BAZI DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN KÖK FONKSİYONLAR SİSTEMLERİ ÜZERE AYRIŞIMLARIN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

SERTAÇ GÖKTAŞ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

MERSİN
ARALIK - 2017

BAZI DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN KÖK FONKSİYONLAR SİSTEMLERİ ÜZERE AYRIŞIMLARIN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

DOKTORA TEZİ

SERTAÇ GÖKTAŞ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

MERSİN
ARALIK - 2017

ONAY

Sertaç GÖKTAŞ tarafından Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU danışmanlığında hazırlanan "Bazı Diferansiyel Operatörlerin Kök Fonksiyonlar Sistemleri Üzere Ayrışımların Düzgün Yakınsaklığı Üzerine" başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 08 ARALIK 2017 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği ile Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	**Ünvanı, Adı ve Soyadı**	**İmza**
Başkan	Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	…………………
Üye	Prof. Dr. Rauf AMİROV	…………………
Üye	Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN	…………………
Üye	Doç. Dr. İlhan DAĞADUR	…………………
Üye	Doç. Dr. Abdullah KABLAN	…………………

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 12/01/2018 tarih ve 2018.02/71 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

08 Aralık 2017 / 08 December 2017

İmza / Signature

Sertaç GÖKTAŞ

ÖZET

BAZI DİFERANSİYEL OPERATÖRLERİN KÖK FONKSİYONLAR SİSTEMLERİ ÜZERE AYRIŞIMLARIN DÜZGÜN YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Bu tez çalışmasında, λ spektral parametresini sırasıyla lineer ve rasyonel biçimde sınır koşullarının birinde içeren aşağıdaki sınır değer problemleri ele alınmıştır:

$q(x) \in C[0,1]$ reel değerli bir fonksiyon, a ve b reel sabitler ve $a < 0$ olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1,$$
$$y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta,\ 0 \le \beta < \pi;\ y'(1) = (a\lambda + b)y(1),$$

$q(x) \in C[0,1]$ reel değerli bir fonksiyon, tüm katsayılar reel ve $a \ge 0$, $b_k > 0$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, $c_1 < c_2 < \ldots < c_N$, $N \ge 0$ için $\tilde{h}(\lambda) = a\lambda + b - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\lambda - c_k}$ olmak üzere

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1,$$
$$y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta,\ 0 \le \beta < \pi;\ \frac{y'(1)}{y(1)} = \tilde{h}(\lambda).$$

Yukarıda bahsedilen sınır değer problemlerinin özdeğer ve özfonksiyonlarının kesinleştirilmiş asimptotik formülleri elde edilmiştir. Daha sonra, seçilmiş kök fonksiyonlar sistemi (ikinci problemde yalnızca özfonksiyonlardan oluşur) üzere sürekli fonksiyonların Fourier seri ayrışımlarının düzgün yakınsaklık koşulları incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Diferansiyel Operatör, Özdeğer, Özfonksiyon, Ek Fonksiyon, Kök Fonksiyonlar Sistemi, Spektral Ayrışımların Düzgün Yakınsaklığı.

Danışman: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

ON THE UNIFORM CONVERGENCE OF THE EXPANSIONS IN TERMS OF ROOT FUNCTIONS OF SOME DIFFERENTIAL OPERATORS

In this thesis, the following boundary value problems which is respectively included λ spectral parameter depending on linearly and rationally in one boundary condition are considered:

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1,$$
$$y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta,\ 0 \le \beta < \pi;\ y'(1) = (a\lambda + b)y(1)$$

where $q(x) \in C[0,1]$ is real valued function, a and b are real constant and $a < 0$;

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1,$$
$$y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta,\ 0 \le \beta < \pi;\ \frac{y'(1)}{y(1)} = \tilde{h}(\lambda)$$

where $q(x) \in C[0,1]$ is real valued function, $\tilde{h}(\lambda) = a\lambda + b - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\lambda - c_k}$ with the real coefficients and $a \ge 0$, $b_k > 0$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, $c_1 < c_2 < \ldots < c_N$, $N \ge 0$.

The sharpened asymptotic formulae for eigenvalues and eigenfunctions of the above-mentioned boundary value problems are obtained. Then, the conditions of the uniform convergence of Fourier series expansions for the continuous functions in terms of selected root functions, only in terms of eigenfunctions in second problem, are investigated.

Keywords: Differential Operator, Eigenvalues, Eigenfunction, Associated Functions, Root Functions System, Uniform Convergence of Spectral Expansions.

Advisor: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.

TEŞEKKÜR

Bu tez çalışmasının tamamlanması sürecinde koşulsuz desteğini esirgemeyen hoşgörülü ve sabırlı tez danışmanım Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU'na; bilgi birikimini benimle paylaşan, sorularıma her zaman yanıt veren ve üzerimde emeği olan değerli büyüğüm Öğr. Gör. Dr. Emir Ali MARİS'e; bu sürecin en başından beri muhabbetlerini, bilgilerini ve desteklerini hiçbir zaman kesmeyen Prof. Dr. Hikmet KEMALOĞLU'na ve Doç. Dr. Emrah YILMAZ'a teşekkürlerimi ve saygılarımı sunarım. Ayrıca, değerli kardeşim yol arkadaşım Arş. Gör. Halil İbrahim YOLDAŞ'a teşekkür ederim.

Bu günlere ulaşmamda emekleriyle büyük pay sahibi olan anneme ve babama; destekleriyle ve var olmalarıyla bana ilham veren sevgili eşime ve biricik kızıma çok teşekkür ederim.

Bilimi ve bilim insanını destekleyen Türkiye Bilimsel ve Teknolojik Araştırma Kurumu (TÜBİTAK)'na 2211-Yurt İçi Lisansüstü Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü teşekkürlerimi sunarım.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
$\mathbb{N}$	Doğal Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
$\mathbb{R}^n$	$\underbrace{\mathbb{R}\times\mathbb{R}\times\ldots\times\mathbb{R}}_{n\ kez}$
$\mathbb{C}^n$	$\underbrace{\mathbb{C}\times\mathbb{C}\times\ldots\times\mathbb{C}}_{n\ kez}$
$\mathbb{R}^+$	Pozitif Reel Sayılar Kümesi
$\overline{z}$	z Kompleks Sayısının Eşleneği
λ	Spektral Parametre
λ_n	$n.$ Özdeğer
$y_n(x,\lambda_n)$	$n.$ Özdeğere Karşılık Gelen $n.$ Özfonksiyon
$\Delta(\lambda)$	Karakteristik Determinant
$\varpi(\lambda)$	Karakteristik Denklem
$k=\overline{1,n}$	$k=1,2,\ldots,n$
$\overset{\circ}{U}_\delta(a)$	a Noktasının Delinmiş δ Komşuluğu
D_x	$\frac{\partial}{\partial_x}$ Kısmi Türev Operatörü
A^{-1}	Bir A Operatörünün Tersi
$\sigma(f)$	Bir $f(x)$ Fonksiyonunun Fourier Seri Açılımı
δ_{ij}	Kronecker Deltası. $i=j$ ise 1 ve $i\neq j$ ise 0 Değerini Alan Fonksiyon
(f,g)	f ve g Fonksiyonlarının Bulundukları Uzayda İç Çarpımı
$C[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında Sürekli ve Kompleks Değerli Tüm Fonksiyonlar Uzayı
$C^{(n)}[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında $n.$ Mertebeden Sürekli Türeve Sahip Tüm Kompleks Değerli Fonksiyonlar Uzayı
$C^\alpha[a,b]$	$\left\{f:[a,b]\to\mathbb{R}:\exists M>0:\ \forall x_1,x_2\in[a,b]\ \lvert f(x_1)-f(x_2)\rvert\le M\lvert x_1-x_2\rvert^\alpha\ (0<\alpha\le1)\right\}$
$W_p^n(a,b)$	$n.$ Mertebeden Türevi Mevcut ve $L_p(a,b)$ Uzayında Bulunan Fonksiyonlar Uzayı. Burada, $1\le p<\infty$ ve $n=0,1,\ldots$ dir
$L_2[a,b]$	$[a,b]$ Aralığında Tanımlı, Ölçülebilir, Reel Değerli ve Karesi integrallenebilen Fonksiyonlar Uzayı
$L_p(a,b)$	$\int_a^b \lvert f(x)\rvert^p\,dx$ Lebesque İntegrali Sonlu Olan Ölçülebilir $f(x)$ Fonksiyonlarının Uzayı. Burada, $1\le p<\infty$ dir
$\blacksquare$	İspatın Bittiğini Gösterir

1. GİRİŞ

Dalga ve difüzyon olaylarının zamana bağlı olmayan (elektrostatik, magnetostatik) süreçlerinin, matematiksel fizik (hiperbolik, parabolik, eliptik tip) denklemleri ile ifade edildiği bilinmektedir. Bu denklemler, problemin kendi doğasına ilişkin başlangıç ve sınır değer koşullarıyla incelenir.

Lineer kısmi diferansiyel denklemler için sınır değer problemlerinin çözümlerinin bulunması için farklı yöntemler uygulanır ki, bunlardan en önemlisi *değişkenlerin ayrılması* veya *Fourier metodu*dur. Bu yöntemin özelliği, problemin çözümünün açık biçimde ifade edilmesindedir. Bundan dolayı, çok kullanışlı bir yöntem olarak bilinmektedir.

x ve y değişkenlerine bağlı $U(x,y)$ fonksiyonu

$$U(x,y) = X(x)Y(y)$$

biçiminde gösterilirse, bu fonksiyon *değişkenlerine ayrılabilirdir* denir. Fourier metodu, sınır değer problemlerinin çözümünü $u(x,t) = X(x)T(t)$ biçiminde değişkenlere ayırma olayıdır. Bu şekilde değişkenlere ayırarak $X(x)$ ve $T(t)$ fonksiyonları için adi diferansiyel denklemler ve bunlar için özdeğer problemleri elde edilir. Sınır değer koşullarını sağlatarak, bir fonksiyonun özfonksiyonlara göre Fourier serisine ayrışımı problemi ile karşılaşılır. Sonuç olarak, bu ayrışım probleminde iki temel sorun ortaya çıkmaktadır:

i) Hangi şartlar altında verilen bir $f(x)$ fonksiyonunun ele alınan sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sistemi üzere seri açılımı yapılabilir?

ii) Kök fonksiyonlar sistemi üzere yapılan bu seri açılımı hangi şartlar altında düzgün yakınsaktır?

Bir ucu bağlı birkaç $x = x_i \left(i = \overline{1,n}\right)$ noktalarında yük bağlanmış telin titreşimi probleminin çözümüne Fourier metodu uygulandığında adi diferansiyel denklem için sınırda spektral parametre içeren problemlerle karşılaşılır. Benzer şekilde, ısı iletkenliği denklemi için sınır koşulu zamana göre türev içerdiği durumda karşılaşılır. Bu problemler farklı yöntemlerle incelenir. Birçok durumda sınırda spektral parametre içeren sınır değer problemlerinin operatör formülasyonu klasik uzaylarda ifade edilemediğinden yeni özel fonksiyonel uzaylar oluşturulur ve bu uzaylarda özdeğer problemleri operatör denklem biçiminde incelenir.

Sınır koşullarında spektral parametre içeren adi diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin varlığı; özfonksiyonların sıfırlarının salınımı, özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotik formüllerinin tespiti; kök fonksiyonlar sisteminin farklı fonksiyonel uzaylarda tabanlık özellikleri; özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formüllerinin kesinleştirilmesi; uygun kök fonksiyonlar sistemleri üzere sürekli fonksiyonların veya farklı fonksiyonel uzaylardaki fonksiyonların Fourier seri ayrışımlarının yakınsaklığı (düzgün yakınsaklığı) gibi spektral özellikleri farklı tekniklerle incelenebilir.

Bu tez çalışmasında, sınır koşullarından biri spektral parametre içeren aşağıdaki iki sınır değer problemi ele alınacaktır:

Birinci problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1,$$

$$y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta,\ 0 \le \beta < \pi;\ y'(1) = (a\lambda + b)y(1)$$

şeklindedir. Burada, λ bir spektral parametre, $q(x) \in C[0,1]$ reel değerli bir fonksiyon, a ve b reel sabitler ve $a < 0$ dır.

İkinci problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1,$$

$$y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta,\ 0 \le \beta < \pi;\ \frac{y'(1)}{y(1)} = \tilde{h}(\lambda)$$

şeklindedir. Burada, λ spektral parametre, $q(x) \in C[0,1]$ reel değerli bir fonksiyon, tüm katsayılar reel ve $a \ge 0$, $b_k > 0$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, $c_1 < c_2 < \ldots < c_N$, $N \ge 0$ olmak üzere

$$\tilde{h}(\lambda) = a\lambda + b - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\lambda - c_k}$$

dır.

Dikkat edelim ki, birinci problem ikinci problemin özel durumu değildir: ikinci problemde kök fonksiyonlar sistemi yalnızca özfonksiyonlardan oluşurken birinci problemde ise kök fonksiyonlar sistemi ek fonksiyonları da içerir.

Bu problemlerin çözümünde fonksiyonun Fourier serisine ayrışım problemi önemlidir. Bu nedenle, tezdeki amaç yukarıda belirtilen sınır koşullarının birinde spektral parametre içeren sınır değer problemlerinin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formüllerinin kesinleştirilmesi; kök fonksiyonlar sistemleri üzere sürekli fonksiyonların Fourier seri ayrışımlarının düzgün yakınsaklık koşullarının incelenmesidir.

Not edelim ki, bu problemlerde sınır koşulu spektral parametre dışında başka sayısal parametreler de içerir. Bu nedenle, bu problemlerin incelenmesinde bu sayısal parametrelerin özelliklerinin de önemli bir yeri vardır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde yayınlanmış birçok çalışmanın temelinde diferansiyel operatörlerin özdeğer ve özfonksiyonlarının bulunması, bu operatörlerin kök fonksiyonlar sistemleri üzere verilen fonksiyonların ayrışımı ve bu ayrışımın düzgün yakınsaklık koşullarının araştırılması gibi problemler yatmaktadır.

Analiz [1,2], adi diferansiyel denklemler [3], kısmi diferansiyel denklemler [4,5], fonksiyonel analiz [6-8] ve reel analiz [9,10] temel bilgileriyle birlikte lineer diferansiyel operatörlerin temel teorisi [11] monografisinde verilmiştir.

Lineer diferansiyel operatörlerin spektral teorisinde temel problemler, adi diferansiyel operatörler için Sturm-Liouville ve bir boyutlu Dirac operatörlerin teorisi üzerinde yoğunlaşmıştır. Bu bağlamda, [12, 13] monografilerinde bu operatörlerin genel özellikleri verilmiştir.

Lineer diferansiyel operatörlerin matematiksel fizik problemlerine uygulamaları [14, 15] monografilerinde verilmiştir. [16, 17, 18] makalelerinde ise sınır koşulu spektral parametre içeren problemler ele alınmıştır.

Sınır koşullarında spektral parametre içeren bazı lineer diferansiyel operatörlerin özdeğerlerinin varlığı, özfonksiyonlarının osilasyon özelliği, özdeğerlerinin katlılık durumunun incelenmesi, katlı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlara uygun ek fonksiyonların bulunması, özdeğer ve özfonksiyonların asimptotik formüllerinin elde edilmesi, farklı fonksiyonel uzaylarda kök fonksiyonlar sisteminin tabanlığı gibi problemler [19-39] makalelerinde incelenmiştir. Bu spektral özelliklere ek olarak, sınır koşullarında spektral parametre içeren bazı lineer diferansiyel operatörlerin farklı fonksiyonel uzaylara ait fonksiyonların Fourier seri ayrışımlarının düzgün yakınsaklık koşulları [40-51] makalelerinde araştırılmıştır.

Tezde kullanılan trigonometrik seriler, Fourier serileri ve ortogonal serilerle ilgili bilgiler [52-55] monografilerinde ve farklı fonksiyonel uzaylarda tabanlık kavramı ve özellikleri [56,57] monografilerinde detaylı bir biçimde anlatılmıştır.

Tezde ele aldığımız ve araştırmak istediğimiz spektral özelliklerle yakından ilgili olması nedeniyle yukarıda bahsedilen kaynaklardan bazılarının sonuçlarını özetleyelim:

Spektral ayrışımların düzgün yakınsaklık koşullarının araştırıldığı sınır değer problemleri, matematiksel fizik problemlerinin önemli bir sınıfının temelini oluşturur. Örneğin, a ve b pozitif sayılar olmak üzere

$$\begin{gathered} y'' + \lambda y = 0, \ \ 0 < x < 1, \\ y(1) = 0, \ (a-\lambda)\, y'(0) + b\lambda y(0) = 0 \end{gathered} \tag{2.1}$$

spektral problemi, yüklü bir telin titreşiminin matematiksel tanımlanmasından ve ısı iletimi sürecinin bir modelinden ortaya çıkmaktadır. Benzer şekilde, d pozitif bir sayı olmak üzere

$$\begin{gathered} y''+\lambda y=0,\ 0<x<1, \\ y(0)=0,\ y'(1)-d\lambda y(1)=0 \end{gathered} \tag{2.2}$$

spektral problemi, homojen yüklü bir telin titreşimi, bir ucunda kasnak olan bir çubuğun burulma titreşimleri, bir ucundan ısı verilmiş bir çubuğun ısı transferi, yoğun bir kapasitans veya indüktans boyunca bir ucu topraklanmış kablodaki akım gibi problemlerden meydana gelmektedir [14, 15].

N. Yu. Kapustin ve E. I. Moiseev, sınır koşularının birinde spektral parametre içeren (2.1) ve (2.2) sınır değer problemlerine karşılık gelen özfonksiyonlar sistemlerinin $L_2(0,1)$ uzayında Riesz tabanı olduklarını [22]; daha sonra $L_p(0,1)\ (1<p<\infty)$ uzayında minimalliğini ve tabanlığını göstermişlerdir [24]. Elde edilen bu sonuçlardan sonra; N. Yu. Kapustin ve E. I. Moiseev, (2.1) ve (2.2) sınır değer problemlerinin sürekli fonksiyonların ve $C^\alpha[0,1], \alpha\in(0,1]$ Hölder sınıfına ait fonksiyonların seçilmiş özfonksiyonlar sistemi üzere ve bu öz fonksiyonlar sistemine biortogonal olan sistem üzere Fourier seri ayrışımlarının $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaklık koşullarını araştırmışlardır. Ayrıca, $W_2^m(0,1)\ (m=1,2,\ldots)$ Sobolev uzaylarına ait fonksiyonların, bu uzaylardaki norma göre Fourier seri ayrışımlarının yakınsaklık şartları elde edilmiştir [40, 41].

N. B. Kerimov ve V. S. Mirzoev, sınır koşullarından birinde spektral parametre içeren aşağıdaki sınır değer probleminin özfonksiyonlarından birinin atılmasıyla elde edilen sistemin $L_2(0,1)$ uzayında minimal ve Riesz tabanı olduğunu ispatlamışlardır [31]:

$$\begin{gathered} -y''+q(x)y=\lambda y,\ 0<x<1, \\ b_0y(0)=d_0y'(0), (a_1\lambda+b_1)y(1)=(c_1\lambda+d_1)y'(1). \end{gathered} \tag{2.3}$$

Burada, λ spektral parametre; $q(x)$, $[0,1]$ aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon ve $a_1,\ b_0,\ b_1,\ c_1,\ d_0,\ d_1$ sayıları

$$|b_0|+|d_0|\neq 0,\ \ \sigma=a_1d_1-b_1c_1>0$$

koşullarını sağlayan reel sayılardır. Bu koşullardan $\sigma=a_1d_1-b_1c_1>0$ koşulunun sağlanması demek bu problemi öz eşlenik bir operatöre dönüştürmek demektir [18]. Böylece, (2.3) sınır değer probleminin tüm özdeğerleri reel ve basit olur. Dolayısıyla, bu problemin kök fonksiyonlar sistemi yalnızca özfonksiyonlardan oluşur. Bu nedenle, bu koşul (2.3) probleminin spektral özelliklerinin incelenmesinde önemlidir. Diğer taraftan; $q(x)\equiv 0$, $\sigma>0$ durumunda, Fourier metodu kullanılarak kısmi diferansiyel denklemlerin genel çözümlerinin bulunması için (2.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlar sistemine göre seri ayrışımının düzgün yakınsaklığı kullanılır [49, 50]. $\sigma < 0$ olduğunda ise, (2.3) probleminin tüm özdeğerleri reel veya basit olmayabilir (bazı özdeğerler kompleks veya çok katlı olabilir). Söz konusu durumda, (2.3) sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sistemi, özfonksiyonların yanı sıra ek fonksiyonlar da içerebilir [32, 38].

D. B. Marchenkov, $d > 0$ olmak üzere

$$\begin{gathered} y'' + \lambda y = 0,\ 0 < x < 1, \\ y(0) = 0,\ y'(0) - d\lambda y(1) = 0 \end{gathered} \tag{2.4}$$

sınır değer probleminin seçilmiş özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)\ (1 < p < \infty)$ uzayında minimalliğini ve tabanlığını göstermiştir [37]. Ayrıca, D. B. Marchenkov sınır koşullarının birinde spektral parametre içeren (2.4) sınır değer probleminin özfonksiyonlar sisteminin tabanlığını ve sürekli fonksiyonların (2.4) probleminin seçilmiş özfonksiyonlar sistemi üzere spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklık koşullarını elde etmiştir [42].

N. B. Kerimov ve E. A. Maris, (2.4) sınır değer problemini genişleterek aşağıdaki sınır değer problemi ele almışlardır [48]:

$$\begin{gathered} -y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1, \\ y(0) = 0,\ y'(0) - d\lambda y(1) = 0. \end{gathered} \tag{2.5}$$

Burada, λ spektral parametre, $q(x) \in L_1(0,1)$ kompleks değerli bir fonksiyon ve d sıfırdan farklı bir kompleks sayıdır. N. B. Kerimov ve E. A. Maris, bu çalışmalarında (2.5) sınır değer probleminin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formüllerini elde ederek, seçilmiş özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)\ (1 < p < \infty)$ uzayında minimalliğini ve tabanlığını ispatlamış ve bu tabanın $L_2(0,1)$ uzayında koşulsuz olduğunu göstermişlerdir. Buna ek olarak, sürekli bir fonksiyonun (2.5) sınır değer probleminin seçilmiş özfonksiyonlar sistemine göre Fourier seri ayrışımının $[0,b]\ (0 < b < 1)$ ve $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaklık şartları elde edilmiştir. Dikkat edilirse, (2.4) sınır değer problemi (2.5) sınır değer probleminin $q(x) \equiv 0$ ve $d > 0$ koşulları altında özel durumudur.

Aynı zamanda, N. B. Kerimov ve E. A. Maris; (2.3) sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyonlarının asimptotik formüllerini kesinleştirmiş ve sürekli fonksiyonların seçilmiş özfonksiyonlar sistemine göre Fourier ayrışımlarının $[0,b]\ (0 < b < 1)$ ve $[0,1]$ aralıklarında düzgün yakınsaklık şartlarını elde etmişlerdir [51].

D. A. Gulyaev, $b \neq 0$ ve $d > 0$ olmak üzere sınır koşullarından birinde spektral parametre içeren

$$\begin{gathered} y'' + \lambda y = 0,\ 0 < x < 1, \\ y'(0) = by(0),\ y'(1) = d\lambda y(1) \end{gathered} \tag{2.6}$$

sınır değer problemini ele almıştır [45, 46].

D. A. Gulyaev, ilk olarak (2.6) probleminin özfonksiyonlarının tam ve minimal sistemi üzere sürekli fonksiyonların ve $C^{\alpha}[0,1], \alpha \in (0,1]$ Hölder sınıfına ait fonksiyonların spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklığını [45] ve daha sonra $W_2^m(0,1)$ $(m=1,2,\ldots)$ Sobolev uzaylarına ait fonksiyonların, bu uzaylardaki norma göre Fourier seri ayrışımlarının yakınsaklık şartlarını elde etmiştir [46]. Daha öncesinde, E. I. Moiseev ve N. Yu. Kapustin (2.6) sınır değer probleminin $b=0$ durumunu ele almışlardır [25].

N. Yu. Kapustin, $d>0$ olmak üzere sınır koşullarından birinde karasel spektral parametre içeren aşağıdaki sınır değer probleminin özfonksiyonlar sistemi üzere bir sürekli fonksiyonun ve $C^{\alpha}[0,1], \alpha \in (0,1]$ Hölder sınıfına ait fonksiyonların spektral ayrışımlarının $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaklığını incelemiştir [43]:

$$\begin{gathered} y'' + \lambda y = 0, \ 0<x<1, \\ y(1)=0, \ y'(0) = -d\lambda^2 y(0). \end{gathered} \tag{2.7}$$

Daha sonra, (2.7) sınır değer probleminin özfonksiyonlar sistemi üzere $C^1[0,1]$ sınıfından bir fonksiyonun spektral ayrışımının düzgün yakınsaklık koşulları incelenmiştir [44].

İncelediğimiz tez problemlerinden birincisi için şuana kadar aşağıdaki çalışmalar yapılmıştır:

P. A. Binding, P. J. Browne, W. J. Code ve B. A. Watson,

$$\begin{gathered} -y'' + q(x)y = \lambda y, \ 0<x<1, \\ y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta, \ \ 0 \le \beta < \pi; \ y'(1) = (a\lambda + b)\, y(1) \end{gathered} \tag{2.8}$$

sınır değer problemini ele almışlardır [32]. Burada; λ bir spektral parametre; $q(x)$, [0,1] aralığında reel değerli sürekli bir fonksiyon; a,b reel sabitler ve $a<0$ dır. Dikkat edilirse, bu çalışmada $\sigma<0$ dır. Bu makalede, (2.8) sınır değer probleminin özdeğerlerinin sonlu limit noktaları olmayan λ_n $(n=0,1,2,\ldots)$ sonsuz dizisi formunda olduğu ve bu özdeğerler için sadece aşağıdaki durumların mümkün olabileceği gösterilmiştir:

i) Bütün özdeğerler reel ve basittir,

ii) Bütün özdeğerler reel ve birinin iki katlı olması dışında hepsi basittir ($\exists k \in \mathbb{N}$: $\lambda_k = \lambda_{k+1}$),

iii) Bütün özdeğerler reel ve birinin üç katlı olması dışında hepsi basittir ($\exists k \in \mathbb{N}$: $\lambda_k = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2}$),

iv) Bütün özdeğerler basittir ve kompleks eşlenik çift dışında hepsi reeldir ($\exists k, j \in \mathbb{N}$ ve $\lambda_j, \lambda_k \in \mathbb{C}$: $\overline{\lambda}_k = \lambda_j$).

P. A. Binding, P. J. Browne ve B. A. Watson, (2.8) sınır değer probleminin λ_n $(n=0,1,2,\ldots)$ özdeğerlerinin reel kısımlarının azalmayan yönde sıralandığı ve cebirsel katlılığına göre de tekrarlandığını göstermişlerdir. Buna ek olarak, sınır koşulunda λ'nın lineer bir fonksiyonuyla yada genel rasyonel fonksiyonuyla birlikte (2.8) sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotik ifadesini ve özfonksiyonlarının osilasyon özelliğini çalışmışlardır [33]. Diğer taraftan, lineer azalan durum için bu problemde özdeğerlerin asimptotik formülleri

$$\lambda = \begin{cases} \left(n - \dfrac{1}{2}\right)^2 \pi^2 + O(1), & \beta \neq 0, \\ n^2\pi^2 + O(1), & \beta = 0 \end{cases}$$

biçiminde elde edilmiştir [32].

Y. N. Aliyev, (2.8) probleminin katlı özdeğerlerine uygun ek fonksiyonları inşaa etmiştir. Ayrıca, bu problemin özfonksiyonlarının ve ek fonksiyonlarının iç çarpımlarını ve normlarını tanımlamış ve yardımcı ek fonksiyonların varlığından bahsetmiştir. Buna ek olarak, özdeğerlerin ve özfonksiyonların asimptotik formüllerini elde etmiştir. Biortogonal sistemin açık formu verilerek kök fonksiyonlar sisteminin minimalliği incelemiştir. Sonuç olarak, kök fonksiyonlar sisteminin ne tam nede minimal olduğu bazı durumlar hariç keyfi fonksiyonun atılmasıyla birlikte (2.8) probleminin kök fonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında taban olma koşullarını incelemiştir [38] .

İncelediğimiz tez problemlerinden ikincisi için şuana kadar aşağıdaki çalışmalar yapılmıştır:

P. A. Binding, P. J. Browne ve B. A. Watson, sınır koşullarının birinde spektral parametrenin rasyonel bir fonksiyonuna bağlı

$$\begin{gathered} -y'' + q(x)y = \lambda y, \ 0 < x < 1, \\ y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta, \ 0 \le \beta < \pi; \ \frac{y'(1)}{y(1)} = a\lambda + b - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\lambda - c_k} \end{gathered} \tag{2.9}$$

sınır değer problemini ele almışlardır [26, 27]. Burada; λ spektral parametre, $q(x) \in C[0,1]$ reel değerli bir fonksiyon, tüm katsayılar reel ve $a \ge 0$, $b_k > 0$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, $c_1 < c_2 < \ldots < c_N$, $N \ge 0$ dır. (2.9) sınır değer probleminin özdeğerlerinin varlığı, özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik ifadeleri ve özfonksiyonlarının salınım özellikleri gösterilmiştir [26].

N. B. Kerimov ve Y. N. Aliyev, sınır koşullarından biri rasyonel bir spektral parametreye bağlı olan (2.9) sınır değer probleminin özfonksiyonlar sistemine karşılık gelen biortogonal sistemin açık formunu vererek, seçilmiş özfonksiyonlar sisteminin $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında minimalliğini ve tabanlığını ispatlamışlardır. Buna ek olarak, $p = 2$ için bu tabanın koşulsuz olduğunu göstermişlerdir [36].

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, temel kavramlara ek olarak "Giriş" bölümünde bahsedilen sınır değer problemlerinin "Bulgular ve Tartışmalar" bölümünde ifade ve ispat edilecek olan teoremleri için istifade edilecek bazı tanım, lemma ve teoremlere yer verilecektir.

3.1. Temel Kavramlar

Tanım 3.1.1 (*Lineer Uzay*) [11]. X boş olmayan bir küme, $x,y,z\in X$ olsun. Aşağıdaki özelliklerin sağlanması durumunda X kümesine *lineer uzay* veya *vektör uzayı* denir:

$+: X\times X\to X;\ +(x,y)=x+y$ ile tanımlanan toplama işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

a1) $\forall x,y\in X$ için $x+y\in X$,

a2) $\forall x,y\in X$ için $x+y=y+x$,

a3) $\forall x,y,z\in X$ için $(x+y)+z=x+(y+z)$,

a4) $\exists\theta\in X$, $\forall x\in X$ için $x+\theta=x$,

a5) $\forall x\in X$, $\exists y\in X$ için $x+y=\theta$,

$\cdot: K\times X\to X;\ \cdot(\lambda,y)=\lambda x\quad (K=\mathbb{R}\text{veya}K=\mathbb{C})$ ile tanımlanan çarpma işlemi aşağıdaki özellikleri sağlar:

b1) $\forall x\in X$ ve $\forall\lambda\in K$ için $\lambda x\in X$,

b2) $\forall x\in X$ ve $\forall\lambda,\mu\in K$ için $\lambda(\mu x)=(\lambda\mu)x$,

b3) $\forall x\in X$, $\exists 1\in K$ için $1x=x$,

b4) $\forall x,y\in X$ ve $\forall\lambda\in K$ için $\lambda(x+y)=\lambda x+\lambda y$,

b5) $\forall x\in X$ ve $\forall\lambda,\mu\in K$ için $(\lambda+\mu)x=\lambda x+\mu x$.

K'ya X'in *skaler cismi* denir. $K=\mathbb{R}$ olması halinde X'e reel vektör uzayı, $K=\mathbb{C}$ olması halinde ise X'e kompleks vektör uzayı denir. X uzayının elemanlarına X'in *vektörleri* denir.

Tanım 3.1.2 (*Alt Uzay*) [11]. X bir lineer uzay, $\varnothing\neq W\subset X$ olsun. $\forall a,b\in\mathbb{C}$, $\forall x,y\in W: ax+by\in W$ koşulu sağlanıyorsa W'ye X'in bir *alt uzayı* denir.

Tanım 3.1.3 (*Lineer Kombinasyon*) [11]. X bir lineer uzay, $c_1,c_2,\ldots,c_n\in\mathbb{C}$ ve $x_1,x_2,\ldots,x_n\in X$ olsun. $c_1x_1+c_2x_2+\ldots+c_nx_n$ ifadesine $x_1,x_2,\ldots,x_n$ elemanlarının bir *lineer kombinasyonu* denir.

$W \subset X$ olsun. W alt kümesinin boştan farklı tüm sonlu alt kümelerinin elemanlarının bütün lineer kombinasyonlarının kümesi X'in bir alt uzayıdır ve bu uzay $SpanW$ ile gösterilir. $SpanW$ alt uzayına W'nun *ürettiği* veya *gerdiği* uzay denir.

Tanım 3.1.4 (*Lineer Bağımlılık-Lineer Bağımsızlık*) [11]. X bir lineer uzay ve $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ olsun. $c_1x_1 + c_2x_2 + \ldots + c_nx_n = \theta$ eşitliği yalnızca $c_1 = c_2 = \ldots = c_n = 0$ koşulu ile sağlanıyorsa $x_1, x_2, \ldots, x_n \in X$ elemanlarına *lineer bağımsız*, aksi takdirde *lineer bağımlıdır* denir. $W \subset X$ sonsuz elemanlı olsun. W'nun her sonlu sayıda elemanı lineer bağımsız ise W'ya *lineer bağımsızdır* denir. Aksi halde *lineer bağımlıdır* denir.

Tanım 3.1.5 (*Boyut-Taban*) [11]. X bir lineer uzay olsun. X uzayı üzerinde n'den fazla olmayan lineer bağımsız vektör varsa X uzayına *sonlu boyutludur*, ya da daha kesin, n *boyutludur* denir. Böyle n tane vektör sistemine bir *taban(baz)* denir. X uzayı sonlu boyutlu değilse *sonsuz boyutludur* denir.

Tanım 3.1.6 (Operatör) [11]. X bir lineer uzay, $\varnothing \neq D \subset X$ olsun. L dönüşümü D kümesinin her elemanını X'in en az bir elemanına eşlerse bu L dönüşümüne bir *operatör*, D kümesine ise L'nin *tanım kümesi* denir.

Tanım 3.1.7 (*Lineer Operatör*) [11]. X bir lineer uzay ve L, $D \subset X$ kümesi üzerinde tanımlı bir operatör olsun. Aşağıdaki özelliklerin sağlanması durumunda L operatörüne bir *lineer dönüşüm* veya *lineer operatör* denir: $\forall x, y \in D$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{C}$ için

i) $L(x + y) = L(x) + L(y)$,

ii) $L(\lambda x) = \lambda L(x)$.

Tanım 3.1.8 (*Fonksiyonel*) [10]. X, $\mathbb{R}(\text{ya da } \mathbb{C})$ cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzay olsun. f dönüşümü X kümesinin her elemanını $\mathbb{R}(\text{ya da } \mathbb{C})$ cisminin en az bir elemanına eşlerse bu f dönüşümüne bir *fonksiyonel* denir.

Tanım 3.1.9 (*Lineer Fonksiyonel*) [10]. X, $\mathbb{R}(\text{ya da } \mathbb{C})$ cismi üzerinde tanımlı bir lineer uzay f, X kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyonel olsun. Aşağıdaki özelliklerin sağlanması durumunda f fonksiyoneline bir *lineer fonksiyonel* denir: $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\text{ya da } \mathbb{C})$ için

i) $f(x + y) = f(x) + f(y)$,

ii) $f(\lambda x) = \lambda f(x)$.

Tanım 3.1.10 (*Metrik Uzay*) [6]. $X \neq \varnothing$ herhangi bir küme olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan

$$d : X \times X \to \mathbb{R}^{+}$$
$$(x, y) \to d(x, y)$$

dönüşümüne X üzerinde bir *uzaklık fonksiyonu* ya da *metrik*, (X, d) ikilisine ise bir *metrik uzay* denir: $\forall x, y, z \in X$ için

i) $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

ii) $d(x, y) = d(y, x)$,

iii) $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$.

Tanım 3.1.11 (*Normlu uzay*) [6]. X reel veya kompleks bir lineer uzay olsun. Aşağıdaki özellikleri sağlayan $\|\cdot\| : X \to \mathbb{R}^{+}$ dönüşümüne X üzerinde bir *norm* , $(X, \|\cdot\|)$ ikilisine ise bir *normlu uzay* denir: $\forall x, y \in X$ ve $\forall \lambda \in \mathbb{R}(\text{ya da } \mathbb{C})$ için

i) $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = \theta$,

ii) $\|x + y\| \leq \|x\| + \|z\|$,

iii) $\|\lambda x\| = |\lambda| \|x\|$.

$d(x, y) = \|x - y\|$ ile tanımlanan uzaklık fonksiyonu X normlu uzayı üzerinde bir metriktir. Böylece, her $(X, \|\cdot\|)$ normlu uzayından bir (X, d) metrik uzayı elde edilebilir. Bu yolla elde edilen d metriğine $\|.\|$ normunun *tanımladığı* veya *indirgendiği metrik* denir.

Tanım 3.1.12 (*Cauchy Dizisi*) [10]. Bir X normlu uzayında $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi verilsin. Verilen her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n, m \geq n_0$ için

$$\|x_n - x_m\| < \varepsilon$$

ise $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine bir *Cauchy dizisi* denir.

Tanım 3.1.13 (*Yakınsaklık*) [10]. Bir X normlu uzayında $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi verilsin. Verilen her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n \geq n_0$ için

$$\|x_n - x\| < \varepsilon$$

ise $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $x \in X$ elemanına *yakınsaktır* denir. $x_n \to x$ veya $\lim_{n \to \infty} x_n = x$ ile gösterilir.

Teorem 3.1.1 [10]. Bir X normlu uzayında her yakınsak dizi bir Cauchy dizisidir. Ancak tersi daima doğru değildir.

Tanım 3.1.14 (Tam Uzay) [10]. Bir normlu uzayda her Cauchy dizisi yakınsak ise bu uzaya *tam uzay* denir. Yani, Bir X normlu uzayında her $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy dizisi için $x_n \to x$ olacak şekilde bir $x \in X$ elemanı vardır.

Tanım 3.1.15 (*Banach uzay*) [10]. $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayı tam ise bu uzaya *tam normlu uzay* veya *Banach uzayı* adı verilir.

$(X,\|\cdot\|)$ uzayının tamlığını (ya da Banach uzayı olduğunu) göstermek için X'de keyfi $\{x_n\}_{n=1}^{\infty}$ Cauchy dizisi alarak bunun X'de yakınsak olduğunu göstermek gerekir. Bu durumda, d normun indirgendiği bir metrik olmak üzere (X,d) metrik uzayı tam ise $(X,\|\cdot\|)$ normlu uzayı bir Banach uzayı olacaktır [7].

Örnekler 3.1.1 [10]. Aşağıdaki lineer uzaylar verilen normlara göre bir Banach uzayıdır:

i) $\mathbb{R}^n$ ve $\mathbb{C}^n$; $\forall x = (x_1, x_2, \ldots, x_n) \in \mathbb{R}^n$:

$$\|x\| = \left(\sum_{i=1}^{n} |x_i|^2 \right)^{\frac{1}{2}},$$

ii) $l_p = \left\{ x_i \in \mathbb{R} \,|\, \sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p < \infty \right\}$ skaler dizilerin uzayı; $\forall x = (x_1, x_2, \ldots) \in l_p$, $1 \le p < \infty$:

$$\|x\|_p = \left(\sum_{i=1}^{\infty} |x_i|^p \right)^{\frac{1}{p}},$$

iii) l^{∞} sınırlı skaler dizilerin uzayı; $\forall x = (x_1, x_2, \ldots) \in l^{\infty}$:

$$\|x\| = \sup_n |x_n|,$$

iv) $P[a,b]$, $[a,b]$ aralığında tanımlı tüm polinomlar uzayı; $\forall x = x(t) \in P[a,b]$:

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|,$$

v) $C[a,b]$, $[a,b]$ aralığında tanımlı tüm sürekli fonksiyonlar uzayı; $\forall x = x(t) \in C[a,b]$:

$$\|x\| = \max_{t \in [a,b]} |x(t)|.$$

Tanım 3.1.16 (*Toplanabilirlik*) [10]. Bir X normlu uzayında $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi verilsin. Eğer, $\sum_{k=1}^{n} x_k$ serisinin kısmi toplamlar dizisi $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$, X'de bir s elemanına yakınsak ise, yani

$$\|s_n - s\| \to 0, \quad n \to \infty$$

ise $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine s toplamına *toplanabilirdir* (*yakınsaktır*) denir ve

$$s = \sum_{k=1}^{\infty} x_k$$

biçiminde yazılır. Eğer,

$$\sum_{k=1}^{\infty} \|x_k\| < \infty$$

ise $\{x_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisine *mutlak toplanabilirdir (mutlak yakınsaktır)* denir.

Analizde, fonksiyonların iç çarpımı geniş uygulamalara sahiptir. Bu nedenle, bir iç çarpımın tanımlandığı fonksiyonların lineer uzayının bir sınıfına ihtiyaç duyulur. Bu uzaylar *Hilbert uzaylar* olarak adlandırılır ve aşağıdaki biçimde tanımlanır:

Tanım 3.1.17 (*Hilbert Uzayı*) [6]. $n-$boyutlu reel (ya da kompleks) E_n vektör uzayında, vektörlerin toplama ve reel (ya da kompleks) bir sayıyla vektörlerin çarpma işlemlerinin yanı sıra iki vektörün skaler (ya da iç) çarpımı da söz konusudur. Yani, E_n'de $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ ve $y = \{\mu_1, \mu_2, \ldots, \mu_n\}$ gibi iki vektörün *skaler çarpımı*

$$(x, y) = \sum_{i=1}^{n} \xi_i \overline{\mu}_i$$

sayısıyla gösterilir.

Bir $x = \{\xi_1, \xi_2, \ldots, \xi_n\}$ vektörünün *norm*u (ya da *uzunluğu*) iç çarpım yardımıyla

$$\|x\| = \sqrt{\sum_{i=1}^{n} |\xi_i|^2} = \sqrt{(x, x)}$$

biçiminde gösterilir.

$x, y, z, \ldots$ elemanlarının bir kümesi H olsun.

i) H bir kompleks lineer uzaydır.

ii) H uzayındaki $\forall x, y \in H$ eleman çiftine, aşağıdaki özellikleri sağlayan ve bu elemanların iç çarpımı adı verilen bir (x, y) kompleks sayısı karşılık gelir:

a) $(x, y) = \overline{(y, x)}$,

b) $(x + z, y) = (x, y) + (z, y)$,

c) $(\lambda x, y) = \lambda (x, y), \forall \lambda \in \mathbb{C}$, *d)* $\forall x \in H : (x,x) \geq 0$ ve $(x,x) = 0 \Leftrightarrow x = \theta$.

iii) $d(x,y) = \|x - y\|$ ile verilen metriğe göre H uzayı tamdır.

iv) H uzayı sonsuz boyutludur.

(i)-(iii) özelliklerinin sağlanması durumunda H uzayına *iç çarpım uzayı* (*üniter uzay*) denir. $n-$boyutlu üniter uzay bir kompleks Euclid uzaydır.

(i)-(iv) özelliklerinin sağlanması durumunda H uzayına *soyut Hilbert uzay* denir.

Tanım 3.1.18 (L^p *Sınıfı*) [10]. Eğer f , E kümesi üzerinde bir ölçülebilir fonksiyon ise, o halde her $p\,(0 < p < \infty)$ sayısı için de $|f|^p$ fonksiyonu ölçülebilirdir. E üzerinde $p-$integrallenebilir tüm fonksiyonların sınıfı $L^P(E)$ ile gösterilir. Yani,

$$L^P(E) = \left\{ f : \int_E |f|^p < \infty \right\}$$

dir.

$0 < p < \infty$ ise $L_p(0,1) = \left\{ f : \int_0^1 |f|^p < \infty \right\}$ kümesi, fonksiyonlar üzerinde tanımlı toplama ve skalerle çarpma işlemlerine göre $\mathbb{R}$ cismi üzerinde bir lineer uzaydır. (Buradaki integral Lebesque anlamında integraldir.)[9].

$1 \leq p < \infty$ ise $L_p(0,1)$ uzayında $\|f\|_p = \left(\int_0^1 |f(x)|^p \, dx \right)^{\frac{1}{p}}$ ile tanımlı $\|\cdot\|_p$ ifadesi bir normdur.

$L_p(0,1)$ $(1 \leq p < \infty)$ uzayı bu norma göre normlu lineer uzaydır [9].

Özel olarak, $p = 2$ için $L_2[a,b]$ uzayını aşağıdaki gibi tanımlayalım:

Tanım 3.1.19 ($L_2[a,b]$ *Uzayı*) [6]. $[a,b]$ aralığında tanımlı karesi integrallenebilen, ölçülebilir, kompleks değerli $f(x), g(x), \ldots$ fonksiyonlarının oluşturduğu uzaya $L_2[a,b]$*uzayı* denir.

Örnekler 3.1.2 [8].

i) $C[a,b]$ uzayı, $f, g \in C[a,b]$ ve $d : C[a,b] \times C[a,b] \to \mathbb{R}^+$ olmak üzere

$$d(f,g) = \max_{a \leq x \leq b} |f(x) - g(x)|$$

metriği ile bir metrik uzay; $\|\cdot\| : C[a,b] \to \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\|f\| = \max_{a \leq x \leq b} |f(x)|$$

normu ile bir normlu uzaydır. $C[a,b]$ uzayında iç çarpım,

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

olarak tanımlanırsa

$$\|f\|=\left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

normu ile tam olmayan bu uzay Hilbert uzayı değildir.

ii) $L_2[a,b]$uzayı, $\forall f,g\in L_2[a,b]$ için $d:L_2[a,b]\times L_2[a,b]\to\mathbb{R}^+$

$$d(f,g)=\left(\int_a^b |f(x)-g(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

metriği ile bir metrik uzay; $\|\cdot\|:L_2[a,b]\to\mathbb{R}$

$$\|f\|=\left(\int_a^b |f(x)|^2\,dx\right)^{\frac{1}{2}}$$

normu ile bir normlu uzay; $(\cdot,\cdot):L_2[a,b]\times L_2[a,b]\to\mathbb{R}$

$$(f,g)=\int_a^b f(x)\overline{g(x)}dx$$

iç çarpımı ile bir iç çarpım uzayıdır. $L_2[a,b]$uzayı bir Hilbert uzayıdır.

Bir Sturm-Liouville diferensiyel operatörünün spektral teorisi; $L_2[0,n]$, $L_2(0,1)$, $L_2(0,\infty)$ ve $L_2(-\infty,\infty)$ uzaylarında çalışılır [13].

Teorem 3.1.2 (Hölder Eşitsizliği) [9]. $f\in L_p(0,1)$ $(1\le p<\infty)$ ve $g\in L_q(0,1)$ $(1\le q<\infty)$ ise, $f\cdot g\in L_1(0,1)$ dir. Ayrıca,

$$\int_0^1 |f(x)g(x)|dx\le\|f\|_p\|g\|_q$$

eşitsizliği doğrudur. Burada, $\frac{1}{p}+\frac{1}{q}=1$ dir. Eşitliğin sağlanması için gerek ve yeter şart sıfırdan farklı α ve β sayıları ve hemen hemen her $x\in[0,1]$ için $\alpha|f(x)|^p=\beta|g(x)|^q$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Teorem 3.1.3 (Minkowski Eşitsizliği) [9]. $f,g\in L_p(0,1)$ $(1\le p<\infty)$ ise,

$$\|f+g\|_p\le\|f\|_p+\|g\|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

Teorem 3.1.4 (Riesz-Fischer Teoremi) [9]. $L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ uzayı tamdır (Banach uzayıdır).

Teorem 3.1.5 (Riesz Temsil Teoremi) [9]. F, $L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ uzayında tanımlı sınırlı lineer bir fonksiyonel olsun. O halde, öyle bir $g \in L_q(0,1)$ $(1 \le q < \infty)$ fonksiyonu vardır ki

$$F(f) = \int_0^1 f(x) g(x) dx$$

eşitliği sağlanır. Ayrıca, $\|F\| = \|g\|_q$ dir. Burada, $\|F\| = \sup\limits_{\|f\|_p \neq 0} \frac{|F(f)|}{\|f\|_p}$ dir.

Tanım 3.1.20 (Sobolev Uzayı) [59]. Kabul edelim ki Ω, $\mathbb{R}^n$ uzayında sınırlı bir bölge ve $L_2(\Omega)$ uzayı Lebesque uzayı olsun. $W_2^1(\Omega)$ *Sobolev uzayı*, $u \in L_2(\Omega)$ ve $\frac{\partial u}{\partial x_i} \in L_2(\Omega)$ özelliğine sahip olan tüm fonksiyonların uzayıdır. Bu tanımda, 1 rakamıyla mertebesi 1 olan kısmi türevlerin $L_2(\Omega)$ uzayına ait olmasını; 2 rakamıyla ise $L_2(\Omega)$ uzayına ait olma koşulundaki integrantın kuvvetini göstermektedir.

$W_2^1(\Omega)$ ve $L_2(\Omega)$ uzayları arasında $W_2^1(\Omega) \subset L_2(\Omega)$ biçiminde bir ilişki vardır.

$f, g \in W_2^1(\Omega)$ olmak üzere $W_2^1(\Omega)$ Sobolev uzayındaki iç çarpım

$$(f,g) = \int_\Omega f.gdx + \int_\Omega gradf.gradgdx,$$

biçiminde, norm ise

$$\|f\| = \left(\int_\Omega f^2 dx + \int_\Omega |gradf|^2 dx \right)^{\frac{1}{2}}$$

biçiminde tanımlanır. Sobolev uzaylarına $W-$uzayları da denir.

3.1.1. *o*-Küçük ve *O*-Büyük Sembolleri

$f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonları $X \subset \mathbb{R}$ kümesinde tanımlı, $a \in \overline{\mathbb{R}}$ ise bu kümenin bir limit noktası olsun [2].

Tanım 3.1.1.1 (*Sonsuz Küçük Fonksiyon*) [2]. Eğer $\lim\limits_{x \to a} f(x) = 0$ ise $f(x)$ fonksiyonuna $x \to a$ iken *sonsuz küçük fonksiyon* denir. $x \to a$ iken $f(x) = o(1)$ şeklinde gösterilir.

Tanım 3.1.1.2 (*Sonsuz Büyük Fonksiyon*) [2]. Eğer $x \in X$ için $\lim\limits_{x\to a}\left|f(x)\right| = +\infty$ ise $f(x)$ fonksiyonuna $x \to a$ iken *sonsuz büyük fonksiyon* denir.

Tanım 3.1.1.3 (*o-küçük*) [2]. $\forall x \in X \setminus \{a\}$ için $g(x) \neq 0$ ve $x \to a$ iken $f(x) = o(1)$ ve $g(x) = o(1)$ olsun. Eğer, $0 \neq k \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{\left(g(x)\right)^p} = k$$

olacak şekilde $p > 0$ sayısı varsa $x \to a$ iken f fonksiyonu g fonksiyonuna göre *p. mertebeden sonsuz küçüktür* denir.

Eğer, $p = 1$ ise $x \to a$ iken f ve g fonksiyonları *aynı mertebeden sonsuz küçük fonksiyonlardır* denir. Yani, $x \to a$ iken f ve g fonksiyonları *aynı hızla sıfıra yaklaşırlar* denir.

Eğer, $p = k = 1$ ise $x \to a$ iken f ve g fonksiyonları *denk sonsuz küçük fonksiyonlardır* denir. $x \to a$ iken $f \sim g$ ile gösterilir.

Eğer, $p = 1$ ve $k = 0$ ise, yani $x \to a$ iken $f(x) = o(1)$ ve $g(x) = o(1)$ olmak üzere

$$\lim_{x\to a}\frac{f(x)}{g(x)} = 0$$

ise bu durumda f fonksiyonu g fonksiyonuna göre *yüksek mertebeden sonsuz küçüktür* denir. $x \to a$ iken $f = o(g)$ biçiminde gösterilir. Bu gösterim, $x \to a$ iken f fonksiyonu g fonksiyonuna göre *o-küçüktür* diye okunmaktadır.

Dikkat edelim ki; $o(g)$ sembolü genellikle belli bir fonksiyon olmayıp, $x \to a$ iken g fonksiyonuna göre yüksek mertebeden sonsuz küçük olan bütün fonksiyonlardan oluşan bir kümedir. Bu nedenle, $x \to a$ iken $f = o(g)$ eşitliği yalnızca soldan sağa yönde okunmaktadır. Buna göre, $x \to 0$ iken $x^2 = o(x)$ eşitliği doğrudur, fakat $x \to 0$ iken $h = o(x)$ şeklindeki her h fonksiyonu x^2 fonksiyonuna eşit değildir. Örneğin, $x \to 0$ iken $x^2 = o(x)$ ve $x^3 = o(x)$ eşitliği doğru olmasına rağmen, $x^3 \neq x^2$ dir.

Tanım 3.1.1.4 (*O-Büyük*) [2]. $X \subset \mathbb{R}$ kümesi, $f, g : X \to \mathbb{R}$ fonksiyonları ve $a \in X$ noktası verilsin. Eğer $\alpha : X \to \mathbb{R}$ herhangi bir $\delta > 0$ için $\overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ kümesi üzerinde sınırlı bir fonksiyon olmak üzere $\forall x \in \overset{\circ}{U}_\delta(a) \cap X$ için $f(x) = \alpha(x) g(x)$ ise $x \in X$ için $x \to a$ iken $f = O(g)$ şeklinde yazılır. Bu gösterim, $x \to a$ iken f fonksiyonu g fonksiyonuna göre *O-büyüktür* diye okunmaktadır.

Bu tanıma göre; $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \cap X$ için

$$|f(x)| \leq c|g(x)|$$

olacak şekilde bir $c \geq 0$ sayısı varsa, $x \to a$ iken $f = O(g)$ dir. Ayrıca, f fonksiyonu $\overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \cap X$ üzerinde sınırlı ise $x \to a$ iken $f = O(1)$ şeklinde yazılır.

Örnek 3.1.1.1 [2]. $x \to \infty$ iken $\left(\frac{1}{x} + \sin x\right)x = O(x)$ dir. Gerçekten, $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{1}(\infty)$ için

$$\left|\left(\frac{1}{x} + \sin x\right)x\right| \leq \left(\left|\frac{1}{x}\right| + |\sin x|\right)|x| \leq 2|x|$$

dir.

o-küçük ve *O*-Büyük sembollerinin bazı özellikleri aşağıdaki gibidir [2,58]:

i) $o(f) \pm o(f) = o(f)$, $o(f).o(g) = o(f.g)$, $O(f) + O(f) = O(f)$,

ii) $o(f) = O(f)$, $o(f).O(g) = o(fg)$, $o(f) + O(f) = O(f)$,

iii) $n \geq 2 (n \in \mathbb{N})$ olmak üzere her $k = \overline{1, n-1}$ için $o(f^n) = o(f^k)$,

iv) $\forall n \in \mathbb{N}$ için $(o(f))^n = o(f^n)$, $f^n.o(f) = o(f^{n+1})$ ve $\frac{o(f^n)}{f} = o(f^{n-1})$,

v) $\forall x \in \overset{\circ}{U}_{\delta}(a) \cap X$ için $g(x) \neq 0$ ise $x \to a$ iken $\frac{O(f)}{g} = O\left(\frac{f}{g}\right)$,

vi) $f_1(x) = O(g_1(x))$ ve $f_2(x) = O(g_2(x))$ olsun:

a) $f_1(x) + f_2(x) = O(max\{g_1(x), g_2(x)\})$.

b) $O(f_1(x)).O(f_2(x)) = O(f_1(x).f_2(x))$.

c) $k \neq 0$, $O(kf_1(x)) = O(f_1(x))$.

d) $O(k + f_1(x)) = O(f_1(x))$.

e) $f_1(x) \times f_2(x) = O(g_1(x) \times g_2(x))$.

vii) $f_1(x)$ ve $f_2(x)$ fonksiyonları $\forall x \geq 0$ tam sayısı için pozitif fonksiyonlar olmak üzere $f(x) = f_1(x) + f_2(x)$ ve $L \geq 0$ için $\lim_{x \to \infty} \frac{f_2(x)}{f_1(x)} = L$ olsun. Bu durumda, $f(x) = O(f_1(x))$ şeklindedir.

viii) $f = O(g)$ ve $g = O(h)$ ise $f = O(h)$ dir.

ix) $f(x)$ ve $g(x)$ sonlu bir aralıkta integrallenebilir fonksiyonlar olsunlar ve $f(x)=O(g(x))$ olsun. Bu durumda,

$$\int_{x_0}^{x} f(t)dt = O\left(\int_{x_0}^{x} |g(t)|dt\right)$$

şeklindedir.

x) Verilen bir f fonksiyonu için

a) $\dfrac{1}{1+O(f(x))}=1+O(f(x)),$

b) $\log\lfloor 1+O(f(x))\rfloor = O(f(x)),$

c) $\exp\lfloor O(f(x))\rfloor = 1+O(f(x)).$

3.1.2. Fonksiyonel Diziler için Yakınsaklık Kavramı

Bu bölümde, I ile reel sayıların bir alt kümesi gösterilecektir.

Tanım 3.1.2.1 (*Noktasal Yakınsaklık*) [1]. $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi, I üzerinde tanımlı kompleks değerli fonksiyonların bir dizisi ve $f: I \to \mathbb{C}$ bir fonksiyon olsun. Eğer, her bir $x \in I$ için $\{f_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi $\mathbb{C}$ içinde $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak ise, "$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi I aralığında f fonksiyonuna *noktasal yakınsaktır* " denir. $f_n \underset{x\in I}{\to} f \ (n\to\infty)$ ile gösterilir.

Bu tanıma göre, $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisinin f fonksiyonuna noktasal yakınsak olması, her bir $x \in I$ ve her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_\varepsilon = n(x,\varepsilon)$ doğal sayısının varlığıdır ki, $n \geq n_\varepsilon$ olduğunda $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ eşitsizliği sağlanır.

Tanım 3.1.2.2 (*Düzgün Yakınsaklık*) [1]. Her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $n_\varepsilon = n(\varepsilon)$ doğal sayısı vardır (yani n_ε sayısı $x \in I$ noktasından bağımsız olarak sadece ε sayısına bağlı seçilebiliyor ise), öyle ki $\forall x \in I$ ve $\forall n \geq n_\varepsilon$ için $|f_n(x)-f(x)| < \varepsilon$ sağlanırsa "$\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi I aralığında f fonksiyonuna *düzgün yakınsaktır*" denir ve $f_n \underset{x\in I}{\rightrightarrows} f \ (n\to\infty)$ ile gösterilir.

Açıktır ki, düzgün yakınsak bir fonksiyon dizisi aynı zamanda noktasal yakınsaktır. Fakat, bu hükmün tersi doğru değildir.

Teorem 3.1.2.1 (Düzgün Yakınsaklık için Cauchy Kriteri) [1]. Aşağıdakiler denktir:

i) $\{f_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi I aralığında düzgün yakınsaktır.

ii) $\forall \varepsilon > 0$ için öyle bir $n_\varepsilon = n(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ sayısı vardır ki, $n, m \geq n_\varepsilon$ olduğunda

$$\sup_{x \in I} \left| f_n(x) - f_m(x) \right| < \varepsilon$$

dır.

Tanım 3.1.2.3 (*Fonksiyon Serileri için Yakınsaklık Kavramları*) [1]. $\{f_k\}_{k=1}^{\infty}$ dizisi, I aralığında tanımlı kompleks değerli fonksiyonların bir dizisi olsun. $s_n = \sum_{k=1}^{n} f_k$ biçiminde tanımlanan $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisine $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisinin *kısmi toplamlar dizisi* denir. Açıktır ki, $\{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar dizisi I üzerinde tanımlı kompleks değerli fonksiyonların bir dizisidir. O zaman aşağıdaki tanımlar verilebilir: $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi I aralığında

noktasal yakınsaktır:$\Leftrightarrow \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi I aralığında noktasal yakınsaktır,

düzgün yakınsaktır:$\Leftrightarrow \{s_n\}_{n=1}^{\infty}$ dizisi I aralığında düzgün yakınsaktır,

mutlak yakınsaktır :$\Leftrightarrow \forall x \in I$ için $\sum_{n=1}^{\infty} \left| f_n(x) \right| < \infty$ dır,

norm yakınsaktır:$\Leftrightarrow \sum_{n=1}^{\infty} \| f_n \|_\infty < \infty$ dır

denir.

Yukarıdaki tanımlardan aşağıdaki sonuçlar elde edilir:

Sonuç 3.1.2.1 [1].

i) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mutlak yakınsaktır $\Rightarrow \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ noktasal yakınsaktır,

ii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ düzgün yakınsaktır $\overset{\not\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mutlak yakınsaktır,

iii) $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ norm yakınsaktır $\overset{\Rightarrow}{\not\Leftarrow} \sum_{n=1}^{\infty} f_n$ mutlak yakınsaktır.

Teorem 3.1.2.2 (Weierstrass Majorant Kriteri) [1]. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $f_n : I \to \mathbb{C}$ sınırlı fonksiyon olsun. Her bir $n \in \mathbb{N}$ için $\| f_n \|_\infty \leq a_k$ olmak üzere $\sum_{n=1}^{\infty} a_n$ serisi $\mathbb{R}$ içinde yakınsak ise $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi norm yakınsaktır. Dolayısıyla, $\sum_{n=1}^{\infty} f_n$ serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

3.2. Lineer Diferansiyel Operatörler

3.2.1. Lineer Diferansiyel İfade ve Sınır Koşulları

Tanım 3.2.1.1 (*Lineer Diferansiyel İfade*) [11].

$$l(y)=p_0(x)y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y \tag{3.1}$$

şeklindeki bir ifadeye *lineer diferansiyel ifade* denir. $p_0(x),p_1(x),\ldots,p_n(x)$ fonksiyonlarına lineer diferansiyel ifadenin katsayıları ve n sayısına da lineer diferansiyel ifadenin *mertebe*si denir.

$\frac{1}{p_0(x)},p_1(x),p_2(x),\ldots,p_n(x)$ fonksiyonlarının $[a,b]$ aralığında sürekli olduğu kabul edilir. Bazı durumlarda, bu fonksiyonlar üzerine daha fazla koşul eklenebilir.

$[a,b]$ aralığında n.mertebeye kadar (n dahil) sürekli türevlere sahip bütün $y_n(x)$ fonksiyonlarının uzayı $C^{(n)}[a,b]$ ile gösterilir. Her bir $y\in C^{(n)}[a,b]$ için, $l(y)$ diferansiyel ifadesi iyi tanımlıdır ve $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyonu temsil eder.

Tanım 3.2.1.2 (*Sınır Koşulları*) [11]. $[a,b]$ aralığının a ve b sınır noktalarında y fonksiyonunun değerlerini ve onun ardışık ilk $(n-1)$ türevleri aşağıdaki gibi işaretlensin:

$$\begin{aligned} y_a=y(a),y_a'=y'(a),y_a''=y'(a),\ldots,y_a^{(n-1)}=y^{(n-1)}(a),\\ y_b=y(b),y_b'=y'(b),y_b''=y'(b),\ldots,y_b^{(n-1)}=y^{(n-1)}(b). \end{aligned} \tag{3.2}$$

$U(y)$, (3.2) değişkenlerine bağlı bir lineer form olsun:

$$U(y)=\sum_{k=0}^{n-1}\alpha_k y^{(k)}(a)+\sum_{k=0}^{n-1}\beta_k y^{(k)}(b). \tag{3.3}$$

Burada, $\alpha_k,\beta_k\in\mathbb{C}$ $\left(k=\overline{0,n-1}\right)$ dir. Eğer, (3.3) formunda birkaç tane $U_\nu(y)$ $\left(\nu=\overline{1,m}\right)$ lineer formları verilmiş ve $y\in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonları üzerine

$$U_\nu(y)=0 \quad \left(\nu=\overline{1,m}\right) \tag{3.4}$$

koşulları yüklenmiş ise (3.4) koşullarına $y\in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonlarının sağladığı *sınır koşulları* denir.

(3.4) sınır koşullarını sağlayan tüm $y\in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonlarının kümesi D ile gösterilsin. D kümesi, $C^{(n)}[a,b]$ uzayının lineer bir alt uzayıdır. (3.4) koşulları yoksa veya (3.4) koşullarının tüm katsayıları sıfırsa $D=C^{(n)}[a,b]$'dir.

Tanım 3.2.1.3 (*Lineer Diferansiyel Operatör*) [11]. (3.1) biçiminde tanımlı $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.4) sınır koşullarıyla tanımlı bir D alt uzayı verilsin. Bu durumda

$$L: D \to C[a,b], \quad L(y) = l(y)$$

şeklinde tanımlanan L operatörüne, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.4) sınır koşullarıyla tanımlanan bir *lineer diferansiyel operatör* denir.

Bir diferansiyel ifade, sınır koşullarının seçilme şekline bağlı olarak çeşitli diferansiyel operatörler üretebilir.

(3.4) sınır koşullarından bazıları, diğerlerinin lineer kombinasyonu olarak yazılabilir. $U_\nu(y)\ \left(\nu = \overline{1,m}\right)$ ifadelerinin lineer bağımsız olsun. Belirtmek gerekir ki, $U_\nu(y)\ \left(\nu = \overline{1,m}\right)$ ifadelerinin katsayılar matrisinin rankı m'e eşit olur. $m = 2n$ için (3.4) denklemleri

$$y_a = y_a' = y_a'' = \ldots = y_a^{(n-1)} = y_b = y_b' = y_b'' = \ldots = y_b^{(n-1)} = 0$$

denklemlerine denktir.

Sınır koşullarının geometrik yorumu şu şekilde verilebilir: (3.2) değişkenlerinden oluşan $\left(y_a, y_a', y_a'', \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y_b', y_b'', \ldots, y_b^{(n-1)}\right)$ ifadesi $\mathbb{R}^{2n}$ uzayında bir vektör olarak bakılabilir.

3.2.2. Homojen Sınır Değer Problemi

Tanım 3.2.2.1 (*Homojen Sınır Değer Problemi*) [11].

$$l(y) = 0, \tag{3.5}$$

$$U_\nu(y) = 0\ \left(\nu = \overline{1,m}\right) \tag{3.6}$$

koşullarını sağlayan bir $y \in C^{(n)}[a,b]$ fonksiyonunun bulunması problemine *homojen sınır değer problemi* denir. Eğer, L operatörü $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.6) sınır koşullarıyla tanımlanmış ise, o halde homojen sınır değer problemi L'yi sağlayan bir y fonksiyonu için çözülmüş olur. Aynı zamanda, (3.5)-(3.6) problemi

$$L(y) = 0 \tag{3.7}$$

ile de gösterilebilir.

Tanım 3.2.2.2 (*Çözüm-Aşikar Çözüm-Aşikar Olmayan Çözüm*) [11]. (3.7) problemini sağlayan her bir fonksiyona bu problemin bir *çözümü* denir. Açıktır ki, (3.7) probleminin en az bir çözümü vardır. Yani, $y \equiv 0$ fonksiyonu (3.7) probleminin daima bir çözümüdür. Bu çözüme homojen sınır değer probleminin *aşikar çözümü* denir. Aksine, sıfırdan farklı çözümlere de *aşikar olmayan çözümler* denir.

Homojen olmayan sınır değer probleminin aşikar olmayan çözümlerinin varlığı aşağıda araştırılmıştır [11]:

$y_k \left(k=\overline{1,n}\right)$ fonksiyonları, $l(y)=0$ diferansiyel denkleminin lineer bağımsız çözümleri olsunlar. Lineer diferansiyel denklemler teorisinden bilindiği üzere, $l(y)=0$ denkleminin her hangi bir çözümü aynı zamanda (3.7) probleminin bir çözümü olduğundan

$$y=\sum_{k=1}^{n} c_k y_k$$

biçiminde ifade edilebilir. Burada, $c_k \left(k=\overline{1,n}\right)$ keyfi sabitlerdir. Bu çözüm, (3.6) sınır koşullarını sağladığından $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitlerine göre

$$\sum_{k=1}^{n} c_k U_\nu\left(y_k\right)=0 \quad \left(\nu=\overline{1,m}\right) \tag{3.8}$$

homojen lineer denklemler sistemi elde edilir.

$$U=\begin{pmatrix} U_1\left(y_1\right) & \cdots & U_1\left(y_n\right) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_m\left(y_1\right) & \cdots & U_m\left(y_n\right) \end{pmatrix} \tag{3.9}$$

matrisinin rankı r olsun. O halde, $c_1, c_2, \dots, c_n$ sabitleri için (3.8) homojen lineer denklemler sisteminin tam $n-r$ sayıda lineer bağımsız çözümü vardır. Bunlar sınır değer probleminin $n-r$ sayıda lineer bağımsız çözümüne uygundur. Böylece şu sonuçlara varılabilir [11]:

i) Eğer U matrisinin rankı r'ye eşit ise (3.7) probleminin tam $n-r$ sayıda lineer bağımsız çözümü vardır.

ii)

a) $r<n$ ise ve yalnız böyle ise (3.7) probleminin aşikardan farklı çözümü vardır.

b) $m<n$ ise (3.7) probleminin aşikardan farklı çözümü vardır.

c) $n=m$ ise (3.7) probleminin aşikardan farklı çözümünün olması için gerek ve yeter şart $\det U=0$ olmasıdır. Burada, U matrisi (3.9) ile tanımlanmıştır.

U matrisinin rankına, sınır değer probleminin *rankı* denir.

3.2.3. Lagrange Formülü ve Eşlenik Diferansiyel İfade

(3.1) diferansiyel ifadesinin $p_k(x)$ katsayı fonksiyonları, $p_k \in C^{(n-k)}[a,b] \quad \left(k=\overline{0,n}\right)$ koşullarını sağlasınlar. $y, z \in C^{(n)}[a,b]$ keyfi iki fonksiyon olsun. $k-$kez kısmi integrasyon alınarak

$$\int_a^b p_{n-k}\overline{z}y^{(k)}dx = \Big[p_{n-k}\overline{z}y^{(k-1)} - \left(p_{n-k}\overline{z}\right)' y^{(k-2)} + \ldots + (-1)^{k-1}\left(p_{n-k}\overline{z}\right)^{(k-1)} y \Big]_a^b + \\ + (-1)^k \int_a^b y\left(p_{n-k}\overline{z}\right)^{(k)} dx \tag{3.10}$$

elde edilir. Burada, $\overline{z} = \overline{z(x)}$ ile $z = z(x)$ fonksiyonunun kompleks eşleniği gösterilir. (3.10)'de $k = n, n-1, \ldots, 1, 0$ değerleri yazılıp, elde edilen eşitlikler taraf tarafa toplanırsa

$$\int_a^b l(y)\overline{z}\,dx = P(\eta,\zeta) + \int_a^b y\overline{l^*(z)}dx \tag{3.11}$$

bulunur. Burada,

$$l^*(z) = (-1)^n\left(\overline{p}_0 z\right)^{(n)} + (-1)^{n-1}\left(\overline{p}_1 z\right)^{(n-1)} + \ldots + \overline{p}_n z \tag{3.12}$$

ve $P(\eta,\zeta)$,

$$\eta = \left(y_a, y'_a, y''_a, \ldots, y_a^{(n-1)}, y_b, y'_b, y''_b, \ldots, y_b^{(n-1)}\right), \\ \zeta = \left(z_a, z'_a, z''_a, \ldots, z_a^{(n-1)}, y_b, z'_b, z''_b, \ldots, z_b^{(n-1)}\right) \tag{3.13}$$

değişkenlerine bağlı bilineer bir ifadedir [11].

Tanım 3.2.3.1 (*Eşlenik Diferansiyel İfade-Lagrange Formülü*) [11]. (3.12) ile tanımlı $l^*(z)$ diferansiyel ifadesine, $l(y)$ diferansiyel ifadesinin *eşlenik diferansiyel ifadesi*; (3.11) formülüne ise *Lagrange formülü* denir.

$$\int_a^b l^*(z)\overline{y}dx$$

integralinde, (3.10) eşitliği üzerinde yapılan işlemlere benzer işlemler yapılırsa

$$\int_a^b l^*(z)\overline{y}\,dx = Q(\eta,\zeta) + \int_a^b z\overline{l(y)}dx$$

biçiminde bir eşitlik elde edilir. Burada, $Q(\eta,\zeta)$ifadesi (3.13) değişkenlerine bağlı bilineer bir ifadedir. Böylece, $l(y)$ diferansiyel ifadesi $l^*(z)$ eşlenik diferansiyel ifadesinin eşleniği olur. Yani, $l^{**}(y) = l(y)$ dir. Başka bir deyişle, $l(y)$ ve $l^*(z)$ diferansiyel ifadeleri karşılıklı eşleniktir [11].

Ayrıca, eşlenik diferansiyel ifadenin (3.12) tanımından

$$\left(l_1 + l_2\right)^* = l_1^* + l_2^*, \tag{3.14}$$

$$\left(\lambda l\right)^* = \overline{\lambda} l^* \tag{3.15}$$

eşitlikleri elde edilir [11]. Burada, λ reel veya kompleks bir sayıdır.

Tanım 3.2.3.2 (*Özeşlenik Diferansiyel İfade*) [11]. Eğer, $l^* = l$ ise $l(y)$ diferansiyel ifadesine *özeşlenik diferansiyel ifade* denir.

(3.14) ve (3.15) ifadelerinden aşağıdaki sonuçlara varılır [11]:

i) Özeşlenik diferansiyel ifadelerin toplamı da bir özeşlenik diferansiyel ifadedir.

ii) Özeşlenik bir diferansiyel ifadenin bir reel sayıyla çarpımı da özeşlenik diferansiyel ifadedir.

Aşağıdaki teorem, özeşlenik bir diferansiyel ifadenin en genel şeklini verir:

Teorem 3.2.3.1 [11]. Herhangi bir özeşlenik diferansiyel ifade,

$$l_{2\nu}(y) = \left(py^{(\nu)}\right)^{(\nu)}, \quad l_{2\nu-1}(y) = \frac{1}{2}\left[\left(ipy^{(\nu-1)}\right)^{(\nu)} + \left(ipy^{(\nu)}\right)^{(\nu-1)}\right]$$

şeklindeki özeşlenik diferansiyel ifadelerin toplamıdır. Burada, p fonksiyonu $[a,b]$ aralığında reel değerli bir fonksiyondur.

Sonuç 3.2.3.1 [11]. Reel katsayılı herhangi bir özeşlenik diferansiyel ifade,

$$l(y) = \left(p_0 y^{(\mu)}\right)^{(\mu)} + \left(p_1 y^{(\mu-1)}\right)^{(\mu-1)} + \ldots + \left(p_{\mu-1} y'\right)' + p_\mu y$$

şeklinde yazılabilir. Burada, p_k $\left(k = \overline{0,\mu}\right)$ fonksiyonları reel değerli fonksiyonlardır.

3.2.4. Eşlenik Sınır Değer Problemi

$U_1(y), U_2(y), \ldots, U_m(y)$ ifadeleri (3.2) değişkenlerine bağlı lineer bağımsız ifadeler olsun. $m \le 2n$ olduğu durumda, $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ ifadelerinden oluşan $2n$ sayıda lineer bağımsız ifade elde etmek için $U_{m+1}, U_{m+2}, \ldots, U_{2n}$ ifadelerini eklemek gerekir. Bu ifadeler lineer bağımsız olduğundan, (3.2) değişkenleri $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ ifadelerinin lineer kombinasyonu olarak ifade edilebilir. Bu ifadeler, (3.13) değişkenleriyle tanımlı $P(\eta,\zeta)$ bilineer formunda yerine yazılırsa, $P(\eta,\zeta)$ bilineer formu $U_1, U_2, \ldots, U_{2n}$ değişkenlerine bağlı lineer ve homojen bir form olur. Ayrıca, $P(\eta,\zeta)$ bilineer formu $V_{2n}, V_{2n-1}, \ldots, V_1$ ile gösterilecek olan katsayıları $\overline{z}_a, \overline{z}'_a, \overline{z}''_a, \ldots, \overline{z}_a^{(n-1)}, \overline{z}_b, \overline{z}'_b, \overline{z}''_b, \ldots, \overline{z}_b^{(n-1)}$ değişkenlerine bağlı lineer bağımsız homojen ifadelerdir. O halde (3.11) Lagrange formülü

$$\int_a^b l(y)\overline{z}\,dx = U_1(y)V_{2n}(z) + U_2(y)V_{2n-1}(z) + \ldots + U_{2n}(y)V_1(z) + \int_a^b y\overline{l^*(z)}\,dx \tag{3.16}$$

halini alır.

İspat edilebilir ki, $V_\nu(z)$ $\left(\nu = \overline{1,2n}\right)$ ifadeleri lineer bağımsızdır.

Tanım 3.2.4.1 (*Eşlenik Sınır Koşulları*) [11].

$$V_1 = 0, V_2 = 0, \ldots, V_{2n-m} = 0 \tag{3.17}$$

sınır koşullarına (veya bunlara denk sınır koşullarına)

$$U_1 = 0, U_2 = 0, \ldots, U_m = 0 \tag{3.18}$$

sınır koşullarının *eşlenik sınır koşulları* denir. Eğer, (3.17) koşulları (3.18) koşullarına denk ise (3.17) koşullarına *özeşlenik sınır koşulları* denir.

Tanım 3.2.4.2 (*Eşlenik Diferansiyel Operatör*) [11]. L, $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve (3.18) sınır koşullarıyla tanımlanmış bir operatör olsun. $l^*(z)$ eşlenik diferansiyel ifadesi ve (3.17) eşlenik sınır koşullarıyla tanımlanmış operatöre, L operatörünün *eşlenik diferansiyel operatör*ü denir ve L^* ile gösterilir.

$$(y,z) = \int_a^b y(x)\overline{z(x)}dx$$

işaretlemesi yapılırsa, (3.16), (3.17) ve (3.18) eşitliklerinden

$$\int_a^b Ly\bar{z}dx = \int_a^b y\overline{L^*z}dx$$

veya

$$(Ly,z) = (y,L^*z) \tag{3.19}$$

yazılabilir.

Belirtelim ki, eşlenik operatörlerin tanımından L operatörü L^* eşlenik operatörünün eşleniği olur. Başka bir deyişle, $L^{**} = L$ olur.

Eğer, $L^* = L$ ise L operatörüne *özeşlenik operatör* denir. Bir L operatörünün özeşlenik operatör olması için gerek ve yeter koşul bu operatörün özeşlenik diferansiyel ifade ve özeşlenik sınır koşullarıyla tanımlanmasıdır.

L özeşlenik operatör ise (3.19) eşitliği,

$$(Ly,z) = (y,Lz)$$

biçiminde yazılır.

Tanım 3.2.4.3 (*Eşlenik Sınır Değer Problemi*) [11]. L^* operatörü L operatörüne eşlenik ise,

$$L^*z = 0 \tag{3.20}$$

homojen sınır değer problemine, (3.7) homojen sınır değer probleminin *eşlenik sınır değer problemi* denir.

(3.20) homojen sınır değer problemi daha açık şekilde,

$$\begin{cases} l^*(z)=0 \\ V_\nu(z)=0, \quad \left(\nu=\overline{1,2n-m}\right) \end{cases}$$

olarak yazılabilir.

3.2.5. Fourier Metodu

Fourier metodu veya değişkenlerin ayrılması yöntemi olarak bilinen metot lineer diferansiyel denklemlerin çözümlerinin araştırılmasında oldukça yaygın bir kullanıma sahiptir. Bu metodu, ikinci mertebeden iki bağımsız değişkenli

$$A(x,y)u_{xx}+2B(x,y)u_{xy}+C(x,y)u_{yy}+D(x,y)u_x+E(x,y)u_y+F(x,y)u=0 \tag{3.21}$$

lineer kısmi diferansiyel denklem için anlatalım [4]:

Bu metot gereğince, (3.21) denkleminin

$$u(x,y)=X(x)Y(y) \tag{3.22}$$

biçiminde çözümleri aransın. (3.22) fonksiyonu ve türevleri (3.21) denkleminde yerine yazılırsa

$$A(x,y)X''Y+2B(x,y)X'Y'+C(x,y)XY''+D(x,y)X'Y+E(x,y)XY'+F(x,y)XY=0 \tag{3.23}$$

elde edilir. Burada, $X=X(x)$ ve $Y=Y(y)$ dir. Eğer (3.23) denklemi

$$\frac{1}{X}f(x,D_x)X=\frac{1}{Y}g(y,D_y)Y \tag{3.24}$$

biçiminde yazılabilirse, (3.21) kısmi diferansiyel denklemine *değişkenlerine ayrılabilirdir* denir. Burada, $f(x,D_x)$ ve $g(y,D_y)$ ifadeleri diferansiyel operatörlerdir. (3.24) denkleminin sol tarafı yalnızca x değişkeninin bir fonksiyonu, sağ tarafı ise yalnızca y değişkeninin bir fonksiyonudur. Bu şekilde farklı değişkenlere bağlı iki fonksiyon eşit olması yalnızca her iki fonksiyonunun aynı bir λ sabitine eşit olmasıyla mümkündür. Bu nedenle, (3.24) denklemi

$$\frac{1}{X}f(x,D_x)X=\frac{1}{Y}g(y,D_y)Y=\lambda$$

biçiminde yazılır. Buradan,

$$f(x,D_x)X-\lambda X=0;\ g(y,D_y)Y-\lambda Y=0 \tag{3.25}$$

biçiminde iki adet ikinci mertebeden adi diferansiyel denklem elde edilir.

Sonuç olarak, (3.21) lineer kısmi diferansiyel denkleminin $u(x,y)$ çözümünün bulunması için (3.25) adi diferansiyel denklemlerinin hangi λ değerleri için aşikar olmayan bir çözüme sahip olduğunun bulunması problemine indirgenir. Böyle problemlere *özdeğer problemleri* denir.

Bu açıklamayı bir örnekle daha anlaşılır hale getirelim[11]:

$$\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}=\frac{\partial^n u}{\partial x^n}+p_1(x)\frac{\partial^{n-1}u}{\partial x^{n-1}}+\ldots+p_n(x)u, \quad a\le x\le b \tag{3.26}$$

kısmi diferansiyel denklemi,

$$u\big|_{t=0}=f(x); \quad \frac{\partial u}{\partial t}\bigg|_{t=0}=\varphi(x) \tag{3.27}$$

başlangıç koşulları ve

$$\sum_{v=0}^{n-1}\alpha_{jv}\left(\frac{\partial^v u}{\partial x^v}\right)_{x=a}+\sum_{v=0}^{n-1}\beta_{jv}\left(\frac{\partial^v u}{\partial x^v}\right)_{x=b}=0, \quad j=\overline{1,n} \tag{3.28}$$

sınır koşulları ile tanımlanmış sınır değer probleminin çözümünü Fourier metoduyla araştıralım. (3.26) denkleminin (3.28) koşullarını sağlayan çözümü

$$u(x,t)=y(x)(A\cos\lambda t+B\sin\lambda t) \tag{3.29}$$

biçimindedir. (3.29) fonksiyonu (3.26) denklemi ve (3.28) sınır koşullarında dikkate alınırsa $y(x)$ fonksiyonu

$$l(y)\equiv\frac{d^n y}{dx^n}+p_1(x)\frac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}}+\ldots p_n(x)y=-\lambda^2 y \tag{3.30}$$

denklemi ve

$$U_j(y)=\sum_{v=0}^{n-1}\alpha_{jv}y_a^{(v)}+\sum_{v=0}^{n-1}\beta_{jv}y_b^{(v)}=0 \tag{3.31}$$

sınır koşullarını sağlar.

Eğer $y(x)\neq 0$ ise, $y(x)$ fonksiyonu (3.30)-(3.31) sınır değer probleminin $-\lambda^2$ özdeğerine uygun özfonksiyonudur. Bu nedenle, (3.30)-(3.31) sınır değer probleminin bütün özdeğerleri

$$-\lambda_1^2,-\lambda_2^2,-\lambda_3^2\ldots$$

ve bu özdeğerlere uygun özfonksiyonları da

$$y_1(x),y_2(x),y_3(x),\ldots$$

biçiminde olsun. O halde, (3.26) denklemi ve (3.28) sınır koşullarını sağlayan

$$u(x,t)=\sum_{n=1}^{\infty}y_n(x)(A_n\cos\lambda_n t+B_n\sin\lambda_n t)$$

serisi elde edilir. Bu seri, (3.27) başlangıç koşullarını da sağlamalıdır. Bu nedenle, (3.27) başlangıç koşullarından ilkinde dikkate alınırsa

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}A_n y_n(x)$$

elde edilir. Bu denklem, verilmiş bir $f(x)$ fonksiyonunun (3.30)-(3.31) sınır değer probleminin özfonksiyonlar sistemi üzerine seri ayrışımını gösterir.

3.3. Bir Diferansiyel Operatörün Kök Fonksiyonlar Sistemi

3.3.1. Özdeğer ve Özfonksiyon

Tanım 3.3.1.1 (*Özdeğer-Özfonksiyon*) [11]. L, n. mertebeden bir diferansiyel operatör ve $\lambda \in \mathbb{C}$ bir parametre olsun. Eğer,

$$L(y) = \lambda y \tag{3.32}$$

denklemini sağlayan aşikardan farklı bir y çözümü varsa, λ parametresine L operatörünün bir *özdeğer*i , y fonksiyonuna da λ özdeğerine karşılık gelen *özfonksiyon* denir.

Kabul edelim ki; L operatörü $l(y)$ diferansiyel ifadesi ve

$$U_1(y) = 0,\ U_2(y) = 0, \ldots, U_n(y) = 0 \tag{3.33}$$

sınır koşullarından oluşsun.

Bir y özfonksiyonu L operatörünün tanım kümesine ait olduğunda, o halde y özfonksiyonu (3.33) koşullarını sağlaması gerekmektedir. Dahası, $Ly = l(y)$ ve (3.32) denkleminden dolayı

$$l(y) = \lambda y \tag{3.34}$$

dir. Bu nedenle, bir L operatörünün özdeğerleri λ parametresinin öyle değerleridir ki,

$$l(y) = \lambda y, \quad U_\nu(y) = 0 \quad \left(\nu = \overline{1,m}\right) \tag{3.35}$$

homojen sınır değer problemi aşikar olmayan çözüme sahiptir. Bu aşikar olmayan çözümlerin her biri λ'ya ait bir özfonksiyondur.

Lemma 3.3.1.1 [11]. Aynı λ özdeğerine ait özfonksiyonların bir lineer kombinasyonu da λ'ya ait bir özfonksiyondur. Yani, $L(y_1) = \lambda y_1$ ve $L(y_2) = \lambda y_2$ ise, $L(c_1 y_1 + c_2 y_2) = \lambda(c_1 y_1 + c_2 y_2)$ dir. Burada, c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir.

Tanım 3.3.1.2 (*Geometrik Katlılık*) [11]. (3.34) diferansiyel denklemi, verilen bir λ parametresi için n'den fazla lineer bağımsız çözüme sahip olmadığından, aynı λ özdeğerine ait olan tüm özfonksiyonların kümesi boyutu n'den büyük olmayan bir uzay belirler. Bu uzayın boyutu, verilen λ özdeğeri için (3.35) probleminin lineer bağımsız çözümlerinin sayısıdır. Bu sayıya λ özdeğerinin *geometrik katı* denir.

$$y_1(x,\lambda),\ y_2(x,\lambda), \ldots, y_n(x,\lambda) \tag{3.36}$$

fonksiyonları, (3.34) diferansiyel denkleminin

$$y_j^{(\nu-1)}(a,\lambda) = \delta_{i,\nu} \qquad \left(j,\nu = \overline{1,n}\right)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümlerinin temel bir sistemi olsun. Lineer diferansiyel denklemlerin genel teoremlerinden açıktır ki, $[a,b]$ aralığında sabitlenmiş her bir x değeri için, (3.36) fonksiyonları, λ'nın tam fonksiyonlarıdır. (3.35) probleminin aşikar olmayan bir çözümünün olması için gerek ve yeter şart,

$$U=\begin{pmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_m(y_1) & \cdots & U_m(y_n) \end{pmatrix}$$

matrisinin r rankının n'den küçük olmasıdır. Buna ek olarak; $m<n$ ise o halde $r<n$ dir. Bu durumda, (3.35) sınır değer problemi λ'nın herhangi bir değeri için aşikar olmayan bir çözüme sahiptir. Diğer taraftan; $m\geq n$ ise o halde U matrisinin r rankının n'den küçük olması için gerek ve yeter şart derecesi n olan tüm alt matrislerinin sıfır olmasıdır. Ayrıca, U matrisinin tüm karesel alt matrislerinin determinantları, λ'nın tam fonksiyonlarıdır. Bu nedenle, sadece aşağıdaki durumlar mümkündür [11]:

i) U matrisinin derecesi n olan tüm alt matrislerinin determinantları özdeş olarak sıfırsa, λ parametresinin her bir değeri özdeğer olur.

ii) U matrisinin derecesi n olan en az bir alt matrisinin determinantı özdeş olarak sıfır olmasın. Bu durumda λ'nın, U matrisinin derecesi n olan tüm alt matrislerinin determinantlarını sıfır yapan değerlerinin her biri özdeğerdir.

Sonuç 3.3.1.1 [11]. L operatörünün özdeğerleri için olası iki durum mevcuttur:

i) Her bir λ sayısı L operatörünün özdeğeridir,

ii) L operatörü en fazla sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir ve bu özdeğerler sonlu yığılma noktalarına sahip değildir.

U matrisinde, $m=n$ durumu ayrıca incelenmesi gereken bir durumdur:

Tanım 3.3.1.3 (*Karakteristik Determinant*) [11].

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(y_1) & \cdots & U_1(y_n) \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ U_n(y_1) & \cdots & U_n(y_n) \end{vmatrix} \tag{3.37}$$

ile tanımlı determinanta, L operatörünün *karakteristik determinantı* denir. Yukarıdaki tartışmalardan (3.37) determinantı λ'nın tam fonksiyonudur.

$\Delta(\lambda)$ için aşağıdaki sonuçlar verilebilir [11]:

i) L operatörünün özdeğerleri, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarıdır. $\Delta(\lambda)$ özdeş olarak sıfırsa, her bir λ sayısı L operatörünün özdeğeridir.

ii) $\Delta(\lambda)$ özdeş olarak sıfır değilse, L operatörü en fazla sayılabilir sayıda özdeğere sahiptir ve bu özdeğerler sonlu yığılma noktalarına sahip değildir. Üstelik bu özdeğerler , $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının sıfırlarıdır.

Eğer $\Delta(\lambda)$'nın hiç sıfırı yoksa, L operatörünün de hiç özdeğeri yoktur.

iii) Eğer λ_0 özdeğeri, $\Delta(\lambda)$ karakteristik determinantının ν katlı sıfırıysa, λ_0 özdeğerinin geometrik katı ν 'den büyük değildir.

iv) Eğer λ_0 özdeğeri, $\Delta(\lambda)$'nın basit sıfırıysa, λ_0'ın geometrik katı bire eşittir. Yani λ_0 özdeğerine bir tek lineer bağımsız özfonksiyon karşılık gelir.

Tanım 3.3.1.4 (*Basit Özdeğer*) [11]. λ_0 özdeğeri $\Delta(\lambda)$'nın basit sıfırıysa, λ_0 özdeğerine *basit özdeğer* denir.

Tanım 3.3.1.5 (*Cebirsel Katlılık*) [11]. λ_0 sayısı L operatörünün bir özdeğeri olsun. O halde bu sayı $\Delta(\lambda)$ tam fonksiyonunun bir sıfır yeridir. Bu sebeple, $\Delta(\lambda)=(\lambda-\lambda_0)^k F(\lambda)$ olarak yazılabilir. Burada F bir tam fonksiyon, $F(\lambda_0)\neq 0$ ve $k\in\mathbb{N}$'dir. Bu biçimde tanımlanan k sayısına λ_0 özdeğerinin *cebirsel katlılığı* denir.

$k=1$ durumunda λ_0'a basit özdeğer denir. λ_0 özdeğerinin geometrik katlılığına ν diyelim. Gösterilebilir ki $\nu\leq k$'dır. Daha açık bir ifadeyle, λ_0 özdeğerine karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonların sayısı bu özdeğerin cebirsel katlılığını geçemez.

Teorem 3.3.1.1 [11]. λ parametresi L operatörünün geometrik katı p olan bir özdeğeriyse, $\overline{\lambda}$ değeri L^* eşlenik operatörünün geometrik katı p olan bir özdeğeridir.

Teorem 3.3.1.2 [11]. L ve L^* eşlenik operatörlerinin sırasıyla, λ ve μ özdeğerlerine uygun özfonksiyonları, $\lambda\neq\overline{\mu}$ ise ortogonaldir.

Teorem 3.3.1.3 [11]. Özeşlenik bir operatörün özdeğerleri reeldir.

Teorem 3.3.1.2 ve teorem 3.3.1.3 teoremlerinden aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 3.3.1.2 [11]. Bir özeşlenik diferansiyel operatörün farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları ortogonaldir.

Aynı özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonlardan Schmidt ortogonalleştirme yöntemiyle ortogonal özfonksiyonlar elde edebiliriz. Böylece, aynı özdeğere ait olan özfonksiyonların oluşturduğu uzayda ortogonal bir taban seçebiliriz.

3.3.2. Ek Fonksiyonlar

Tanım 3.3.2.1 (*Ek Fonksiyon*) [11]. λ_0 sayısı,

$$l(y)=\lambda y,\quad U_\nu(y)=0\ \left(\nu=\overline{1,n}\right)$$

probleminin bir özdeğeri, $\varphi(x)$ bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. Aşağıdaki koşullar sağlanırsa $\psi_1(x),\psi_2(x),\ldots,\psi_k(x)$ fonksiyonlarına $\varphi(x)$ özfonksiyonlarına karşılık gelen *ek fonksiyonlar* denir:

$$l(\psi_i)=\lambda_0\psi_i+\psi_{i-1}\ \left(i=\overline{1,k}\right),$$
$$U_\nu(\psi_i)=0\ \left(i=\overline{1,k},\ \nu=\overline{1,n}\right).$$

Burada, $\psi_0(x)=\varphi(x)$'tir.

L, lineer diferansiyel operatörü verilsin. Varsayalım ki bu operatörün özdeğerleri sayılabilir sayıdadır. O halde, bu özdeğerleri $\{\lambda_j\}_{j=1}^{\infty}$ olarak gösterebiliriz. λ_j özdeğerinin cebirsel katlılığını m_j ile, λ_j'ya karşılık gelen lineer bağımsız özfonksiyonları da $\varphi_{j,1}(x),\varphi_{j,2}(x),\ldots,\varphi_{j,p_j}(x)$ ile gösterelim. Açıktır ki, $p_j\le m_j$'dır. Açıktır ki, $E=\{\varphi_{j,p}(x)\,|\,j\in\mathbb{N},\ 1\le p\le p_j\}$ lineer bağımsızdır. E'ye L diferansiyel operatörünün *özfonksiyonlar sistemi* denir.

$\varphi_{j,p,1}(x),\varphi_{j,p,2}(x),\ldots,\varphi_{j,p,m_{j,p}-1}(x)$ fonksiyonları $\varphi_{j,p}$ $\left(j\in\mathbb{N},\ 1\le p\le p_j\right)$ özfonksiyonunun ek fonksiyonları olsunlar. Bu takdirde

$$m_{j,1}+m_{j,2}+\cdots+m_{j,p_j}=m_j$$

dir. Yani λ_j özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlar ve onlara karşılık gelen ek fonksiyonların toplam sayısı λ_j'nin cebirsel katlılığına eşittir. Gösterilebilir ki $R=\{\varphi_{j,p,i}(x)\,|\,j\in\mathbb{N},\ 1\le p\le p_j,\ 0\le i\le m_{j,p}-1\}$ lineer bağımsızdır. Burada, $\varphi_{j,p,0}(x)=\varphi_{j,p}(x)$'tir. R'ye L diferansiyel operatörünün *kök fonksiyonlar sistemi* denir.

3.4. Sturm-Liouville Operatörü

Uygulamalarda sık sık kullanılan temel operatörlerden birisi de Sturm-Liouville operatörü olarak bilinenen

$$L=-\frac{d^2}{dx^2}+q(x)$$

operatördür.

Burada, $q(x)$ fonksiyonu reel ve $[a,b]$ aralığında süreklidir. L operatörü için, $y(x)$ fonksiyonlarının kümesi belli diferansiyellenebilme koşullarıyla ve aynı zamanda a ve b uç noktaları üzerine konulan koşullarla belirlenir [12].

Sturm-Liouville operatörü için genellikle aşağıdaki üç tür sınır koşulu tanımlanmıştır [12]:

i) Ayrık sınır koşulları olarak bilinen

$$y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0,$$

$$y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0$$

sınır koşullarıdır. Burada, α ve β keyfi reel sayılardır.

ii) Periyodik sınır koşulları olarak bilinen

$$y(a) = y(b),\ y'(a) = y'(b);$$

ve anti-periyodik sınır koşulları olarak bilinen

$$y(a) = -y(b),\ y'(a) = -y'(b)$$

sınır koşullarıdır.

iii) Uçları kilitli veya bağlı sınır koşulları olarak bilinen

$$y(a) = y(b) = 0,$$

$$y'(a) = y'(b) = 0$$

sınır koşullarıdır.

Tanım 3.4.1 (*Sturm-Liouville Problemi*) [12].

$$Ly(x) = -y'' + q(x)y = \lambda y \tag{3.38}$$

$$\begin{aligned} y(a)\cos\alpha + y'(a)\sin\alpha = 0, \\ y(b)\cos\beta + y'(b)\sin\beta = 0 \end{aligned} \tag{3.39}$$

biçiminde tanımlanan sınır değer problemine *Sturm-Liouville problemi* denir. $[a,b]$ aralığı sonlu ve $q(x)$ fonksiyonu bu aralıkta toplanabilir ise (3.38)-(3.39) sınır değer problemine *regülerdir* denir. Diğer durumlarda, yani $[a,b]$ aralığının sonlu olmadığı veya $q(x)$ fonksiyonunun $[a,b]$ aralığında toplanabilir olmadığı veya bu iki durumun her ikisinin de geçerli olması halinde ise probleme *singülerdir* denir.

Tanım 3.4.2 [12]. (3.38)-(3.39) sınır değer problemi belli bir λ değeri için aşikar olmayan bir $y(x,\lambda)$ çözümüne sahipse, λ değerine (3.38)-(3.39) sınır değer probleminin bir *özdeğeri*, $y(x,\lambda)$ fonksiyonuna ise bu özdeğere karşılık gelen *özfonksiyon* denir.

(3.38)-(3.39) sınır değer probleminin formunu değiştirmeyen $t=\frac{x-a}{b-a}\pi$ dönüşümü yardımıyla $[a,b]$ aralığı $[0,\pi]$ aralığına dönüştürülebilir.

Lemma 3.4.1 [12]. (3.38)-(3.39) sınır değer probleminin $\lambda_1 \neq \lambda_2$ farklı özdeğerlerine karşılık gelen $y(x,\lambda_1)$ ve $y(x,\lambda_2)$ özfonksiyonları ortogonaldir. Yani,

$$\int_0^\pi y(x,\lambda_1)\,y(x,\lambda_2)\,dx = 0,\ \lambda_1 \neq \lambda_2.$$

Lemma 3.4.2 [12]. (3.38)-(3.39) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

3.5. Hilbert Uzaylarında Tabanlar

Tanım 3.5.1 (*Taban*) [56]. B bir Banach uzayı, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzaydaki vektörlerin bir dizisi olsun. Eğer, her bir $x \in B$ vektörü için

$$x=\sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j \tag{3.40}$$

şeklinde tek yolla belirli, B uzayındaki norma göre yakınsak olan bir seri ayrışımı varsa, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine B uzayının bir *tabanı* denir.(3.40) ayrışımında c_j katsayıları, $x \in B$ vektörüne bağlı lineer fonksiyonellerdir:

$$c_j=\psi_j(x). \tag{3.41}$$

Bu tanım bir H Hilbert uzayı için uygulanırsa (3.41) eşitliği,

$$c_j=(x,\psi_j)\ \ (\psi_j \in H\,;\, j=1,2,\ldots) \tag{3.42}$$

şeklinde yazılır. Ayrıca $x=\phi_k\ (k=1,2,\ldots)$ yazılırsa,

$$(\phi_k,\psi_j)=\delta_{kj}\quad (k,j=1,2,\ldots)$$

elde edilir. Burada, δ_{kj} Kronecker deltasıdır.

$\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ sistemi B uzayının bir tabanı olsun. $\mathbb{N}$'nin her bir θ permutasyonu için $\{\phi_{\theta(j)}\}_{j=1}^{\infty}$ sistemi de B'in bir tabanı ise $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ sistemine bir *koşulsuz taban*; aksi durumda *koşullu taban* denir.

Tanım 3.5.2 (*Biortogonal Diziler*) [56]. $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ ve $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$, H Hilbert uzayının elemanlarından oluşan iki dizi olsun. Eğer,

$$(\phi_j, \psi_k) = \delta_{jk} \quad (j,k = 1,2,\ldots)$$

ise bu dizilere *biortogonal diziler* denir.

H Hilbert uzayının $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ tabanına biortogonal olan $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi tek şekilde tanımlıdır [56].

(3.40) ve (3.42) eşitliklerinden görülür ki; bütün ψ_j $(j = 1,2,\ldots)$ vektörlerinin her birine ortogonal olan herhangi bir f vektörü özdeş olarak sıfırdır. Sonuçta herhangi bir tabana biortogonal olan dizi daima H Hilbert uzayında tamdır [56].

Teorem 3.5.1 [56]. H Hilbert uzayının herhangi bir $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ tabanına biortogonal olan $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi de bu uzayın bir tabanıdır.

Tanım 3.5.3 (*Sonlu Lineer Bağımsız Dizi-Minimal Dizi*) [57]. B bir Banach uzayı, $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine;

i) $\{x_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisinin her sonlu alt dizisi lineer bağımsız ise *sonlu lineer bağımsız*,

ii) eğer,

$$x_n \notin [x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots] \qquad (n = 1,2,\ldots; x_0 = 0)$$

ise *minimal* bir dizi denir. Burada, $[x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots]$ ifadesi $x_1, x_2, \ldots, x_{n-1}, x_{n+1}, \ldots$ elemanlarının gerdiği B uzayının bir alt uzayını temsil eder.

Tanım 3.5.4 (ω – Lineer Bağımsız Dizi) [56]. B bir Banach uzayı, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. Eğer,

$$\sum_{j=1}^{\infty} c_j \phi_j = 0$$

eşitliği,

$$0 < \sum_{j=1}^{\infty} \|c_j\|^2 \|\phi_j\|^2 < \infty$$

koşulu altında sağlanmıyorsa, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisine ω*-lineer bağımsız* dizi denir.

Sonuç 3.5.1 [57]. Her minimal dizi ω – lineer bağımsız dizidir ve her ω – lineer bağımsız dizi ise bir sonlu lineer bağımsız dizidir.

Teorem 3.5.2 [57]. B bir Banach uzayı, $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ bu uzayda bir dizi olsun. $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisinin minimal olması için gerek ve yeter şart bu diziye biortogonal olan bir $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisinin var olmasıdır.

$\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi H Hilbert uzayının ortonormal bir tabanı, A ise sınırlı ve tersi olan lineer bir operatör olsun. Bu durumda keyfi bir $f \in H$ vektörü için,

$$A^{-1}f = \sum_{j=1}^{\infty}\left(A^{-1}f,\phi_j\right)\phi_j = \sum_{j=1}^{\infty}\left(f, A^{*^{-1}}\phi_j\right)\phi_j$$

ayrışımı doğrudur. Bu nedenle,

$$f = \sum_{j=1}^{\infty}\left(f,\chi_j\right)\psi_j$$

yazılabilir. Burada,

$$\psi_j = A\phi_j\,,\ \ \chi_j = A^{*^{-1}}\phi_j \ \ \left(j = 1,2,...\right)$$

dir. Açıktır ki,

$$\left(\psi_j,\chi_k\right) = \delta_{jk} \ \ \left(j,k = 1,2,...\right)$$

dir. Bu nedenle,

$$f = \sum_{j=1}^{\infty}c_j\psi_j \tag{3.43}$$

ise

$$c_j = \left(f,\chi_j\right) \ \ \left(j = 1,2,...\right)$$

dir. Buna ek olarak, c_j katsayıları (3.43) ayrışımında tek türlü belirlidir [57].

Böylece, her sınırlı ve tersi mevcut lineer operatör, H Hilbert uzayının herhangi bir ortonormal tabanını bu uzayın başka bir tabanına dönüştürür.

Tanım 3.5.5 (Riesz Tabanı) [56]. H Hilbert uzayının yukarıdaki dönüşümle elde edilen $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ tabanına *ortonormal bir tabana denk tabanı* veya *Riesz tabanı* denir.

Sonuç 3.5.2 [57]. $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ bir Riesz tabanı ise

$$\{\hat{\psi}_j\}_{j=1}^{\infty} \quad \left(\hat{\psi}_j = \frac{\psi_j}{|\psi_j|};\ \ j = 1,2,\ldots\right)$$

birim vektörlerin dizisi de bir Riesz tabanıdır.

Teorem 3.5.3 (Bary, N. K.) [56]. H Hilbert uzayı olsun. Aşağıdakiler durumlar denktir:

i) $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayının bir Riesz tabanıdır.

ii) $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayının (f,g) iç çarpımına topolojik denk* olan uygun bir $(f,g)_1$ iç çarpımının oluşturduğu uzayda ortonormal bir tabandır.

iii) $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayında tamdır. Herhangi bir n doğal sayısı ve herhangi $\gamma_1, \gamma_2, \dots, \gamma_n$ kompleks sayıları için,

$$a_2 \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2 \le \left| \sum_{j=1}^{n} \gamma_j \psi_j \right|^2 \le a_1 \sum_{j=1}^{n} |\gamma_j|^2$$

eşitsizliği doğru olacak şekilde a_1 ve a_2 pozitif sayıları vardır.

iv) $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayında tamdır ve onun $\|(\psi_j, \psi_k)\|_{j,k=1}^{\infty}$ Gram matrisi, l_2 dizi uzayında sınırlı ve tersi mevcut bir lineer operatör üretir.

v) $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi, H uzayında tamdır, bu diziye biortogonal olan $\{\chi_j\}_{j=1}^{\infty}$ tam dizisi vardır ve herhangi bir $f \in H$ vektörü için,

$$\sum_{j=1}^{\infty} |(f, \psi_j)|^2 < \infty, \quad \sum_{j=1}^{\infty} |(f, \chi_j)|^2 < \infty$$

eşitsizlikleri sağlanır.

Tanım 3.5.6 (*Karesel Yakın Diziler*) [57]. $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ ve $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ B Banach uzayında iki dizi olsun. Eğer,

$$\sum_{n=1}^{\infty} \|\phi_n - \psi_n\|^2 < \infty$$

ise bu dizilere *karesel yakın diziler* denir. Burada, $\|.\|$ ile B uzayındaki norm gösterilir.

Teorem 3.5.4 (Bary, N. K.) [56]. H Hilbert uzayının $\{\psi_j\}_{j=1}^{\infty}$ Riesz tabanına karesel yakın olan ω-lineer bağımsız $\{\phi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi de bu uzayın bir Riesz tabanıdır.

Son teoremden sonuç olarak aşağıdaki önerme verilebilir [56]:

H Hilbert uzayının ω-lineer bağımsız $\{\chi_j\}_{j=1}^{\infty}$ dizisi bu uzayın ortonormal bir tabanına karesel yakın ise bu dizi H uzayında bir tabandır.

---

* (f,g) ve $(f,g)_1$ iç çarpımları topolojik olarak denk normlar üretirse, bu iç çarpımlara *topolojik denktir* denir. Yani; c_1, c_2 pozitif sayıları vardır öyle ki $c_1(f,g) \le (f,g)_1 \le c_2(f,g)$, $(f,g \in H)$.

3.6. Trigonometrik Seriler, Fourier Serileri ve Ortogonal Seriler

Tanım 3.6.1 (*Trigonometrik Seriler*) [52].

$$\frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right) \tag{3.44}$$

biçimindeki ifadelere *trigonometrik seriler* denir. Burada, a_n ve b_n sabitleri serinin katsayılarıdır.

(3.44) biçimindeki bir seri $\forall x \in (-\infty,\infty)$ için yakınsak ise, o halde bu seri 2π periyotlu bir fonksiyon belirtir. Bu nedenle, bir fonksiyon bir trigonometrik seri ile ifade edilirse, fonksiyon ya 2π periyotludur ya da 2π uzunluğundaki bir aralıkta değerler alır [52].

Trigonometrik seriler ile kuvvet serileri arasında önemli bir ilişki vardır:

$$\sum_{n=0}^{\infty} c_n z^n \tag{3.45}$$

kuvvet serisi ele alınsın. Burada, $c_n = a_n - ib_n$ ve $c_0 = \frac{a_0}{2}$ dir. Birim dairede $z = re^{ix}$ olduğu varsayılırsa, (3.45) serisinin reel kısmı (3.44) serisinden farklı değildir. $z = e^{ix}$ için (3.45) serisinin imajiner kısmı ise

$$\sum_{n=1}^{\infty}\left(-b_n \cos nx + a_n \sin nx\right) \tag{3.46}$$

biçimindedir. (3.46) serisine, (3.44) serisine *eşlenik seri* denir.

Tanım 3.6.2 (*Fourier Formülü*) [52]. $f(x)$ fonksiyonu, daima $-\pi \le x \le \pi$ aralığında düzgün yakınsak bir trigonometrik serinin toplamı olmasın. $\cos mx$ veya $\sin mx$ ile

$$f(x) = \frac{a_0}{2}+\sum_{n=1}^{\infty}\left(a_n \cos nx + b_n \sin nx\right)$$

ifadesi çarpılıp $-\pi$'den π'ye integral alınırsa,

$$a_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\cos nx\,dx;\; b_n = \frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi} f(x)\sin nx\,dx \;\; (n = 1,2,\ldots) \tag{3.47}$$

elde edilir. Burada, aşağıdaki hesaplamalardan yararlanıldı:

$$\begin{gathered}
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \cos nx dx = 0, \quad m \ne n, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \sin mx \sin nx dx = 0, \quad m \ne n, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos mx \sin nx dx = 0, \quad m \ne n \;\; ve \;\; m = n, \\
\int_{-\pi}^{\pi} \cos^2 mx\,dx = \int_{-\pi}^{\pi} \sin^2 mx\,dx = \pi.
\end{gathered} \tag{3.48}$$

(3.47) formülüne *Fourier formülü* denir. a_n ve b_n sayılarına ise *Fourier katsayıları* denir.

Tanım 3.6.3 (*Fourier Serisi*) [52]. $f(x)$ fonksiyonundan üretilen (3.47) Fourier formülü ile belirlenmiş katsayılardan oluşmuş

$$f(x) \sim \frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.49}$$

serisine $f(x)$ fonksiyonunun *Fourier serisi* denir. Burada; "$\sim$" işareti, Fourier formüllerinin $f(x)$ fonksiyonundan üretildiğinin anlaşılması için konulmuştur.

Tanım 3.6.4 (*Ortogonal Sistem*) [52].

$$\int_0^1 \varphi_n(x)\overline{\varphi_m(x)}\,dx = 0 \quad (m \neq n;\ n, m = 1, 2, \ldots),$$

$$\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2\,dx \neq 0 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

koşulları sağlanması durumunda $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty} \in L_2(0,1)$ fonksiyonlar sistemine $[0,1]$ aralığında *ortogonal sistem* denir.

Örnek 3.6.1 [52]. (3.48) eşitliklerinden görülür ki,

$$\{\cos nx\}_{n=0}^{\infty} \cup \{\sin nx\}_{n=1}^{\infty} \tag{3.50}$$

trigonometrik sistemi $[-\pi, \pi]$ aralığında ortogonal sistemdir.

Tanım 3.6.5 (*Ortonormal Sistem*) [52]. Eğer, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonal sistemi için

$$\int_0^1 |\varphi_n(x)|^2\,dx = 1 \quad (n = 1, 2, \ldots)$$

ise bu sisteme *ortonormal sistem* denir.

Her trigonometrik sistem ortonormal sistem değildir, fakat ortonormal yapılabilir.

Örnek 3.6.2 [52]. (3.50) ortogonal sisteminin $1, \cos x, \sin x, \ldots, \cos nx, \sin nx, \ldots$ elemanlarının ilkinin $\frac{1}{\sqrt{2\pi}}$ ile diğer her bir fonksiyonun da $\frac{1}{\sqrt{\pi}}$ ile çarpılmasıyla elde edilen

$$\left\{\frac{1}{\sqrt{2\pi}}\right\} \cup \left\{\frac{\cos nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty} \cup \left\{\frac{\sin nx}{\sqrt{\pi}}\right\}_{n=1}^{\infty}$$

sistem $[-\pi, \pi]$ aralığında ortonormal sistemdir.

Tanım 3.6.6 (*Ortogonal Seri*) [52]. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar sistemi $[a,b]$ aralığında ortogonal sistem olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{3.51}$$

serisine *ortogonal seri* denir. Burada, c_n sabit katsayılardır.

(3.51) serisinin belli bir $f(x)$ fonksiyonuna yakınsak olduğu biliniyorsa c_n katsayılarının ne olduğu tartışılabilir.

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \varphi_n(x) \tag{3.52}$$

serisi dikkate ele alınsın ve (3.51) serisinin düzgün yakınsak olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (3.52) eşitliğinin her iki yanı $\varphi_m(x)$ ile çarpılıp a 'den b 'ye integral alınırsa

$$\int_0^1 f(x)\overline{\varphi_m(x)}dx = c_m \int_0^1 |\varphi_m(x)|^2 dx = c_m \tag{3.53}$$

elde edilir. Burada, (3.53) formülleri Fourier formülleridir. Bu nedenle, (3.51) serisine $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortogonal sistemine göre $f(x)$ fonksiyonunun *Fourier serisi* denir.

Tanım 3.6.7 (*Tamlık*) [52]. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar sistemi $[0,1]$ aralığında tanımlı ve $f(x) \in L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ olsun.

$$\int_0^1 f(x)\varphi_n(x)dx = 0 \quad (n = 1,2,\ldots) \tag{3.54}$$

eşitlikleri sadece $f(x) = 0$ (hemen hemen her $x \in [0,1]$ için) fonksiyonu için sağlanıyorsa, bu sisteme $L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ uzayında *tamdır* denir. (Bu tanım $f(x) \in C[0,1]$ fonksiyonu için verilirse "hemen hemen her" sözü yerine "her" kelimesi gelmelidir.)

Dikkat edilirse, herhangi bir $f(x) \in L_1(0,1)$ fonksiyonu için (3.54) eşitliğindeki integralinin var olabilmesi için gerek ve yeter şart $\varphi_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ fonksiyonlarının $[0,1]$ aralığında sınırlı olmasıdır. Eğer, $f(x) \in L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ ise (3.54) eşitliğindeki integralinin var olabilmesi için gerek ve yeter şart $\varphi_n(x) \in L_q(0,1)$ $(n = 1,2,\ldots)$ olmasıdır. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Örnek 3.6.3 [52]. (3.50) trigonometrik sistemi $L(-\pi,\pi)$ ve $C[-\pi,\pi]$ uzaylarında tamdır.

$1 \le p < p' < \infty$ olsun. O halde $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi $L_p(0,1)$ uzayında tam ise $L_{p'}(0,1)$ uzayında da tam olur. Buradan, (3.50) trigonometrik sisteminin $1 \le p < \infty$ için $L_p(-\pi,\pi)$ uzayında tam olduğu söylenebilir.

(3.50) trigonometrik sisteminin $C[-\pi,\pi]$ uzayında tam olması aşağıdaki önemli sonucu verir:

Teorem 3.6.1 [52]. $f(x)$ sürekli fonksiyonunun (3.49) ile tanımlı Fourier serisi düzgün yakınsak ise, bu serinin toplamı $f(x)$'in kendisidir.

Tanım 3.6.8 (*Bessel Eşitsizliği*) [52]. $f(x) \in L_2(0,1)$ ve $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar sistemi $[0,1]$ aralığında ortonormal bir sistem olsun.

$$\sum_{n=1}^{\infty} |c_n|^2 \le \|f\|_{L_2}^2$$

biçiminde tanımlanan eşitsizliğe *Bessel eşitsizliği* denir. Burada, c_n sayıları (3.53) ile tanımlıdır.

Teorem 3.6.2 [52]. $L_2(0,1)$ uzayında herhangi bir fonksiyonun herhangi bir ortonormal sisteme göre Fourier serisi $L_2(0,1)$ uzayında yakınsaktır.

Tanım 3.6.9 (*Kapalılık*) [52]. Her bir $f(x) \in C[0,1]$ (veya $f(x) \in L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$) fonksiyonu ve her $\varepsilon > 0$ için

$$\left| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \right| < \varepsilon \quad (0 \le x \le 1)$$

veya

$$\left\| f(x) - \sum_{k=1}^{n} \alpha_k \varphi_k(x) \right\|_{L_p} < \varepsilon$$

olacak şekilde $\alpha_1, \alpha_2, \ldots, \alpha_n \in \mathbb{C}$ sayıları bulunabiliyorsa $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ fonksiyonlar sistemi $C[0,1]$ uzayında (veya $L_p(0,1)$ $(1 \le p < \infty)$ uzayında) *kapalıdır* denir.

Teorem 3.6.3 [52]. $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında (veya $C[0,1]$ uzayında) kapalı olan bir sistem, $L_q(0,1)$ uzayında (veya $L(0,1)$ uzayında) tamdır; tersine, $L_p(0,1)$ $(1 < p < \infty)$ uzayında tam olan bir sistem, $L_q(0,1)$ uzayında kapalıdır. Burada $\frac{1}{p} + \frac{1}{q} = 1$ dir.

Teorem 3.6.4 [52]. $L_2(0,1)$ uzayında tamlık ve kapalılık denktir.

$\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal sistemi, $L_2(0,1)$ uzayında kapalı ve $f(x)\in L_2(0,1)$ olsun. O halde, $\forall\varepsilon>0$ için $\alpha_1,\ \alpha_2,\ldots,\ \alpha_n$ sayılarını seçmek mümkündür ki

$$\left\| f(x)-\sum_{k=1}^{n}\alpha_k\varphi_k(x)\right\|_{L_2}<\varepsilon$$

dir. Öte yandan, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre bütün n dereceli polinomlardan $f(x)$ fonksiyonuna en iyi yaklaşan polinom, $L_2(0,1)$ uzayında $\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)$ ile verildiğinden

$$\left\| f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right\|_{L_2}<\varepsilon$$

bağlanır. Burada, $c_k\ \left(k=\overline{1,n}\right)$ sayıları $f(x)$ fonksiyonunun Fourier katsayılarıdır. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi ortonormal olduğundan

$$\left\| f(x)-\sum_{k=1}^{n}c_k\varphi_k(x)\right\|_{L_2}^2=\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2$$

elde edilir. Buradan

$$0\le\|f\|^2-\sum_{k=1}^{n}|c_k|^2<\varepsilon^2$$

elde edilir. $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan $n\to\infty$ için limite geçilirse,

$$\|f\|_{L_2}^2=\sum_{k=1}^{\infty}|c_k|^2 \tag{3.55}$$

bulunur.

Tanım 3.6.10 (*Parseval Eşitliği*) [52] . (3.55) eşitliğine *Parseval eşitliği* denir.

Sonuç 3.6.1 [52]. Bir sistem kapalı ise herhangi bir $f(x)\in L_2(0,1)$ için Parseval eşitliği sağlanır.

Teorem 3.6.5 (*Riesz-Fischer*) [52]. $c_n\ \ (n=1,2,\ldots)$ dizisi $\sum_{n=1}^{\infty}|c_n|^2<\infty$ koşulunu sağlayan herhangi bir sayı dizisi ve $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ ortonormal bir sistem olsun. Bu durumda öyle bir $f(x)\in L_2(0,1)$ fonksiyonu vardır ki, c_n sayıları $f(x)$ fonksiyonunun bu sisteme göre Fourier katsayılarıdır. Ayrıca, $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi tam ise $f(x)$ fonksiyonu tek türlü belirlidir.

Teorem 3.6.6 (*Mercer*) [52]. $\{\varphi_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ $(0 \le x \le 1)$ ortonormal sistemi düzgün sınırlı ise, yani

$$\exists M > 0\,;\ \forall n \in \mathbb{N},\ \forall x \in [0,1] : |\varphi_n(x)| \le M$$

koşulu sağlanıyorsa, herhangi bir toplanabilir fonksiyonun bu sisteme göre Fourier katsayılarının dizisi sıfıra yakınsar.

Teorem 3.6.7 [52]. Her bir toplanabilir fonksiyonun (3.50) trigonometrik sistemine göre Fourier katsayıları sıfıra yakınsar.

Fourier serilerinin mutlak ve düzgün yakınsaklığı ile ilgili bazı teoremler aşağıda verilmiştir:

Teorem 3.6.8 [52].

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} (a_n \cos nx + b_n \sin nx) \tag{3.56}$$

trigonometrik serisi dikkate alınsın. Eğer

$$\sum_{n=1}^{\infty} (|a_n| + |b_n|) < \infty \tag{3.57}$$

ise, (3.56) serisi $[-\pi, \pi]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsaktır. (3.57) koşulu (3.56) serisinin mutlak yakınsaması için gerek ve yeter koşuldur.

Teorem 3.6.9 [52]. Eğer $f(x)$ fonksiyonu ikinci mertebeden toplanabilir bir türeve sahip ise, bu fonksiyonun Fourier serisi düzgün yakınsar.

Teorem 3.6.10 [52]. $F(x)$ mutlak sürekli bir fonksiyon ve onun $F'(x) = f(x)$ türevi karesi integrallenebilir bir fonksiyon ise $F(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Teorem 3.6.11 [52]. (a_n) monoton azalan ve sıfıra yakınsak bir dizi ise,

$$\frac{a_0}{2} + \sum_{n=1}^{\infty} a_n \cos nx$$

serisi $x \equiv 0 \pmod{2\pi}$ noktaları haricinde her yerde yakınsaktır, ayrıca her bir $0 < \delta < \pi$ için $\delta \le x \le 2\pi - \delta$ aralığında düzgün yakınsaktır.

(b_n) monoton azalan ve sıfıra yakınsak bir dizi ise

$$\sum_{n=1}^{\infty} b_n \sin nx$$

serisi her yerde yakınsaktır. Ayrıca, her bir $0<\delta<\pi$ için $\delta \le x \le 2\pi-\delta$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Trigonometrik serilerin yakınsaklığının incelenmesinde önemli bir rolü olan Dirichlet çekirdeği aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 3.6.11 (*Dirichlet Çekirdeği ve Eşlenik Dirichlet Çekirdeği*) [52].

$$D_n(x)=\frac{1}{2}+\cos x+\ldots+\cos nx, \tag{3.58}$$

$$\overline{D}_n(x)=\sin x+\ldots+\sin nx \tag{3.59}$$

eşitliklerine sırasıyla *Dirichlet çekirdeği* ve *eşlenik Dirichlet çekirdeği* denir.

Trigonometrik özdeşliklerden kolayca elde edilebilir ki, (3.58) ve (3.59) fonksiyonları sırasıyla

$$D_n(x)=\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}\ ,\ \overline{D}_n(x)=\frac{\cos\frac{x}{2}-\cos\left(n+\frac{1}{2}\right)x}{2\sin\frac{x}{2}}$$

biçiminde yazılabilir.

$[-\pi,\pi]$ aralığının tamamında veya herhangi bir noktasında bir Fourier serisinin yakınsaklık probleminin incelenebilmesi için, bu Fourier serisinin Dirichlet tarafından verilen formdaki serilerin kısmi toplamlar dizisi biçiminde ifade edilmesi uygundur:

$$\sigma(f)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{\infty}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right)$$

ve

$$S_n(x)=\frac{a_0}{2}+\sum_{k=1}^{n}\left(a_k\cos kx+b_k\sin kx\right) \tag{3.60}$$

olsun. (3.60) kısmi toplamlar dizisini, Fourier katsayıları ve Dirichlet çekirdeğinden yararlanarak

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u+x)D_n(u)\,du=\frac{1}{\pi}\int_{-\pi}^{\pi}f(u+x)\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}\right)u}{2\sin\frac{u}{2}}du \tag{3.61}$$

şeklinde yazabilir [52]. Gerekli hesaplamalar yapıldığında, (3.61) eşitliği

$$S_n(x)=\frac{1}{\pi}\int_{-\delta}^{\delta}f(u+x)\frac{\sin nu}{u}du+o(1) \tag{3.62}$$

biçimine dönüştürülebilir. Burada, $o(1)$ ifadesi $n\to\infty$ iken sıfıra yakınsar. (3.62) eşitliği, Riemann yerelleştirme prensibi diye bilinen son derece önemli bir özelliği açıklar [52]:

Teorem 3.6.12 (*Riemann*) [52]. $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisinin bir x noktasındaki yakınsaklığı veya ıraksaklığı bu fonksiyonun x noktasının komşuluğundaki davranışına bağlıdır.

Değişken değişimi yapılarak, (3.62) eşitliği

$$S_n(x) = \frac{1}{\pi}\int_0^{\delta}\left(f(x+t)+f(x-t)\right)\frac{\sin nt}{t}\,dt + o(1) \tag{3.63}$$

biçiminde de yazılabilir. $\sigma(f)$ trigonometrik Fourier serisinin (3.63) eşitliğiyle verilen kısmi toplamlar dizisi ile ilgili aşağıdaki testler elde edilir [52]:

Teorem 3.6.13 [52]. $\sigma(f)$ serisinin x noktasında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsaması için gerek ve yeter şart

$$\lim_{n\to\infty}\int_0^{\delta}\left(f(x+u)+f(x-u)-2f(x)\right)\frac{\sin nu}{u}\,du = 0$$

olmasıdır. Burada, $\delta > 0$ dır.

Tanım 3.6.12 (*Regüler Nokta*) [52]. $f(x)$ fonksiyonunun x_0 noktasında sonlu sağ ($f(x_0+0)$) ve sol ($f(x_0-0)$) limitleri var ise ve bu fonksiyonun x_0 noktasındaki değeri sağ ve sol limitlerin aritmetik ortalamasına eşitse, yani

$$f(x_0) = \frac{f(x_0+0)+f(x_0-0)}{2}$$

ise x_0 noktasına $f(x)$ fonksiyonunun *regüler noktası* denir.

Teorem 3.6.14 (*Dini Testi*) [52]. $\int_0^{\delta}\left(f(x+u)+f(x-u)-2f(x)\right)\frac{du}{u}$ integrali mevcut ise $\sigma(f)$ serisi her x regüler noktasında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar.

Sonuç 3.6.2 [52].

$$\varphi_x(u) = f(x+u)+f(x-u)-2f(x)$$

olsun. Dini testinden, $f(x)$ fonksiyonu her x noktasında sürekli ve

$$\int_0^{\delta}\frac{|\varphi_x(t)|}{t}\,dt \tag{3.64}$$

integrali mevcut ise, $\sigma(f)$ serisi her x noktasında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar.

Sonuç 3.6.3 [52]. Eğer $f(x)$ fonksiyonu x noktasının her komşuluğunda Lipschitz koşulunu* sağlarsa, (3.64) integrali mevcuttur. Ayrıca, $\sigma(f)$ serisi her x noktasında $f(x)$ fonksiyonuna yakınsar.

Eğer $f(x)$ fonksiyonu x noktasında sonlu türeve sahipse, o halde $f(x)$ fonksiyonu bu noktanın komşuluğunda $\alpha = 1$ için Lipschitz koşulunu sağlar.

Sonuç 3.6.4 [52]. Bir x noktasında $f(x)$ fonksiyonu sonlu türeve sahipse, $f(x)$ fonksiyonun Fourier serisi bu noktada yakınsaktır.

Sonuç 3.6.5 [52]. $f(x)$ fonksiyonu $(-\pi,\pi)$ aralığının her noktasında diferansiyellenebilirse, o halde $f(x)$ fonksiyonun Fourier serisi bu aralığın her noktasında yakınsaktır.

Teorem 3.6.15 (*Jordan*) [52]. $f(x)$ fonksiyonu (a,b) aralığında sınırlı salınımlı ise, bu fonksiyonun Fourier serisi (a,b) aralığında her noktada yakınsaktır. Bu serinin toplamı süreklilik noktasında $f(x)$, süreksizlik noktasında $\dfrac{f(x+0)+f(x-0)}{2}$ dir. Son olarak, $f(x)$ fonksiyonu (a',b') aralığında sürekli ise, $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi (a',b') aralığında düzgün yakınsaktır, burada $a<a'<b'<b$ dir.

Teorem 3.6.15'den aşağıdaki sonuçlar elde edilir [52]:

Sonuç 3.6.6 [52]. $f(x)$ fonksiyonu $[-\pi,\pi]$ aralığında sürekli, sınırlı salınımlı ve $f(-\pi)=f(\pi)$ ise, bu fonksiyonun Fourier serisi $\mathbb{R}$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

Sonuç 3.6.7 [52]. Herhangi bir periyodik mutlak sürekli fonksiyonun Fourier serisi $\mathbb{R}$ üzerinde kendine düzgün yakınsaktır.

* Lipschitz koşulu: $\alpha>0$ ve $|u|\le\delta$ için $|f(x+u)-f(x)|\le K|u|^{\alpha}$ olacak şekilde $K>0$ sayısı vardır.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. Birinci Problemin İfadesi ve Bazı Spektral Özellikleri

Bu kısımda; tezin giriş bölümünde bahsedilen sınır değer problemlerinden ilkinin ifadesi verilecek, bu problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri kesinleştirilecek, bu kesinleştirilmiş asimptotik formüllerin yardımıyla birinci problemin kök fonksiyonlar sistemleri ve bu sistemlere biortogonal olan sistemler üzerine sürekli fonksiyonlar için Fourier seri ayrışımlarının düzgün yakınsaklık koşulları araştırılacak ve elde edilecek bulguların daha anlaşılır olması için iki örnek verilecektir.

Tezin giriş bölümünde bahsedilen sınır koşullarından biri spektral parametre içeren birinci problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y,\ 0 < x < 1, \tag{4.1}$$

$$y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta,\ \ 0 \le \beta < \pi, \tag{4.2}$$

$$y'(1) = (a\lambda + b)y(1) \tag{4.3}$$

şeklindedir. Burada; λ bir spektral parametre, $q(x) \in C[0,1]$ reel değerli bir fonksiyon, a,b reel sabitler ve $a < 0$ dır.

4.1.1. Ön Bilgiler

(4.1)-(4.3) sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sistemleri üzere spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklık koşullarının incelenebilmesi için bu problemin özdeğerlerinin, özfonksiyonlarının ve ek fonksiyonlarının bazı özelliklerinin bilinmesi gereklidir. Ayrıca, kök fonksiyonlar sistemi ve bu sisteme biortogonal olan sistemin yapısı incelenmelidir. Bunlara ek olarak, kök fonksiyonlar sisteminin minimallik ve tabanlık özelliklerinin bilinmesi gereklidir.

$h = \cot\beta\ (0 < \beta < \pi)$ olmak üzere $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları, (4.1) denkleminin sırasıyla aşağıdaki başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsunlar:

$$\varphi(0,\lambda) = 1,\ \ \varphi'(0,\lambda) = h, \tag{4.4}$$

$$\psi(0,\lambda) = 0,\ \ \psi'(0,\lambda) = 1. \tag{4.5}$$

$y(x,\lambda)$ fonksiyonu, (4.1) denkleminin $0 < \beta < \pi$ olduğu durumda (4.4) başlangıç koşulunu, $\beta = 0$ olduğu durumda ise (4.5) başlangıç koşulunu sağlayan çözümü olsun. Bu durumda, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\varpi(\lambda) = y'(1,\lambda) - (a\lambda + b)\, y(1,\lambda) \tag{4.6}$$

karakteristik denkleminin kökleridir. Başka bir deyişle; $\lambda_n \ (n = 0,1,2,\ldots)$ değerine (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin, $\varpi(\lambda_n) = 0$ ise özdeğeri, $\varpi(\lambda_n) = 0 \neq \varpi'(\lambda_n)$ ise basit özdeğeri, $\varpi(\lambda_n) = \varpi'(\lambda_n) = 0 \neq \varpi''(\lambda_n)$ ise iki katlı özdeğeri, $\varpi(\lambda_n) = \varpi'(\lambda_n) = \varpi''(\lambda_n) = 0 \neq \varpi'''(\lambda_n)$ ise üç katlı özdeğeri denir [38].

[32] makalesinde bahsedilen (Bkz. syf 6), (4.1)-(4.3) sınır değer problemi için *(i)-(iv)* durumlarının her biri için $\lambda_n \ (n = 0,1,2,\ldots)$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar ve *(ii)-(iii)* durumlarında ise katlı özdeğerlere uygun özfonksiyonlara ait ek fonksiyonlar hakkında bilgiler aşağıda verilmiştir:

$x \in [0,1]$ için $\lambda \to \lambda_n$ iken $y(x,\lambda) \to y(x,\lambda_n)$ dir ve bu yakınsaksama düzgündür. Ayrıca, $y_n(x) = y(x,\lambda_n)$ fonksiyonu (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin λ_n özdeğerine karşılık gelen öz fonksiyonudur [3]. Bu nedenle, $y_n(x)$ fonksiyonu için (4.1)-(4.3) sınır değer problemi

$$-y_n'' + q(x)\, y_n = \lambda_n y_n, \ 0 < x < 1,$$

$$y_n(0)\cos\beta = y_n'(0)\sin\beta, \ 0 \le \beta < \pi,$$

$$y_n'(1) = (a\lambda_n + b)\, y_n(1)$$

biçiminde yazılabilir.

Diğer taraftan, λ_k iki katlı özdeğer $(\lambda_k = \lambda_{k+1})$ olsun. Bu durumda, y_k özfonksiyona karşılık gelen birinci sıra ek fonksiyon y_{k+1};

$$-y_{k+1}'' + q(x)\, y_{k+1} = \lambda_k y_{k+1} + y_k,$$

$$y_{k+1}(0)\cos\beta = y_{k+1}'(0)\sin\beta,$$

$$y_{k+1}'(1) = (a\lambda_k + b)\, y_{k+1}(1) + a y_k(1)$$

bağıntılarını sağlar [11, s.16].

λ_k üç katlı özdeğer $(\lambda_k = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2})$ olsun. Bu durumda, birinci sıra ek fonksiyon y_{k+1} ile birlikte ikinci sıra ek fonksiyon y_{k+2};

$$-y_{k+2}'' + q(x)\, y_{k+2} = \lambda_k y_{k+2} + y_{k+1},$$

$$y_{k+2}(0)\cos\beta = y_{k+2}'(0)\sin\beta,$$

$$y_{k+2}'(1) = (a\lambda_k + b)\, y_{k+2}(1) + a y_{k+1}(1)$$

bağıntılarını sağlar [11, s.16]. Dikkat edilirse, ek fonksiyonların iyi bilinen özelliklerinden biri, bir veya birden fazla özfonksiyon ile bir veya birden fazla ek fonksiyonun bir sabit katının toplanmasıyla elde edilen fonksiyonunda bir ek fonksiyon olmasıdır. Bu nedenle, *c* ve *d* keyfi sabitler olmak üzere $y_{k+1}+cy_k$ ve $y_{k+2}+dy_k$ fonksiyonları da sırasıyla birinci ve ikinci sıra ek fonksiyonlardır.

Diğer taraftan, (4.1), (4.2) ve (4.6) eşitliklerinde λ'ya göre türev alınırsa

$$-y''_{\lambda}(x,\lambda)+q(x)y_{\lambda}(x,\lambda)=\lambda y_{\lambda}(x,\lambda)+y(x,\lambda),$$

$$y_{\lambda}(0,\lambda)\cos\beta=y'_{\lambda}(0,\lambda)\sin\beta,$$

$$\varpi'(\lambda)=y'_{\lambda}(1,\lambda)-(a\lambda+b)y_{\lambda}(1,\lambda)-ay(1,\lambda)$$

elde edilir. Bu son eşitliklerde λ'ya göre tekrar türev alınırsa

$$-y''_{\lambda\lambda}(x,\lambda)+q(x)y_{\lambda\lambda}(x,\lambda)=\lambda y_{\lambda\lambda}(x,\lambda)+2y_{\lambda}(x,\lambda),$$

$$y_{\lambda\lambda}(0,\lambda)\cos\beta=y'_{\lambda\lambda}(0,\lambda)\sin\beta,$$

$$\varpi''(\lambda)=y'_{\lambda\lambda}(1,\lambda)-(a\lambda+b)y_{\lambda\lambda}(1,\lambda)-2ay_{\lambda}(1,\lambda)$$

elde edilir. Burada; $y_{\lambda}(x,\lambda)$ ve $y_{\lambda\lambda}(x,\lambda)$ ile $y(x,\lambda)$ fonksiyonunun sırasıyla λ'ya göre birinci ve ikinci mertebeden türevleri gösterilir.

λ_k, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin iki veya üç katlı bir özdeğeri ise, o halde $x\in[0,1]$ için $\lambda\to\lambda_n$ iken

$$\begin{aligned} y(x,\lambda)&\to y_k(x), & y'(x,\lambda)&\to y'_{\lambda}(x), \\ y_{\lambda}(x,\lambda)&\to \tilde{y}_{k+1}(x), & y'_{\lambda}(x,\lambda)&\to \tilde{y}'_{k+1}(x), \end{aligned} \tag{4.7}$$

dir ve bu yakınsamalar düzgündür. Burada, $\tilde{y}_{k+1}$ birinci sıra ek fonksiyonlardan biridir. Açıktır ki, $\tilde{y}_{k+1}=y_{k+1}+\tilde{c}y_k$ dır [3,38].

λ_k, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin üç katlı bir özdeğeri ise, o halde $x\in[0,1]$ için $\lambda\to\lambda_n$ iken

$$y_{\lambda\lambda}(x,\lambda)\to 2\tilde{y}_{k+2}(x),\quad y'_{\lambda\lambda}(x,\lambda)\to 2\tilde{y}'_{k+2}(x), \tag{4.8}$$

dir ve bu yakınsamalar düzgündür. Burada, $\tilde{y}_{k+2}$ birinci sıra ek fonksiyon $\tilde{y}_{k+1}$'e karşılık gelen ikinci sıra ek fonksiyonlardan biridir. Açıktır ki, $\tilde{y}_{k+2}=y_{k+2}+\tilde{c}y_{k+1}+\tilde{d}y_k$ dır [3,38].

Diğer taraftan, (4.7) ve (4.8) ifadelerinden

$$\tilde{c}=\begin{cases}-y'_{k+1}(0), & \beta=0,\\ -y_{k+1}(0), & 0<\beta<\pi,\end{cases} \tag{4.9}$$

$$\tilde{d}=\begin{cases}\left(y'_{k+1}(0)\right)^2-y'_{k+2}(0), & \beta=0,\\ y^2_{k+1}(0)-y_{k+2}(0), & 0<\beta<\pi\end{cases} \tag{4.10}$$

olduğu elde edilir.

λ_n özdeğerlerinin katlılık durumlarına göre aşağıdaki kök fonksiyonlar sistemlerinin $L_p(0,1)\ (1<p<\infty)$ uzayında taban oldukları ve her bir sistem için bu tabanın $p=2$ durumunda koşulsuz olduğu ispatlanmıştır [38]:

(a) (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin tüm özdeğerleri reel ve basit ise

$$y_n(x)\ \ (n=0,1,\ldots;n\neq l)$$

dir. Burada, *l* keyfi negatif olmayan bir tamsayıdır.

(b) λ_k, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin iki katlı özdeğeri $(\lambda_k=\lambda_{k+1})$ ise

$$y_n(x)\ \ (n=0,1,\ldots;n\neq k+1)$$

dir.

(c) λ_k, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin iki katlı özdeğeri $(\lambda_k=\lambda_{k+1})$ ve

$$\varpi'''(\lambda_k)\neq 3\tilde{c}\varpi''(\lambda_k) \tag{4.11}$$

ise

$$y_n(x)\ \ (n=0,1,\ldots;n\neq k)$$

dir.

(d) λ_k, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin iki katlı özdeğeri $(\lambda_k=\lambda_{k+1})$ ise

$$y_n(x)\ \ (n=0,1,\ldots;n\neq l)$$

dir. Burada, $l\neq k,k+1$ keyfi negatif olmayan bir tamsayıdır.

(e) λ_k, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin üç katlı özdeğeri $(\lambda_k=\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2})$ ise

$$y_n(x)\ \ (n=0,1,\ldots;n\neq k+2)$$

dir.

(f) λ_k, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin üç katlı özdeğeri $(\lambda_k=\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2})$ ve

$$\varpi^{IV}(\lambda)_k\neq 4\tilde{c}\varpi'''(\lambda_k) \tag{4.12}$$

ise

$$y_n(x)\ \ (n=0,1,\ldots;n\neq k+1)$$

dir.

(g) λ_k, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin üç katlı özdeğeri $(\lambda_k=\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2})$ ve

$$\frac{\varpi^{IV}(\lambda_k)}{4!}\left(\frac{\varpi^{IV}(\lambda_k)}{4!}-\tilde{c}\frac{\varpi'''(\lambda_k)}{3!}\right)\neq\frac{\varpi'''(\lambda_k)}{3!}\left(\frac{\varpi^{V}(\lambda_k)}{5!}-\tilde{d}\frac{\varpi'''(\lambda_k)}{3!}\right) \tag{4.13}$$

ise

$$y_n(x)\ \ (n=0,1,\ldots;n\neq k)$$

dir.

(h) λ_k, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin üç katlı özdeğeri $\left(\lambda_k = \lambda_{k+1} = \lambda_{k+2}\right)$ ise

$$y_n\left(x\right) \ \left(n = 0,1,\ldots; n \neq l\right)$$

dir. Burada, $l \neq k, k+1, k+2$ keyfi negatif olmayan bir tamsayıdır.

(i) λ_r ve λ_s, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin kompleks eşlenik özdeğerleri $\left(\lambda_s = \overline{\lambda}_r\right)$ ise

$$y_n\left(x\right) \ \left(n = 0,1,\ldots; n \neq r\right)$$

dir.

(j) λ_r ve λ_s, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin kompleks eşlenik özdeğerleri $\left(\lambda_s = \overline{\lambda}_r\right)$ ise

$$y_n\left(x\right) \ \left(n = 0,1,\ldots; n \neq l\right)$$

dir. Burada, $l \neq r, s$ keyfi negatif olmayan bir tamsayıdır.

Buna ek olarak, $\left\{u_n\left(x\right)\right\}$ sistemleri ile (a)-(j) sistemlerinin her birine biortogonal eşlenik olan sistemler gösterilsin. Dolayısıyla; (a)-(j) sistemlerinin biortogonal eşlenikleri sırasıyla aşağıdaki gibidir [38]:

(a*) (a) sisteminin biortogonal eşleniği $u_n\left(x\right) \ \left(n = 0,1,\ldots; n \neq l\right)$ olmak üzere bu sistemin elemanları:

$$u_n\left(x\right) = \frac{y_n\left(x\right) - \dfrac{y_n\left(1\right)}{y_l\left(1\right)} y_l\left(x\right)}{\left\|y_n\right\|^2 + a y_n^2\left(1\right)},$$

(b*) (b) sisteminin biortogonal eşleniği $u_n\left(x\right) \ \left(n = 0,1,\ldots; n \neq k+1\right)$ olmak üzere bu sistemin elemanları:

$$\begin{cases} u_n\left(x\right) = \dfrac{y_n\left(x\right) - \dfrac{y_n\left(1\right)}{y_k\left(1\right)} y_k\left(x\right)}{\left\|y_n\right\|^2 + a y_n^2\left(1\right)} \quad \left(n \neq k, k+1\right), \\ u_k\left(x\right) = \dfrac{y_{k+1}\left(x\right) - \dfrac{y_{k+1}\left(1\right)}{y_k\left(1\right)} y_k\left(x\right)}{-y_k\left(1\right)\dfrac{\varpi''\left(\lambda_k\right)}{2}}, \end{cases}$$

(c*) (c) sisteminin biortogonal eşleniği $u_n\left(x\right) \ \left(n = 0,1,\ldots; n \neq k\right)$ olmak üzere bu sistemin elemanları:

$$\begin{cases} u_n\left(x\right) = \dfrac{y_n\left(x\right) - \dfrac{y_n\left(1\right)}{y_{k+1}^*\left(1\right)} y_{k+1}^*\left(x\right)}{\left\|y_n\right\|^2 + a y_n^2\left(1\right)}, \\ u_{k+1}\left(x\right) = \dfrac{y_k\left(x\right) - \dfrac{y_k\left(1\right)}{y_{k+1}^*\left(1\right)} y_{k+1}\left(x\right)}{-y_k\left(1\right)\dfrac{\varpi''\left(\lambda_k\right)}{2}}, \end{cases}$$

(d*) (d) sisteminin biortogonal eşleniği $u_n(x)$ $(n=0,1,\ldots;n\neq l)$ olmak üzere bu sistemin elemanları:

$$\begin{cases} u_n(x)=\dfrac{y_n(x)-\dfrac{y_n(1)}{y_l(1)}y_l(x)}{\|y_n\|^2+ay_n^2(1)}, \quad (n\neq k,k+1,l),\\ u_{k+1}(x)=\dfrac{y_k(x)-\dfrac{y_k(1)}{y_l(1)}y_l(x)}{-y_k(1)\dfrac{\varpi''(\lambda_k)}{2}},\\ u_k(x)=\dfrac{y_{k+1}^*(x)-\dfrac{y_{k+1}^*(1)}{y_l(1)}y_l(x)}{-y_k(1)\dfrac{\varpi''(\lambda_k)}{2}}, \end{cases}$$

(e*) (e) sisteminin biortogonal eşleniği $u_n(x)$ $(n=0,1,\ldots;n\neq k+2)$ olmak üzere bu sistemin elemanları:

$$\begin{cases} u_n(x)=\dfrac{y_n(x)-\dfrac{y_n(1)}{y_k(1)}y_k(x)}{\|y_n\|^2+ay_n^2(1)}, \quad (n\neq k,k+1,k+2),\\ u_{k+1}(x)=\dfrac{y_{k+1}(x)-\dfrac{y_{k+1}(1)}{y_k(1)}y_k(x)}{-y_k(1)\dfrac{\varpi'''(\lambda_k)}{6}},\\ u_k(x)=\dfrac{y_{k+2}^{**}(x)-\dfrac{y_{k+2}^{**}(1)}{y_k(1)}y_k(x)}{-y_k(1)\dfrac{\varpi'''(\lambda_k)}{6}}, \end{cases}$$

(f*) (f) sisteminin biortogonal eşleniği $u_n(x)$ $(n=0,1,\ldots;n\neq k+1)$ olmak üzere bu sistemin elemanları:

$$\begin{cases} u_n(x)=\dfrac{y_n(x)-\dfrac{y_n(1)}{y_{k+1}^{**}(1)}y_{k+1}^{**}(x)}{\|y_n\|^2+ay_n^2(1)}, \quad (n\neq k,k+1,k+2),\\ u_{k+2}(x)=\dfrac{y_k(x)-\dfrac{y_k(1)}{y_{k+1}^{**}(1)}y_{k+1}^{**}(x)}{-y_k(1)\dfrac{\varpi'''(\lambda_k)}{6}},\\ u_k(x)=\dfrac{y_{k+2}^{\#}(x)-\dfrac{y_{k+2}^{\#}(1)}{y_{k+1}^{**}(1)}y_{k+1}^{**}(x)}{-y_k(1)\dfrac{\varpi'''(\lambda_k)}{6}}, \end{cases}$$

(g*) (g) sisteminin biortogonal eşleniği $u_n(x)$ $(n=0,1,\ldots;n\neq k)$ olmak üzere bu sistemin elemanları:

$$\begin{cases} u_n(x)=\dfrac{y_n(x)-\dfrac{y_n(1)}{y_{k+2}^{\#\#}(1)}y_{k+2}^{\#\#}(x)}{\|y_n\|^2+ay_n^2(1)}, \quad (n\neq k,k+1,k+2), \\ u_{k+2}(x)=\dfrac{y_k(x)-\dfrac{y_k(1)}{y_{k+2}^{\#\#}(1)}y_{k+2}^{\#\#}(x)}{-y_k(1)\dfrac{\varpi'''(\lambda_k)}{6}}, \\ u_{k+1}(x)=\dfrac{y_{k+1}(x)-\dfrac{y_{k+1}(1)}{y_{k+2}^{\#\#}(1)}y_{k+2}^{\#\#}(x)}{-y_k(1)\dfrac{\varpi'''(\lambda_k)}{6}}, \end{cases}$$

(h*) (h) sisteminin biortogonal eşleniği $u_n(x)$ $(n=0,1,\ldots;n\neq l)$ olmak üzere bu sistemin elemanları:

$$\begin{cases} u_n(x)=\dfrac{y_n(x)-\dfrac{y_n(1)}{y_l(1)}y_l(x)}{\|y_n\|^2+ay_n^2(1)}, \quad (n\neq k,k+1,k+2,l), \\ u_{k+2}(x)=\dfrac{y_k(x)-\dfrac{y_k(1)}{y_l(1)}y_l(x)}{-y_k(1)\dfrac{\varpi'''(\lambda_k)}{6}}, \\ u_{k+1}(x)=\dfrac{y_{k+1}^{**}(x)-\dfrac{y_{k+1}^{**}(1)}{y_l(1)}y_l(x)}{-y_k(1)\dfrac{\varpi'''(\lambda_k)}{6}}, \\ u_k(x)=\dfrac{y_{k+2}^{\#\#}(x)-\dfrac{y_{k+2}^{\#\#}(1)}{y_l(1)}y_l(x)}{-y_k(1)\dfrac{\varpi'''(\lambda_k)}{6}}, \end{cases}$$

(i*) (i) sisteminin biortogonal eşleniği $u_n(x)$ $(n=0,1,\ldots;n\neq r)$ olmak üzere bu sistemin elemanları:

$$\begin{cases} u_n(x)=\dfrac{y_n(x)-\dfrac{y_n(1)}{y_s(1)}y_s(x)}{\|y_n\|^2+ay_n^2(1)}, \quad (n\neq r,s), \\ u_s(x)=\dfrac{y_r(x)-\dfrac{y_r(1)}{y_s(1)}y_s(x)}{-y_r(1)\varpi'(\lambda_r)}, \end{cases}$$

(j*) (j) sisteminin biortogonal eşleniği $u_n(x)$ $(n=0,1,\ldots;n\neq l)$ olmak üzere bu sistemin elemanları:

$$\begin{cases} u_n(x)=\dfrac{y_n(x)-\dfrac{y_n(1)}{y_l(1)}y_l(x)}{\|y_n\|^2+ay_n^2(1)}, & (n\neq l,r,s), \\ u_s(x)=\dfrac{y_r(x)-\dfrac{y_r(1)}{y_s(1)}y_s(x)}{-y_r(1)\varpi'(\lambda_r)}, & \\ u_r(x)=\dfrac{y_s(x)-\dfrac{y_s(1)}{y_r(1)}y_r(x)}{-y_s(1)\varpi'(\lambda_s)} & \end{cases}$$

şeklinde tanımlanır. Bu eşitliklerde, aşağıda verilen yardımcı ek fonksiyonlar kullanılmıştır [38]:

$$y_{k+1}^{*}=y_{k+1}+c_1y_k,$$
$$y_{k+1}^{**}=y_{k+1}+c_2y_k,$$
$$y_{k+2}^{\#\#}=y_{k+2}+c_2y_{k+1}+d_2y_k.$$

Burada,

$$c_1=-\frac{\varpi'''(\lambda_k)}{3\varpi''(\lambda_k)}-\frac{y_{k+1}(1)}{y_k(1)}+\tilde{c}, \tag{4.14}$$

$$c_2=-\frac{\varpi^{IV}(\lambda_k)}{4\varpi'''(\lambda_k)}-\frac{y_{k+1}(1)}{y_k(1)}+\tilde{c},$$

$$d_2=-\frac{\omega^{V}(\lambda_k)}{20\omega'''(\lambda_k)}+\left(\frac{\omega^{IV}(\lambda_k)}{4\omega'''(\lambda_k)}\right)^2+\left(\frac{\omega^{IV}(\lambda_k)}{4\omega'''(\lambda_k)}+\frac{y_{k+1}(1)}{y_k(1)}\right)\left(\frac{y_{k+1}(1)}{y_k(1)}-\tilde{c}\right)-\frac{y_{k+2}(1)}{y_k(1)}+\tilde{d}$$

dir.

Bu yardımcı ek fonksiyonlar, sırasıyla (c), (f) ve (g) sistemlerinin tabanlık özelliklerinin incelenebilmesi için ihtiyaç duyulmuştur. Bu sistemlerin tabanlık özelliklerinin yanı sıra spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklığının araştırılması için de bu yardımcı ek fonksiyonlar kullanılacaktır.

Diğer taraftan; λ_k, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin iki katlı özdeğeri $(\lambda_k=\lambda_{k+1})$ ise (4.11) koşulu $y_{k+1}^{*}(1)\neq 0$ koşuluna; üç katlı özdeğeri $(\lambda_k=\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2})$ ise (4.12) ve (4.13) koşulları sırasıyla $y_{k+1}^{**}(1)\neq 0$ ve $y_{k+2}^{\#\#}(1)\neq 0$ koşullarına denktir [38].

4.1.2. Kesinleştirilmiş Asimptotik Formüller

(4.1)-(4.3) sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sistemleri üzere spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklık koşullarıyla ilgili teoremlerin verilebilmesi için bu problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formüllerinin kesinleştirilmesi gerekir. Bu kısımda, bu asimptotik formüllerin kesinleştirilmesi için ilgili teoremin ifadesi ve ispatı verilecektir.

Teorem 4.1.2.1. $\lambda_n = s_n^2$ $(\operatorname{Re} s_n \geq 0)$ olsun. n'nin yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur:

I. $\beta = 0$ ise, o halde

$$s_n = n\pi + \frac{A_1}{n\pi} + O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n}\right), \tag{4.15}$$

$$\begin{aligned} y_n(x) = \psi(x,\lambda_n) = \frac{\sin n\pi x}{n\pi} + \frac{A_1 x - \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau}{(n\pi)^2}\cos n\pi x + \frac{\cos n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau d\tau + \\ + \frac{\sin n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\sin 2n\pi\tau d\tau + O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{4.16}$$

dir. Burada; $A_1 = \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau$, $\delta_n^{(1)} = \left|\int_0^1 q(\tau)\cos 2n\pi\tau d\tau\right| + \frac{1}{n}$.

II. $0 < \beta < \pi$ ise, o halde

$$s_n = \left(n - \frac{1}{2}\right)\pi + \frac{A_2}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi} + O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right), \tag{4.17}$$

$$\begin{aligned} y_n(x) = \varphi(x,\lambda_n) = \cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x + \frac{h - A_2 x + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau}{\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi}\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x + \\ + \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau d\tau - \\ - \frac{\cos\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\sin(2n-1)\pi\tau d\tau + O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.18}$$

dir. Burada; $h = \cot\beta$, $A_2 = \cot\beta + \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau$, $\delta_n^{(2)} = \left|\int_0^1 q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau d\tau\right| + \frac{1}{n}$.

İspat. [51, Teorem 2.1]'in ispatında kullanılan metoda benzer bir metot kullanılarak ispat verilecektir.

$\lambda = s^2$ ve $s = \sigma + it$ olsun.

I. $\beta = 0$ olsun. Bu durumda, (4.5) başlangıç koşulundan

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + \frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\psi(\tau,\lambda)\sin s(x-\tau)d\tau \tag{4.19}$$

eşitliği geçerlidir [12, Chapter I, Section 1.2, Lemma 1.2.1]. Ayrıca $|s| > s_0$ için

$$\psi(x,\lambda) = \frac{\sin sx}{s} + O\left(e^{|t|x}|s|^{-2}\right) \tag{4.20}$$

eşitliği sağlanacak şekilde $s_0 > 0$ vardır. Burada, $O\left(e^{|t|x}|s|^{-2}\right)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında her bir keyfi x için s değişkeninin bir tam fonksiyonudur ve $0 \le x \le 1$ için x'e göre düzgündür [12, Chapter I, Section 1.2, Lemma 1.2.2].

n'nin yeterince büyük değerleri için

$$s_n = \sqrt{\lambda_n} = n\pi + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.21}$$

asimptotik formülü doğrudur [32]. (4.19)-(4.21) eşitlileri kullanılarak

$$\begin{aligned}\psi(x,\lambda_n) = {} & \frac{\sin s_n x}{s_n} - \frac{\cos s_n x}{2s_n^{\;2}}\int_0^x q(\tau)d\tau + \frac{\cos s_n x}{2s_n^{\;2}}\int_0^x q(\tau)\cos 2s_n\tau d\tau + \\ & + \frac{\sin s_n x}{2s_n^{\;2}}\int_0^x q(\tau)\sin 2s_n\tau d\tau + O\left(n^{-3}\right)\end{aligned} \tag{4.22}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan, (4.21) eşitliği kullanılarak elde edilen

$$\cos s_n x = \cos n\pi x + O\left(n^{-1}\right),\ \sin s_n x = \sin n\pi x + O\left(n^{-1}\right)$$

eşitlikleri (4.22) ifadesinde uygulanırsa:

$$\begin{aligned}\psi(x,\lambda_n) = {} & \frac{\sin s_n x}{s_n} - \frac{\cos n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)d\tau + \frac{\cos n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau d\tau + \\ & + \frac{\sin n\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\sin 2n\pi\tau d\tau + O\left(n^{-3}\right)\end{aligned} \tag{4.23}$$

ifadesi elde edilir. Bununla birlikte, (4.19) eşitliğinin x'e göre türevi alınıp bu türeve (4.21) eşitliği uygulanırsa

$$\psi_x'(x,\lambda_n) = \cos n\pi x + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.24}$$

ifadesi elde edilir.

Dikkat edilirse; $\beta = 0$ olduğundan dolayı (4.2) sınır koşulu $y(0) = 0$ biçiminde yazılır. Bu nedenle, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\psi_x'(1,\lambda_n) - (a\lambda_n + b)\psi(1,\lambda_n) = 0 \tag{4.25}$$

denkleminin kökleridir. $x = 1$ için (4.23) ve (4.24) eşitlikleri

$$\psi(1,\lambda_n) = \frac{\sin s_n}{s_n} - \frac{(-1)^n}{2(n\pi)^2}\int_0^1 q(\tau)d\tau + O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n^2}\right), \tag{4.26}$$

$$\psi'_x(1,\lambda_n)=(-1)^n+O(n^{-1}) \tag{4.27}$$

biçiminde yazılır.

$s_n = n\pi+\varepsilon_n$ olsun. O halde,

$$\frac{\sin s_n}{s_n}=\frac{(-1)^n\varepsilon_n}{n\pi}+O(n^{-4}) \tag{4.28}$$

eşitliği elde edilir. (4.26)-(4.28) ifadeleri (4.25) denkleminde göz önüne alınırsa

$$\frac{\varepsilon_n}{n\pi}-\frac{1}{2(n\pi)^2}\int_0^1 q(\tau)d\tau-\frac{1}{a(n\pi)^2}+O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n^2}\right)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin ε_n çözümü, $s_n = n\pi+\varepsilon_n$ formülünde yerine yazılırsa (4.15) formülü elde edilir.

(4.15) asimptotik formülü kullanılarak da

$$\frac{\sin s_n x}{s_n}=\frac{\sin n\pi x}{n\pi}+\frac{A_1 x\cos n\pi x}{(n\pi)^2}+O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n^2}\right)$$

ifadesi elde edilir. Bu son ifade, (4.23) eşitliğinde dikkate alınırsa (4.16) asimptotik formülü sağlanır.

II. $0<\beta<\pi$ olsun. Bu durumda, (4.4) başlangıç koşulundan

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+\frac{h}{s}\sin sx+\frac{1}{s}\int_0^x q(\tau)\varphi(\tau,\lambda)\sin s(x-\tau)d\tau \tag{4.29}$$

eşitliği geçerlidir [12, Chapter I, Section 1.2, Lemma 1.2.1]. Ayrıca $|s|>s_0$ için

$$\varphi(x,\lambda)=\cos sx+O\left(e^{|t|x}|s|^{-1}\right) \tag{4.30}$$

eşitliği sağlanacak şekilde $s_0>0$ vardır. Burada, $O\left(e^{|t|x}|s|^{-1}\right)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında her bir keyfi x için s değişkeninin bir tam fonksiyonudur ve $0\le x\le 1$ için x'e göre düzgündür [12, Chapter I, Section 1.2, Lemma 1.2.2].

n'nin yeterince büyük değerleri için

$$s_n=\sqrt{\lambda_n}=\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi+O(n^{-1}) \tag{4.31}$$

asimptotik formülü doğrudur [32]. (4.29)-(4.31) eşitlileri kullanılarak

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda_n)=\cos s_n x+\frac{h+\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau}{s_n}\sin s_n x+\frac{\sin s_n x}{2s_n}\int_0^x q(\tau)\cos 2s_n\tau d\tau-\\ -\frac{\cos s_n x}{2s_n}\int_0^x q(\tau)\sin 2s_n\tau d\tau+O(n^{-2})\end{aligned} \tag{4.32}$$

ifadesi elde edilir. Diğer taraftan, (4.31) eşitliği kullanılarak elde edilen

$$\cos s_n x = \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x + O\left(n^{-1}\right),\ \sin s_n x = \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x + O\left(n^{-1}\right)$$

eşitlikleri (4.32) ifadesinde uygulanırsa:

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda_n) = {} & \cos s_n x + \frac{h\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} + \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)d\tau + \\ & + \frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau d\tau - \\ & - \frac{\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}\int_0^x q(\tau)\sin(2n-1)\pi\tau d\tau + O\left(n^{-2}\right)\end{aligned} \tag{4.33}$$

ifadesi elde edilir. Bununla birlikte, (4.29) eşitliğinin x'e göre türevi alınıp bu türeve (4.31) eşitliği uygulanırsa

$$\varphi'(x,\lambda_n) = -s_n \sin s_n x + O(1) \tag{4.34}$$

eşitliği elde edilir.

Dikkat edilirse; $0<\beta<\pi$ olduğundan dolayı (4.2) sınır koşulu

$$y'(0) = hy(0)$$

biçiminde yazılır. Burada, $h=\cot\beta$ dir. Bu nedenle, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\varphi'_x(1,\lambda_n) - (a\lambda_n + b)\varphi(1,\lambda_n) = 0 \tag{4.35}$$

denkleminin kökleridir. $x=1$ için (4.33) ve (4.34) eşitlikleri

$$\varphi(1,\lambda_n) = \cos s_n + \frac{2h(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi} + \frac{(-1)^{n-1}}{(2n-1)\pi}\int_0^1 q(\tau)d\tau + O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right), \tag{4.36}$$

$$\varphi'(1,\lambda_n) = (-1)^n\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi + O(1) \tag{4.37}$$

biçiminde yazılır.

$s_n = \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_n$ olsun. (4.36) ve (4.37) ifadeleri (4.35) denkleminde göz önüne alınırsa

$$\varepsilon_n - \frac{2h}{(2n-1)\pi} - \frac{1}{(2n-1)\pi}\int_0^1 q(\tau)d\tau - \frac{2}{a(2n-1)\pi} + O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right) = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklemin ε_n çözümü, $s_n = \left(n-\frac{1}{2}\right)\pi + \varepsilon_n$ formülünde yerine yazılırsa (4.17) formülü elde edilir.

(4.17) asimptotik formülü kullanılarak da

$$\cos s_n x = \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x - \frac{A_2 x \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi} + O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right)$$

ifadesi elde edilir. Bu son ifade (4.33) eşitliğinde dikkate alınırsa (4.18) asimptotik formülü sağlanır. ■

4.1.3. Kök Fonksiyonlar Sistemleri Üzere ve Bu Sistemlere Biortogonal Olan Sistemler Üzere Spektral Ayrışımların Düzgün Yakınsaklık Koşulları

Bu kısımda, iki teorem verilecektir. Bunlardan ilki, (4.1)-(4.3) sınır değer probleminin kök fonksiyonlar sistemleri üzere spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklığının incelenebilmesi içindir. İkincisi ise, aynı problemin kök fonksiyonlar sistemine biortogonal olan sistemler üzere spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklığının araştırılması içindir.

Bahsedilen teoremler verilmeden önce, $\{\theta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ trigonometrik sistemi aşağıdaki gibi tanımlansın:

$$\theta_n(x) = \begin{cases} \sqrt{2}\sin n\pi x, & \beta=0, \\ \sqrt{2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x, & 0<\beta<\pi. \end{cases}$$

Diğer taraftan, verilecek teoremlerin ispatlarında kullanılmak üzere aşağıdaki tanımlama ve düzenlemeler yapılsın:

(a^*)-(j^*) biortogonal sistemlerinin tümünde kullanılmak üzere

$$g_n = \left(\|y_n\|^2 + a y_n^2(1)\right)^{-1} \tag{4.38}$$

dizisi tanımlansın.

$\beta = 0$ olduğu durumunda, (4.16) asimptotik formülünden

$$y_n(1) = \frac{(-1)^n}{a(n\pi)^2} + O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n^2}\right), \tag{4.39}$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{1}{2(n\pi)^2} + O\left(n^{-3}\right) \tag{4.40}$$

elde edilir. Diğer taraftan, $0 < \beta < \pi$ olduğu durumda (4.18) asimptotik formülünden

$$y_n(1) = \frac{2(-1)^n}{a(2n-1)\pi} + O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right), \tag{4.41}$$

$$\|y_n\|^2 = \frac{1}{2} + O\left(n^{-1}\right) \tag{4.42}$$

elde edilir. (4.39)-(4.42) eşitliklerinden (4.38) eşitliği

$$g_n = \begin{cases} 2(n\pi)^2 + O(n), & \beta = 0 \\ 2 + O(n^{-1}), & 0 < \beta < \pi \end{cases} \tag{4.43}$$

biçiminde yazılabilir.

Teorem 4.1.3.1. $f \in C[0,1]$ ve $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında $\{\theta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre Fourier seri ayrışımı düzgün yakınsak olsun. O halde, $f(x)$ fonksiyonu (a)-(j) sistemlerinin her birine göre Fourier serilerine ayrıştırılabilir ve bu ayrışımlar her $[0,b]$ $(0 < b < 1)$ aralığında düzgün yakınsaktır. $f(x)$ fonksiyonunun (a)-(j) sistemlerinin her birine göre Fourier serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart (a), (d), (h) ve (j) sistemleri için $(f, y_l) = 0$; (b) ve (e) sistemleri için $(f, y_k) = 0$; (c) sistemi için $(f, y_{k+1}^{*}) = 0$; (f) sistemi için $(f, y_{k+1}^{**}) = 0$; (g) sistemi için $(f, y_{k+2}^{\#\#}) = 0$ ve (i) sistemi için $(f, y_s) = 0$ olmasıdır.

İspat. Tüm sistemlerin ispatında benzer işlemlerin tekrarlanmaması için aşağıdaki işaretlemeler yapılsın.

$f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında (a)-(j) sistemlerinin her birine göre Fourier serileri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlanır: $l \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$$F_a^{(\xi)}(x) = \sum_{n=0, n\neq l}^{\infty} (f, u_n) y_n(x), \qquad F_b^{(\xi)}(x) = \sum_{n=0, n\neq k+1}^{\infty} (f, u_n) y_n(x),$$

$$F_c^{(\xi)}(x) = \sum_{n=0, n\neq k}^{\infty} (f, u_n) y_n(x), \qquad F_d^{(\xi)}(x) = \sum_{n=0, n\neq l}^{\infty} (f, u_n) y_n(x),\ l \neq k, k+1,$$

$$F_e^{(\xi)}(x) = \sum_{n=0, n\neq k+2}^{\infty} (f, u_n) y_n(x), \qquad F_f^{(\xi)}(x) = \sum_{n=0, n\neq k+1}^{\infty} (f, u_n) y_n(x),$$

$$F_g^{(\xi)}(x) = \sum_{n=0, n\neq k}^{\infty} (f, u_n) y_n(x), \qquad F_h^{(\xi)}(x) = \sum_{n=0, n\neq l}^{\infty} (f, u_n) y_n(x),\ l \neq k, k+1, k+2,$$

$$F_i^{(\xi)}(x) = \sum_{n=0, n\neq r}^{\infty} (f, u_n) y_n(x), \qquad F_j^{(\xi)}(x) = \sum_{n=0, n\neq l}^{\infty} (f, u_n) y_n(x),\ l \neq r, s.$$

Burada, $\beta = 0$ olduğunda $\xi = 1$; $y_n(x)$, (4.16) asimptotik formülüne sahip ve $0 < \beta < \pi$ olduğunda $\xi = 2$; $y_n(x)$, (4.18) asimptotik formülüne sahip kök fonksiyonlar sistemidir. Ayrıca, her iki durumda da $u_n(x)$, (a)-(j) sistemlerine sırasıyla biortogonal eşlenik olan (a*)-(j*) sistemleriyle tanımlanmıştır.

Bu serilerin daha anlaşılır olması için $F_a^{(1)}(x)$ ve $F_h^{(2)}(x)$ serilerini ele alalım. $F_a^{(1)}(x)$ serisi, $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $\beta=0$ durumunda $y_n(x)$ özfonksiyonlar sisteminin (4.16) asimptotik formülüyle verildiği (a) sistemi üzere Fourier serisidir. $F_h^{(2)}(x)$ serisi ise, $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $0<\beta<\pi$ durumunda $y_n(x)$ özfonksiyonlar sisteminin (4.18) asimptotik formülüyle verildiği (h) sistemi üzere Fourier serisidir.

Diğer taraftan; (a), (d), (h) ve (j) sistemlerine sırasıyla biortogonal olan (a*), (d*), (h*) ve (j*) sistemlerinin benzer yapısından dolayı bu sistemlere uygun $F_a^{(\xi)}(x)$, $F_d^{(\xi)}(x)$, $F_h^{(\xi)}(x)$ ve $F_j^{(\xi)}(x)$ $(\xi=1,2)$ Fourier serileri benzerdir. Bu nedenle; $F_a^{(\xi)}(x)$, $F_d^{(\xi)}(x)$, $F_h^{(\xi)}(x)$ ve $F_j^{(\xi)}(x)$ $(\xi=1,2)$ serilerinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$F_1^{(\xi)}(x)=\sum_{n=j}^{\infty}(f,u_n)y_n(x),\ (\xi=1,2)$$

serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olmasıdır. Burada, λ_n özdeğerleri reel ve basit ise $j=l+1$; $\lambda_k=\lambda_{k+1}$ ise $j=k+2$; $\lambda_k=\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}$ ise $j=k+3$ ve $\lambda_s=\overline{\lambda}_r$ ise $j=\max\{r,s\}+1$ dir.

(b) ve (e) sistemlerine sırasıyla biortogonal olan (b*) ve (e*) sistemlerinin benzer yapısından dolayı bu sistemlere uygun $F_b^{(\xi)}(x)$ ve $F_e^{(\xi)}(x)$ $(\xi=1,2)$ Fourier serileri benzerdir. Bu nedenle; $F_b^{(\xi)}(x)$ ve $F_e^{(\xi)}(x)$ $(\xi=1,2)$ serilerinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$F_2^{(\xi)}(x)=\sum_{n=j}^{\infty}(f,u_n)y_n(x),\ (\xi=1,2)$$

serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olmasıdır. Burada, $\lambda_k=\lambda_{k+1}$ ise $j=k+2$ ve $\lambda_k=\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}$ ise $j=k+3$ dir.

Benzer şekilde, $F_c^{(\xi)}(x), F_f^{(\xi)}(x), F_g^{(\xi)}(x)$ ve $F_i^{(\xi)}(x)$ $(\xi=1,2)$ serilerinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serilere sırasıyla uygun

$$F_3^{(\xi)}(x)=\sum_{n=k+2}^{\infty}(f,u_n)y_n(x),\ (\xi=1,2) \qquad F_4^{(\xi)}(x)=\sum_{n=k+3}^{\infty}(f,u_n)y_n(x),\ (\xi=1,2)$$

$$F_5^{(\xi)}(x)=\sum_{n=k+3}^{\infty}(f,u_n)y_n(x),\ (\xi=1,2) \qquad F_6^{(\xi)}(x)=\sum_{n=s+2}^{\infty}(f,u_n)y_n(x),\ (\xi=1,2)$$

serilerin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olmasıdır.

Şimdi, Teorem 4.1.3.1'in ispatını sadece (c) sistemi için yapalım.

(c*) biortogonal sistemi, (4.38) eşitliğinden

$$u_n(x)=g_n\left(y_n(x)-\frac{y_n(1)}{y^*_{k+1}(1)}y^*_{k+1}(x)\right) \tag{4.44}$$

biçiminde yazılabilir.

$\beta=0$ durumu:

$\left\{S_m^{(1)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ dizisi, $F_3^{(1)}(x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. (4.44) eşitliği kullanılarak bu dizi

$$S_m^{(1)}(x)=S_{m,1}^{(1)}(x)+S_{m,2}^{(1)}(x)$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$S_{m,1}^{(1)}(x)=\sum_{n=k+2}^{m}g_n(f,y_n)y_n(x), \tag{4.45}$$

$$S_{m,2}^{(1)}(x)=\chi_3(x)\sum_{n=k+2}^{m}g_ny_n(1)y_n(x) \tag{4.46}$$

dir. $\chi_3(x)=-\dfrac{(f,y^*_{k+1})}{y^*_{k+1}(1)}$.

Dikkat edilirse, (4.46) eşitliğinde $\chi_3(x)$ biçiminde bir çarpan ortaya çıktı. O halde, $F_\nu^{(\xi)}(x)$ $\left(\xi=1,2 \text{ ve } \nu=\overline{1,6}\right)$ serilerinin kısmi toplamlar dizileri incelendiğinde (4.46) eşitliğine benzer diziler oluşacaktır. Bu dizilerde, $\chi_\nu(x)$ $\left(\nu=\overline{1,6}\right)$ çarpanlarının dışındaki seriler hepsinde benzerdir. Dolayısıyla, tekrar tekrar aynı hesaplamaları yapmak yerine Teorem 4.1.3.1' in ispatı sadece (c) sistemi için yapılacaktır. Diğer sistemler için ispat tamamen benzerdir. Ayrıca, $F_\nu^{(\xi)}(x)$ $\left(\xi=1,2 \text{ ve } \nu=\overline{1,6}\right)$ serilerinin kısmi toplamlar dizilerinde gerekli hesaplamalar yapıldığında $\chi_\nu(x)$ $\left(\nu=\overline{1,6}\right)$ çarpanları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\chi_1(x)=-\frac{(f,y_l)}{y_l(1)}, \qquad \chi_2(x)=-\frac{(f,y_k)}{y_k(1)},$$

$$\chi_3(x)=-\frac{(f,y^*_{k+1})}{y^*_{k+1}(1)}, \qquad \chi_4(x)=-\frac{(f,y^{**}_{k+1})}{y^{**}_{k+1}(1)},$$

$$\chi_5(x)=-\frac{(f,y^{\#\#}_{k+2})}{y^{\#\#}_{k+2}(1)}, \qquad \chi_6(x)=-\frac{(f,y_s)}{y_s(1)}.$$

İspatın neden sadece (c) sistemi için yapıldığı açıklandıktan sonra $\beta=0$ durumu için ispata geri dönelim.

İlk olarak, (4.45) fonksiyonel dizisinin düzgün yakınsaklığı incelensin. (4.43) eşitliğiyle birlikte

$$\begin{aligned} g_n(f,y_n)y_n(x) &= \left(2(n\pi)^2+O(n)\right)(f,y_n)y_n(x) \\ &= 2(f,n\pi y_n)n\pi y_n(x)+(f,n\pi y_n)y_n(x)O(1) \end{aligned} \tag{4.47}$$

elde edilir. (4.16) asimptotik formülünden

$$n\pi y_n(x)=\sin n\pi x+\frac{\alpha^{(1)}(x)\cos n\pi x}{n\pi}+\frac{\alpha_n^{(1)}(x)\cos n\pi x}{2n\pi}+\frac{\beta_n^{(1)}(x)\sin n\pi x}{2n\pi}+O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n}\right) \tag{4.48}$$

elde edilir. Burada,

$$\alpha^{(1)}(x)=A_1x-\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau,$$

$$\alpha_n^{(1)}(x)=\int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau d\tau, \tag{4.49}$$

$$\beta_n^{(1)}(x)=\int_0^x q(\tau)\sin n\pi\tau d\tau \tag{4.50}$$

dir. Bu son eşitliklerde dikkat edilirse $\alpha^{(1)}(x)\in C[0,1]$ ve $\left\{\alpha_n^{(1)}(x)\right\}_{n=k+2}^{\infty}$, $\left\{\beta_n^{(1)}(x)\right\}_{n=k+2}^{\infty}$ fonksiyonel dizileri düzgün sınırlıdır. Bu nedenle, (4.48) eşitliği kullanılarak (4.47) eşitliği

$$g_n(f,y_n)y_n(x)=2(f,\sin n\pi x)\sin n\pi x+R_n^{(1)}(x)$$

biçiminde düzenlenebilir. Burada,

$$\begin{aligned} R_n^{(1)}(x) &= (f,\sin n\pi x)O\left(\frac{1}{n}\right)+\left(\alpha^{(1)}(x)f(x),\cos n\pi x\right)O\left(\frac{1}{n}\right)+ \\ &+\left(f,\alpha_n^{(1)}(x)\cos n\pi x\right)O\left(\frac{1}{n}\right)+ \\ &+\left(f,\beta_n^{(1)}(x)\sin n\pi x\right)O\left(\frac{1}{n}\right)+O\left(\frac{\delta_n^{(1)}}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.51}$$

dir. Bu nedenle, (4.45) fonksiyonel dizisi

$$S_{m,1}^{(1)}(x)=\sum_{n=k+2}^{m}\left(f,\sqrt{2}\sin n\pi x\right)\sqrt{2}\sin n\pi x+\sum_{n=k+2}^{m}R_n^{(1)}(x)$$

şeklinde yazılır. Teorem 4.1.3.1 deki hipotezden, son eşitlikteki ilk seri $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

Bu nedenle,

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}R_n^{(1)}(x) \tag{4.52}$$

serisinin $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. (4.51) eşitliği dikkate alınırsa

$$\left|R_n^{(1)}(x)\right| \le \frac{C_1}{n}\left\{\left|\left(f,\sin n\pi x\right)\right| + \left|\left(\alpha^{(1)}(x)\,f(x),\cos n\pi x\right)\right| + \left|\left(f,\alpha_n^{(1)}(x)\cos n\pi x\right)\right| + \right.$$

$$\left. + \left|\left(f,\beta_n^{(1)}(x)\sin n\pi x\right)\right| + \delta_n^{(1)}\right\} \le$$

$$\le C_2\left\{\left|\left(f,\sin n\pi x\right)\right|^2 + \left|\left(\alpha^{(1)}(x)\,f(x),\cos n\pi x\right)\right|^2 + \left(\int_0^1\left|f(x)\alpha_n^{(1)}(x)\right|dx\right)^2 + \right.$$

$$\left. + \left(\int_0^1\left|f(x)\beta_n^{(1)}(x)\right|dx\right)^2 + \frac{\delta_n^{(1)}}{n}\right\}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, C_1 ve C_2 belli pozitif sabitlerdir. Fourier katsayıları için Bessel eşitsizliği kullanılarak (4.52) serisindeki

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}\left|\left(f,\sin n\pi x\right)\right|^2,\ \sum_{n=k+2}^{\infty}\left|\left(\alpha^{(1)}(x)\,f(x),\cos n\pi x\right)\right|^2,\ \sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{\delta_n^{(1)}}{n}$$

sayısal serilerinin düzgün yakınsaklığını göstermek kolaydır. (4.49) eşitliğiyle birlikte Bessel eşitsizliğinin tekrar kullanılmasıyla

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\alpha_n^{(1)}(x)\right|dx\right)^2 \le \|f\|^2\sum_{n=k+2}^{\infty}\int_0^1\left|\alpha_n^{(1)}(x)\right|^2dx \le$$

$$\le \|f\|^2\int_0^1\left[\sum_{n=k+2}^{\infty}\left|\int_0^x q(\tau)\cos 2n\pi\tau\,d\tau\right|^2\right]dx \le$$

$$\le C_3\|f\|^2\int_0^1\int_0^x\left|q(\tau)\right|^2 d\tau dx \le C_3\|f\|^2\|q\|^2$$

elde edilir. Burada, C_3 bir pozitif sabittir. Benzer şekilde, (4.50) eşitliğiyle birlikte Bessel eşitsizliğinin tekrar kullanılmasıyla

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\beta_n^{(1)}(x)\right|dx\right)^2 \le C_4\|f\|^2\|q\|^2$$

elde edilir. Burada, C_4 bir pozitif sabittir. Bu nedenle, (4.52) mutlak ve düzgün yakınsaktır. O halde, $\left\{S_{m,1}^{(1)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi de $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

$\left(f,y_{k+1}^*\right)=0$ olsun. Bu durumda, $S_m^{(1)}(x)=S_{m,1}^{(1)}(x)$ olacağından dolayı $\left\{S_m^{(1)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi de $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. Sonuç olarak, $\left(f,y_{k+1}^*\right)=0$ olması durumunda $\beta=0$ için Teorem 4.1.3.1'in ikinci kısmı ispatlanmıştır.

$\left(f,y_{k+1}^*\right)\ne 0$ olsun. (4.46) fonksiyonel dizisinin düzgün yakınsaklığı incelensin. (4.16), (4.39) ve (4.43) ifadeleri kullanılırsa

$$\sum_{n=k+2}^{m} g_n y_n(1) y_n(x) = \frac{2}{a\pi}\sum_{n=k+2}^{m}\frac{\sin n\pi(1+x)}{n} + \sum_{n=k+2}^{m} O\left(n^{-2}\right)$$

elde edilir. Dikkat edilirse,

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{\sin nt}{n}$$

serisi her $[\delta, 2\pi-\delta]$ $(0<\delta<\pi)$ aralığında düzgün yakınsaktır [52, Chapter I, Section 30, Theorem I]. Bu nedenle,

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} \frac{\sin n\pi(1+x)}{n}$$

serisi $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. O halde, $\left\{S_{m,2}^{(1)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi de $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

Sonuç olarak, $\beta=0$ için Teorem 4.1.3.1 ispatlanmıştır.

$0<\beta<\pi$ durumu:

$\left\{S_m^{(2)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ dizisi, $F_3^{(2)}(x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. (4.44) eşitliği kullanılarak bu dizi

$$S_m^{(2)}(x)=S_{m,1}^{(2)}(x)+S_{m,2}^{(2)}(x)$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$S_{m,1}^{(2)}(x)=\sum_{n=k+2}^{m} g_n(f,y_n)y_n(x)\ , \tag{4.53}$$

$$S_{m,2}^{(2)}(x)=\chi_3(x)\sum_{n=k+2}^{m} g_n y_n(1)y_n(x) \tag{4.54}$$

dir. $\chi_3(x)=-\dfrac{(f,y_{k+1}^*)}{y_{k+1}^*(1)}$.

İlk olarak, (4.53) fonksiyonel dizisinin düzgün yakınsaklığı incelensin. (4.43) eşitliğiyle birlikte

$$\begin{aligned} g_n(f,y_n)y_n(x)&=\left(2+O\left(n^{-1}\right)\right)(f,y_n)y_n(x) \\ &=2(f,y_n)y_n(x)+(f,y_n)y_n(x)O\left(n^{-1}\right) \end{aligned} \tag{4.55}$$

elde edilir. (4.18) asimptotik formülünden

$$\begin{aligned} y_n(x)=\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x+\frac{\alpha^{(2)}(x)\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi}+\frac{\alpha_n^{(2)}(x)\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}- \\ -\frac{\beta_n^{(2)}(x)\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x}{(2n-1)\pi}+O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.56}$$

elde edilir. Burada;

$$\alpha^{(2)}(x) = h - A_2 x + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)\,d\tau,$$

$$\alpha_n^{(2)}(x) = \int_0^x q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau\,d\tau, \tag{4.57}$$

$$\beta_n^{(2)}(x) = \int_0^x q(\tau)\sin(2n-1)\pi\tau\,d\tau \tag{4.58}$$

dir. Bu son eşitliklerde dikkat edilirse $\alpha^{(2)}(x) \in C[0,1]$ ve $\left\{\alpha_n^{(2)}(x)\right\}_{n=k+2}^{\infty}$, $\left\{\beta_n^{(2)}(x)\right\}_{n=k+2}^{\infty}$ fonksiyonel dizileri düzgün sınırlıdır. Bu nedenle, (4.56) kullanılarak (4.55) eşitliği

$$g_n(f, y_n)\,y_n(x) = 2\left(f, \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x + R_n^{(2)}(x)$$

biçiminde düzenlenebilir. Burada,

$$\begin{aligned} R_n^{(2)}(x) = {} & \left(f, \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right) O\left(\frac{1}{n}\right) + \left(\alpha^{(2)}(x)\, f(x), \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right) O\left(\frac{1}{n}\right) + \\ & + \left(f, \alpha_n^{(2)}(x)\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right) O\left(\frac{1}{n}\right) + \\ & + \left(f, \beta_n^{(2)}(x)\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right) O\left(\frac{1}{n}\right) + O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.59}$$

dir. Bu nedenle (4.53) fonksiyonel dizisi

$$S_{m,1}^{(2)}(x) = \sum_{n=k+2}^{m}\left(f, \sqrt{2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\sqrt{2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x + \sum_{n=k+2}^{m} R_n^{(2)}(x)$$

şeklinde yazılır. Teorem 4.1.3.1 de verilen hipotezden, son eşitlikteki ilk seri $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

Bu nedenle

$$\sum_{n=k+2}^{\infty} R_n^{(2)}(x) \tag{4.60}$$

serisinin $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsak olduğunu göstermek yeterlidir. (4.59) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned} \left|R_n^{(2)}(x)\right| \le {} & \frac{C_5}{n}\left\{\left|\left(f, \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right| + \left|\left(\alpha^{(2)}(x)\, f(x), \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right| + \left|\left(f, \alpha_n^{(2)}(x)\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right| + \right. \\ & \left. + \left|\left(f, \beta_n^{(2)}(x)\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right| + \delta_n^{(2)}\right\} \le \\ \le {} & C_6\left\{\left|\left(f, \cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right|^2 + \left|\left(\alpha^{(2)}(x)\, f(x), \sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right|^2 + \left(\int_0^1 \left|f(x)\,\alpha_n^{(2)}(x)\right| dx\right)^2 + \right. \\ & \left. + \left(\int_0^1 \left|f(x)\,\beta_n^{(2)}(x)\right| dx\right)^2 + \frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right\} \end{aligned}$$

eşitsizliği elde edilir. Burada, C_5 ve C_6 belli pozitif sabitlerdir. Fourier katsayıları için Bessel eşitsizliği kullanılarak (4.60) serisindeki

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}\left|\left(f,\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right|^2,\ \sum_{n=k+2}^{\infty}\left|\left(\alpha^{(2)}(x)f(x),\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right|^2,\ \sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{\delta_n^{(2)}}{n}$$

sayısal serilerinin düzgün yakınsaklığını göstermek kolaydır. (4.57) eşitliğiyle birlikte Bessel eşitsizliğinin tekrar kullanılmasıyla

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\alpha_n^{(2)}(x)\right|dx\right)^2\le\|f\|^2\sum_{n=k+2}^{\infty}\int_0^1\left|\alpha_n^{(2)}(x)\right|^2dx\le$$

$$\le\|f\|^2\int_0^1\left[\sum_{n=k+2}^{\infty}\left|\int_0^x q(\tau)\cos(2n-1)\pi\tau d\tau\right|^2\right]dx\le$$

$$\le C_7\|f\|^2\int_0^1\int_0^x|q(\tau)|^2d\tau dx\le C_7\|f\|^2\|q\|^2$$

elde edilir. Burada, C_7 bir pozitif sabittir. Benzer şekilde, (4.58) eşitliğiyle birlikte Bessel eşitsizliğinin tekrar kullanılmasıyla

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\beta_n^{(2)}(x)\right|dx\right)^2\le C_8\|f\|^2\|q\|^2$$

elde edilir. Burada, C_8 bir pozitif sabittir. Bu nedenle, (4.60) mutlak ve düzgün yakınsaktır. O halde, $\left\{S_{m,1}^{(2)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi de $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

$(f,y_{k+1}^*)=0$ olsun. Bu durumda, $S_m^{(2)}(x)=S_{m,1}^{(2)}(x)$ olacağından dolayı $\left\{S_m^{(2)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi de $[0,1]$aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır. Sonuç olarak, $(f,y_{k+1}^*)=0$ olması durumunda $0<\beta<\pi$ için Teorem 4.1.3.1'in ikinci kısmı ispatlanmıştır.

$(f,y_{k+1}^*)\ne 0$ olsun. (4.54) fonksiyonel dizisinin düzgün yakınsaklığı incelensin. (4.18), (4.41) ve (4.43) ifadeleri kullanılırsa

$$\sum_{n=k+2}^{m}g_ny_n(1)y_n(x)=-\frac{4}{a\pi}\sum_{n=k+2}^{m}\frac{\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi(1+x)}{2n-1}+\sum_{n=k+2}^{m}O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right)$$

elde edilir. Dikkat edilirse, $0\le x\le b<1$ için

$$\left|\sum_{n=k+2}^{m}\sin\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi(1+x)\right|=\frac{\left|\cos(k+1)\pi(1+x)-\cos m\pi(1+x)\right|}{2\sin\frac{\pi(1+x)}{2}}\le$$

$$\le\frac{1}{\sin\frac{\pi(1+x)}{2}}\le\frac{1}{\sin\frac{\pi(1+b)}{2}}$$

eşitsizliği sağlandığından ve $\sum_{n=k+2}^{m}\frac{\delta_n^{(2)}}{n}$ sayısal serisi yakınsak olduğundan dolayı $\left\{S_{m,2}^{(2)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$

serisi $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığı üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır [52, Introductory material, §1, Abel's Lemma].

Sonuç olarak, $0<\beta<\pi$ için Teorem 4.1.3.1 ispatlanmıştır.■

Teorem 4.1.3.2. $f \in C[0,1]$ ve $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında $\{\theta_n(x)\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre Fourier ayrışımı düzgün yakınsak olsun. O halde, $f(x)$ fonksiyonu (a)-(j) sistemlerine biortogonal olan $\{u_n(x)\}$ sistemlerinin her birine göre Fourier serisine ayrıştırılabilir ve bu ayrışımlar $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

İspat. Tüm sistemlerin ispatında benzer işlemlerin tekrarlanmaması için aşağıdaki tanımlamalar yapılsın.

$f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında (a)-(j) sistemlerine biortogonal olan (a*)-(j*) sistemlerinin her birine göre Fourier serileri sırasıyla aşağıdaki gibi tanımlansın: $l \in \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$

$$G_{\mathrm{a}^*}^{(\xi)}(x)=\sum_{n=0,n\neq l}^{\infty}(f,y_n)u_n(x), \qquad G_{\mathrm{b}^*}^{(\xi)}(x)=\sum_{n=0,n\neq k+1}^{\infty}(f,y_n)u_n(x),$$

$$G_{\mathrm{c}^*}^{(\xi)}(x)=\sum_{n=0,n\neq k}^{\infty}(f,y_n)u_n(x), \qquad G_{d^*}^{(\xi)}(x)=\sum_{n=0,n\neq l}^{\infty}(f,y_n)u_n(x),\ l\neq k,k+1,$$

$$G_{\mathrm{e}^*}^{(\xi)}(x)=\sum_{n=0,n\neq k+2}^{\infty}(f,y_n)u_n(x), \qquad G_{\mathrm{f}^*}^{(\xi)}(x)=\sum_{n=0,n\neq k+1}^{\infty}(f,y_n)u_n(x),$$

$$G_{\mathrm{g}^*}^{(\xi)}(x)=\sum_{n=0,n\neq k}^{\infty}(f,y_n)u_n(x), \qquad G_{\mathrm{h}^*}^{(\xi)}(x)=\sum_{n=0,n\neq l}^{\infty}(f,y_n)u_n(x),\ l\neq k,k+1,k+2,$$

$$G_{\mathrm{i}^*}^{(\xi)}(x)=\sum_{n=0,n\neq r}^{\infty}(f,y_n)u_n(x), \qquad G_{\mathrm{j}^*}^{(\xi)}(x)=\sum_{n=0,n\neq l}^{\infty}(f,y_n)u_n(x),\ l\neq r,s.$$

Burada, $\beta=0$ olduğunda $\xi=1$; $y_n(x)$, (4.16) asimptotik formülüne sahip ve $0<\beta<\pi$ olduğunda $\xi=2$; $y_n(x)$, (4.18) asimptotik formülüne sahip kök fonksiyonlar sistemidir. Ayrıca, her iki durumda da $u_n(x)$, (a)-(j) sistemlerine sırasıyla biortogonal eşlenik olan (a*)-(j*) sistemleriyle tanımlanmıştır.

Bu serilerin daha anlaşılır olması için $G_{\mathrm{a}^*}^{(1)}(x)$ ve $G_{\mathrm{h}^*}^{(2)}(x)$ serilerini ele alalım. $G_{\mathrm{a}^*}^{(1)}(x)$ serisi, $f(x)$ fonksiyonunun [0,1] aralığında $\beta=0$ durumunda $y_n(x)$ özfonksiyonlar sisteminin (4.16) asimptotik formülüyle verildiği (a) sistemi üzere Fourier serisidir. $G_{\mathrm{h}^*}^{(2)}(x)$ serisi ise, $f(x)$ fonksiyonunun [0,1] aralığında $0<\beta<\pi$ durumunda $y_n(x)$ özfonksiyonlar sisteminin (4.18) asimptotik formülüyle verildiği (h) sistemi üzere Fourier serisidir.

Diğer taraftan; (a*), (d*), (h*) ve (j*)sistemlerinin benzer yapısından dolayı bu sistemlere uygun $G_{a*}^{(\xi)}(x)$, $G_{d*}^{(\xi)}(x)$, $G_{h*}^{(\xi)}(x)$ ve $G_{j*}^{(\xi)}(x)$ $(\xi=1,2)$ Fourier serileri benzerdir. Bu nedenle; $G_{a*}^{(\xi)}(x)$, $G_{d*}^{(\xi)}(x)$, $G_{h*}^{(\xi)}(x)$ ve $G_{j*}^{(\xi)}(x)$ $(\xi=1,2)$ serilerinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$G_1^{(\xi)}(x)=\sum_{n=j}^{\infty}(f,y_n)u_n(x),\ (\xi=1,2)$$

serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olmasıdır. Burada; λ_n özdeğerleri reel ve basit ise $j=l+1, \lambda_k=\lambda_{k+1}$ ise $j=k+2$, $\lambda_k=\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}$ ise $j=k+3$ ve $\lambda_s=\overline{\lambda}_r$ ise $j=\max\{r,s\}+1$ dir.

(b*) ve (e*) sistemlerinin benzer yapısından dolayı bu sistemlere uygun $G_{b*}^{(\xi)}(x)$ ve $G_{e*}^{(\xi)}(x)$ $(\xi=1,2)$ Fourier serileri benzerdir. Bu nedenle; $G_{b*}^{(\xi)}(x)$ ve $G_{e*}^{(\xi)}(x)$ $(\xi=1,2)$ serilerinin $[0,1]$aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$G_2^{(\xi)}(x)=\sum_{n=j}^{\infty}(f,y_n)u_n(x),\ (\xi=1,2)$$

serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olmasıdır. Burada, $\lambda_k=\lambda_{k+1}$ ise $j=k+2$ ve $\lambda_k=\lambda_{k+1}=\lambda_{k+2}$ ise $j=k+3$ dir.

Benzer şekilde $G_{c*}^{(\xi)}(x), G_{f*}^{(\xi)}(x), G_{g*}^{(\xi)}(x)$ ve $G_{i*}^{(\xi)}(x)$ $(\xi=1,2)$ serilerinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart bu serilere sırasıyla uygun

$$G_3^{(\xi)}(x)=\sum_{n=k+2}^{\infty}(f,y_n)u_n(x),\ (\xi=1,2) \qquad G_4^{(\xi)}(x)=\sum_{n=k+3}^{\infty}(f,y_n)u_n(x),\ (\xi=1,2)$$

$$G_5^{(\xi)}(x)=\sum_{n=k+3}^{\infty}(f,u_n)y_n(x),\ (\xi=1,2) \qquad G_6^{(\xi)}(x)=\sum_{n=s+2}^{\infty}(f,y_n)u_n(x),\ (\xi=1,2)$$

serilerin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olmasıdır.

Şimdi, Teorem 4.1.3.2'in ispatını sadece (c*) sistemi için verelim.

$\beta=0$ durumu:

$\left\{T_m^{(1)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ dizisi, $G_3^{(1)}(x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. (4.44) eşitliği kullanılarak bu dizi

$$T_m^{(1)}(x)=T_{m,1}^{(1)}(x)+T_{m,2}^{(1)}(x)$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$T_{m,1}^{(1)}(x)=\sum_{n=k+2}^{m}g_n(f,y_n)y_n(x),$$

$$T_{m,2}^{(1)}(x)=\kappa_3(x)\sum_{n=k+2}^{m}g_ny_n(1)(f,y_n) \tag{4.61}$$

dir. $\kappa_3(x)=-\dfrac{y^*_{k+1}(x)}{y^*_{k+1}(1)}$.

Dikkat edilirse, (4.61) eşitliğinde $\kappa_3(x)$ biçiminde bir çarpan ortaya çıktı. O halde, $G^{(\xi)}_{\nu}(x)$ $\left(\xi=1,2 \text{ ve } \nu=\overline{1,6}\right)$ serilerinin kısmi toplamlar dizileri incelendiğinde (4.61) eşitliğine benzer diziler oluşacaktır. Bu dizilerde, $\kappa_\nu(x)$ $\left(\nu=\overline{1,6}\right)$ çarpanlarının dışındaki seriler hepsinde benzerdir. Dolayısıyla, tekrar tekrar aynı hesaplamaları yapmak yerine Teorem 4.1.3.2' in ispatı sadece (c*) sistemi için yapılacaktır. Diğer sistemler için ispat tamamen benzerdir. Ayrıca, $G^{(\xi)}_{\nu}(x)$ $\left(\xi=1,2 \text{ ve } \nu=\overline{1,6}\right)$ serilerinin kısmi toplamlar dizilerinde gerekli hesaplamalar yapıldığında $\kappa_\nu(x)$ $\left(\nu=\overline{1,6}\right)$ çarpanları sırasıyla aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\kappa_1(x)=-\frac{y_l(x)}{y_l(1)}, \qquad \kappa_2(x)=-\frac{y_k(x)}{y_k(1)},$$

$$\kappa_3(x)=-\frac{y^*_{k+1}(x)}{y^*_{k+1}(1)}, \qquad \kappa_4(x)=-\frac{y^{**}_{k+1}(x)}{y^{**}_{k+1}(1)},$$

$$\kappa_5(x)=-\frac{y^{\#\#}_{k+2}(x)}{y^{\#\#}_{k+2}(1)}, \qquad \kappa_6(x)=-\frac{y_s(x)}{y_s(1)}.$$

İspatın neden sadece (c*) sistemi için yapıldığı açıklandıktan sonra $\beta=0$ durumu için ispata geri dönülsün.

$\left\{T^{(1)}_{m,1}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ ve $\left\{S^{(1)}_{m,1}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ dizileri aynı olduğundan dolayı $\left\{T^{(1)}_{m,1}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

Diğer taraftan, (4.16), (4.39) ve (4.43) ifadeleri kullanılırsa

$$g_n y_n(1)(f,y_n)=\frac{2(-1)^n}{an\pi}(f,\sin n\pi x)+O\left(\frac{\delta^{(1)}_n}{n}\right).$$

elde edilir. Buradan,

$$\left|g_n y_n(1)(f,y_n)\right|\le\frac{C_9}{n}\left\{\left|(f,\sin n\pi x)\right|+\delta^{(1)}_n\right\}\le C_{10}\left\{\left|(f,\sin n\pi x)\right|^2+\frac{\delta^{(1)}_n}{n}\right\}$$

elde edilir. Burada, C_9 ve C_{10} belli pozitif sabitlerdir. Fourier katsayıları için Bessel eşitsizliği kullanılırsa

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}\left|(f,\sin n\pi x)\right|^2,\ \sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{\delta^{(1)}_n}{n}$$

sayısal serilerinin düzgün yakınsaklığını göstermek kolaydır. O halde, $\left\{T^{(1)}_{m,2}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi de [0,1] aralığı üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

$0<\beta<\pi$ durumu:

$\left\{T_m^{(2)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ dizisi, $G_3^{(2)}(x)$ serisinin kısmi toplamlar dizisi olsun. (4.44) eşitliği kullanılarak bu dizi

$$T_m^{(2)}(x)=T_{m,1}^{(2)}(x)+T_{m,2}^{(2)}(x)$$

biçiminde yazılabilir. Burada,

$$T_{m,1}^{(2)}(x)=\sum_{n=k+2}^{m} g_n(f,y_n)\,y_n(x),$$

$$T_{m,2}^{(2)}(x)=\kappa_3(x)\sum_{n=k+2}^{m} g_n y_n(1)(f,y_n)$$

dir. $\chi_3(x)=-\dfrac{\left(f,y_{k+1}^*\right)}{y_{k+1}^*(1)}$.

$\left\{T_{m,1}^{(2)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ ve $\left\{S_{m,1}^{(2)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ dizileri aynı olduğundan dolayı $\left\{T_{m,1}^{(2)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi [0,1] aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

Diğer taraftan, (4.18), (4.41) ve (4.43) ifadeleri kullanılırsa

$$g_n y_n(1)(f,y_n)=\frac{4(-1)^n}{a(2n-1)\pi}\left(f,\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)+O\left(\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right).$$

elde edilir. Buradan,

$$\left|g_n y_n(1)(f,y_n)\right|\le\frac{C_{11}}{n}\left\{\left|\left(f,\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right|+\delta_n^{(2)}\right\}\le C_{12}\left\{\left|\left(f,\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right|^2+\frac{\delta_n^{(2)}}{n}\right\}$$

elde edilir. Burada, C_{11} ve C_{12} belli pozitif sabitlerdir.

Fourier katsayıları için Bessel eşitsizliği kullanılırsa

$$\sum_{n=k+2}^{\infty}\left|\left(f,\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)\right|^2,\ \sum_{n=k+2}^{\infty}\frac{\delta_n^{(2)}}{n}$$

sayısal serilerinin düzgün yakınsaklığını göstermek kolaydır. O halde, $\left\{T_{m,2}^{(2)}(x)\right\}_{m=k+2}^{\infty}$ fonksiyonel dizisi de $[0,1]$ aralığı üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. ■

4.1.4. Örnekler

Bu kısımda, teorem 4.1.3.1'in daha anlaşılabilir olması için iki örnek verilecektir. Bunlardan ilki $\beta=0$ durumunda (c) kök fonksiyonlar sistemine, ikincisi ise $0<\beta<\pi$ durumunda (g) kök fonksiyonlar sistemine örnektir.

Örnek 4.1.4.1.

$$-y''=\lambda y,\ 0<x<1, \tag{4.62}$$

$$y(0)=0,\ y'(1)=\left(-\frac{\lambda}{3}+1\right)y(1) \tag{4.63}$$

spektral problemini ele alalım. Burada, λ bir spektral parametredir.

(4.62)-(4.63) probleminin özdeğerleri $\varpi(\lambda)=0$ denkleminin kökleridir. Burada $\mathrm{Re}\sqrt{\lambda}\geq 0$ ve $\varpi(\lambda)=\left(\frac{\lambda}{3}-1\right)\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}+\cos\sqrt{\lambda}$ dir. Bundan dolayı, $\varpi(\lambda)$'nın Maclaurin serisi

$$\varpi(\lambda)=-\lambda^2\sum_{n=0}^{\infty}\frac{4(-1)^n(n+1)(n+2)}{(2n+5)!}\lambda^n \tag{4.64}$$

biçimindedir. (4.64) denkleminden, $\lambda=0$ özdeğerinin (4.62)-(4.63) probleminin çift katlı bir özdeğeri olduğu elde edilir. Bu nedenle, (4.62)-(4.63) probleminin tüm özdeğerleri reel ve biri çift katlı olmasının dışında diğer tüm özdeğerleri basittir. Buna ek olarak; (4.64) eşitliğinde $\lambda<0$ olduğu durumda $\varpi(\lambda)<0$. O halde, $\lambda=0$ (4.62)-(4.63) probleminin ilk özdeğeri ve $\lambda_0=\lambda_1=0$.

(4.64) eşitliğinden görülür ki, $\varpi(0)=\varpi'(0)=0$, $\varpi''(0)=-\frac{2}{45}$ ve $\varpi'''(0)=\frac{1}{105}$ dir. $\lambda_n\ (0,2,3,\ldots)$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar $y_0(x)=x$ ve $y_n(x)=\frac{\sin\sqrt{\lambda_n}x}{\sqrt{\lambda_n}}\ (n\geq 2)$ dir.

y_0 özfonksiyonuna karşılık gelen ek fonksiyon $y_1(x)=-\frac{x^3}{6}+cx$ dir. Burada, c keyfi bir sabittir. (4.9) eşitliğinden görülür ki $\tilde{c}=-c$. Ayrıca, (4.14) eşitliğinden görülür ki

$$c_1=-\frac{\varpi'''(0)}{3\varpi''(0)}-\frac{y_{k+1}(1)}{y_k(1)}+\tilde{c}=\frac{5}{21}-2c$$

dir. $y_1^*=y_1+c_1y_0$ ve $y_1^*(1)\neq 0$ $\left(\text{yada}\,\varpi'''(\lambda_0)\neq 3\tilde{c}\varpi''(\lambda_0)\right)$ olduğundan dolayı $c\neq\frac{1}{14}$ dır. Bu nedenle; $c\neq\frac{1}{14}$ ise, $y_n(x)\ (n=1,2,\ldots)$ sistemi $L_p(0,1), 1<p<\infty$ uzayında tabandır [38].

$f(x)=x^2-x$ olsun. $(f,\sin n\pi x)=\begin{cases}0, & n \text{ çift},\\ -\frac{4}{n^3\pi^3}, & n \text{ tek}\end{cases}$ olduğundan dolayı, $f(x)$ fonksiyonu $\left\{\sqrt{2}\sin n\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi üzerine düzgün yakınsak Fourier serisine ayrıştırılabilir. Dahası, $(f,y_1^*)=\frac{8}{315}-\frac{c}{3}$ dir.

Sonuç olarak; teorem 4.1.3.1'den $c=\frac{8}{105}$ ise $y_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ sistemi üzere $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır; $c\neq\frac{8}{105},\frac{1}{14}$ ise $y_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ sistemi üzere $f(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi her bir $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığında düzgün yakınsaktır.

Örnek 4.1.4.2.

$$-y''=\lambda y,\ 0<x<1, \tag{4.65}$$

$$y'(0)=\alpha y(0),\ y'(1)=(a\lambda+b)y(1) \tag{4.66}$$

spektral problemini ele alınsın. Burada, λ bir spektral parametre, α

$$\alpha^3+6\alpha^2+15\alpha+15=0 \tag{4.67}$$

denkleminin tek reel kökü (açıktır ki $\alpha=\sqrt[3]{\frac{2}{1+\sqrt{5}}}-\sqrt[3]{\frac{1+\sqrt{5}}{2}}-2$) ve

$$a=-\frac{\alpha^2+3\alpha+3}{3(\alpha+1)^2},\ \ b=\frac{\alpha}{\alpha+1} \tag{4.68}$$

dir.

(4.65)-(4.66) probleminin özdeğerleri $\varpi(\lambda)=0$ denkleminin kökleridir. Burada $\operatorname{Re}\sqrt{\lambda}\geq 0$ ve

$$\varpi(\lambda)=(-a\lambda+\alpha-b)\cos\sqrt{\lambda}-((\alpha a+1)\lambda+\alpha b)\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}} \tag{4.69}$$

dir.

(4.67) ve (4.68) eşitliklerinden $\alpha-b=\alpha b=15a,\ \alpha a+1=-6a$ eşitlikleri elde edilir. Bu nedenle, (4.69) eşitliği $\varpi(\lambda)=(15a-a\lambda)\cos\sqrt{\lambda}+(6a\lambda-15a)\frac{\sin\sqrt{\lambda}}{\sqrt{\lambda}}$ biçiminde yazılır. Bundan dolayı, $\varpi(\lambda)$'nın Maclaurin serisi

$$\varpi(\lambda)=-a\lambda^3\sum_{n=0}^{\infty}\frac{2(-1)^n(n+2)(n+3)(4n+19)}{(2n+7)!}\lambda^n \tag{4.70}$$

biçimindedir. (4.70) denkleminden görülür ki, $\lambda=0$ özdeğerinin (4.65)-(4.66) probleminin üç katlı bir özdeğeri olduğu elde edilir. Bu nedenle, (4.65)-(4.66) probleminin tüm özdeğerleri reel ve biri üç katlı olmasının dışında diğer tüm özdeğerleri basittir. Buna ek olarak, (4.70) eşitliğinde $\lambda<0$ olduğu durumda $\varpi(\lambda)<0$. O halde, $\lambda=0$ (4.65)-(4.66) probleminin ilk özdeğeri ve $\lambda_0=\lambda_1=\lambda_2=0$.

(4.70) eşitliğinden görülür ki, $\varpi(0)=\varpi'(0)=\varpi''(0)=0$, $\varpi'''(0)=-\dfrac{288a}{7!}$, $\varpi^{IV}(0)=\dfrac{4608a}{9!}$ ve $\varpi^{V}(0)=-\dfrac{57600a}{11!}$ dir. λ_n $(n=0,3,4,\ldots)$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar $y_0(x)=\alpha x+1$ ve $y_n(x)=\cos\sqrt{\lambda_n}\,x+\alpha\dfrac{\sin\sqrt{\lambda_n}\,x}{\sqrt{\lambda_n}}$ $(n\geq 3)$ dir. y_0 özfonksiyonuna karşılık gelen birinci ve ikinci sıra ek fonksiyonlar sırasıyla $y_1(x)=-\dfrac{\alpha x^3}{3!}-\dfrac{x^2}{2!}+\alpha Ax+A$ ve $y_2(x)=\dfrac{\alpha x^5}{5!}+\dfrac{x^4}{4!}-\dfrac{\alpha Ax^3}{3!}-\dfrac{Ax^2}{2!}+\alpha Bx+B$ dir. Burada, A ve B keyfi sabitlerdir.

(4.65)-(4.66) probleminde $0<\beta<\pi$ dir. (4.9) ve (4.10) eşitliklerinden görülür ki, $\tilde{c}=-A$ ve $\tilde{d}=A^2-B$ dir. Yukarıdaki hesaplamalara göre, (4.13) koşulu

$$B\neq A^2-\frac{A}{18}+\frac{13}{7128} \tag{4.71}$$

biçiminde yazılabilir. Bu nedenle, (4.71) koşulu sağlanırsa o halde $y_n(x)$ $(n=1,2,\ldots)$ sistemi $L_p(0,1), 1<p<\infty$ uzayında tabandır [38].

$F_s(x)=\mathrm{P}_s(2x-1)(x^2-x)$ olsun. Burada, $\mathrm{P}_s(t)(s=0,1,2,\ldots)$ Legendre polinomlarıdır [60, s.162]:

$$\mathrm{P}_s(x)=\frac{1}{2^s s!}\frac{d^s}{dx^s}\left[\left(x^2-1\right)^s\right]. \tag{4.72}$$

$F_s(0)=F_s(1)=0$ olduğundan dolayı $\left(F_s,\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right)=O\left(n^{-2}\right)$ dir. Bu demektir ki, $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında $\left\{\sqrt{2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemi üzerine düzgün yakınsak Fourier serisine ayrıştırılabilir.

Diğer taraftan,

$$\int_{-1}^{1} t^k \mathrm{P}_s(t)\,dt=0,\quad \int_{-1}^{1} t^7 \mathrm{P}_7(t)\,dt=\frac{2^8(7!)^2}{15!}$$

elde edilir. Burada, $k=\overline{0,s-1}$ dır [60, s.174,175] . Buradan ve $\left(t^2-1\right)y_j\left(\frac{t+1}{2}\right)$ $\left(j=\overline{0,2}\right)$ fonksiyonları derecesi 7 ve 7'den az olan polinomlar olduklarından dolayı

(4.72) formülü Rodrigues formülü olarak bilinir [60, s.162].

$$\int_0^1 F_s(x)\,y_j(x)\,dx = \int_0^1 P_s(2x-1)\left(x^2-x\right)y_j(x)\,dx$$
$$= \frac{1}{8}\int_{-1}^{1} P_s(t)\left(t^2-1\right)y_j\left(\frac{t+1}{2}\right)dt$$
$$= \begin{cases} 0, & s \geq 8 \text{ ve } j = 0,1,2, \\ \dfrac{\alpha(7!)^2}{5!15!}, & s = 7 \text{ ve } j = 2 \end{cases}$$

elde edilir. Bundan dolayı,

$$\left(F_s, y_2^{\#\#}\right) = \begin{cases} 0, & s \geq 8, \\ \dfrac{\alpha(7!)^2}{5!15!}, & s = 7 \end{cases}$$

koşulu sağlanır.

Sonuç olarak, teorem 4.1.3.1'den $s \geq 8$ ise, $y_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ sistemi üzere $F_s(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır; $s = 7$ ise, $y_n(x)$ $(n = 1,2,\ldots)$ sistemi üzere $F_s(x)$ fonksiyonunun Fourier serisi her bir $[0,b]$ $(0 < b < 1)$ aralığında düzgün yakınsaktır.

4.2. İkinci Problemin İfadesi ve Bazı Spektral Özellikleri

Bu kısımda; tezin giriş bölümünde bahsedilen sınır değer problemlerinden ikincisinin ifadesi verilecek, bu problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri kesinleştirilecek, bu kesinleştirilmiş asimptotik formüllerin yardımıyla ikinci problemin özfonksiyonlar sistemleri üzerine sürekli fonksiyonlar için Fourier seri ayrışımlarının düzgün yakınsaklığı araştırılacak ve elde edilecek bulguların daha anlaşılır olması için bir örnek verilecektir.

Tezin giriş bölümünde bahsedilen sınır koşullarından biri spektral parametre içeren ikinci problem

$$-y'' + q(x)y = \lambda y, \ 0 < x < 1, \tag{4.73}$$

$$y(0)\cos\beta = y'(0)\sin\beta, \ \ 0 \leq \beta < \pi, \tag{4.74}$$

$$\frac{y'(1)}{y(1)} = \tilde{h}(\lambda) \tag{4.75}$$

şeklindedir. Burada; λ spektral parametre, $q(x) \in C[0,1]$ reel değerli bir fonksiyon, tüm katsayılar reel ve $a \geq 0$, $b_k > 0$ $\left(k = \overline{1,n}\right)$, $c_1 < c_2 < \ldots < c_N$, $N \geq 0$ olmak üzere

$$\tilde{h}(\lambda) = a\lambda + b - \sum_{k=1}^{N} \frac{b_k}{\lambda - c_k}$$

dir.

$\tilde{h}(\lambda)$ fonksiyonu incelendiğinde, $\tilde{h}(\lambda)=\infty$ ise (4.75) sınır koşulu bir Dirichlet sınır koşulu olan $y(1)=0$ koşuluna dönüşür. Ayrıca, $N=0$ ise $\tilde{h}(\lambda)$ fonksiyonu λ'ya göre lineer ve artandır.

4.2.1. Ön Bilgiler

(4.73)-(4.75) sınır değer probleminin özfonksiyonlar sistemleri üzere spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklık koşullarının incelenebilmesi için bu problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının bazı özelliklerinin bilinmesi gereklidir. Ayrıca, özfonksiyonlar sistemi ve bu sisteme biortogonal olan sistemlerin yapısı incelenmelidir. Bunlara ek olarak, özfonksiyonlar sisteminin minimallik ve tabanlık özelliklerinin bilinmesine ihtiyaç duyulur.

(4.73)-(4.75) sınır değer probleminin özdeğerleri reel ve basittir. Ayrıca, $\lambda_0 < c_1$ ve $+\infty$'a doğru artan bir $\lambda_0 < \lambda_1 < \ldots$ dizi formundadır. Buna ek olarak; ω_n, λ_n özdeğerlerine karşılık gelen y_n özfonksiyonunun $(0,1)$ aralığında sıfırlarının sayısı ise, o halde $\omega_n = n - m_n$ dir. Burada; $m_n, c_i \le \lambda_n$ koşulunu sağlayan c_i noktalarının sayısıdır. Özellikle, $\omega_0 = 0$ ve $\lambda_n > c_N$ olduğu durumda $\omega_n = n - N$ dir. Ayrıca, aşağıdaki asimptotik formüller yeterince büyük n'ler için geçerlidir [26]:

$$\lambda_n = \left((n+\nu)\pi\right)^2 + O(1) \tag{4.76}$$

$$\nu = \begin{cases} -\dfrac{1}{2} - N, & a \neq 0 \text{ ve } \beta \neq 0, \\ -N, & a \neq 0 \text{ ve } \beta = 0, \\ -N, & a = 0 \text{ ve } \beta \neq 0, \\ \dfrac{1}{2} - N, & a = 0 \text{ ve } \beta = 0 \end{cases} \tag{4.77}$$

dir.

[36] makalesinde, (4.73)-(4.75) sınır değer probleminin özfonksiyonlar sistemi ve bu sisteme biortogonal olan sistemlerin yapısı hakkında aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

Eğer $a \neq 0$ ve $k_0, k_1, \ldots, k_N$ farklı negatif olmayan tamsayılar ise,

$$y_n(x)\left(n = 0,1,\ldots; n \neq k_0, k_1, \ldots, k_N\right) \tag{4.78}$$

sistemi $L_p(0,1)(1<p<\infty)$ uzayında tabandır ve bu taban $L_2(0,1)$ uzayında koşulsuzdur.

Eğer $a = 0$ ve $k_1, k_2, \ldots, k_N$ farklı negatif olmayan tamsayılar ise,

$$y_n(x)\left(n = 0,1,\ldots; n \neq k_1, k_2, \ldots, k_N\right) \tag{4.79}$$

sistemi $L_p(0,1)(1<p<\infty)$ uzayında tabandır ve bu taban $L_2(0,1)$ uzayında koşulsuzdur.

Her $n=0,1,\dots$ ve $j=\overline{1,N}$ sayıları için $a\neq 0$ ve $\lambda_n\neq c_j$ ise (4.78) sistemine biortogonal olan $u_n(x)\left(n=0,1,\dots;n\neq k_0,k_1,\dots,k_N\right)$ sistemi

$$u_n(x)=\frac{A_{n,k_0,\dots,k_N}(x)}{B_n^{(1)}\Delta_1} \tag{4.80}$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

$$A_{n,k_0,\dots,k_N}(x)=\begin{vmatrix} y_n(x) & y_n(1) & \dfrac{y_n(1)}{\lambda_n-c_1} & \cdots & \dfrac{y_n(1)}{\lambda_n-c_N} \\ y_{k_0}(x) & y_{k_0}(1) & \dfrac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0}-c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0}-c_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k_N}(x) & y_{k_N}(1) & \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_N} \end{vmatrix}, \tag{4.81}$$

$$B_n^{(1)}=\left\|y_n\right\|^2+\left(a+\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\left(\lambda_n-c_k\right)^2}\right)y_n^2(1), \tag{4.82}$$

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} y_{k_0}(1) & \dfrac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0}-c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0}-c_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k_N}(1) & \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_N} \end{vmatrix} \tag{4.83}$$

dir.

Not 4.2.1.1. $c_j\left(j=\overline{1,N}\right)$ sayılarının bazıları (4.73)-(4.75) probleminin özdeğerleri olsun. Örneğin, bazı t ve s sayıları için $\lambda_{k_t}=c_s$ olsun. O halde, (4.81) determinantının (t+2)'nci satırındaki ilk ve (s+2)'nci eleman hariç diğer tüm elemanlar sıfır olur. Buna ek olarak, aynı determinantın (t+2)'nci satırdaki ilk elemanı olan $y_{k_t}(x)$ değişmez fakat (s+2)'nci elemanı olan $\dfrac{y_{k_t}(1)}{\lambda_{k_t}-c_s}$ ifadesi $-\dfrac{y'_{k_t}(1)}{b_s}$ ile değiştirilir. Dahası, $B_{k_t}=\left\|y_{k_t}\right\|^2+\dfrac{\left(y'_{k_t}(1)\right)^2}{b_s}$ dir.

Diğer taraftan, her $n=0,1,\dots$ ve $j=\overline{1,N}$ sayıları için $a=0$ ve $\lambda_n\neq c_j$ ise (4.79) sistemine biortogonal olan $u_n(x)\left(n=0,1,\dots;n\neq k_1,\dots,k_N\right)$ sistemi

$$u_n(x)=\frac{A_{n,k_1,\dots,k_N}(x)}{B_n^{(2)}\Delta_2} \tag{4.84}$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

$$A_{n,k_1,\ldots,k_N}(x)=\begin{vmatrix} y_n(x) & \dfrac{y_n(1)}{\lambda_n-c_1} & \cdots & \dfrac{y_n(1)}{\lambda_n-c_N} \\ y_{k_1}(x) & \dfrac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1}-c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1}-c_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ y_{k_N}(x) & \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_N} \end{vmatrix}, \tag{4.85}$$

$$B_n^{(2)}=\|y_n\|^2+y_n^2(1)\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{(\lambda_n-c_k)^2}, \tag{4.86}$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} \dfrac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1}-c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1}-c_N} \\ \vdots & \ddots & \vdots \\ \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_N} \end{vmatrix} \tag{4.87}$$

dir.

Not 4.2.1.2. $c_j\left(j=\overline{1,N}\right)$ sayılarının bazıları (4.73)-(4.75) probleminin özdeğerleri olsun. Örneğin, bazı t ve s sayıları için $\lambda_{k_t}=c_s$ olsun. O halde, (4.85) determinantının (t+1)'inci satırındaki ilk ve (s+1)'inci eleman hariç diğer tüm elemanlar sıfır olur. Buna ek olarak, aynı determinantın (t+1)'inci satırdaki ilk elemanı olan $y_{k_t}(x)$ değişmez fakat (s+1)'inci elemanı olan $\dfrac{y_{k_t}(1)}{\lambda_{k_t}-c_s}$ ifadesi $-\dfrac{y'_{k_t}(1)}{b_s}$ ile değiştirilir. Dahası, $B_{k_t}=\|y_{k_t}\|^2+\dfrac{\left(y'_{k_t}(1)\right)^2}{b_s}$ dir.

4.2.2. Kesinleştirilmiş Asimptotik Formüller

(4.73)-(4.75) sınır değer probleminin özfonksiyonlar sistemleri üzere spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklık koşullarıyla ilgili teoremin verilebilmesi için bu problemin özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formüllerinin kesinleştirilmesi gerekir. Bu kısımda, bu asimptotik formüllerin kesinleştirilmesi için ilgili teoremin ifadesi ve ispatı verilecektir.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları (4.73) denkleminin sırasıyla (4.4) ve (4.5) başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

Teorem 4.2.2.1. $\lambda_n = s_n^2$ olsun. n'nin yeterince büyük değerlerinde aşağıdaki asimptotik formüller doğrudur:

$$s_n = (n+\nu)\pi + \frac{A_{a,\beta}}{n\pi} + O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right) \tag{4.88}$$

I. $\beta = 0$ ise, o halde

$$\begin{aligned} y_n(x) = \psi(x,\lambda_n) = \frac{\sin(n+\nu)\pi x}{(n+\nu)\pi} + \frac{\alpha_a x - \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau}{(n\pi)^2}\cos(n+\nu)\pi x + \\ + \frac{\cos(n+\nu)\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\cos 2(n+\nu)\pi\tau d\tau + \\ + \frac{\sin(n+\nu)\pi x}{2(n\pi)^2}\int_0^x q(\tau)\sin 2(n+\nu)\pi\tau d\tau + O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n^2}\right) \end{aligned} \tag{4.89}$$

dir.

II. $0 < \beta < \pi$ ise, o halde

$$\begin{aligned} y_n(x) = \varphi(x,\lambda_n) = \cos(n+\nu)\pi x + \frac{h - (h+\alpha_a)x + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau}{n\pi}\sin(n+\nu)\pi x + \\ + \frac{\sin(n+\nu)\pi x}{2n\pi}\int_0^x q(\tau)\cos 2(n+\nu)\pi\tau d\tau - \\ - \frac{\cos(n+\nu)\pi x}{2n\pi}\int_0^x q(\tau)\sin 2(n+\nu)\pi\tau d\tau + O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right) \end{aligned} \tag{4.90}$$

dir. Bu iki durumda da; $h = \cot\beta$, $A_{a,\beta} = \begin{cases} \alpha_a, & \beta = 0, \\ h + \alpha_a, & 0 < \beta < \pi \end{cases}$, $\alpha_a = \begin{cases} -b + \frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau, & a = 0, \\ \frac{1}{a} + \frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau, & a \neq 0 \end{cases}$,

$\delta_{n,\nu} = \left|\int_0^1 q(\tau)\cos 2(n+\nu)\pi\tau d\tau\right| + \frac{1}{n}$ ve ν, (4.77) formülü ile tanımlanmıştır.

İspat. a ve β değişkenlerinin durumlarına göre ispat aşağıda verilmiştir:

$\lambda = s^2$ ve $s = \sigma + it$ olsun.

I. $\beta = 0$ olsun. Bu durumun ispatında, teorem 4.1.2.1'in *I* durumunun ispatında kullanılan (4.19) ve (4.20) formülleri kullanılmıştır.

(4.19), (4.20) ve (4.76)formüllerinden

$$\begin{aligned}\psi(x,\lambda_n) &= \frac{\sin s_n x}{s_n} - \frac{\cos s_n x}{2s_n^2}\int_0^x q(\tau)d\tau + \frac{\cos s_n x}{2s_n^2}\int_0^x q(\tau)\cos 2s_n\tau d\tau + \\ &+ \frac{\sin s_n x}{2s_n^2}\int_0^x q(\tau)\sin 2s_n\tau d\tau + O(n^{-3})\end{aligned} \tag{4.91}$$

ifadesi elde edilir. Buna ek olarak, (4.19) eşitliğinin x'e göre türevi alınıp bu türevde (4.76) eşitliği dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\psi'_x(x,\lambda_n) &= \cos s_n x + \frac{\sin s_n x}{2s_n}\int_0^x q(\tau)d\tau - \frac{\sin s_n x}{2s_n}\int_0^x q(\tau)\cos 2s_n\tau d\tau + \\ &+ \frac{\cos s_n x}{2s_n}\int_0^x q(\tau)\sin 2s_n\tau d\tau + O(n^{-2})\end{aligned} \tag{4.92}$$

elde edilir.

Şimdi, $a=0$ ve $a\neq 0$ durumlarına göre ispatı ayrı ayrı devam ettirelim:

i. $a=0$ olsun. (4.76) ve (4.77) eşitliklerinden

$$s_n = \sqrt{\lambda_n} = \left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi + \varepsilon_n \tag{4.93}$$

yazılabilir. Burada, $\varepsilon_n = O(n^{-1})$ dir.

Diğer taraftan,

$$\cos s_n x = \cos\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x + O(n^{-1}),$$
$$\sin s_n x = \sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x + O(n^{-1})$$

eşitliklerinden dolayı (4.91) ve (4.92) formülleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}\psi(x,\lambda_n) &= \frac{\sin s_n x}{s_n} - \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x}{2\left(n+\frac{1}{2}-N\right)^2\pi^2}\int_0^x q(\tau)d\tau + \\ &+ \frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x}{2\left(n+\frac{1}{2}-N\right)^2\pi^2}\int_0^x q(\tau)\cos(2n+1-2N)\pi\tau d\tau + \\ &+ \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x}{2\left(n+\frac{1}{2}-N\right)^2\pi^2}\int_0^x q(\tau)\sin(2n+1-2N)\pi\tau d\tau + O(n^{-3}),\end{aligned} \tag{4.94}$$

$$\psi'_x(x,\lambda_n)=\cos s_n x+\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x}{(2n+1-2N)\pi}\int_0^x q(\tau)d\tau-$$
$$-\frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x}{(2n+1-2N)\pi}\int_0^x q(\tau)\cos(2n+1-2N)\pi\tau d\tau+ \tag{4.95}$$
$$+\frac{\cos\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x}{(2n+1-2N)\pi}\int_0^x q(\tau)\sin(2n+1-2N)\pi\tau d\tau+O\left(n^{-2}\right).$$

Dikkate alalım ki, $\beta=0$ ve $a=0$ durumunda (4.74) ve (4.75) sınır koşulları sırasıyla

$$y(0)=0,\quad \frac{y'(1)}{y(1)}=b-\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\lambda-c_k}$$

biçiminde yazılır. Buradan, $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu $y(0)=0$ koşulunu sağlar. Bu nedenle, (4.73)-(4.75) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\psi'_x(1,\lambda_n)-\left(b-\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\lambda_n-c_k}\right)\psi(1,\lambda_n)=0 \tag{4.96}$$

denklemini sağlar. Gerçekten, $\lambda_n\neq c_k$, $k=\overline{1,N}$ olduğu durumda $\psi(1,\lambda_n)\neq 0$ olacağından bu son denklem yazılabilir. Buna ek olarak, $x=1$ için (4.94) ve (4.95) formülleri sırasıyla

$$\psi(1,\lambda_n)=\frac{\sin s_n}{s_n}+O\left(n^{-2}\right), \tag{4.97}$$

$$\psi'_x(1,\lambda_n)=\cos s_n+\frac{(-1)^{n-N}}{(2n+1-2N)\pi}\int_0^1 q(\tau)d\tau+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right) \tag{4.98}$$

biçiminde elde edilir. Burada, $\nu=\frac{1}{2}-N$ için $\delta_{n,\nu}=\left|\int_0^1 q(\tau)\cos(2n+1-2N)\pi\tau d\tau\right|+\frac{1}{n}$ dir.

Diğer taraftan, (4.93) formülü kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\begin{aligned}\cos s_n&=\cos\left(\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi+\varepsilon_n\right)=-\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi\sin\varepsilon_n\\&=(-1)^{n-N-1}\varepsilon_n+O\left(n^{-3}\right),\end{aligned} \tag{4.99}$$

$$\begin{aligned}\frac{\sin s_n}{s_n}&=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi+\varepsilon_n\right)}{\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi+\varepsilon_n}=\frac{\sin\left(\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi+\varepsilon_n\right)}{\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi}\left(1+O\left(n^{-2}\right)\right)\\&=\frac{(-1)^{n-N}}{\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi}+O\left(n^{-3}\right).\end{aligned} \tag{4.100}$$

(4.97)-(4.100) eşitlikleri (4.96) denkleminde yerine yazılırsa

$$(-1)^{n-N-1}\varepsilon_n + \frac{(-1)^{n-N}}{(2n+1-2N)\pi}\int_0^1 q(\tau)d\tau + O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right) - \left(b+O\left(n^{-2}\right)\right)\frac{(-1)^{n-N}}{\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi} = 0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse

$$\varepsilon_n = \frac{-b+\frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau}{n\pi} + O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right) \tag{4.101}$$

elde edilir. (4.101) ifadesi (4.93) eşitliğinde dikkate alınırsa $\beta=0$ ve $a=0$ durumunda (4.88) formülü ispatlanmış olur.

Diğer taraftan, (4.88) formülü kullanılarak

$$\frac{\sin s_n x}{s_n} = \frac{\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x}{\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi} + \frac{\alpha_a x\cos\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x}{(n\pi)^2} + O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)$$

elde edilir. Bu son eşitlik, (4.94) formülünde dikkate alınırsa $\beta=0$ ve $a=0$ durumunda (4.89) formülü ispatlanmış olur.

ii. $a\neq 0$ olsun. (4.76) ve (4.77) eşitliklerinden

$$s_n = \sqrt{\lambda_n} = (n-N)\pi + \varepsilon_n \tag{4.102}$$

yazılabilir. Burada, $\varepsilon_n = O\left(n^{-1}\right)$ dir.

Diğer taraftan,

$$\begin{gathered}\cos s_n x = \cos(n-N)\pi x + O\left(n^{-1}\right),\\ \sin s_n x = \sin(n-N)\pi x + O\left(n^{-1}\right)\end{gathered} \tag{4.103}$$

eşitliklerinden dolayı (4.91) ve (4.92) formülleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}\psi(x,\lambda_n) = {} & \frac{\sin s_n x}{s_n} - \frac{\cos(n-N)\pi x}{2(n-N)^2\pi^2}\int_0^x q(\tau)d\tau + \\ & + \frac{\cos(n-N)\pi x}{2(n-N)^2\pi^2}\int_0^x q(\tau)\cos 2(n-N)\pi\tau d\tau + \\ & + \frac{\sin(n-N)\pi x}{2(n-N)^2\pi^2}\int_0^x q(\tau)\sin 2(n-N)\pi\tau d\tau + O\left(n^{-3}\right),\end{aligned} \tag{4.104}$$

$$\begin{aligned}\psi'_x(x,\lambda_n) = {} & \cos s_n x + \frac{\sin(n-N)\pi x}{2(n-N)\pi}\int_0^x q(\tau)d\tau - \\ & - \frac{\sin(n-N)\pi x}{2(n-N)\pi}\int_0^x q(\tau)\cos 2(n-N)\pi\tau d\tau + \\ & + \frac{\cos(n-N)\pi x}{2(n-N)\pi}\int_0^x q(\tau)\sin 2(n-N)\pi\tau d\tau + O\left(n^{-2}\right).\end{aligned} \tag{4.105}$$

Dikkate alalım ki, $\beta = 0$ ve $a \neq 0$ durumunda (4.74) ve (4.75) sınır koşulları sırasıyla

$$y(0)=0,\quad \frac{y'(1)}{y(1)} = a\lambda + b - \sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\lambda - c_k}$$

biçiminde yazılır. Buradan, $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonu $y(0)=0$ koşulunu sağlar. Bu nedenle, (4.73)-(4.75) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\psi_x'(1,\lambda_n) - \left(a\lambda_n + b - \sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\lambda_n - c_k}\right)\psi(1,\lambda_n) = 0 \tag{4.106}$$

denklemini sağlar. Gerçekten, $\lambda_n \neq c_k$, $k=\overline{1,N}$ olduğu durumda $\psi(1,\lambda_n)\neq 0$ olacağından bu son denklem yazılabilir. Buna ek olarak, $x=1$ için (4.104) ve (4.105) formülleri sırasıyla

$$\psi(1,\lambda_n) = \frac{\sin s_n}{s_n} - \frac{(-1)^{n-N}}{2(n-N)^2\pi^2}\int_0^1 q(\tau)d\tau + O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n^2}\right), \tag{4.107}$$

$$\psi_x'(1,\lambda_n) = (-1)^{n-N} + O(n^{-1}) \tag{4.108}$$

biçiminde elde edilir. Burada, $\nu = -N$ için $\delta_{n,\nu} = \left|\int_0^1 q(\tau)\cos 2(n-N)\pi\tau d\tau\right| + \frac{1}{n}$ dir.

Diğer taraftan, (4.102) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\frac{\sin s_n}{s_n} &= \frac{\sin((n-N)\pi+\varepsilon_n)}{(n-N)\pi+\varepsilon_n} = \frac{\sin((n-N)\pi+\varepsilon_n)}{(n-N)\pi}\left(1+O(n^{-2})\right)\\ &= \frac{(-1)^{n-N}\varepsilon_n}{(n-N)\pi} + O(n^{-4}).\end{aligned} \tag{4.109}$$

ifadesi elde edilir. (4.107)-(4.109) eşitlikleri (4.106) denkleminde yerine yazılırsa

$$(-1)^{n-N} + O(n^{-1}) - \left(a\lambda_n + b + O(n^{-2})\right)\left(\frac{(-1)^{n-N}\varepsilon_n}{(n-N)\pi} - \frac{(-1)^{n-N}}{2(n-N)^2\pi^2}\int_0^1 q(\tau)d\tau + O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n^2}\right)\right) = 0$$

denklemi elde edilir. Buradan, $b + O(n^{-2}) = O(1)$ ve λ_n için (4.102) formülü dikkate alınırsa

$$\frac{1}{n^2\pi^2} - \frac{a\varepsilon_n}{n\pi} + \frac{a}{2n^2\pi^2}\int_0^1 q(\tau)d\tau + O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right) = 0$$

elde edilir. Bu son denklem çözülürse

$$\varepsilon_n = \frac{\frac{1}{a} + \frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau}{n\pi} + O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right) \tag{4.110}$$

elde edilir. (4.110) ifadesi (4.102) eşitliğinde dikkate alınırsa $\beta = 0$ ve $a \neq 0$ durumunda (4.88) formülü ispatlanmış olur.

Diğer taraftan, (4.88) formülü kullanılarak

$$\frac{\sin s_n x}{s_n} = \frac{\sin(n-N)\pi x}{(n-N)\pi} + \frac{\alpha_a x\cos(n-N)\pi x}{(n\pi)^2} + O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)$$

elde edilir. Bu son eşitlik, (4.104) formülünde dikkate alınırsa $\beta = 0$ ve $a \neq 0$ durumunda (4.89) formülü ispatlanmış olur.

II. $0 < \beta < \pi$ olsun. Bu durumun ispatında, teorem 4.1.2.1'in *II* durumunun ispatında kullanılan (4.29) ve (4.30) formülleri kullanılmıştır.

(4.29), (4.30) ve (4.76)formüllerinden

$$y_n(x) = \varphi(x, \lambda_n) = \cos s_n x + \frac{h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau}{s_n} \sin s_n x + \frac{\sin s_n x}{2s_n}\int_0^x q(\tau)\cos 2s_n\tau d\tau - \\ - \frac{\cos s_n x}{2s_n}\int_0^x q(\tau)\sin 2s_n\tau d\tau + O(n^{-2}) \quad (4.111)$$

ifadesi elde edilir. Buna ek olarak, (4.29) eşitliğinin x'e göre türevi alınıp bu türevde (4.76) eşitliği dikkate alınırsa

$$\varphi'_x(x, \lambda_n) = -s_n \sin s_n x + \left(h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau\right)\cos s_n x + \frac{\cos s_n x}{2}\int_0^x q(\tau)\cos 2s_n\tau d\tau + \\ + \frac{\sin s_n x}{2}\int_0^x q(\tau)\sin 2s_n\tau d\tau + O(n^{-1}) \quad (4.112)$$

elde edilir.

Şimdi, $a = 0$ ve $a \neq 0$ durumlarına göre ispatı ayrı ayrı devam ettirelim:

i. $a = 0$ olsun. (4.76) ve (4.77) eşitliklerinden

$$s_n = \sqrt{\lambda_n} = (n - N)\pi + \varepsilon_n \quad (4.113)$$

yazılabilir. Burada, $\varepsilon_n = O(n^{-1})$ dir.

Diğer taraftan, (4.103) eşitliklerinden dolayı (4.111) ve (4.112) formülleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılır:

$$\varphi(x, \lambda_n) = \cos s_n x + \frac{h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau}{(n-N)\pi}\sin(n-N)\pi x + \\ + \frac{\sin(n-N)\pi x}{2(n-N)\pi}\int_0^x q(\tau)\cos 2(n-N)\pi\tau d\tau - \\ - \frac{\cos(n-N)\pi x}{2(n-N)\pi}\int_0^x q(\tau)\sin 2(n-N)\pi\tau d\tau + O(n^{-2}) \quad (4.114)$$

$$\varphi'_x(x, \lambda_n) = -s_n \sin s_n x + \left(h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau\right)\cos(n-N)\pi x + \\ + \frac{\cos(n-N)\pi x}{2}\int_0^x q(\tau)\cos 2(n-N)\pi\tau d\tau + \\ + \frac{\sin(n-N)\pi x}{2}\int_0^x q(\tau)\sin 2(n-N)\pi\tau d\tau + O(n^{-1}). \quad (4.115)$$

Dikkate alalım ki, $0<\beta<\pi$ ve $a=0$ durumunda (4.74) ve (4.75) sınır koşulları sırasıyla

$$y'(0)=hy(0),\quad \frac{y'(1)}{y(1)}=b-\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\lambda-c_k}$$

biçiminde yazılır. Burada, $h=\cot\beta$ dır. Buradan, $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.4) başlangıç koşullarını sağlar. Bu nedenle, (4.73)-(4.75) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\varphi_x'(1,\lambda_n)-\left(b-\sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\lambda_n-c_k}\right)\varphi(1,\lambda_n)=0 \tag{4.116}$$

denklemini sağlar. Gerçekten, $\lambda_n\neq c_k$, $k=\overline{1,N}$ olduğu durumda $\varphi(1,\lambda_n)\neq 0$ olacağından bu son denklem yazılabilir. Buna ek olarak, $x=1$ için (4.114) ve (4.115) formülleri sırasıyla

$$\varphi(1,\lambda_n)=\cos s_n+O\left(n^{-1}\right), \tag{4.117}$$

$$\varphi_x'(1,\lambda_n)=-s_n\sin s_n+(-1)^{n-N}\left(h+\frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau\right)+O\left(\delta_{n,\nu}\right) \tag{4.118}$$

biçiminde elde edilir. Burada; $\nu=-N$ için $\delta_{n,\nu}=\left|\int_0^1 q(\tau)\cos 2(n-N)\pi\tau d\tau\right|+\frac{1}{n}$ dir.

Diğer taraftan, (4.113) formülü kullanılarak aşağıdaki ifadeler elde edilir:

$$\cos s_n=\cos\left((n-N)\pi+\varepsilon_n\right)=\cos(n-N)\pi\cos\varepsilon_n=(-1)^{n-N}+O\left(n^{-1}\right), \tag{4.119}$$

$$\sin s_n=\sin\left((n-N)\pi+\varepsilon_n\right)=\cos(n-N)\pi\sin\varepsilon_n=(-1)^{n-N}\varepsilon_n+O\left(n^{-3}\right). \tag{4.120}$$

(4.117)-(4.120) eşitlikleri (4.116) denkleminde yerine yazılırsa

$$(-1)^{n-N-1}(n-N)\pi\varepsilon_n+(-1)^{n-N}\left(h+\int_0^1 q(\tau)d\tau\right)+O\left(\delta_{n,\nu}\right)-\left(b+O\left(n^{-2}\right)\right)\left((-1)^{n-N}+O\left(n^{-1}\right)\right)=0$$

denklemi elde edilir. Bu denklem çözülürse

$$\varepsilon_n=\frac{h-b+\frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau}{n\pi}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right) \tag{4.121}$$

elde edilir. (4.121) ifadesi (4.113) eşitliğinde dikkate alınırsa $0<\beta<\pi$ ve $a=0$ durumunda (4.88) formülü ispatlanmış olur.

Diğer taraftan, (4.88) formülü kullanılarak

$$\cos s_n x=\cos(n-N)\pi x-\frac{(h+\alpha_a)x\sin(n-N)\pi x}{n\pi}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)$$

elde edilir. Bu son eşitlik, (4.114) formülünde dikkate alınırsa $0<\beta<\pi$ ve $a=0$ durumunda (4.89) formülü ispatlanmış olur.

ii. $a \neq 0$ olsun. (4.76) ve (4.77) eşitliklerinden

$$s_n = \sqrt{\lambda_n} = \left(n - \frac{1}{2} - N\right)\pi + \varepsilon_n \tag{4.122}$$

yazılabilir. Burada, $\varepsilon_n = O\left(n^{-1}\right)$ dir.

Diğer taraftan,

$$\cos s_n x = \cos\left(n - \frac{1}{2} - N\right)\pi x + O\left(n^{-1}\right),$$
$$\sin s_n x = \sin\left(n - \frac{1}{2} - N\right)\pi x + O\left(n^{-1}\right)$$

eşitliklerinden dolayı (4.111) ve (4.112) formülleri sırasıyla aşağıdaki gibi yazılır:

$$\begin{aligned}\varphi(x,\lambda_n) = \cos s_n x &+ \frac{h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau}{\left(n - \frac{1}{2} - N\right)\pi}\sin\left(n - \frac{1}{2} - N\right)\pi x + \\ &+ \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2} - N\right)\pi x}{(2n-1-2N)\pi}\int_0^x q(\tau)\cos(2n-1-2N)\pi\tau d\tau - \\ &- \frac{\cos\left(n - \frac{1}{2} - N\right)\pi x}{(2n-1-2N)\pi}\int_0^x q(\tau)\sin(2n-1-2N)\pi\tau d\tau + O\left(n^{-2}\right)\end{aligned} \tag{4.123}$$

$$\begin{aligned}\varphi_x'(x,\lambda_n) = -s_n \sin s_n x &+ \left(h + \frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau\right)\cos\left(n - \frac{1}{2} - N\right)\pi x + \\ &+ \frac{\cos\left(n - \frac{1}{2} - N\right)\pi x}{2}\int_0^x q(\tau)\cos(2n-1-2N)\pi\tau d\tau + \\ &+ \frac{\sin\left(n - \frac{1}{2} - N\right)\pi x}{2}\int_0^x q(\tau)\sin(2n-1-2N)\pi\tau d\tau + O\left(n^{-1}\right).\end{aligned} \tag{4.124}$$

Dikkate alalım ki, $0 < \beta < \pi$ ve $a \neq 0$ durumunda (4.74) ve (4.75) sınır koşulları sırasıyla

$$y'(0) = hy(0), \quad \frac{y'(1)}{y(1)} = a\lambda + b - \sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\lambda - c_k}$$

biçiminde yazılır. Burada, $h = \cot\beta$ dır. Buradan, $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonu (4.4) başlangıç koşullarını sağlar. Bu nedenle, (4.73)-(4.75) sınır değer probleminin özdeğerleri

$$\varphi_x'(1,\lambda_n) - \left(a\lambda_n + b - \sum_{k=1}^{N}\frac{b_k}{\lambda_n - c_k}\right)\varphi(1,\lambda_n) = 0 \tag{4.125}$$

denklemini sağlar. Gerçekten, $\lambda_n \neq c_k$, $k = \overline{1,N}$ olduğu durumda $\varphi(1,\lambda_n) \neq 0$ olacağından bu son denklem yazılabilir. Buna ek olarak, $x = 1$ için (4.123) ve (4.124) formülleri sırasıyla

$$\varphi(1,\lambda_n)=\cos s_n+\frac{(-1)^{n-N-1}}{\left(n-\frac{1}{2}-N\right)}\left(h+\frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau\right)+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right), \tag{4.126}$$

$$\varphi_x'(1,\lambda_n)=(-1)^{n-N}\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi+O(1) \tag{4.127}$$

biçiminde elde edilir. Burada; $\nu=-\frac{1}{2}-N$ için $\delta_{n,\nu}=\left|\int_0^1 q(\tau)\cos(2n-1-2N)\pi\tau d\tau\right|+\frac{1}{n}$ dir.

Diğer taraftan, (4.122) formülü kullanılarak

$$\begin{aligned}\cos s_n&=\cos\left(\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi\varepsilon_n\right)=-\sin\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi\sin\varepsilon_n=\\&=(-1)^{n-N}\varepsilon_n+O\left(n^{-3}\right).\end{aligned} \tag{4.128}$$

ifadesi elde edilir. (4.126)-(4.128) eşitlikleri (4.125) denkleminde yerine yazılırsa

$$(-1)^{n-N}\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi+O(1)-\left(a\left(n-\frac{1}{2}-N\right)^2\pi^2+O(1)\right)\times$$
$$\times\left((-1)^{n-N}\varepsilon_n+\frac{(-1)^{n-N-1}\left(h+\frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau\right)}{n\pi}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)\right)=0$$

denklemi elde edilir. Bu son denklem çözülürse

$$\varepsilon_n=\frac{h+\frac{1}{a}+\frac{1}{2}\int_0^1 q(\tau)d\tau}{n\pi}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right) \tag{4.129}$$

elde edilir. (4.129) ifadesi (4.122) eşitliğinde dikkate alınırsa $0<\beta<\pi$ ve $a\neq 0$ durumunda (4.88) formülü ispatlanmış olur.

Diğer taraftan, (4.88) formülü kullanılarak

$$\cos s_n x=\cos\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi x-\frac{(h+\alpha_a)x\sin\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi x}{n\pi}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)$$

elde edilir. Bu son eşitlik, (4.114) formülünde dikkate alınırsa $0<\beta<\pi$ ve $a\neq 0$ durumunda (4.89) formülü ispatlanmış olur. ■

4.2.3. Özfonksiyonlar Sistemleri Üzere Spektral Ayrışımların Düzgün Yakınsaklık Koşulları

Bu kısımda, (4.73)-(4.75) sınır değer probleminin önceki kısımda ispatlanan özdeğerlerin ve özfonksiyonların kesinleştirilmiş asimptotik formülleri kullanılarak bu problemin özfonksiyonlar sistemleri üzere sürekli fonksiyonlar için Fourier seri ayrışımlarının düzgün yakınsaklık koşulları araştırılacaktır.

Kabul edelim ki, $f(x) \in C[0,1]$; her $n = 0,1,...$ ve $j = \overline{1,N}$ sayıları için $a \neq 0$ ve $\lambda_n \neq c_j$ olsun. Bu durumda,

$$\Delta' = \begin{vmatrix} (f, y_{k_0}) & \dfrac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0} - c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0} - c_N} \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ (f, y_{k_N}) & \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N} - c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N} - c_N} \end{vmatrix} \tag{4.130}$$

determinantı tanımlansın. Burada; $(\cdot,\cdot)$, $L_2(0,1)$ uzayında iç çarpımıdır.

Kabul edelim ki, $c_j \left(j = \overline{1,N} \right)$ sayılarının bazıları (4.73)-(4.75) probleminin özdeğerleri olsun. Örneğin, bazı t ve s sayıları için $\lambda_{k_t} = c_s$ olsun. O halde, (4.130) determinantının (t+1)'inci satırındaki ilk ve (s+1)'inci eleman hariç diğer tüm elemanlar sıfır olur. Buna ek olarak, aynı determinantın (t+1)'inci satırdaki ilk elemanı olan $\left(f, y_{k_t}\right)$ değişmez fakat (s+1)'inci elemanı olan $\dfrac{y_{k_t}(1)}{\lambda_{k_t} - c_s}$ ifadesi $-\dfrac{y'_{k_t}(1)}{b_s}$ ile değiştirilir. Dahası, $B_{k_t} = \left\| y_{k_t} \right\|^2 + \dfrac{\left(y'_{k_t}(1)\right)^2}{b_s}$ dir.

Teorem 4.2.3.1. $f(x) \in C[0,1]$ ve $k_0, k_1, ..., k_N$ sayıları birbirinden farklı negatif olmayan tamsayılar olsun.

I. $a = 0$ ve $\beta = 0$ olsun. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında $\left\{ \sqrt{2} \sin\left(n - \frac{1}{2}\right)\pi x \right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre Fourier seri ayrışımı düzgün yakınsak ise, o halde bu fonksiyon $y_n(x)\left(n = 0,1,...; n \neq k_1, ..., k_N\right)$ sistemine göre Fourier serisine ayrıştırılabilir ve bu ayrışım $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

II. $a \neq 0$ ve $\beta = 0$ olsun. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında $\left\{ \sqrt{2} \sin n\pi x \right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre Fourier seri ayrışımı düzgün yakınsak ise, o halde bu fonksiyon $y_n(x)\left(n = 0,1,...; n \neq k_0, k_1, ..., k_N\right)$ sistemine göre Fourier serisine ayrıştırılabilir ve bu ayrışım her $[0,b]$ $(0 < b < 1)$ aralığında düzgün yakınsaktır. $y_n(x)\left(n = 0,1,...; n \neq k_0, k_1, ..., k_N\right)$ sistemine göre $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\Delta' = 0$ olmasıdır.

III. $a = 0$ ve $0 < \beta < \pi$ olsun. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında $\left\{ \sqrt{2} \cos n\pi x \right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre Fourier seri ayrışımı düzgün yakınsak ise, o halde bu fonksiyon

$y_n(x)\left(n=0,1,\ldots;n\neq k_1,\ldots,k_N\right)$ sistemine göre Fourier serisine ayrıştırılabilir ve bu ayrışım $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

IV. $a\neq 0$ ve $0<\beta<\pi$ olsun. Eğer $f(x)$ fonksiyonu $[0,1]$ aralığında $\left\{\sqrt{2}\cos\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi x\right\}_{n=1}^{\infty}$ sistemine göre Fourier seri ayrışımı düzgün yakınsak ise, o halde bu fonksiyon $y_n(x)\left(n=0,1,\ldots;n\neq k_0,k_1,\ldots,k_N\right)$ sistemine göre Fourier serisine ayrıştırılabilir ve bu ayrışım her $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığında düzgün yakınsaktır. $y_n(x)\left(n=0,1,\ldots;n\neq k_0,k_1,\ldots,k_N\right)$ sistemine göre $f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart $\Delta'=0$ olmasıdır.

İspat.

I. $a=0$ ve $\beta=0$ olsun. İlk olarak, her $n=0,1,\ldots$ ve $j=\overline{1,N}$ sayıları için $\lambda_n\neq c_j$ durumunu inceleyelim.

$f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $y_n(x)\left(n=0,1,\ldots;n\neq k_1,\ldots,k_N\right)$ sistemine göre Fourier serisi

$$H^{(I)}(x)=\sum_{n=0,n\neq k_1,\ldots,k_N}^{\infty}(f,u_n)y_n(x) \tag{4.131}$$

biçiminde tanımlansın. Burada, $u_n(x)\left(n=0,1,\ldots;n\neq k_1,\ldots,k_N\right)$ sistemi (4.84) biortogonal sistemiyle tanımlıdır.

(4.131) serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$H^{(I)}(x)=\sum_{n=r+1}^{\infty}(f,u_n)y_n(x) \tag{4.132}$$

serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olmasıdır. Burada, $r=\max\{k_1,\ldots,k_N\}$ dir.

(4.84)-(4.89) eşitliklerinden

$$(f,u_n)=\frac{\left(f,A_{n,k_1,\ldots,k_N}(x)\right)}{B_n^{(2)}\Delta_2}=\frac{1}{B_n^{(2)}\Delta_2}\begin{vmatrix}(f,y_n) & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_1} & \cdots & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_N}\\ (f,y_{k_1}) & \frac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1}-c_1} & \cdots & \frac{y_{k_1}(1)}{\lambda_{k_1}-c_N}\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (f,y_{k_N}) & \frac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_1} & \cdots & \frac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_N}\end{vmatrix} \tag{4.133}$$

$$=\frac{(f,y_n)}{B_n^{(2)}}+O\left(n^{-3}\right)$$

elde edilir. (4.88) ve (4.89) eşitliklerinden

$$y_n(1)=\frac{(-1)^{n-N}}{n\pi}+O\left(n^{-2}\right),$$

$$\|y_n\|^2=\frac{1}{(n\pi)^2}\int_0^1\sin^2\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x dx+O\left(n^{-3}\right)=\frac{1}{2(n\pi)^2}+O\left(n^{-3}\right)$$

bulunur. Bu son eşitlikler, (4.86) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$\frac{1}{B_n^{(2)}}=2(n\pi)^2+O(n) \tag{4.134}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.89) ve (4.134) eşitlikleri kullanılarak (4.133) eşitliği

$$(f,u_n)=2(n\pi)^2(f,y_n)+O(1) \tag{4.135}$$

biçiminde yazılabilir. (4.89) ve (4.135) eşitlikleri kullanılarak

$$(f,u_n)y_n(x)=\left(f,\sqrt{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)\sqrt{2}\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x+R_n^{(3)}(x)$$

elde edilir. Burada,

$$\begin{aligned}R_n^{(3)}(x)=&\left(f,\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\left(f(x)\alpha^{(3)}(x),\cos\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\\&+\left(f,\alpha_n^{(3)}(x)\cos\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\left(f,\beta_n^{(3)}(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\\&+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right);\ \nu=\frac{1}{2}-N,\end{aligned} \tag{4.136}$$

$$\alpha^{(3)}(x)=\alpha_a x-\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau,$$

$$\alpha_n^{(3)}(x)=\int_0^x q(\tau)\cos(2n+1-2N)\pi\tau d\tau,$$

$$\beta_n^{(3)}(x)=\int_0^x q(\tau)\sin(2n+1-2N)\pi\tau d\tau$$

dir. (4.136) eşitliği üzerinde gerekli hesaplamalar yapılırsa, yeterince büyük n'ler için

$$\begin{aligned}\left|R_n^{(3)}(x)\right|\le\frac{C_{13}}{n}&\left\{\left|\left(f,\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)\right|+\left|\left(f(x)\alpha^{(3)}(x),\cos\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)\right|+\right.\\&+\left.\left|\left(f,\alpha_n^{(3)}(x)\cos\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)\right|+\left|\left(f,\beta_n^{(3)}(x)\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)\right|+\delta_{n,\nu}\right\}\le\\&\le C_{14}\left\{\left|\left(f,\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)\right|^2+\left|\left(f(x)\alpha^{(3)}(x),\cos\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)\right|^2+\right.\\&+\left.\left(\int_0^1\left|f(x)\alpha_n^{(3)}(x)\right|dx\right)^2+\left(\int_0^1\left|f(x)\beta_n^{(3)}(x)\right|dx\right)^2+\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right\}\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, C_{13} ve C_{14} belli pozitif sabitlerdir. Fourier katsayıları için Bessel eşitsizliği kullanılarak

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\left(f,\sin\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)\right|^2,\ \sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\left(f(x)\alpha^{(3)}(x),\cos\left(n+\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)\right|^2,\ \sum_{n=r+1}^{\infty}\frac{\delta_{n,\nu}}{n}$$

sayısal serilerinin düzgün yakınsaklığını göstermek kolaydır.

Bessel eşitsizliğinin tekrar kullanılmasıyla

$$\begin{aligned}\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\alpha_n^{(3)}(x)\right|dx\right)^2 &\le \|f\|^2\sum_{n=r+1}^{\infty}\int_0^1\left|\alpha_n^{(3)}(x)\right|^2dx \le \\ &\le \|f\|^2\int_0^1\left[\sum_{n=r+1}^{\infty}\left|\int_0^x q(\tau)\cos(2n+1-2N)\pi\tau d\tau\right|^2\right]dx \le \\ &\le C_{15}\|f\|^2\int_0^1\int_0^x\left|q(\tau)\right|^2 d\tau dx \le C_{15}\|f\|^2\|q\|^2\end{aligned}$$

elde edilir. Burada, C_{15} belli bir pozitif sabittir. Benzer şekilde,

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}\left(\int_0^1\left|f(x)\beta_n^{(3)}(x)\right|dx\right)^2 \le C_{16}\|f\|^2\|q\|^2$$

elde edilir. Burada, C_{16} belli bir pozitif sabittir.

Sonuç olarak

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}R_n^{(3)}(x)$$

serisi $[0,1]$ aralığı üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu nedenle; $\lambda_n \ne c_j$, $n=0,1,\dots$; $j=\overline{1,N}$ durumunda ispat tamamlanmıştır.

Diğer taraftan, $c_j\left(j=\overline{1,N}\right)$ sayılarının bazıları (4.73)-(4.75) probleminin özdeğerleri olması durumunda da ispat tamamen benzerdir. Not 4.2.1.2'de bu durumda biortogonal sistemin nasıl inşa edileceği açık bir şekilde ifade edilmiştir. Yine de, bu durumda biortogonal sistemin inşasıyla ilgili basit bir örnek verelim. Örneğin, $\lambda_{k_1}=c_1$, $\lambda_{k_3}=c_4$ ve $\lambda_{k_N}=c_{N-1}$ olsun.

(4.79) sistemine biortogonal olan $u_n(x)\left(n=0,1,\dots;n\ne k_1,\dots,k_N\right)$ sistemi

$$u_n(x)=\frac{A_{n,k_1,\dots,k_N}(x)}{B_{k_t}\Delta_2}$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

$$A_{n,k_1,\ldots,k_N}(x)=\begin{vmatrix} y_n(x) & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_1} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_2} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_3} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_4} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_5} & \cdots & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_{N-1}} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_N} \\ y_{k_1}(x) & -\frac{y'_{k_1}(1)}{b_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y_{k_2}(x) & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_1} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_2} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_3} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_4} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_5} & \cdots & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_{N-1}} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_N} \\ y_{k_3}(x) & 0 & 0 & 0 & -\frac{y'_{k_3}(1)}{b_4} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y_{k_4}(x) & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_1} & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_2} & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_3} & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_4} & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_5} & \cdots & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_1} & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y_{k_{N-1}}(x) & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_1} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_2} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_3} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_4} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_5} & \cdots & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_{N-1}} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_N} \\ y_{k_N}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{y'_{k_N}(1)}{b_{N-1}} & 0 \end{vmatrix},$$

$$B_{k_t}=\left\|y_{k_t}\right\|^2+\frac{\left(y'_{k_t}(1)\right)^2}{b_s},\ t=1,3,N;\quad s=1,4,N-1,$$

$$\Delta_2=\begin{vmatrix} -\frac{y'_{k_1}(1)}{b_1} & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_1} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_2} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_3} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_4} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_5} & \cdots & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_{N-1}} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_N} \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{y'_{k_3}(1)}{b_4} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_1} & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_2} & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_3} & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_4} & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_5} & \cdots & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_1} & \frac{y_{k_4}(1)}{\lambda_{k_4}-c_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_1} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_2} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_3} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_4} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_5} & \cdots & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_{N-1}} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{y'_{k_N}(1)}{b_{N-1}} & 0 \end{vmatrix}$$

dir.

II. $a\neq 0$ ve $\beta=0$ olsun. İlk olarak, her $n=0,1,\ldots$ ve $j=\overline{1,N}$ sayıları için $\lambda_n\neq c_j$ durumunu inceleyelim.

$f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $y_n(x)\,(n=0,1,\ldots;n\neq k_0,k_1,\ldots,k_N)$ sistemine göre Fourier serisi

$$H^{(II)}(x)=\sum_{n=0,n\neq k_0,k_1,\ldots,k_N}^{\infty}(f,u_n)\,y_n(x) \tag{4.137}$$

biçiminde tanımlansın. Burada, $u_n(x)\left(n=0,1,\ldots;n\neq k_0,k_1,\ldots,k_N\right)$ sistemi (4.80) biortogonal sistemiyle tanımlıdır.

(4.137) serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$H^{(II)}(x)=\sum_{n=r}^{\infty}(f,u_n)y_n(x) \tag{4.138}$$

serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olmasıdır. Burada, $r=\max\{k_0,k_1,\ldots,k_N\}$ dir.

(4.80)-(4.83), (4.88) ve (4.89) eşitliklerinden

$$(f,u_n)=\frac{\left(f,A_{n,k_0,k_1,\ldots,k_N}(x)\right)}{B_n^{(1)}\Delta_1}=\frac{1}{B_n^{(1)}\Delta_1}\begin{vmatrix}(f,y_n) & y_n(1) & \dfrac{y_n(1)}{\lambda_n-c_1} & \cdots & \dfrac{y_n(1)}{\lambda_n-c_N}\\ (f,y_{k_0}) & y_{k_0}(1) & \dfrac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0}-c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_0}(1)}{\lambda_{k_0}-c_N}\\ \vdots & \cdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ (f,y_{k_N}) & y_{k_N}(1) & \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_1} & \cdots & \dfrac{y_{k_N}(1)}{\lambda_{k_N}-c_N}\end{vmatrix} \tag{4.139}$$

$$=\frac{(f,y_n)}{B_n^{(1)}}-\frac{\Delta'}{\Delta_1}\frac{y_n(1)}{B_n^{(1)}}+O\left(n^{-4}\right)$$

elde edilir. Burada, Δ' determinantı (4.130) ile tanımlıdır. (4.88) ve (4.89) eşitliklerinden

$$y_n(1)=\frac{(-1)^{n-N}}{a(n\pi)^2}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n^2}\right),$$

$$\|y_n\|^2=\frac{1}{(n\pi)^2}\int_0^1\sin^2(n-N)\pi x\,dx+O\left(n^{-3}\right)=\frac{1}{2(n\pi)^2}+O\left(n^{-3}\right)$$

bulunur. Bu son eşitlikler, (4.82) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$\frac{1}{B_n^{(2)}}=2(n\pi)^2+O(n) \tag{4.140}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.89), (4.139) ve (4.140) eşitlikleri kullanılırsa

$$(f,u_n)y_n(x)=E_n^{(1)}(x)-\frac{\Delta'}{\Delta_1}E_n^{(2)}(x)$$

elde edilir. Burada,

$$E_n^{(1)}(x)=2(n\pi)^2(f,y_n)y_n(x)+(f,y_n)y_n(x)O(n)+O\left(n^{-2}\right),$$

$$E_n^{(2)}(x)=2(n\pi)^2y_n(1)y_n(x)$$

dir. (4.138) serisinin düzgün yakınsaklığının incelenebilmesi için $\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(1)}(x)$ ve $\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(2)}(x)$ serilerinin düzgün yakınsaklığının incelenmesi gerekir. Bu nedenle, ilk olarak $\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(1)}(x)$ serisi incelensin. Burada, $E_n^{(1)}(x)$ ifadesi

$$E_n^{(1)}(x)=\left(f,\sqrt{2}\sin(n-N)\pi x\right)\sqrt{2}\sin(n-N)\pi x+R_n^{(4)}(x)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\begin{aligned}R_n^{(4)}(x)&=\left(f,\sin(n-N)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\left(f(x)\alpha^{(4)}(x),\cos(n-N)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\\&+\left(f,\alpha_n^{(4)}(x)\cos(n-N)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\left(f,\beta_n^{(4)}(x)\sin(n-N)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\\&+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right);\ \nu=-N,\end{aligned}\tag{4.141}$$

$$\alpha^{(4)}(x)=\alpha_a x-\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau,$$

$$\alpha_n^{(4)}(x)=\int_0^x q(\tau)\cos 2(n-N)\pi\tau d\tau,$$

$$\beta_n^{(4)}(x)=\int_0^x q(\tau)\sin 2(n-N)\pi\tau d\tau$$

dir. $\sum_{n=r+1}^{\infty}R_n^{(3)}(x)$ serisinin düzgün yakınsaklığının incelenmesi için (4.136) eşitliği üzerinde uygulanan metot, (4.141) eşitliği üzerinde uygulanarak $\sum_{n=r}^{\infty}R_n^{(4)}(x)$ serisinin $[0,1]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsaklığı kolayca gösterilebilir. O halde, $\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(1)}(x)$ serisi $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır.

$\Delta'=0$ olsun. Bu durumda, $\sum_{n=r}^{\infty}(f,u_n)y_n(x)=\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(1)}(x)$ olacağından dolayı (4.138) serisi $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

$\Delta'\neq 0$ olsun. $\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(2)}(x)$ serisinin düzgün yakınsaklığı incelensin:

$$\begin{aligned}E_n^{(2)}(x)&=2(n\pi)^2 y_n(1)y_n(x)=2(n\pi)^2\left(\frac{(-1)^{n-N}}{a(n\pi)^2}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n^2}\right)\right)\left(\frac{\sin(n-N)\pi x}{n\pi}+O\left(n^{-2}\right)\right)\\&=\frac{2(-1)^{n-N}\sin(n-N)\pi x}{an\pi}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)=\frac{2}{a\pi}\frac{\sin(n-N)\pi(1+x)}{n}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Bu son eşitlikten;

$$\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(2)}(x)=\frac{2}{a\pi}\sum_{n=r-N}^{\infty}\frac{\sin n\pi(1+x)}{n}+\sum_{n=r-N}^{\infty}O\left(n^{-2}\right)+\sum_{n=r}^{\infty}O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)$$

bulunur. Açıktır ki, $\sum_{n=r-N}^{\infty} O\left(n^{-2}\right)$ ve $\sum_{n=r}^{\infty} O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)$ serileri $[0,1]$ aralığı üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır.

Diğer taraftan,

$$\sum_{n=r}^{\infty} \frac{\sin n\pi t}{n}$$

serisi her $[\delta, 2\pi-\delta]$, $0<\delta<\pi$ aralığında düzgün yakınsaktır [52, Chapter I, Section 30, Theorem1]. Bu nedenle,

$$\sum_{n=r-N}^{\infty} \frac{\sin n\pi(1+x)}{n}$$

serisi her $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığında düzgün yakınsaktır. Sonuç olarak; $\lambda_n \neq c_j$, $n=0,1,\ldots$; $j=\overline{1,N}$ durumunda ispat tamamlanmıştır.

Diğer taraftan, $c_j\left(j=\overline{1,N}\right)$ sayılarının bazıları (4.73)-(4.75) probleminin özdeğerleri olması durumunda da ispat tamamen benzerdir. Not 4.2.1.1'de bu durumda biortogonal sistemin nasıl inşa edileceği açık bir şekilde ifade edilmiştir. Yine de, bu durumda biortogonal sistemin inşasıyla ilgili basit bir örnek verelim. Örneğin, $\lambda_{k_0}=c_1$, $\lambda_{k_1}=c_3$ ve $\lambda_{k_N}=c_{N-1}$ olsun.

(4.78) sistemine biortogonal olan $u_n(x)\left(n=0,1,\ldots;n\neq k_0,k_1,\ldots,k_N\right)$ sistemi

$$u_n(x)=\frac{A_{n,k_0,k_1,\ldots,k_N}(x)}{B_{k_t}\Delta_1}$$

biçiminde tanımlanır. Burada,

$$\Delta_1=\begin{vmatrix} 0 & -\frac{y'_{k_0}(1)}{b_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ 0 & 0 & 0 & -\frac{y'_{k_1}(1)}{b_3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y_{k_2}(1) & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_1} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_2} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_3} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_4} & \cdots & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_{N-1}} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y_{k_{N-1}}(1) & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_1} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_2} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_3} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_4} & \cdots & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_{N-1}} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_N} \\ 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{y'_{k_N}(1)}{b_{N-1}} & 0 \end{vmatrix}$$

$$B_{k_t}=\left\|y_{k_t}\right\|^2+\frac{\left(y'_{k_t}(1)\right)^2}{b_s},\ t=0,1,N;\quad s=1,3,N-1,$$

$$A_{n,k_0,k_1,\dots,k_N}(x)=\begin{vmatrix} y_n(x) & y_n(1) & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_1} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_2} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_3} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_4} & \cdots & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_{N-1}} & \frac{y_n(1)}{\lambda_n-c_N} \\ y_{k_0}(x) & 0 & -\frac{y'_{k_0}(1)}{b_1} & 0 & 0 & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y_{k_1}(x) & 0 & 0 & 0 & -\frac{y'_{k_1}(1)}{b_3} & 0 & \cdots & 0 & 0 \\ y_{k_2}(x) & y_{k_2}(1) & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_1} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_2} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_3} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_4} & \cdots & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_{N-1}} & \frac{y_{k_2}(1)}{\lambda_{k_2}-c_N} \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \vdots & \ddots & \vdots & \\ y_{k_{N-1}}(x) & y_{k_{N-1}}(1) & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_1} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_2} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_3} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_4} & \cdots & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_{N-1}} & \frac{y_{k_{N-1}}(1)}{\lambda_{k_{N-1}}-c_N} \\ y_{k_N}(x) & 0 & 0 & 0 & 0 & 0 & \cdots & -\frac{y'_{k_N}(1)}{b_{N-1}} & 0 \end{vmatrix},$$

dir.

III. $a=0$ ve $0<\beta<\pi$ olsun. İlk olarak, her $n=0,1,\dots$ ve $j=\overline{1,N}$ sayıları için $\lambda_n\neq c_j$ durumunu inceleyelim.

$f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $y_n(x)\,(n=0,1,\dots;n\neq k_1,\dots,k_N)$ sistemine göre Fourier serisi

$$H^{(III)}(x)=\sum_{n=0,n\neq k_1,\dots,k_N}^{\infty}(f,u_n)\,y_n(x) \tag{4.142}$$

biçiminde tanımlansın. Burada, $u_n(x)\,(n=0,1,\dots;n\neq k_1,\dots,k_N)$ sistemi (4.84) biortogonal sistemiyle tanımlıdır.

(4.142) serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$H^{(III)}(x)=\sum_{n=r+1}^{\infty}(f,u_n)\,y_n(x) \tag{4.143}$$

serisinin [0,1] aralığında düzgün yakınsak olmasıdır. Burada, $r=\max\{k_1,\dots,k_N\}$ dir.

(4.84)-(4.88),(4.90) eşitliklerinden

$$(f,u_n)=\frac{\left(f,A_{n,k_1,\dots,k_N}(x)\right)}{B_n^{(2)}\Delta_2}=\frac{(f,y_n)}{B_n^{(2)}}+O\left(n^{-3}\right) \tag{4.144}$$

elde edilir. (4.88) ve (4.90) eşitliklerinden

$$y_n(1)=(-1)^{n-N}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right),$$

$$\|y_n\|^2=\int_0^1\cos^2(n-N)\pi x\,dx+O\left(n^{-1}\right)=\frac{1}{2}+O\left(n^{-1}\right)$$

bulunur. Bu son eşitlikler, (4.86) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$\frac{1}{B_n^{(2)}}=2+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.145}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.145) eşitliği kullanılarak (4.144) eşitliği

$$(f,u_n)=2(f,y_n)+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.146}$$

biçiminde yazılabilir. (4.90) ve (4.146) eşitlikleri kullanılarak

$$(f,u_n)y_n(x)=\left(f,\sqrt{2}\cos(n-N)\pi x\right)\sqrt{2}\cos(n-N)\pi x+R_n^{(5)}(x)$$

elde edilir. Burada

$$\begin{aligned}R_n^{(5)}(x)&=(f,\cos(n-N)\pi x)O\left(n^{-1}\right)+\left(f(x)\alpha^{(5)}(x),\sin(n-N)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\\&+\left(f,\alpha_n^{(5)}(x)\sin(n-N)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\left(f,\beta_n^{(5)}(x)\cos(n-N)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\\&+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right);\ \nu=-N,\end{aligned} \tag{4.147}$$

$$\alpha^{(5)}(x)=h-(h+\alpha_a)x+\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau,$$

$$\alpha_n^{(5)}(x)=\int_0^x q(\tau)\cos 2(n-N)\pi\tau d\tau,$$

$$\beta_n^{(5)}(x)=\int_0^x q(\tau)\sin 2(n-N)\pi\tau d\tau$$

dir. $\sum_{n=r+1}^{\infty}R_n^{(3)}(x)$ serisinin düzgün yakınsaklığının incelenmesi için (4.136) eşitliği üzerinde uygulanan metot, (4.147) eşitliği üzerinde uygulanarak $\sum_{n=r}^{\infty}R_n^{(5)}(x)$ serisinin $[0,1]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsaklığı kolayca gösterilebilir. Sonuç olarak

$$\sum_{n=r+1}^{\infty}R_n^{(5)}(x)$$

serisi $[0,1]$ aralığı üzerinde mutlak ve düzgün yakınsaktır. Bu nedenle, (4.143) serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaktır. Bu nedenle; $\lambda_n\neq c_j,\ n=0,1,\ldots;\ j=\overline{1,N}$ durumunda ispat tamamlanmıştır.

Diğer taraftan, $c_j\left(j=\overline{1,N}\right)$ sayılarının bazıları (4.73)-(4.75) probleminin özdeğerleri olması durumunda da ispat tamamen benzerdir.

IV. $a\neq 0$ ve $0<\beta<\pi$ olsun. İlk olarak, her $n=0,1,\ldots$ ve $j=\overline{1,N}$ sayıları için $\lambda_n\neq c_j$ durumunu inceleyelim.

$f(x)$ fonksiyonunun $[0,1]$ aralığında $y_n(x)\left(n=0,1,\ldots;n\neq k_0,k_1,\ldots,k_N\right)$ sistemine göre Fourier serisi

$$H^{(IV)}(x)=\sum_{n=0,n\neq k_0,k_1,\ldots,k_N}^{\infty}(f,u_n)\,y_n(x) \tag{4.148}$$

biçiminde tanımlansın. Burada, $u_n(x)\left(n=0,1,\ldots;n\neq k_0,k_1,\ldots,k_N\right)$ sistemi (4.80) biortogonal sistemiyle tanımlıdır.

(4.148) serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olması için gerek ve yeter şart

$$H^{(IV)}(x)=\sum_{n=r}^{\infty}(f,u_n)\,y_n(x) \tag{4.149}$$

serisinin $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsak olmasıdır. Burada, $r=\max\{k_0,k_1,\ldots,k_N\}$ dir.

(4.80)-(4.83), (4.88) ve (4.90) eşitliklerinden

$$(f,u_n)=\frac{\left(f,A_{n,k_0,k_1,\ldots,k_N}(x)\right)}{B_n^{(1)}\Delta_1}=\frac{(f,y_n)}{B_n^{(1)}}-\frac{\Delta'}{\Delta_1}\frac{y_n(1)}{B_n^{(1)}}+O\left(n^{-3}\right) \tag{4.150}$$

elde edilir. Burada; Δ' determinantı, (4.130) ile tanımlıdır. (4.88) ve (4.90) eşitliklerinden

$$y_n(1)=\frac{(-1)^{n-N}}{an\pi}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right),$$

$$\|y_n\|^2=\int_0^1\cos^2\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi x\,dx+O\left(n^{-1}\right)=\frac{1}{2}+O\left(n^{-1}\right)$$

bulunur. Bu son eşitlikler, (4.82) eşitliğinde dikkate alınırsa

$$\frac{1}{B_n^{(2)}}=2+O\left(n^{-1}\right) \tag{4.151}$$

elde edilir. Diğer taraftan, (4.90), (4.150) ve (4.151) eşitlikleri kullanılırsa

$$(f,u_n)\,y_n(x)=E_n^{(3)}(x)-\frac{\Delta'}{\Delta_1}E_n^{(4)}(x)$$

elde edilir. Burada,

$$E_n^{(3)}(x)=2(f,y_n)\,y_n(x)+(f,y_n)\,O\left(n^{-1}\right),$$

$$E_n^{(4)}(x)=2y_n(1)\,y_n(x)+O\left(n^{-2}\right)$$

dir. (4.149) serisinin düzgün yakınsaklığının incelenebilmesi için $\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(3)}(x)$ ve $\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(4)}(x)$ serilerinin düzgün yakınsaklığının incelenmesi gerekir. Bu nedenle ilk olarak, $\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(3)}(x)$ serisi incelensin. Burada, $E_n^{(3)}(x)$ ifadesi

$$E_n^{(3)}(x)=\left(f,\sqrt{2}\cos\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)\sqrt{2}\cos\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi x+R_n^{(6)}(x)$$

biçiminde yazılır. Burada

$$\begin{aligned}R_n^{(6)}(x)&=\left(f,\cos\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\left(f(x)\alpha^{(6)}(x),\sin\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\\&+\left(f,\alpha_n^{(6)}(x)\sin\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\left(f,\beta_n^{(6)}(x)\cos\left(n-\frac{1}{2}-N\right)\pi x\right)O\left(n^{-1}\right)+\\&+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right);\ \nu=-\frac{1}{2}-N,\end{aligned}\tag{4.152}$$

$$\alpha^{(6)}(x)=h-(h+\alpha_a)x+\frac{1}{2}\int_0^x q(\tau)d\tau,$$

$$\alpha_n^{(6)}(x)=\int_0^x q(\tau)\cos(2n-1-2N)\pi\tau d\tau,$$

$$\beta_n^{(6)}(x)=\int_0^x q(\tau)\sin(2n-1-2N)\pi\tau d\tau$$

dir. $\sum_{n=r+1}^{\infty}R_n^{(3)}(x)$ serisinin düzgün yakınsaklığının incelenmesi için (4.136) eşitliği üzerinde uygulanan metot, (4.152) eşitliği üzerinde uygulanarak $\sum_{n=r}^{\infty}R_n^{(6)}(x)$ serisinin $[0,1]$ aralığında mutlak ve düzgün yakınsaklığı kolayca gösterilebilir. O halde, $\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(3)}(x)$ serisi $[0,1]$aralığında düzgün yakınsaktır.

$\Delta'=0$ olsun. Bu durumda, $\sum_{n=r}^{\infty}(f,u_n)y_n(x)=\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(3)}(x)$ olacağından dolayı (4.149) serisi $[0,1]$ aralığı üzerinde düzgün yakınsaktır.

$\Delta'\neq 0$ olsun. $\sum_{n=r}^{\infty}E_n^{(4)}(x)$ serisinin düzgün yakınsaklığı incelensin:

$$\begin{aligned}E_n^{(4)}(x)&=2y_n(1)y_n(x)=2\left(\frac{(-1)^{n-N}}{an\pi}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)\right)\left(\cos\left(n-N-\frac{1}{2}\right)\pi x+O\left(n^{-1}\right)\right)\\&=\frac{2}{a\pi}\frac{(-1)^{n-N}\cos\left(n-N-\frac{1}{2}\right)\pi x}{n}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)=\\&=-\frac{2}{a\pi}\frac{\sin\left[\left(n-N-\frac{1}{2}\right)\pi(x+1)\right]}{n}+O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)\end{aligned}$$

elde edilir. Son eşitlikten;

$$\sum_{n=r}^{\infty} E_n^{(4)}(x) = -\frac{2}{a\pi}\sum_{n=r-N}^{\infty}\frac{\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi(x+1)\right]}{n} + \sum_{n=r-N}^{\infty} O\left(n^{-2}\right) + \sum_{n=r}^{\infty} O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)$$

bulunur. Açıktır ki, $\sum_{n=r-N}^{\infty} O\left(n^{-2}\right)$ ve $\sum_{n=r}^{\infty} O\left(\frac{\delta_{n,\nu}}{n}\right)$ serileri $[0,1]$ aralığı üzerinde mutlak ve düzgün yakınsak olduğu açıktır. Diğer taraftan,

$$\left|\sum_{n=r-N}^{m} \sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi(x+1)\right]\right| \le \frac{\left|\cos\left[(r-N-1)\pi(x+1)\right]-\cos\left[m\pi(x+1)\right]\right|}{2\sin\frac{\pi(x+1)}{2}} \le \infty$$

$$\le \frac{1}{\sin\frac{\pi(x+1)}{2}} \le \frac{1}{\sin\frac{\pi(b+1)}{2}},\ 0<b<1$$

olduğundan

$$\sum_{n=r}^{\infty}\frac{\sin\left[\left(n-\frac{1}{2}\right)\pi(x+1)\right]}{n}$$

serisi her $[0,b]$ $(0<\delta<1)$ aralığında düzgün yakınsaktır [52, Introductory material, §1, Abel's Lemma]. Bu nedenle,

$$\sum_{n=r-N}^{\infty}\frac{\sin n\pi(1+x)}{n}$$

serisi her $[0,b]$ $(0<b<1)$ aralığında düzgün yakınsaktır. Sonuç olarak; $\lambda_n \ne c_j$, $n=0,1,\ldots$; $j=\overline{1,N}$ durumunda ispat tamamlanmıştır.

Diğer taraftan, $c_j\left(j=\overline{1,N}\right)$ sayılarının bazıları (4.73)-(4.75) probleminin özdeğerleri olması durumunda da ispat tamamen benzerdir. ■

4.2.4. Bir Örnek

Bu kısımda, teorem 4.2.3.1'in daha anlaşılır olabilmesi için bir örnek verilecektir. Bu örnek, $a \ne 0$, $\beta = 0$ durumunda $y_n(x)\left(n=0,1,\ldots; n\ne k_0,k_1,\ldots,k_N\right)$ özfonksiyonlar sistemine örnektir.

Örnek 4.2.4.1.

$$-y'' = \lambda y,\ 0<x<1, \tag{4.153}$$

$$y(0)=0,\ \frac{y'(1)}{y(1)} = a\lambda - \frac{\pi^2}{\lambda-\pi^2} \tag{4.154}$$

spektral problemini ele alınsın. Burada, λ bir spektral parametre, a pozitif bir sayıdır.

$\lambda_r = 0$ ve $\lambda_s = \pi^2$ değerleri (4.153)-(4.154) probleminin özdeğerleridir. Burada, r ve s negatif olmayan belli tam sayılardır. Diğer taraftan, bu özdeğerleri karşılık gelen özfonksiyonlar sırasıyla $y_r(x) = x$ ve $y_s(x) = \sin \pi x$ dir.

$f(x) = (-1)^k k \sin k\pi x - (-1)^l l \sin t\pi x$ ve $g(x) = (-1)^k k \sin k\pi x + (-1)^l l \sin t\pi x$ ele alınsın. Burada, k ve l sayıları $-1, 0, 1$ sayılarının dışında keyfi tamsayılardır.

Diğer taraftan, $f(0) = f(1) = g(0) = g(1) = 0$ olduğundan dolayı $\left(f, \sqrt{2}\sin n\pi x\right) = O\left(n^{-2}\right)$ ve $\left(g, \sqrt{2}\sin n\pi x\right) = O\left(n^{-2}\right)$ dir. Ayrıca, $(f, y_r) = (f, y_s) = 0$ ve $(g, y_r) = -2$, $(g, y_s) = 0$.

Bu hesaplamalardan ve (4.130) determinantından

$$\Delta' = \begin{vmatrix} (g, y_r) & \dfrac{y_r(1)}{\lambda_r - c_1} \\ (g, y_s) & -\dfrac{y_s'(1)}{b_1} \end{vmatrix} = \begin{vmatrix} -2 & -\dfrac{1}{\pi^2} \\ 0 & \dfrac{1}{\pi} \end{vmatrix} = -\frac{2}{\pi} \neq 0$$

elde edilir. Yani, $f(x)$ fonksiyonu için $\Delta' = 0$ ve $g(x)$ fonksiyonu için $\Delta' \neq 0$ elde edilir.

Sonuç olarak, teorem 4.2.3.1'e göre $f(x)$ ve $g(x)$ fonksiyonlarının $y(x)(n = 0, 1, \ldots; n \neq r, s)$ sistemi üzerine Fourier serileri sırasıyla $[0,1]$ ve $[0,b]$ $(0 < b < 1)$ aralıkları üzerinde düzgün yakınsaktır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu bölümde; tezde ele alınan sınır koşullarından birinde spektral parametre içeren sınır değer problemlerinin elde edilen sonuçları özetlenecektir. Ayrıca, bu problemlerle ve/veya bu problemin sonuçlarıyla ilgili öneriler verilecektir.

5.1. Sonuçlar

"Kaynak Araştırması" bölümünde, daha önceden pek çok bilim insanı tarafından araştırılmış olan ve tez problemleriyle yakından ilgili olan çalışmalara yer verildi.

"Materyal ve Yöntem" bölümünde, tezde bilinmesi gereken temel kavramlara ek olarak tezin ifade ve ispat edilen teoremleri için bazı tanım, lemma ve teoremlere yer verildi.

Sınır koşullarından birinde λ spektral parametresini lineer biçimde içeren ve tezin "Giriş" bölümünde birinci problem diye adlandırılan sınır değer probleminin;

i) özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri kesinleştirildi,

ii) bu kesinleştirilmiş asimptotik formüllerin yardımıyla seçilmiş kök fonksiyonlar sistemleri üzere sürekli fonksiyonlar için Fourier seri ayrışımlarının $[0,b]$ $(0<b<1)$ ve $[0,1]$ aralıklarında düzgün yakınsaklık koşulları elde edildi,

iii) kök fonksiyonlar sistemlerine biortogonal olan sistemler üzere sürekli fonksiyonlar için Fourier seri ayrışımlarının $[0,1]$ aralığında düzgün yakınsaklık koşulları elde edildi,

iv) elde edilen bulguların daha anlaşılır olması düşüncesiyle, $\beta=0$ durumunda (c) kök fonksiyonlar sistemine, $0<\beta<\pi$ durumunda ise (g) kök fonksiyonlar sistemine birer örnek verildi.

Sınır koşullarından birinde λ spektral parametresini rasyonel biçimde içeren ve tezin "Giriş" bölümünde ikinci problem diye adlandırılan sınır değer probleminin;

i) özdeğerlerinin ve özfonksiyonlarının asimptotik formülleri kesinleştirildi,

*ii)*bu kesinleştirilmiş asimptotik formüllerin yardımıyla seçilmiş özfonksiyonlar sistemleri üzere sürekli fonksiyonlar için Fourier seri ayrışımlarının $[0,b]$ $(0<b<1)$ ve $[0,1]$ aralıklarında düzgün yakınsaklık koşulları elde edildi,

iii) elde edilen bulguların daha anlaşılır olması düşüncesiyle, $a\neq 0$, $\beta=0$ durumunda $y_n(x)\,(n=0,1,\ldots;n\neq k_0,k_1,\ldots,k_N)$ özfonksiyonlar sistemine birer örnek verildi.

5.2. Öneriler

Tezde belirtilen sınır değer problemleri için aşağıdaki öneriler verilebilir:

i) Birinci ve ikinci problemde yalnızca sürekli fonksiyonların spektral ayrışımlarının düzgün yakınsaklığı incelendi. Bu problemler için farklı fonksiyonel uzaylara ait fonksiyonların bulundukları uzaydaki normlara göre Fourier seri ayrışımlarının yakınsaklık koşulları incelenebilir.

ii) Birinci problemde sınır koşullarından birinde λ spektral parametresini analitik biçimde içeren sınır değer problemlerinde kök fonksiyonlar sistemleri üzere sürekli fonksiyonlar için Fourier seri ayrışımlarının düzgün yakınsaklık koşulları incelenebilir. Örneğin; sınır koşullarının birinde λ spektral parametresini kuadratik biçimde içeren problemler.

iii) Sınır koşullarından birinde λ spektral parametresini analitik biçimde içeren sınır değer problemlerinde kök fonksiyonlar sistemleri üzere farklı fonksiyonel uzaylara ait fonksiyonların Fourier seri ayrışımlarının yakınsaklık koşulları incelenebilir. Örneğin; Sobolev uzaylarında.

iv) λ spektral parametresini her iki sınır koşulunda lineer biçimde içeren sınır değer probleminde kök fonksiyonlar sistemleri üzere sürekli fonksiyonların veya farklı fonksiyonel uzaylara ait fonksiyonların Fourier seri ayrışımlarının yakınsaklık (düzgün yakınsaklık) koşulları incelenebilir.

KAYNAKLAR

[1]. Amann, H.; Esher, J., *Analysis I*; Birkhauser Verlag: Berlin, **2005**; p 426.

[2]. Musayev, B.; Alp, M.; Mustafayev, N.; Ekincioğlu, İ., *Teori ve Çözümlü Problemlerle Analiz I;* Tekağaç Eylül Yayıncılık: Ankara, Türkiye, **2003**; s 579.

[3]. Ince, E. L., *Ordinary Differential Equations*. *Vol I*; Dover Publications: New York, **1956**; p 573.

[4]. Çağlıyan, M.; Çelebi, O., *Kısmi Diferensiyel Denklemler*; Dora Yayıncılık: Bursa; **2013**; s 276.

[5]. Myint-U, T.; Debnath, L., *Linear Partial Differential Equations for Scientists and Engineers*; Birkhauser: Boston, **2007**; p 789.

[6]. Lusternik, L. A.; Sobolev, V. J., *Elements of Functional Analysis;* Hindustan Publishing Corporation: Delhi, India, **1974**; p 376.

[7]. Musayev, B.; Alp, M., *Fonksiyonel Analiz;* Balcı Yayınları: Ankara, Türkiye, **2000**; s 470.

[8]. Şuhubi, E. S., *Fonksiyonel Analiz*, İTÜ Vakfı Yayınları: İstanbul, **2001**.

[9]. Royden, H. L.; Fitzpatrick, P., *Reel Analysis 4. Ed.*; The Macmillan Company: New York, **2010**; p 516.

[10]. Jain, P. K.; Gupta, V. P., *Lebesgue Measure and Integration*; Halsted Press: New York, **1986**; p 269.

[11]. Naimark, M. A., *Linear Differential Operators I*; Nauka: Moscow, **1969**; p 129.

[12]. Levitan, B. M.; Sargsjan, I. S., *Sturm-Liouville and Dirac Operators*; Kluwer Academic Publishers: Netherlands, **1991**.

[13]. Levitan, B. M.; Sargsjan, I. S., *Introduction to Spectral Theory: Self Adjoint Ordinary Differential Operators*; American Mathematical Society: Providence, Rhode Island, **1975**.

[14]. Tikhonov, A. N.; Samarskii, A. A., *Equations of Mathematical Physics*; Dover Publications: New York, **2013**; p 800.

[15]. Vladimirov, V. S. (Ed.)., *A Collection of Problems on the Equations of Mathematical Physics*; Springer Science & Business Media, **2013**; p 288.

[16]. Fulton, C.T., Two point boundary value problems with eigenvalue parameter contained in the boundary conditions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics* **1977**, 77, 293-308.

[17]. Hinton, D.B., An expansion theorem for an eigenvalue problem with eigenvalue parameter in the baundary condition. *The Quarterly Journal of Mathematics; Oxford Academic* **1979**, 30, (2), 33-42.

[18]. Walter, J., Regular eigenvalue problems with eigenvalue parameter in the boundary condition. *Mathematische Zeitschrift* **1973**, 133, (4), 301-312.

[19]. Binding, P. A; Browne, P. J.; Seddighi, K., Sturm-Liouville problems with eigenparameter dependent boundary conditions. *Proceedings of the Royal Society of Edinburgh Section A: Mathematics* **1993**, 37, (1), 57-72.

[20]. Kerimov, N. B.; Allakhverdiyev, T. I., On a baundary value problem I. *Differential Equations* **1993**, 29, (1), 45-50.

[21]. Kerimov, N. B.; Allakhverdiyev, T. I., On a baundary value problem II. *Differential Equations* **1993**, 29, (6), 814-821.

[22]. Kapustin N. Yu.; Moisev E. I., On spectral problems with a spectral parameter in the boundary condition. *Differential Equations* **1997**, 33, (1), 116-120.

[23]. Kerimov, N. B.; Mamedov, Kh. R., On one boundary value problem with a spectral parameter in the boundary conditions. *Siberian Mathematical Journal* **1999**, 40, (2), 325- 335.

[24]. Kapustin, N. Yu.; Moiseev, E. I., The basis property in L_p of the systems of eigenfunctions corresponding two problems with a spectral parameter in the boundary conditions. *Differential Equations* **2000**, 36, (10), 1498-1501.

[25]. Moiseev, E. I.; Kapustin, N. Yu., On specific features of the root space of a spectral problem with spectral parameter in a boundary condition. *Doklady Akademii Nauk* **2002**, 386, (1), 24–30.

[26]. Binding, P. A.; Browne, P. J.; Watson, B. A., Sturm–Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter I. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **2002**, 45, 631-645.

[27]. Binding, P. A.; Browne, P. J.; Watson, B. A., Sturm–Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigenparameter II. *Journal of Computational and Applied Mathematics* **2002**, 148, 147-168.

[28]. Kapustin, N. Y.; Moiseev, E. I., On the singularities of the root space of one spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition. *Doklady Mathematics* **2002**, 66, (1), 14-18.

[29]. Kerimov, N. B., A boundary value problem for the Dirac system with a spectral parameter in the boundary conditions. *Differential Equations* **2002**, 38, (2), 164- 174.

[30]. Kerimov, N. B.; Mukhtarov, F. S., On the oscillation properties and minimality of a system of root functions of a boundary value problem. *Transactions of NAS of Azerbaijan Series of Physical-Technical and Mathematical Sciences* **2003**, 23, (1), 109-118.

[31]. Kerimov N. B.; Mirzoev V. S., On the basis properties of one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition. *Siberian Mathematical Journal* **2003**, 44, (5), 813-816.

[32]. Binding, P. A.; Browne, P. J.; Code W. J.; Watson, B. A., Transformation of Sturm- Liouville problems with decreasing affine boundary conditions. *Proceedings of the Edinburgh Mathematical Society* **2004**, 47, 533-552.

[33]. Binding, P. A.; Browne, P. J.; Watson, B. A., Equivalance of inverse Sturm-Liouville problems with boundary conditions rationally dependent on the eigen parameter. *Journal of Mathematical Analysis and Applications* **2004**, 291, (1), 246-261.

[34]. Kerimov, N. B.; Poladov, R. G., On basisity in L_p of the system of eigenfunctions of one boundary value problem I. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan* **2005**, 22, 53-64.

[35]. Kerimov, N. B.; Poladov, R. G., On basisity in L_p of the system of eigenfunctions of one boundary value problem II. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan* **2005**, 23, 65-76.

[36]. Kerimov N. B.; Aliyev Y. N., The basis property in L_p of the boundary value problem rationally dependent on the eigenparameter. *Studia Mathematica* **2006**, 174, (2), 201-212.

[37]. Marchenkov, D. B., Basis property in $L_p(0,1)$ of the system of eigenfunctions corresponding to a problem with a spectral parameter in the boundary condition. *Differential Equations* **2006**, 42, (6), 905-908.

[38]. Aliyev, Y. N., On the basis properties of Sturm-Liouville problems with decreasing affine boundary conditions. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan* **2006**, 24, 35-52.

[39]. Kerimov, N. B.; Poladov, R. G., Basis properties of the system of eigenfunctions in the Sturm-Liouville problem with a spectral parameter in the boundary conditions. *Doklady Mathematics* **2012**, 85, (1), 8-13.

[40]. Kapustin, N. Yu.; Moiseev, E. I., Convergence of spectral expansions for functions of the Hölder class for two problems with a spectral parameter in the boundary condition. *Differential Equations* **2000**, 36, (8), 1182-1188.

[41]. Kapustin, N. Yu.; Moiseev, E. I., A remark on the convergence problem for spectral expansions corresponding to a classical problem with spectral parameter in the boundary condition. *Differential Equations* **2001**, 37, (12), 1677-1683.

[42]. Marchenkov, D. B., On the convergence of spectral expansions of functions for problems with a spectral parameter in a boundary condition. *Differential Equations* **2005**, 41, (10), 1496-1500.

[43]. Kapustin, N. Yu., On the uniform convergence of the Fourier Series for a spectral problem with squared spectral parameter in a boundary condition. *Differential Equations* **2010**, 46, (10), 1507-1510.

[44]. Kapustin, N. Yu., On the uniform convergence in C^1 of Fourier Series for a spectral problem with squared spectral parameter in a boundary condition. *Differential Equations* **2011**, 47, (10), 1408-1413.

[45]. Gulyaev, D. A., On the uniform convergence of spectral expansions for a spectral problem with boundary conditions of the third kind one of which contains the spectral parameter. *Differential Equations* **2011**, 47, (10), 1520-1524.

[46]. Gulyaev, D. A., On the uniform convergence in W_2^m of spectral expansions for a spectral problem with boundary conditions of the third kind one of which contains the spectral parameter. *Differential Equations* **2012**, 48, (10), 1429-1432.

[47]. Kapustin, N. Yu., On the spectral problem arising in the solution of a mixed problem for the heat equation with a mixed derivative in the boundary condition. *Differential Equations* **2012**, 48, (5), 701-706.

[48]. Kerimov, N. B.; Maris, E. A., On the basis properties and convergence of expansions in terms of eigenfunctions for a spectral problem with a spectral parameter in the boundary condition. *Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan* **2014**, 40, Sp. Issue, 245-258.

[49]. Kerimov, N. B.; Ismailov, M. I., Direct and inverse problems for the heat equation with a dynamic type boundary condition. *IMA Journal of Applied Mathematics* **2015**, 80, (5), 1519–1533.

[50]. Hazanee A.; Lesnic, D.; Ismailov, M. I.; Kerimov, N. B., An inverse time dependent source problem for the heat equation with a non-classical boundary condition. *Applied Mathematical Modelling* **2015**, 30, (20), 6258-6272.

[51]. Kerimov, N. B.; Maris, E. A., On the uniform convergence of the Fourier series for one spectral problem with a spectral parameter in a boundary condition. *Mathematical Methods in the Applied Sciences* **2016**, 39, (9), 2298-2309.

[52]. Bary, N. K., *A Treatise on Trigonometric Series*, *Vol. I*; A Pergamon Press Book; The Macmillan Company: New York, **1964**; p 553.

[53]. Bary, N. K., *A Treatise on Trigonometric Series*, *Vol. II*; Macmillan: New York, **1964**; p 505.

[54]. Zygmund, A., *Trigonometric Series Vol I&II combined;* Cambridge University Press: New York, **2002;** p 781.

[55]. Kashin, B. S.; Saakyan, A. A., *Orthogonal Series;* Translations of Mathematical Monographs vol 75, American Mathhematical Society: Providence, **1989**; p 465.

[56]. Gohberg, I. C.; Krein, M. G., *Introduction to The Theory of Linear Nonselfadjoint Operators*; American Mathematical Society: Providence, Rhode Island, **1969**; p 378.

[57]. Singer, I., *Bases in Banach Spaces I*; Springer-Verlag Berlin Heidelberg: New York, **1970**; p 688.

[58]. Yilmaz, E., *Diferansiyel Operatörler İçin Ters Nodal Problem (Doktora Tezi);* Fırat Üniversitesi, Fen Bilimleri Enstitüsü: Elazığ, **2012**; s 156.

[59]. Lukkassen, D., *A, Short Introduction to Sobolev Spaces and Applications for engineering students.,* **2004**; s 82.

[60]. Rainville, E. D., *Special Functions*; The Macmillan Company: New York, **1965**; p 378.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı **:** Sertaç GÖKTAŞ

Doğum Tarihi **:** 05.12.1989

E-mail **:** srtcgoktas@gmail.com

Öğrenim Durumu **:**

Derece	**Bölüm/Program**	**Lise/Üniversite**	**Yıl**
Lise	Fen Bilimleri	Hacı Sabancı Lisesi/Mersin	2003-2006
Lisans	Matematik	Fırat Üniversitesi	2007-2011
Yüksek Lisans	Matematik	Fırat Üniversitesi	2011-2013

Görevler **:**

Görev Ünvanı	**Görev Yeri**	**Yıl**
Arş. Gör.	Mersin Üniversitesi, Fen-Edebiyat Fakültesi	2013-

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

1. Yilmaz E., Goktas S., and Koyunbakan H., "On the Lipschtz Stability of Inverse Nodal Problem for *p*-Laplacian Schrödinger Equation with Energy Dependent", International Conference on Applied Analysis and Mathematical Modelling (ICAAMM 2013), June 02-05, 2013, Istanbul – Turkey.

2. Goktas S., Maris E. A., and Kerimov N. B., "On the uniform convergence of the spectral expansions in terms of root functions for one spectral problem", 7-th International Conference on Mathematical Analysis, Differential Equation & Their Applications (MADEA-7), September 08-13, 2015, Baku – Azerbaijan.

3. Yilmaz E., Goktas S., and Koyunbakan H., "On the Lipschitz Stability of Inverse Nodal Problem for *p*-Laplacian Schrödinger Equation with Energy Dependent Potential", Boundary Value Problems, 2015(32), 1-8, (2015). (SCI-Expanded)

4. Kerimov N.B., Goktas S., and Maris E.A, "Unıform Convergence of the Spectral Expansıons in Terms of Root Functıons For a Spectral Problem", Electronic Journal of Differential Equations, 2016(80), 1-14, (2016). (SCI-Expanded)

5. Kerimov N. B., Goktas S., and Maris E. A., "On the Uniform Convergence of Spectral Expansions for a Spectral Problem Rationally Dependent on the Eigenparameter", 3rd International Conference on Recent Advances in Pure and Applied Mathematics (ICRAPAM 2016), May 19-23, 2016, Bodrum – Turkey.

6. Kerimov N. B., Goktas S., and Maris E. A., "On Spectral Expansions of Eigenfunctions System of One Boundary Value Problem", International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2016), May 12-14, 2016, Elazığ – Turkey.

7. Gulsen T., Yilmaz E., and Goktas S., "Conformable Fractional Order Dirac System on Time Scales", 4th International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference (IFSCOM 2017), May 03-07, 2017, Mersin – Turkey.

8. Maris E. A., and Goktas S., "On the Spectral Properties of a Boundary Value Problem", 4th International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference (IFSCOM 2017), May 03-07, 2017, Mersin – Turkey.

9. Maris E. A., and Goktas S., "On the Uniform Convergence Fourier Series Expansions of a Spectral Problem with Eigenparameter in a Boundary Condition", International Conference on Mathematics and Mathematics Education (ICMME-2017), May 11-13, 2017, Şanlıurfa – Turkey.

10. Gulsen T., Yilmaz E., and Goktas S., "Conformable Fractional Dirac System on Time Scales", Journal of Inequalities and Applications, 2017:161, 1-10, (2017). (SCI-Expanded)

11. Goktas S., Kerimov N.B., and Maris E.A, "On the Uniform Convergence of Spectral Expansions for a Spectral Problem with a Boundary Condition Rationally Depending on the Eigenparameter", Journal of the Korean Mathematical Society, 54(4), 1175-1187, (2017). (SCI-Expanded)

12. Goktas S., and Maris E. A., "On the Spectral Expansions of a Boundary Value Problem with a Spectral Parameter Depending on Quadratically in One Boundary Condition", Modern Mathematics and Its Applications, May 18-20, 2017, Ufa-Russia.

13. Goktas S., and Maris E. A., "On the Basicity of One Sturm-Liouville Operator with Eigenparameter in a Boundary Condition", International Mathematical Conference on Function Theory dedicated to the centenary of Aleksei Fedorovich Leont'ev , May 24-27, 2017, Ufa-Russia.

14. Goktas S., and Maris E. A., "On the Uniform Convergence of the Fourier Series for a Spectral Problem with a Eigenparameter Depending on Quadratically in a Boundary Condition", 2nd International Mediterranean Science and Engineering Congress (IMSEC 2017), October 25-27, 2017, Adana-Turkey.

15. Goktas S., and Maris E. A., "On Comparison Of The Uniform Convergence Conditions Of Spectral Expansions For Two Boundary Value Problems With Spectral Parameter In One Boundary Condition", Mathematical Modeling of Processes and Systems, December 07-09, 2017, Ufa-Russia.

16. Goktas S., and Maris E. A., "A Remark On Comparison Of The Uniform Convergence Conditions Of Spectral Expansions For Two Spectral Problems With A Linear Function Of Spectral Parameter In One Boundary Condition", Mathematical Modeling of Processes and Systems, December 07-09, 2017, Ufa-Russia.