\tau^k e^{-\lambda\tau}\ \ (k=2,3,\cdots)$$

olduğundan (1.8) karakteristik denkleminin her bir kökü en fazla iki kez tekrarlanabilir.

λ_0 sayısı karakteristik denklemin 2 kez tekrarlanan kökü olsun, yani $h(\lambda_0)=h'(\lambda_0)=0$ olsun. O halde, $L\left[e^{\lambda_0 t}\right]=L(\lambda_0)e^{\lambda_0 t}=0,$ $L\left[te^{\lambda_0 t}\right]=\left[th(\lambda_0)+h'(\lambda_0)\right]e^{\lambda_0 t}=0$ bağıntılarından, $e^{\lambda_0 t}, te^{\lambda_0 t}$ fonksiyonlarının (1.7) denkleminin lineer bağımsız çözümleri olduğu elde edilir.

$h(\lambda_0)=0,\ h'(\lambda_0)=0$ eşitliklerinden λ_0 ı yok ettiğimizde $b\tau e^{a\tau+1}=1$ bulunur. Bu ise, (1.8) denkleminin köklerinin $b\tau e^{a\tau+1}\neq 1$ olduğunda basit olduğunu gösterir. Karakteristik denklem transandantal denklem olduğundan, kompleks düzlemde sonsuz sayıda kökü vardır. Bu nedenle, (1.7) denkleminin sonsuz sayıda lineer bağımsız çözümü vardır.

$\lambda_k\alpha_k+i\beta_k$ ($k=1,2,\cdots$) sayıları karakteristik denklemin m_k ($m_k\leq 2$) katlı kökü olsun. $p_k(t)$ ve $q_k(t)$ dereceleri (m_k-1) den büyük olmayan keyfi polinomlar olsun. O halde,

$$\sum_{k=1}^{\infty}e^{\alpha_k t}\left[p_k(t)\cos\beta_k t+q_k(t)\sin\beta_k t\right] \tag{1.9}$$

serisi yakınsaktır ve türevlenebilir olduğu aralıklarda (1.7) denkleminin çözümü olur.

Özel olarak, $\alpha_k < 0$ ($k = 1, 2, \cdots$) olduğunda bu seri $(0, +\infty)$ aralığında yakınsaktır ve terim terime türevlenebilir.

Varsayalım ki, $p_k(t), q_k(t)$ polinomları öyle seçilmiştir ki, $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ için

$$\varphi_0(t) = \sum_{k=1}^{\infty} e^{\alpha_k t} \left[p_k(t) \cos \beta_k t + q_k(t) \sin \beta_k t \right]$$

koşulu sağlanır. O halde (1.9) serisi (1.7) denkleminin $t \in [t_0 - \tau, t_0]$ için $x(t) = \varphi_0(t)$ koşulunu sağlayan çözümü olur.

Tezde geciken argümanlı diferansiyel denklem içeren iki ayrı sınır değer problemi ele alınmıştır.

1) $u''(x) + q(x)u(x - \Delta(x)) + \lambda w(x)u(x) = 0,\ x \in [0, \delta_1) \cup (\delta_1, \delta_2) \cup (\delta_2, \pi]$

$$u(0)\cos\alpha + u'(0)\sin\alpha = 0,$$
$$u(\pi)\cos\beta + u'(\pi)\sin\beta = 0,$$
$$u(\delta_1 - 0) = \theta_1 u(\delta_1 + 0),$$
$$u'(\delta_1 - 0) = \theta_1 u'(\delta_1 + 0),$$
$$u(\delta_2 - 0) = \theta_2 u(\delta_2 + 0),$$
$$u'(\delta_2 - 0) = \theta_2 u'(\delta_2 + 0).$$

Burada $q(x)$, $[0, \delta_1) \cup (\delta_1, \delta_2) \cup (\delta_2, \pi]$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyondur ve

$$q(\delta_1 \pm 0) = \lim_{x \to \delta_1 \pm 0} q(x), \qquad q(\delta_2 \pm 0) = \lim_{x \to \delta_2 \pm 0} q(x),$$

sonlu limitlerine sahiptir. Benzer şekilde, reel değerli $\Delta(x) \geq 0$ fonsksiyonu $[0, \delta_1) \cup (\delta_1, \delta_2) \cup (\delta_2, \pi]$ aralığında süreklidir ve

$$\Delta(\delta_1 \pm 0) = \lim_{x \to \delta_1 \pm 0} \Delta(x), \qquad \Delta(\delta_2 \pm 0) = \lim_{x \to \delta_2 \pm 0} \Delta(x),$$

sağlanır. Ayrıca eğer $x \in [0, \delta_1)$ ise $x - \Delta(x) \geq 0$, $x \in (\delta_1, \delta_2)$ ise $x - \Delta(x) \geq \delta_1$ ve $x \in (\delta_1, \pi]$ ise $x - \Delta(x) \geq \delta_2$ dir. λ reel bir parametre, $\delta_1, \delta_2, \alpha, \beta, \theta_1, \theta_2$ ler sıfırdan farklı reel keyfi reel sayılar, $0 < \delta_1 < \delta_2 < \pi$ ve $w(x)$, w_1, w_2, w_3 herhangi reel sayılar olmak üzere

$$w(x)=\begin{cases} w_1, & 0\le x<\delta_1, \\ w_2, & \delta_1<x<\delta_2, \\ w_3, & \delta_2<x\le\pi, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış bir ağırlık fonksiyonudur.

Bu sınır değer probleminin çözümüne denk integral denklemler inşa edilmiş, problemin özdeğer özellikleri incelenmiş ve özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimtotik formüller elde edilmiştir.

2)

$$u''(t)+\lambda u(t)+q(t)u(t-\Delta(t))=0$$

$$u(0)-hu'(0)=0$$

$$u(t-\Delta(t))\equiv u(0)\phi(t-\Delta(t)),\ (t-\Delta(t)<0)$$

$$\sup_{[0,\infty)}|u(t)|<\infty$$

sınır koşulları ile oluşturulan sınır değer problemini ele alacağız. Burada, $q(t)$ ve $\Delta(t)\ge 0$ fonksiyonları $[0,\infty)$ da tanımlı ve sürekli fonksiyonlar, λ $(-\infty<\lambda<\infty)$ reel parametre ve $\phi(t)$, $E_0=\{t-\Delta(t):t-\Delta(t)<0,t>0\}\cup\{0\}$ başlangıç kümesinde tanımlı $\phi(0)=1$ koşulunu sağlayan başlangıç fonksiyonudur. Bu problemin de bazı özdeğer özellikleri incelenmiştir.

2.KAYNAK ARAŞTIRMALARI

İkinci mertebeden geciken argümanlı diferansiyel denklemler, literatürde ilk kez [11, 6, 7, 8, 18, 4, 15, 14, 5] çalışmalarında ele alınmıştır. Geciken argümanlı diferansiyel denklemler, etkenden belirli bir süre sonra ortaya çıkan etkiye sahip olayları tarif etmek için kullanılır ve birçok uygulama alanı mevcuttur. Biyoloji, tıp, kimya, fizik, matematik, mühendislik ve ekonomi gibi alanlar bunlardan bazılarıdır. Özel olarak otomatik kontrol teorisinde, salınım sistemleri teorisinde, roket motorlarının yanmasıyla bağlantılı problem teorisinde geciken argümanlı diferansiyel denklemlerden faydalanılır. Bu biçimdeki problemlerin çeşitli fiziksel uygulamaları [15] te bulunabilir.

[15] te sonlu aralıkta

$$x''(t)+\lambda x(t)+M(t)x\left(t-\Delta(t)\right)=0$$

denklemi ve

$$x(0)\cos\alpha+x'(0)\sin\alpha=0$$

$$x(\pi)\cos\beta+x'(\pi)\sin\beta=0$$

$$x\left(t-\Delta(t)\right)\equiv x(0)\phi(t-\Delta(t)) \quad t-\Delta(t)<0$$

sınır koşulları ile oluşturulmuş sınır değer problemi incelenmiştir. Burada $M(t)$ ve $\Delta(t)\geq 0$ fonksiyonları $\left[0,\pi\right]$'de sürekli fonksiyonlardır. λ bir reel parametredir. α ve β herhangi reel sayılardır ve $\phi(t)$ sürekli başlangıç fonksiyonu $\phi(0)=1$ olmak üzere

$$E_0=\left\{x-\Delta(x)\,|\,x-\Delta(x)<0,\ x>0\right\}$$

başlangıç kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyondur.

Tezde incelenen sonlu aralıkta incelenen problem sınır değer probleminin tanımlı olduğu aralıkta süreksizliklere ve diferansiyel denklemde süreksiz katsayıya sahiptir.

Bu süreksizlikler sınır değer probleminin çözümüne denk integral denklemlerin yapısını ve böylelikle karakteristik denklemin de biçimini etkilemiş olur. Sınır değer probleminin karakteristik denklemi ise özdeğerlerin ve özfonksiyonların özelliklerini incelemede çok büyük önem taşır. [20, 3, 19, 21] çalışmalarında diferansiyel denklemde ve sınır veya geçiş koşullarında süreksizlik bulunduran geciken argümanlı diferansiyel denklemlerin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik biçimlerinin bu süreksizliklerden nasıl etkilendiği görülebilir.

Geciken argümanlı diferansiyel denklem ile oluşturulmuş sınır değer problemleri ile ilgili çalışmalar sadece özdeğer ve özfonksiyonların özelliklerini incelemekle sınırlı değildir. Örneğin [16, 17] çalışmalarından sonlu aralıkta gecikmeye sahip ters Sturm – Liouville problemi incelenmiştir. [9, 10, 1, 12, 2, 13] çalışmaları ise süreksiz Sturm – Liouville operatörlerinin özelliklerini incelemiştir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 Temel Başlangıç Değer Probleminin Formülasyonu

İkinci mertebeden geciken argümanlı diferansiyel denklemler

$$F\left(t, x(t), \ldots, x^{(m_0)}(t), x\left(t-\Delta_1(t)\right), \ldots, x^{(m_1)}(t-\Delta_1(t)), \ldots, x^{(m_n)}(t-\Delta_n(t))\right) = 0 \tag{3.1.1}$$

biçimindedir. $i = 1, \ldots, n$ için $\Delta_i(t) \geq 0$ sürekli ve $\max_{0 \leq i \leq n} m_i = 2$ olarak tanımlanır. $x^{(m_i)}(t-\Delta_i(t))$ verildiğinde $x(z)$ fonksiyonunun $z = t - \Delta_i(t)$ noktasındaki türevi anlaşılacaktır. A noktasını başlangıç noktası olarak kabul edelim. Bu durumda her $\Delta_i(t)$ sapması A noktasını bulunduran bir $E_A^{(i)}$ başlangıç kümesi tanımlar ve $t \geq A$ için $t - \Delta_i(t) < A$ dır. $E_A = \bigcup_{i=1}^{n} E_A^{(i)}$ ve $\mu = \max_{1 \leq i \leq n} m_i$ olsun. E_A üzerinde μ - kere türevlenebilen bir $\phi(t)$ başlangıç fonksiyonu belirleyelim.

$x_A^{(j)} = \phi^{(j)}(A), \quad j = 0, \ldots, \mu$ olsun. $\mu = 0$ ise ek olarak $x_A^{(1)}$ sayısını belirleyelim. Eğer A, E_A kümesinin ayrık bir noktası ise $x_A^{(0)}$ ve $x_A^{(1)}$ keyfi seçilir.

(3.1.1) denklemi için başlangıç değer problemi $\left[A, B\right), \quad B \leq +\infty$ aralığında

$$x(A) = x_A^{(0)}, \quad x'(A) = x_A^{(1)},$$

$$x^{(j)}\left(t-\Delta_i(t)\right) = \phi^{(j)}\left(t-\Delta_i(t)\right), \quad t-\Delta_i(t) < A \tag{3.1.2}$$

koşullarını sağlayan $x(t)$ çözümünü belirleme problemidir.

Geciken argümanlı diferansiyel denklemlerin doğal bir sınıflandırması G.A. Kamenskii tarafından yapılmıştır. (3.1.1) denklemi $x^{(m_0)}(t)$ için çözülecek olursa;

$$\begin{aligned} x^{(m_0)}(t) = f\Big(&t, x(t), x^{(m_0-1)}(t), x(t-\Delta_1(t)), \ldots, x^{(m_1)}(t-\Delta_1(t)) \ldots \\ &\ldots, x(t-\Delta_n(t)), \ldots, x^{(m_n)}(t-\Delta_n(t))\Big) \end{aligned} \tag{3.1.3}$$

olur. $\lambda = m_0 - \mu$ olsun. $\lambda > 0$ için denklem, geciken argümanlı diferansiyel denklem; $\lambda = 0$ için nötral tipli denklem ve $\lambda < 0$ için ileri tipli denklem olarak isimlendirilir. (3.1.3) denkleminde $\lambda > 0$ ve f fonksiyonu t nin dışındaki tüm argümentlere göre lineerse ikinci mertebeden geciken argümanlı diferansiyel denklem elde ederiz.

$$x^n(t) = \sum_{i=0}^{n} \left(a_i(t)x(t-\Delta_i(t)) + b_i(t)x'(t-\Delta_i(t)) \right) + c(t) \tag{3.1.4}$$

denkleminde $x(t) = y_1(t)$ ve $x'(t) = y_2(t)$ olsun. (3.1.4) denklemini birinci mertebeden

$$\begin{aligned} y_1'(t) &= y_2(t) \\ y_2'(t) &= \sum_{i=0}^{n} \left(a_i(t)y_1(t-\Delta_i(t)) + b_i(t)y_2(t-\Delta_i(t)) \right) + c(t) \end{aligned}$$

sistemi ile değiştirelim. Uygunluk açısından daha genel

$$y_k'(t) = \sum_{j=1}^{2} \sum_{i=0}^{n} a_{ij}^k(t) y_i \left(t - \Delta_i(t) \right) + c_k(t), \quad k = 1,2 \tag{3.1.5}$$

sistemini ele alalım. (3.1.5) sistemi dağıtılmış gecikmelerle birlikte

$$y_k'(t) = \sum_{j=1}^{2} \int_0^{\infty} y_i(t-s) dr_j^k(t,s) + c_k(t), \quad k = 1,2,...,m \tag{3.1.6}$$

sisteminin özel bir formudur.

Myskis (1951) $r_j^k(t,s)$ üzerinde bazı kısıtlamalar yaparak (3.1.6) sisteminin başlangıç değer probleminin çözümleri için varlık ve teklik teoremleri elde etmiştir. Hedefimize uygun olarak bu teoremleri (3.1.5) sisteminin

$$y_k'(t) = \sum_{j=1}^{2} \left(a_{j0}^k(t) y_i(t) + a_{j1}^k(t) y_j(t - \Delta(t)) \right) + c_k(t), \quad k = 1,2. \tag{3.1.7}$$

formuna uygun olarak yazmak yeterlidir.

(3.1.7) eşitliğinin $\left[A,B\right),\quad B\le+\infty$ aralığında tanımlı

$$\begin{aligned} &y_k\left(A\right)=y_A^{(k)}=\phi_k(A),\\ &y_k(t-\Delta(t))\equiv\phi_k(t-\Delta(t)),\quad t-\Delta(t)<A \end{aligned}\tag{3.1.8}$$

$y_1(t),\ y_2(t)$ koşullarını sağlayan çözümlerini araştıracağız. Burada $k=1,2$ olmak üzere, $\phi_k(t)\quad E_A$ üzerinde tanımlı başlangıç fonksiyonu olsun $a_{j1}^k(t)\equiv0$ $\left(j=1 \text{ veya } 2\right)$ ise $y_A^{(j)}\quad(j=1 \text{ veya } 2)$ sayısı keyfi olarak seçilir; eğer A noktası E_A da ayrık bir nokta ise $y_A^{(1)}$ ve $y_A^{(2)}$ sayılarının her ikisi de keyfi olarak seçilir.

(3.1.7) sistemi ile birlikte

$$\begin{aligned} y_k(t)=y_A^k+\int_A^t\left\{\sum_{j=1}^{2}(a_{j0}^k(\tau)y_i(\tau)+a_{j1}^k(\tau)y_i(\tau-\Delta(\tau)))\right\}d\tau+\\ +\int_A^t c_k(\tau)d\tau,\qquad\qquad k=1,2;\quad A\le t<B \end{aligned}\tag{3.1.9}$$

integral denklemler sistemini ele alalım. (3.1.8) e eşdeğer olarak

$$y_j(\tau-\Delta(\tau))\equiv\phi_j(\tau-\Delta(\tau)),\quad \tau-\Delta(\tau)<A,\quad j=1,2\tag{3.1.10}$$

olur. Bundan böyle $a_{j0}^k(t),a_{j1}^k(t),c_k(t)\quad(j,k=1,2)$ fonksiyonlarının ve $\Delta(t)\ge0$ ın $\left[A,B\right)$ üzerinde ve $\phi_k(t)\quad(k=1,2)$ başlangıç fonksiyonlarının E_A üzerinde sürekli olduklarını farz edeceğiz.

Lemma 3.1.1 (3.1.7) sisteminin (3.1.8) koşullarını sağlayan bir çözümü, (3.1.9) integral denklemler sisteminin (3.1.10) koşulunu sağlayan sürekli bir çözümüdür. Tersine (3.1.9) sisteminin (3.1.10) koşulunu sağlayan sürekli bir çözümü (3.1.7) sisteminin (3.1.8) koşullarını sağlayan bir çözümüdür.

Teorem 3.1.1 $\phi=\max\limits_{1\le k\le2}\sup\limits_{E_A}\left|\phi_k(t)\right|<\infty$ olsun. O halde (3.1.7) sisteminin $\left[A,B\right)$ aralığında (3.1.8) başlangıç koşullarını sağlayan tek bir çözümü vardır.

Teorem 3.1.2 Başlangıç değer probleminin sonsuz sayıda temel sistem çözümü vardır:

$$x''(t) + N(t)x(t) + M(t)x(t-\Delta(t)) = 0$$

$$x(A) = x_A,\ x'(A+0) = x'_A,$$

$$x(t-\Delta(t)) \equiv x_A\phi(t-\Delta(t)),\ (t-\Delta(t) < A).$$

3.2 Sturm – Liouville Sınır Değer Problemi

3.2.1 Sonlu Aralıkta Tanımlı Bir Sınır Değer Probleminin Formülasyonu

Aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım.

$$x''(t) + \lambda x(t) + M(t)x\left(t-\Delta(t)\right) = 0, \tag{3.2.1.1}$$

$$x(0)\cos\alpha + x'(0)\sin\alpha = 0, \tag{3.2.1.2}$$

$$x(\pi)\cos\beta + x'(\pi)\sin\beta = 0, \tag{3.2.1.3}$$

$$x\left(t-\Delta(t)\right) \equiv x(0)\phi(t-\Delta(t)),\ t-\Delta(t) < 0. \tag{3.2.1.4}$$

Burada $M(t)$ ve $\Delta(t) \geq 0$, $\left[0,\pi\right]$ aralığında sürekli fonksiyonlar, λ reel parametre, α ve β keyfi reel sayılar, $\phi(t)$, $\phi(0) = 1$ olmak üzere

$$E_0 = \left\{x-\Delta(x)\,\middle|\, x-\Delta(x) < 0,\ \ \mathrm{x}>0\right\}$$

başlangıç kümesi üzerinde tanımlı sürekli başlangıç fonksiyonudur.

$\omega(t,\lambda)$, (3.2.1.1) denkleminin (3.2.1.4) ve

$$\omega(0,\lambda) = \sin\alpha, \qquad \omega'(0,\lambda) = -\cos\alpha \tag{3.2.1.5}$$

koşulunu sağlayan çözümü olsun. Teorem 3.1.1.1 e göre (3.2.1.4) – (3.2.1.5) başlangıç koşulları $\left[0,\pi\right]$ aralığında (3.2.1.1) denkleminin tek bir çözümünü belirler.

(3.2.1.1) denkleminin (3.2.1.4) – (3.2.1.5) koşullarını sağlayan çözümleri

$$\omega(t,\lambda)=\sin\alpha\cos st-\frac{\cos\alpha}{s}\sin st-\int_0^t M(\tau)\sin s(t-\tau)\omega\big(\tau-\Delta(\tau),\tau\big)d\tau \quad \big(s^2=\lambda,\lambda>0\big) \tag{3.2.1.6}$$

$$\omega(t,0)=\sin\alpha-t\cos\alpha-\int_0^t M(\tau)\sin s(t-\tau)\omega\big(\tau-\Delta(\tau),0\big)d\tau \tag{3.2.1.7}$$

$$\omega(t,\lambda)=\sin\alpha\cosh mt-\frac{\cos\alpha}{m}\sinh mt-\frac{1}{m}\int_0^t M(\tau)\sinh m(t-\tau)\omega\big(\tau-\Delta(\tau),\lambda\big)dt \quad \big(m=\sqrt{-\lambda},\lambda<0\big) \tag{3.2.1.8}$$

biçimine sahiptir. Burada (3.2.1.4)'e göre

$$\omega\big(\tau-\Delta(\tau),\lambda\big)\equiv\sin\alpha\phi(\tau-\Delta(\tau)),\ \ \tau-\Delta(\tau)<0$$

sağlanır.

(3.2.1.6) - (3.2.1.8) denklemleri $M(t)$ ve $\Delta(t)\geq 0$ sürekli fonksiyonların tanımlı olduğu herhangi bir $[0,B]$, $(B\leq\infty)$ aralığında (3.2.1.1), (3.2.1.4) - (3.2.1.5) sınır değer problemine denktir.

Teorem 3.2.1.1 (3.2.1.1) – (3.2.1.4) sınır değer problemi yalnızca basit özdeğerlere sahiptir.

3.2.2 Varlık Teoremi

Bölüm 3.2.1 de tanımlanan $\omega(t,\lambda)$ fonksiyonunun (3.2.1.1)'in sol uç noktadaki başlangıç koşulunu sağlayan aşikar olmayan bir çözümüdür. (3.2.1.3)' de $\omega(t,\lambda)$ yerine yazarsak

$$F(\lambda)=\omega(\pi,\lambda)\cos\beta+\omega'(\pi,\lambda)\sin\beta \tag{3.2.2.1}$$

karakteristik denklemini elde ederiz.

Teorem 3.2.1.1 den (3.2.1.1) – (3.2.1.4) sınır değer probleminin özdeğerlerinin (3.2.2.1) denkleminin reel kökleriyle çakıştığını söyleyebiliriz.

$\Delta_0 = \max_{[0,\pi]} \Delta(t)$ ve $M_\pi = \int_0^\pi |M(\tau)| d\tau$ olsun. $\phi(t)$ yi sürekli şekilde $[-\Delta_0, 0]$ aralığına genişletelim ve $\phi_0 = \max_{[-\Delta_0,0]} |\phi(t)|$ alalım.

Lemma 3.2.2.1 $\lambda \geq 4M_\pi^2$ olsun. O halde (3.1.1.6) eşitliği ile verilen $\omega(t,\lambda)$ çözümü için aşağıdaki eşitlik sağlanır.

$$|\omega(t,\lambda)| \leq \max\left\{ \frac{1}{M_\pi}\sqrt{4M_\pi^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha}, |\sin\alpha, \phi_0| \right\} \ \left(-\Delta_0 \leq t \leq \pi\right) \qquad (3.2.2.2)$$

Teorem 3.2.2.1 (3.2.1.1) – (3.2.1.4) sınır değer probleminin sonsuz sayıda pozitif özdeğeri vardır.

3.2.3 Özdeğer ve Özfonksiyonların Asimtotik Özellikleri

Aşağıdaki durumları ele alalım:

1. $\sin\alpha \neq 0,\ \sin\beta \neq 0;$
2. $\sin\alpha \neq 0,\ \sin\beta = 0;$
3. $\sin\alpha = 0,\ \sin\beta \neq 0;$
4. $\sin\alpha = 0,\ \sin\beta = 0$.

Yeterince büyük s değerleri için, 1 ve 2 durumunda, $[-\Delta, \pi]$ aralığında

$$\omega(t,\lambda) = O(1) \qquad (3.2.3.1)$$

eşitliği sağlanır. 3 ve 4 durumlarında ise $\omega\left(t-\Delta(t),\lambda\right) \equiv 0,\ t-\Delta(t) < 0$ iken, (3.2.1.6) ve (3.2.2.2) eşitliklerinden, $[-\Delta_0, \pi]$ aralığında

$$\omega(t,\lambda) = O\left(\frac{1}{s}\right) \qquad (3.2.3.2)$$

olur.

Lemma 3.2.3.1. $\left[-\Delta_0, \pi\right]$ aralığında 1 ve 2 durumlarında

$$\omega_s'\left(t, \lambda\right) = O\left(1\right) \tag{3.2.3.3}$$

sağlanır.

Lemma 3.2.3.2 $\left[-\Delta_0, \pi\right]$ aralığında 3 ve 4 durumlarında

$$\omega_s'\left(t, \lambda\right) = O\left(1\right) \tag{3.2.3.4}$$

Teorem 3.2.3.1 n bir doğal sayı olsun. Yeteri kadar büyük her bir n için, 1 ve 4 durumlarında, (3.1.1.1) – (3.2.1.6) sınır değer probleminin özdeğerleri n^2 civarında ve 3 ve 4 durumlarında ise (3.1.1.1) – (3.2.1.6) sınır değer probleminin özdeğerleri $\left(n+\frac{1}{2}\right)^2$ civarında yerleşmiştir.

Lemma 3.2.3.3 $M'(t)$ ve $\Delta''(t)$ türevleri var ve sınırlı olsun, ayrıca $\Delta' \leq h < 2$ olduğunu kabul edelim. Bu durumda $0 \leq t \leq \pi$ için

$$\int_0^t M(\tau)\cos s(2\tau - \Delta(\tau)) = O\left(\frac{1}{s}\right)$$

ve

$$\int_0^t M(\tau)\sin s(2\tau - \Delta(\tau)) = O\left(\frac{1}{s}\right)$$

olur.

3.3 $\left[0, \infty\right)$ Aralığında Tanımlı Sınır Değer Probleminin Formülasyonu

Yarı eksende aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$x''(t) + \lambda x(t) + M(t)x\left(t - \Delta(t)\right) = 0 \tag{3.3.1}$$

$$\left.\begin{aligned}&x(0)\cos\alpha + x'(0)\sin\alpha = 0,\\ &x\big(t-\Delta(t)\big) \equiv x(0)\phi(t-\Delta(t)),\ t-\Delta(t)<0,\\ &\sup_{[0,\infty]}|x(t)| < \infty.\end{aligned}\right\} \tag{3.3.2}$$

Burada $M(t)$ ve $\Delta(t) \geq 0$, yarı eksende tanımlı ve sürekli fonksiyonlar, λ reel parametre, α keyfi sabit ve $\phi(0)=1$ olmak üzere $\phi(t)$

$$E_0 = \left\{x-\Delta(x) \,\middle|\, x-\Delta(x)<0,\ \ \text{x>0}\right\}$$

başlangıç kümesi üzerinde tanımlı sürekli başlangıç fonksiyonudur.

$\omega(t,\lambda)$ (3.3.1), (3.3.2) probleminin aşağıdaki koşulları sağlayan çözümleri olsun:

$$\left.\begin{aligned}&\omega(0,\lambda) = \sin\alpha,\ \ \omega_t'(0,\lambda) = -\cos\alpha\\ &w\big(t-\Delta(t),\lambda\big) \equiv \sin\alpha\phi(t-\Delta(t)),\ t-\Delta(t)<0\end{aligned}\right\} \tag{3.3.3}$$

Teorem 3.3.1 (3.3.1), (3.3.2) sınır değer probleminin özdeğerleri basittir.

Teorem 3.3.2 $\sup\limits_{t\in E_0}|\phi(t)| = \phi_0 < \infty$ alalım ve (3.3.1) denkleminde

$$\int_0^\infty |M(\tau)|\,d\tau = M_\infty < \infty$$

olduğunu kabul edelim. λ nın tüm pozitif değerleri (3.3.1) - (3.3.2) sınır değer probleminin özdeğerleridir.

Lemma 3.3.2 (3.3.1) denkleminde $M(t)$ ve $\Delta(t) \geq 0,\ \ [A,\infty)$ yarı ekseninde tanımlı ve sürekli olsun ve

$$t-\Delta(t) \geq A,\ \ (t \geq A), \tag{3.3.4}$$

$$\sup_{[A,\infty)}|M(t)| = M_0 < \infty \tag{3.3.5}$$

ve μ

$$\mu\sqrt{\lambda} > M_0 \tag{3.3.6}$$

sağlanacak şekilde bir sayı olsun. (3.3.1) ve çözümlerinin türevleri için aşağıdaki bağıntı sağlanır:

$$\left|x^{(i)}(t)\right| \le B_i e^{\mu(t-A)}, \ \left(i = 0,1 \ ; \ A \le t < \infty\right)$$

burada B_i ‘ler sabittir.

Teorem 3.3.3 (3.2.1.2) ve (3.2.1.3) de $\sin\alpha = 0$ alalım ve (3.3.1.1) de $0 \le M(t) \le M_0 < \infty \ \left(0 \le t < \infty\right)$,

$$\int_0^{\infty} \left(M_0 - M(\tau)\right) d\tau < \infty \tag{3.3.7}$$

sağlansın; ayrıca, $t \ge 0$ için $t - \Delta(t) \ge 0$ olsun. Bunlara ek olarak, $\mu > 0,\ \varepsilon > 0,$ ve $K > 0$ sayılarını

$$0 \le \Delta(t) \le Ke^{-(\mu+\varepsilon)t} \ \left(0 \le t < \infty\right) \tag{3.3.8}$$

eşitsizliğini sağlayacak şekilde seçelim. Bu durumda aşağıdaki eşitsizliği sağlayan bütün λ değerleri (3.3.1) – (3.3.2) sınır değer probleminin özdeğerleridir:

$$\mu\sqrt{\lambda} > M_0 \tag{3.3.9}$$

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1 Sonlu Aralıkta Geciken Argümanlı Bir Sınır Değer Problemi

4.1.1 Probleme Giriş

Aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$u''(x)+q(x)u(x-\Delta(x))+\lambda w(x)u(x)=0,\ x\in[0,\delta_1)\cup(\delta_1,\delta_2)\cup(\delta_2,\pi] \qquad (4.1.1.1)$$

$$u(0)\cos\alpha+u'(0)\sin\alpha=0, \qquad (4.1.1.2)$$

$$u(\pi)\cos\beta+u'(\pi)\sin\beta=0, \qquad (4.1.1.3)$$

$$u(\delta_1-0)=\theta_1 u(\delta_1+0), \qquad (4.1.1.4)$$

$$u'(\delta_1-0)=\theta_1 u'(\delta_1+0), \qquad (4.1.1.5)$$

$$u(\delta_2-0)=\theta_2 u(\delta_2+0), \qquad (4.1.1.6)$$

$$u'(\delta_2-0)=\theta_2 u'(\delta_2+0). \qquad (4.1.1.7)$$

Burada $q(x)$, $[0,\delta_1)\cup(\delta_1,\delta_2)\cup(\delta_2,\pi]$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyondur ve

$$q(\delta_1\pm 0)=\lim_{x\to\delta_1\pm 0}q(x), \qquad q(\delta_2\pm 0)=\lim_{x\to\delta_2\pm 0}q(x),$$

sonlu limitlerine sahiptir. Benzer şekilde, reel değerli $\Delta(x)\geq 0$ fonsksiyonu $[0,\delta_1)\cup(\delta_1,\delta_2)\cup(\delta_2,\pi]$ aralığında süreklidir ve

$$\Delta(\delta_1\pm 0)=\lim_{x\to\delta_1\pm 0}\Delta(x), \qquad \Delta(\delta_2\pm 0)=\lim_{x\to\delta_2\pm 0}\Delta(x),$$

sağlanır. Ayrıca eğer $x\in[0,\delta_1)$ ise $x-\Delta(x)\geq 0$, $x\in(\delta_1,\delta_2)$ ise $x-\Delta(x)\geq\delta_1$ ve $x\in(\delta_1,\pi]$ ise $x-\Delta(x)\geq\delta_2$ dir. λ reel bir parametre, $\delta_1,\delta_2,\alpha,\beta,\theta_1,\theta_2$ ler sıfırdan farklı reel keyfi reel sayılar, $0<\delta_1<\delta_2<\pi$ ve $w(x)$, w_1,w_2,w_3 herhangi reel sayılar olmak üzere

$$w(x)=\begin{cases} w_1, & 0\le x<\delta_1, \\ w_2, & \delta_1<x<\delta_2, \\ w_3, & \delta_2<x\le\pi, \end{cases}$$

şeklinde tanımlanmış bir ağırlık fonksiyonudur.

$u_1(x,\lambda)$, (4.1.1.1) denkleminin $[0,\delta_1]$ aralığında

$$u_1(0,\lambda)=\sin\alpha, \qquad u_1'(0,\lambda)=-\cos\alpha \tag{4.1.1.8}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olsun. (4.1.1.8) koşulları (4.1.1.1) denkleminin $[0,\delta_1]$ aralığında bir tek çözümü olduğunu gösterir (bknz. [15], sf.12). $u_1(x,\lambda)$ çözümünü tanımlamak bize (4.1.1.1) denkleminin $[\delta_1,\delta_2]$ aralığındaki $u_2(x,\lambda)$ çözümünü tanımlama imkanı sunar:

$$u_2(\delta_1,\lambda)=\theta_1^{-1}u_1(\delta_1,\lambda), \qquad u_2'(\delta_1,\lambda)=\theta_1^{-1}u_1'(\delta_1,\lambda). \tag{4.1.1.9}$$

(4.1.1.9) koşulları, (4.1.1.1) denkleminin $[\delta_1,\delta_2]$ aralığındaki çözümünü tek türlü tanımlar. Benzer şekilde, $u_2(x,\lambda)$ çözümü yardımıyla, (4.1.1.1) denkleminin $[\delta_2,\pi]$ aralığındaki çözümü

$$u_3(\delta_2,\lambda)=\theta_2^{-1}u_2(\delta_2,\lambda), \qquad u_3'(\delta_2,\lambda)=\theta_2^{-1}u_2'(\delta_2,\lambda) \tag{4.1.1.10}$$

şeklinde tanımlıdır. (4.1.1.10) koşulları, (4.1.1.1) denkleminin $[\delta_2,\pi]$ aralığındaki çözümünü tek türlü tanımlar.

Bu çözümler yardımıyla, (4.1.1.1) denkleminin $[0,\delta_1)\cup(\delta_1,\delta_2)\cup(\delta_2,\pi]$ aralığındaki çözümü

$$u(x,\lambda)=\begin{cases} u_1(x,\lambda), & 0\le x<\delta_1, \\ u_2(x,\lambda), & \delta_1<x<\delta_2, \\ u_3(x,\lambda), & \delta_2<x\le\pi \end{cases}$$

biçiminde tanımlanır. $u(x,\lambda)$ çözümü (4.1.1.2) sınır koşulunu ve (4.1.1.4)-(4.1.1.7) geçiş koşullarını sağlar.

Lemma 4.1.1.1 $u(x,\lambda)$, (4.1.1.1) denkleminin bir çözümü olsun. Ayrıca $s^2 := \lambda$ ve $\lambda > 0$ alalım. O halde, aşağıdaki integral denklemler sağlanır:

$$u_1(x,\lambda) = \sin\alpha \cos s\omega_1 x - \frac{\cos\alpha}{sw_1}\sin s\omega_1 x - \frac{1}{s\omega_1}\int_0^x \sin s\omega_1(x-t)u_1(t-\Delta(t),\lambda)dt, \tag{4.1.1.11}$$

$$u_2(x,\lambda) = \frac{u_1(\delta_1,\pi)}{\theta_1}\cos s\omega_2(x-\delta_1) + \frac{u_1'(\delta_1,\lambda)}{s\theta_1\omega_2}\sin s\omega_2(x-\delta_1) -$$

$$-\frac{1}{s\omega_2}\int_{\delta_1}^{x} q(t)\sin s\omega_2(x-t)u_2(t-\Delta(t),\lambda)dt, \tag{4.1.1.12}$$

$$u_3(x,\lambda) = \frac{u_2(\delta_2,\lambda)}{\theta_2}\cos s\omega_3(x-\delta_1) + \frac{u_2'(\delta_2,\lambda)}{s\theta_2\omega_3}\sin s\omega_3(x-\delta_2) -$$

$$-\frac{1}{s\omega_3}\int_{\delta_2}^{x} q(t)\sin s\omega_3(x-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)dt. \tag{4.1.1.13}$$

İspat: (4.1.1.11) i göstermek için

$$u_1''(x,\lambda) + \lambda\omega_1^2 u_1(x,\lambda) = -q(x)u_1(x-\Delta(x),\lambda) \tag{4.1.1.14}$$

denkleminin çözümünü sabitlerin değişimi yöntemini kullanarak bulalım. (4.1.1.14) e uygun homojen denklem

$$u_1''(x,\lambda) + \lambda\omega_1^2 u_1(x,\lambda) = 0$$

ve bu denkleme karşılık gelen çözüm

$$u_1(x,\lambda) = c_1\cos s\omega_1 x + c_2 \sin s\omega_1 x \tag{4.1.1.15}$$

olur.

$$\begin{cases} c_1' \cos s\omega_1 x + c_2' \sin s\omega_1 x = 0 \\ -s\omega_1 c_1' \sin s\omega_1 x + s\omega_1 c_2' \cos s\omega_1 x = -q(x) u_1 (x - \Delta(x), \lambda) \end{cases}$$

denklem sisteminden

$$c_1' = \frac{\begin{vmatrix} 0 & \sin sw_1 x \\ -q(x) u_1 (x - \Delta(x), \lambda) & sw_1 \cos sw_1 x \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos sw_1 x & \sin sw_1 x \\ -sw_1 \cos sw_1 x & sw_1 \cos sw_1 x \end{vmatrix}} = \frac{q(x) u_1 (x - \Delta(x), \lambda) \sin sw_1 x}{sw_1}$$

ve buradan

$$c_1 = \frac{1}{sw_1} \int_0^x q(t) \sin sw_1 t u_1 (t - \Delta(t), \lambda) dt + \tilde{c}_1$$

ve

$$c_2' = \frac{\begin{vmatrix} \cos sw_1 x & 0 \\ -sw_1 \sin sw_1 x & -q(x) u_1 (x - \Delta(x), \lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos sw_1 x & \sin sw_1 x \\ -sw_1 \cos sw_1 x & sw_1 \cos sw_1 x \end{vmatrix}} = -\frac{q(x) u_1 (x - \Delta(x), \lambda) \cos sw_1 x}{sw_1}$$

ve buradan

$$c_1 = -\frac{1}{sw_1} \int_0^x q(t) \cos sw_1 t u_1 (t - \Delta(t), \lambda) dt + \tilde{c}_2$$

bulunur. Bu değerleri (4.1.1.15) te yerine yazarsak

$$u_1(x, \lambda) = \left[\frac{1}{sw_1} \int_0^x q(t) \sin sw_1 t u_1 (t - \Delta(t), \lambda) dt + \tilde{c}_1 \right] \cos sw_1 x +$$

$$+ \left[-\frac{1}{sw_1} \int_0^x q(t) \cos sw_1 t u_1 (t - \Delta(t), \lambda) dt + \tilde{c}_2 \right] \sin sw_1 x$$

ve gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$u_1(x, \lambda) = \tilde{c}_1 \cos sw_1 x + \tilde{c}_2 \sin sw_1 x - \frac{1}{sw_1} \int_0^x q(t) \sin sw_1 (x - t) u_1 (t - \Delta(t), \lambda) dt$$

buluruz. Son ifadeden türev alırsak,

$$u_1'(x,\lambda) = -sw_1\tilde{c}_1 \sin sw_1 x + sw_1\tilde{c}_2 \cos sw_1 x - \int_0^x q(t)\cos sw_1(x-t)u_1(t-\Delta(t),\lambda)\,dt$$

elde ederiz. Burada (4.1.1.8) koşullarını göz önünde bulundurursak

$$\tilde{c}_1 = \sin\alpha, \qquad \tilde{c}_2 = -\frac{\cos\alpha}{sw_1}$$

buluruz ve dolayısıyla (4.1.1.11) e ulaşırız.

Şimdi (4.1.1.12) ile verilen $u_2(x,\lambda)$ yı bulalım. Bunun için

$$u_2''(x,\lambda) + \lambda w_2^2 u_2(x,\lambda) = -q(x)u_2(x-\Delta(x),\lambda)$$

denkleminin çözümünü sabitlerin değişimi yöntemini uygulayarak $u_1(x,\lambda)$ ya benzer şekilde

$$u_2(x,\lambda) = \tilde{c}_1 \cos sw_2 x + \tilde{c}_2 \sin sw_2 x - \frac{1}{sw_2}\int_{\delta_1}^x q(t)\sin sw_2(x-t)u_2(t-\Delta(t),\lambda)\,dt$$

buluruz. Buradan türev alırsak,

$$u_2'(x,\lambda) = -sw_2\tilde{c}_1 \sin sw_2 x + sw_2\tilde{c}_2 \cos sw_2 x - \int_{\delta_1}^x q(t)\sin sw_2(x-t)u_2(t-\Delta(t),\lambda)\,dt$$

ve (4.1.1.9) koşullarını göz önünde bulundurursak

$$\begin{cases} \tilde{c}_1 \cos sw_2\delta_1 + \tilde{c}_2 \sin sw_2\delta_1 = \theta_1^{-1}u_1(\delta_1,\lambda) \\ -sw_2\tilde{c}_1 \sin sw_2\delta_1 + sw_2\tilde{c}_2 \sin sw_2\delta_1 = \theta_1^{-1}u_1'(\delta_1,\lambda) \end{cases}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sistemini çözerek

$$\tilde{c}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \theta_1^{-1}u_1(\delta_1,\lambda) & \sin sw_2\delta_1 \\ \theta_1^{-1}u_1'(\delta_1,\lambda) & sw_2 \cos sw_2\delta_1 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos sw_2\delta_1 & \sin sw_2\delta_1 \\ -sw_2 \cos sw_2\delta_1 & sw_2 \cos sw_2\delta_1 \end{vmatrix}} = \frac{\theta_1^{-1}u_1(\delta_1,\lambda)sw_2 \cos sw_2\delta_1 - \theta_1^{-1}u_1'(\delta_1,\lambda)\sin sw_2\delta_1}{sw_2}$$

ve

$$\tilde{c}_2=\frac{\begin{vmatrix}\cos sw_2\delta_1 & \theta_1^{-1}u_1(\delta_1,\lambda)\\ -sw_2\sin sw_2\delta_1 & \theta_1^{-1}u_1'(\delta_1,\lambda)\end{vmatrix}}{\begin{vmatrix}\cos sw_2\delta_1 & \sin sw_2\delta_1\\ -sw_2\cos sw_2\delta_1 & sw_2\cos sw_2\delta_1\end{vmatrix}}=\frac{\theta_1^{-1}u_1'(\delta_1,\lambda)\cos sw_2\delta_1+\theta_1^{-1}sw_2u_1(\delta_1,\lambda)\sin sw_2\delta_1}{sw_2}$$

buluruz. Bunları $u_2(x,\lambda)$ nın ifadesinde yerine yazarsak,

$$u_2(x,\lambda)=\frac{\theta_1^{-1}}{sw_2}\left[sw_2u_1(\delta_1,\lambda)\cos sw_2\delta_1-u_1'(\delta_1,\lambda)\sin sw_2\delta_2\right]\cos sw_2x$$

$$+\frac{\theta_1^{-1}}{sw_2}\left[u_1'(\delta_1,\lambda)\cos sw_2\delta_1+sw_2u_1(\delta_1,\lambda)\sin sw_2\delta_1\right]\sin sw_2x$$

$$-\frac{1}{sw_2}\int_{\delta_1}^{x}q(t)\sin sw_2(x-t)u_2(t-\Delta(t),\lambda)\,dt$$

elde ederiz. Burada gerekli düzenlemeleri yaparsak (4.1.1.12) ye ulaşmış oluruz.

Son olarak $u_3(x,\lambda)$ yı bulmak için

$$u_3''(x,\lambda)+\lambda w_3^2u_3(x,\lambda)=-q(x)u_3(x-\Delta(x),\lambda)$$

denkleminin çözümünü sabitlerin değişimi yöntemini uygulayarak $u_2(x,\lambda)$ ya benzer şekilde

$$u_3(x,\lambda)=\tilde{c}_1\cos sw_3x+\tilde{c}_2\sin sw_3x-\frac{1}{sw_3}\int_{\delta_2}^{x}q(t)\sin sw_3(x-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)\,dt$$

buluruz. Buradan türev alırsak,

$$u_3'(x,\lambda)=-sw_3\tilde{c}_1\sin sw_3x+sw_3\tilde{c}_2\cos sw_3x-\int_{\delta_2}^{x}q(t)\sin sw_3(x-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)\,dt$$

ve (4.1.1.10) koşullarını göz önünde bulundurursak

$$\begin{cases}\tilde{c}_1\cos sw_3\delta_2+\tilde{c}_2\sin sw_3\delta_2=\theta_2^{-1}u_2(\delta_2,\lambda)\\ -sw_3\tilde{c}_1\sin sw_3\delta_2+sw_3\tilde{c}_2\cos sw_3\delta_2=\theta_2^{-1}u_2'(\delta_2,\lambda)\end{cases}$$

denklem sistemini elde ederiz. Bu denklem sistemini çözerek

$$\tilde{c}_1 = \frac{\begin{vmatrix} \theta_2^{-1}u_2(\delta_2,\lambda) & \sin sw_3\delta_2 \\ \theta_2^{-1}u_2'(\delta_2,\lambda) & sw_3\cos sw_3\delta_2 \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos sw_3\delta_2 & \sin sw_3\delta_2 \\ -sw_3\cos sw_3\delta_2 & sw_3\cos sw_3\delta_2 \end{vmatrix}} = \frac{\theta_2^{-1}u_2(\delta_2,\lambda)sw_3\cos sw_3\delta_2 - \theta_2^{-1}u_2'(\delta_2,\lambda)\sin sw_3\delta_2}{sw_3}$$

ve

$$\tilde{c}_2 = \frac{\begin{vmatrix} \cos sw_3\delta_2 & \theta_2^{-1}u_2(\delta_2,\lambda) \\ -sw_3\sin sw_3\delta_2 & \theta_2^{-1}u_2'(\delta_2,\lambda) \end{vmatrix}}{\begin{vmatrix} \cos sw_3\delta_2 & \sin sw_3\delta_2 \\ -sw_3\sin sw_3\delta_2 & sw_3\cos sw_3\delta_2 \end{vmatrix}} = \frac{\theta_2^{-1}u_2'(\delta_2,\lambda)\cos sw_3\delta_2 + \theta_2^{-1}sw_3u_2(\delta_2,\lambda)\sin sw_3\delta_2}{sw_3}$$

buluruz. Bunları $u_3(x,\lambda)$ nın ifadesinde yerine yazarsak,

$$u_3(x,\lambda) = \frac{\theta_2^{-1}}{sw_3}\left[sw_3u_2(\delta_2,\lambda)\cos sw_3\delta_2 - u_2'(\delta_2,\lambda)\sin sw_3\delta_2\right]\cos sw_3x$$

$$+\frac{\theta_2^{-1}}{sw_3}\left[u_2'(\delta_2,\lambda)\cos sw_3\delta_2 + sw_3u_2(\delta_2,\lambda)\sin sw_3\delta_2\right]\sin sw_3x$$

$$-\frac{1}{sw_2}\int_{\delta_2}^{x} q(t)\sin sw_3(x-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)\,dt$$

elde ederiz. Burada gerekli düzenlemeleri yaparsak

$$u_3(x,\lambda) = \frac{u_2(\delta_2,\lambda)}{\theta_2}\cos sw_3(x-\delta_2) + \frac{u_2'(\delta_2,\lambda)}{sw_3\theta_2}\sin sw_3(x-\delta_2)$$

$$-\frac{1}{sw_3}\int_{\delta_2}^{x} q(t)\sin sw_3(x-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)\,dt$$

buluruz ve böylece (4.1.1.13) e ulaşmış oluruz.

4.1.2 Sınır Değer Probleminin Spektral Özellikleri

Bu bölümde, bölüm 4.1.1 de tanımlanan sınır değer probleminin spektral özellikleri incelenecektir. Aşağıdaki teorem (4.1.1.1)-(4.1.1.7) sınır değer probleminin özdeğerlerinin basitliği ile ilgilidir. Teoremi vermeden önce, burada, özdeğerlerin basitliğinden, bir özdeğere yalnızca bir özfonksiyon karşılık geleceğinin anlaşılması gerektiğini hatırlatmakta fayda vardır.

Teorem 4.2.1.1. (4.1.1.1) – (4.1.1.7) sınır değer problemi yalnızca basit özdeğerlere sahiptir.

İspat: $\tilde{\lambda}$, (4.1.1.1) – (4.1.1.7)sınır değer probleminin bir özdeğeri ve

$$\tilde{\varphi}\left(x,\tilde{\lambda}\right)=\begin{cases}\tilde{\varphi}_1\left(x,\tilde{\lambda}\right), & 0\le x<\delta_1,\\ \tilde{\varphi}_2\left(x,\tilde{\lambda}\right), & \delta_1<x<\delta_2,\\ \tilde{\varphi}_3\left(x,\tilde{\lambda}\right), & \delta_2<x\le\pi,\end{cases}$$

bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. O halde, (4.1.1.2) ve (4.1.1.8) den

$$W\left[\tilde{\varphi}_1\left(0,\tilde{\lambda}\right),u_1\left(0,\tilde{\lambda}\right)\right]=\begin{vmatrix}\tilde{\varphi}_1\left(0,\tilde{\lambda}\right) & \sin\alpha\\ \tilde{\varphi}_1'\left(0,\tilde{\lambda}\right) & -\cos\alpha\end{vmatrix}=-\left(\tilde{\varphi}_1\left(0,\tilde{\lambda}\right)\cos\alpha+\tilde{\varphi}_1'\left(0,\tilde{\lambda}\right)\sin\alpha\right)=0$$

olur, ve böylece [15] Teorem II.2.2'den $\tilde{\varphi}_1\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ ve $u_1\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ fonksiyonlarının $\left[0,\delta_1\right]$ de lineer bağımlı olduğu söylenebilir.

Benzer şekilde (4.1.1.9) koşulları kullanılarak

$$W\left[\tilde{\varphi}_2\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right),u_2\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)\right]=\begin{vmatrix}\tilde{\varphi}_2\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right) & u_2\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)\\ \tilde{\varphi}_2'\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right) & u_2'\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)\end{vmatrix}=$$

$$=\tilde{\varphi}_2\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)u_2'\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)-\tilde{\varphi}_2'\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)u_2\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)=\frac{u_1\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_1}u_2'\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)-\frac{u_1'\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_1}u_2\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)$$

$$=\frac{u_1\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_1}\cdot\frac{u_1'\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_1}-\frac{u_1'\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_1}\cdot\frac{u_1\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_1}=0$$

buluruz ve böylece $\tilde{\varphi}_2\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ ve $u_2\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ fonksiyonlarının $\left[\delta_1,\delta_2\right]$ de lineer bağımlı olduğunu söyleriz.

Şimdi $\tilde{\varphi}_3\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ ve $u_3\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ fonksiyonlarının $\left[\delta_2,\pi\right]$ de lineer bağımlı olduğunu gösterelim. (4.1.1.10) koşullarını kullanarak,

$$W\left[\tilde{\varphi}_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right),u_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)\right]=\begin{vmatrix}\tilde{\varphi}_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right) & u_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)\\ \tilde{\varphi}_3'\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right) & u_3'\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)\end{vmatrix}=$$

$$=\tilde{\varphi}_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)u_3'\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)-\tilde{\varphi}_3'\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)u_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)=\frac{u_2\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_2}u_3'\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)-\frac{u_2'\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_2}u_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)$$

$$=\frac{u_2\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_2}\cdot\frac{u_2'\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_2}-\frac{u_2'\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_2}\cdot\frac{u_2\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)}{\theta_2}=0$$

buluruz ve böylece $\tilde{\varphi}_3\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ ve $u_3\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ fonksiyonlarının $\left[\delta_2,\pi\right]$ de lineer bağımlı olduğunu göstermiş oluruz.

O halde, $K_i\neq 0$ ($i=1,2,3$) için

$$\tilde{\varphi}_i\left(x,\tilde{\lambda}\right)=K_iu_i\left(x,\tilde{\lambda}\right) \tag{4.1.2.1}$$

yazabiliriz. Şimdi $K_1=K_2=K_3$ olduğunu gösterelim. Bunun için önce $K_2\neq K_3$ olduğunu kabul edelim. (4.1.1.6) ve (4.1.2.1) den

$$\tilde{\varphi}\left(\delta_2-0,\tilde{\lambda}\right)-\theta_2\tilde{\varphi}\left(\delta_2+0,\tilde{\lambda}\right)=\tilde{\varphi}_2\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)-\theta_2\tilde{\varphi}_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)=K_2u_2\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)-\theta_2K_3u_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)$$

$$K_2\theta_2u_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)-\theta_2K_3u_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)=\theta_2\left(K_2-K_3\right)u_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)=0$$

buluruz. $\theta_2\left(K_2-K_3\right)\neq 0$ olduğundan

$$u_3\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)=0 \tag{4.1.2.2}$$

bulunur. Benzer şekilde, (4.1.1.7) ve (4.1.2.1) kullanılarak

$$u_3'\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)=0 \tag{4.1.2.3}$$

elde ederiz. $u_3\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ nın (4.1.1.1) denkleminin $\left[\delta_2,\pi\right]$ de (4.1.2.2) ve (4.1.2.3) başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olduğunu göz önünde bulundurursak $\left[\delta_2,\pi\right]$ de özdeş olarak $u_3\left(x,\tilde{\lambda}\right)=0$ elde ederiz. Bu ise çelişkidir. O halde $K_2=K_3$ olur.

$K_1\neq K_2$ kabul ederek ve benzer işlemleri tekrar ederek

$$u_2\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)=u_2'\left(\delta_2,\tilde{\lambda}\right)=0$$

ve

$$u_1\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)=u_1'\left(\delta_1,\tilde{\lambda}\right)=0$$

eşitliklerinin sağlandığını ve dolayısıyla $\left[\delta_1,\delta_2\right]$ de özdeş olarak $u_2\left(x,\tilde{\lambda}\right)=0$ ve $\left[0,\delta_1\right]$ de özdeş olarak $u_1\left(x,\tilde{\lambda}\right)=0$ olduğunu söyleyebiliriz. Dolayısıyla $K_1=K_2$ buluruz. Böylece (4.1.2.1) eşitliği

$$\tilde{\varphi}\left(x,\tilde{\lambda}\right)=Ku\left(x,\tilde{\lambda}\right)$$

halini alır. Bu ise $\tilde{\varphi}\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ ve $u\left(x,\tilde{\lambda}\right)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olduğunu söyler. Aynı $\tilde{\lambda}$ özdeğerine lineer bağımlı iki özfonksiyonun karşılık gelmesi ise bize $\tilde{\lambda}$ özdeğerinin basit olduğu sonucunu verir ve bu da ispatı bitirir. □

4.1.3 Varlık Teoremi

Bölüm 4.1.1.1 de tanımladığımız $u(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.1.1.1) denkleminin (4.1.1.2) sınır ve (4.1.1.4)-(4.1.1.7) geçiş koşullarını sağlayan çözümüdür. $u(x,\lambda)$ yı (4.1.1.3) te yazarsak, karakteristik denklemi

$$F(\lambda)\equiv u(\pi,\lambda)\cos\beta+u'(\pi,\lambda)\sin\beta \qquad (4.1.3.1)$$

biçiminde elde ederiz. Teorem 4.2.1.1 den (4.1.1.1)-(4.1.1.7) sınır değer probleminin özdeğerlerinin (4.1.3.1) denkleminin reel kökleriyle çakıştığını söyleyebiliriz.

Şimdi,

$$q_1 := \int_0^{\delta_1} |q(t)|\,dt\,,\ q_2 := \int_{\delta_1}^{\delta_2} |q(t)|\,dt\,,\ q_3 := \int_{\delta_2}^{\pi} |q(t)|\,dt$$

olduğunu kabul ederek aşağıdaki lemmayı ispatlayalım:

Lemma 4.1.3.1.

(i) $\lambda \geq 4q_1^2$ olsun. O halde (4.1.1.11) ile verilen $u_1(x,\lambda)$ çözümü için

$$|u_1(x,\lambda)| \leq \frac{1}{q_1}\sqrt{4q_1^2 w_1^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \qquad x \in [0,\delta_1] \qquad (4.1.3.1)$$

olur.

(ii) $\lambda \geq \max\{4q_1^2, 4q_2^2\}$ olsun. O halde (4.1.1.12) ile verilen $u_2(x,\lambda)$ çözümü için

$$|u_2(x,\lambda)| \leq \frac{4w_3}{q_1\theta_1}\sqrt{4q_1^2 w_1^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \qquad x \in [\delta_1,\delta_2] \qquad (4.1.3.2)$$

sağlanır.

(iii) $\lambda \geq \max\{4q_1^2, 4q_2^2, 4q_3^2\}$ olsun. O halde (4.1.1.13) ile verilen $u_3(x,\lambda)$ çözümü için

$$|u_3(x,\lambda)| \leq \frac{8w_3(w_2+1)}{q_1\theta_1\theta_2}\sqrt{4q_1^2 w_1^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \qquad x \in [\delta_2,\pi] \qquad (4.1.3.3)$$

olur.

İspat : (i) $B_{1\lambda} = \max_{x\in[0,\delta_1]} |u_1(x,\lambda)|$ olsun. (4.1.1.12) den

$$B_{1\lambda} \leq \sqrt{\sin^2\alpha + \frac{\cos^2\alpha}{s^2 w_1^2}} + \frac{1}{s w_1} q_1 B_{1\lambda}$$

bulunur. Burada $s \geq 2q_1$ alınırsa ve gerekli düzenlemeler yapılırsa (4.1.3.1) elde edilir.

(ii) (4.1.3.1)'i göstermek için (4.1.1.11) in x e göre türevini alalım:

$$u_1'(x,\lambda) = -sw_1 \sin\alpha \sin sw_1 x - \cos\alpha \cos sw_1 - \int_0^x q(t)\cos sw_1(x-t)u_1\big(t-\Delta(t),\lambda\big)dt. \tag{4.1.3.4}$$

(4.1.3.1) ve (4.1.3.4) den $|s| \geq 2q_1$ için

$$\frac{|u_1'(x,\lambda)|}{sw_1} \leq \frac{1}{q_1 w_1}\sqrt{4q_1^2 w_1^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \tag{4.1.3.5}$$

elde ederiz. $B_{2\lambda} = \max_{x\in[\delta_1,\delta_2]} |u_2(x,\lambda)|$ olsun. O halde, (4.1.1.12), (4.1.3.1) ve (4.1.3.5) den $|s| \geq 2q_1$ ve $|s| \geq 2q_2$ için (4.1.3.2) nin doğruluğu görülmüş olur.

(iii) Önce (4.1.1.12) nin x e göre türevini alalım:

$$u_2'(x,\lambda) = -\frac{sw_2}{\theta_1}u_1(\delta_1,\lambda)\sin sw_2(x-\delta_1) + \frac{u_1'(\delta_1,\lambda)}{\theta_1}\cos sw_2(x-\delta_1)$$

$$-\int_{\delta_1}^x q(t)\cos sw_2(x-t)u_2\big(t-\Delta(t)\big)dt. \tag{4.1.3.6}$$

(4.1.3.1) ve (4.1.3.6) dan $|s| \geq 2q_1$ ve $|s| \geq 2q_2$ için

$$\frac{|u_2'(x,\lambda)|}{sw_2} \leq \frac{4}{q_1\theta_1}\sqrt{4q_1^2 w_1^2 \sin^2\alpha + \cos^2\alpha} \tag{4.1.3.7}$$

bulunur. $B_{3\lambda} = \max_{x\in[\delta_2,\pi]} |u_2(x,\lambda)|$ olduğunu kabul edersek (4.1.1.13), (4.1.3.1) ve (4.1.3.7) den $|s| \geq 2q_1$, $|s| \geq 2q_2$ ve $|s| \geq 2q_3$ için (4.1.3.3) elde edilir. Böylece ispat biter. □

Teorem 4.1.3.1. (4.1.1.1) – (4.1.1.7) sınır değer problemi sonsuz sayıda pozitif özdeğere sahiptir.

İspat: Özdeğerlerin sonsuz sayıda olduğunu göstermek için (4.1.3.1) ile verilen karakteristik denklemi göz önünde bulunduracağız ve

$$u_3(\pi,\lambda)\cos\beta + u_3'(\pi,\lambda)\sin\beta = 0 \qquad (4.1.3.8)$$

denklemini ele alacağız. (4.1.1.13) ile verilen $u_3(x,\lambda)$ nın x e göre türevini alırsak

$$u_3'(x,\lambda) = -sw_3\frac{u_2(\delta_2,\lambda)}{\theta_2}\sin sw_3(x-\delta_2) + \frac{u_2'(\delta_2,\lambda)}{\theta_2}\cos sw_3(x-\delta_2)$$

$$-\int_{\delta_2}^{x} q(t)\sin sw_3(x-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)\,dt$$

elde ederiz. Bu ifade ve (4.1.1.13), (4.1.3.8) de yerine yazılırsa

$$\cos\beta\left\{\frac{u_2(\delta_2,\lambda)}{\theta_2}\cos sw_3(\pi-\delta_2) + \frac{u_2'(\delta_2,\lambda)}{sw_3\theta_2}\sin sw_3(\pi-\delta_2) -\right.$$

$$\left.-\frac{1}{sw_3}\int_{\delta_2}^{\pi} q(t)\sin sw_3(\pi-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)\,dt\right\}+$$

$$\sin\beta\left\{-sw_3\frac{u_2(\delta_2,\lambda)}{\theta_2}\sin sw_3(\pi-\delta_2) + \frac{u_2'(\delta_2,\lambda)}{\theta_2}\cos sw_3(\pi-\delta_2) -\right.$$

$$\left.-\int_{\delta_2}^{\pi} q(t)\sin sw_3(\pi-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)\,dt\right\} = 0$$

bulunur. Burada (4.1.1.12), (4.1.3.6), (4.1.1.11) ve (4.1.3.4) ifadeleri göz önüne alınırsa,

$$\cos\beta\left\{\left[\frac{1}{\theta_1\theta_2}\left(\sin\alpha\cos sw_1\delta_1 - \frac{\cos\alpha}{sw_1}\sin sw_1\delta_1 -\right.\right.\right.$$

$$-\frac{1}{sw_1}\int_0^{\delta_1} q(t)\sin sw_1(\delta_1-t)u_1(t-\Delta(t),\lambda)\,dt\Bigg)\cos sw_2(\delta_2-\delta_1)+$$

$$+\frac{1}{s\theta_1\theta_2 w_2}\big(-sw_1\sin\alpha\sin sw_1\delta_1-\cos\alpha\cos sw_1\delta_1-$$

$$-\int_0^{\delta_1} q(t)\cos sw_1(\delta_1-t)u_1(t-\Delta(t),\lambda)\Bigg)\sin sw_2(\delta_2-\delta_1)-$$

$$-\frac{1}{sw_2\theta_2}\int_{\delta_1}^{\delta_2} q(t)\sin sw_2(\delta_2-t)u_2(t-\Delta(t),\lambda)dt\Bigg]\cos sw_3(\pi-\delta_2)+$$

$$\Bigg[\frac{1}{sw_3\theta_2}\left(-\frac{sw_2}{\theta_1}\right)\Bigg(\sin\alpha\cos sw_1\delta_1-\frac{\cos\alpha}{sw_1}\sin sw_1\,\delta_1-$$

$$-\frac{1}{sw_1}\int_0^{\delta_1} q(t)\cos sw_1(\delta_1-t)u_1(t-\Delta(t),\lambda)dt\Bigg)\sin sw_2(\delta_2-\delta_1)+$$

$$+\frac{1}{sw_3\theta_2\theta_1}\big(-sw_1\sin\alpha\sin sw_1\delta_1-\cos\alpha\cos sw_1\delta_1-$$

$$-\int_0^{\delta_1} q(t)\cos sw_1(\delta_1-t)u_1(t-\Delta(t),\lambda)\Bigg)\cos sw_2(\delta_2-\delta_1)-$$

$$-\frac{1}{sw_3\theta_2}\int_{\delta_1}^{\delta_2} q(t)\cos sw_2(\delta_2-t)u_2(t-\Delta(t),\lambda)\Bigg]\sin sw_3(\pi-\delta_2)-$$

$$-\frac{1}{sw_3}\int_{\delta_2}^{\pi} q(t)\sin sw_3(\pi-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)dt\Bigg\}+$$

$$+\sin\beta\Bigg\{\Bigg[-\frac{sw_3}{\theta_1\theta_2}\Bigg(\sin\alpha\cos sw_1\delta_1-\frac{\cos\alpha}{sw_1}\sin sw_1\delta_1-$$

$$-\frac{1}{sw_1}\int_0^{\delta_1} q(t)\sin sw_1(\delta_1-t)u_1(t-\Delta(t),\lambda)\,dt\Bigg)\cos sw_2(\delta_2-\delta_1)-$$

$$-\frac{sw_3}{s\theta_1\theta_2 w_2}\left(-sw_1\sin\alpha\sin s\,w_1\delta_1-\cos\alpha\cos sw_1\delta_1-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\delta_1} q(t)\cos sw_1(\delta_1-t)u_1(t-\Delta(t),\lambda)dt\right)\sin sw_2(\delta_2-\delta_1)+$$

$$\left.\frac{sw_3}{sw_2\theta_2}\int_{\delta_1}^{\delta_2} q(t)\sin sw_2(\delta_2-t)u_2(t-\Delta(t),\lambda)\,dt\right]\sin sw_3(\pi-\delta_2)+$$

$$\left[-\frac{sw_2}{\theta_1\theta_2}\left(\sin\alpha\cos sw_1\delta_1-\frac{\cos\alpha}{sw_1}\sin sw_1\delta_1-\frac{1}{sw_1}\int_0^{\delta_1} q(t)\sin sw_1(\delta_1-t)u_1(t-\Delta(t),\lambda)\,dt\right)\right.$$

$$\cdot\sin sw_2(\delta_2-\delta_1)+\frac{1}{\theta_2\theta_1}\left(-sw_1\sin\alpha\sin sw_1\delta_1-\cos\alpha\cos sw_1\delta_1-\right.$$

$$\left.-\int_0^{\delta_1} q(t)\cos sw_1(\delta_2-\delta_1)u_1(t-\Delta(t),\lambda)\,dt\right)\cos sw_2(\delta_2-\delta_1)-$$

$$\left.-\frac{1}{\theta_2}\int_{\delta_1}^{\delta_2} q(t)\cos sw_2(\delta_2-t)u_2(t-\Delta(t),\lambda)\,dt\right]\cos sw_3(\pi-\delta_2)-$$

$$\left.-\int_{\delta_2}^{\pi} q(t)\sin sw_3(\pi-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)dt\right\}=0 \qquad (4.1.3.9)$$

bulunur. s in yeterince büyük olduğunu kabul edip (4.1.3.1), (4.1.3.2) ve (4.1.3.3) ifadeleri (4.1.3.9) da göz önüne alınırsa

$$s\sin s\pi+O(1)=0 \qquad (4.1.3.10)$$

elde edilir. Yeterince büyük s ler için (4.1.3.10) un sonsuz sayıda köke sahip olduğu açıktır. Böylece ispat biter. □

4.1.4. Özdeğer ve Özfonksiyonlar için Asimtotik Formüller

Bu bölümde özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimtotik özelliklerini inceleyeceğiz ve bölüm boyunca λ yı yeterince büyük kabul edeceğiz..

(4.1.1.11) ve (4.1.3.1) den

$$u_1(x,\lambda)=O(1),\ x\in[0,\delta_1], \tag{4.1.4.1}$$

(4.1.1.12) ve (4.1.3.2) den

$$u_2(x,\lambda)=O(1),\ x\in[\delta_1,\delta_2], \tag{4.1.4.2}$$

ve (4.1.1.13) ve (4.1.3.3) den

$$u_3(x,\lambda)=O(1),\ x\in[\delta_2,\pi] \tag{4.1.4.3}$$

elde ederiz. $|\lambda|<\infty$ için $u'_{1\lambda}(x,\lambda)$ ($0\le x\le\delta_1$), $u'_{2\lambda}(x,\lambda)$ ($\delta_1\le x\le\delta_2$) ve $u'_{3\lambda}(x,\lambda)$ ($\delta_2\le x\le\pi$) türevlerinin varlığı [15] Teorem 1.4.1 den söylenebilir.

Lemma 4.1.4.1 Aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$u_{1s}{}'(x,\lambda)=O(1),\ x\in[0,\delta_1], \tag{4.1.4.4}$$

$$u_{2s}{}'(x,\lambda)=O(1),\ x\in[\delta_1,\delta_2], \tag{4.1.4.5}$$

$$u_{3s}{}'(x,\lambda)=O(1),\ x\in[\delta_2,\pi]. \tag{4.1.4.6}$$

İspat : (4.1.4.4) ü göstermek için (4.1.1.11) den s e göre türev alırsak

$$u'_{1s}(x,\lambda)=-w_1x\sin\alpha\sin sw_1x-\frac{\cos\alpha}{s}x\cos sw_1x+$$

$$+\frac{1}{w_1s^2}\int_0^x q(t)\sin sw_1(x-t)u_1(t-\Delta(t),\lambda)dt-$$

$$-\int_0^x q(t)\cos sw_1(x-t)u_1(t-\Delta(t),\lambda)dt-\frac{1}{sw_1}\int_0^x q(t)\sin sw_1(x-t)u_{1s}{}'(t-\Delta(t))dt$$

buluruz. Bu ifadeyi

$$u'_{1s}(x,\lambda)=-\frac{1}{sw_1}\int_0^x q(t)\sin sw_1(x-t)u_{1s}{}'(t-\Delta(t))dt+K_1(x,\lambda),\ \left(|K_1(x,\lambda)|\le K_0^{(1)},\ K_0^{(1)}=sbt.\right) \tag{4.1.4.7}$$

şeklinde yazabiliriz.

$C_{1s}=\max\limits_{[0,\delta_1]}\left|u_{1s}{}'(x,\lambda)\right|$ olsun. C_{1s} in varlığı, $u_{1s}{}'(x,\lambda)$ türevinin $x\in[0,\delta_1]$ için sürekliliğinden söylenebilir. O halde, (4.1.4.7) den

$$C_{1s}\le\frac{1}{s}q_1C_{1s}+K_0^{(1)}$$

yazabiliriz. $s\ge 2q_1$ için bu ifade bize $C_{1s}\le 2K_0^{(1)}$ eşitsizliğini veriri ki bu ise (4.1.4.4) ün doğruluğunu gösterir.

(4.1.4.5) i göstermek için (4.1.1.12) den s e göre türev alalım:

$$u_{2s}'(x,\lambda)=\frac{-w_2(x-\delta_1)}{\theta_1}u_1(\delta_1,\lambda)\sin sw_2(x-\delta_1)+\frac{(x-\delta_1)}{s\theta_1}u_1{}'(\delta_1,\lambda)\cos sw_2(x-\delta_1)$$

$$+\frac{1}{s^2w_2}\int_{\delta_1}^{x}q(t)\sin sw_2(x-t)u_2(t-\Delta(t),\lambda)dt-$$

$$-\frac{1}{s}\int_{\delta_1}^{x}q(t)(x-t)\cos sw_2(x-t)u_2(t-\Delta(t),\lambda)dt-\frac{1}{sw_2}\int_{\delta_1}^{x}q(t)\sin sw_2(x-t)u_{2s}{}'(t-\Delta(t),\lambda)dt.$$

Bu ifadeyi

$$u_{2s}'(x,\lambda)=-\frac{1}{sw_2}\int_{\delta_1}^{x}q(t)\sin sw_2(x-t)u_{2s}{}'(t-\Delta(t))dt+K_2(x,\lambda),\ \left(\left|K_2(x,\lambda)\right|\le K_0^{(2)},\ K_0^{(2)}=sbt.\right) \tag{4.1.4.8}$$

şeklinde yazabiliriz.

$C_{2s}=\max\limits_{[\delta_1,\delta_2]}\left|u_{2s}{}'(x,\lambda)\right|$ olsun. C_{2s} in varlığı, $u_{2s}{}'(x,\lambda)$ türevinin $x\in[\delta_1,\delta_2]$ için sürekliliğinden söylenebilir. O halde, (4.1.4.8) den

$$C_{2s}\le\frac{1}{s}q_2C_{2s}+K_0^{(2)}$$

yazabiliriz. $s\ge 2q_2$ için bu ifade $C_{2s}\le 2K_0^{(2)}$ halini alır ve bu (4.1.4.5) in doğruluğunu gösterir.

Son olarak, (4.1.4.6) nın doğruluğunu göstermek için $u_{3s}{}'(x,\lambda)$ türevini hesaplayalım:

$$u'_{3s}(x,\lambda)=\frac{-w_3(x-\delta_2)}{\theta_2}u_2(\delta_2,\lambda)\sin sw_3(x-\delta_2)+\frac{(x-\delta_2)}{s\theta_2}u_2{}'(\delta_2,\lambda)\cos sw_3(x-\delta_2)$$

$$+\frac{1}{s^2w_3}\int_{\delta_2}^{x}q(t)\sin sw_3(x-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)dt-$$

$$-\frac{1}{s}\int_{\delta_2}^{x}q(t)(x-t)\cos sw_3(x-t)u_3(t-\Delta(t),\lambda)dt-\frac{1}{sw_3}\int_{\delta_2}^{x}q(t)\sin sw_3(x-t)u_{3s}{}'(t-\Delta(t),\lambda)dt.$$

Buradan

$$u'_{3s}(x,\lambda)=-\frac{1}{sw_3}\int_{\delta_2}^{x}q(t)\sin sw_3(x-t)u_{3s}{}'(t-\Delta(t))dt+K_3(x,\lambda),\ \left(|K_3(x,\lambda)|\le K_0^{(3)},\ K_0^{(3)}=sbt.\right) \tag{4.1.4.9}$$

şeklinde yazabiliriz.

$C_{3s}=\max\limits_{[\delta_2,\pi]}\left|u_{3s}{}'(x,\lambda)\right|$ olsun. C_{3s} in varlığı, $u_{3s}{}'(x,\lambda)$ türevinin $x\in[\delta_2,\pi]$ için sürekliliğinden söylenebilir. O halde, (4.1.4.9) dan

$$C_{3s}\le\frac{1}{s}q_3C_{3s}+K_0^{(3)}$$

yazabiliriz. $s\ge 2q_3$ için bu ifade $C_{3s}\le 2K_0^{(3)}$ halini alır ve bu (4.1.4.6) nın doğruluğunu gösterir. Böylece ispat biter. □

Teorem 4.1.4.1: n bir doğal sayı olsun. Yeterince büyük n ler için (4.1.1.1) – (4.1.1.7) sınır değer probleminin n^2 civarında yalnızca bir özdeğeri vardır.

İspat. (4.1.3.10) da $O(1)$ ile gösterdiğimiz ifadeyi ele alacağız. (4.1.4.1)-(4.1.4.6) formüllerini göz önünde bulundurursak, $O(1)$ li bu ifadenin yeterince büyük s ler için s e göre sınırlı türevinin olduğunu söyleyebiliriz.

Yeterince büyük n ler için, n civarında, (4.1.3.10) un yalnızca bir kökü olduğunu göstereceğiz. $\varphi(s)=s\sin s\pi+O(1)$ fonksiyonunu ele alalım. $\varphi'(s)=\sin s\pi+s\pi\cos s\pi+O(1)$ fonksiyonu yeterince büyük n ler için, n e yakın s değerlerinde sıfır olmaz. Dolayısıyla, Rolle Teoreminden, $\varphi(s)=s\sin s\pi+O(1)$ fonksiyonunun yeterince büyük n ler için n civarında tek bir kökü olduğunu söyleyebiliriz. Böylece ispat biter. □

n i yeterince büyük alalım. Bundan sonra $\lambda_n=s_n^2$ ile (4.1.1.1)-(4.1.1.7) sınır değer probleminin n^2 civarında yerleşen özdeğerlerini göstereceğiz. $s_n=n+\delta_n$ alalım. (4.1.3.10) dan $\delta_n=O\left(\frac{1}{n}\right)$ bulunur. Böylece

$$s_n=n+O\left(\frac{1}{n}\right) \tag{4.1.4.10}$$

ve

$$\lambda_n=n^2+O(1) \tag{4.1.4.11}$$

elde edilir. (4.1.4.10) formülü (4.1.1.1)-(4.1.1.7) sınır değer probleminin özfonksiyonları için asimtotik ifadeler elde etmemize olanak sağlar. (4.1.1.11), (4.1.3.4) ve (4.1.4.1) den

$$u_1(x,\lambda)=\sin\alpha\cos sw_1x+O\left(\frac{1}{s}\right), \tag{4.1.4.12}$$

$$u_1'(x,\lambda)=-sw_1\sin\alpha\sin sw_1x+O(1) \tag{4.1.4.13}$$

olur.

(4.1.1.12), (4.1.3.5) ve (4.1.4.2) den

$$u_2(x,\lambda)=\frac{\sin\alpha}{\theta_1}\cos sw_2x+O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{4.1.4.14}$$

elde edilir.

(4.1.1.13), (4.1.3.7), (4.1.4.3) ve (4.1.4.14) den

$$u_3(x,\lambda)=\frac{\sin\alpha}{\theta_1\theta_2}\cos sw_3x+O\left(\frac{1}{s}\right) \tag{4.1.4.15}$$

bulunur.

(4.1.4.10) u (4.1.4.12), (4.1.4.14) ve (4.1.4.15) te yazarsak

$$u_{1n}=u_1(x,\lambda_n)=\sin\alpha\cos nw_1x+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$u_{2n}=u_2(x,\lambda_n)=\frac{\sin\alpha}{\theta_1}\cos nw_2x+O\left(\frac{1}{n}\right),$$

$$u_{3n}=u_3(x,\lambda_n)=\frac{\sin\alpha}{\theta_1\theta_2}\cos nw_3x+O\left(\frac{1}{n}\right)$$

buluruz. Dolayısıyla $u_n(x)$ özfonksiyonları aşağıdaki asimtotik formüllere sahiptir:

$$u_n(x)=\begin{cases}\sin\alpha\cos nw_1x+O\left(\frac{1}{n}\right), & x\in[0,\delta_1),\\ \frac{\sin\alpha}{\theta_1}\cos nw_2x+O\left(\frac{1}{n}\right), & x\in(\delta_1,\delta_2),\\ \frac{\sin\alpha}{\theta_1\theta_2}\cos nw_3x+O\left(\frac{1}{n}\right), & x\in(\delta_2,\pi].\end{cases}$$

4.2. Yarı Eksende Tanımlı ve Diferansiyel Denklemde Geciken Argüman İçeren Sınır Değer Problemi

4.2.1 Probleme Giriş

Bu bölümde

$$u''(t)+\lambda u(t)+q(t)u(t-\Delta(t))=0 \qquad (4.2.1.1)$$

denklemi ve

$$u(0)-hu'(0)=0$$

$$u(t-\Delta(t))\equiv u(0)\phi(t-\Delta(t)),\ (t-\Delta(t)<0) \qquad (4.2.1.2)$$

$$\sup_{[0,\infty)}|u(t)|<\infty$$

sınır koşulları ile oluşturulan sınır değer problemini ele alacağız. Burada, $q(t)$ ve $\Delta(t)\geq 0$ fonksiyonları $[0,\infty)$ da tanımlı ve sürekli fonksiyonlar, λ ($-\infty<\lambda<\infty$) reel parametre ve $\phi(t)$, $E_0=\{t-\Delta(t):t-\Delta(t)<0,t>0\}\cup\{0\}$ başlangıç kümesinde tanımlı $\phi(0)=1$ koşulunu sağlayan başlangıç fonksiyonudur.

$w(t,\lambda)$, (4.2.1.1) denkleminin

$$w(0,\lambda)=1, \qquad w'(0,\lambda)=-h$$

$$w(t-\Delta(t),\lambda)\equiv\phi(t-\Delta(t)) \quad (t-\Delta(t)<0) \tag{4.2.1.3}$$

koşullarını sağlayan çözümü olsun. [15] Teorem I.2.1 den $[0,\infty)$ yarı ekseninde (4.2.1.1) denkleminin tek bir çözümünün olduğunu söyleyebiliriz. [15] de sayfa 75 deki Uyarıdan ise (4.2.1.1) denkleminin (4.2.1.3) başlangıç koşullarıyla birlikte, λ nın her değeri için

$$w(t,\lambda)=\cos st-\frac{h}{s}\sin st-\frac{1}{s}\int_0^t q(t)\sin(x-t)w(t-\Delta(t),\lambda)dt, \quad \left(s=\sqrt{\lambda},\lambda>0\right), \tag{4.2.1.4}$$

$$w(t,0)=1-h-\int_0^t q(t)(x-t)w(t-\Delta(t),0)dt,$$

$$w(t,\lambda)=\cosh mt-\frac{h}{m}\sinh mt-\frac{1}{m}\int_0^t q(t)\sinh m(x-t)w(t-\Delta(t),\lambda)dt, \quad \left(m=\sqrt{-\lambda},\lambda<0\right),$$

integral denklemlerine denk olduğu söylenebilir.

Teorem 4.2.1.1. (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer problemi sadece basit özdeğerlere sahiptir.

İspat: $\tilde{\lambda}$, (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin bir özdeğeri ve $\tilde{u}(t,\tilde{\lambda})$ bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. (4.1.2.2) ve (4.2.1.3) ten

$$W\left[\tilde{u}(0,\tilde{\lambda}),w(0,\tilde{\lambda})\right]=\begin{vmatrix}\tilde{u}(0,\tilde{\lambda}) & 1\\ \tilde{u}'(0,\tilde{\lambda}) & -h\end{vmatrix}=-h\tilde{u}(0,\tilde{\lambda})-\tilde{u}'(0,\tilde{\lambda})$$

$$=-\left(\tilde{u}'(0,\tilde{\lambda})-h\tilde{u}(0,\tilde{\lambda})\right)=0$$

olur. Dolayısıyla, [15] Teorem II.2.2 den $\tilde{u}(t,\tilde{\lambda})$ ve $w(t,\tilde{\lambda})$ fonksiyonları $[0,\infty)$ da lineer bağımlı olur. Buradan, $w(t,\tilde{\lambda})$ nın (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer probleminin bir özfonksiyonu olduğu ve bu sınır değer probleminin $\tilde{\lambda}$ ya karşılık gelen tüm özfonksiyonlarının lineer bağımlı olduğunu söyleyebiliriz. Böylece ispat biter. □

Burada, bir sınır değer probleminin özdeğerinin katlılığından, o özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonların sayısı anlaşılmaktadır.

4.2.2 Varlık Teoremleri

Teorem 4.2.2.1.

$$\sup_{t\in E_0}|\phi(t)|=\phi_0<\infty \tag{4.2.2.1}$$

olsun ve (4.2.1.1) denkleminde

$$\int_0^\infty |q(t)|\,dt=q_\infty<\infty \tag{4.2.2.2}$$

alalım. Bu durumda, λ parametresinin tüm pozitif değerleri (4.2.1.1), (4.2.1.2) sınır değer porbleminin özdeğerleridir.

İspat: (4.2.1.4) den eğer $\lambda>0$ ise

$$w(t,\lambda)=R_\lambda\sin(st-\psi_\lambda)-\frac{1}{s}\int_0^x q(t)\sin s(x-t)\,w(t-\Delta(t),\lambda)dt \tag{4.2.2.3}$$

dur, burada $R_\lambda=\sqrt{1+\frac{h^2}{\lambda}}$, $\cos\psi_\lambda=\frac{1}{R_\lambda}$, $\sin\psi_\lambda=-\frac{h}{sR_\lambda}$ ($0\le\psi_\lambda<2\pi$) dir.

$t_0\in(0,\infty)$ ve $N_\lambda(t_0)=\max_{[0,t_0]}|w(t,\lambda)|$ alalım. $N_\lambda(t_0)\ge N_\lambda(t)$ ($t_0\ge t$) olduğu açıktır ve (4.2.2.3), (4.2.1.3), (4.2.2.1) ve (4.2.2.2) den aşağıdaki eşitsizliklerden biri sağlanır:

$$N_\lambda(t_0)\le R_\lambda+\frac{1}{s}\int_0^{t_0}|q(t)|N_\lambda(t)dt \tag{4.2.2.4}$$

veya

$$N_\lambda(t_0)\le R_\lambda+\frac{\phi_0}{s}\int_0^{t_0}|q(t)|\,dt\le R_\lambda+\frac{\phi_0 M_\infty}{s}.$$

[15] Lemma II.3.5 yardımıyla (4.2.2.4) ten

$$N_\lambda(t_0)\le R_\lambda\exp\frac{1}{s}\int_0^{t_0}|q(t)|\,dt\le R_\lambda\exp\frac{M_\infty}{s}$$

ve $s>0$ için $N_\lambda(t_0)\le\max\left\{R_\lambda\exp\frac{q_\infty}{s};R_\lambda+\frac{\phi_0 q_\infty}{s}\right\}<\infty$ elde edilir. Elde edilen bu sınırın herhangi $\lambda>0$ için geçerli olması ve t_0 dan bağımsız olması teoremi ispatlar.

□

5.SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Tezde iki adet sınır değer problemi ele alındı. Bunlardan ilki, sonlu aralıkta, denklemde ve tanımlı olduğu aralıkta süreksizlik içeren bir diferansiyel denklemden ve sınır koşullarından oluşturulmuş sınır değer problemidir. Bu sınır değer probleminin çözümüne denk intergral denklemler elde edilmiş, problemin özdeğer özellikleri incelenmiş, daha sonra problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimtotik formülleri elde edilmiştir.

Tezde ele alınan ikinci sınır değer problemi yarı eksende tanımlanmıştır. Bu sınır değer probleminin de çözümüne denk integral gösterimi verilmiş, daha sonra bir kısım özdeğer özellikleri incelenmiştir.

5.2 Öneriler

Değişik sınır değer koşullarıyla üretilen ikinci mertebeden süreksiz katsayılı sınır değer problemlerinin yukarıdaki özellikleri incelenerek literatüre katkıda bulunulabilir.

KAYNAKLAR

[1] Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., Second-order differential operators with interior singularity, Advances in Difference Equations. **2015:26** (2015), Doi: 10.1186/s13662-015-0360-7.

[2] Aydemir, K., Mukhtarov, O. Sh., Spectrum and Green's function of a many interval Sturm-Liouville problem, Z. Naturforsch. **70(5)a**, (2015), 301-308.

[3] Bayramov, A., Ozturk Uslu, S., and Kizilbudak Caliskan, S., Computation of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument, Applied Mathematics and Computation. **191** (2007), 592-600.

[4] Bellman, R. and Cook, K. L., Differential-Difference Equations, New York Academic Press: London, 1963.

[5] Demidenko, D. M. and Likhoshvai V. A., On differential equations with retarded argument, Siberian Mathematical Journal. **46 (3)** (2005), 417-430.

[6] Elsgolc, L. E., Qualitative Methods of Mathematical Analysis, GITTL, Moscow, 1955; English transl., Transl. Math. Monographs, vol. 12, Amer. Math. soc., Providence, R. I., 1964.

[7] Elsgolc, L. E., Introduction to the Theory of Differential Equations with Deviating Arguments, Nauka, Moscow, 1964; English transl., Holden-Day, San Fransisco, Calif., 1966.

[8] Krasovskii, N. N., Certain Problems in the Theory of the Stability of Motion, Fizmatgiz, Moscow, 1959; English transl., Stability of Motion. Application of the Ljapunov's Second Method to Differential Systems and Equations with Delay, Standford Univ. Press, Standford, Calif., 1963.

[9] Mamedov, Kh. R., Cetinkaya F. A., Inverse problem for a class of Sturm Liouville operator with spectral parameter in boundary condition, Boundary Value Problems. **2013:183** (2013).

[10] Mamedov, Kh. R., Cetinkaya F. A., Boundary value problem for a Sturm Liouville operator with piecewise continuous coefficient, Hacettepe Journal of Mathematics. **44 (4)** (2014), 867-874.

[11] Miskis, A. D., Linear Differential Equations with Retarded Argument, GITTL, Moscow, 1951; German transl., VEB Deutscher Verlag, Berlin, 1955.

[12] Mukhtarov, O. Sh., Aydemir, K., Eigenfunction expansion for Sturm-Liouville problems with transmission conditions at one interior point, Acta Mathematica Scientia. **35B(3)** (2015) 639-649.

[13] Mukhtarov, O. Sh., Olgar, H., and Aydemir, K., Resolvent operator and spectrum of new type boundary value problems, Filomat. **29(7)**, (2015), 1671 1680.

[14] Norkin, S. B., On a boundary problem of Sturm-Liouville type for second-order differential equation with retarded argument, Izvestiya Vysshikh Uchebnykh Zavedenii Matematika. **6 (7)** (1958), 203-214 (Russian).

[15] Norkin, S. B., Differential Equations of the Second Order with Retarded Argument, Translations of Mathematical Monographs, Vol. 31, AMS: Providence, 1972.

[16] Pikula, M., Vladicic, V., Markovic, O., A solution to the inverse problem for the Sturm-Liouville type equation with a delay, Filomat. **27:7** (2013) 1237-1245, Doi 10.2298/FIL130727P.

[17] Pikula, M. T., Vladicic, V. M., Nedic, D. D., Inverse Sturm-Liouville problems with homogeneous delay, Siberian Mathematical Journal. **55 (2)** (2014), 301 308.

[18] Pinney, E., Ordinary Difference-Differential Equations, Univ. of California Press, Berkeley, 1958; Russian transl., IL, Moscow, 1961.

[19] Sen, E. and Bayramov, A., Calculation of eigenvalues and eigenfunctions of a discontinuous boundary value problem with retarded argument which contains a spectral parameter in the boundary condition, Mathematical and Computer Modelling. **54** (2011), 3090-3097.

[20] Sen, E. and Bayramov, A., Asymptotic formulations of the eigenvalues and eigenfunctions for a boundary value problem, Math. Meth. Appl. Sci. **36** (2013), 1512-1519.

[21] Sen, E., Seo, J. J., Araci, S., Asymptotic behaviour of eigenvalues and eigenfunctions of a Sturm-Liouville problem with retarded argument, Journal of Applied Mathematics. **2013** (2013), 8 pages.

[22] Ahmedov, R., Kasanov, K., Yakubov, M., Adi Diferansiyel Denklemler, Maarif Yayınları, 1978.

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: Gizem Çerçi

Doğum Tarihi: 21.08.1989

Öğrenim Durumu:

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Tarih
Lisans	Matematik	Niğde Üniversitesi	03.09.2007 – 03.09.2012
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	12.09.2013-

(Varsa) Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
---	---	---

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. Cetinkaya, F.; Reşidoğlu, H.; Çerçi, G., On a boundary value problem with retarded argument in the differential equation. 3rd International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics (IFSCOM), 2016-08-29, 2016-09-01, Mersin, Türkiye, **2016**.