BİR SINIF SÜREKSİZ STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS PROBLEM ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UFUK ÇELİK

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MERSİN
OCAK – 2018

BİR SINIF SÜREKSİZ STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS PROBLEM ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

UFUK ÇELİK

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

MERSİN
OCAK– 2018

ONAY

Ufuk ÇELİK tarafından Prof.Dr. Hanlar REŞİDOĞLU danışmanlığında hazırlanan "Bir Sınıf Süreksiz Sturm-Liouville Operatörü İçin Düz ve Ters Problem Üzerine" başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 18 Ocak 2018 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği ile Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	**Ünvanı, Adı ve Soyadı**	**İmza**
Başkan	Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	....
Üye	Yrd. Doç. Dr. Hakan YETİŞKİN	....
Üye	Yrd. Doç. Dr. Fatma Ayça ÇETİNKAYA	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 09/02/2018 tarih ve 2018.292/07 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

18 Ocak 2018 / 18 January 2018

Ufuk ÇELİK

ÖZET

BİR SINIF SÜREKSİZ STURM-LIOUVILLE OPERATÖRÜ İÇİN DÜZ VE TERS PROBLEM ÜZERİNE

Bu çalışmada süreksiz katsayıya sahip ikinci mertebeden diferansiyel denklem ve sınır koşullarından oluşan sınır değer problemleri için spektral analizin düz ve ters problemleri çözülmüştür. Ele alınan problemler için düz problem olarak,

1. Sınır değer probleminin özel çözümlerinin özellikleri incelenmiş,
2. Özdeğerler ve özfonksiyonlar için asimtotik formüller bulunmuş,
3. Özel Hilbert uzaylarında sınır değer probleminin operatör formülasyonu verilmiş,
4. Özfonksiyonlara göre ayrışım formülü elde edilmiştir.

Ele alınan problemler için ters problem olarak,

1. Sınır değer problemlerine uygun Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonları tanımlanmış,
2. Weyl fonksiyonuna ve spektral verilere göre teklik teoremleri ispat edilmiştir.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Operatörü, Ayrışım Formülü, Ters Problem, Weyl Fonksiyonu

Danışman: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik AnaBilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

ON A DIRECT AND INVERSE PROBLEM OF A DISCONTINUOUS STURM-LIOUVILLE OPERATOR

This work aims to examine the direct and inverse problem for boundary value problems which consist a second order differential equation with a discontinuous coefficient and a spectral parameter in boundary condition. When examining the direct problem,

1. The properties of the special functions of the boundary value problems have been investigated,
2. Asymptotic formulas for the eigenvalues and eigenfunctions have been obtained,
3. The theoretic formulation of the boundary value problem in special Hilbert spaces has been given,
4. The expansion formula with respect to eigenfunctions has been obtained.

When examining the inverse problem,

1. The evolution of the Weyl solution and Weyl function has been discussed,
2. Uniqueness theorems for the solution of the inverse problem with Weyl function and spectral data have been proven.

Key Words: Sturm – Liouville Operator, Expansion Formula, Inverse Problem, Weyl Function,

Advisor: Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi hazırlamamda, fikirleriyle, bilgisiyle, sabrı ve sevgisiyle her zaman yanımda olan, çok saygı duyduğum kıymetli danışman hocam Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim. Yüksek lisans eğitimim boyunca desteklerinden dolayı, tüm Mersin Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma ve bu süreçte desteğini hiç esirgemeyen Yrd. Doç. Dr. Fatma Ayça ÇETİNKAYA hocama, yüksek lisans ve doktora öğrencisi arkadaşlarıma teşekkür ederim. Hiçbir zaman manevi desteklerini esirgemeyen sevgili aileme ve nişanlıma teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
$\mathbb{R}$	Reel Sayılar Kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks Sayılar Kümesi
λ	Spektral Parametre
$\Delta(\lambda)$	Karakteristik Fonksiyon
$D(L)$	L Operatörünün Tanım Bölgesi
W	Wronskiyen
$\dot{e}(\lambda, x)$	λ'ya Göre Türev
$e'(\lambda, x)$	x'e Göre Türev
R_λ	Rezolvent Operatör
$AC[0,1]$	$[0,1]$ Aralığında Mutlak Sürekli Fonksiyonlar Uzayı
$L(X)$	X den X ye Tanımlı Sınırlı Lineer Operatörler Uzayı
$\square$	İspatın Bittiğini Gösterir

1. GİRİŞ

Doğa olaylarını anlatmaya yarayan kuralların büyük bir çoğunluğu, bir veya daha fazla büyüklüğün, diğer bir takım büyüklüklere göre değişim hızını içerir. Bu değişim hızı matematiksel olarak türev operatörü ile ifade edilir.

Bu çalışmada ikinci mertebeden süreksiz bir diferansiyel denklem ve sınır koşulundan oluşan bir snır değer problemi ele alınmıştır. Sınır değer problemleri fiziksel birçok problemin çözümü için kullanlır. Kuantum mekaniği, kuantum fiziği, termodinamik problemler ve dalga denklemlerinde bu problemlere sıkça rastlanmaktadır.

Farklı yoğunluklu iki $[0,a]$ ve $[a,\pi]$ parçalarından oluşan bir çubuktaki ısı iletimi problemini ele alalım. Çubuğun bir ucundaki sıcaklığın sıfır olduğunu kabul edelim ve diğer ucunun da izole edildiğini varsayalım. Bu çubuk için, belirli başlangıç koşulları altında, t anında, x noktasındaki $u(x,t)$ sıcaklığını hesaplamak için

$$\rho(x)\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}-q(x)u\,,\qquad 0<x<\pi\,,\qquad t>0 \tag{1}$$

$$u_x'(0,t)=0\,,\qquad u(\pi,t)=0\,,\qquad t>0 \tag{2}$$

sınır değer probleminin çözümünü bulmak gerekir. Burada $q(x)\in L_2(0,\pi)$ reel değerli bir fonksiyon, $\rho(x)$ ise çubuğun $[0,a]$ ve $[a,\pi]$ parçalarındaki yoğunluklarını ifade eden ve aşağıdaki biçimde verilen parçalı sürekli bir fonksiyondur:

$$\rho(x)=\begin{cases}1, & 0\le x<a,\\ \alpha^2, & a<x\le\pi.\end{cases}$$

(1), (2) sınır değer problemi değişkenlerine ayrılırsa bir Sturm-Liouville sınır değer problemi elde edilir.

Tezde

$$-y''+q(x)y=\lambda^2\rho(x)y\,,\quad 0\le x\le\pi$$

$$y'(0)-hy(0)=0\ ,\qquad y(\pi)=0$$

sınır değer problemi ele alınmıştır.

- Bu sınır değer problemine uygun özel çözümler tanımlanmış ve özel çözümlerin biçimleri elde edilmiştir.
- Özdeğerlerin reelliği ve basitliği ispatlanmıştır.
- Özdeğer ve özfonksiyonlar için asimptotik formüller elde edilmiştir.
- Özfonksiyonlar sisteminin $L_{2,\rho}[0,\pi]$ uzayında bir tam sistem olduğu gösterilmiştir.
- Özfonksiyonlar için ayrışım formülü ve buna denk olan Parseval eşitliği bulunmuştur.

- Sınır değer problemine uygun Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu tanımlanmıştır.
- Weyl çözümüne göre ters problemin çözümünün tekliği gösterilmiştir.
- Özdeğer ve normlaştırıcı sayılardan oluşan spektral veriler tanımlanmış ve bunlara göre ters problemin çözümünün tekliği ispatlanmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Süreksizlik içeren sınır değer problemleri ile matematik, mekanik, fizik ve doğa bilimlerinin diğer alanlarında oldukça fazla karşılaşılır. Bu şekildeki sınır değer problemlerinin jeofiziğe ait bir uygulaması [1] ve [2] de bulunabilir. Süreksizlik koşullarına sahip diferansiyel operatörler için düz ve ters problemlerin bazı yönleri [3-5] te ele alınmıştır. [6] ve [7] de Sturm-Liouville operatörü için düz ve ters problem incelenmiştir. [8] de Sturm-Liouville operatörü için çözümün integral gösterimi elde edilmiştir.

Süreksizlik katsayısına sahip bir sınır değer problemi için düz ve Weyl fonksiyonuna göre ters problem [9-11] de ele alınmıştır. Benzer problem için, ters problemin çözümünde önemli bir rol oynayan temel denklem ise [12] de inşa edilmiştir. Ters problemin çözümü için gerek ve yeter koşul ise [13] de incelenmiştir. Sonlu aralıkta tanımlı ve süreksiz katsayılı denklem ve spektral parametre içeren sınır koşullarından oluşmuş sınır değer problemi için Sturm-Liouville ve Dirac operatörlerine ilişkin düz ve ters problemler [14-17] ele alınmıştır. [14, 15] de süreksiz katsayılı bir Sturm-Liouville operatörü ve spektral parametre içeren sınır koşullarıyla oluşturulmuş bir sınır değer problemi ele alınmış ve bu problem için spektral analizin düz ve Weyl fonksiyonuna göre ters problemi incelenmiştir. [16, 17] de ise benzer incelemeler, süreksiz katsayılı kanonik Dirac diferansiyel denklemler sistemi ve spektral parametre içeren sınır koşulları ile oluşturulmuş sınır değer problemi için yapılmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1 TEMEL TANIM ve TEOREMLER

Bu bölümde ileride kullanılacak temel tanım ve teoremler verilecektir.

Tanım 3.1.1. $L_{2,\rho}[a,b]=\left\{x(t):\int_a^b |x(t)|^2 \rho(t)dt<\infty\right\}$ biçiminde tanımlanan $L_{2,\rho}[a,b]$ uzayı bir Hilbert uzayı olup elemanları $[a,b]$ aralığında ölçülebilir fonksiyonlardır, bu uzaydaki iç çarpım

$$\langle f,g\rangle=\int_a^b f(t)\overline{g(t)}\rho(t)dt$$

eşitliği ile verilir.

Tanım 3.1.2. [18] $\rho(A)=\left\{\lambda\in C:(A-\lambda I)^{-1}\in L(X)\right\}$ kompleks sayılar kümesine A operatörünün regüler değerler (veya rezolvent) kümesi, $\sigma(A)=C\setminus\rho(A)$ kümesine ise A operatörünün spektrumu adı verilir. $\lambda\in\rho(A)$ olmak üzere $R(\lambda;A)=(A-\lambda I)^{-1}$ operatörüne A operatörünün rezolventi (veya çözücü operatörü) adı verilir.

Dolayısıyla,

- Regüler olmayan tüm $\lambda\in\mathbb{C}$ noktalarına A operatörünün spektrumu denir.
- $A-\lambda I$ operatörünü tüm H Hilbert uzayında tanımlı yapan ve $(A-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olmadığı λ değerlerine A operatörünün özdeğerleri denir. Bir operatörün özdeğerleri spektrum kümesine dahildir.
- Bütün özdeğerlerin kümesine operatörün diskret spektrumu denir.
- $(A-\lambda I)^{-1}$ tersinin mevcut olduğu ancak tüm uzayda tanımlı olmadığı veya $(A-\lambda I)^{-1}$ tersinin sınırsız olduğu λ değerlerinin oluşturduğu kümeye operatörün sürekli spektrumu denir.

Tanım 3.1.3. [19] Analitik bir $f(z)$ fonksiyonunun bir ayrık tekil noktası z_0 olsun. Eğer,

$$\lim_{z\to z_0} f(z)=\infty$$

ise z_0 noktasına $f(z)$ nin bir kutup noktasıdır denir.

Tanım 3.1.4. [19] Kompleks düzlemde analitik fonksiyona tam fonksiyon denir. Başka bir deyişle, kompleks düzlemde

$$f(z) = a_0 + a_1 z + a_2 z^2 + \ldots + a_n z^n + \ldots$$

kuvvet serisi biçiminde gösterilen fonksiyona tam fonksiyon denir.

Tanım 3.1.5. $M_f(r) = \max\limits_{|z|=r} |f(z)|$ olsun. $M_f(r) < e^{r^k}$ eşitsizliğini sağlayan $k > 0$ sayısı vardırsa, $f(z)$' e sonlu mertebeli fonksiyon, $\inf\{k\} = \rho$ sayısına ise, $f(z)$' nin mertebesi denir. Gösterilir ki,

$$\overline{\lim_{r\to\infty}} \frac{\ell n \ell n M_f(r)}{\ell n r} = \rho \text{ dur.}$$

Tanım 3.1.6. $\sigma = \overline{\lim\limits_{r\to\infty}} \dfrac{\ell n M f(r)}{r^{\rho}}$ sayısına $f(z)$ tam fonksiyonunun tipi denir.

Teorem 3.1.1. (Rezidü Teoremi) [19] D bölgesinde (sonlu sayıdaki ayrık tekil $z_1, z_2, \cdots, z_n$ noktaları hariç) analitik ve D nin Γ sınırında sürekli $f(z)$ fonksiyonu için

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = 2\pi i \sum_{k=1}^{n} \operatorname*{Res}_{z=z_i} f(z)$$

eşitliği sağlanır. z_0 noktası $f(z)$ nin k katlı kutup noktası ise

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \frac{1}{(k-1)!} \lim_{z\to z_0} \frac{d^{k-1}}{dz^{k-1}} \left[f(z)(z-z_0)^k \right]$$

ve z_0 noktası $f(z)$ nin basit kutup noktası olduğunda ise

$$\int_{\Gamma} f(z)dz = \lim_{z\to z_0} \left[f(z)(z-z_0) \right]$$

sağlanır.

Teorem 3.1.2. (Rouche Teoremi) [19] f ve g fonksiyonları, basit kapalı bir C eğrisinin içinde ve üzerinde analitikse ve C üzerinde $|g(z)| < |f(z)|$ ise f ve $f+g$ fonksiyonları C içinde aynı sayıda sıfırlara (köklere) sahiptir.

Teorem 3.1.3. (Maksimum Prensibi) $f(z)$ fonksiyonu R bölgesinde analitik ve $M = \max\limits_{z\in R} |f(z)|$ olsun. Özdeş olarak sabit olmayan $f(z)$ fonksiyonunun modülü R nin hiçbir noktasında M değerini alamaz. Yani $\left|f(z)\right|$ fonksiyonu $\overline{R}$ de maksimumunu sadece bölgenin sınırında alabilir.

Teorem 3.1.4. (Liouville Teoremi) [18] $f(z)$ sınırlı ve tüm kompleks düzlemde analitik fonksiyon ise, o halde $f(z)$ sabit bir sabit fonksiyondur.

Teorem 3.1.5. [20] L , $\ell(y) = p_0(x)\dfrac{d^n y}{dx^n} + p_1(x)\dfrac{d^{n-1}y}{dx^{n-1}} + \ldots + p_n(x)y$

diferansiyel ifadesi ve $V_\nu(y) = 0$, $\nu = 1,2,\ldots,n$ sınır koşullarıyla oluşturulmuş bir diferansiyel operatör olsun.

$Ly = 0$ sınır değer problemi sadece $y = 0$ aşikar çözümüne sahipse, o halde L operatörünün L^{-1} tersi vardır. L^{-1} operatörü, sürekli bir çekirdeğe sahip bir integral operatörüdür. Bu çekirdek, L operatörünün Green fonksiyonu olarak adlandırılır ve aşağıdaki özellikleri sağlar :

1. $G(x,\xi)$ fonksiyonu süreklidir ve $[a,b]$ aralığındaki tüm x ve ξ ler için $(n-2)$-nci mertebeden sürekli türevlere sahiptir.

2. $[a,b]$ aralığındaki sabitlenmiş keyfi ξ değeri için $G(x,\xi)$ fonksiyonu, $[a,\xi]$ ve $[\xi,b]$ aralıklarında , x e göre sırasıyla $(n-1)$-nci ve n-nci mertebeden türeve sahiptir, $(n-1)$-nci mertebeden türevin $x = \xi$ de $\dfrac{1}{p_0(\xi)}$ sıçrama süreksizliği vardır :

$$\frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi+0,\xi) - \frac{\partial^{n-1}}{\partial x^{n-1}}G(\xi-0,\xi) = \frac{1}{p_0(\xi)}.$$

3. $[a,\xi]$ ve $[\xi,b]$ aralıklarının her ikisinde de $G(x,\xi)$ fonksiyonu x in bir fonksiyonu olarak düşünülür ve $\ell(G) = 0$ denklemi ve $V_\nu(G) = 0$ $(\nu = 1,2,\ldots,n)$ sınır koşullarını sağlar.

Teorem 3.1.6. (Hadamard) Sonlu ρ mertebeden $f(z)$ fonksiyonu

$$f(z) = z^m e^{P(z)} \prod_{m=1}^{w} G\left(\frac{z}{a_n};p\right) \qquad (w \le \infty)$$

biçiminde gösterilir, burada m $f(z)$ fonksiyonunun sıfır kökünün tekrarlanma derecesi, a_n ise sıfır olmayan kökleridir; $P(z)$ q dereceli polinom olur ve $q \le \rho$,

$$G(u;p)=(n-u)\exp\left(u+\frac{u^2}{2}+\frac{u^3}{3}+\ldots+\frac{u^p}{p}\right), \quad G(u,0)=1-u .$$

Hadamard teoreminden elde edilir ki, $f(z)$ tam fonksiyonunun sıfırlarına göre sabit çarpanın ile inşa edilebilir, yani $f(z)$ tam fonksiyonunu a_n sıfırlarına göre sabit çarpanı ile inşa etmek olur. Bu teoreme göre 1.mertebeden $f(z)$ tam fonksiyonunu $(f(0)\neq 0)$ aşağıdaki biçimde gösterilir :

$$f(z)=f(0)e^{cz}\prod_{n=1}^{\infty}\left(1-\frac{z}{a_n}\right)e^{\frac{z_n}{a_n}} .$$

3.2. Lineer Diferansiyel Denklemler

Tanım 3.2.1. [21] $L(y)\equiv y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=f(x)$ (3.2.1)

biçiminde denkleme lineer diferansiyel denklem denir, burada $p_1(x), p_2(x),\ldots, p_n(x)$ katsayıları ve $f(x)$ fonksiyonu verilmiş $I=[a,b]$ aralığında süreklidir. $f(x)\equiv 0$ ise, bu denkleme homojen denklem, $f(x)\neq 0$ ise homojen olmayan denklem denir. $L(y)$' ye n. mertebeden diferansiyel ifade denir.

Tanım 3.2.2. [21] $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ fonksiyonları verilmiş (a,b) aralığında tanımlı ve $(n-1)$ mertebeden türeve sahip olsunlar. O halde

$$W(x)=W\left[y_1(x),y_2(x),\ldots,y_n(x)\right]=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x) \\ y_1^{'}(x) & y_2^{'}(x) & \cdots & y_n^{'}(x) \\ \vdots & \vdots & \vdots & \vdots \\ y_1^{(n-1)}(x) & y_2^{(n-1)}(x) & \cdots & y_n^{(n-1)}(x) \end{vmatrix}$$

gibi tanımlanmış fonksiyonel $W(x)$ determinantına $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ fonksiyonunun Wronskiyeni veya Wronski determinantı denir.

Tanım 3.2.3. [21] Homojen

$$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0 \tag{3.2.2}$$

denkleminin n tane lineer bağımsız $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ çözümlerinden oluşan sisteme bu denklemin temel çözüm sistemi denir. Dolayısıyla, (3.2.2) denkleminin n' den fazla lineer bağımsız çözümü olamaz.

Teorem 3.2.1. [21] $$y^{(n)}+p_1(x)y^{(n-1)}+\ldots+p_n(x)y=0 \tag{3.2.2}$$

homojen denkleminin $y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ çözümlerinin verilmiş I aralığında lineer bağımsız olması için gerekli ve yeter koşul, bu çözümlerin Wronskiyan determinantının sıfırdan farklı olmasıdır.

$y_1(x), y_2(x),\ldots, y_n(x)$ fonksiyonları homojen lineer denklemin temel çözümleri ise , $c_1y_1(x)+c_2y_2(x)+\ldots+c_ny_n(x)$ fonksiyonu homojen (3.2.2) denkleminin genel çözümüdür.

3.3. Sturm-Liouville Operatörünün Özellikleri

Aşağıdaki şekilde tanımlı bir $L=L(q(x),h,H)$ sınır değer problemini ele alalım:

$$ly:=-y''+q(x)y=\lambda y, \qquad 0\le x\le\pi, \tag{3.3.1}$$

$$U(y):=y'(0)-hy(0)=0, \qquad V(y):=y'(\pi)+Hy(\pi)=0. \tag{3.3.2}$$

Burada, λ bir spektral parametre, $q(x)\in L_2(0,\pi)$ reel değerli bir fonksiyon, h ve H keyfi reel sayılardır.

$C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$, $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları (3.3.1) denkleminin aşağıdaki koşulları sağlayan çözümleri olsun:

$$C(0,\lambda)=1, \quad C'(0,\lambda)=0, \quad S(0,\lambda)=0, \quad S'(0,\lambda)=1,$$

$$\varphi(0,\lambda)=1, \quad \varphi'(0,\lambda)=h, \quad \psi(\pi,\lambda)=1, \quad \psi'(\pi,\lambda)=-H.$$

Sabitleştirilmiş her x için $C(x,\lambda)$, $S(x,\lambda)$, $\varphi(x,\lambda)$, $\psi(x,\lambda)$ fonksiyonları λ nın tam fonksiyonlarıdır.

$\langle y(x),z(x)\rangle := y(x)z'(x)-y'(x)z(x)$ ifadesi y ve z nin Wronskiyeni olmak üzere

$$\Delta(\lambda)=\langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\rangle \tag{3.3.3}$$

alalım. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu L nin *karakteristik fonksiyonu* olarak adlandırılır. (3.3.3) formülünde $x=0$ ve $x=\pi$ yazılırsa

$$\Delta(\lambda) = V(\varphi) = -U(\psi)$$

elde edilir. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu λ nın bir tam fonksiyonudur ve sayılabilir çoklukta $\{\lambda_n\}$ sıfırlarına sahiptir.

Aşağıdaki şekilde tanımlanan α_n sayıları L sınır değer probleminin normlaştırıcı sayıları olarak adlandırılır:

$$\alpha_n := \int_0^\pi \varphi^2(x, \lambda_n) dx .$$

Özdeğerler ve normlaştırıcı sayılardan oluşan $\{\lambda_n, \alpha_n\}$ sayıları L sınır değer probleminin spektral verileridir.

Teorem 3.3.1. $[6]$ Karakteristik fonksiyonun $\{\lambda_n\}$ sıfırları ile L sınır değer probleminin özdeğerleri çakışır. $\varphi(x, \lambda_n)$ ve $\psi(x, \lambda_n)$ fonksiyonları özfonksiyonlardır ve

$$\psi(x, \lambda_n) = \beta_n \varphi(x, \lambda_n), \quad \beta_n \neq 0 \tag{3.3.4}$$

sağlanacak şekilde bir $\{\beta_n\}$ dizisi vardır.

Lemma 3.3.1. $[6]$ Aşağıdaki asimptotik formüller, $|\rho| \to \infty$ için, $x \in [0, \pi]$ ye göre düzgün olarak sağlanır:

$$\begin{cases} \varphi(x, \lambda) = \cos \rho x + O\left(\dfrac{1}{|\rho|} \exp(|\tau| x)\right) = O(\exp(|\tau| x)), \\ \varphi'(x, \lambda) = -\rho \sin \rho x + O(\exp(|\tau| x)) = O(|\rho| \exp(|\tau| x)), \end{cases} \tag{3.3.5}$$

$$\begin{cases} \psi(x, \lambda) = \cos \rho(\pi - x) + O\left(\dfrac{1}{|\rho|} \exp(|\tau|(\pi - x))\right) = O(\exp(|\tau|(\pi - x))), \\ \psi'(x, \lambda) = \rho \sin \rho(\pi - x) + O(\exp(|\tau|(\pi - x))) = O(|\rho| \exp(|\tau|(\pi - x))), \end{cases} \tag{3.3.6}$$

burada $\lambda = \rho^2$ ve $\operatorname{Im} \rho = \tau$ dur.

Teorem 3.3.2. $[6]$ L sınır değer problemi sayılabilir sayıda $\{\lambda_n\}_{n \geq 0}$ özdeğerler kümesine sahiptir ve $n \geq 0$ için

$$\rho_n = \sqrt{\lambda_n} = n + \frac{w}{\pi n} + \frac{\kappa_n}{n}, \qquad \{\kappa_n\} \in l_2$$

sağlanır, burada $w = h + H + \dfrac{1}{2}\displaystyle\int_0^\pi q(t) dt$ dir.

Teorem 3.3.3. $[6]$

(i) L sınır değer probleminin $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonlar sistemi $L_2(0,\pi)$ de tamdır.

(ii) $x\in[0,\pi]$ için $f(x)$ mutlak sürekli fonksiyon olsun. O halde,

$$f(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\varphi(x,\lambda_n),\quad a_n=\frac{1}{\alpha_n}\int_0^{\pi}f(t)\varphi(t,\lambda_n)dt \tag{3.3.7}$$

sağlanır ve bu seri $[0,\pi]$ üzerinde düzgün yakınsaktır.

(iii) $f(x)\in L_2(0,\pi)$ için (3.2.7) serisi $L_2(0,\pi)$ de yakınsaktır ve

$$\int_0^{\pi}|f(x)|^2dx=\sum_{n=0}^{\infty}\alpha_n|a_n|^2 \quad \text{(Parseval eşitliği)}$$

sağlanır.

3.4. Teklik Teoremleri ve Weyl Fonksiyonu

$\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\geq 0}$ spektral verileri, $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki h ve H katsayılarını tek türlü belirler.

Teorem 3.4.1. $[6]$ $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n=\tilde{\alpha}_n$ ($n\geq 0$) ise o halde $L=\tilde{L}$ dir. Yani $q(x)=\tilde{q}(x)$ ($x\in(0,\pi)$), $h=\tilde{h}$ ve $H=\tilde{H}$ dır.

Böylece $\{\lambda_n,\alpha_n\}_{n\geq 0}$ spektral verileri $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki katsayıları tek türlü belirler.

Ters Problem 3.4.1. $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$, L sınır değer probleminin $H=0$ durumundaki özdeğerleri olmak üzere, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\mu_n\}_{n\geq 0}$ özdeğer kümeleri $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki h ve H katsayılarını tek türlü belirler.

Teorem 3.4.2. $[6]$ $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$ ve $\mu_n=\tilde{\mu}_n$ ($n\geq 0$) ise o halde $L=\tilde{L}$ dir.

Yani $q(x)=\tilde{q}(x)$ ($x\in(0,\pi)$), $h=\tilde{h}$ ve $H=\tilde{H}$ dır. Böylece $\{\lambda_n,\mu_n\}_{n\geq 0}$ spektral verileri $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki katsayıları tek türlü belirler.

Ters Problem 3.4.2. $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$, L sınır değer probleminin $h=0$ durumundaki özdeğerleri olmak üzere, $\{\lambda_n\}_{n\geq 0}$ ve $\{\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$ özdeğer kümeleri $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki h ve H katsayılarını tek türlü belirler.

Teorem 3.4.3. $[6]$ $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$ ve $\lambda_n^0=\tilde{\lambda}_n^0$ ($n\geq 0$) ise o halde $L=\tilde{L}$ dir.

Yani $q(x)=\tilde{q}(x)$ ($x\in(0,\pi)$), $h=\tilde{h}$ ve $H=\tilde{H}$ dır. Böylece $\{\lambda_n,\lambda_n^0\}_{n\geq 0}$ spektral verileri $q(x)$ potansiyel fonksiyonunu ve sınır koşullarındaki katsayıları tek türlü belirler.

Weyl Fonksiyonu: $\Phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.3.1) denkleminin $U(\Phi)=1,\ \ V(\Phi)=0$ koşulları altındaki çözümü olsun. $M(\lambda):=\Phi(0,\lambda)$ alalım. $\Phi(x,\lambda)$ ve $M(\lambda)$ fonksiyonları (3.3.1), (3.3.2) sınır değer probleminin sırasıyla Weyl fonksiyonu ve Weyl çözümü olarak adlandırılır ve aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$$\Phi(x,\lambda)=-\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=S(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda),$$

$$M(\lambda)=-\frac{\Delta^0(\lambda)}{\Delta(\lambda)},$$

$$\langle\varphi(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle\equiv 1,$$

burada $\Delta^0(\lambda)$, (3.3.1), (3.3.2) sınır değer probleminin $h=0$ durumundaki karakteristik fonksiyonudur. Böylece, Weyl fonksiyonu $\lambda=\lambda_n,\ \ n\geq 0$ noktalarında basit kutup noktalarına sahip bir meromorfik fonksiyon olur.

Teorem 3.4.4. $[6]$ Aşağıda verilen eşitlik sağlanır:

$$M(\lambda)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\alpha_n(\lambda-\lambda_n)}.$$

Teorem 3.4.5. $[6]$ Eğer $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise, o halde $L=\tilde{L}$ dir. Yani, Weyl fonksiyonu, L operatörünü tek türlü tanımlar.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

4.1. SINIR DEĞER PROBLEMİ İÇİN DÜZ ve TERS PROBLEM

4.1.1. Düz Problem

$[0,\pi]$ aralığında tanımlı aşağıdaki sınır değer problemini ele alalım:

$$-y'' + q(x)y = \lambda^2 \rho(x) y, \tag{4.1.1.1}$$

$$U_1(y) := y'(0) - hy(0) = 0, \tag{4.1.1.2}$$

$$U_2(y) := y(\pi) = 0, \tag{4.1.1.3}$$

burada $q(x) \in L_2[0,\pi]$, reel değerli bir fonksiyon; λ, spektral parametre; $h \neq 0$ keyfi bir reel sayı ve

$$\rho(x) = \begin{cases} 1, & 0 \le x < a \\ \alpha^2, & a \le x \le \pi \end{cases}$$

biçimindedir, burada $0 < \alpha \neq 1$ dir.

$\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ ile (4.1.1.1) denkleminin

$$\varphi(0,\lambda) = 0, \quad \varphi'(0,\lambda) = h \tag{4.1.1.4}$$

$$\psi(\pi,\lambda) = 0, \quad \psi'(\pi,\lambda) = 1 \tag{4.1.1.5}$$

başlangıç koşullarını sağlayan özel çözümlerini gösterelim.

(4.1.1.1) denkleminin çözümü için aşağıdaki integral gösterim sağlanır [8]:

$$e(x,\lambda) = e_0(x,\lambda) + \int_{-\mu^+(x)}^{\mu^+(x)} K(x,t) e^{i\lambda t} dt, \tag{4.1.1.6}$$

burada

$$e_0(x,\lambda) = \begin{cases} e^{i\lambda x}, & 0 \le x < a, \\ \dfrac{1}{2}\left(1 + \dfrac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right) e^{i\lambda \mu^+(x)} + \dfrac{1}{2}\left(1 - \dfrac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right) e^{i\lambda \mu^-(x)}, & a < x \le \pi, \end{cases} \tag{4.1.1.7}$$

$K(x,\cdot) \in L_1(-\mu^+(x), \mu^+(x))$, $\mu^\pm(x) = \pm x\sqrt{\rho(x)} + a\left(1 \mp \sqrt{\rho(x)}\right)$ dır. Ayrıca, K'_x türevi mevcuttur ve aşağıdaki özellikler sağlanır:

$$\frac{d}{dx} K(x, \mu^+(x)) = \frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}}\left(1 + \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right) q(x), \tag{4.1.1.8}$$

$$\frac{d}{dx}\left\{K(x, \mu^-(x)+0) - K(x, \mu^+(x)-0)\right\} = \frac{1}{4\sqrt{\rho(x)}}\left(1 - \frac{1}{\sqrt{\rho(x)}}\right) q(x), \tag{4.1.1.9}$$

$$K\left(x,-\mu^{+}(x)\right)=0. \tag{4.1.1.10}$$

Bu özelliklere ek olarak, $q(x)$'in diferansiyellenebilir fonksiyon olması durumunda aşağıdaki özellikler de geçerli olur:

$$\rho(x)K''_{tt}-K''_{xx}+q(x)K=0,\ |t|<\mu^{+}(x), \tag{4.1.1.11}$$

$$\int_{-\mu^{+}(x)}^{\mu^{+}(x)}\left|K(x,t)\right|dt\le C\left(\exp\left\{\int_{0}^{x}\left|q(t)\right|dt\right\}-1\right),\ 0<C=sabit. \tag{4.1.1.12}$$

Lemma 4.1.1.1. (4.1.1.1) denkleminin (4.1.1.4) koşullarını sağlayan özel çözümü

$$\varphi(x,\lambda)=\varphi_0(x,\lambda)+\int_{0}^{\mu^{+}(x)}A(x,t)\cos\lambda t dt+h\int_{0}^{\mu^{+}(x)}\tilde{A}(x,t)\frac{\sin\lambda t}{\lambda}dt \tag{4.1.1.13}$$

biçimindedir, burada $A(x,t)=K(x,t)+K(x,-t)$ çekirdeği (4.1.1.8)-(4.1.1.12) özelliklerini gerçekler.

İspat: $\varphi_0(x,\lambda)=c_1e_0(x,\lambda)+c_2e_0(x,-\lambda)$ ifadesine (4.1.1.4) koşullarını sağlatarak $c_1=\frac{1}{2}+\frac{h}{2i\lambda},\ c_2=\frac{1}{2}-\frac{h}{2i\lambda}$ buluruz, burada $e_0(x,\lambda)$, (4.1.1.7) eşitliğinde tanımlandığı biçimde kullanılmıştır. Dolayısıyla

$$\varphi_0(x,\lambda)=\left(\frac{1}{2}+\frac{h}{2i\lambda}\right)e_0(x,\lambda)+\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{2i\lambda}\right)e_0(x,-\lambda) \tag{4.1.1.14}$$

olur. $\varphi(x,\lambda)=c_1e(x,\lambda)+c_2e(x,-\lambda)$ eşitliğinde (4.1.1.6)'yı kullanarak (4.1.1.13)'e ulaşırız. □

Şimdi

$$\Delta(\lambda)=\left\langle\psi(x,\lambda),\varphi(x,\lambda)\right\rangle=\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\psi(x,\lambda) \tag{4.1.1.15}$$

ile işaretleyelim. $\Delta(\lambda)$, ψ ve φ fonksiyonlarının Wronskiyanıdır. Liouville teoreminden, $\Delta(\lambda)$ nın x e bağlı olmadığı görülebilir. (4.1.1.15) te $x=0$ ve $x=\pi$ yazılırsa

$$\Delta(\lambda)=U_2(\varphi)=U_1(\psi) \tag{4.1.1.16}$$

bulunur.

Teorem 4.1.1.1. Karakteristik fonksiyonun $\{\lambda_n\}_{n=0}^{\infty}$ köklerinin kareleri, (4.1.1.1)-(4.1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleriyle çakışır, ayrıca her λ_n özdeğeri için

$$\psi(x,\lambda_n)=k_n\varphi(x,\lambda_n)\quad (k_n\ne 0)$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $\{k_n\}_{n=0}^{\infty}$ dizisi vardır, burada $\psi(x,\lambda_n)$ ve $\varphi(x,\lambda_n)$ fonksiyonları λ_n özdeğerine karşılık gelen özfonksiyonlardır.

İspat: [6] ya benzer şekilde yapılabilir. Gerçekten, λ_0 ın $\Delta(\lambda)$ nın bir özdeğeri olduğunu kabul edelim. O halde,

$$\Delta(\lambda_0) = \begin{vmatrix} \varphi(x,\lambda_0) & \psi(x,\lambda_0) \\ \varphi'(x,\lambda_0) & \psi'(x,\lambda_0) \end{vmatrix} = 0$$

eşitliği sağlanır, yani $\varphi(x,\lambda_0)$ ve $\psi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları lineer bağımlıdır: $\psi(x,\lambda_0) = k_0\varphi(x,\lambda_0)$ ($k_0 = sbt.$) ve (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır koşullarını sağlar. Dolayısıyla, λ_0 bir özdeğer ve $\psi(x,\lambda_0)$, $\varphi(x,\lambda_0)$ fonksiyonları bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlardır.

Şimdi tersine, λ_0 nın (4.1.1.1) diferansiyel ifadesi ve (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır koşullarıyla oluşturulmuş sınır değer probleminin özdeğeri olduğunu ve $y(x,\lambda_0)$, $y(x,-\lambda_0)$ fonksiyonlarının bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar olduğunu varsayalım. O halde, $y(x,\lambda_0)$ ve $y(x,-\lambda_0)$ özfonksiyonları (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır koşullarını sağlar. Ek olarak, eğer $y(x,\lambda_0)$ ve $y(x,-\lambda_0)$ fonksiyonları $y'(0,\lambda_0) = h$, $y'(0,-\lambda_0) = h$ koşullarını sağlarsa, $y(x,\lambda_0) \equiv \varphi(x,\lambda_0)$, $y(x,-\lambda_0) \equiv \varphi(x,-\lambda_0)$ olur. (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır koşullarından

$$\Delta(\lambda_0) = U_2(\varphi(x,\lambda_0)) = U_2(y(x,\lambda_0)) = 0$$
$$\Delta(-\lambda_0) = U_2(\varphi(x,-\lambda_0)) = U_2(y(x,-\lambda_0)) = 0$$

olur. Benzer şekilde, $y'(\pi,\lambda_0) = 1$, $y'(\pi,-\lambda_0) = 1$ olduğunu kabul edersek, o halde $y(x,\lambda_0) \equiv \psi(x,\lambda_0)$, $y(x,-\lambda_0) \equiv \psi(x,-\lambda_0)$ olur. Yine, (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır koşullarından

$$\Delta(\lambda_0) = U_1(\psi(x,\lambda_0)) = U_2(y(x,\lambda_0)) = 0$$
$$\Delta(-\lambda_0) = U_1(\psi(x,-\lambda_0)) = U_2(y(x,-\lambda_0)) = 0$$

olur. Dolayısıyla, her bir λ_0 özdeğerine (sabit çarpan farkıyla fark eden) yalnız bir özfonksiyon karşılık gelir. □

4.1.2. (4.1.1.1) – (4.1.1.3) Sınır Değer Probleminin Bazı Spektral Özellikleri

(4.1.1.1)-(4.1.1.3) sınır değer probleminin normlaştırıcı sayılarını

$$\alpha_n := \int_0^{\pi} \varphi^2(x,\lambda_n)\rho(x)\,dx \tag{4.1.2.1}$$

şeklinde tanımlayalım.

Lemma 4.1.2.1. k_n (4.1.3.3)'de tanımlanan dizi ve $\dot{\Delta}(\lambda)=\dfrac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda)$ olmak üzere, aşağıdaki bağıntı gerçeklenir:

$$-\dot{\Delta}(\lambda_n)=2\lambda_n k_n \alpha_n. \tag{4.1.2.2}$$

İspat: İspat için, öncelikle

$$-\varphi''(x,\lambda_n)+q(x)\varphi(x,\lambda_n)=\lambda_n^2\rho(x)\varphi(x,\lambda_n)$$

$$-\psi''(x,\lambda)+q(x)\psi(x,\lambda)=\lambda^2\rho(x)\psi(x,\lambda)$$

denklemlerini ele alıp, bu denklemlerden ilkini $\psi(x,\lambda)$ ile ikincisini $-\varphi(x,\lambda_n)$ ile çarpıp elde edilen eşitlikleri taraf tarafa toplayalım. Bu durumda,

$$\frac{d}{dx}\langle\varphi(x,\lambda_n),\psi(x,\lambda)\rangle=(\lambda_n^2-\lambda^2)\rho(x)\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)$$

elde ederiz. Burada $[0,\pi]$ aralığında integralleme işlemi yaparsak,

$$\langle\varphi(x,\lambda_n),\psi(x,\lambda)\rangle\Big|_{x=0}^{x=\pi}=(\lambda_n^2-\lambda^2)\int_0^\pi\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\rho(x)dx \tag{4.1.2.3}$$

buluruz. Şimdi, son eşitliğin sol tarafını ele alırsak ve (4.1.3.2)'yi göz önünde bulundurursak,

$$\langle\varphi(x,\lambda_n),\psi(x,\lambda)\rangle\Big|_{x=0}^{x=\pi}=\varphi(\pi,\lambda_n)-\psi'(0,\lambda)+h\psi(0,\lambda)=\Delta(\lambda_n)-\Delta(\lambda) \tag{4.1.2.4}$$

(4.1.2.3) ve (4.1.2.4) ü birlikte ele alırsak,

$$\Delta(\lambda_n)-\Delta(\lambda)=(\lambda_n^2-\lambda^2)\int_0^\pi\varphi(x,\lambda_n)\psi(x,\lambda)\rho(x)dx$$

elde ederiz ve $\lambda\to\lambda_n$ durumunda (4.1.2.2) ye ulaşırız. □

$\lambda_n\neq 0, k_n\neq 0, \alpha_n\neq 0$ olduğundan Lemma 4.1.2.1'in aşağıdaki sonucunu verebiliriz:

Sonuç 4.1.2.1. $\Delta(\lambda)$ nın tüm sıfırları basittir.

Teorem 4.1.2.1. (4.1.1.1)-(4.1.1.3) sınır değer probleminin farklı özdeğerlere karşılım gelen özfonksiyonları diktir.

İspat: λ_n ve λ_k ($\lambda_n\neq\lambda_k$) özdeğerler, $y_n(x)$ ve $y_k(x)$ bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. $ly(x)=\dfrac{1}{\rho(x)}\left\{-y_1''(x)+q(x)y(x)\right\}$ olmak üzere

$$\int_0^\pi ly_n(x)y_k(x)dx=\int_0^\pi y_n(x)ly_k(x)dx$$

ifadesinde iki kez kısmi integrasyon yapıp, (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır koşullarını göz önüne alırsak

$$\lambda_n^2\int_0^\pi y_n(x)y_k(x)dx=\lambda_k^2\int_0^\pi y_n(x)y_k(x)dx$$

elde ederiz. Bu ise bize

$$\int_0^\pi y_n(x)y_k(x)dx=0$$

eşitliğini verir. Böylece ispat biter. □

Teorem 4.1.2.2. (4.1.1.1)-(4.1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: $\lambda^0=u+iv$ $(v\neq 0)$ reel olmayan bir özdeğer ve $y^0(x)\neq 0$ bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyon olsun. $q(x)$ ve h reel olduğundan $\overline{\lambda^0}=u-iv$ de bir özdeğer ve $\overline{y^0(x)}$ bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyondur. $\overline{\lambda^0}\neq\lambda^0$ olduğundan bir önceki teoreme benzer olarak

$$\left\|y^0\right\|^2_{L_{2,\rho}}=\int_0^\pi y^0(x)\overline{y^0(x)}\rho(x)dx=0$$

elde ederiz ki, bu bir çelişkidir. Dolayısıyla, (4.1.1.1)-(4.1.1.3) sınır değer probleminin tüm $\{\lambda_n\}$ özdeğerleri ve tüm $\varphi(x,\lambda_n)$, $\psi(x,\lambda_n)$ özfonksiyonları reeldir. □

Örnek 4.1.2.1. (4.1.1.1)-(4.1.1.3) sınır değer probleminde $q(x)\equiv 0$, $h=0$ alalım. O halde aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

$\varphi(x,\lambda)=\cos\lambda x,\quad \psi(x,\lambda)=\cos\lambda(\pi-x),\quad \Delta(\lambda)=-\lambda\sin\lambda\pi,$

$\lambda_n=n^2$ $(n\geq 0)$, $k_n=(-1)^n$.

4.1.3. (4.1.1.1) – (4.1.1.3) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin ve Karakteristik Fonksiyonunun Özellikleri

Bu bölümde (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotik biçimlerini bulacağız.

1. $q(x)\equiv 0$ iken, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı

Teorem 4.1.3.1. [22] $q(x)\equiv 0$ iken, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri aşağıdaki asimptotik biçime sahiptir:

$$\left(\lambda_n^0\right)^2=n+\psi(n),\quad \sup_n\left|\psi(n)\right|<+\infty. \tag{4.1.3.1}$$

İspat: (4.1.1.14) te $x=\pi$ yazıp, (4.1.1.7) ifadelerini ele alırsak,

$$\Delta_0(\lambda)=\frac{1}{2}\left(1+\frac{1}{\alpha}\right)\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{h}{2i\lambda}\right)e^{i\lambda\mu^+(\pi)}+\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{2i\lambda}\right)e^{-i\lambda\mu^+(\pi)}\right]+$$

$$+\frac{1}{2}\left(1-\frac{1}{\alpha}\right)\left[\left(\frac{1}{2}+\frac{h}{2i\lambda}\right)e^{i\lambda\mu^-(\pi)}+\left(\frac{1}{2}-\frac{h}{2i\lambda}\right)e^{-i\lambda\mu^-(\pi)}\right]=0 \tag{4.1.3.2}$$

buluruz, burada $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun $q(x)\equiv 0$ iken, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonudur. $[9]$ yardımıyla (4.1.3.1)' e ulaşırız.□

Lemma 4.1.3.1. $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun λ_n^0 kökleri ayrıktır, yani

$$\inf_{n\neq k}\left|\lambda_n^0-\lambda_k^0\right|=\tau>0 \tag{4.1.3.3}$$

sağlanır.

İspat: Tersini kabul edelim. O halde, $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları için $\lambda_k^{0'}\neq\lambda_k^{0''}$, $\lambda_k^{0'}\to+\infty$, $\lambda_k^{0''}\to+\infty$ ve

$$\lim_{k\to+\infty}\left[\lambda_k^{0'}-\lambda_k^{0''}\right]=0 \tag{4.1.3.4}$$

sağlanacak biçimde $\left\{\lambda_k^{0'}\right\}$ ve $\left\{\lambda_k^{0''}\right\}$ dizileri mevcuttur.

(4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının diklik özelliğinden,

$$0=\lambda_k^{0'}\lambda_k^{0''}\int_0^\pi\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0''}\right)\rho(x)\,dx=$$

$$=\int_0^\pi\lambda_k^{0'}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\lambda_k^{0''}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0''}\right)\rho(x)\,dx-\int_0^\pi\lambda_k^{0'2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\rho(x)\,dx+$$

$$+\int_0^\pi\lambda_k^{0'2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\rho(x)\,dx=$$

$$=\int_0^\pi\lambda_k^{0'}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\left[\lambda_k^{0''}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0''}\right)-\lambda_k^{0'}\varphi_0\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\right]\rho(x)\,dx+\int_0^\pi\lambda_k^{0'2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\rho(x)\,dx$$

$$=I_k+\int_0^\pi\lambda_k^{0'2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\rho(x)\,dx$$

$$\geq I_k+\int_0^a\lambda_k^{0'2}\varphi_0^2\left(x,\lambda_k^{0'}\right)\rho(x)\,dx$$

$$=I_k+\int_0^a\sin^2\lambda_k^{0'}x\,dx=I_k+\int_0^a\left(\frac{1-\cos 2\lambda_k^{0'}x}{2}\right)dx=I_k+\frac{a}{2}-\frac{\sin 2\lambda_k^{0'}a}{4\lambda_k^{0'}}$$

elde ederiz. Dolayısıyla,

$$0 \geq I_k + \frac{a}{2} - \frac{\sin 2\lambda_k^{0\prime} a}{4\lambda_k^{0\prime}} \tag{4.1.3.5}$$

buluruz.

Şimdi, $k \to +\infty$ iken, $I_k \to 0$ olduğunu gösterelim.

$$\left| \lambda_k^{0\prime\prime} \varphi_0\left(x, \lambda_k^{0\prime\prime}\right) - \lambda_k^{0\prime} \varphi_0\left(x, \lambda_k^{0\prime}\right) \right| \leq C \left| \lambda_k^{0\prime\prime} - \lambda_k^{0\prime} \right|$$

olduğunu ve (4.1.4.4)'ü birlikte ele alırsak her $x \in [0, \pi]$ için,

$$\lim_{k \to +\infty} \left| \lambda_k^{0\prime\prime} \varphi_0\left(x, \lambda_k^{0\prime\prime}\right) - \lambda_k^{0\prime} \varphi_0\left(x, \lambda_k^{0\prime}\right) \right| = 0$$

eşitliğinin sağlandığını söyleyebiliriz. O halde (4.1.3.5)'de $k \to +\infty$ iken limite geçersek, $0 \geq \frac{a}{2}$ buluruz. Bu ise (4.1.1.1) denklemindeki $\rho(x)$ katsayısının tanımıyla çelişir. Dolayısıyla kabulümüz yanlıştır. □

2. (4.1.1.1) – (4.1.1.3) Sınır Değer Probleminin Özdeğerlerinin Asimptotik Davranışı

Şimdi (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin asimptotik biçimini verelim.

Teorem 4.1.3.2. (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin basit $\left\{\lambda_n^2\right\}_{n=1}^{\infty}$ özdeğerleri sayılabilirdir ve

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \frac{d_n}{\lambda_n^0} + \frac{\eta_n}{n}, \quad \lambda > 0$$

biçimindedir. Burada, λ_n^0, $\Delta_0(\lambda)$ karakteristik fonksiyonun sıfırları; d_n sınırlı bir dizi ve $\{\eta_n\} \in l_2$ dir.

İspat: $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun herhangi bir λ için (4.1.1.2) koşulunu sağladığı açıktır. Dolayısıyla özdeğerleri, $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunu (4.1.1.3) koşulunda yazarak bulacağız.

(4.1.1.3)'den $\varphi(\pi,\lambda) = \Delta(\lambda)\big|_{x=\pi}$ yazabiliriz. Burada $\varphi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (4.1.1.13) gösterimini göz önünde bulundurursak,

$$\Delta(\lambda) = \Delta_0(\lambda) + \int_0^{\mu^+(\pi)} A(\pi,t)\cos\lambda t dt + h \int_0^{\mu^+(\pi)} \tilde{A}(\pi,t) \frac{\sin\lambda t}{\lambda} dt \tag{4.1.3.6}$$

elde ederiz. $\sigma << \frac{\tau}{2}$ (bknz. Lemma 4.1.3.1) yeterince küçük pozitif bir sayı olmak üzere, $G_\sigma = \left\{\lambda : \left|\lambda - \lambda_n^0\right| \geq \sigma\right\}$ alalım. [23] den

$$\left|\Delta_0(\lambda)\right| \geq C_\sigma \frac{1}{\lambda} e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}, \ \lambda \in G_\sigma$$

elde edilir. Diğer taraftan, eğer $f(x) \in L_1(0,\pi)$ ise o halde

$$\lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda\pi|} \int_0^\pi f(x)\cos\lambda_x dx = \lim_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda\pi|} \int_0^\pi f(x)\sin\lambda_x dx = 0 \ \text{ dan}$$

$$\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda) = O\left(\frac{1}{|\lambda|} e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(\pi)}\right), \ |\lambda| \to \infty$$

olur. Dolayısıyla, yeterince büyük n'ler için genişleyen $\Gamma_n = \left\{\lambda : |\lambda| = \left|\lambda_n^0\right| + \frac{\tau}{2}\right\}$ eğrileri üzerinde $\left|\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right| \leq \left|\Delta_0(\lambda)\right|$ eşitsizliği sağlanır.

Rouche teoreminden, Γ_n eğrisi içinde $\left[\Delta(\lambda) - \Delta_0(\lambda)\right] + \Delta_0(\lambda) = \Delta(\lambda)$ fonksiyonuyla, $\Delta_0(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırlarının sayısının aynı olduğunu söyleyebiliriz.

Rouche teoremini, $\nu_n(\sigma) = \left\{\lambda : \left|\lambda - \lambda_n^0\right| \leq \sigma\right\}$ eğrisine uygulayarak, yeterince büyük n ler için $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun $\nu_n(\sigma)$ eğrisi içinde tek bir λ_n sıfırı olduğunu elde ederiz.

Şimdi bu λ_n'leri bulalım. Herhangi bir $\sigma > 0$ sayısı için,

$$\lambda_n = \lambda_n^0 + \varepsilon_n, \ \varepsilon_n = o(1), \ n \to \infty \tag{4.1.3.7}$$

yazabiliriz. (4.1.3.7) yi (4.1.3.6) da yazarsak

$$\Delta\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) = \Delta_0\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) + \int_0^{\mu^+(\pi)} A(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right)t dt + h \int_0^{\mu^+(\pi)} \tilde{A}(\pi,t) \frac{\sin\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right)t}{\lambda_n^0 + \varepsilon_n} dt = 0 \tag{4.1.3.8}$$

buluruz.

$\Delta_0(\lambda_n) = \Delta_0\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right) = \Delta_0\left(\lambda_n^0\right) + \dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)\varepsilon_n + \ddot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)\frac{\varepsilon_n^2}{2!} + \cdots = \dot{\Delta}_0\left(\lambda_n^0\right)\varepsilon_n + o\left(\varepsilon_n^2\right)$ bağıntısında,

$\Delta_0\left(\lambda_n^0\right) = 0$ eşitliğini ve (4.1.3.8) i birlikte ele alırsak,

$\dot{\Delta}_0(\lambda_n)\varepsilon_n + \int_0^{\mu^+(\pi)} A(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right)t dt + h \int_0^{\mu^+(\pi)} \tilde{A}(\pi,t) \frac{\sin\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right)t}{\lambda_n^0 + \varepsilon_n} dt \approx 0$ buluruz. Burada,

kısmi integrasyon işlemi yaparsak,

$$\varepsilon_n \approx -\frac{1}{\lambda_n^0 \dot{\Delta}\left(\lambda_n^0\right)} \Big\{\left[A\left(\pi, \mu^-(\pi) + 0\right) - A\left(\pi, \mu^-(\pi) - 0\right)\right] \sin\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right)\mu^-(\pi)$$

$$+ A\left(\pi, \mu^+(\pi)\right)\sin\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right)\mu^+(\pi) - \int_0^{\mu^+(\pi)} A_t'(\pi,t)\sin\left(\lambda_n^0 + \varepsilon_n\right)t dt$$

$$+h\left[\left[\tilde{A}\left(\pi,\mu^{-}(\pi)+0\right)-\tilde{A}\left(\pi,\mu^{-}(\pi)-0\right)\right]\right]\frac{\cos\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)\mu^{-}(\pi)}{\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)}-$$

$$\left.-\tilde{A}\left(\pi,\mu^{+}(\pi)\right)\frac{\cos\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)\mu^{+}(\pi)}{\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)}+\frac{1}{\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)}\int_0^{\mu^{+}(\pi)}\tilde{A}_t'(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0+\varepsilon_n\right)tdt\right\}$$

elde ederiz. Burada (4.1.1.9) ve (4.1.1.10) özelliklerini kullanırsak ve $n\to\infty$ iken $\varepsilon_n=o(1)$ olduğunu dikkate alırsak,

$$\varepsilon_n\approx\frac{1}{\lambda_n^0\dot{\Delta}\left(\lambda_n^0\right)}\left\{\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\sin\left(\lambda_n^0\mu^{-}(\pi)\right)q(t)\,dt-\right.$$

$$\left.-\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\sin\left(\lambda_n^0\mu^{-}(\pi)\right)q(t)\,dt-\int_0^{\mu^{+}(\pi)}A_t'(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0t\right)dt\right\}$$

$$+\frac{h}{\lambda_n^0\dot{\Delta}\left(\lambda_n^0\right)}\left\{\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\left(1-\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\frac{\cos\left(\lambda_n^0\mu^{-}(\pi)\right)}{\lambda_n^0}q(t)\,dt+\right.$$

$$\left.+\frac{1}{4}\int_0^{\pi}\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\left(1+\frac{1}{\sqrt{\rho(t)}}\right)\frac{\cos\left(\lambda_n^0\mu^{-}(\pi)\right)}{\lambda_n^0}q(t)\,dt-\frac{1}{\lambda_n^0}\int_0^{\mu^{+}(\pi)}\tilde{A}_t'(\pi,t)\cos\lambda_n^0tdt\right.$$

$$=\frac{1}{\lambda_n^0\dot{\Delta}\left(\lambda_n^0\right)}\left\{d_n+\eta_n+\frac{\tilde{\eta}_n}{\lambda_n^0}\right\}$$

buluruz, burada $\{\tilde{\eta}_n\}:=\int_0^{\mu^{+}(\pi)}\tilde{A}_t'(\pi,t)\cos\left(\lambda_n^0\right)tdt\in l_2$ ve $\{\eta_n\}:=\int_0^{\mu^{+}(\pi)}A_t'(\pi,t)\sin\left(\lambda_n^0\right)tdt\in l_2$ dir.

4.1.4. Ayrışım Formülü

Bu bölümde, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin özfonksiyonlarının tamlığını göstereceğiz ve daha sonra özfonksiyonlara göre ayrışım formülünü elde edeceğiz.

$$G(x,t,\lambda):=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\varphi(t,\lambda)\psi(x,\lambda), & t\le x,\\ \psi(t,\lambda)\varphi(x,\lambda), & t>x,\end{cases}$$

olsun.

$$y(x,\lambda)=\int_0^{\pi}G(x,t,\lambda)f(t)\rho(t)\,dt$$

$$=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left[\psi(x,\lambda)\int_0^{x}\varphi(t,\lambda)f(t)\rho(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^{\pi}\psi(t,\lambda)f(t)\rho(t)\,dt\right]\qquad(4.1.4.1)$$

fonksiyonunu ele alalım. $G(x,t,\lambda)$ fonksiyonuna, Green fonksiyonu denir.

Teorem 4.1.4.1. (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer probleminin $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonları $L_{2,\rho}[0,\pi]$ de bir tam sistem oluşturur.

İspat: (4.1.3.3) ve (4.1.3.4)'den

$$\psi(x,\lambda_n) = -\frac{\dot{\Delta}(\lambda_n)}{2\lambda_n\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n) \tag{4.1.4.2}$$

yazabiliriz. (4.1.3.3)'ü göz önüne alıp, Sonuç 4.1.3.1'i kullanırsak

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y(x,\lambda) = -\frac{1}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}\left[-\frac{\dot{\Delta}(\lambda_n)}{2\lambda_n\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n)\int_0^\pi \varphi(t,\lambda_n) f(t)\rho(t)dt\right]$$

buluruz. Yukarıdaki son terimde, (4.1.3.3)'ü tekrar göz önüne alıp, gerekli düzenlemeleri yaparsak,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y(x,\lambda) = \frac{1}{2\lambda_n\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n)\left[\int_0^\pi \varphi(t,\lambda_n) f(t)\rho(t)dt\right] \tag{4.1.4.3}$$

elde ederiz.

Şimdi, $f(x)\in L_{2,\rho}[0,\pi]$ alırsak ve $\int_0^\pi \varphi(x,\lambda_n)\overline{f(x)}\rho(x)dx = 0$ olduğunu kabul edersek (4.1.4.3) ten $\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} y(x,\lambda) = 0$ elde ederiz ve buradan sabitlenmiş her $x\in[0,\pi]$ için $y(x,\lambda)$ nın λ'ya göre tamlığından bahsedebiliriz. Eğer $f(x)\in L_1(0,\pi)$ ise o halde

$\lim\limits_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda\pi|}\int_0^\pi f(x)\cos\lambda_x dx = \lim\limits_{|\lambda|\to\infty} e^{-|\operatorname{Im}\lambda\pi|}\int_0^\pi f(x)\sin\lambda_x dx = 0$ dan her $f(x)\in L_1[0,\pi]$ için

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{x\in[0,\pi]}\left\{e^{-|\operatorname{Im}\lambda|x}\left|\int_0^x f(t)\cos\lambda t dt\right|\right\} = \lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{x\in[0,\pi]}\left\{e^{-|\operatorname{Im}\lambda|x}\left|\int_0^x f(t)\sin\lambda t dt\right|\right\} = 0$$

eşitliklerinin sağlandığını söyleyebiliriz.

Ayrıca, $|\lambda|\to\infty$ için,

$$\varphi(x,\lambda) = \left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(x)}\right), \tag{4.1.4.5}$$

$$\varphi'(x,\lambda) = \varphi_0'(x,\lambda) + O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(x)}\right) = O\left(e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^+(x)}\right), \tag{4.1.4.6}$$

$$\psi(x,\lambda) = \left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^+(\pi)-\mu^+(x)\right)}\right), \tag{4.1.4.7}$$

$$\psi'(x,\lambda)=\psi_0'(x,\lambda)+\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\left(\mu^+(\pi)-\mu^+(x)\right)}\right)=O\left(e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\left(\mu^+(\pi)-\mu^+(x)\right)}\right) \tag{4.1.4.8}$$

sağlanır. (4.1.4.5) – (4.1.4.6)'dan

$$|\Delta(\lambda)|\geq C_\sigma\cdot\frac{1}{|\lambda|}\cdot e^{|\mathrm{Im}\,\lambda|\mu^+(\pi)},\quad \lambda\in G_\sigma \tag{4.1.4.9}$$

olur. (4.1.4.1)' den sabitlenmiş $\sigma>0$ ve yeterince büyük $\lambda^*>0$ için $|y(x,\lambda)|\leq\frac{C_\sigma}{|\lambda|},\quad \lambda\in G_\sigma,\quad |\lambda|\geq\lambda^*$ elde ederiz. Teorem 3.1.3 ve Teorem 3.1.4' den $y(x,\lambda)\equiv 0$ olduğu sonucuna varırız. Buradan $[0,\pi]$ aralığında hemen hemen her yerde $f(x)\equiv 0$ olur. Böylece $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 0}$ özfonksiyonları $L_{2,\rho}[0,\pi]$ de bir tam sistem oluşturur. □

Teorem 4.1.4.2. Eğer $f(x)$, $[0,\pi]$ aralığında mutlak sürekli bir fonksiyonsa ve (4.1.1.2), (4.1.1.3) sınır koşullarını sağlıyorsa o halde,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi(x,\lambda_n) \tag{4.1.4.10}$$

ayrışım formülü geçerlidir, burada $a_n=\frac{1}{\gamma_n}\int_0^\pi\varphi(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)dt$'dir ve seriler $x\in[0,\pi]$'ye göre düzgün yakınsaktır. $f(x)\in L_{2,\rho}[0,\pi]$ için seriler $L_{2,\rho}[0,\pi]$'de yakınsaktır ve $\int_0^\pi|f(x)|^2\rho(x)dx=\sum_{n=1}^{\infty}\gamma_n|a_n|^2$ Parseval eşitliği sağlanır.

İspat: Keyfi $f(x)\in AC[0,\pi]$ alalım. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$, (4.1.1.1) – (4.1.1.3) sınır değer çözümleri olduğundan, (4.1.1.1) ve (4.1.4.1)' den

$$y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\left[-\varphi''(t,\lambda)+q(t)\varphi(t,\lambda)\right]f(t)dt\right\}$$
$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\left[-\psi''(t,\lambda)+q(t)\psi(t,\lambda)\right]f(t)dt\right\}$$

yazabiliriz. Bu ifadeyi düzenlersek,

$$y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{-\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi''(t,\lambda)f(t)dt+\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)q(t)f(t)dt\right\}$$
$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{-\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi''(t,\lambda)f(t)dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)q(t)f(t)dt\right\}$$

elde ederiz. Burada kısmi integrasyon yaparsak,

$$y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{-\psi(x,\lambda)\left[\varphi'(t,\lambda)f(t)\Big|_0^x-\int_0^x\varphi'(t,\lambda)f'(t)dt\right]\right.$$

$$\left.+\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)q(t)f(t)dt\right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{-\varphi(x,\lambda)\left[\psi'(t,\lambda)f(t)\Big|_x^\pi-\int_x^\pi\psi'(t,\lambda)f'(t)dt\right]+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)q(t)f(t)dt\right\}$$

$$=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi'(t,\lambda)f'(t)dt-\psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)f(x)+\psi(x,\lambda)\varphi'(0,\lambda)f(0)\right.$$

$$\left.+\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)q(t)f(t)dt\right\}$$

$$-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi'(t,\lambda)f'(t)dt-\varphi(x,\lambda)\psi'(\pi,\lambda)f(\pi)+\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)f(x)\right.$$

$$\left.+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)q(t)f(t)dt\right\}$$

buluruz. Şimdi (4.1.1.2) ve (4.1.1.3) sınır koşullarını dikkate alarak,

$$y(x,\lambda)=-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi'(t,\lambda)f'(t)dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi'(t,\lambda)f'(t)dt\right\}$$

$$+\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}f(x)\left[\psi(x,\lambda)\varphi'(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\psi'(x,\lambda)\right]-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\psi(x,\lambda)f(0)$$

$$+\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda)f(\pi)-\frac{1}{\lambda^2\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)q(t)f(t)dt+\right.$$

$$\left.+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)q(t)f(t)dt\right\}$$

elde ederiz. Buradan,

$$y(x,\lambda)=-\frac{f(x)}{\lambda^2}-\frac{1}{\lambda^2}\left\{Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\right\} \qquad (4.1.4.11)$$

bulunur. Burada,

$$Z_1(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi'(t,\lambda)f'(t)dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi'(t,\lambda)f'(t)dt\right\}$$

ve

$$Z_2(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)f(0)-\varphi(x,\lambda)f(\pi)\right.$$

$$\left.+\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)q(t)f(t)dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^\pi\psi(t,\lambda)q(t)f(t)dt\right\} \text{ dır.}$$

Şimdi,

$$I_n(x)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\lambda y(x,\lambda)\,d\lambda \tag{4.1.4.12}$$

integralini ele alalım. Burada, $\Gamma_n=\left\{\lambda:|\lambda|=|\lambda_n^0|+\frac{\tau}{2}\right\}$ saat yönünde yönlendirilmiş bir eğri ve n yeterince büyük bir doğal sayıdır. (4.1.4.11)'den

$$\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\lambda y(x,\lambda)\,d\lambda=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{f(x)}{\lambda}d\lambda-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\frac{\{Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\}}{\lambda}d\lambda \tag{4.1.4.13}$$

yazabiliriz. Diğer taraftan; rezidü teorisinden, $I_n(x)=2\sum_{n=1}^{N}\lambda\operatorname{Res}y(x,\lambda)$ olur. (4.1.4.3) ve (4.1.4.13)'den

$$-f(x)+\varepsilon_n(x)=-\sum_{n=1}^{N}\frac{\varphi(x,\lambda_n)}{\gamma_n}\left\{\int_0^{\pi}\varphi(t,\lambda_n)\,f(t)\rho(t)\,dt\right\} \tag{4.1.4.14}$$

bulunur. Burada,

$$\varepsilon_n(x)=-\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_n}\{Z_1(x,\lambda)+Z_2(x,\lambda)\}d\lambda$$

dir. Şimdi,

$$\lim_{n\to\infty}\max_{x\in[0,\pi]}|\varepsilon_n(x)|=0 \tag{4.1.4.15}$$

olduğunu gösterelim. $\varphi(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ çözümlerinin ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun asimtotik formüllerinden sabitlenmiş $\sigma>0$ ve yeterince büyük $\lambda^*>0$ için

$$\max_{x\in[0,\pi]}|Z_2(x,\lambda)|\le\frac{C_2}{|\lambda|},\quad \lambda\in G_\sigma,\quad |\lambda|\ge\lambda^* \tag{4.1.4.16}$$

olur. $\lim\limits_{\substack{|\lambda|\to\infty\\ \lambda\in G_\sigma}}\max\limits_{x\in[0,\pi]}|Z_1(x,\lambda)|=0$ olduğunu göstermek için önce $f'(t)\in AC[0,\pi]$ olduğunu kabul edersek ve $Z_1(x,\lambda)$ ifadesinde kısmi integrasyon yaparsak,

$$Z_1(x,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\left\{\psi(x,\lambda)\int_0^x\varphi(t,\lambda)f''(t)\,dt+\varphi(x,\lambda)\int_x^{\pi}\psi(t,\lambda)f''(t)\,dt\right\}$$

elde ederiz. Dolayısıyla $Z_2(x,\lambda)$'ya benzer şekilde

$$\max_{x\in[0,\pi]}|Z_1(x,\lambda)|\le\frac{C_1}{|\lambda|},\quad \lambda\in G_\sigma,\quad |\lambda|\ge\lambda^* \tag{4.1.4.17}$$

buluruz. (4.1.4.16) ve (4.1.4.17) den (4.1.4.15) un doğru olduğu kolayca görülür. Genel durum, [24]'deki yöntem kullanılarak gösterilebilir. O halde

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\varphi(x,\lambda_n)\left\{\int_0^{\pi}\varphi(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)dt\right\}$$

yazabiliriz. Bu ifadede

$$a_n=\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{\gamma_n}\left\{\int_0^{\pi}\varphi(t,\lambda_n)f(t)\rho(t)dt\right\}$$

alırsak, ayrışım formülünü $f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}a_n\varphi(x,\lambda_n)$ biçiminde yazabiliriz. $\{\varphi(x,\lambda_n)\}_{n\geq 1}$ sistemi $L_{2,\rho}[0,\pi]$'de ortogonal bir baz oluşturur, dolayısıyla Parseval eşitliği sağlanır.□

4.1.5. Weyl Çözümü ve Weyl Fonksiyonu

$\Phi(x,\lambda)$ ile (4.1.1.1) denkleminin $U_1(\Phi)=1$ ve $U_2(\Phi)=0$ koşullarını sağlayan çözümü gösterilsin. $c(x,\lambda)$, $s(x,\lambda)$ ve $\psi(x,\lambda)$ ile de (4.1.1.1) denkleminin

$c(0,\lambda)=1,\quad c'(0,\lambda)=0,\quad s(0,\lambda)=0,\quad s'(0,\lambda)=1,\quad \psi'(\pi,\lambda)=1,\quad \psi(\pi,\lambda)=0$

koşullarını sağlayan çözümü işaretlensin. O halde $\psi(x,\lambda)$ çözümü

$$\psi(x,\lambda)=\psi(0,\lambda)\varphi(x,\lambda)+\Delta(\lambda)s(x,\lambda) \qquad (4.1.5.1)$$

veya

$$\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)}=s(x,\lambda)+\frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\varphi(x,\lambda). \qquad (4.1.5.2)$$

gösterimlerine sahiptir.

Şimdi,

$$M(\lambda):=\frac{\psi(0,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \qquad (4.1.5.3)$$

ile işaretlensin. Açıktır ki,

$$\Phi(x,\lambda)=s(x,\lambda)+M(\lambda)\varphi(x,\lambda) \qquad (4.1.5.4)$$

biçiminde yazılabilir.

$\Phi(x,\lambda)$ ve $M(\lambda)=\Phi(0,\lambda)$ fonksiyonları sırasıyla, (4.1.1.1)-(4.1.1.3) sınır değer probleminin Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu olarak adlandırılır. Weyl fonksiyonu, (4.1.1.1)-(4.1.1.3) sınır değer probleminin λ_n özdeğerler noktalarında basit kutuplara sahip meromorfik bir fonksiyondur. (4.1.5.2) ve (4.1.5.4) eşitliklerinden

$$\Phi(x,\lambda)=\frac{\psi(x,\lambda)}{\Delta(\lambda)} \qquad (4.1.5.5)$$

yazabiliriz. Wronskiyen x'den bağımsız olduğundan

$$\langle\varphi(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\rangle=\varphi(x,\lambda)\Phi'(x,\lambda)-\varphi'(x,\lambda)\Phi(x,\lambda)$$

eşitliğinden

$$\left\langle \varphi(x,\lambda),\Phi(x,\lambda)\right\rangle = 1$$

elde edilir.

Şimdi ters problem için teklik teoremini ispat edelim.

Teorem 4.1.5.1. Eğer $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise o halde, $L=\tilde{L}$ dır. Yani; (4.1.1.1) - (4.1.1.3) sınır değer problemi Weyl fonksiyonu tarafından tek olarak belirlenir.

İspat: $P(x,\lambda)=\left[P_{jk}(x,\lambda)\right]_{j,k=1,2}$ matrisini aşağıdaki şekilde tanımlayalım:

$$\begin{pmatrix} P_{11}(x,\lambda) & P_{12}(x,\lambda) \\ P_{21}(x,\lambda) & P_{22}(x,\lambda) \end{pmatrix}\begin{pmatrix} \tilde{\varphi}(x,\lambda) & \tilde{\Phi}(x,\lambda) \\ \tilde{\varphi}'(x,\lambda) & \tilde{\Phi}'(x,\lambda) \end{pmatrix}=\begin{pmatrix} \varphi(x,\lambda) & \Phi(x,\lambda) \\ \varphi(x,\lambda) & \Phi'(x,\lambda) \end{pmatrix}. \tag{4.1.5.6}$$

Buradan

$$\begin{aligned} \varphi(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)+P_{12}(x,\lambda)\tilde{\varphi}'(x,\lambda), \\ \Phi(x,\lambda) &= P_{11}(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda)+P_{12}(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda), \end{aligned} \tag{4.1.5.7}$$

veya

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= \varphi(x,\lambda)\tilde{\Phi}'(x,\lambda)-\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\Phi(x,\lambda), \\ P_{12}(x,\lambda) &= -\varphi(x,\lambda)\tilde{\Phi}(x,\lambda)+\tilde{\varphi}(x,\lambda)\Phi(x,\lambda), \end{aligned} \tag{4.1.5.8}$$

yazabiliriz. (4.1.5.5)'i (4.1.5.8)'de dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= 1-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\psi(x,\lambda)\left(\varphi'(x,\lambda)-\tilde{\varphi}(x,\lambda)\right)+\frac{1}{\Delta(\lambda)}s(x,\lambda)\left(\tilde{\psi}'(x,\lambda)-\psi(x,\lambda)\right), \\ P_{12}(x,\lambda) &= \frac{1}{\Delta(\lambda)}\left(\tilde{\varphi}(x,\lambda)\psi(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\tilde{\psi}(x,\lambda)\right) \end{aligned} \tag{4.1.5.9}$$

elde ederiz.

$$\left|\varphi'(x,\lambda)-\tilde{\varphi}(x,\lambda)\right| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\mu^{+}(x)}\right),\ |\lambda|\to\infty$$

ve

$$\left|\psi'(x,\lambda)-\tilde{\psi}(x,\lambda)\right| = O\left(\frac{1}{|\lambda|}e^{|\operatorname{Im}\lambda|\left(\mu^{+}(\pi)-\mu^{+}(x)\right)}\right),\ |\lambda|\to\infty$$

bağıntılarından ve (4.1.5.9)'dan $\lambda\in G_\sigma$ için

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}\left|P_{11}(x,\lambda)-1\right| = \lim_{|\lambda|\to\infty}\max_{0\le x\le\pi}\left|P_{12}(x,\lambda)\right| = 0 \tag{4.1.5.10}$$

bulunur. (4.1.5.4)'ü (4.1.5.8)'de dikkate alırsak,

$$\begin{aligned} P_{11}(x,\lambda) &= \tilde{\varphi}'(x,\lambda)c(x,\lambda)-\varphi(x,\lambda)\tilde{c}'(x,\lambda)+\tilde{\varphi}'(x,\lambda)\varphi(x,\lambda)\left[M(\lambda)-\tilde{M}(\lambda)\right] \\ P_{12}(x,\lambda) &= \varphi(x,\lambda)\tilde{c}(x,\lambda)-\tilde{\varphi}(x,\lambda)c(x,\lambda)+\varphi(x,\lambda)\tilde{\varphi}(x,\lambda)\left[\tilde{M}(\lambda)-M(\lambda)\right] \end{aligned}$$

olur. Dolayısıyla eğer, $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ ise $P_{11}(x,\lambda)$ ve $P_{12}(x,\lambda)$ sabitlenmiş her x için tam fonksiyonlar olurlar. (4.1.5.10)'dan $P_{11}(x,\lambda)=1$ ve $P_{12}(x,\lambda)=0$ olduğu açıktır. Sonuç olarak, her x ve her λ için, $\varphi(x,\lambda)\equiv\tilde{\varphi}(x,\lambda)$ ve $\Phi(x,\lambda)\equiv\tilde{\Phi}(x,\lambda)$ olur. Buradan ise $q(x)\equiv\tilde{q}(x)$ bulunur. □

Teorem 4.1.5.2. Aşağıdaki eşitlik doğrudur:

$$M(\lambda)=M(0)+\sum_{n=1}^{\infty}\frac{1}{2\lambda_n^2\gamma_n(\lambda^2-\lambda_n^2)}. \tag{4.1.5.11}$$

İspat: (4.1.5.3)'den rezidü hesaplarsak,

$$\operatorname*{Res}_{\lambda=\lambda_n} M(\lambda)=\frac{\psi(0,\lambda)}{\dot{\Delta}(\lambda_n)}=\frac{k_n}{-2\lambda_n k_n\gamma_n}=-\frac{1}{2\lambda_n\gamma_n} \tag{4.1.5.12}$$

buluruz. (4.1.5.3)'de $\Delta(\lambda)$'nın asimptotik ifadesini göz önüne alırsak $M(\lambda)\le\frac{C_\sigma}{|\lambda|^2},\quad \lambda\in G_\sigma,\quad |\lambda|\ge\lambda^*$ eşitsizliğini, buradan limite geçerek,

$$\lim_{|\lambda|\to\infty}|M(\lambda)|=0 \tag{4.1.5.13}$$

ifadesini elde ederiz. Şimdi aşağıdaki kontür integralini ele alalım:

$$J_N(\lambda)=\frac{1}{2\pi i}\oint_{\Gamma_N}\frac{M(\mu)}{\mu-\lambda}d\mu,\qquad \lambda\in Int\Gamma_N,$$

burada, $\Gamma_N=\left\{\mu:|\mu|=|\lambda_N^0|+\frac{\tau}{2}\right\}$ saat yönünün tersi yönünde yönlendirilmiş bir kontürdür. Bu durumda, (4.1.5.13) ifadesinden $\lim_{N\to\infty}|J_N(\lambda)|=0$ elde edilir. Diğer taraftan, rezidü teoremini tekrar kullanarak, $\lambda_{-n}=-\lambda_n$ eşitliğini dikkate alarak ve (4.1.5.12)'yi göz önünde bulundurarak (4.1.5.11)'i elde ederiz. □

Teorem 4.1.5.3. Eğer $\forall n\in Z$ için $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n=\tilde{\alpha}_n$ ise o halde, $L=\tilde{L}$ dır. Yani, (4.1.1.1) - (4.1.1.3) sınır değer problemi spektral veriler tarafından tek türlü belirlenir.

İspat: Her $n\in Z$ için, $\lambda_n=\tilde{\lambda}_n$ ve $\alpha_n=\tilde{\alpha}_n$ olduğundan ayrıca, (4.1.5.11) formülü sağlandığından, $M(\lambda)=\tilde{M}(\lambda)$ elde ederiz. Dolayısıyla, Teorem 4.1.5.2'den $L=\tilde{L}$ buluruz. □

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Tezde, Sturm-Liouville operatörü için spektral analizin düz ve ters problemleri ele alınmıştır. Bu sınır değer problemleri için,

1) Sınır değer problemlerine uygun özel çözümler tanımlanmış ve özel çözümlerin özellikleri verilmiştir.
2) Sınır değer problemlerine uygun özfonksiyonların dik olduğunu gösteren teorem ispatlanmıştır.
3) Sınır değer problemlerine uygun karakteristik fonksiyon tanımlanmış ve sınır değer probleminin özdeğerlerinin reel ve basit olduğu gösterilmiştir.
4) Ele alınan sınır değer problemine uygun Green fonksiyonu tanımlanmış, problemin özfonksiyonlarının tam bir sistem oluşturdukları gösterilmiş ve özfonksiyonlara göre ayrışım formülü elde edilmiştir.
5) Sınır değer problemlerine uygun Weyl çözümü ve Weyl fonksiyonu tanımlandıktan sonra, ele alınan sınır değer problemlerinin Weyl fonksiyonuna ve spektral verilere göre tek türlü belirlenebileceği gösterilmiştir.

5.2. Öneriler

Tezde incelenen sınır değer problemlerinin ters problemi değişik karakteristiklere göre incelenerek literatüre katkıda bulunulabilir.

KAYNAKLAR

[1]. Anderssen, R. S., "The effect of discontinuities in density and shear velocity on the asymptotic overtone structure of tortional eigenfrequencies of the Earth", Geophys. J. R. Astr. Soc., 50, 303-309, (1997).

[2]. Lapwood, E. R., Usami, T., Free Oscillations of the Earth, Cambridge Univ. Press, Cambridge, 1981.

[3]. Hald, O. H., "Discontinuous inverse eigenvalue problems", Comm. Pure and Appl. Math., 37, 539-577, (1984).

[4]. Shepelsky, D., "The inverse problem of reconstruction of the medium's conductivity in a class of discontinuous and increasing functions", Spectral operator theory and related topics: Adv. In Sov. Math., Providence, Amer. Math. Soc., 19, 209-232, (1994).

[5]. Kobayashi, M., "A uniqueness for discontinuous inverse Sturm-Liouville problems with symmetric potentials", Inverse Problems, 5, 767-781, (1985).

[6]. Freiling, G., Yurko, V., Inverse Sturm-Liouville Problems and Their Applications, Nova Science Publisher Inc., New York, 2008.

[7]. Freiling, G., Yurko, V., Lectures on Differential Equations of Mathematical Physics-A First Course, Nova Science Publisher Inc., New York, 2008.

[8]. Akhmedova, E. N., "On representation of solution of Sturm-Liouville equation with discontinuous coefficients", Proc. Inst. Math. Mech. Natl. Acad. Sci. Azerbaijan, 23(4), 7-18, (2003).

[9]. Akhmedova, E. N., Huseynova, H. M., On eigenvalues and eigenfunctions of one class of Sturm-Liouville with discontinuous coefficients, Transactions of NAS of Azerbaijan, 23(4), 7-18, (2003).

[10]. Akhmedova, E. N., The definition of one class of Sturm-Liouville Operators with discontinuous coefficients by Weyl Function, Proceedings of IMM of NAS of Azerbaijan, 22(30), 3-8, (2005).

[11]. Mamedov, Kh. R., Karahan, D., "On an inverse spectral problem for Sturm-Liouville operator with discontinuous coefficient", Ufimsk. Mat. Zh., 7(3), 125-137, (2015).

[12]. Hashimoğlu, I. F., Karahan, D., Mamedov, Kh. R., "On main equation for inverse Sturm-Liouville operator with discontinuous coefficient", Sylwan, 159(10), 89-101, (2015).

[13]. Mamedov, Kh. R., Karahan, D., "On an inverse problem for Sturm-Liouville equation", EJPAM, 10(3), 535-543, (2017)

[14]. Mamedov, Kh. R., Cetinkaya, F. A., "Inverse problem for a class of Sturm-Liouville operator with spectral parameter in boundary condition", Boundary Value Problems, 2013:183, (2013).

[15]. Mamedov, Kh. R., Cetinkaya, F. A., “A uniqueness theorem for a Sturm-Liouville equation with spectral parameter in boundary conditions”, Appl. Math. Inf. Sci., 9 (2), 981-988, (2015).

[16]. Mamedov, Kh. R., Akçay, Ö., “Inverse problem for a class of Dirac operator”, Taiwanese Journal of Mathematics, 18, 773-782, (2014).

[17]. Akçay, Ö., Mamedov, Kh. R., “Inverse spectral problem for Dirac operators by spectral data”, Filomat, 31 (4), 1065-1077, (2017).

[18]. Musayev, B., Alp, M., “Fonksiyonel Analiz’’, Balcı Yayınları, (2000)

[19]. Başkan, T., “Kompleks Fonksiyonlar Teorisi’’, Nobel Yayın Dağıtım, Ankara, (2005).

[20]. Naimark, M. A., “Linear Differential Operators I”, Ungar, New York, (1968).

[21]. Hasanov, E., Uzgören, G., Büyükaksoy, A., “Diferansiyel Denklemler Teorisi’’, Papatya Yayınları, (2002)

[22]. Zhdanovich, V. F., “Formulae for zeros of Dirichlet polynomials and quasipolynomials”, DAN SSSR, 135(5), 1046-1049, (1960).

[23]. Bellman, R. and Kuk, K. L., “Difference-Differential Equations”, M. Mir., (1967).

[24]. Levitan, B. M. and Sargsjan I. S., “Sturm-Liouville and Dirac Operators”, Kluwer Academic Publishers, (1991).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı : Ufuk ÇELİK

Doğum Tarihi : 10/01/1989

E-mail : ufukcelik172@gmail.com

Öğrenim Durumu:

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lise	Fen-Matematik	Rize Lisesi	2002–2005
Lisans	Matematik	Recep Tayyip Erdoğan Üniversitesi	2008–2013
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2015–2018