İNTEGRAL SINIR KOŞULUNU İÇEREN ISI İLETİMİ DENKLEMİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERHAN KAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MERSİN
ŞUBAT – 2018

İNTEGRAL SINIR KOŞULUNU İÇEREN ISI İLETİMİ DENKLEMİ ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ERHAN KAYA

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU

MERSİN
ŞUBAT – 2018

ONAY

Erhan KAYA tarafından Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU danışmanlığında hazırlanan "İntegral Sınır Koşulunu İçeren Isı İletimi Denklemi Üzerine" başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 07 Şubat 2018 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği ile Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	Ünvanı, Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	Prof. Dr. Hamza MENKEN	…………………
Üye	Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	…………………
Üye	Yrd. Doç. Dr. Olgun CABRİ	…………………

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 23/02/2018 tarih ve 2018.09/359 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Ayla ÇELİK
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim – Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlak kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesine devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulationand I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.

- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.

- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.

- I used all of the referred works as the references.

- I did not do any tampering in the used data.

- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.

- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

07 Şubat 2018 / 07 February 2018

Erhan KAYA

ÖZET

İNTEGRAL SINIR KOŞULUNU İÇEREN ISI İLETİMİ DENKLEMİ ÜZERİNE

Birçok fiziksel olay sınır koşullarında integral terim içeren parabolik kısmi diferansiyel denklem ile modellenebilir. Bu çalışmada ısı denklemi, sınır koşullarında aranan çözümün integralini barındıran koşul ile düşünüldü. İntegral sınır koşulu noktasal sınır koşuluna dönüştürüldü ve Fourier yöntemi uygulanmış ve SturmLiouville problemi bulunmuştur. SturmLiouville operatörü özeşlenik olmadığı ve sınır koşullarının regüler hatta kuvvetli regüler olduğu elde edilmiştir. Özdeğer ve özfonksiyonları asimptotik ifadeleri elde edilerek çözümün ifadesi yazılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Sturm-Liouville Operatörü, Fourier Yöntemi, Özdeğer, Özfonksiyon

Danışman: Prof.Dr.Hanlar REŞİDOĞLU, Mersin Üniversitesi, Matematik Ana Bilim Dalı

ABSTRACT

ON A HEAT EQUATION WITH INTEGRAL BOUNDARY CONDITION

Parabolic initial-boundary value problems which involve integral term in a boundary condition can model several physical problems. In this study the heat equation which has integral condition at boundary is considered. Integral boundary condition is transformed to local one and by the Fourier method, Sturm – Liouville problem is found. Sturm – Liouvill eoperator is non-selfadjoint and boundary conditions are regular morever strongly regular. Asymptotic formulas of eigenvalues and eigenfunctions of the Sturm – Liouville problem is obtained then solution of problem is written.

Key Words: Sturm – Liouville Operator, Fourier's Method, Eigenvalues, Eigenfunctions
Advisor: Prof.Dr.Hanlar REŞİDOĞLU, Department of Mathematics, Mersin University

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans tezimi hazırlamamda, fikirleriyle, bilgisiyle, sabrı ve sevgisiyle her zaman yanımda olan, çok saygı duyduğum değerli danışman hocam Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU'na teşekkürü bir borç bilirim.

Yüksek lisans eğitimim boyunca desteklerinden dolayı, tüm Mersin Üniversitesi Matematik Bölümü hocalarıma ve bu süreçte desteğini esirgemeyen Yrd. Doç. Dr.Olgun CABRİ hocama şükranlarımı sunarım.

Her zaman maddi ve manevi destekleriyle yanımda olan aileme çok teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
□	Kompleks sayılar kümesi
λ	Özdeğer
δ	Kronecker delta sembolü
$U_k(y)$	Sınır koşulları
$C[a,b]$	$[a,b]$ aralığında sürekli fonksiyonlar kümesi
L	Diferransiyel operatör
u	Sıcaklık
u_t	Sıcaklık değişimi
u_x	Sıcaklık eğrisinin eğimi
u_{xx}	Sıcaklık eğrisinin kabarıklığı

1. GİRİŞ

Parabolik kısmi diferensiyel denklemler birçok fiziksel olayın matematiksel modellemesinde sıkça kullanılır. Bu parabolik diferansiyel denklemlerin içerisinde veya sınır koşullarında aranan çözümün integrali barınabilir. Aranan çözümün integralini barındıran sınır koşullarına integral sınır koşulu denir.

Uygulamada kimyasal difüzyon, ısı iletim süreci, termoelastisite, nüfus dinamiği, ekonomi, titreşim problemleri, nükleer reaktör dinamiği ve biyoloji gibi alanlarda integral sınır koşullarını içeren problemler ile karşılaşılır.

Sınır koşulu integral biçiminde verildiğinde problemin çözümünü kolaylaştırmak için sınır koşulunu noktasal sınır koşullarına indirgemek önemlidir. Çünkü ancak bu durumda elde edilen karışık sınır değer problemine matematiksel fiziğin yöntemleri uygulanabilir. İndirgeme sonucunda genelde aranan çözümün veya çözümün türevinin farklı sınır noktalarındaki değerlerini içeren bağıntı elde edilir.

Bu çalışmada ısı iletim denklemi için

$D=\{(x,t):0<x<1,\,0<t<T\}$ bölgesinde

$$\frac{\partial u}{\partial t}=\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}+F(x,t) \tag{1.1}$$

denklemi,

$$u_x(0,t)-u(0,t)=v(t),\,0\le t\le T \tag{1.2}$$

$$\int_0^1 xu(x,t)\,dx=\mu(t),\,0\le t\le T \tag{1.3}$$

sınır koşulları ve

$$u(x,0)=u_0(x),\ 0\le x\le 1 \tag{1.4}$$

başlangıç koşulu ile verilen problem ele alınacaktır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

İntegral sınır şartına ait problemler ilk olarak Cannon tarafından tanıtıldı [1]. Daha sonra integral sınır şartına sahip problemlerin çözümü ilgili hem teorik hem de sayısal bir çok çalışma yapılmıştır. Cannon [2 - 5], Kamynin [6], inceledikleri integral sınır şartına ait problemlerin çözümün varlığını ve tekliğini göstermiştir. Tezdeki probleme benzer problem Ionkin [7] tarafından da çalışılmıştır. Ionkin [7], Fourier yönteminin kullanılması sonucunda elde edilen Sturm – Liouville probleminin özeşlenik olmadığını ve sınır koşullarının zayıf regüler olduğunu gösterdi. Ionkin ek fonkisyonlar yardımıyla özfonksiyonların tabanlığı göstermiştir. Ionkin ve Moisiyev [8].

$$u_t = u_{xx} - q(x)u + f(x,t)$$

kısmi diferansiyel denklemi için en genel halde sınır koşullarının

$$a_0 u_x(0,t) + a_1 u_x(1,t) + b_0 u(0,t) + b_1 u(1,t) = 0,$$

$$c_0 u_x(0,t) + c_1 u_x(1,t) + d_0 u(0,t) + d_1 u(1,t) = 0.$$

Kuvvetli regüler olması durumunda çözümün varlığını, tekliğini ve başlangıç değerlerine olan bağlılığını gösterdi.

İntegral sınır ilk olarak Cannon [1] tarafından katı kimyasalın difüzyonu problemi ile tanıtılmıştır.

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t),\ 0 < x < 1,\ 0 < t \le T \tag{2.1}$$

$$u(x,0) = \varphi(x),\ 0 \le x \le 1 \tag{2.2}$$

$$u_x(0,t) = g(t),\ 0 < t \le T \tag{2.3}$$

$$\int_0^{b(t)} u(x,t)dx = m(t),\ 0 < b(t) < 1,\ 0 < t \le T \tag{2.4}$$

(2.1) – (2.4) parabolik başlangıç sınır problemi bir çok fiziksel olayı modeller. Katı kimyasalın difüzyon süreci için $u(x,t)$ kimyasalın konsantrasyonunu gösterirse $m(t)$, $0<x<b(t)$ arasında t zamanında toplam kimyasalın kütlesini ifade eder. Isı iletim süreci için $u(x,t)$ sıcaklığı gösterirse $m(t)$, $0<x<b(t)$ arasında t zamanında toplam iç enerjiyi belirtir[5].

Cannon ve Van Der Hoek [5] te (2.1) – (2.4) problemi için çözümün varlığını, tekliğini ve başlangıç değerlerine bağlılığını gösterdi.

Kamynin [1] de lineer parabolik denklem için

$$u(X_2(t),t)=\varphi(t)$$

$$\int_{X_1(t)}^{X_2(t)} g(x,t)u(x,t)dx = E(t)$$

sınır koşulları altında varlığını ve tekliğini inceledi.

Ionkin [7] de ısı denklemi için

$$\frac{\partial u}{\partial t}=a^2\frac{\partial^2 u}{\partial x^2} \tag{2.5}$$

$$u(x,0)=\varphi(x) \tag{2.6}$$

$$u(0,t)=0 \tag{2.7}$$

$$\int_0^1 u(x,t)dx = m(t) \tag{2.8}$$

(2.8) integral sınır koşulunu

$$u_x(1,t)-u_x(0,t)=m'(t) \tag{2.9}$$

(2.9) sınır şartına dönüştürerek problemin varlığını, tekliğini ve başlangıç değerlerine olan bağlılığını kanıtladı. Ionkin [7] de Fourier yöntemiyle elde edilen Sturm – Liouville probleminin özeşlenik olmadığını, sınır koşullarının zayıf regüler olduğunu ve karşılık gelen özfonksiyonların tam sistem oluşturmadığını gösterdi. Ionkin, ek özfonksiyonlar yardımıyla sınır probleminin özfonksiyonlarını tam sisteme tamamlamıştır.

Day[9] datermoelastik bir çubuğun yarı statik bükülmesi üzerine yaptığı çalışmalarda entropinin,

$$\frac{\partial u}{\partial t} = a^2 \frac{\partial^2 u}{\partial x^2} + f(x,t) \tag{2.10}$$

$$u(x,0) = \varphi(x) \tag{2.11}$$

$$u(0,t) = \int_0^1 K_0(x)u(x,t)dx + g_0(t) \tag{2.12}$$

$$u(1,t) = \int_0^1 K_1(x)u(x,t)dx + g_1(t) \tag{2.13}$$

parabolik tipli kısmı diferansiyel denklemi sağlandığını gösterdi.

Fairweather ve Saylor[10] da (2.1) – (2.4) problemi için keller box şemasını geliştirdi ve Galerkin şeması ile karşılaştırdı. Murthy[11] de Runge Kutta Chebyshew (RKC) metodunu, Gumel (1999) çizgiler metodunu (2.1) – (2.4) problemine uygulamıştır. Diferansiyel denklemler için farklı sınır koşullarının fiziksel uygulamaları [12 – 14] çalışmalarında da verilmiştir.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

3.1 Fourier Metodu

Aşağıdaki problemi inceleyelim :

$u = u(x,t)$ fonksiyonu ve $D =]0,l[\times]0,\infty[\subset R^2$ bölgesi göz önüne alınıyor.

$$\begin{cases} \dfrac{\partial u}{\partial t} = a^2 \dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}, \; 0 < x < l, \; t > 0 \text{ yani } (x,t) \in D \\ u(x,0) = \varphi(x) \\ u(0,t) = 0, u(l,t) = 0 \end{cases} \tag{3.1.1}$$

şartlarında u yu belirleyin, burada $\varphi(x)$ verilmiş fonksiyonlar olsun.

Değişkenlere ayırma yöntemi uygulayalım:

$$u(x,t) = X(x)T(t) \tag{3.1.2}$$

biçiminde çözüm arayalım.

$\dfrac{\partial^2 u}{\partial x^2}(x,t) = X^{''}(x)T(t), \; \dfrac{\partial u}{\partial t}(x,t) = X(x)T^{'}(t)$ yi (3.1.1) denklemine götürmekle ve iki yanı

$a^2 XT \neq 0$ ile bölmekle

$$\frac{1}{a^2}\frac{T^{'}}{T} = \frac{X^{''}}{X} = -\omega^2 \; (\omega^2 sabit)$$

bulunur. Çünkü sol yanın yalnızca t ye, sağ yanın yalnızca x e bağlı olduğu ve her $t > 0$ için u nun sınırlı kaldığı farz ediliyor; sabit, negatif alınıyor.

Buradan,

$$T^{'} + \omega^2 a^2 T = 0 \tag{3.1.3}$$

$$X^{''} + \omega^2 X = 0 \tag{3.1.4}$$

denklemleri elde edilir. (3.1.1) deki sınır şartları

$$X(0) = 0,\ X(1) = 0 \tag{3.1.5}$$

biçimini alır. (3.1.3) ve (3.1.4) ün çözümleri sırayla

$$T(t) = e^{-a^2\omega^2} \tag{3.1.6}$$

$$X(x) = A\cos\omega x + B\sin\omega x \tag{3.1.7}$$

tir. (2) den $x_n(x,t) = X_n(x)T_n(t)$ olduğundan

$$u(x,t) = e^{-a^2\omega^2}(A\cos\omega x + B\sin\omega x) \tag{3.1.8}$$

yazılır. İlk şartlar ve sınır şartlarından A , B ve ω sabitlerini belirleyelim. $x=0$ ver her t için $u=0$ olacağından $A=0$ çıkar. Bu değerle (3.1.8) den $x=l$ için yine $u=0$ olacağından

$$B\sin\omega l = 0$$

olmalı. u özdeş olarak sıfır B olamaz, öyleyse ;

$$\sin\omega l = 0 \Rightarrow \omega = \frac{n\pi}{l}$$

ω nın değerleri tek türlü belirlenmiş bir diziye ait olmalı. n nin her değerine B nin bir B_n değeri karşılık gelir. Böylece, elemanter çözümlerin üst üste bindirimi ile ısı denkleminin genel çözümü biçimsel olarak

$$u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}n^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.1.9}$$

tir. Serinin her elemanı sınır şartlarını gerçeklediğinden (3.1.9) da sınır şartlarını gerçekler. İlk şarttan,

$$\varphi(x)=u(x,0)=\sum_{n=1}^{\infty}B_n\sin\frac{n\pi}{l}x \tag{3.1.10}$$

olmalı. Yani B_n ler , $\varphi(x)$ in $]0,l[$ aralığı üzerinde Fourier açılımının katsayılarıdır.

$$B_n=\frac{2}{l}\int_0^l\varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi\ . \tag{3.1.11}$$

(3.1.9) daki serinin katsayıları (3.1.11) ile tanımlanan katsayılara eşit olmalıdır. Bu serinin (3.1.1) probleminin bütün şartlarını gerçeklediğini göstermek için (3.1.9) ile tanımlanan foksiyonun türetilebildiğini, $0<x<l$, $t>0$ bölgesinde (3.1.1) denklemini gerçeklediğini ve bu bölgenin sınırlarında $(t=0, x=0, x=1$ için$)$ sürekli olduğunu göstermeliyiz.

(3.1.1) denkleminin lineer olmasından, özel integrallerden oluşan bir serinin, üst üste binme ilkesine göre, bu seri yakınsak ve x e göre iki kez, t ye göre bir kez terim terime türetilebilirse yine bir çözüm olduğu çıkar. İlkin terim terime türetmeyle ortaya çıkan

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial u_n}{\partial t},\sum_{n=1}^{\infty}\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}$$

serilerinin $t\geq t^*>0$ (t sabit bir sayı) için düzgün yakınsaklığını göstereceğiz. Bu yüzden

$$\left|\frac{\partial u_n}{\partial t}\right| = \left|-B_n\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2e^{-\frac{\pi^2n^2}{l^2}a^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x\right| < \left|B_n\right|\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2e^{-\frac{\pi^2n^2}{l^2}a^2t}$$

ifadesini göz önüne alalım. Aşağıda $\varphi(x)$ fonksiyonunun gerçekleşmesi için ek şartı yazalım. Önce $\varphi(x)$ sınırlı olsun : $\left|\varphi(x) < M\right|$; böyle olunca

$$\left|\mathrm{B}_{\mathrm{n}}\right| = \frac{2}{\mathrm{l}}\left|\int_0^{\mathrm{l}}\varphi(\xi)\sin\frac{\mathrm{n}\pi}{\mathrm{l}}\xi d\xi\right| < 2\mathrm{M}$$

$t \geq t^*$ için

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 a^2n^2e^{-\frac{\pi^2n^2}{l^2}a^2t^*}$$

buna karşılık olarak $t \geq t^*$ için

$$\left|\frac{\partial^2 u}{\partial t^2}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^2 n^2e^{-\frac{\pi^2n^2}{l^2}a^2t^*}$$

çıkar. Genel olarak $t \geq t^*$ için

$$\left|\frac{\partial^{k+1} u_n}{\partial t^2 \partial x^t}\right| < 2M\left(\frac{\pi}{l}\right)^{2k+1} n^2e^{-\frac{\pi^2n^2}{l^2}a^2t^*}$$

dir. $2k+1=q$, $2M(\pi,l)^{2k+1}a^{2k} = N$ koyalım

$$\alpha_n = Nn^q e^{-\frac{\pi^2n^2}{l^2}a^2t^*} \tag{3.1.12}$$

olmak üzere $\sum\alpha_n$ majorantının yakınsaklığı d' Alembert kriterine dayanılarak çıkarılır.

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{\alpha_{n+1}}{\alpha_n}\right| = \lim_{n\to\infty}\frac{(n+1)^q}{n^q} - \frac{e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}a^2(2n+1)t^*}}{e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}a^2 n^2 t^*}}$$

$$= \lim_{n\to\infty}\left(1+\frac{1}{n}\right)^q e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}a^2(2n+1)t^*} = 0$$

olduğundan (3.1.9) serisi $t \geq t^* > 0$ için istenildiği kadar terim terime türetilebilir. Bundan başka üst üste bindirim ilkesinden, seriyle tanımlanan fonksiyonun (3.1.1) i gerçeklediği sonucu çıkar. Sonuç olarak (3.1.9) serisi $t > 0$ için istendiği kadar türetilebilir bir fonksiyon gösterir ve (3.1.1) i gerçekler.

$\varphi(x)$ fonksiyonu sürekli ise parça parça sürekli türevleri vardır ve $\varphi(0)=0, \varphi(1)=0$ ı sağlar. Böyle olunca

(3.1.9), $u(x,0) = \sum_{n=1}^{\infty} B_n e^{-\frac{a^2\pi^2}{l^2}n^2 t} \sin\frac{n\pi}{l}x$

$t \geq 0$ için sürekli bir fonksiyon tanımlar.

$t \geq 0$, $0 \leq l \leq 1$ için doğrudan doğruya (3.1.9) serisinin düzgün yakınsaklığı çıkar. Sürekli ve parça parça pürüzsüz $\varphi(x)$ fonksiyonu için Fourier katsayılarının mutlak değerlerinden oluşan seri $\varphi(0)=\varphi(l)=0$ halinde düzgün yakınsar, dolayısıyla ispat tamamlanmış olur. Böylece sürekli, parça parça pürüzsüz oluş ve ilk şartlarla homojen denklem için sınır şartı problemini çözmüş olduk.

Şimdi B_n nin (3.1.11) deki değerini (3.1.9) a götürmekle

$$u(x,t) = \sum_{n=1}^{\infty}\left[\frac{2}{l}\int_0^l \varphi(\xi)\sin\frac{n\pi}{l}\xi d\xi\right] e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}a^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x$$

$$= \int_0^l\left[\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty} e^{-\frac{\pi^2 n^2}{l^2}a^2 t}\sin\frac{n\pi}{l}x sin\frac{n\pi}{l}\xi\right]\varphi(\xi)d\xi$$

olur. $t>0$ için parantezler için ξ ye düzgün yakınsak olduğundan $t>0$ için toplamlama ile integrasyon işlemleri birbiriyle yer değiştirebilirdir. Bu ifadede

$$G(x,\xi,t)=\frac{2}{l}\sum_{n=1}^{\infty}e^{-\frac{\pi^2n^2}{l^2}a^2t}\sin\frac{n\pi}{l}x\sin\frac{n\pi}{l}\xi \tag{3.1.13}$$

yazarsak (3.1.9) u

$$u(x,t)=\int_0^l G(x,\xi,t)\varphi(\xi)d\xi \tag{3.1.14}$$

biçiminde yazarız. $G(x,\xi,t)$ fonksiyonu Green fonksiyonudur. G için şunlar görülür : $t=0$ için 0 olur; $t\geq 0$ için $G\geq 0$ dır. $x=0, l=0, x=\xi$ için 0 olur.

UYARI. (3.1.1) şartlarının üçüncüsü yerine $u(0,t)=u_0$, $u(0,l)=u_1$ alınabilir. u_0, u_1 iki sayıyı göstermektedir. Bu da (3.1.1) deki üçüncüye getirilir. Gerçekten bunun için

$$\mathrm{u}(\mathrm{x},\mathrm{t})=\mathrm{u}_0+\frac{\mathrm{u}_1-\mathrm{u}_0}{\mathrm{l}}\mathrm{x}+\mathrm{v}(\mathrm{x},\mathrm{t}) \tag{3.1.15}$$

fonksiyon değişimi yapmak yeterlidir; (3.1.15) te $x=0$ koymakla $u_0=u(0,t)=u_0+v(0,t)$ den $v(0,t)=0$; $x=1$ için de $v(l,t)=0$ bulunur.

3.2. Fiziksel Yorum.

Fizikte (3.1.1) denkleminin (değiştirilmiş yeni $u(0,t)=u_0$, $u(l,t)=u_1$ ile) bir boyutlu bir ortamın (uçları sabit sıcaklıklarda tutulan silindirik çubuk) dış yüzeyinde ısı alış verişi ihmal edildiğinde (yalnızca uçları, kendini çevreleyen ortamla ısı alış verişi yapabilen ısıca yalıtılmış çubuk), t anında x apsisli bir noktadaki sıcaklığı belirlediği ispat edilir.

Aynı biçimde G nin de açıklaması yapılabilir. c ısınma ısısı(öz ısı ya da ısı sığası) p kütle (hacim kütlesi ya da yoğunluk) ise homojen cismin V hacminin sıcaklığını Δu kadar yükseltmek için gereken ısı $\Delta Q = mc\Delta u = pcV\Delta u$ dur. G nin ise $t=0$ anında $]0,l[$ aralığındaki ξ noktasında bulunan, birdenbire ortaya çıkan $Q = pc$ şiddetindeki bir ısı kutbunun sıcaklığının etkisini gösterdiği bulunur.

3.3. Çözümün Tekliği.

Kullanılan yöntemin çözümü iyi (tek türlü) verdiği ve başka bir yöntem kullanılırsa aynı sonuca erişileceği gösterilmelidir.

Şimdi (3.1.1) şartlarını (ya da değiştirilmişini) gerçekleyen $u_1(x,t)$, $u_2(x,t)$ gibi farklı iki çözüm fonksiyonu olduğunu düşünelim. $u(x,t)=u_1(x,t)-u_2(x,t)$ koyalım, bu u, (3.1.1) in birincisini de sağlar. Birinciden,

$$u\frac{\partial}{\partial t} = a^2 u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx = a^2\int_0^1 u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx$$

yazılır. Kısmi integrasyonla ikinci yan

$$a^2\left|u\frac{\partial u}{\partial x}\right| - a^2\int_0^1 u\left(\frac{\partial u}{\partial x}\right)^2 dx$$

biçimini alır. Sınır şartlarında $a^2\left|u\frac{\partial u}{\partial x}\right| = 0$ olur ve kalan

$$\frac{1}{2}\frac{d}{dt}\int_0^1 u^2 dx = -a^2\int_0^1 u\frac{\partial^2 u}{\partial x^2}\,dx$$

tir.

İkin yan negatif olduğuna göre

$$\psi(l,t) = \int_0^1 u^2 dx$$

konursa $\frac{d\psi}{dt}(l,t) \leq 0$ olup $\psi(l,t)$ artan değil ve negatif değil. Oysa $t=0$ için $u=0$ olduğundan integralin ilk değeri sıfırdır, öyleyse özdeş olarak sıfır olur.

$$\int_0^1 u^2 dx = 0$$

eşitliğinden en son özdeş olarak $u=0$ çıkar. Öyleyse $u_1 = u_2$ dir.

3.4. Sturm – Liouville Problemleri

$$X''(x) + \lambda X(x) = 0, \quad (0 < x < L) \tag{3.4.1}$$

diferansiyel denkleminin elde edilişini biliyoruz. Fakat, verilen sınır – değer probleminin sınır koşullarına bağlı olarak (3.4.1) denklemine karşılık gelen uç nokta koşulları,

$$X(0) = X(L) = 0 \tag{3.4.2}$$

$$X'(0) = X'(L) = 0 \tag{3.4.3}$$

$$X(0) = X'(L) = 0 \tag{3.4.4}$$

olacak şekilde birbirinden farklı oldu.

Örneğin başlangıç sıcaklığı $u(x,0) = f(x)$ olan L uzunluğundaki bir çubuğun $(0 \leq x \leq L)$, $u(x,0)$ sıcaklığının bulunması problemini hatırlayalım. Bir sınır – değer problemi olarak, bu çubuk problemi xyz – uzayının $0 \leq x \leq L$ bölgesinde bulunan geniş bir levhanın sıcaklığının bulunması problemine benzerdir. Eğer levhanın başlangıç sıcaklığı yalnız x değişkenine bağlı olup y ve z değişkenlerinden bağımsız ise yani $u(x,0)=f(x)$ ise bu durumda levhanın t anındaki $u=u(x,t)$ sıcaklığı da x değişkenine bağlı olup y ve z den bağımsız olacaktır.

$$\frac{\partial u}{\partial t}=k\frac{\partial^2 u}{\partial x^2},$$

ısı denkleminde

$$u(x,t)=X(x)T(t)$$

alırsak $X(x)$ fonksiyonu için uç nokta koşulları şöyle olacaktır: Eğer levhanın $x=0$ ve $x=L$ yüzleri sıfır sıcaklığında bırakılmış ise $X(x)$ fonksiyonu (3.4.2) uç nokta koşullarını, eğer levha her iki yüzünden yalıtılmış ise $X(x)$ fonksiyonu (3.4.3) uç nokta koşullarını, eğer levhanın bir yüzü yalıtılmış ve diğer yüzü sıfır sıcaklığında bırakılmış ise $X(x)$ fonksiyonu (3.4.4) uç nokta koşullarını sağlayacaktır. Fakat, her iki yüzden sıcaklığı sıfır olan çevre ortamına Newton'un soğuma kuralına uyum sağlayacak şekilde ısı kaçırılıyor ise uç nokta koşulları

$$hX(0)-X'(0)=0=hX(L)+X'(L) \tag{3.4.5}$$

biçiminde olacaktır. Burada h negatif olmayan ısı iletim katsayısıdır.

Esas olan (3.4.1) denkleminin çözümleri üzerine farklı uç nokta koşullarını koyduğumuzda birbirinden farklı özdeğer problemi elde etmiş olmamız ve bu sebepten sınır–değer probleminin,

$$u(x,t)=\sum c_n X_n(x)T_n(t) \tag{3.4.6}$$

biçimsel seri çözümünün oluşumunda kullanılan farklı $\{\lambda_n\}$ özdeğerlerine ve farklı $\{X_n(x)\}$ özfonksiyonlarına sahip olmamızdır. Bu çözüm oluşumunun son adımı (3.4.6) serisindeki $\{c_n\}$ katsayılarının,

$$u(x,0) = \sum c_n T_n(0) X_n(x) = f(x) \tag{3.4.7}$$

eşitliğini sağlayacak şekilde seçilmesidir. Böylece, son olarak bize verilen $f(x)$ fonksiyonunun, ilgili özdeğer probleminin özfonksiyonları cinsinden seriye açılımı veya kısaca özfonksiyon açılımı denir.

Değişkenlere ayırma yöntemini bütünleştirmek ve genelleştirmek amacıyla, daha önce ifade ettiğimiz özdeğer problemlerini de özel hal olarak bulunduran, özdeğer probleminin genel şeklini oluşturmakta fayda vardır. (3.4.1) denkleminde X bağımlı değişkeni yerine y değişkenini kullanırsak, $p(x) = r(x) = 1$ ve

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy}{dx}\right] - q(x)y + \lambda r(x)y = 0 \tag{3.4.8}$$

biçiminde yazabiliriz. Gerçekten,

$$A(x)y'' + B(x)y' + C(x)y + \lambda D(x)y = 0$$

şeklinde ikinci mertebeden her lineer diferansiyel denklemi uygun bir fonksiyonla çarparak (3.4.8) biçimine getirebiliriz.

ÖRNEK 1

n. mertebeli,

$$x^2 y'' + xy' + (\lambda x^2 - n^2) y = 0 , \quad (x > 0)$$

parametrik Bessel denklemini $\frac{1}{x}$ ile çarparsak sonucu,

$$\frac{d}{dx}\left[x \frac{dy}{dx} \right] - \frac{n^2}{x} y + \lambda xy = 0 ,$$

şeklinde yazabiliriz. Bu da (3.4.8) denkleminin $p(x) = r(x) = x$ ve $q(x) = \frac{n^2}{x}$ durumundaki yazılımıdır.

Şimdi (3.4.8) denkleminin bir sınırlı (a,b) aralığındaki çözümleri üzerine,

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0 , \qquad \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) = 0 \tag{3.4.9}$$

homojen ve lineer sınır koşullarını koyalım. Burada $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ve β_2 katsayıları sabitlerdir. (3.4.9) sınır koşulları homojen olmaları yanı sıra hem de ayrılabilir sınır koşullarıdır. Şöyle ki bu koşullardan birincisi $y(x)$ ve $y'(x)$ in x = a noktasındaki değerlerini, ikincisi de aynı fonksiyonların $x = b$ noktasındaki değerlerini içermektedir. Örneğin, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ ve $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ olması durumunda (3.4.9) koşulları $y(a) = y'(b) = 0$ şeklini alır.

Tanım 3.4.1.

$$\frac{d}{dx}\left[p(x) \frac{dy}{dx} \right] - q(x) y + \lambda r(x) y = 0 , \qquad (a < x < b) \tag{3.4.8}$$

$$\alpha_1 y(a) - \alpha_2 y'(a) = 0 , \qquad \beta_1 y(b) - \beta_2 y'(b) = 0 \tag{3.4.9}$$

şeklindeki sınır – değer problemine Sturm – Louiville Problemi denir. Burada hem α_1 ve α_2 sayılarından en az biri, hem de β_1 ve β_2 sayılarından en az biri sıfırdan farklıdır. (3.4.8) denklemindeki λ parametresinin alabileceği sabit değerlere özdeğerler denir.

Sturm – Liouville problemleri 1830'lu yıllarda Fransız matematikçi Charles Sturm (1803–1855) ve Joseph Liouville (1809–1882) tarafından araştırılmıştır ve bu nedenle adı geçen matematikçilerin isimlerini taşımaktadır.

ÖRNEK 2

$y^{''} + \lambda y = (0 < x < L)$ diferansiyel denklemini sırasıyla

- $y(0) = y(L) = 0 \qquad (\alpha_1 = \beta_1 = 1 \text{ve} \alpha_2 = \beta_2 = 0 \text{ durumu})$
- $y^{'}(0) = y^{'}(L) = 0 \qquad (\alpha_1 = \beta_1 = 1 \text{ve} \alpha_2 = \beta_2 = 0 \text{ durumu})$
- $y(0) = y^{'}(L) = 0 \qquad (\alpha_1 = \beta_1 = 1 \text{ve} \alpha_2 = \beta_2 = 0 \text{ durumu})$

homojen sınır koşullarından biri ile alırsak birbirinden farklı üç Sturm – Liouville problemini elde ederiz.

(3.4.8) – (3.4.9) Sturm – Liouville probleminin her zaman $y(x) = 0$ aşikar çözümüne sahip olduğu açıktır. Biz, λ parametresinin özdeğerler adını alan ve bu değerler için (3.4.8) – (3.4.9) probleminin sıfır olmayan reel değerli bir çözümü (bir özfonksiyonu) mevcut olacak şekildeki değerlerini arayacağız. Bu durumda her bir özfonksiyonun bir katının (sıfırdan farklı) yine bir özfonksiyon olacağını belirtelim. Aşağıda (3.4.8) – (3.4.9) probleminin her λ_n özdeğerine yalnız bir (sabit katlar hariç) $y_n(x)$ özfonksiyonu karşılık gelmek üzere, negatif olmayan $\{\lambda_n\}_{n=1}^{\infty}$ sonsuz özdeğerleri dizisinin mevcut olması için yeter koşulları ifade edilmiştir.

(3.4.8) denklemindeki $p(x)$, $p'(x)$, $q(x)$ ve $r(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında sürekli ve $[a,b]$ aralığının her noktasında $p(x) > 0$, ve $r(x) > 0$ olsun. Bu durumda (3.4.8) – (3.4.9) Sturm – Liouville probleminin özdeğerleri artan,

$$\lambda_1 < \lambda_2 < \lambda_3 < \ldots < \lambda_{n-1} < \lambda_n < \ldots \qquad (3.4.10)$$

reel sayı dizisini oluşturmaktadır ve

$$\lim_{n\to\infty} \lambda_n = +\infty \tag{3.4.11}$$

dur. Her λ_n özdeğerine, sabit katlar hariç, yalnız bir $y_n(x)$ özfonksiyonu karşılık gelir. Ayrıca, her $x \in [a,b]$ için $q(x) \geq 0$ ve (3.4.9) koşullarındaki $\alpha_1, \alpha_2, \beta_1$ ve β_2 katsayıları negatif değilse tüm özdeğerler de negatif değildir.

$$y'' + \lambda y = 0 \ (0 < x < L),$$
$$y(0) = 0, \ y(L) = 0 \tag{3.4.12}$$

Sturm – Liouville probleminin özdeğerlerinin $\lambda_n = n^2\pi^2 / L^2$ ve bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlarının $y_n(x) = \sin\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$, $(n = 1, 2, 3, \ldots)$ olduğunu biliyoruz.

Biz bu problemi çözerken $\lambda = -\alpha < 0$, $\lambda = 0$ ve $\lambda = \alpha^2 > 0$ durumlarını ayrı ayrı incelemek zorunda kaldık. Burada $p(x) = r(x) = 1$, $q(x) = 0$, $\alpha_1 = \beta_1 = 1$ ve $\alpha_2 = \beta_2 = 0$ olduğundan (3.4.12) problemi yalnız negatif olmayan özdeğere sahiptir. Buna göre, biz (3.4.12) problemini yeniden çözmeye başlasaydık $\lambda = 0$ ve $\lambda = \alpha^2 > 0$ durumlarını incelemek yeterli olacaktı. Özdeğerleri,

$$\lambda_0 = 0, \ \lambda_n = n^2\pi^2 / L^2, \qquad (n = 1, 2, 3, \ldots)$$

ve ilgili özfonksiyonları,

$$y_0(x) = 1, \ y_n(x) = \cos\left(\frac{n\pi x}{L}\right)$$

olan,

$y'' + \lambda y = 0, (0 < x < L)$;

$y'(0) = 0,\ y'(L) = 0$ (3.4.13)

Sturm – Liouville problemini biliyoruz. Bir kural olarak, sıfır sayısı Sturm – Liouville probleminin özdeğerleri olduğunda bunu $\lambda_n = 0$, aksi takdirde en küçük özdeğeri λ_1 olarak yazacağız. Böylece, λ_1 her zaman en küçük özdeğeri gösterecektir.

3.5. Özdeğer Ve Özfonksiyon

$y'' + \lambda y = 0, \quad (0 < x < L)$;

$y'(0) = 0,\ y(L) = 0$ (3.5.1)

Sturm – Liouville probleminin özdeğerlerini ve ilgili özfonksiyonlarını bulalım.

Çözüm

Bu Sturm – Liouville problemi için $\alpha_1 = \beta_2 = 0$ ve $\alpha_2 = \beta_1 = 1$ olsun. Buna göre problemin özdeğerleri yoktur. Eğer $\lambda = 0$ ise $y(x) = Ax + B$, $y'(0) = A = 0$ ve $y(L) = B = 0$ olur. Böylece, $y(x) = 0$ dır. Dolayısıyla $\lambda = 0$ özdeğer değildir. Eğer, $\lambda = \alpha^2 > 0$ ise

$$y(x) = A\cos\alpha x + B\sin\alpha x$$

ve

$$y'(x) = -A\sin\alpha x + B\cos\alpha x$$

olur. Böylece, $y^{'}(0)=0$ koşulundan $B=0$ bulunur. Buna göre $y(L)=\cos\alpha L=0$ dır. Buradan $\alpha L=(2n-1)\pi/2$ Böylece, ele alınan problemin özdeğerleri ve ilgili fonksiyonları $n=1,2,3,\ldots$ olmak üzere,

$$\lambda_n=\alpha_n^2=\frac{(2n-1)^2}{4L^2} \text{ ve } y_n=\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}$$

şeklindedir.

Şimdi dik (ortogonal) özfonksiyonlara değinelim:

Fourier serisinin katsayıları için bilinen formüller sinüs ve kosinüs fonksiyonlarının dik özelliğinden elde edilir. Aynı şekilde, verilen bir fonksiyonun, Sturm – Liouville probleminin özfonksiyonları cinsinden seriye açılımı, kesinlikle bu özfonksiyonların diklik özelliğine bağlıdır. Eğer,

$$\int_a^b \phi(x)\psi(x)r(x)dx=0 \tag{3.5.2}$$

ise $\varphi(x)$ ve $\psi(x)$ fonksiyonları $[a,b]$ aralığında $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre diktir (ortogonaldir) denir. Aşağıdaki teorem gösterir ki her regülerSturm – Liouville probleminin birbirinden farklı iki özdeğerine karşılık gelen keyfi iki özfonksiyonu (3.4.8) denklemindeki $r(x)$ ağırlık fonksiyonuna göre diktirler.

(3.4.8) – (3.4.9) Sturm – Liouville problemindeki p,q ve r fonksiyonlarının daha önceki şartları sağlamış olduklarını varsayalım. y_i ve y_j farklı λ_i ve λ_j $(\lambda_i\neq\lambda_j)$ özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. O zaman,

$$\int_a^b y_i(x)y_j(x)r(x)dx=0 \tag{3.5.3}$$

olur.

İspat :(3.4.8) – (3.4.9) probleminin λ_i ve λ_j özdeğerlerinin ilgili özfonksiyonları $y_i(x)$ ve $y_j(x)$ sırası ile

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i}{dx}\right]-q(x)y_i+\lambda_i r(x)y_i=0$$

$$\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j}{dx}\right]-q(x)y_j+\lambda_j r(x)y_j=0 \tag{3.5.4}$$

denklemlerini sağlayacaktır. Eğer birinci denklemi $y_j(x)$ ile , ikinci denklemi de $y_i(x)$ ile çarparsak ve daha sonra elde edilecek eşitlikleri birbirinden çıkartırsak,

$$y_j\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i}{dx}\right]-y_i\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j}{dx}\right]+(\lambda_i-\lambda_j)r(x)y_iy_j=0$$

buluruz. Böylece ,

$$(\lambda_i-\lambda_j)r(x)y_iy_j=y_i\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_j}{dx}\right]-y_j\frac{d}{dx}\left[p(x)\frac{dy_i}{dx}\right]$$

$$=\frac{d}{dx}\left[p(x)\left(y_i\frac{dy_j}{dx}-y_j\frac{dy_i}{dx}\right)\right]$$

elde edilir. Son iki eşitlik basit türev alma kurallarından kolayca görülür.

Bu eşitliğin her iki tarafının a dan b ye kadar integralini alırsak,

$$(\lambda_i-\lambda_j)\int_a^b y_i(x)y_j(x)r(x)dx=[p(x)(y_i(x)y_j^{'}(x)-y_j(x)y_i^{'}(x))]_a^b \tag{3.5.5}$$

elde ederiz. Diğer taraftan (3.4.9) sınır koşullarının birincisine göre

$$\alpha_1 y_i(a) - \alpha_2 y_i^{'}(a) = 0 \text{ ve } \alpha_1 y_j(a) - \alpha_2 y_j^{'}(a) = 0$$

dır. Bu eşitlikleri α_1 ve α_2 bilinmeyenlerine göre lineer denklem sistemi olarak düşünelim. α_1 ve α_2 nin aynı anda sıfır olamayacaklarını hatırlarsak bu denklem sisteminin sıfırdan farklı çözümünün mevcut olduğunu söyleyebiliriz. Bu da α_1 ve α_2 katsayılarından oluşan determinantın sıfıra eşit olmasını gerektirir. Yani,

$$y_i(a)y_j^{'}(a) - y_j(a)y_i^{'}(a) = 0$$

olur.

Benzer şekilde , (3.4.9) koşullarının ikincisi,

$$y_i(b)y_j^{'}(b) - y_j(b)y_i^{'}(b) = 0$$

olmasını gerektirir. Bunları (3.5.5) eşitliğinin sağ tarafında dikkate alırsak,

$$\left[p(x)\left(y_i(x)y_j^{'}(x) - y_j(x)y_i^{'}(x) \right) \right]_a^b = 0$$

elde ederiz. $\lambda_i \neq \lambda_j$ olduğundan (3.5.3) sağlanır. Böylece ispat tamamlanmış oldu.

Özfonksiyonların açılımlarından bahsedelim:

Şimdi , $y_1, y_2, y_3, \ldots$ fonksiyonları (3.4.8) – (3.4.9) Sturm – Liouville probleminin özfonksiyonları olmak üzere , $f(x)$ fonksiyonun $[a,b]$ aralığında,

$$f(x) = \sum_{m=1}^{\infty} c_m y_m(x) \tag{3.5.6}$$

özfonksiyon serisi biçiminde gösterilebildiğini varsayalım. $c_1, c_2, c_3, \ldots$ katsayılarını belirlemek için (3.5.6) eşitliğinin her iki tarafını $y_n(x)r(x)$ ile çarpalım. Daha sonra elde edilen eşitliğin a dan b ye integralini alalım. O halde, (3.5.6) un sağ tarafındaki serinin terim terim integrallenebilir olması durumunda,

$$\int_a^b f(x)\,y_n(x)\,r(x)\,dx = \sum_{m=1}^{\infty} c_m \int_a^b y_m(x)\,y_n(x)\,r(x)\,dx \qquad (3.5.7)$$

eşitliğini elde ederiz. Özfonksiyonların (3.5.7) diklik özelliğinden yararlanırsak (3.5.7) nin sağ tarafındaki serinin $m = n$ olan terimi hariç diğer tüm terimlerinin sıfır olduğunu görürüz. Bu nedenle (3.5.7) eşitliği,

$$\int_a^b f(x)y_n(x)r(x)dx = c_n \int_a^b \left[y_n(x)\right]^2 r(x)dx$$

şeklini alır. Buradan da,

$$c_n = \frac{\int_a^b f(x)\,y_n(x)\,r(x)\,dx}{\int_a^b \left[y_n(x)\right]^2 r(x)dx} \qquad (3.5.8)$$

elde edilir.

Böylece $f(x)$ fonksiyonu verilen Sturm – Liouville probleminin özfonksiyonları cinsinden ifade eden $c_1, c_2, c_3, \ldots$ katsayıları (3.5.8) formülü ile belirlenen (3.5.6) özfonksiyon serisini tanımlamış oluruz.

Örneğin, daha önce incelediğimiz,

$$y'' + \lambda y = 0 \ (0 < x < L)$$

$$y(0) = 0, \qquad y(\pi) = 0 \tag{3.5.9}$$

Sturm – Liouville problemini göz önüne alalım. Bu problem için $r(x) = 1$ ve özfonksiyonlar $y_n(x) = \sin nx \ (n = 1, 2, 3, \ldots)$ tir. Bu durumda (3.5.8) formülünden ,

$$c_n = \frac{\int_0^\pi f(x) \sin nx dx}{\int_0^\pi \sin^2 nx dx}$$

bulunur.

$$\int_0^\pi \sin^2 x dx = \frac{\pi}{2}$$

olduğundan,

$$c_n = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi f(x) \sin nx dx$$

elde edilir. Bu son ifade iyi bilinen Fourier – Sinüs katsayıları formülüdür ve buna göre (3.5.6) özfonksiyon serisi $f(x)$ fonksiyonunun $[0, \pi]$ aralığı üzerindeki bilinen,

$$f(x) = \sum_{n=1}^\infty c_n \sin nx$$

Fourier – Sinüs serisidir.

Teorem 3.5.1. (Özfonksiyon Serisinin Yakınsaklığı) : $y_1, y_2, y_3, \ldots$ $[a,b]$ aralığında Sturm – Liouville probleminin özfonksiyonları olsun. Eğer $f(x)$, $[a,b]$ aralığında parçalı düzgün bir fonksiyon ise $a<x<b$ için (3.5.6) özfonksiyon serisi f nin sürekli olduğu x noktalarında $f(x)$ değerine, f nin süreksiz olduğu x noktalarında ise bu süreksizlik noktasındaki sol ve sağ limitlerin,

$$\frac{1}{2}\left[f(x)+f(-x)\right]$$

ortalama değerine yakınsaktır.

Gösterildi ki (bk. 3.5.1)

$$y'' + \lambda y = 0 \quad (0<x<L)$$

$$y'(0)=0, \qquad y(L)=0$$

Sturm – Liouville probleminin özfonksiyonları,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} c_n \cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L} \tag{3.5.10}$$

olarak bulunmuştu.

Buna göre $f(x)$ fonksiyonunun bu özfonksiyonlara göre açılımı (özfonksiyon serisi)

$$c_n = \frac{\int_0^L f(x)\cos([2n-1]\pi x/2L)dx}{\int_0^L \cos^2([2n-1]\pi x/2L)dx}$$

$$=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\cos\frac{(2n-1)\pi x}{2L}dx, \tag{3.5.11}$$

şeklindedir. Çünkü,

$$\int_0^L \cos^2\frac{(2n-1)\pi x}{2L}dx=\frac{L}{2}$$

dir.

Böylece, (3.5.10) serisi tek indisli kosinüs serisidir. Benzer şekilde,

$$y''+\lambda y=0\,,\qquad y'(0)=y(L)=0$$

Sturm – Liouville problemi,

$$f(x)=\sum_{n=1}^{\infty}c_n\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L},c_n=\frac{2}{L}\int_0^L f(x)\sin\frac{(2n-1)\pi x}{2L}dx \tag{3.5.12}$$

tekindisli sinüs serisini verir.

ÖRNEK 3

$0<x<1$ aralığında tanımlı $f(x)=A$ sabit fonksiyonunu

$$y''+\lambda y=0\ (0<x<1);$$

$$y=0,\ y(1)+2y'(1)=0 \tag{3.5.13}$$

Sturm – Liouville probleminin özfonksiyonlarına göre seriye açınız.

Çözüm

(3.5.13) ile (3.5.2) yi karşılaştırarak (3.5.13) probleminin,

$$y'' + \lambda y = 0 \ (0 < x < 1);$$

$$y = 0,\ hy(L) + y'(L) = 0 \ (h > 0)$$

Sturm – Liouville probleminin $L = 1$ ve $h = \frac{1}{2}$ özel durumuna karşılık geldiğini görürüz. Buna göre (3.5.4) ve (3.5.5) den (3.5.13) probleminin özfonksiyonları $y_n(x) = \sin\beta_n x$ olarak bulunur. Burada $\beta_1, \beta_2, \beta_3, \ldots$ $\tan x = -2x$ denkleminin pozitif kökleridir. Böylece, bulunması istenilen serinin katsayıları,

$$c_n = \frac{\int_0^1 A sin\beta_n x dx}{\int_0^1 \sin^2 \beta_n x dx} \qquad (3.5.14)$$

şeklindedir.

$$\int_0^1 A\sin\beta_n x dx = A(1-\cos\beta_n)/\beta_n$$

ve

$$\int_0^1 \sin^2\beta_n x dx = \int_0^1 \frac{1}{2}(1-\cos 2\beta_n x)dx = \frac{1}{2}\left[x - \frac{1}{2\beta_n}\sin 2\beta_n x\right]_0^1 = \frac{1}{2}\left(1 - \frac{\sin\beta_n \cos\beta_n}{\beta_n}\right),$$

dolayısıyla (3.5.13) ye göre $\frac{(\sin\beta_n)}{\beta_n} = -2\cos\beta_n$ olduğundan

$$\int_0^1 \sin^2 \beta_n x dx = \frac{1}{2}(1+2\cos^2 \beta_n)$$

elde edilir.

Bu değerleri (3.5.12) de yerine yazarak,

$$f(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{2A(1-\cos\beta_n)}{\beta_n(1+2\cos^2\beta_n)} \sin\beta_n x \qquad (3.5.15)$$

özfonksiyon serisini elde ederiz.

Özet

Bu kesimdeki teoremlere göre Sturm – Liouville problemi şu üç özelliğe sahiptir:

- Regüler Sturm – Liouville problemi sonsuz ıraksayan özdeğerler dizisine sahiptir.
- Regüler Sturm – Liouville probleminin özfonksiyonları uygun ağırlık fonksiyonuna göre diktir.
- Her parçalı düzgün fonksiyon regüler Sturm – Liouville probleminin özfonksiyonlarına göre seriye açılır.

3.6. Sturm– Liouville Probleminde Sınır Koşullarının Regülerliği

İkinci dereceden diferansiyel denklemin sınır koşulları genel olarak,

$$a_1 y_0' + b_1 y_1' + a_0 y_0 + b_0 y_1 = 0$$

$$c_1 y_0' + d_1 y_1' + c_0 y_0 + d_0 y_1 = 0$$

şeklindedir. Bu sınır koşullarının regülerliği inceleyelim.

i) $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ olsun bu durumda y_0' ve y_1' çözülürse sınır koşulları

$$y_0' + \alpha_{11} y_0 + \alpha_{11} y_1 = 0$$

$$y_1' + \alpha_{21} y_0 + \alpha_{22} y_1 = 0$$

halini alır. O halde,

$$\frac{\theta_1}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} \omega_1 & \omega_2 \\ s\omega_1 & \frac{1}{s}\omega_2 \end{vmatrix} = \frac{1}{s} - s$$

elde edilir. Dolayısıyla $\theta_0 = 0$ ve $\theta_1 = -1$ ve $\theta_{-1} = 1$ olur. Buradan sınır koşulları regülerdir. Hatta $\theta_0^2 - 4\theta_1\theta_{-1} \neq 0$ olduğundan kuvvetli regüler olur.

ii) $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ ve $|a_1| + |b_1| > 0$ olsun bu durumda sınır koşulları,

$$a_1 y_0' + b_1 y_1' + a_0 y_0 + b_0 y_1 = 0$$

$$c_0 y_0 + d_0 y_1 = 0$$

şeklinde yazılabilir. O halde,

$$\frac{\theta_1}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} (a_1 + sb_1)\omega_1 & -(a_1 + \frac{1}{s} b_1)\omega_2 \\ c_0 + sd_0 & c_0 + \frac{1}{s} d_0 \end{vmatrix}$$

$$= \omega_1 \left(b_1 c_0 + a_1 d_0 \right) \left(s + \frac{1}{s} \right) + 2\omega_1 \left(a_1 c_0 + b_1 d_0 \right)$$

Olduğundan $b_1 c_0 + a_1 d_0 \neq 0$ olduğunda sınır koşulları regülerdir.

iii) $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$ Bu durumda $a_0 d_0 - b_0 c_0 \neq 0$ olması gerekir. $y_0 = 0$ ve $y_0 = 0$ olur. Bu durumda,

$$\frac{\theta_{-1}}{s} + \theta_0 + \theta_1 s = \begin{vmatrix} 1 & 1 \\ s & \frac{1}{s} \end{vmatrix} = \frac{1}{s} - s$$

olduğundan dolayı sınır koşulları regüler olur.

Sonuç olarak

a) $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$

b) $a_1 d_1 - b_1 c_1 \neq 0$ ve $|a_1| + |b_1| > 0$ olduğunda $b_1 c_0 + a_1 d_0 \neq 0$

c) $a_1 = b_1 = c_1 = d_1 = 0$ ise $a_0 d_0 - b_0 c_0 \neq 0$

olduğunda sınır koşulları regüler olur.

Not edelim ki özdeğerlerin asimtotik ifadelerindeki esas terimlerin biçiminin belirlenmesinde verilen sınır koşulları için tanımlanan n tek olduğunda θ_0, θ_1 sayılarının n çift olduğunda ise $\theta_0, \theta_1, \theta_{-1}$ sayılarını büyük önemi vardır.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

4.1. Isı Denklemi İçin Lokal Olmayan Sınır Koşulu

$$u_t = u_{xx} + F(x,t) \tag{4.1.1}$$

ısı iletim denklemi için,

$$u_x(0,t) - u(0,t) = \vartheta(t), 0 \le t \le T, \tag{4.1.2}$$

$$\int_0^1 xu(x,t)dx = \mu(t), \quad 0 \le t \le T, \tag{4.1.3}$$

sınır koşullarını ve

$$u(x,0) = u_0(x), 0 \le x \le 1 \tag{4.1.4}$$

başlangıç değer koşullarını göz önüne alalım.

Önce sınır koşullarını homojen hale getirelim.

$$u(x,t) = v(x,t) + A(t)x + B(t) \tag{4.1.5}$$

değişken dönüşümünde $A(t)$ ve $B(t)$ fonksiyonlarını bulalım.

(4.1.2) sınır koşulu kullanılırsa,

$$u_x(0,t) = v_x(0,t) + A(t), u(0,t) = v(0,t) + B(t)$$

$$u_x(0,t) - u(0,t) = v_x(0,t) - v(0,t) + A(t) - B(t) = \vartheta(t)$$

elde edilir. Buradan $v_x(0,t) - v(0,t) = 0$ olması istendiğinden,

$$A(t)-B(t)=\vartheta(t) \tag{4.1.6}$$

bulunur.

(4.1.3) sınır koşulu kullanılırsa,

$$\mu(t)=\int_0^1 xu(x,t)\,dx=\int_0^1 xv(x,t)\,dx+\int_0^1 A(t)x^2dx+\int_0^1 B(t)x\,dx$$

Buradan $\int_0^1 xv(x,t)\,dx=0$ olması istendiğinden

$$\mu(t)=\int_0^1 A(t)x^2dx+\int_0^1 B(t)x\,dx$$

$$\mu(t)=\frac{A(t)}{3}+\frac{B(t)}{2} \tag{4.1.7}$$

(4.1.6) ve (4.1.7) denklemleri birlikte çözülürse,

$$A(t)=\frac{6\mu(t)+3\vartheta(t)}{7}$$

$$B(t)=\frac{6\mu(t)-2\vartheta(t)}{5}$$

olarak bulunur. Dolayısıyla,

$$u(x,t)=v(x,t)+\frac{6\mu(t)+3\vartheta(t)}{7}x+\frac{6\mu(t)-2\vartheta(t)}{5}$$

değişken dönüşümü altında (4.1.1) – (4.1.4) denklemi,

$$v_t = v_{xx} + f(x,t) \tag{4.1.8}$$

$$v_x(0,t) - v(0,t) = 0 \tag{4.1.9}$$

$$\int_0^1 xv(x,t)dx = 0 \tag{4.1.10}$$

$$v(x,0) = \varphi(x) \tag{4.1.11}$$

halini alır. Burada,

$$f(x,t) = F(x,t) - \frac{6\mu'(t) + 3\vartheta'(t)}{7}x - \frac{6\mu'(t) - 2\vartheta'(t)}{5}$$

$$\varphi(x) = u_0(x) - \frac{6\mu(0) + 3\vartheta(0)}{7}x - \frac{6\mu(0) - 2\vartheta(0)}{5}$$

(4.1.8 –4.1.11) problemi lineer olduğundan bu problemin çözümünü aşağıdaki iki problemin çözümü şeklinde yazabiliriz.

Problem 1

$$v_t = v_{xx} \tag{4.1.12}$$

$$v(x,0) = \varphi(x) \tag{4.1.13}$$

$$v_x(0,t) - v(0,t) = 0 \tag{4.1.14}$$

$$\int_0^1 xv(x,t)dx = 0 \tag{4.1.15}$$

ve

Problem 2

$$v_t = v_{xx} + f(x,t) \tag{4.1.16}$$

$$v(x,0) = 0 \tag{4.1.17}$$

$$v_x(0,t) - v(0,t) = 0 \tag{4.1.18}$$

$$\int_0^1 xv(x,t)\,dx = 0 \tag{4.1.19}$$

4.2. Problem 1 Ve Problem 2 nin Çözümü

Şayet 1. problemin çözümü $v_1(x,t)$, 2. problemin çözümü $v_2(x,t)$ ise (4.1.8 – 4.1.11) probleminin çözümü,

$$v(x,t) = v_1(x,t) + v_2(x,t)$$

1. problemin çözümünü bulalım. Öncelikle lokal olmayan (4.1.15) sınır şartını noktasal biçimde yazalım. (4.1.12) eşitliğinin her iki tarafı x ile çarpılıp 0 dan 1 e integral alınırsa,

$$\int_0^1 xv_t\,dx = \int_0^1 xv_{xx}\,dx$$

$$0 = \frac{d}{dt}\left(\int_0^1 xv(x,t)\,dx\right) = xv_x\Big|_0^1 - \int_0^1 v_x\,dx$$

$$xv_x\Big|_0^1 - v\Big|_0^1 = 0$$

$$v_x(1,t) - v(1,t) + v(0,t) = 0$$

elde edilir. Buradan (4.1.12) – (4.1.15) denklemi

$$v_t = v_{xx} \tag{4.2.1}$$

$$v(x,0) = \varphi(x) \tag{4.2.2}$$

$$v_x(0,t) - v(0,t) = 0 \tag{4.2.3}$$

$$v_x(1,t) - v(1,t) + v(0,t) = 0 \tag{4.2.4}$$

(4.2.1 – 4.2.4) probleminde Fourier yöntemini uygulayalım.

$$V(x,t) = X(x)T(t)$$

şeklinde çözüm aranırsa,

$$X'' + \lambda x = 0 \tag{4.2.5}$$

$$X' - X(0) = 0 \tag{4.2.6}$$

$$X' - X(1) + X(0) = 0 \tag{4.2.7}$$

ve

$$T' + \lambda T(t) = 0 \tag{4.2.8}$$

denklemleri elde edilir.

(4.2.5) – (4.2.7) sınır değer probleminin eşlenik olup olmadığını ve sınır koşullarının regülerliğini inceleyelim.

4.3. Eşlenik Problem

$$\int_0^1 X'' \bar{Y}\, dx = X' \bar{Y} \Big|_0^1 - X \bar{Y}' \Big|_0^1 + \int X \bar{Y}''\, dx$$

$$=X^{'}(1)\overline{Y}(1)-X^{'}(0)\overline{Y}(0)-X(1)\overline{Y}^{'}(1)+X(0)\overline{Y}^{'}(0)+\int X\overline{Y}^{''}dx$$

(4.2.7) den,

$$X^{'}(1)=x(1)-x(0)\,\text{ve}\,X^{'}(0)=x(0)$$

olduğundan,

$$=X(1)\overline{Y}(1)-X(0)\overline{Y}(1)-X(0)\overline{Y}(0)-X(1)\overline{Y}^{'}(1)+X(0)\overline{Y}^{'}(0)$$

$$=X(1)\left[\overline{Y}(1)-\overline{Y}^{'}(1)\right]+X(0)\left[-\overline{Y}(1)-\overline{Y}(0)+\overline{Y}^{'}(0)+\int X\overline{Y}^{''}dx\right]$$

Böylece eşlenik problem,

$$Y^{''}+\lambda x=0 \tag{4.3.1}$$

$$Y^{'}(1)-Y(1)=0 \tag{4.3.2}$$

$$Y^{'}(0)-Y(1)-Y(0)=0 \tag{4.3.3}$$

elde edilir. Buradan problem özeşlenik değildir.

Genel olarak,

$$a_1y_0^{'}+b_1y_1^{'}+a_0y_0+b_0y_1=0$$

$$c_1y_0^{'}+d_1y_1^{'}+c_0y_0+d_0y_1=0$$

sınır koşullarını göz önüne alırsak (4.2.5 – 4.2.7) probleminde

$a_1 = 1, a_0 = 0$

$b_1 = b_0 = 0$

$d_1 = 1, d_0 = 0$

$c_0 = 1$

$a_1 d_1 - b_1 c_1 = 1.1 - 0 \neq 0$

olduğunda sınır koşulları regüler hatta kuvvetli regülerdir.

4.4. Özdeğerlerin Bulunuşu

(4.2.5 – 4.2.7) probleminde

a) $\lambda = 0$ olsun. Bu durumda $X(x) = Ax + B$ sınır koşulları sağlatılırsa

$$X'(0) - X(0) = 0 \Rightarrow A - B = 0 \Rightarrow A = B$$

$$X'(1) - X(1) + X(0) = 0 \Rightarrow A - A - B + B = 0 \Rightarrow 0 = 0$$

O zaman $X(x) = A(x+1)$ bir çözümdür.

$A = 1$ alınırsa $X(x) = x + 1$, $\lambda = 0$'a karşılık gelen özfonksiyon olur.

b) $\lambda < 0$ iken çözüm yoktur.
c) $\lambda > 0$ olsun.

Bu durumda genel çözüm,

$$X(x) = A\cos\sqrt{\lambda}x + B\sin\sqrt{\lambda}x$$

sınır koşullarını sağlatalım.

$X'(x) = A\sqrt{\lambda}\sin\sin\left(\sqrt{\lambda}x\right) + B\sqrt{\lambda}\cos\cos\left(\sqrt{\lambda}x\right)$

$X'(0) - X(0) = 0 \Rightarrow Bk - A = 0 \Rightarrow A = Bk$

$X'(1) - X(1) + X(0) = 0 \Rightarrow A - A k\sin k + Bk\cos k - A\cos k - B\sin k = 0$

Buradan $A = Bk$ olduğundan,

$Bk - Bk^2\sin k - B\sin k = 0$

$\Rightarrow k - k^2\sin k - \sin k = 0$

$\Rightarrow k = k^2\sin k + \sin k$

$$\Rightarrow k = \sin k(k^2 + 1) \qquad (4.4.1)$$

$y = k$ ve $y = \sin k(k^2 + 1)$ fonksiyonlarının kesim noktaları incelendiğinde köklerin aşağıdaki gibi yerleştiği görülür:

$0 < k_1 < \pi$,

$2\pi < k_2 < k_3 < 3\pi$,

$4\pi < k_4 < k_5 < 5\pi$,

$6\pi < k_6 < k_7 < 7\pi$.

Yani kökler,

$k_{2n} = 2n\pi + \varepsilon_n \quad n = 1, 2, \ldots$

$k_{2n+1} = (2n + 1)\pi - \varepsilon_n \quad n = 0, 1, 2, \ldots$

Bu köklerin asimptotik formunu bulalım. (4.4.1) eşitliğini yeniden düzenlersek,

$$k+\frac{1}{k}=\frac{1}{\sin k}$$

$$k_{2n}=2n\pi+\varepsilon_n$$

için,

$$2n\pi+\varepsilon_n+\frac{1}{2n\pi+\varepsilon_n}=\frac{1}{\sin\varepsilon_n}$$

$$\frac{1}{\sin x}=\frac{1}{x}+\frac{1}{6}x+O(x^3)\text{ ve }\frac{1}{1+x}=1+x+x^2+O(x^3)$$

formüllerini göz önüne alarak,

$$2n\pi+\varepsilon_n+\frac{1}{2n\pi}\left[1-\frac{\varepsilon_n}{2\pi n}+\frac{\varepsilon_n^2}{(2n\pi)^2}+\ldots\right]=\frac{1}{\varepsilon_n}+\frac{1}{6}\varepsilon_n+\ldots$$

veya

$$2n\pi\varepsilon_n+\varepsilon_n^2+[1-\frac{\varepsilon_n}{2n\pi}+\frac{\varepsilon_n^2}{\left(2n\pi\right)^2}+\cdots]=1+\frac{\varepsilon_n^2}{6}+\cdots$$

$$(2n\pi+\frac{1}{2n\pi})\varepsilon_n=1+\varepsilon_n^2(\frac{1}{6}-1+\frac{1}{\left(2n\pi\right)^2})+\cdots$$

elde ederiz. Buradan,

$$\varepsilon_n=\frac{1}{2n\pi+\frac{1}{2n\pi}}+O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

veya

$$\varepsilon_n = \frac{2n\pi}{4n^2\pi^2+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

Dolayısıyla,

$$k_{2n} = 2n\pi + \frac{2n\pi}{(2n\pi)^2+1} + O\left(\frac{1}{n^2}\right)$$

olur.

Şimdi,

$$k_{2n+1} = (2n+1)\pi - \varepsilon_n \quad n = 0,1,2,\ldots$$

için aynı işlemleri yapalım.

$$k + \frac{1}{k} = \frac{1}{\sin k} \quad k_{2n+1} = (2n+1)\pi - \varepsilon_n$$

$$(2n+1)\pi - \varepsilon_n + \frac{1}{(2n+1)\pi - \varepsilon_n} = \frac{1}{\sin \varepsilon_n}$$

$$\frac{1}{\sin x} = \frac{1}{x} + \frac{1}{6}x + O(x^3) \text{ ve } \frac{1}{1-x} = 1 + x + x^2 + O(x^3)$$

formüllerini göz önüne alarak,

$$(2n+1)\pi - \varepsilon_n + \frac{1}{(2n+1)\pi}\left[1 + \frac{\varepsilon_n}{(2n+1)\pi} + \frac{\varepsilon_n^2}{(2n+1)^2\pi^2} + \ldots\right] = \frac{1}{\varepsilon_n} + \frac{1}{6}\varepsilon_n + \ldots$$

veya

$$\Rightarrow \left(2n+1\right)\pi\varepsilon_n - \varepsilon_n^2 + \frac{\varepsilon_n}{(2n+1)\pi}\left[1+\frac{\varepsilon_n}{(2n+1)\pi}+\frac{\varepsilon_n^2}{(2n+1)^2\pi^2}+\dots\right] = 1+\frac{\varepsilon_n^2}{6}+\dots$$

elde edilir. Buradan,

$$\left[\left(2n+1\right)\pi + \frac{1}{(2n+1)\pi}\varepsilon_n\right] = 1+\varepsilon_n^2\left[\frac{1}{6}+1+\frac{1}{(2n+1)^2\pi^2}\right]+\dots$$

veya

$$\varepsilon_n = \frac{(2n+1)\pi}{\left[(2n+1)\pi\right]^2+1} + O\left(\frac{1}{n^4}\right)$$

Dolayısıyla,

$$k_{2n+1} = \left(2n+1\right)\pi - \frac{(2n+1)\pi}{\left[(2n+1)\pi\right]^2+1} + O\left(\frac{1}{n^4}\right).$$

elde edilir.

4.5. Özfonksiyonların Bulunuşu

$$X\left(x\right) = Bk_n \cos k_n x + B\sin k_n x$$

olduğundan $B=1$ alınarak,

k_{2n} için $X_{2n} = k_{2n}\cos k_{2n}x + \sin k_{2n}x$

k_{2n+1} için $X_{2n+1} = k_{2n+1}\cos k_{2n+1}x + \sin k_{2n+1}x$

elde edilir.

4.6 Eşlenik Problemin Özfonksiyonları

a) $\lambda = 0$ olsun. Bu durumda sınır koşulları sağlatılırsa $Y(x) = x$ bulunur.

b) $\lambda > 0$ için eşlenik problemin özfonksiyonları benzer şekilde,

$$Y_{2n}(x) = \cos k_{2n}x + \frac{1-\cos k_{2n}}{\sin k_{2n} - k_{2n}}\sin k_{2n}x$$

$$Y_{2n+1}(x) = \cos k_{2n+1}x + \frac{1-\cos k_{2n+1}}{\sin k_{2n+1} - k_{2n+1}}\sin k_{2n+1}x$$

şeklinde bulunur.

Böylelikle çözüm,

$$v_1(x,t) = A_0 X_0(x) + \sum_{n=0}^{\infty}\{X_{2n}(x) + A_{2n+1}X_{2n+1}(x)\}e^{-a^2k_n^2t}$$

şeklindedir.

Fourier katsayıları,

$$A_0 = \int_0^1 \psi(x)Y_0(x)dx$$

$$A_{2n} = \frac{1}{\|Y_{2n}(x)\|^2}\int_0^1 \psi(x)Y_{2n}(x)dx,\ n = 1, 2\ldots$$

$$A_{2n+1} = \frac{1}{\left\| Y_{2n+1}(x) \right\|^2} \int_0^1 \psi(x) Y_{2n+1}(x) dx, \; n = 1, 2...$$

şeklindedir.

Problemin 2nin çözümü,

$$v_2(x,t) = \sum_{n=0}^{\infty} \left[\int_0^t F_{2n}(\tau) e^{-k_n^2(t-\tau)} d\tau \right] X_{2n}(x) + \left[\int_0^t F_{2n+1}(\tau) e^{-k_n^2(t-\tau)} d\tau \right] X_{2n+1}(x)$$

biçiminde elde edilir. Burada,

$$F_0(\tau) = \int_0^1 F(x,\tau) x dx$$

$$F_{2n}(\tau) = \int_0^1 F(x,\tau) Y_{2n}(x) dx$$

$$F_{2n+1}(\tau) = \int_0^1 F(x,\tau) Y_{2n+1}(x) dx$$

şeklindedir.

5. SONUÇ VE ÖNERİLER

Ele alınan problemde sınır koşulları lokal olmayan biçimde verilmiştir. Bu sınır problemini değişken dönüşümü ile (4.1.12) – (4.1.15) ve (4.1.16) – (4.1.19) biçiminde sınır problemlerine indirgedik. Daha sonra noktasal sınır koşulları elde ettik. Bu sınır koşullarına değişkenlere ayırma yöntemi uygulanarak Sturm – Liouville problemi bulundu.

Sonuç olarak elde edilen Sturm – Liouville probleminin özdeğer ve özfonksiyonları için asimptotik formüller bulundu.

Öneri olarak, elde edilen sonuçları kullanarak lokal olmayan sınır koşulu ile tanımlanan ısı denkleminin çözümü bulunabilir. Tezde kullanılan yöntem başka benzer sınır problemlerine de uygulanabilir.

KAYNAKLAR

[1]. Cannon, J. R.,*The solution of the heat equation subject to the specification of energy, Quarterly of Applied Mathematics*, **1963**, 21.2: 155-160.

[2]. Cannon, J.R.,*Theone-dimensional heat equation*. Cambridge University Press, **1984**.

[3]. Cannon, J. R. ve Matheson, A. L., *A numerical procedure for diffusion subject to the specification of mass, International Journal of Engineering Science*, **1993**, 31.3: 347-355.

[4]. Cannon, J. R.; ESTEVA, ve Salvador P. ve Van Der Hoek, J., *A Galerkin procedure for the diffusion equation subject to the specification of mass. SIAM Journal on Numerical Analysis*, **1987**, 24.3: 499-515.

[5]. Cannon, J. R. ve Van Der Hoek, J., *An implicit finitedifference scheme for the diffusion of mass in a portion of the domain, Numerical Solutions of Partial Differential Equations (J. Noye, Ed)*, 527-539. **1982**.

[6]. Kamynin, L. I., *A boundary value problem in thetheory of heat conduction with a nonclassical boundary condition, USSR Computational Mathematics and Mathematical Physics,* **1964**, 4.6: 33-59.

[7]. Ionkin N. I, *Solution of a boundary value problem in heat conduction with a nonclassical boundary condition, Differential Equations.,Vol. 13, No. 2,***1977**, pp. 294-304.

[8]. Ionkin N. I. ve Moiceev, E. I., *Solution of boundary value problem in heat conduction theory with nonlocal boundary conditions, Differential Equations*, **1977**, 13.2: 294-304.

[9]. Day, W. A.,*Extension of a property of the heat equation to linear thermoelasticity and other theories, Quarterly of Applied Mathematics,* **1982**, 40.3: 319-330.

[10]. Fairweather, G. ve Saylor, R. D.,*There formulation and numerical solution of certain nonclassical initial-boundary value problems, SIAM Journal on Scientific and Statistical Computing,* **1991**, 12.1: 127-144.

[11]. Murthy, A V. ve Verwer, J. G.,*Solving parabolic integro-differential equations by an explicit integration method. Journal of Computational and Applied Mathematics*, **1992**, 39.1, 121-132.

[12]. Tikhonov A.N. ve Samarskii A. A.,*Equations of Mathematical Physics,Dover Publications, NewYork,* **1963**.

[13]. Naimark, M. A., *Linear Differential Operators: Elementary theory of linear differential operators, George G. Harrap & Co Ltd*, **1968**.

[14]. Edvards & Penney. "*Diferensiyel Denklemler ve Sınır Değer Problemleri". Çev. Prof. Dr. Ömer Akın. Ankara : Palme Yayıncılık*, **2006**. 645 – 654

[15]. Ang, W. T., *A method of solution for the one-dimensional heat equation subject to nonlocal conditions, Southeast Asian Bulletin of Mathematics*, **2003**, 26.2: 185-191.

ÖZGEÇMİŞ

Adı Soyadı : Erhan KAYA

Doğum Tarihi : 29.11.1979

E – mail : ekaya33@hotmail.com

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
LİSE	TÜRKÇE – MATEMATİK		1993 – 1996
LİSANS	MATEMATİK	ÖMER HALİSDEMİR ÜNİVERSİTESİ	1998 – 2004
TEZSİZ YÜKSEK LİSANS	EĞİTİM BİLİMLERİ	NECMETTİN ERBAKAN ÜNİVERSİTESİ	2009 - 2011
YÜKSEK LİSANS	MATEMATİK	MERSİN ÜNİVERSİTESİ	2016 – 2018