p-ADİK GAMA FONKSİYONU VE q-GENİŞLEMESİNİN İNTEGRAL GÖSTERİMLERİ

DOKTORA TEZİ

ÖZGE ÇOLAKOĞLU HAVARE

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

MERSİN
EYLÜL- 2018

p-ADİK GAMA FONKSİYONU VE q-GENİŞLEMESİNİN İNTEGRAL GÖSTERİMLERİ

DOKTORA TEZİ

ÖZGE ÇOLAKOĞLU HAVARE

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Hamza MENKEN

MERSİN
EYLÜL - 2018

ONAY

Özge ÇOLAKOĞLU HAVARE tarafından Prof. Dr. Hamza MENKEN danışmanlığında hazırlanan " p -Adik Gama Fonksiyonu ve q -Genişlemesinin İntegral Gösterimleri" başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 28 Eylül 2018 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği/çokluğu ile Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	Ünvanı, Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	Prof.Dr. Hamza MENKEN	
Üye	Prof.Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	
Üye	Porf. Dr. Ali Arslan ÖZKURT	
Üye	Prof.Dr. Mehmet AÇIKGÖZ	
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Gökhan ÇUVALCIOĞLU	

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 25/10/2018 tarih ve 2018-42/1526 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Cahit BİLİM
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

28.../09.../ 2018

İmza / Signature

Özge ÇOLAKOĞLU HAVARE

ÖZET

p-ADİK GAMA FONKSİYONU VE q-GENİŞLEMESİNİN İNTEGRAL GÖSTERİMLERİ

Bu çalışmada p-adik gama fonksiyonu ve q-genişlemesinin Volkenborn, q-Volkenborn, fermiyonik p-adik integral ve fermiyonik p-adik q-integral altındaki değerleri incelenmiştir.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır:

İlk bölümde p-adik gama fonksiyonu, p-adik gama fonksiyonun q-genişlemesi, Volkenborn integrali, fermiyonik Volkenborn integrali, q-Volkenborn integrali ve fermiyonik q-Volkenborn integrali hakkında bilgi verilmiştir. Ayrıca q-Euler sayı ve polinomları ile Changhee sayı ve polinomları hakkında kısa bilgiler verilmiştir.

İkinci bölümde, p-adik gama fonksiyonu ve q-genişlemesini, integralleri ve Euler ile Changhee sayı ve polinomları üzerine çalışmalardan bahsedilmiştir.

Üçüncü bölümde, literatürde yer alan ve bu çalışmada kullanılan tanımlar, teoremler ve özelliklerden bahsedilmiştir.

Dördüncü bölüm de, tezin bulgular kısmıdır. Bu bölüm beş kısma ayrılmıştır. İlk kısımda p-adik gama fonksiyonu ve türevinin Volkenborn integrali, ikinci kısımda p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin ve türevinin Volkenborn integrali, üçüncü kısımda p-adik gama fonksiyonu ve türevinin fermiyonik p-adik integrali, dördüncü kısımda p-adik gama fonksiyonu ve türevinin fermiyonik p-adik q-integrali incelenmiştir. Son kısımda ise p-adik log gama ve p-adik q-log gama tipi fonksiyonu üzerine teoremler bulunmuştur.

Son bölümde, sonuçlar ve öneriler verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: p-Adik Sayılar, p-Adik Gama Fonksiyonu, p-Adik Gama Fonksiyonunun q-Genişlemesi, Volkenborn İntegrali, q-Volkenborn İntegrali, Fermiyonik p-Adik İntegral.

Danışman: Prof.Dr. Hamza MENKEN, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

.

ABSTRACT

THE INTEGRAL REPRESENTATIONS OF p-ADIC GAMMA FUNCTION AND ITS q-EXTENSION

In this study, Volkenborn, q-Volkenborn, fermionic integrals of p-adic gamma function and its q-extension have been investigated.

This thesis is composed of five chapters:

In the first chapter, information about p-adic gamma function, q-expansion of p-adic gamma function, Volkenborn integral, fermionic Volkenborn integral, q-Volkenborn integral and fermionic q-Volkenborn integral are given. In addition, brief information about q-Euler numbers and polynomials and Changhee numbers and polynomials were given and also information about thesis work was given.

In the second chapter, p-adic gamma function and its q-expansion, integrals and Euler and Changhee numbers and polynomials are discussed.

In the third chapter, definitions, theorems and properties which is used in this work are mentioned.

In the fourth chapter is findings of the thesis. This chapter is divided into five sections. In the first section, the Volkenborn integrals of the p-adic gamma function and its derivative was given. The Volkenborn integrals of the q-expansion of the p-adic gamma function and the derivative of the q-expansion of the p-adic gamma function in the second section was given. In the third section, the fermionic p-adic integrals of the p-adic gamma function and its derivative and in the fourth section, the fermionic p-adic q-integrals of the p-adic gamma function and its derivative was investigated. In the final section, theorems on p-adic log gamma and p-adic q-log gamma type functions have been found.

In the last section, the conclusions and recommendations were given.

Keywords: p-adic Number, p-adic Gamma Function, q-extension of p-adic Gamma Function, Volkenborn Integral, q-Volkenborn Integral, Fermionic p-adic Integral.

Advisor: Prof. Dr. Hamza MENKEN, Department of Mathematics, University of Mersin, Mersin.

TEŞEKKÜR

Doktora çalışmam boyunca, bu tezi hazırlamam için bana yardımcı olan, vaktini, emeğini esirgemeyen danışmanım Prof. Dr. Hamza MENKEN' e, değerli tez izleme komitesi üyeleri Prof. Dr. Ali Arslan ÖZKURT' a ve Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU' na, hayatımın her aşamasında benden destek ve sevgilerini esirgemeyen aileme ve maddi yönden destek veren Türkiye Bilim ve Teknolojik Araştırma Kurumu'na (2211-TÜBİTAK Yurtiçi Doktora Bursu) teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{Q}_p$	p -adik sayılar cismi
$\mathbb{Q}$	Rasyonel sayılar kümesi
$\left\lvert\cdot\right\rvert_p$	p -adik norm
$\mathbb{Z}_p$	p -adik tamsayılar halkası
$p\mathbb{Z}_p$	$\mathbb{Z}_p$ nin maksimal ideali
$v_p(n)$	p -adik değerlendirme
$B(a,r)$	a merkezli r yarıçaplı açık yuvar
$\mathcal{O}=\mathbb{Z}_p=\left\{\frac{a}{b}\in\mathbb{Q} : p\nmid b\right\}$	değerlendirme halkası
$\mathfrak{P}=p\mathbb{Z}_p=\left\{\frac{a}{b} : p\nmid b \text{ ve } p\mid a\right\}$	değerlendirme ideali
Sf	f fonksiyonun belirsiz toplamı
Γ	Gama fonksiyonu
Γ_p	p -adik gama fonksiyonu
$\prod'$	p ile bölünmeyen çarpanların çarpımı
γ_p	p -adik Euler sabiti
$(n)_q$	n nin q -benzeri
$(k)_q!$	q -faktöriyel
$\binom{n}{k}_q$	q -binom katsayısı
$\Gamma_{p,q}$	p -adik gama fonksiyonunun q -genişlemesi
$\gamma_{p,q}$	p -adik Euler sabitinin q -genişlemesi
μ	Ölçü
$\int_{\mathbb{Z}_p}$	$\mathbb{Z}_p$ üzerinde p -adik integral
μ_q	q -ölçü
$I_q(f)=\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_q(x)$	p -adik q -integral (q -Volkenborn integrali)
$I_{-q}(f)=\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_{-q}(x)$	$\mathbb{Z}_p$ üzerinde fermiyonik anlamda p -adik q -integral
$I_{-1}(f)=\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_{-1}(x)$	$\mathbb{Z}_p$ üzerinde fermiyonik p -adik integral
Ch_n	$n.$ Changhee sayısı
$\hat{Ch}_n$	İkinci tür $n.$ Changhee sayısı
$Ch_{n,q}$	$n.$ q -Changhee sayısı

Kısaltma/Simge	Tanım
$\hat{Ch}_{n,q}$	İkinci tür $n.$ q-Changhee sayısı
$\approx{E}_{n,q}$	$n.$ q-Euler sayısı
$E_{n,q}$	fermiyonik integral yardımıyla tanımlanan $n.$ q-Euler sayısı
$\tilde{E}_{n,q}$	0 ağırlıklı $n.$ q-Euler sayısı
$H_n\left(-q^{-1}\right)$	n inci Frobenius-Euler sayısı
$\log_p$	Iwasawa logaritması
G_p	p-adik log gama fonksiyonu
$Log\Gamma_{D,E}$	Diamond-Euler p-adik log gama fonksiyonu
$G_{p,q}$	p-adik log gama fonksiyonunun q-genişlemesi
$G_{p,q}^{(\alpha)}$	α ağırlıklı p-adik log gama fonksiyonunun q-genişlemesi

1. GİRİŞ

Bilindiği gibi $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi (Arşimed prensibini sağladığından) Arşimedyan bir cisimdir. Birçok Arşimedyan olmayan cisim vardır. Bunlardan biri, $\mathbb{Q}_p$, p-adik sayılar cismidir. Şimdi $|\cdot|_p$ p-adik normunun ve p-adik sayılar cismi $\mathbb{Q}_p$ nin tanımını hatırlatalım.

p keyfi ve sabit bir asal sayı olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ için,

$$x = p^{\alpha}.\frac{a}{b}, \; p \nmid a \cdot b$$

olacak şekilde tek türlü belirli bir $\alpha \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır ve

$$|x|_p = p^{-\alpha}$$

ile tanımlanır. Eğer $x = 0$ ise $|0|_p = 0$ olarak alınır. $|\cdot|_p$ fonksiyonu bir norm tanımlar ve üçgen eşitsizliğinden daha güçlü ve *ultrametrik üçgen eşitsizliği* olarak bilinen,

$$|x + y|_p \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}$$

eşitsizliğini sağlar. Ultrametrik üçgen eşitsizliğini sağlayan normlara *Arşimedyan olmayan* norm ve bu normlu cisimlerde yapılan analize de *non-Arşimedyan Analiz* denir. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin $|\cdot|_p$ p-adik normuna göre tamlaştırılmasıyla elde edilen cisme, $\mathbb{Q}_p$, p-adik sayılar cismi denir. Ostrowski teoremi ile $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin mümkün olan bütün tamlaştırmaları, Arşimedyan olan $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve p bir asal olmak üzere, Arşimedyan olmayan p-adik sayılar cismi, $\mathbb{Q}_p$ olarak belirlenmiştir.

p-adik sayılar cismi, $\mathbb{Q}_p$ 1904'te Kurt Hensel tarafından inşa edilmiş ve sayılar teorisinde, cebirsel geometride, cebirsel ve aritmetiksel dinamiklerde ve şifreleme gibi matematik alanlarında kullanılmıştır. Tıp, psikoloji, sosyoloji, kontrol teorisi, ekonominin çeşitli alanlarındaki gerçek problemler için p-adik metotların gelişmesi büyük fırsat ve şans olmuştur [1].

1987'de I. V. Volovich tarafından bazı fiziksel sistemlerin modellenmesinde ve p-adik saçılma genliğinin yapılandırılmasıyla birlikte p-adik sayılar uygulamalı alanlarda kullanılmaya başlamıştır. Örneğin; sicim (string) teorisinde, kuantum mekaniğinde, p-adik yerçekimi ve kosmolojide, Plank ölçeğinde, p-adik uzay zaman yapısında, dinamik sistemde, olasılıksal süreçlerde, genetik kodlamaların yapısında kullanılmıştır. p-adik sayıların, p-adik gama fonksiyonunun ve q-genişlemesinin ve p-adik integrallerinin örnekleri [2-4] kaynaklarından daha detaylı olarak incelenebilir.

1975'te Y. Morita tarafından ortaya atılan p-adik gama fonksiyonu aslında faktöriyel fonksiyonunun bir p-adik interpolasyonudur [5]. p-adik gama fonksiyonunun birçok kullanım alanı vardır. Bunlardan biri temel parçacıkların modern birleştirilmesi olan sicim teorisindedir. Burada temel parçacıkların saçılımını tanımlayan Veneziano genliği Morita'nın p-adik gama fonksiyonu ile tanımlanmış ve p-adik gama fonksiyonunun birçok özelliği kullanılmıştır [1].

Kuantum teorisi sonlu fark ölçeklemesine bağlıdır. q-analizin tarihi 18. yüzyıla dayanmaktadır. Aslında Leonard Euler'e (1707-1783) kadar uzanır. q-analizin geliştirilmesi, Euler'in analitik sayı teorisi olarak da adlandırılan parçalar teorisi 1740'lı yıllarda başlamıştır. Son zamanlarda bu konuya ilgi artmıştır. q-analizin çeşitli alanlarda son derece verimli olduğunun ispatlanması, bilgisayar bilimi ve parçacık fiziği gibi hayati alanlarda geniş uygulama alanlarının bulunması ve aynı zamanda analitik sayılar teorisinde çalışan araştırmacılar için önemli bir araç olarak işlev görmesi, bu ilginin artmasına neden olmuştur. q-analiz bir yüzyıldan fazladır çalışılmasına rağmen q-Bernstein, q-Genocchi sayıları ve polinomları gibi birçok özel sayılar ve polinomlar bugün halen gizemini korumaktadır [6].

Morita'nın p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesi 1980 de N. Koblitz tarafından tanımlanmıştır [7,8]. p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin uygulamasına örnek vermek gerekirse, sicim teorisinin aritmetik benzeri olan p-adik sicim teorisindedir ve ayrıca Veneziano genliğinin kuantum'a genişletilmesinde Koblitz'in p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesi kullanılmıştır [9].

Mahler açılımı (Mahler expansion), sürekli fonksiyonların $\mathbb{Z}_p$ den $\mathbb{Q}_p$ nin tam genişlemelerini temsil eden yaygın bir yöntemdir. Mahler açılımının kısmi toplamları, her sürekli fonksiyona yakınsayan polinomların özel bir dizisini verir. 1958'de K. Mahler binom katsayısı gibi özel polinomları kullanarak p-adik değerli sürekli fonksiyonlar için bir açılım tanımlamıştır [10]. Ayrıca Mahler, p-adik alanında tanımlanmış p-adik değerli fonksiyonların önemli özelliklerini de araştırmıştır. D. Barsky, p-adik gama fonksiyonunun Mahler açılımlarını incelemiştir [11]. K. Conrad, Barsky'nin yöntemini kullanarak p-adik analizde sürekli fonksiyonlar için Mahler açılımının q-benzerini tanımlamış ve p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin q-Mahler açılımını elde etmiştir [12].

Volkenborn integrali ilk defa 1971'de A. Volkenborn tarafından ortaya konulmuştur [13,14]. Volkenborn integralini kullanarak J. Diamond $\log$ gama fonksiyonu için bir tanım vermiştir [15]. 2002'de T. Kim, p-adik q-integralini (q-Volkenborn integrali) tanımlamıştır [16]. Ardından fermiyonik p-adik q-integral ve fermiyonik p-adik integral ortaya çıkmıştır [17]. Bu integraller yardımıyla bazı özel sayılar ve polinomlar ifade edilmiştir.

Özel sayılar ve polinomlar olasılık, istatistik, matematik, mühendislik gibi birçok alanda matematikteki temel işlemlerin yetersizliğinden dolayı kullanılmaktadır. Örneğin hava uzay mühendisleri, jet roketlerin izdüşümünü modellemek için polinomları kullanmıştır [18]. İki yüz yıldır çalışılan özel sayıları ve polinomları incelemek ve araştırmak için birçok farklı metot ve teknik kullanılmıştır. Volkenborn integrali, fermiyonik p-adik integral ve fermiyonik p-adik q-integrali, bazı özel polinomların çeşitli genelleştirmeleri ve bilinen formüllerinin dışında yenilerini elde etmek için güçlü bir araçtır.

Bu tezde, p-adik gama fonksiyonunun Volkenborn integrali, fermiyonik p-adik integrali ve fermiyonik p-adik q-integrali ile p-adik q-gama fonksiyonunun Volkenborn integrali ele alınmış, ilgi çekici teoremler ve sonuçlar verilmiştir. Ayrıca, log gama ve p-adik q-log gama tipli fonksiyonlar üzerine çalışılmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

1975'te Y. Morita tarafından ortaya atılan p-adik Gama fonksiyonu aslında faktöriyel fonksiyonunun bir p-adik interpolasyonudur [5]. Bu fonksiyon büyük bir ilgi görmüştür. J. Diamond (1977) [15], D. Barsky (1981) [11], B. Dwork (1983) [19], T. Kim (1997) [20], K. Conrad (1997) [21] gibi birçok araştırmacı tarafından çalışılmıştır. B. Gross ve N. Koblitz (1979) [22], H. Cohen ve E. Fridman (2008) [23], I. Shapiro (2012) [24] gibi yazarlar tarafından bazı özel fonksiyonlar ile p-adik Gama fonksiyonu arasındaki ilişki araştırılmıştır.

N. Koblitz [7,8] tarafından tanımlanmış olan p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesi H. Nakazato [25], Y. S. Kim [26], ve birçok yazar tarafından incelenmiştir.

Taekyun Kim, 2002 yılında q-Volkenborn integralini ve fermiyonik anlamda q-Volkenborn integralini tanımlamıştır [16]. 2005'te de fermiyonik anlamda q-Volkenborn integralinin bazı özelliklerini araştırmış ve bu integralden yararlanılarak q-Euler sayısını tanımlamıştır [17]. 2008'de fermiyonik anlamda q-Volkenborn integralini kullanarak Bernoulli ve Euler sayılarına ilişkin Witt formülleri verilmiştir [27]. p-adik sayılar cismi üzerinde Euler sayıları ve polinomları ile ilgili Bernstein polinomlarının fermiyonik p-adik integral temsilleri üzerine çalışılmıştır [28]. Fermiyonik p-adik integral kullanılarak, Bernoulli polinomları, Euler polinomları, Changhee polinomları genellemeleri ve trigonemetrik fonksiyonlar üzerine çalışılmıştır [29-32].

T. Kim ve arkadaşları fermiyonik p-adik integrali kullanarak Changhee sayıların integral temsillerini bulmuş ve ikinci tip Changhee sayılarını tanımlamıştır [33]. Y. Şimsek ve A. Yardımcı Volkenborn integralini kullanarak Changhee, Euler, Daehee sayılarını içeren özel sayılarla ilgili bazı özellikler bulmuşlardır [18]. J. Kwon ve arkadaşları, Changhee polinomlarından üretilen fonksiyondan diferansiyel denklemin bir ailesini elde etmişler ve bu diferansiyel denklemin çözümü üzerine çalışmışlardır [34].

$\mathbb{Z}_p$ üzerinde fermiyonik p-adik q-integrali, q-zeta fonksiyonunun fonksiyonel denkleminde, q-stirling sayılarında ve Iwasawa'nın p-adik q-L fonksiyonununda kullanılmıştır. Ayrıca fermiyonik p-adik q-integrali kullanılarak, özel Twist polinomları, Daehee, Changhee, Euler, Beurnoulli gibi sayılar ve polinomlar ve bunların q-genişlemeleri tanımlanmış ve onların ilgi çekici özellikleri elde edilmiştir [35-40].

p-adik q-integrali ile bunun integral denklemi kullanılarak özel sayıların ve polinomların yeni özel aileleri için fonksiyonlar oluşturulmuş ve ayrıca bunların oluşturduğu fonksiyonların kısmi türevli denklemleri, fonksiyonel denklemi ve diğer özellikleri bulunmuştur

[41]. q-Volkenborn integrali üzerinde çeşitli değişkenlerin fonksiyonları için modifiye edilmiş q-Bernstein polinomları ele alınmış ve bazı özel sayıların ve polinomların yeni özellikleri incelenmiştir [42].

Euler polinomları, Bernoulli polinomları Leonard Euler (1707-1783) tarafından tanımlanmıştır. Sistematik olarak çalışılmaya devam edilmiş ve birçok genellemeleri tanımlanmıştır. 1954'te Leonard Carlitz, klasik Bernoulli ve Euler polinomlarını ve sayılarını genişleterek q-Bernoulli ile q-Euler polinomlarını ve sayılarını tanımlamıştır [43,44]. L. Carlitz'in tanımlamış olduğu q-genişlemeleri üzerine birçok yazar çalışmıştır [45-47]. Daha sonra T. Kim, Carlitz'in q-Euler polinomunun farklı bir tanımını vermiştir [48-54]. Son zamanlarda bu sayılar ve polinomlar ile ilgili birçok çalışma mevcuttur. Özellikle q-Volkenborn integralinin tanımlanmasıyla bu çalışmalar hız kazanmıştır [55-60].

3. MATERYAL ve YÖNTEM

3.1. p -Adik Sayılar

Bu bölümde p -adik analiz ile ilgili tanımlar, teoremler ve özellikler verilmiştir.

3.1.1. Bir Cisim Üzerinde Norm

Tanım 3.1.1. F bir cisim olmak üzere, $|.|:\mathrm{F}\to[0,\infty)$ fonksiyonu, aşağıdaki üç koşulu

i. Her $x\in F$ için, $|x|\geq 0$, $|x|=0 \Leftrightarrow x=0$

ii. Her $x, y\in F$ için, $|xy|=|x||y|$

iii. Her $x, y\in F$ için, $|x+y|\leq|x|+|y|$

sağlıyorsa bu fonksiyona bir *norm* denir.
Eğer bu fonksiyon,

iv. Her $x, y\in F$ için, $|x+y|\leq\max\{|x|,|y|\}$

koşulunu da sağlarsa bu norma F üzerinde bir *non-Arşimedyan (Arşimed olmayan) norm* denir [61].

(iv) koşulu, (iii) koşulundan daha güçlüdür. Çünkü $\max\{|x|,|y|\}\leq|x|+|y|$ eşitsizliği, $\forall\, x, y\in F$ için sağlanır.

Örnek 3.1.1. $x\in\mathbb{Q}$ olmak üzere,

$$|x|=\begin{cases} x\ , & x\geq 0\\ -x\ , & x<0\end{cases}$$

şeklinde tanımlanan genel mutlak değer normu bir Arşimedyan normdur. Çünkü $x=1$, $y=1$ için, $|1+1|\leq\max\{|1|,|1|\}$ eşitsizliği doğru olmadığından, (iv) koşulunu sağlamaz.

Örnek 3.1.2. F bir cisim olmak üzere, $x\in F$ için,

$$|x|=\begin{cases} 1\ , & x\neq 0\\ 0\ , & x=0\end{cases}$$

ile tanımlı norm herhangi bir F cismi için non-Arşimedyan bir normdur. Bu norma *trivial (aşikâr) norm* denir.

Yardımcı Teorem 3.1.1. Bir F cismi üzerinde herhangi bir $|.|$ normu için aşağıdakiler sağlanır [61]:

i. $|1| = 1$.

ii. $x \in F$ ve $n \in \mathbb{Z} \setminus \{0\}$ için, $|x^n| = 1$ ise $|x| = 1$ dir.

iii. $|-1| = 1$.

iv. Her $x \in F$ için, $|-x| = |x|$.

v. Eğer F sonlu bir cisim ise, $|.|$ normu trivialdir.

3.1.2. p-Adik Değerlendirme ve p-Adik Norm

Tanım 3.1.2. p herhangi bir asal sayı olsun. Sıfırdan farklı bir $n \in \mathbb{Z}$ sayısı için $\nu_p(n)$, n yi bölen p nin en büyük kuvvetini göstersin, öyle ki

$$n = p^{\nu_p(n)} n' \text{ ve } p \nmid n'$$

biçiminde yazılır ve bu yazılım tektir. Bu takdirde,

$$\nu_p : \mathbb{Z} \setminus \{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$$

fonksiyonuna $\mathbb{Z}$ de p-*adik değerlendirme* denir [61].

Örnek 3.1.3. $p = 5$ için 135 sayısı, $135 = 5^1.27$ olduğundan, $\nu_5(135) = 1$ bulunur.

Not 3.1.1. $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ için,

$$\nu_p(x) = \nu_p(a) - \nu_p(b) \tag{3.1}$$

tanımı ile ν_p fonksiyonu, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismine genişletilmiş olur. Burada $\nu_p(x)$ değeri, x değişkeninin kesir gösteriminden bağımsızdır. Yani, $a/b = c/d$ ise,

$$\nu_p(a) - \nu_p(b) = \nu_p(c) - \nu_p(d)$$

eşitliği elde edilir. Kolayca gösterilebilir ki, $x = \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} \setminus \{0\}$ için, p-adik değerlendirme,

$$x = p^{\nu_p(x)} . \frac{a'}{b'} \text{ , } p \nmid a'b'$$

ile belirlenir.

Örnek 3.1.4. $p = 5$ için, $\nu_5(1) = 0$, $\nu_5(135) = 1$ ve böylece (3.1) ile,

$$\nu_5\left(\frac{1}{135}\right) = \nu_5(1) - \nu_5(135) = 0 - 1 = -1$$

bulunur.

3.1.2.1. p-Adik değerlendirmenin özellikleri

Yardımcı Teorem 3.1.2. Her $x, y \in \mathbb{Q}$ için, v_p fonksiyonu

i. $v_p(x.y) = v_p(x) + v_p(y)$

ii. $v_p(x+y) \geq \min\{v_p(x), v_p(y)\}$

iii. $x = 0$ ise, $v_p(0) = +\infty$

özelliklerini sağlar [61].

Tanım 3.1.3. Her $x \in \mathbb{Q}$ için p *-adik norm,*

$$|x|_p = \begin{cases} p^{-v_p(x)}, & x \neq 0 \\ 0 & , \ x = 0 \end{cases} \tag{3.2}$$

ile tanımlı $|\cdot|_p : \mathbb{Q} \to [0,\infty)$ fonksiyonudur [61].

Önerme 3.1.1. $|\cdot|_p$ fonksiyonu (normu), $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi üzerinde Arşimedyan olmayan bir normdur [61].

Örnek 3.1.5. $\frac{56}{12}$ rasyonel sayısının 7-adik normu kaçtır?

$\frac{56}{12} \neq 0$ olduğundan, (3.2)'ten,

$$\left|\frac{56}{12}\right|_7 = 7^{-v_7(56/12)} = \left(\frac{1}{7}\right)^{v_7(56/12)}$$

dir. (3.2)'den, $v_7(56/12) = v_7(56) - v_7(12) = 1 - 0 = 1$. Böylece, $\left|\frac{56}{12}\right|_7 = 7^{-1}$ bulunur.

Aşağıdaki teorem, bir normun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşuludur:

Teorem 3.1.1. Keyfi bir F cismi için, $\varphi: \mathbb{Z} \to F$ olacak şekilde

$$n \to \begin{cases} \underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\ kez}, & n > 0 \\ 0, & n = 0 \\ -\Big(\underbrace{1+1+\cdots+1}_{n\ kez}\Big), & n < 0 \end{cases}$$

dönüşümü tanımlansın. $A = \varphi(\mathbb{Z}) \subset F$ kümesi F cisminin tam sayıları olmak üzere F cisminde bir $|.|$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, her $a \in A$ için $|a| \leq 1$ olmasıdır [61].

Özel olarak, $\mathbb{Q}$ cismi üzerinde bir $|.|$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul her $n \in \mathbb{Z}$ için $|n| \leq 1$ olmasıdır [61].

Bir norm eğer aşağıdaki özelliği sağlarsa Arşimedyandır.

Arşimedyan Özelliği: F bir cisim olsun.

$\forall\, x, y \in F$, $x \neq 0$ için, $\exists n \in \mathbb{Z}^+$ vardır öyle ki $|nx| > |y|$ eşitsizliği sağlanır.

Uyarı: Arşimedyan özelliği $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ cisimleri üzerinde mutlak değer normu için geçerlidir.

Sonuç 3.1.1. Bir $|.|$ normunun non-Arşimedyansı için gerek ve yeter koşul $sup\{|n| : n \in \mathbb{Z}\} = 1$ olmasıdır [61].

3.1.3. Bir Norm ile Üretilen Metrik Uzay

Tanım 3.1.4. F bir cisim ve $|.|$, F 'da bir norm olsun. $\forall\, x, y \in F$ için,

$$d(x, y) = |x - y|$$

ile tanımlı

$$d: F \times F \to \mathbb{R}^+ \cup \{0\}$$

fonksiyonuna, $|.|$ *normuyla üretilen metrik* denir [62].

$d(x, y)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

i. Her $x, y \in F$ için $d(x, y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,

ii. Her $x, y \in F$ için $d(x, y) = d(y, x)$,

iii. Her $x, y, z \in F$ için $d(x, y) \leq d(x, z) + d(z, y)$ (üçgen eşitsizliği).

Tanım 3.1.5. Küme üzerinde bir metrik tanımlı ise bu metrik ile birlikte bu kümeye bir *metrik uzay* denir [62].

Yardımcı Teorem 3.1.3. $|.|$, F cismi üzerinde bir norm ve metrik $d(x, y) = |x - y|$ ile tanımlı olsun. Bu takdirde, $|.|$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, her $x, y, z \in F$ için,

$$d(x, y) \leq \max\{d(x, z), d(z, y)\} \quad (\textit{ultra metrik eşitsizliği})$$

eşitsizliğin olmasıdır [62].

Tanım 3.1.6. Yardımcı Teorem 3.1.3 teki eşitsizlik *ultra metrik eşitsizliği* olarak bilinir ve bu eşitsizliği sağlayan metriğe *ultra metrik* denir [62].

Önerme 3.1.2. F bir cisim ve $|.|$, F cismi üzerinde non-Arşimedyan norm olsun. Eğer $x, y \in F$ ve $|x| \neq |y|$ ise,

$$|x+y| = \max\{|x|,|y|\}$$

eşitliği sağlanır [62].

Sonuç 3.1.2. Bir ultra metrik uzayda bütün üçgenler ikizkenardır.

Örnek 3.1.6. $p=3$ için $\mathbb{Q}$ kümesi üzerinde 3-adik norm ile köşeleri

$$x=\frac{4}{3},\ y=\frac{5}{6} \text{ ve } z=\frac{7}{18}$$

olan üçgenin kenar uzunlukları:

$$|x-y|_3 = \left|\frac{4}{3}-\frac{5}{6}\right|_3 = \left|\frac{1}{2}\right|_3 = 3^{-v_p(1/2)} = 3^{-(0)} = 1,$$

$$|x-z|_3 = \left|\frac{4}{3}-\frac{7}{18}\right|_3 = \left|\frac{17}{18}\right|_3 = 3^{-(-2)} = 9$$

ve

$$|y-z|_3 = \left|\frac{5}{6}-\frac{7}{18}\right|_3 = \left|\frac{4}{9}\right|_3 = 3^{-(-2)} = 9.$$

Böylece bu üçgen, bir ikizkenar üçgendir.

Tanım 3.1.7. $F=\mathbb{Q}$ ve $|\cdot|_p$, p-adik norm, $a \in \mathbb{Q}$ ve $r \in \mathbb{R}^+$ olsun.

a-merkezli ve r-yarıçaplı açık yuvar,

$$B(a,r) = \{x \in \mathbb{Q} : d(x,a) < r\} = \left\{x \in \mathbb{Q} : |x-a|_p < r\right\};$$

a-merkezli ve r-yarıçaplı kapalı yuvar,

$$\overline{B}(a,r) = \{x \in \mathbb{Q} : d(x,a) \leq r\} = \left\{x \in \mathbb{Q} : |x-a|_p \leq r\right\}$$

olarak tanımlanır [62].

Önerme 3.1.3. $F=\mathbb{Q}$ ve $|\cdot|_p$, p-adik norm olsun [62].

i. Bir açık yuvarda içerilen her nokta bu açık yuvarın merkezidir. Yani; $b \in B(a,r)$ ise $B(a,r) = B(b,r)$ dir.

ii. Bir kapalı yuvarda içerilen her nokta bu kapalı yuvarın merkezidir. Yani; $b \in \overline{B}(a,r)$ ise $\overline{B}(a,r) = \overline{B}(b,r)$ dir.

iii. $B(a,r)$ kümesi hem açık hem de kapalıdır.

iv. $r \neq 0$ ise, $\overline{B}(a,r)$ kümesi hem kapalı hem de açıktır.

v. iki açık (kapalı) yuvar, ya ayrıktır ya da iç içedir. Yani; $a, b \in \mathbb{Q}$ ve $r, s \in \mathbb{R}^+ \setminus \{0\}$ ise, $B(a,r) \cap B(b,s) \neq \varnothing \Leftrightarrow B(a,r) \subset B(b,s)$ veya $B(b,s) \subset B(a,r)$.

Tanım 3.1.8. F bir cisim ve $|.|$, F cismi üzerinde bir norm olsun. Bir $S \subset F$ kümesi hem açık hem de kapalı ise S kümesine *kapalı-açık (clopen) küme* denir [61].

Önerme 3.1.4. F bir cisim ve $|.|$, F cismi üzerinde bir non-Arşimedyan norm olsun.

$$\mathcal{O} = \overline{B}(0,1) = \{x \in F : |x| \leq 1\}$$

kümesi K kümesinin bir alt halkasıdır.

$$\mathfrak{P} = B(0,1) = \{x \in F : |x| < 1\}$$

$\mathcal{O}$ kümesinin bir idealidir. Üstelik, $\mathfrak{P}$, $\mathcal{O}$ kümesinin bir maksimal idealidir ve $\mathcal{O} - \mathfrak{P}$'nın her elemanı $\mathcal{O}$'da tersinirdir [61].

Tanım 3.1.9. F bir cisim ve $|.|$, F cismi üzerinde bir non-Arşimedyan norm olsun.

$$\mathcal{O} = \overline{B}(0,1) = \{x \in F : |x| \leq 1\} \subset F$$

alt halkasına, $|.|$ normunun *değerlendirme halkası* denir.

$$\mathfrak{P} = B(0,1) = \{x \in F : |x| < 1\} \subset \mathcal{O}$$

idealine, $|.|$ normunun *değerlendirme ideali* denir.

$$\mathcal{K} = \mathcal{O} / \mathfrak{P}$$

bölümüne, $|.|$ normunun *kalan (rezidü) cismi* denir [61].

Önerme 3.1.5. $F = \mathbb{Q}$ ve $|\cdot|_p$, $p-$adik norm olsun. Bu takdirde,

i. $|\cdot|_p$ normunun değerlendirme halkası,

$$\mathcal{O} = \mathbb{Z}_p = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b \right\},$$

ii. $|\cdot|_p$ normunun değerlendirme ideali,

$$\mathfrak{P} = p\mathbb{Z}_p = \left\{ \frac{a}{b} : p \nmid b \text{ ve } p | a \right\},$$

iii. Kalan cismi p elemanlı $\mathcal{K} = \mathcal{O}/\mathfrak{P} = T_p$'dir [61].

3.1.4. $\mathbb{Q}$ Kümesinde Normlar

Tanım 3.1.10. Bir F cismi üzerinde $|.|_1$ ve $|.|_2$ normları için, bir norma göre açık olan her küme diğerine göre de açıksa, $|.|_1$ ve $|.|_2$ normlarına *denk normlar* denir.

Yardımcı Teorem 3.1.4. $|.|_1$ ve $|.|_2$ bir F cisminde iki norm olsun. Böylece

i. $|.|_1$ ve $|.|_2$ denk normlardır.

ii. Her $x \in F$ için, $|x|_1 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 < 1$.

iii. $\exists\, \alpha \in \mathbb{R}$, $\alpha > 0$ öyle ki her $x \in F$ için, $|.|_1 = |.|_2^{\alpha}$

ifadeleri birbirine denktir [61].

Teorem 3.1.2 (Ostrowski). $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlı her trivial olmayan norm, $p = \infty$ ya da p bir asal sayı olmak üzere bir, $|\cdot|_p$ normuna denktir [61].

Önerme 3.1.6. (Çarpma formülü) Her $x \in \mathbb{Q} - \{0\}$ için $p = \infty$ veya p bir asal sayı olmak üzere,

$$\prod_{p \le \infty} |x|_p = 1$$

dir [61].

Tanım 3.1.11. F bir cisim ve $|.|$, F cismi üzerinde bir norm olsun.

i. $(x_n) \subset F$ dizisi verilsin. Her $\varepsilon > 0$ için, $\exists\, N \in \mathbb{N}$ vardır, öyle ki her $n, m \ge N$ için, $|x_n - x_m| < \varepsilon$ ise, (x_n) ye bir *Cauchy dizisi* denir.

ii. F kümesinden alınan her Cauchy dizisi (F içinde) bir limite sahipse F kümesine *tamdır* denir.

iii. $S \subset F$ olsun. Her $x \in F$ ve her $\varepsilon > 0$ için $B(x, \varepsilon) \cap S \ne \varnothing$ ise, S kümesine, F kümesi üzerinde bir *yoğun alt küme* denir.

Yardımcı Teorem 3.1.5. $\mathbb{Q}$ cismi, trivial olmayan herhangi bir norma göre tam değildir [61].

Yardımcı Teorem 3.1.6. $\mathbb{Q}$ da bir (x_n) dizisinin p-adik norma göre bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul, $n \to \infty$ iken $|x_{n+1} - x_n|_p \to 0$ olmasıdır [61].

Örnek 3.1.7. $x_n = p^n$ dizisi olsun. $\lim\limits_{n\to\infty} |p^{n+1} - p^n|_p = \lim\limits_{n\to\infty} |p^n(p-1)|_p = \lim\limits_{n\to\infty} |p^n|_p\, |p-1|_p = 0$ dır. O halde yakınsaktır ve limiti 0 dır.

Uyarı: Yardımcı Teorem 3.1.6, $\mathbb{R}$ nin, $\left|\cdot\right|_{\infty}$ genel mutlak değer normuna göre doğru değildir. Örneğin,

$$x_n = \sum_{k=1}^{n} \frac{1}{k}$$

dizisi, Yardımcı Teorem 3.1.6 daki $\left|x_{n+1} - x_n\right|_{\infty} \to 0 \quad (n \to \infty)$ koşulunu sağlar, fakat Cauchy dizisi değildir.

Analizden biliyoruz ki;

i. $\left|\cdot\right|_{\infty}$, $\mathbb{R}$ ye genişletilebilir.

ii. $\mathbb{R}$, $\left|\cdot\right|_{\infty}$ normuna göre tamdır.

iii. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğundur.

Başka bir ifadeyle, $\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ nun $\left|\cdot\right|_{\infty}$ normuna göre tamlaştırılmasıdır.

Şimdi $\mathbb{Q}$ nun $\left|\cdot\right|_p$ p -adik normuna göre tamlaştırılmasını elde edelim.

Tanım 3.1.12. $\left|\cdot\right|_p$, $\mathbb{Q}$ da bir non-Arşimedyan norm olsun. $\mathbb{Q}$ nun bütün Cauchy dizilerinin kümesi $\mathcal{C}$ veya $\mathcal{C}(\mathbb{Q})$,

$$\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{Q}) = \left\{(x_n) : (x_n),\ \left|\cdot\right|_p \text{ ye göre bir Cauchy dizisidir.}\right\}$$

ile gösterilir [61].

Önerme 3.1.7. $\mathcal{C} = \mathcal{C}(\mathbb{Q})$ kümesi,

$$(x_n) + (y_n) \to (x_n + y_n)$$
$$(x_n).(y_n) \to (x_n.y_n)$$

tanımları ile bir birimli halkadır [61].

Tanım 3.1.13. $\mathcal{N} = \left\{(x_n) \in \mathcal{C} : x_n \to 0\right\} = \left\{(x_n) : \lim_{n\to\infty} \left|x_n\right|_p = 0\right\}$ şeklinde tanımlanır [61].

Yardımcı Teorem 3.1.7. $\mathcal{N}$, $\mathcal{C}$ 'nin bir maksimal idealidir.

$\mathcal{N}$ maksimal ideal olduğundan, $\mathcal{C}/\mathcal{N}$ cismi aşağıdaki gibi tanımlanır:

Tanım 3.1.14. $\mathbb{Q}_p$ p -adik sayılar cismi, $\mathcal{C}$ halkasının $\mathcal{N}$ maksimal idealinin bölüm cismi olarak tanımlanır:

$$\mathbb{Q}_p = \mathcal{C}/\mathcal{N} .$$

$\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ dir ve $\left|\cdot\right|_p$, $\mathbb{Q}_p$ 'ye genişletilebilir.

Yardımcı Teorem 3.1.8. $(x_n) \in \mathcal{C}$ ve $(x_n) \notin \mathcal{N}$ olsun. $|x_n|_p$ reel sayı dizisi belli bir n'den sonra sabittir. Yani, öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n, m \geq N$ için, $|x_n|_p = |x_m|_p$ dir [61].

Tanım 3.1.15. $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ ve (x_n), λ sayısına karşılık gelen Cauchy dizisi ise,

$$|\lambda|_p = \lim_{n\to\infty} |x_n|_p$$

ile tanımlanır.

Önerme 3.1.8. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ kümesinin yoğun bir alt kümesidir [61].

Teorem 3.1.3. Her $p \in \mathbb{Z}$ asal sayısı için, $|\cdot|_p$, non-Arşimedyan normuna sahip öyle bir $\mathbb{Q}_p$ cismi vardır ki,

i. $|\cdot|_p$ nin $\mathbb{Q}$ ya kısıtlanışı $|\cdot|_p$ p-adik normunu verir.

ii. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ de yoğundur.

iii. $\mathbb{Q}_p$, $|\cdot|_p$ ye göre tamdır.

i, ii ve iii koşullarını sağlayan $\mathbb{Q}_p$ cismi normu koruyan izomorfi hariç tek türlü belirlidir [61].

3.1.5. $\mathbb{Q}_p$ Cisminin Özellikleri

i. $\mathbb{Q}_p$ de bir $|\cdot|_p$ normu var ve $\mathbb{Q}_p$ bu norma göre tamdır.

ii. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ de yoğun ve $|\cdot|_p$'nin $\mathbb{Q}$ ya kısıtlanışı p-adik norm ile çakışır.

iii. $\mathbb{Q}$ ile $\mathbb{Q}_p$ nin $|\cdot|_p$ altındaki değer kümeleri eşittir.

iv. $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ nin bir alt cismi olarak düşünülebilir [61].

Yardımcı Teorem 3.1.9. Her $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$ için $|x|_p = p^{-n}$ olacak şekilde bir $n \in \mathbb{Z}$ vardır [61].

Yardımcı Teorem 3.1.10. Her $x \in \mathbb{Q}_p$, $x \neq 0$ için,

$$|x|_p = p^{-\nu_p(x)}$$

olacak şekilde $\nu_p(x)$ tam sayısı vardır [61].

Başka bir deyişle, ν_p p-adik değerlendirmesi $\mathbb{Q}_p$ ye genişletilebilir.

Tanım 3.1.16. $\mathbb{Z}_p$, 0-merkezli ve 1-yarıçaplı kapalı birim yuvarına

$$\mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1 \right\}$$

p *-adik tamsayılar halkası* denir [61].

Yardımcı Teorem 3.1.11. Her $x \in \mathbb{Z}_p$, $0 \leq b_i \leq p-1$ olmak üzere,

$$x = b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_n p^n + \ldots$$

biçiminde tek türlü yazılır [61].

Önerme 3.1.9. $p\mathbb{Z}_p$,

$$p\mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p < 1 \right\} = \left\{ px : x \in \mathbb{Z}_p \right\}$$

$\mathbb{Z}_p$ nin maksimal idealidir [61]. Ayrıca,

i. $\mathbb{Q} \cap \mathbb{Z}_p = \left\{ \frac{a}{b} \in \mathbb{Q} : p \nmid b \right\}$

ii. $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Z}_p$ de yoğundur. Ayrıca verilen her $x \in \mathbb{Z}_p$ ve $n \geq 0$ için

$$0 \leq \alpha \leq p^n - 1 \text{ ve } |x - \alpha|_p \leq p^{-n}$$

olacak şekilde $\alpha \in \mathbb{Z}$ vardır. α tam sayısı bu özelliklerle tek türlü belirlidir.

iii. Her $x \in \mathbb{Z}_p$ için, $\alpha_n \to x$ özelliğinde ve aşağıdaki koşullarla tek türlü belirli bir (α_n) Cauchy dizisi vardır:

a) $\alpha_n \in \mathbb{Z}$, $0 \leq \alpha_n \leq p^n - 1$,

b) Her $n \in \mathbb{Z}^+$ için, $\alpha_n \equiv \alpha_{n-1} \left(\text{mod } p^{n-1} \right)$.

Sonuç 3.1.3. $\mathbb{Q}_p = \mathbb{Z}_p[1/p]$'dir. Yani, her $x \in \mathbb{Q}_p$ için, $p^n x \in \mathbb{Z}_p$ olacak biçimde $n \geq 0$ tam sayısı vardır [61].

Sonuç 3.1.4. $\mathbb{Q}_p$ tamamen bağlantısız bir Hausdorff topolojik uzayıdır [61].

Sonuç 3.1.5. $\mathbb{Z}_p$ kompakt ve $\mathbb{Q}_p$ yerel kompakttır [61].

Tanım 3.1.17. Her $x \in \mathbb{Q}_p$, $0 \leq b_n \leq p-1$ ve $-n_0 = \nu_p(x)$ olmak üzere,

$$\begin{aligned} x &= b_{-n_0} p^{-n_0} + \ldots + b_0 + b_1 p + b_2 p^2 + \ldots + b_n p^n + \ldots \\ &= \sum_{n \geq -n_0} b_n p^n \end{aligned}$$

şeklinde tek türlü yazılır [61].

$\mathbb{Q}_p$ metrik uzayı, $a \in \mathbb{Q}_p$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $a + p^n \mathbb{Z}_p = \left\{ x \in \mathbb{Q}_p \middle| |x - a|_p \leq p^{-n} \right\}$ şeklindeki tüm kümeleri içeren açık kümlerin temelidir. Bunun anlamı $\mathbb{Q}_p$ nin herhangi bir açık alt kümesi bu tipli açık alt kümelerin birleşimidir.

Tanım 3.1.18. $\mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$, p tane elemanlı bir cisimdir. Bu elemanlar

$p\mathbb{Z}_p, 1+p\mathbb{Z}_p, 2+p\mathbb{Z}_p, \ldots, \mathrm{p}-1+p\mathbb{Z}_p$ kosetleridir. $j \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ için

$$j+p\mathbb{Z}_p = \left\{x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p < 1\right\} = \left\{x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p \le p^{-1}\right\}$$

ve

$$j+p^n\mathbb{Z}_p = \left\{x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p < p^{-n+1}\right\} = \left\{x \in \mathbb{Z}_p : |x-j|_p \le p^{-n}\right\} = \left\{j+p^n y : y \in \mathbb{Z}_p\right\}$$

dir [62].

Tanım 3.1.19. T_p , p -adik birimlerin kümesini göstersin. T_p den alınan her bir eleman $\mathbb{Z}_p$ nin terslenebilir elemanlarıdır. Böylece,

$$T_p = \mathbb{Z}_p - p\mathbb{Z}_p = \left\{x \in \mathbb{Z}_p : |x|_p = 1\right\}$$

olarak tanımlanır [61].

Hatırlatalım ki Önerme 3.1.3 (iii) den tüm yuvarlar hem açık hem kapalıdır. Çünkü $a+p^n\mathbb{Z}_p$ nin komplementi (tümleyeni) $a'+p^n\mathbb{Z}_p$ açık kümelerin $a' \notin a+p^n\mathbb{Z}_p$ olacak şekilde tüm $a' \in \mathbb{Q}_p$ nin birleşimidir. Ayrıca $\mathbb{Z}_p$ dizisel kompaktır. Yani, p -adik tamsayıların her dizisi yakınsak alt bir diziye sahiptir. Aynı şey herhangi bir yuvarların sonlu birleşimi için doğru olduğu kolaylıkla görülür [63].

Sonuç 3.1.6. $\mathbb{Q}_p$ kümesinden $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ serisi alınsın. $\sum_{k=0}^{\infty} a_k$ yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\lim_{k\to\infty} a_k = 0$ dır [64].

Eğer p -adik $a_0, a_1, \ldots$ dizisi interpole edilebilirse onun kısmi toplamlar dizisi $n \to \sum_{j=0}^{n} a_j$ formülüyle tanımlanabilir.

Teorem 3.1.4. $K \supset \mathbb{Q}_p$ ve $f \in C\left(\mathbb{Z}_p \to K\right)$ olsun. Aşağıda ifade edilen şekilde tek türlü bir $F \in C\left(\mathbb{Z}_p \to K\right)$ vardır [64]:

$$\begin{array}{ll} F(x+1)-F(x) = f(x) & \left(x \in \mathbb{Z}_p\right) \\ F(0) = 0 & \end{array}.$$

Bu teoremin bir sonucunu verelim:

Sonuç 3.1.7. Eğer K da bir dizi interpole edilebiliyorsa onun kısmi toplamlar dizisi de interpole edilebilir [64].

Tanım 3.1.20. Varsayalım ki $K \supset \mathbb{Q}_p$ olsun. Sürekli bir $f : \mathbb{Z}_p \to K$ fonksiyonunun *belirsiz toplamı* (indefinite)

$$n \mapsto \sum_{j=0}^{n-1} f(\mathrm{j}) \quad \left(n \in \mathbb{N}\right)$$

interpole edilen Sf sürekli fonksiyondur [64]. $Sf(x)$ $\left(x \in \mathbb{Z}_p\right)$ yerine aşağıdaki formül yazılır:

$$\lim_{n \to x} \sum_{j=0}^{n-1} f(j) = \sum_{j=0}^{x-1} f(j) .$$

Belirsiz toplam tanımından aşağıdaki teorem yazılır:

Teorem 3.1.5. $f : \mathbb{Z}_p \to K$ sürekli bir fonksiyon ve Sf de f fonksiyonunun belirsiz toplamı olsun. O halde

$$Sf\left(x+1\right) - Sf\left(x\right) = f\left(x\right)$$

tir [64].

3.1.6. $C\left(\mathbb{Z}_p \to K\right)$ ve $C^1\left(\mathbb{Z}_p \to K\right)$ için Mahler Tabanı

Bu tez boyunca $K \supset \mathbb{Q}_p$ olsun. p-adik değişkenli sürekli fonksiyonların davranışları reel sürekli fonksiyonlarınkinden oldukça farklıdır. Reel analizdeki birçok temel teoremin p-adik benzeri yoktur. Klasik analizde, bir yuvar üzerinde reel veya karmaşık değerli fonksiyonlara polinomlarla düzgün olarak yaklaşılabilir. Ancak onlar için kanoniksel seri açılım yoktur. p-adik analizde, $\mathbb{Z}_p \to K$ sürekli fonksiyonlar kanoniksel Mahler seri açılımına sahiptir [64].

1958 de Mahler, özel polinomları kullanarak $\mathbb{Z}_p$ den K ya sürekli fonksiyonlar için bir açılım tanımlamıştır [10]. Ayrıca, tüm $x \in \mathbb{Z}_p$ için $\left|\binom{x}{n}\right|_p \leq 1$ olacak şekilde $\mathbb{Z}_p$ den $\mathbb{Z}_p$ ye n. binom katsayısını incelemiştir.

$\lim_{n \to \infty} a_n = 0$ olmak üzere her bir $a_n \in K$ dizisi için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \qquad \left(x \in \mathbb{Z}_p\right)$$

serisi $\mathbb{Z}_p \to K$ ya sürekli bir fonksiyon tanımlar. Mahler,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f\left(k\right), \quad \sup_{x \in \mathbb{Z}_p} \left| f\left(x\right)\right|_p = \max_{n \geq 0} \left|a_n\right|_p$$

ile tek türlü olarak $\mathbb{Z}_p$ den K ya sürekli fonksiyonları tanımlamıştır. Burada a_n, f fonksiyonunun *Mahler katsayıları* ve $\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ serisine f fonksiyonunun *Mahler açılımı* denir [64].

Teorem 3.1.6. $\binom{*}{0},\binom{*}{1},\binom{*}{2},\ldots$ fonksiyonları $C(\mathbb{Z}_p \to K)$ nin bir ortanormal tabanını (Mahler tabanını) oluşturmaktadır ve aşağıdaki özelliklere sahiptir [64]:

i. $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ olsun.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \qquad (x \in \mathbb{Z}_p)$$

olacak şekilde K nın $a_0, a_1, \ldots$ tek türlü elemanları (f fonksiyonunun Mahler katsayıları) vardır. Bu seri düzgün yakınsaktır ve $\|f\|_\infty = \max\{|a_n| : n \in \{0,1,2,\ldots\}\}$ dır.

ii. Eğer $a_0, a_1, \ldots$ elemanları K da bir sıfır dizisi ise $x \mapsto \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ fonksiyonu $\mathbb{Z}_p \to K$ ya sürekli bir fonksiyon tanımlar.

a_n katsayısını fark operatörü ile bulunabilir. Yani; $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ için

$$(L_1 f)(x) = f(x+1) \quad (x \in \mathbb{Z}_p)$$
$$\Delta f = L_1 f - f$$

eşitlikleri verilsin. Varsayalım ki, $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ ve $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ Mahler açılımına sahip olsun. O halde $\Delta f = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \binom{*}{n}$ dir. $k \in \mathbb{Z}$, $k \geq 0$ için $\Delta^k f = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+k} \binom{*}{n}$ dır. Buradan $(\Delta^k f)(0) = a_k$ bulunur. $\Delta^k = (L_1 - I)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} L_j$ dir. Burada $(L_j f)(x) = f(x+j)$ dir. O halde $\Delta^k f = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(j)$ dir [64].

Teorem 3.1.7. $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ fonksiyonu $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ Mahler açılımına sahip olsun. a_n katsayısı

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(j) \quad (n = 0,1,2,\ldots)$$

ile elde edilir [64].

Yardımcı Teorem 3.1.12. $f : \mathbb{Z}_p \to K$ sınırlı bir fonksiyon ve $a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^{n-k} f(k)$ olsun.

a_n bulmanın farklı bir yolu da

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{x^n}{n!} = (\exp x) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \quad (x \in E)$$

denklemin eşitliğidir. Burada E, $\sum \frac{x^n}{n!}$ kuvvet serisinin yakınsaklık bölgesidir [64].

Teorem 3.1.8. (Mahler katsayıları ile C^1-fonksiyonların karakterizasyonu)

$f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ ve $f(*) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{*}{n}$ fonksiyonu Mahler açılımına sahip olsun. O zaman $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{n\to\infty} |a_n| n = 0$ olmasıdır [64].

Teorem 3.1.9. $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ olsun. f fonksiyonunun belirsiz toplamı Sf, $Sf \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ dir ve $\|f\|_1 \le \|Sf\|_1 \le p\|f\|_1$ dir. Burada $\|f\|_1 = \max\left\{ |a_n| |\gamma_n|_p^{-1} : n \in \{0,1,2,\ldots\} \right\}$ dır. Ayrıca, $\gamma_0 = p^0 = 1$ ve $\gamma_n = n - n_-$ olsun. $a_s \neq 0$ olmak üzere $n = a_0 + a_1 p + \ldots . + a_s p^s$ ve $n_- = a_0 + a_1 p + \ldots . + a_{s-1} p^{s-1}$ dır [64].

Özellik 3.1.1. Mahler tabanı aşağıdaki özelliklere sahiptir [64]:

i. $\binom{x+1}{n} = \binom{x}{n} + \binom{x}{n-1} \quad (n \ge 1)$

ii. $\binom{x+y}{n} = \sum_{j=0}^{n} \binom{x}{j} \binom{y}{n-j}$

iii. $\binom{x}{n}' = \sum_{j=0}^{n-1} \frac{(-1)^{n-j-1}}{n-j} \binom{x}{j} \quad (n \in \mathbb{N})$

iv. $(x)_n = x(x-1)\ldots(x-n+1)$ ve $(x)^n = x(x+1)\ldots(x+n-1)$ olarak tanımlansın. O zaman

$$\frac{(x)_n}{n!} = \binom{x}{n}, \; \frac{(-x)_n}{n!} = \binom{-x}{n} = (-1)^n \binom{x+n-1}{n} \text{ ve } \frac{(x)^n}{n!} = \binom{x+n-1}{n} \text{ dır.}$$

Örnek 3.1.8. (Belirsiz toplamın Mahler katsayısı) $f=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{*}{n}\in C\left(\mathbb{Z}_p\to K\right)$ olsun. f fonksiyonunun belirsiz toplamı Sf , $Sf=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{*}{n+1}$ Mahler açılımına sahiptir [64]:

$Sf=\sum_{n=0}^{\infty}b_n\binom{*}{n}$ ve $b_0=0$ olsun. $Sf\left(x+1\right)-Sf\left(x\right)=f\left(x\right)$ ve $\binom{x+1}{n}=\binom{x}{n}+\binom{x}{n-1}$ formüllerinden

$$\begin{aligned}f=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{*}{n}&=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\binom{*+1}{n}-\sum_{n=1}^{\infty}b_n\binom{*}{n}\\&=\sum_{n=1}^{\infty}b_n\binom{*}{n-1}=\sum_{n=0}^{\infty}b_{n+1}\binom{*}{n}\end{aligned}$$

elde edilir. O halde tüm n için $b_n=a_{n-1}$ dır. Buradan $f=\sum a_n\binom{*}{n}\in C\left(\mathbb{Z}_p\to K\right)$ ise $Sf=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{*}{n+1}$ elde edilir.

Sonuç 3.1.8. $f=\binom{*}{n}\in C\left(\mathbb{Z}_p\to K\right)$ ise f in belirsiz toplamı

$$S\binom{*}{n}=\binom{*}{n+1}\quad\left(n\in\mathbb{N}\right)$$

dır [64].

3.2. p -Adik Gama Fonksiyonu

Klasik gama fonksiyonu $\mathbb{C}$ de $0,-1,-2,\ldots$şeklinde basit kutup noktalarına sahip meramorfik bir fonksiyon olup,

$$\Gamma\left(1\right)=1,\ \Gamma\left(z+1\right)=z.\Gamma\left(z\right),\ \left(z\in\mathbb{C}\setminus\left\{0,-1,-2,\ldots\right\}\right)$$

şeklindeki fonksiyonel bağıntıyı sağlar. Böylece, $n\in\mathbb{N}$ için,

$$\Gamma\left(n+1\right)=n!$$

olur. $s\in\mathbb{C},\ \mathrm{Re(s)}>0$ olmak üzere gama fonksiyonunun integral gösterimi

$$\Gamma\left(s\right)=\int_0^{\infty}t^{s-1}e^{-t}dt$$

dir.

Teorem 3.2.1. E, $\mathbb{Z}_p$ nin bir altkümesi ve $\overline{E}$, E nin kapanışı olsun. E üzerinde düzgün sürekli bir $f : E \to \mathbb{Q}_p$ fonksiyonu verildiğinde, $\overline{E}$ üzerinde düzgün sürekli ve sınırlı olan bir tek

$$F : \overline{E} \to \mathbb{Q}_p,\ F(x) = f(x),\ x \in E$$

fonksiyonu vardır [62].

$\mathbb{Q}_p$ içinde bir $a_1, a_2, \ldots$ dizisi verilsin. Bu dizi, $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_p$, $f(n) = a_n$ şeklinde tanımlı bir fonksiyon olarak düşünülebilir. $\mathbb{N}$ doğal sayılar kümesi $\mathbb{Z}_p$ nin yoğun bir alt kümesi olduğundan, Teorem 3.2.1 e göre,

$$F : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p,\ F(n) = f(n),\ n \in \mathbb{N}$$

olacak biçimde en çok bir tane sürekli fonksiyon vardır. Eğer böyle bir F fonksiyonu varsa, (a_n) dizisi *interpole edilebilir* denir. Eğer $f(n) = a_n$ fonksiyonu $\mathbb{N}$ üzerinde düzgün sürekli ise, Teorem 3.2.1 ile (a_n) dizisinin interpole edilebileceği kesin olarak söylenebilir.

Önerme 3.2.1. Bir $f : \mathbb{N} \to \mathbb{Q}_p$, $f(n) = a_n$ fonksiyonunun $\mathbb{N}$ üzerinde düzgün sürekli olması için gerek ve yeter koşul, her $\varepsilon > 0$ sayısı için,

$$n = m + p^N \Rightarrow |a_n - a_m|_p < \varepsilon \tag{3.3}$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $N(\varepsilon)$ doğal sayısının bulunmasıdır.

Gama fonksiyonunun p-adik benzeri için, $n \to n!$ dönüşümü p-adik olarak yorumlanmalı ve interpolasyonla elde edilebileceği gösterilmelidir.

$x \in \mathbb{Z}_p$ ve $n \in \mathbb{N}$ $(n \neq x)$ sayısı x e yaklaştığında n değeri büyürken $|n!|_p$ küçüleceğinden p-adik olarak $\lim\limits_{n \to \infty} n! = 0$ elde edilir. Bu durumda ise,

$$f(n) = n!,\ (n = 1, 2, \ldots)$$

koşulunu gerçekleyen sürekli bir $f : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ fonksiyonu bulunamaz.

Bu sorunu aşmak için, $n!$'in modifiye edilmesi Y. Morita [5] tarafından önerilmiştir. Bu yaklaşımdaki fikir,

$$n! = 1.2\ldots n$$

çarpımında p ile bölünen çarpanların elimine edilmesi üzerine kuruludur.

Tanım 3.2.1. p-adik faktöriyel,

$$(n!)_p = \prod_{1 \leq j < n}{}' j$$

ile tanımlanır [64]. Burada $\prod'$, p ile bölünmeyen çarpanların çarpımını gösterir.

Bu tanıma göre, $\left|(n!)_p\right|_p = 1$ olur.

$n \to (n!)_p$ dönüşümünün interpole edilip edilemeyeceği araştırılırken, s nin yeterince büyük değerleri için, $\left((n+p^s)!\right)_p$ ve $(n!)_p$ sayıları karşılaştırılmalıdır. Bu sayılar arasında,

$$\left((n+p^s)!\right)_p = (n!)_p \prod_{j=1}^{p^s}{}'(n+j) \tag{3.4}$$

eşitliği yazılır. Aşağıdaki önermede, (3.4) eşitliğinin sağ tarafındaki çarpım için önemli sonuçlar içerir:

Önerme 3.2.2 (Genelleştirilmiş Wilson Teoremi) $p \neq 2$ bir asal sayı $n \in \mathbb{Z}$ ve $s \in \mathbb{N}$ olsun. Bu takdirde,

$$\prod_{j=0}^{p^s-1}{}'(n+j) \equiv -1 \left(\bmod\, p^s\right)$$

denkliği sağlanır [64].

Bu önermenin hipotezinde $n=0$ ve $s=1$ alınırsa, Wilson Teoremi olarak bilinen,

$$(p-1)! \equiv -1 (\bmod\, p)$$

denkliği bulunur.

Önerme 3.2.2 ile, $\left((n+p^s)!\right)_p$ ve $(n!)_p$ sayıları arasındaki (3.4) eşitliğinden,

$$\left((n+p^s)!\right)_p \equiv -(n!)_p \left(\bmod\, p^s\right)$$

denkliği elde edilir. Bu denklikteki işaret sorunu için, ikinci bir düzenlemeyle,

$$g(n) = (-1)^{n+1}(n!)_p,\ (n \in \mathbb{N})$$

fonksiyonu tanımlanırsa, p nin tek bir asal sayı olduğu kullanılarak, önceki denklikten,

$$g(n+p^s) \equiv g(n) \left(\bmod\, p^s\right)$$

bulunur. Buradan $\varepsilon = p^{-s+1}$ ve $m = n+p^s$ olmak üzere,

$$\left|g(m) - g(n)\right|_p \leq p^{-s} < p^{-s+1}$$

eşitsizliği gerçeklenir.

Böylece Önerme 3.2.1'deki (3.3) gerektirmesi doğrulanacağından, $g : \mathbb{N} \to \mathbb{Z}$ fonksiyonunun interpole edilebileceği sonucu elde edilir.

Tanım 3.2.2. p -adik gama fonksiyonu,

$$n \to (-1)^n \prod_{\substack{1 \leq j < n \\ (j,p)=1}} j \equiv (-1)^n \prod_{1 \leq j < n}{}' j\ ,\ (n \geq 2)$$

fonksiyonunun $\mathbb{Z}_p$ ye sürekli genişlemesi olarak tanımlanır. Burada $\prod'$ sembolü, $1 \le j < n$ aralığında yer alan tamsayılardan p ile aralarında asal olanların çarpımını gösterir. Başka bir ifade ile $\Gamma_p : \mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ fonksiyonu,

$$\Gamma_p(x) := \lim_{n \to x} (-1)^n \prod_{\substack{1 \le j < n \\ (j,p)=1}} j$$

ile tanımlanır.

Teorem 3.2.2. p tek asal sayı olsun. Bu takdirde,

i. $\forall\, x \in \mathbb{Z}_p$ için,

$$\Gamma_p(x+1) = \begin{cases} -x\Gamma_p(x) & , \ |x|_p = 1 \\ -\Gamma_p(x) & , \ |x|_p < 1 \end{cases}$$

dır.

ii. $\forall\, x, y \in \mathbb{Z}_p$ için, $\left|\Gamma_p(x) - \Gamma_p(y)\right|_p \le |x-y|_p$ dır.

iii. $\Gamma_p(0) = 1$, $\Gamma_p(1) = -1$, $\Gamma_p(2) = 1$ ve $\forall\, x \in \mathbb{Z}_p$ için, $\left|\Gamma_p(x)\right|_p = 1$ dır [64].

Not 3.2.1. $p = 2$ durumunda 2 -adik gama fonksiyonu,

$$n \to (-1)^n \prod_{\substack{1 \le j < n \\ (j,2)=1}} j \equiv (-1)^n \prod_{1 \le j < n}{}' j \qquad (n \ge 2)$$

fonksiyonunun $\mathbb{Z}_2$ ye sürekli genişlemesi olarak tanımlanır. Başka bir ifade ile $\Gamma_2 : \mathbb{Z}_2 \to \mathbb{Q}_2$ fonksiyonu

$$\Gamma_2(x) := \lim_{n \to x} (-1)^n \prod_{1 \le j < n}{}' j$$

ile tanımlanır. Γ_2 fonksiyonu için,

$$\left|\Gamma_2(x) - \Gamma_2(y)\right|_2 \le |x-y|_2 \qquad \left(x, y \in \mathbb{Z}_2 \ , \ |x-y|_2 \ne \frac{1}{4}\right)$$

$$\left|\Gamma_2(x) - \Gamma_2(y)\right|_2 \le 2|x-y|_2 \qquad \left(x, y \in \mathbb{Z}_2 \ , \ |x-y|_2 = \frac{1}{4}\right)$$

eşitsizlikleri sağlanır [64].

Teorem 3.2.3. $n \in \mathbb{N}$ için,

$$\Gamma_p(-n) = (-1)^{n+1-\left[\frac{n}{p}\right]} \left(\Gamma_p(n+1)\right)^{-1}$$

eşitliği gerçeklenir [64].

Teorem 3.2.4. $p \neq 2$ olmak üzere,

$$\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x) = (-1)^{l(x)} \quad , \quad (x \in \mathbb{Z}_p)$$

sağlanır. Burada l, $l : \mathbb{Z}_p \to \{1, 2, \ldots, p\}$ olup, $x \in \mathbb{Z}_p$ yi mod $p\mathbb{Z}_p$ ye göre, onun $\{1, 2, \ldots, p\}$ kalanlarına eşler.

$p = 2$ ise, her $x \in \mathbb{Z}_2$ için,

$$\Gamma_2(x)\Gamma_2(1-x) = (-1)^{\sigma_1(x)+1}$$

olur ve burada σ_1,

$$\sigma_1\left(\sum_{j=0}^{\infty} a_j 2^j\right) = a_1$$

formülüyle tanımlanır [64].

Not 3.2.2. $\Gamma_p(x)\Gamma_p(1-x)$ için verilen eşitlikler,

$$\Gamma(z)\Gamma(1-z) = \frac{\pi}{\sin(\pi z)}$$

klasik formülünün p -adik benzerini oluşturur ve $z = \frac{1}{2}$ alınırsa, $\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \pi$ elde edilir.

Ayrıca, Teorem 3.2.4 ile $p \neq 2$ için, $\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)$ değeri,

$$\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^2 = (-1)^{l\left(\frac{1}{2}\right)}$$

bulunur. Burada,

$$l\left(\frac{1}{2}\right) = l\left(\frac{1}{2}(p+1)\right) = \frac{1}{2}(p+1)$$

olduğundan,

$$\Gamma_p\left(\frac{1}{2}\right)^2 = \begin{cases} 1 & , \quad p \equiv 3 \pmod 4 \\ -1 & , \quad p \equiv 1 \pmod 4 \end{cases}$$

olur.

Böylece, klasik durumda $\pi = 3{,}14\ldots$ sayısının oynadığı rol p-adik durumda 1, -1 sayılarından biri tarafından devralınır.

Teorem 3.2.5. (Γ_p hakkında temel formüller)

$n \in \mathbb{N}$ ve s_n, p tabanında $n = \sum_{j=0}^{s} a_j p^j \quad (a_s \neq 0)$ sayılarının toplamı olsun. O zaman

1) $\Gamma_p\left(n+1\right)=(-1)^{n+1}\dfrac{n!}{\left[\dfrac{n}{p}\right]!\,p^{\left[\frac{n}{p}\right]}}$

2) $\Gamma_p\left(p^n\right)=(-1)^p\dfrac{p^n!}{p^{n-1}!\,p^{p^n-1}}$

3) $n!=(-1)^{n+1-s}\left(-p\right)^{\frac{n-s_n}{p-1}}\prod_{j=0}^{s}\Gamma_p\left(\left[\dfrac{n}{p^j}\right]+1\right)$

4) $p^n!=(-1)^p\left(-p\right)^{\frac{p^n-1}{p-1}}\prod_{j=0}^{n}\Gamma_p\left(p^j\right)$

eşitlikleri ağlanır [64].

Teorem 3.2.6. (p-adik Euler Sabiti) Klasik Euler sabiti $\gamma=-\Gamma'(1)/\Gamma(1)$ olarak tanımlanmıştır. p-adik Euler sabiti γ_p de

$$\gamma_p=-\frac{\Gamma'_p\left(1\right)}{\Gamma_p\left(1\right)}=\Gamma'_p\left(1\right)=-\Gamma'_p\left(0\right)$$

formülüyle tanımlanmıştır. Ayrıca $\mathbb{Q}_p$ de p-adik Euler sabiti γ_p nin limit gösterimi aşağıdaki gibi ifade edilmiştir [64]:

$$\gamma_p=\lim_{n\to\infty}p^{-n}\left\{1-(-1)^p\frac{p^n!}{p^{n-1}!\,p^{p^{n-1}}}\right\}.$$

Teorem 3.2.7. (Γ_p fonksiyonunun Mahler katsayısı)

$\Gamma_p\left(x+1\right)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{x}{n}$ $\left(x\in\mathbb{Z}_p\right)$, Γ_p fonksiyonunun Mahler serisi olsun. Katsayıları da aşağıdaki eşitlikte verilmiştir:

$$\exp\left(x+\frac{x^p}{p}\right)\frac{1-x^p}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}b_nx^n \qquad \left(x\in E\right)$$

ve

$$a_n=\left(-1\right)^{n+1}n!b_n$$

dır. Burada E, $\sum\dfrac{x^n}{n!}$ kuvvet serisinin yakınsaklık bölgesidir [11].

Teorem 3.2.8. (Γ_p fonksiyonunun Mahler katsayısı)

$\left(x\right)^k=x\left(x+1\right)\ldots\left(x+k-1\right)$ ve c_n rasyonel sayısı da

$$\exp\left(x+\frac{x^p}{p}\right)=\sum_{n=0}^{\infty}c_n x^n$$

kuvvet serisinin açılımıyla tanımlansın. $x\in\mathbb{Z}_p$ ve $0\le a<p$ için

$$\Gamma_p(-a+px)=\sum_{k=0}^{\infty}p^k c_{a+pk}(x)^k$$

dır [65], [66].

Not edelim ki $(x)^k=(-1)^k\binom{-x}{k}k!$ dir.

3.3. p-Adik Gama Fonksiyonunun q-Genişlemesi

Bu bölümde q-analiz ve p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin ve özellikleri ayrıntılı olarak incelenmiştir.

3.3.1. q-Analiz

q-analiz yüzyıldır çalışılmasına rağmen özel sayıların ve polinomların q-açılımları halen ilgi görmektedir. Kuantum analizinde de, analizde iyi billinen binom katsayısının q-açılımı da önemli bir role sahiptir [67,68].

q-binom katsayıları veya Gaussian polinomları q-serilerinde birçok eşitlikte ortaya çıkmaktadır. Kombinasyonda q-binom katsayıları, elle kolay işlem yapılabilmesinden dolayı genelleştirilmiş polinomlar olarak bu katsayıları kabul eden temel kombinatorik yapılar ile önemli bir üne sahip olmuştur.

Bu tez boyunca $q\in\mathbb{C}$ ise $|q|<1$; $q\in\mathbb{C}_p$ ise $|q-1|_p<p^{1/1-p}$ ya da $|1-q|_p\le 1$ dir.

Tanım 3.3.1. n negatif olmayan herhangi bir tamsayı için n nin q-benzeri

$$(n)_q=\frac{q^n-1}{q-1}=q^{n-1}+q^{n-2}+\ldots+1,\quad q\ne 1$$

notasyonu ile tanımlanır [67]. Örneğin;

$$(0)_q=0,\quad (2)_q=1+q,\quad (-1)_q=-\frac{1}{q}\text{ dur.}$$

Özellik 3.3.1. m,n tamsayıları için

$$(-n)_q = -\frac{1}{q^n}(n)_q, \quad (n)_{1/q} = \frac{1}{q^{n-1}}(n)_q, \quad (mn)_q = (m)_q (n)_{q^m}$$

eşitlikleri sağlanır.

Tanım 3.3.2. q*-faktöriyel* $(k)_q!$,

$$(k)_q! = (k)_q (k-1)_q \dots (2)_q (1)_q, \quad (0)_q! = 1$$

ile tanımlanır [67].

Örneğin; $(1)_q! = 1,\quad (2)_q! = 1+q,\quad (3)_q! = 1+2q+2q^2+q^3,\ (n)_{1/q}! = \frac{1}{q^{n(n-1)/2}}(n)_q!$ dir.

Tanım 3.3.3. q-binom katsayısına binom katsayısının q-benzeri ayrıca *Gaussian katsayısı* veya *Gaussian polinomu* da denir [69]. q-binom katsayısı $\binom{n}{k}_q$,

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q!}{(n-k)_q!(k)_q!}$$

ile tanımlanır. Yani negatif olmayan n,k ve $n \geq k$ ile

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(n)_q (n-1)_q \dots (n-k+1)_q}{(k)_q!}, \qquad \binom{n}{0}_q = \binom{n}{n}_q = 1$$

şeklinde tanımlıdır. Bir başka ifadesi

$$\binom{n}{k}_q = \frac{(q^n-1)(q^{n-1}-1)\dots(q^{n-k+1}-1)}{(q^k-1)(q^{k-1}-1)\dots(q-1)} \tag{3.5}$$

dır [67].

Açıktır ki $q \to 1$ iken q-binom katsayısı genel binom katsayısına indirgenir.

Özellik 3.3.2. q-binom katsayıları iki q-Pascal kuralına sahiptir, yani, $1 \leq k \leq n-1$ için

$$\binom{n}{k}_q = \binom{n-1}{k-1}_q + q^k \binom{n-1}{k}_q$$

ve

$$\binom{n}{k}_q = q^{n-k}\binom{n-1}{k-1}_q + \binom{n-1}{k}_q \tag{3.6}$$

dır [12,67].

Ayrıca q-binom katsayısı aşağıdaki özelliklere de sahiptir:

Özellik 3.3.3. Her $n \in \mathbb{Z}$ ve $0 \leq j \leq k$ için aşağıdaki özdeşlikler vardır [67]:

i. $\binom{n}{k}_{1/q} = \frac{1}{q^{k(n-k)}}\binom{n}{k}_q$ [67].

ii. $\binom{-n}{k}_q = (-1)^k q^{\frac{-k(k-1)}{2}-nk}\binom{n+k-1}{k}_q$

Özel durumda $\binom{-1}{k}_q = (-1)^k q^{\frac{-k(k+1)}{2}}$ [67].

iii. $(x-1)(x-q)\ldots(x-q^{n-1}) = \sum_{k=0}^{n}(-1)^{n-k} q^{\binom{n-k}{2}}\binom{n}{k}_q x^k$ [70].

$\mathbb{Z}$ den $\mathbb{Z}_p$ ye yukarıdaki formüller genişletilmek istenilirse $|q-1|_p < 1$ durumunda tanımlı olur. O halde, eğer $|q-1|_p < 1$ ise $x, y \in \mathbb{Z}_p$ için $(xy)_q = (x)_q (y)_{q^x}$ vardır.

Conrad $|q-1|_p < 1$ ile p-adik değişkeni q için $\binom{x}{n}_q$ ile $\binom{x}{n}$ binom katsayı polinomlarının yerini alarak p-adik analizde sürekli fonksiyonlar için Mahler açılımın q-benzerini incelemiştir [12].

Teorem 3.3.1 (q-Mahler Teoremi). $|q-1| < 1$ ile $q \in K$ için $f : \mathbb{Z}_p \to K$ sürekli fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n\geq 0} a_{n,q}\binom{x}{n}_q$$

formülünde tek türlü gösterime sahiptir. Burada $a_{n,q} \in K$ ve $\lim_{n\to\infty} a_{n,q} = 0$ dır. $a_{n,q}$ ise

$$a_{n,q} = \sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}_q (-1)^{n-k} q^{(n-k)(n-k-1)/2} f(k)$$

formülüyle bulunur [12].

f fonksiyonunun $a_{n,q}$ Mahler katsayısını hesaplamanın bir başka yolu da Yardımcı Teorem 3.1.12 nin q-benzeri olan aşağıdaki teoremdir.

Yardımcı Teorem 3.3.1. f, $\mathbb{Z}_p$ üzerinde sürekli bir fonksiyon ise

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(\mathrm{n})\frac{X^n}{(n)_q!} = E_q(X)\sum_{n=0}^{\infty} c_n \frac{X^n}{(n)_q!}$$

eşitlik sağlanır. $E_q(X)$ exponansiyel serinin q-benzeridir ve Jackson tarafından

$$E_q(X)=\sum_{n\geq 0}\frac{X^n}{(n)_q!}$$

ile tanımlanmıştır [12].

3.3.2. p -Adik Gama Fonksiyonunun q -Genişlemesi

p -adik gama fonksiyonunun q -genişlemesi 1980 yılında Koblitz tarafından tanımlanmıştır. Bu kısımda p -adik gama fonksiyonunun q -genişlemesi incelenmiş ve önemli özellikleri verilmiştir.

Tanım 3.3.4. $q\neq 1$ ve $|q-1|_p<1$ ile $q\in\mathbb{C}_p$ bir parametreye bağlı p -adik gama fonksiyonunun q -genişlemesi

$$\Gamma_{p,q}(n)=(-1)^n\prod_{\substack{1\leq j<n\\(j,p)=1}}\frac{1-q^j}{1-q}$$

şeklinde tanımlandı [7, 8]. Burada $\mathbb{C}_p$, $\mathbb{Q}_p$ nın cebirsel kapanışıdır. $x\in\mathbb{Z}_p$ için

$$\Gamma_{p,q}(x)=\lim_{n\to x}(-1)^n\prod_{\substack{1\leq j<n\\(j,p)=1}}\frac{1-q^j}{1-q}$$

formulü ile tanımlanmıştır. Burada n, x e pozitif tamsayılarla yaklaşır. Not edelim ki $\lim_{q\to 1}\Gamma_{p,q}(x)=\Gamma_p(x)$ dır.

Özellik 3.3.4. $\Gamma_{p,q}$ aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i. $\forall x\in\mathbb{Z}_p$ için

$$\Gamma_{p,q}(x+1)=\begin{cases}-\frac{1-q^x}{1-q}\Gamma_{p,q}(x), & |x|_p=1\\ -\Gamma_{p,q}(x), & |x|_p<1\end{cases}$$

dir.

ii. $\Gamma_{p,q}(1)=1,\quad \Gamma_{p,q}(2)=-1.$

iii. $\forall x\in\mathbb{Z}_p$ için $\left|\Gamma_{p,q}(x)\right|_p=1$ [7,8].

iv. $\Gamma_{p,q}(n+1)=(-1)^{n+1}\dfrac{(n)_q!}{(p)_q^{\left[\frac{n}{p}\right]}\left(\left[\frac{n}{p}\right]\right)_{q^p}!}$ [26].

v. $$\Gamma_{p,q}\left(p^n\right)=(-1)^p \frac{\left(p^n-1\right)_q!}{(p)_q^{p^{n-1}-1}\left(p^{n-1}-1\right)_{q^p}!} \quad [26].$$

Teorem 3.3.2 ($\Gamma_{p,q}$ fonksiyonunun Mahler açılımı). $q\in\mathbb{C}_p$, $|q-1|_p<p^{\frac{-1}{p-1}}$ olsun. $\tau_{p,q}(n)$, $\Gamma_{p,q}(n+1)$ dizisinin n inci q-Mahler katsayısıdır. $\Gamma_{p,q}$ Mahler açılımı

$$\Gamma_{p,q}(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{p,q}(n)\binom{x}{n}_q \quad \left(x\in\mathbb{Z}_p\right)$$

şeklinde ifade edilir ve katsayıları da

$$\sum_{n\geq 0}(-1)^{n+1}\tau_{p,q}(n)\frac{X^n}{(n)!_q}=\frac{1-X^p}{1-X}E_{1\backslash q}(X)E_{q^p}\left(\frac{X^p}{(p)_q}\right)$$

formülüyle bulunur.

$$E_{1\backslash q}(X)E_{q^p}\left(\frac{X^p}{(p)_q}\right)=\sum_{n\geq 0}b_{p,q}(n)\frac{X^n}{(n)_q!} \tag{3.7}$$

dır ve $n\to\infty$ iken $b_{p,q}(n)\to 0$. Burada $E_q(X)$ üstel serinin q-benzeridir ve Jackson tarafından

$$E_q(X)=\sum_{n\geq 0}\frac{X^n}{(n)_q!}$$

şeklinde tanımlanmıştır [12].

p-adik Euler sabitinin q-genişlemesi ile ilgili birkaç teorem elde edilmiştir. Bunlar;

Teorem 3.3.3. $q\neq 1$ ve $|q-1|_p<1$ ile $q\in\mathbb{C}_p$ olsun. Diamond'nın p-adik Euler sabitinin q-genişlemesi ile p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesi arasındaki ilişki

$$\Gamma'_{p,q}(0)=-\left(1-\frac{1}{p}\right)\gamma_{p,q}$$

şeklinde verilmiştir [7].

Teorem 3.3.4. $q\in\mathbb{C}_p$ iken $|q-1|_p<p^{-1/(p-1)}$ olsun. p-adik Euler sabitinin q-genişlemesi

$$\gamma_{p,q}=-\frac{\Gamma'_{p,q}(1)}{\Gamma_{p,q}(1)}=\Gamma'_{p,q}(1)=-\Gamma'_{p,q}(0)$$

olarak bulunmuştur. p-adik Euler sabitinin q-genişlemesinin limit gösterimi

$$\gamma_{p,q} = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \left\{ 1 - (-1)^p \frac{\left(p^n - 1\right)_q !}{(p)_q^{p^{n-1}-1} \left(p^{n-1} - 1\right)_{q^p} !} \right\}$$

dır [26].

3.4. p -Adik İntegraller

Reel analizde antitürev ve integral, $f:\mathbb{R}\to\mathbb{R}$ sürekli fonksiyonunun antitürevi F olmak üzere

$$F(b) - F(a) = \int_a^b f(x)\,dx$$

formulüne bağlıdır. p -adik analizde $P: C\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right) \to C\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$ iyi tanımlı antitürev dönüşümü

$$\int_a^b f(x)\,dx := Pf(b) - Pf(a) \qquad \left(a, b \in \mathbb{Z}_p\right)$$

ile tanımlanmıştır. Not edelim ki $\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p$ ye her sürekli fonksiyon, $C^1\left(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{Q}_p\right)$ de bir anti türeve sahiptir. Ancak bu yaklaşımın yararları henüz ispatlanmamıştır. p -adik integrali tanımlamanın bir başka yolu da ölçü teorisini kullanmaktır [64].

μ Lebesgue ölçüsüne benzeyecek şekilde $\mathbb{Q}_p$ nin $\mu(A)$ elemanını $\mathbb{Q}_p$ nin A açık kompakt alt kümesiyle işaretleyelim. Bunun için μ aşağıdaki üç koşulu sağlamalıdır:

i. $\mu(A \cup B) = \mu(A) + \mu(B)$ $\left(A \cap B \neq \varnothing\right)$ (toplanabilirlik)

ii. $\mu(a + A) = \mu(A)$ $\left(a \in \mathbb{Q}_p\right)$ (ötelemeyi koruma)

iii. $\sup\left\{ \left|\mu(A)\right|_p : A \subset \mathbb{Z}_p, A \text{ açık kompakt} \right\} < \infty$ (sınırlılık)

Teorem 3.4.1. Eğer μ, $\mathbb{Q}_p$ nin her açık kompakt alt kümesindeki elemanları bir p -adik sayıya dönüştüren bir fonksiyonsa ve μ yukarıdaki üç koşulu sağlıyorsa $\mu = 0$ dır [64].

Yukarıdaki teoremden de anlaşılacağı gibi $\mathbb{Q}_p$ de Lebesgue integralinde veya ölçüsünde ciddi engeller vardır. Bu yüzden yukarıdaki koşulların zayıflatılması düşünülmüştür. Bunlardan ilki, iii. koşulu zayıflatmaktır. μ (çarpımsal) bir sabiti tanımlar ve i., ii. koşullarını sağlarsa $\mu\left(\mathbb{Z}_p\right) = 1$ olduğunda μ tam olarak tanımlanır. Buradan da $p^n\mathbb{Z}_p$ nin ölçüsünün p^{-n} olduğu görülür. Bu da integral teorisinin ortaya çıkışının başlangıcıdır [64].

Teorem 3.4.2. X , $\mathbb{Q}_p$ nin kompakt-açık altkümesi olsun. X kümesini oluşturan yuvarların kümesinden $\mathbb{Q}_p$ kümesine her bir μ dönüşümü $a+p^n\mathbb{Z}_p \subset X$ için

$$\mu\left(a+p^n\mathbb{Z}_p\right)=\sum_{b=0}^{p-1}\mu\left(a+bp^n+p^{n+1}\mathbb{Z}_p\right)$$

sağlıyorsa X üzerinde tek türlü bir p -adik ölçüme genişletilebilir [63].

3.4.1. Volkenborn İntegrali

Klasik Riemann integralinde çalışılan fonksiyonların en basit sınıfı kompakt bir yuvar üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfıdır. p -adik durumda, daha güçlü özellik olan sürekli olarak diferansiyellenebilme koşulu varsayılmalıdır.

Tanım 3.4.1. Eğer

$$\Phi f\left(x,\mathrm{y}\right)=\frac{f\left(x\right)-f\left(y\right)}{x-y}=\ell$$

olarak tanımlanan iki değişkenli fonksiyon $\left(x,y\right)\to\left(a,a\right)$, $x\neq y$ iken $\ell=f'\left(a\right)$ limitine sahipse f fonksiyonuna $a\in\mathbb{Z}_p$ noktasında sürekli diferansiyellenebilirdir denir ve $f\in C\left(\mathbb{Z}_p\to K\right)$ ile gösterilir.

p -adik değerli fonksiyonların integrasyonu ilk kez F. Thomas ve F. Bruhat tarafından düşünüldü. Ancak bu integraller analitik ve aritmetiksel amaçları için oldukça sınırlıydı. Bunun üzerine A. Volkenborn, 1972 yılında yeni bir integral tanımlamıştır.

Bir f fonksiyonu için Riemann toplamı

$$\frac{1}{p^n}\sum_{j=0}^{p^n-1}f(\mathrm{j})=\sum_{j=0}^{p^n-1}f(\mathrm{j})\mu\left(j+p^n\mathbb{Z}_p\right)$$

olarak düşünülmüştür. Eğer bu toplamın limiti ($n\to\infty$) olarak varsa, $\mathbb{Z}_p$ üzerinde f in integrali tanımlanmıştır.

Tanım 3.4.2. $f\in C^1\left(\mathbb{Z}_p\to K\right)$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p}f\left(x\right)dx=\lim_{n\to\infty}p^{-n}\sum_{j=0}^{p^n-1}f(\mathrm{j})$$

şeklinde p *-adik integral* tanımlanmıştır. Volkenborn'un tanımladığı integral ile yapılan etkili çalışmaların onuruna p -adik integral, Volkenborn integrali olarak adlandırılmıştır. Hatırlatalım ki, Teorem 3.1.9 de Sf de C^1-fonksiyonudur ve $\|Sf\|_1 \leq p\|f\|_1$ dır. Volkenborn integralini belirsiz toplam ile tanımı

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \lim_{n\to\infty} \frac{Sf\left(p^n\right) - Sf\left(0\right)}{p^n} = \left(Sf\right)'(0)$$

şeklinde verilebilir.

Örnek 3.4.1. x, x^2, x^3, x^n fonksiyonlarının Volkenborn integral değerleri

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x dx = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n-1} j = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^2 dx = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n-1} j^2 = \frac{1}{6}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^3 dx = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n-1} j^3 = 0$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^n dx = \lim_{m\to\infty} p^{-m} \sum_{j=0}^{p^m-1} j^n = B_n \quad \left(n = 0,1,2,\ldots\right)$$

biçiminde hesaplanır. Burada B_n , n inci p -adik Bernoulli sayısıdır.

Bazı özel fonksiyonların Volkenborn integral değeri aşağıdaki gibidir:

Özellik 3.4.1. $f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{*}{n} \in C^1\left(\mathbb{Z}_p \to K\right)$ olsun. O halde Mahler katsayılı fonksiyonunun Volkenborn integral değeri:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(\mathrm{x})\,\mathrm{dx} = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

dir [64].

Örnek 3.4.2. $a \in \mathbb{C}_p$, $a \neq 1$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} a^x dx = \frac{\log a}{a-1}$$

dir. Böylece,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} a^x dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{x}{j} \left(a-1\right)^j dx = \sum_{j=0}^{\infty} \left(a-1\right)^j \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{j} dx$$

eşitliğine ulaşılır. Özellik 3.4.1 den,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} a^x dx = \sum_{j=0}^{\infty} (a-1)^j \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{j=1}^{\infty} (a-1)^{j-1} \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

yazılır ve logaritma tanımından

$$\int_{\mathbb{Z}_p} a^x dx = \sum_{j=1}^{\infty} (a-1)^{j-1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=1}^{\infty} \frac{(a-1)^j}{a-1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{\log a}{a-1}$$

elde edilir [64].

Özellik 3.4.2. $f : \mathbb{Z}_p \to K$ olmak üzere $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \quad (x \in \mathbb{Z}_p)$ analitik fonksiyon olsun. Bir analitik fonksiyonun Volkenborn integral değeri;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n \right) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} x^n dx$$

dır [64].

Özellik 3.4.3. $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ ve $s \in \mathbb{Z}_p$ olsun. Volkenbon integrali aşağıdaki özelliklere sahiptir [64]:

i. $$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)\, dx = (Sf)'(s)$$

ii. $$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)\, dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, dx = (Sf')(s)$$

veya

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)\, dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, dx = \sum_{j=0}^{s-1} f'(j).$$

Bu özellik Volkenborn integralinin ötelemeyi korumadığını (not translation invariant) gösrerir.

iii. $$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+s+1)\, dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)\, dx = f'(s)$$

dır. Özel durumda

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)\, dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)\, dx = f'(0)$$

dır.

Özellik 3.4.4. $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ olsun. O zaman,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(-x)\, dx = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)\, dx$$

eşitliği sağlanır.

Ek olarak, eğer f tek fonksiyon ise $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = -\frac{1}{2} f'(0)$ dir [64].

Teorem 3.4.3. $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ ve $n \in \{0,1,...\}$ olsun. $j \in \{0,1,...,\mathrm{p}-1\}$ için

$$\int_{j+p^n\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \int_{p^n\mathbb{Z}_p} f(j+x)dx = p^{-n} \int_{\mathbb{Z}_p} f(j+p^n x)dx$$

ve

$$\int_{T_p} f(x)dx = p^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} (pf(x) - f(px))dx$$

eşitlikleri vardır [64]. Hatırlatalım ki $T_p = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ dir.

3.4.2. Fermiyonik p-Adik q-İntegral

$|1-q|_p < p^{-\frac{1}{p-1}}$ ile $q \in \mathbb{C}_p$ ve p tek asal sayı olsun. T. Kim 2002 yılında, Euler sayılarını ve polinomlarını içeren yararlı formülleri türetmek için p-adik q-integralini tanımlamıştır. T. Kim q-integrali tanımlamak için $\mathbb{Z}_p$ üzerinde *q-ölçüyü*

$$\mu_q(j + p^n\mathbb{Z}_p) = \frac{q^j}{(p^n)_q}$$

olarak ifade etmiştir. [40].

Tanım 3.4.3. Bir f fonksiyonu için *Riemann toplamının q-benzeri*

$$\frac{1}{(p^n)_q} \sum_{j=0}^{p^n-1} q^j f(\mathrm{j}) = \sum_{j=0}^{p^n-1} f(\mathrm{j})\mu_q(j + p^n\mathbb{Z}_p)$$

şeklinde ifade edilmiştir. Eğer bu toplamın limit ($n \to \infty$) varsa $\mathbb{Z}_p$ üzerinde f fonksiyonunun p-adik q-integrali tanımlanır.

Tanım 3.4.4. $f \in C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ fonksiyonunun *p-adik q-integral* ya da başka bir değişle *q-Volkenborn integrali*

$$I_q(f) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_q(x) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{(p^n)_q} \sum_{j=0}^{p^n-1} f(j)q^j$$

ile tanımlanmıştır [40].

Tanım 3.4.5. $\mathbb{Z}_p$ üzerinde *fermiyonik p-adik q-integrali*

$$I_{-q}\left(f\right)=\int_{\mathbb{Z}_p} f\left(x\right)d\mu_{-q}\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\frac{1}{\left(p^n\right)_{-q}}\sum_{j=0}^{p^n-1} f\left(j\right)q^j\left(-1\right)^j \tag{3.8}$$

olarak tanımlanmıştır. Burada $\left(x\right)_{-q}=\dfrac{1-\left(-q\right)^x}{1+q}$ dır. $f\in C\left(\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}_p\right)$ ve $n\in\mathbb{N}$ için (3.8) eşitliğinden aşağıdaki eşitlik elde edilmiştir [29]:

$$q^n I_{-q}\left(f\left(x+n\right)\right)+\left(-1\right)^{n-1} I_{-q}\left(f\left(x\right)\right)=\left(2\right)_q\sum_{j=0}^{p^N-1} f\left(j\right)q^j\left(-1\right)^{n-1-j}.$$

Özel durumda $n=1$ iken

$$qI_{-q}\left(f\left(x+1\right)\right)+I_{-q}\left(f\left(x\right)\right)=\left(2\right)_q f\left(0\right) \tag{3.9}$$

dır.

3.4.3. Fermiyonik p-Adik İntegral

p tek asal sayısı olsun. Fermiyonik p-adik q-integralinden yararlanılarak, $f\in C\left(\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}_p\right)$ fonksiyonu için $\mathbb{Z}_p$ üzerinde *fermiyonik p-adik integral*

$$I_{-1}\left(f\right)=\int_{\mathbb{Z}_p} f\left(x\right)d\mu_{-1}\left(x\right)=\lim_{n\to\infty}\sum_{j=0}^{p^n-1} f\left(j\right)\left(-1\right)^j \tag{3.10}$$

olarak tanımlanmıştır. $f\in C\left(\mathbb{Z}_p\to\mathbb{C}_p\right)$ fonksiyonu için (3.10) eşitliğinden aşağıdaki eşitlikler elde edilmiştir [29]: $n\in\mathbb{N}$ için

$$I_{-1}\left(f\left(x+n\right)\right)-\left(-1\right)^n I_{-1}\left(f\left(x\right)\right)=2\sum_{j=0}^{n-1}\left(-1\right)^{n-1-j} f\left(j\right) \tag{3.11}$$

eşitliği sağlanır ve özel durumda

$$I_{-1}\left(f\left(x+1\right)\right)+I_{-1}\left(f\left(x\right)\right)=2f(0) \tag{3.12}$$

dır.

3.5. Bazı Özel Sayılar ve Polinomlar

Son zamanlarda birçok yazar ardışık tamsayıların toplamları üzerine çalışmıştır. Bu kısımda integraller yardımıyla ifade edilebilen bazı özel sayılar ve polinomlar hakkında bilgiler verilmiştir. Bu sayılar ve polinomlar bulgular kısmında kullanılacaktır. Bunlar Changhee, q-Changhee ve q-Euler sayıları ve polinomlarıdır.

3.5.1. Changhee Sayıları ve Polinomları

Umbral analizden türeyen Sheffer dizilerinden Changhee sayıları ve polinomları aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Tanım 3.5.1. *Changhee polinomları*

$$\frac{2}{t+2}(1+t)^{x}=\sum_{n=0}^{\infty}Ch_{n}(x)\frac{t^{n}}{n!} \tag{3.13}$$

üreteç fonksiyonu ile tanımlanmıştır. (3.13) eşitliğinde $x=0$ iken $Ch_n(0)=Ch_n$ Changhee sayıları denir [71].

Changhee sayıları ve polinomları ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir [33]:

Özellik 3.5.1. $n\geq 0$ için Changhee sayıları Ch_n,

$$\int_{\mathbb{Z}_p}(x)_n\,d\mu_{-1}(x)=Ch_n\,.$$

fermiyonik p-adik integral gösterimine sahiptir. Burada $(x)_n=x(x-1)\ldots(x-n+1)$ dir [33].

Özellik 3.5.2. $n\geq 0$ için Changhee polinomları $Ch_n(x)$,

$$\int_{\mathbb{Z}_p}(x+y)_n\,d\mu_{-1}(y)=Ch_n(x)$$

dir [33].

Özellik 3.5.3. $n\geq 0$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x}{n}d\mu_{-1}(x)=\left(\frac{-1}{2}\right)^{n}$$

dir [33].

Ayrıca, *ikinci tür n. Changhee sayılarının üreteç fonksiyonu*

$$\int_{\mathbb{Z}_p}(1+t)^{-x-y}\,d\mu_{-1}(y)=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{C}h_n(x)\frac{t^{n}}{n!}$$

dır. *İkinci tür n. Changhee polinomları*

$$\hat{Ch}_n(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} (-x-y)\, d\mu_{-1}(y)$$

ve *ikinci tür n. Changhee sayıları*

$$\hat{Ch}_n = \int_{\mathbb{Z}_p} (-x)_n\, d\mu_{-1}(x)$$

fermiyonik p -adik integral gösterimine sahiptir.

3.5.2. q -Changhee Sayıları ve Polinomları

Umbral analizden türeyen Changhee sayıları ve polinomlarının q -genişlemesi aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

Tanım 3.5.2. q *-Changhee polinomu,*

$$\frac{1+q}{q(1+t)+1}(1+t)^x = \sum_{n=0}^{\infty} Ch_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!} \qquad \left(|t|_p < p^{\frac{-1}{p-1}}\right) \tag{3.14}$$

eşitliği ile ifade edilmiştir. (3.14) eşitliğinde $x=0$ iken $Ch_{n,q}(0) = Ch_{n,q}$ q *-Changhee sayısı* denir [37].

Not edelim ki $q=1$ iken $Ch_{n,1}(x) = Ch_n(x)$ dır. $q=1$ ve $x=0$ iken $Ch_{n,1}(0) = Ch_n(0) = Ch_n$ dır. q -Changhee sayıları ve polinomları ile ilgili aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir [37]:

Özellik 3.5.4. $n \geq 0$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x)_n\, d\mu_{-q}(x) = Ch_{n,q}\,.$$

Burada $(x)_n = x(x-1)\ldots(x-n+1)$ dir [37].

Özellik 3.5.6. $n \geq 0$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+y)_n\, d\mu_{-q}(y) = Ch_{n,q}(x)$$

dir [37].

Özellik 3.5.7. $n \geq 0$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} d\mu_{-q}(x) = \left(\frac{-q}{1+q}\right)^n$$

dir [37].

T. Kim ve ark. ikinci tür q -Changhee polinomlarını aşağıdaki gibi tanımlamışlardır [37]:

$$\frac{1+q}{1+q+t}(1+t)^{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}\hat{Ch}_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!}\qquad\left(|t|_p<p^{-\frac{1}{p-1}}\right). \tag{3.15}$$

Tanım 3.5.3. *Fermiyonik p -adik q -integral ile q -Changhee sayıları*

$$\hat{Ch}_{n,q}=\int_{\mathbb{Z}_p}(-x)_n\,d\mu_{-q}(x)\qquad(n\geq 0)$$

ve q *-Changhee polinomları*

$$\hat{Ch}_{n,q}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}(-x-y)_n\,d\mu_{-q}(y)\qquad(n\geq 0)$$

şeklinde ifade edilmiştir [37] ve aşağıdaki özelliklere sahiptir:

Özellik 3.5.8. $n\geq 0$ için $\hat{Ch}_{n,q}=(-1)^n\dfrac{2+q}{(1+q)^n}$ ile ikinci tür q -Changhee sayıları hesaplanabilir [37].

Özellik 3.5.9. $n\geq 0$ için $\hat{Ch}_{n,q}(x)=Ch_{n,q}(1-x)$ eşitliğine sahiptir [37].

3.5.3. q -Euler sayıları ve polinomları

Bu kısımda q -Euler sayları ve polinomlarının genelleştirilmesi üzerine birkaç tanım ve özellik verilmiştir. Bu bölüm boyunca $q\in\mathbb{C}_p$ ile $|1-q|_p\leq 1$ varsayalım.

Bilinen tanımıyla *Euler sayısı*; $n\in\mathbb{N}$ olmak üzere Taylor açılımı kullanılarak

$$\frac{2}{e^t+1}=\sum_{n\geq 0}E_n\frac{t^n}{n!}\qquad(|t|<\pi)$$

dır ve $n\in\mathbb{N}$ ve $x\in\mathbb{R}$ için *Euler polinomu*

$$\frac{2}{e^t+1}e^{xt}=\sum_{n\geq 0}E_n(x)\frac{t^n}{n!}\qquad(|t|<\pi)$$

olarak tanımlanmıştır.

T. Kim, Carlitz'in q -euler sayıları ve polinomlarından farklı bir q -Euler polinomları ve sayıları tanımlamıştır ve (3.9) eşitliği yardımıyla aşağıdaki eşitlikleri bulmuştur [17]:

$$\int_{\mathbb{Z}_p}e^{(x+y)_q t}d\mu_{-q}(y)=\sum_{n\geq 0}\int_{\mathbb{Z}_p}(x+y)_q^n\,d\mu_{-q}(y)\frac{t^n}{n!}=(2)_q\sum_{n\geq 0}\left(\frac{1}{1-q}\right)^n\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k q^{xk}}{1+q^{k+1}}\frac{t^n}{n!}$$

$$\sum_{n\geq 0}\int_{\mathbb{Z}_p}(x+y)_q^n\,d\mu_{-q}(y)\frac{t^n}{n!}=(2)_q\sum_{n\geq 0}(-1)^n q^n e^{(x+n)_q t}=\sum_{n\geq 0}\tilde{\tilde{E}}_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!} \tag{3.16}$$

ve buradan

$$\tilde{\tilde{E}}_{n,q}(x)=\frac{(2)_q}{(1-q)^n}\sum_{l=0}^{n}\binom{n}{l}\frac{(-1)^l}{1+q^{l+1}}q^{xl} \tag{3.17}$$

olduğu görülür. (3.16) dan fermiyonik p-adik q-integrali yardımıyla q-*Euler polinomu* $n\geq 0$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p}(x+y)_q^n\,d\mu_{-q}(y)=\tilde{\tilde{E}}_{n,q}(x) \tag{3.18}$$

dır. q-Euler sayıları (3.17) denkleminde $x=0$ iken elde edilir ve $\tilde{\tilde{E}}_{n,q}(0)=\tilde{\tilde{E}}_{n,q}$ ile gösterilir.

Tanım 3.5.4. Fermiyonik p-adik q-integrali yardımıyla q-*Euler sayıları*

$$\int_{\mathbb{Z}_p}e^{(x)_q t}\,d\mu_{-q}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{n\geq 0}(x)_q^n\frac{t^n}{n!}d\mu_{-q}(x)=\frac{(2)_q}{qe^t+1}e^{xt}=\sum_{n\geq 0}\tilde{\tilde{E}}_{n,q}\frac{t^n}{n!}$$

yazılır. Buradan da

$$\int_{\mathbb{Z}_p}(x)_q^n\,d\mu_{-q}(x)=\tilde{\tilde{E}}_{n,q} \tag{3.19}$$

elde edilir.

q-Euler sayılarının yineleme formülü

$$\tilde{\tilde{E}}_{0,q}=1 \text{ ve } q\left(q\tilde{\tilde{E}}_q+1\right)^n+\tilde{\tilde{E}}_{n,q}=\begin{cases}(2)_q & n=0\\ 0 & n>0\end{cases} \tag{3.20}$$

olarak bulunmuştur ve burada $\tilde{\tilde{E}}_q^n$ ile $\tilde{\tilde{E}}_{n,q}$ tanımlanmıştır.

Tanım 3.5.5. $q\in\mathbb{C}_p$ ile $|1-q|_p\leq 1$ için , (3.11), (3.12) ve (3.20) den

$$\int_{\mathbb{Z}_p}e^{(x)_q t}\,d\mu_{-1}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{n\geq 0}(x)_q^n\frac{t^n}{n!}d\mu_{-1}(x)=\sum_{n\geq 0}E_{n,q}\frac{t^n}{n!}=\sum_{n\geq 0}\frac{2}{(1-q)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{1+q^k}\frac{t^n}{n!}$$

bulmuştur [72]. Buradan

$$\int_{\mathbb{Z}_p}(x)_q^n\,d\mu_{-1}(x)=E_{n,q} \tag{3.21}$$

ve

$$E_{n,q}=\frac{2}{(1-q)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k}{1+q^k} \tag{3.22}$$

elde edilir. Buradan da q-Euler sayıları, $E_{n,q}(0)=E_{n,q}$, ve benzer şekilde

$$E_{n,q}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}(x+y)_q^n\,d\mu_{-1}(y)=\frac{2}{(1-q)^n}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\frac{(-1)^k q^{xk}}{1+q^k} \tag{3.23}$$

ile q-Euler polinomunları, $E_{n,q}(x)$, ile tanımlanmıştır. (3.22) ve (3.23) eşitliklerinden

$$E_{n,q}(x)=\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}q^{xk}E_{k,q}=\left(q^xE_q+1\right)^n$$

elde edilmiştir [72].

Euler sayılarının ve polinomlarının genişlemelerinden biri de α ağırlıklı q-Euler sayıları ve polinomlarıdır.

$$\tilde{E}_{0,q}^{(\alpha)}=1 \text{ ve } q\left(q^\alpha\,\tilde{E}_{n,q}^{(\alpha)}+1\right)^n+\tilde{E}_{n,q}^{(\alpha)}=0 \qquad (n>0) \tag{3.24}$$

ile α *ağırlıklı* q*-Euler sayıları* tanımlanmıştır [73].

(3.24) te $x=0$ durumunda sıfır ağırlıklı q-Euler sayısı aşağıdaki gibi tanımlanmıştır.

Tanım 3.5.7. *Sıfır ağırlıklı* q*-Euler sayıları* $\tilde{E}_{n,q}^{(0)}=\tilde{E}_{n,q}$ dır ve $n>0$ için

$$\tilde{E}_{n,q}=\int_{\mathbb{Z}_p}x^n d\mu_{-q}(x)=H_n\left(-q^{-1}\right) \tag{3.25}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $H_n\left(-q^{-1}\right)$, n. *Frobenius-Euler sayılarıdır.*

Tanım 3.5.8. *Sıfır ağırlıklı* q*-Euler polinomları,*

$$\tilde{E}_{n,q}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}(x+y)^n\,d\mu_{-q}(y)=H_n\left(-q^{-1},x\right) \tag{3.26}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $H_n\left(-q^{-1},x\right)$, n. *Frobenius-Euler polinomu*dur ve aşağıdaki özelliğe sahiptir [39].

Özellik 3.5.10. $n>0$ için

$$q\,\tilde{E}_{n,q}(1)+\tilde{E}_{n,q}=\begin{cases}(2)_q & n=0\\ 0 & n>0\end{cases}$$

dır ve burada $\tilde{E}_{n,q}(x)=\left(x+\tilde{E}_q\right)^n$ dır [39, 40].

3.6. İntegraller Yardımıyla Gösterilen p-adik Log Gama Fonksiyonları

Bu bölümde Diamond'ın log gama fonksiyonunundan, Diamond-Euler p-adik log gama fonksiyonundan, p-adik log gama fonksiyonunun q-genişlemesinden, fermiyonik p-adik integralle tanımlanan p-adik log gama fonksiyonunun q-genişlemesinden ve ağırlıklı p-adik log gama fonksiyonunun q-genişlemesinden bahsedilmiştir.

Tanım 3.6.1. Iwasawa logaritması, $\log_p$,

i. f, $\log : \mathbb{C}_p - \{0\} \to \mathbb{C}_p$ bir genişlemedir.

ii. Tüm $x, y \in \mathbb{C}_p - \{0\}$ için $f(xy) = f(x) + f(y)$

iii. $f(p) = 0$

koşullarına sağlayan $f : \mathbb{C}_p - \{0\} \to \mathbb{C}_p$ fonksiyonudur [64]. $\log_p$ in temel özelliklerini verelim:

Özellik 3.6.1. $x \in \mathbb{C}_p - \{0\}$ olsun. $\log_p(x) = 0$ ancak ve ancak bazı $n \in \mathbb{N}$ için x^n, p nin integral kuvvetidir. Özel durumda, $|x|_p = 1$ ise $\log_p(x) = 0$ ancak ve ancak x birimin bir köküdür [64].

Özellik 3.6.2. $x \in \mathbb{Q}_p - \{0\}$ olsun. $\log_p(x) = 0$ olması için gerek ve yeter koşul $x = p^n y$ dir. Burada $n \in \mathbb{Z}$ ve y birimin köküdür [64].

Özellik 3.6.3. $x \in \mathbb{Q}_p - \{0\}$, $|x|_p = 1$ olsun. O halde,

$$\log_p x = \frac{1}{1-p} \sum_{n=1}^{\infty} \frac{\left(1 - x^{p-1}\right)^n}{n}$$

şeklinde tanımlıdır [64].

Özellik 3.6.4. $x \in \mathbb{C}_p$, $|x|_p < 1$ olsun.

$$\log_p(x+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}}{n} x^n$$

eşitlik sağlanır [64].

J. Diamond, Volkenborn integrali kullanarak p-adik log gama fonksiyonunu, G_p, aşağıdaki gibi tanımlamıştır [15]:

$$G_p(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} \left((x+u) \log_p (x+u) - (x+u) \right) dx$$

Ayrıca Diamond,

$$\log\left(\frac{\Gamma(x+1)}{\sqrt{2\pi}}\right)=\left(x-\frac{1}{2}\right)\log x+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{B_{n+1}}{x^n}-x,$$

ile Stirling asimptotik serisinin p-adik benzerini vermiştir.

M. S. Kim ve S. Hu, Diamond'ın G_p fonksiyonunu kurma düşüncesinden yararlanılarak ve fermiyonik p-adik integrali kullanarak, Diamond-Euler p-adik log gama fonksiyonunu, $Log\Gamma_{D,E}$,

$$Log\Gamma_{D,E}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left((x+u)\log_p(x+u)-(x+u)\right)d\mu_{-1}(u)$$

şeklinde tanımlamışlardır ve ayrıca yansıma formülü, fonksiyonel denklem, dağılım formülü ve Laurent seri açılımını içeren p-adik log gama fonksiyonu için birkaç temel sonuç vermişlerdir [74].

T. Kim de p-adik log gama fonksiyonunun q-genişlemesini, $G_{p,q}$,

$$G_{p,q}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left(\left(x+(u)_q\right)\log_p\left(x+(u)_q\right)-\left(x+(u)_q\right)\right)d\mu_q(u)$$

ve Carlitz'in q-Bernoulli sayılarını p-adik q-integral yardımıyla tanımlamıştır [40].

T. Kim ve S. H. Rim, p-adik log gama fonksiyonunun q-genişlemesini, $G_{p,q}$, fermiyonik anlamda p-adik q-integrali kullanarak

$$G_{p,q}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left((x+u)_q\log_p(x+u)_q-(x+u)_q\right)d\mu_{-q}(u)$$

şeklinde tanımlamış ve q-Euler sayılarının p-adik q-log gama fonksiyonu için bazı Stirling tipi serilerin katsayılarından meydana geldiğini ispatlamıştır [75].

S. Aracı ve ark., T. Kim'in fermiyonik anlamda tanımladığı p-adik log gama fonksiyonunun q-genişlemesinden yararlanarak α ağırlıklı p-adik log gama fonksiyonunun q-genişlemesini, $G_{p,q}^{(\alpha)}$,

$$G_{p,q}^{(\alpha)}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left((x+u)_{q^\alpha}\log_p(x+u)_{q^\alpha}-(x+u)_{q^\alpha}\right)d\mu_{-q}(u)$$

şeklinde tanımlamışlardır ve α ağırlıklı Genocchi ve Euler sayılarının q-genişlemeleri ile ağırlıklı p-adik q-log gama fonksiyonu arasında bir ilişki vermişlerdir [76].

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde elde edilen sonuçlara yer verilmiştir. p-adik gama fonksiyonunun ve türevinin Volkenborn integralleri, fermiyonik p-adik q-integralleri ve fermiyonik p-adik integralleri altındaki değerleri hesaplanmıştır. p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin Volkenborn integrali altındaki değeri incelenmiştir. Ayrıca, p-adik log gama ve p-adik q-log gama tipli fonksiyonlar tanımlanmış ve bir takım özellikleri elde edilmiştir.

4.1. p-Adik Gama Fonksiyonunun ve Türevinin Volkenborn İntegralleri

Bu bölümde p-adik gama fonksiyonu ve türevi için Volkenborn integrali altında değeri hesaplanmış ve ilgi çekici özellikler elde edilmiştir.

Teorem 4.1.1. Her $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+1)\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{n+1}$$

eşitliği sağlanır. Burada b_n Teorem 3.2.7 de verilmiştir.

İspat: $x \in \mathbb{Z}_p$ olsun. Teorem 3.2.7 den $\Gamma_p(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ $\left(x \in \mathbb{Z}_p\right)$ ve $\exp\left(x + \frac{x^p}{p}\right)\frac{1-x^p}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ olsun. Teorem 3.1.8 den $\Gamma_p(x+1) \in C^1(\mathbb{Z}_p \to \mathrm{K})$ olduğu görülür. Özellik 3.4.1 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+1)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1} \tag{4.1}$$

elde edilir. $\Gamma_p(x+1)$ fonksiyonunun yukarıda verilen koşullar altında Teorem 3.2.7 deki $a_n = (-1)^{n+1} n! b_n$ eşitliği (4.1) de yazılırsa tüm n ler için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+1)\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{n+1}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.2. Aşağıdaki eşitlik

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = \gamma_p - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{n+1}$$

sağlanır. Burada b_n Teorem 3.2.7 de verilmiştir.

İspat: $x \in \mathbb{Z}_p$ ve $p \neq 2$ olsun. Teorem 3.2.7 den $p \neq 2$, $\Gamma_p(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ $(x \in \mathbb{Z}_p)$ ve $\exp\left(x + \frac{x^p}{p}\right)\frac{1-x^p}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ $(x \in E)$ vardır. Özellik 3.4.3 (iii) özelliğinin özel durumundan

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+1)dx - \int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = \Gamma'_p(0) \tag{4.2}$$

eşitliği yazılır. Teorem 4.1.1 ve Teorem 3.2.6 dan yararlanılarak (4.2) eşitliği

$$-\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{n+1} - \int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)\,dx = -\gamma_p$$

şeklinde yazılır. Buradan da istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.3. Aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_n \frac{(-1)^n}{n+1-j}.$$

Burada a_n Teorem 3.2.7 de verilmiştir.

İspat: Teorem 3.2.7 den $\Gamma_p(x+1) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$ $(x \in \mathbb{Z}_p)$ ve $\exp\left(x + \frac{x^p}{p}\right)\frac{1-x^p}{1-x} = \sum_{n=0}^{\infty} b_n x^n$ olsun. Γ_p nın Mahler açılımından yararlanılarak

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x-1}{n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x-1}{n} dx$$

yazılır. $\binom{x-1}{n}$ Mahler katsayısının belirsiz toplamı Sonuç 3.1.8 den $\binom{x-1}{n+1}$ dır. O halde,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x-1}{n+1}'(0)$$

yazılır. Mahler tabanının türevi Özellik 3.1.1 (iii) den yararlanılarak aşağıdaki gibi elde edilir:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{n+1-j} \binom{x-1}{j}(0)$$

veya

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^n}{n+1-j}$$

dır.

Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.3 ten aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.1.1. p -adik Euler sabitinin seri açılımı

$$\gamma_p = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_n \frac{(-1)^n}{n+1-j} + \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{n+1}$$

veya

$$\gamma_p = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_n \frac{(-1)^n}{n+1-j} + \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^{n+1}}{n+1}$$

dır. Burada a_n ve b_n, Teorem 3.2.7 de verilmiştir.

Aşağıdaki teoremde $x, s \in \mathbb{Z}_p$ için $\Gamma_p(x+s)$ fonksiyonunun Volkenborn integrali altındaki değeri verilmiştir.

Teorem 4.1.4. $x, s \in \mathbb{Z}_p$ olsun. Aşağıdaki eşitlik

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+s)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_n \frac{(-1)^{n-j}}{n+1-j}\binom{s-1}{j}$$

sağlanır.

İspat: Özellik 3.4.3 (i) özelliğinden ve Teorem 3.2.7 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+s)\,dx = (S\Gamma_p)^{'}(\mathrm{s}) = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n S\binom{x-1}{n}\right)'(s)$$

elde edilir. $\binom{x-1}{n}$ Mahler katsayısının belirsiz toplamı Sonuç 3.1.8 den $\binom{x-1}{n+1}$ dır. Özellik 3.1.1 (iii) özelliğinden aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+s)\,dx = \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \sum_{j=o}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{n+1-j}\binom{x-1}{j}\right)(s)$$

Buradan da teoremin ispatı tamamlanır.

Not: Teorem 4.1.4 te $s=0$ iken Teorem 4.1.3 elde edilir.

Teorem 4.1.5. Aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = -\sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} \frac{k!\,p^{k-1}}{k(k+1)}$$

Burada c_n Teorem 3.2.8 de tanımlanan seri açılımının rasyonel katsayısıdır.

İspat: Teorem 3.4.3 den

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = p^{-1}\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(px)dx$$

elde edilir. Teorem 3.2.8 den aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = p^{-1}\int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{k=0}^{\infty} p^k c_{pk}(x)^k dx = \sum_{k=0}^{\infty} p^{k-1} c_{pk} \int_{\mathbb{Z}_p} (x)^k dx.$$

Hatırlatalım ki $(x)^k = (-1)^k \binom{-x}{k} k!$ dır. O halde

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} p^{k-1} c_{pk} k!(-1)^k \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{-x}{k} dx$$

vardır. Özellik 3.4.4 ten

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} p^{k-1} c_{pk} k!(-1)^k \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x+1}{k} dx \tag{4.3}$$

yazılır. $\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x+1}{k} dx$ değeri,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x+1}{k} dx = \lim_{x\to 0} \frac{\binom{x+1}{k+1}}{x} = \lim_{x\to 0} \frac{\frac{x+1}{k+1}\frac{x}{k}\binom{x-1}{k-1}}{x} = \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} \tag{4.4}$$

dir. (4.4) eşitliği (4.3) eşitliğinde yerine yazılırsa

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx = \sum_{k=0}^{\infty} p^{k-1} c_{pk} k!(-1)^k \frac{(-1)^{k-1}}{k(k+1)} = -\sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} \frac{k!\,p^{k-1}}{k(k+1)}$$

elde edilir. $k=0$ da seri açılımı tanımsızdır.

Teorem 4.1.6. $x \in T_p$ için

$$\int_{T_p} \Gamma_p(x)dx = \gamma_p - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} \frac{k!\,p^{k-1}}{k(k+1)}$$

eşitlik sağlanır. Burada b_n Teorem 3.2.7 de verilen seri açılımının katsayısıdır ve c_n katsayısı da Teorem 3.2.8 de verilen seri açılımının rasyonel katsayısıdır.

İspat: $T_p = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ olduğu biliniyor. O halde

$$\int_{T_p} \Gamma_p(x)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx - \int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx$$

olduğu kolayca görülür. Teorem 4.1.2 ve Teorem 4.1.5 ten

$$\int_{T_p} \Gamma_p(x)dx = \gamma_p - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{n+1} + \sum_{k=1}^{\infty} c_{pk} \frac{k!\,p^{k-1}}{k(k+1)}$$

elde edilir.

Bilindiği üzere Γ_p fonksiyonunun negatif değerleri mevcuttur. Bu değerler için Γ_p fonksiyonunun Volkenborn integrali altındaki yansıması aşağıdaki teoremde verilmiştir:

Teorem 4.1.7. $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(-x)\,dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+1)\,dx = -\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{n+1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Özellik 3.4.4 ve Teorem 4.1.1 den istenilen sonuç bulunur.

Teorem 4.1.8. $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p^{-1}(x)dx = (-1)^{l(x)} \left[\gamma_p - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{n+1} \right]$$

eşitliği vardır. Burada $l(x)$, x değişkenine bağlı ama sabit bir sayıdır.

İspat: $x \in \mathbb{Z}_p$ ve $x = a_0 + a_1 p + \dots$ olsun. $p \neq 2$ için Teorem 3.2.4 ten aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\Gamma_p^{-1}(x) = \Gamma_p(1-x)(-1)^{l(x)}.$$

Burada $l(x)$, x e bağlı ama sabit bir sayıdır. Yani x teki a_0 dır.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p^{-1}(x)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(1-x)(-1)^{l(x)}dx$$

veya

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p^{-1}(x)dx = (-1)^{l(x)} \int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(1-x)dx \tag{4.5}$$

eşitlikleri sağladığı görülür. Özellik 3.4.4 te f fonksiyonu yerine Γ_p fonksiyonunu ve burada x yerine $x-1$ yazılırsa

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(1-x)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)dx \tag{4.6}$$

eşitliğine karşılık gelir. (4.5) denkleminde (4.6) eşitliği yazılır ve p-adik gama fonksiyonunun Volkenborn integral değeri de Teorem 4.1.2 den yazılırsa

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p^{-1}(x)dx = (-1)^{l(x)}\left[\gamma_p - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{n+1}\right]$$

sonucu elde edilir.

Aynı teorem $p=2$ için düzenlenirse ve Teorem 3.2.4 ten de yararlanılırsa aşağıdaki teorem elde edilir:

Teorem 4.1.9. $p=2$ olsun. O zaman

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_2^{-1}(x)dx = (-1)^{\sigma_1(x)+1}\left[\gamma_p - \sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{n!}{n+1}\right]$$

eşitliği sağlanır ve burada $x = a_0 + a_1 p + \ldots$ olmak üzere $\sigma_1(x) = a_1$ dir ve b_n Teorem 3.2.7 de verilmiştir.

Γ_p fonksiyonunun türevi bulunup, Volkenborn integrali altındaki değeri hesaplanılmış ve buna bağlı bazı sonuçlar verilmiştir.

Teorem 4.1.10. $x \in \mathbb{Z}_p$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\Gamma_p'(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-1-j}}{n-j}\binom{x-1}{j}.$$

Burada a_n Teorem 3.2.7 de verilmiştir.

İspat: Teorem 3.2.7 den aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\Gamma_p'(x) = \left[\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x-1}{n}\right]'.$$

Özellik 3.1.1 (iii) özelliğinden

$$\Gamma_p'(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-1-j}}{n-j}\binom{x-1}{j}$$

eşitliği elde edilir. $n=0$ için eşitlik tanımsızdır. O halde $n \geq 1$ iken Γ_p fonksiyonunun türevi tanımlıdır.

Ayrıca Özellik 3.4.3 (iii) de f fonksiyonunun yerine Γ_p fonksiyonu yazılır ve Teorem 3.2.7 den de yararlanılarak aynı sonuç bulunur.

Teorem 4.1.10 da $x=0$ için aşağıdaki sonuç elde edilir:

Sonuç 4.1.2. p -adik Euler sabitinin kuvvet serisiyle gösterimi

$$\gamma_p = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-1}}{n-j}$$

şeklindedir.

Teorem 4.1.11. Γ'_p fonksiyonunun Volkenborn integralinin değeri aşağıdaki gibidir:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} a_n \frac{(-1)^{n-1}}{(n-j)(k+1)}.$$

İspat: Teorem 4.1.10 dan,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x)\,dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-1-j}}{n-j}\binom{x-1}{j}dx$$

olduğu görülür. Özellik 3.1.1 (ii) den

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-1-j}}{n-j}\int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{k=0}^{j}\binom{x}{k}\binom{-1}{j-k}dx$$

veya denk olarak

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} a_n \frac{(-1)^{n-1-k}}{n-j}\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x}{k}dx \tag{4.7}$$

integral yansımasına karşılık gelir.

$\binom{x}{k}$ Mahler tabanının Volkenborn integral değeri;

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x}{k}dx = \lim_{x\to 0}\frac{\binom{x}{k+1}}{x} = \lim_{x\to 0}\frac{\frac{x}{k+1}\binom{x-1}{k}}{x} = \frac{(-1)^k}{k+1} \tag{4.8}$$

elde edilir. (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} a_n \frac{(-1)^{n-1}}{(n-j)(k+1)}$$

sonucuna ulaşılır.

$x, s \in \mathbb{Z}_p$ için $\Gamma'_p(x+s+1)$ fonksiyonunun Volkenborn integral değerini hesaplamak için aşağıdaki teoremin ispatı verilmelidir.

Teorem 4.1.12. $x, s \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x+s}{n}dx = \sum_{j=0}^{n}\frac{(-1)^{n-j}}{n+1-j}\binom{s}{j}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x, s \in \mathbb{Z}_p$ olsun. Volkenborn integral tanımından ve Sonuç 3.1.8 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x+s}{n}dx = \binom{x+s}{n+1}'(0)$$

yazılır. Özellik 3.1.1 (iii) den

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x+s}{n} dx = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{n+1-j} \binom{x+s}{j}(0)$$

dır ve buradan

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x+s}{n} dx = \sum_{j=0}^{n} \frac{(-1)^{n-j}}{n+1-j} \binom{s}{j}$$

elde edilir.

Teorem 4.1.13. Eğer $x, s \in \mathbb{Z}_p$ ise

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x+s+1)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{j} a_n \frac{(-1)^{n-1-k}}{(n-j)(j-k+1)} \binom{s}{k}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Teorem 4.1.10 dan

$$\Gamma'_p(x+s+1) = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1}}{n-j} \binom{x+s}{j} \tag{4.9}$$

yazılır. (4.9) eşitliğinin Volkenborn integral altındaki yansıması

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x+s+1)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1}}{n-j} \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x+s}{j} dx \tag{4.10}$$

şeklinde yazılır. Teorem 4.1.12 den aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x+s+1)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1}}{n-j} \sum_{k=0}^{j} \frac{(-1)^{j-k}}{j+1-k} \binom{s}{k}.$$

Sonuç 4.1.3. $x, s \in \mathbb{Z}_p$ olsun. Teorem 4.1.13 de $s = -1$ için aşağıdaki sonuç elde edilir:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} \sum_{j=0}^{n-1} \sum_{k=0}^{j} a_n \frac{(-1)^{n-1}}{(n-j)(j+1-k)}.$$

Not: Teorem 4.1.8 ile Sonuç 4.1.3 teki sonucun aynı olduğu görülür.

Sonuç 4.1.4. $s \in \mathbb{Z}_p$ olsun.

$$\left(S\left(\Gamma'_p\right)\right)(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{j=0}^{n} a_n \frac{(-1)^n}{n+1-j} \left(\binom{s-1}{j} - (-1)^j \right)$$

elde edilir.

İspat: $x, s \in \mathbb{Z}_p$ olsun ve Özellik 3.4.3 (ii) de $f = \Gamma_p$ fonksiyonu olsun. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+s)\,dx - \int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x)\,dx = \left(S\Gamma'_p\right)(s)$$

eşitiliği yazılır. Teorem 4.1.3 ve Teorem 4.1.4 kullanılarak istenen sonuç elde edilir.

Teorem 4.1.14. Aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^{k-m-1}\, p^{k-1} c_{pk}}{(k-j)(j+1-m)} k! \binom{k-1}{m}.$$

İspat: Teorem 3.4.3 den

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x)\,dx = p^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(px)\,dx$$

ilişkisi vardır. Teorem 3.2.8 den

$$\Gamma'_p(-a+px) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} p^k c_{a+pk} k! (-1)^k \binom{-x}{k} \right]'$$

eşitliği vardır. Özellik 3.1.1. (iv) den

$$\Gamma'_p(-a+px) = \left[\sum_{k=0}^{\infty} p^k c_{a+pk} k! \binom{x+k-1}{k} \right]'$$

ve Özellik 3.1.1. (iii) den

$$\Gamma'_p(-a+px) = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-j-1}}{k-j} p^k c_{a+pk} k! \binom{x+k-1}{j}$$

eşitliği yazılır. $k=0$ iken eşitlik tanımsızdır. O halde eşitlik $k \geq 1$ için tanımlıdır. Burada $a=0$ iken

$$\Gamma'_p(px) = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-j-1}}{k-j} p^k c_{pk} k! \binom{x+k-1}{j}$$

elde edilir. Böylece,

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x)\,dx = p^{-1} \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-j-1}}{k-j} p^k c_{pk} k! \binom{x+k-1}{j} dx$$

veya denk olarak

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-j-1}}{k-j} p^{k-1} c_{pk} k! \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x+k-1}{j} dx$$

dır. Teorem 4.1.12 den

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x)\,dx = \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1} \frac{(-1)^{k-j-1}}{k-j} p^{k-1} c_{pk} k! \sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^{j-m}}{j+1-m} \binom{k-1}{m}$$

eşitliği elde edilir.

$T_p = \mathbb{Z}_p \setminus p\mathbb{Z}_p$ olduğu biliniyor. Böylece, Teorem 4.1.11 ve Teorem 4.1.14 den aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.1.15. $x \in T_p$ olsun. O halde

$$\int_{T_p} \Gamma'_p(x)dx = \sum_{n=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{n-1}\sum_{k=0}^{j} a_n \frac{(-1)^{n-1}}{(n-j)(k+1)} + \sum_{k=1}^{\infty}\sum_{j=0}^{k-1}\sum_{m=0}^{j} \frac{(-1)^{k-m} p^{k-1} k!}{(k-j)(j+1-m)} c_{pk} \binom{k-1}{m}$$

dır. Burada b_n, Teorem 3.2.7 de verilen seri açılımının katsayısıdır ve c_n de Teorem 3.2.8 de verilen seri açılımının rasyonel katsayısıdır.

4.2. p-Adik Gama Fonksiyonunun q-Genişlemesinin Volkenborn İntegrali

Bu kısımda p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin Volkenborn integrali altındaki değeri elde edilmiştir. p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin türevi elde edilip onunla ilgili bazı teoremler bulunmuştur. Bu sonuçlar aracılığıyla p-adik Euler sabitinin q-genişlemesi için yeni bir gösterim verilmiştir.

p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin Volkenborn integralini bulmak için bazı teoremlere ihtiyaç vardır. Öncelikle bu teoremler verilmiştir.

Teorem 4.2.1. $|q-1|_p < 1$, $n \in \mathbb{N}$ olsun. q-Mahler katsayısının belirsiz toplamı

$$S\binom{*}{n}_q = q^{n-*}\binom{*}{n+1}_q$$

eşitliğidir.

İspat: $x \in \mathbb{Z}_p$, $n \in \mathbb{N}$ ve $|q-1|_p < 1$ olmak üzere $f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{p,q}(n)\binom{x}{n}_q$ ve $Sf(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{p,q}(n)\binom{x}{n}_q$ olduğunu kabul edelim. Burada sırasıyla $\tau_{p,q}$ ve $\sigma_{p,q}$, $f(x)$ ve $Sf(x)$ fonksiyonlarının Mahler katsayılarıdır. Teorem 3.1.5 den

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{p,q}(n)\binom{x+1}{n}_q - \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{p,q}(n)\binom{x}{n}_q = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{p,q}(n)\binom{x}{n}_q$$

yazılır. Yukarıdaki eşitlik (3.6) eşitliği ile düzenlenirse

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{p,q}(n)\left(q^{x-n+1}\binom{x}{n-1}_q - \binom{x}{n}_q\right) - \sum_{n=0}^{\infty} \sigma_{p,q}(n)\binom{x}{n}_q = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{p,q}(n)\binom{x}{n}_q$$

veya denk olarak

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{p,q}(n)q^{x-n+1}\binom{x}{n-1}_q=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{p,q}(n)\binom{x}{n}_q$$

elde edilir. Yukarıdaki eşitlikten

$$\sum_{n=-1}^{\infty}\sigma_{p,q}(n+1)q^{x-n}\binom{x}{n}_q=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{p,q}(n)\binom{x}{n}_q$$

bulunur. Burada $n\in\mathbb{N}$ olduğundan $n=-1$ de tanımsızdır. O halde

$$\sum_{n=0}^{\infty}\sigma_{p,q}(n+1)q^{x-n}\binom{x}{n}_q=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{p,q}(n)\binom{x}{n}_q$$

dır. Bu durumda $n\in\mathbb{N}$ için

$$\sigma_{p,q}(n+1)q^{x-n}=\tau_{p,q}(n)$$

elde edilir. Denk olarak

$$\sigma_{p,q}(n)=q^{-x-1+n}\tau_{p,q}(n-1)\qquad(n\in\mathbb{N})$$

dir. $f(x)$ fonksiyonunun belirsiz toplamı

$$Sf(x)=\sum_{n=0}^{\infty}q^{-x-1+n}\tau_{p,q}(n-1)\binom{x}{n}_q$$

veya

$$Sf(x)=\sum_{n=-1}^{\infty}q^{n-x}\tau_{p,q}(n)\binom{x}{n+1}_q$$

yazılır. Yukarıdaki eşitlik $n\in\mathbb{N}$ olduğundan $n\geq 0$ için sağlanır ve

$$S\binom{*}{n}_q=q^{n-*}\binom{*}{n+1}_q$$

sonuç elde edilir.

Not edelim ki $q\to 1$ iken q-Mahler katsayısı Mahler katsayısına indirgenir.

Teorem 4.2.2. $x,s\in\mathbb{Z}_p$, $|q-1|_p<1$ ve $n\in\mathbb{N}$ olsun. q-Mahler katsayısının türevi

$$\binom{x+s}{n+1}_q'=\frac{q^{x+s}\ln q}{q^{n+1}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{-j}\left(q^{x+s-k}-1\right)}{q^{n-k}-1}\binom{x+s-j-1}{n-j}_q+\binom{x+s-1}{n}_q\right]$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: (3.5) den

$$\binom{x+s}{n+1}_q'=\left[\frac{\left(q^{x+s}-1\right)\left(q^{x+s-1}-1\right)\ldots\left(q^{x+s-n}-1\right)}{\left(q^{n+1}-1\right)\left(q^{n}-1\right)\ldots\left(q-1\right)}\right]'$$

eşitliği elde edilir. Bu eşitliğin türevi alınırsa

$$\binom{x+s}{n+1}_q' = \frac{q^{x+s}\ln q\left(q^{x+s-1}-1\right)\ldots\left(q^{x+s-n}-1\right)}{\left(q^{n+1}-1\right)\left(q^{n}-1\right)\ldots\left(q-1\right)}+\ldots+\frac{\left(q^{x+s}-1\right)\ldots\left(q^{x+s-n+1}-1\right)q^{x+s-n}\ln q}{\left(q^{n+1}-1\right)\left(q^{n}-1\right)\ldots\left(q-1\right)}$$

bulunur. Elde edilen bu eşitlik düzenlenirse

$$\binom{x+s}{n+1}_q' = \frac{\ln q}{q^{n+1}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{x+s-j}\left(q^{x+s-k}-1\right)}{q^{n-k}-1}\binom{x+s-j-1}{n-j}_q + q^{x+s}\binom{x+s-1}{n}_q\right]$$

şeklinde yazılır.

Teorem 4.2.3. $x,s\in\mathbb{Z}_p$, $n\in\mathbb{N}$ ve $|q-1|_p<1$ olmak üzere q-Mahler katsayısının Volkenborn integrali altındaki yansıması

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x+s}{n}_q dx = \frac{\ln q.q^{n-s}}{q^{n+1}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{s-j}\left(q^{s-k}-1\right)}{\left(q^{n-k}-1\right)}\binom{s-j-1}{n-j}_q+\binom{s-1}{n}_q\right]$$

dır.

İspat: Teorem 4.2.1 den $\binom{x+s}{n}_q$ nun belirsiz toplamı $q^{n-x-s}\binom{x+s}{n+1}_q$ dir. Bu durumda

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x+s}{n}_q dx = \left(q^{n-x-s}\binom{x+s}{n+1}_q\right)'(0) \tag{4.11}$$

eşitliği yazılır. Böylece,

$$\left(q^{n-x-s}\binom{x+s}{n+1}_q\right)'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{q^{n-x-s}\binom{x+s}{n+1}_q - q^{n-s}\binom{s}{n+1}_q}{x-0}$$

eşitliği vardır. Eşitlikte $x\to 0$ iken $\frac{0}{0}$ belirsizliği ortaya çıkar. Bu belirsizlikten kurtulmak için q-Mahler tanımından da yararlanılarak L'hospital kuralından,

$$\left(q^{x+s-n}\binom{x+s}{n+1}_q\right)'(0) = \lim_{x\to 0}\frac{-\ln q.q^{n-x-s}\binom{x+s}{n+1}_q + q^{n-x-s}\binom{x+s}{n+1}_q'}{1} \tag{4.12}$$

elde edilir. Teorem 4.2.2 ile (4.12) eşitliği düzenlenirse

$$=\ln q.q^{n-s}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{s-j}\left(q^{s-k}-1\right)}{\left(q^{n+1}-1\right)\left(q^{n-k}-1\right)}\binom{s-j-1}{n-j}_q+\frac{q^{s}}{q^{n+1}-1}\binom{s-1}{n}_q-\binom{s}{n+1}_q\right]$$

bulunur. Böylece,

$$\left(q^{n-x-s}\binom{x+s}{n+1}_q\right)'(0)=\ln q.q^{n-s}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{s-j}\left(q^{s-k}-1\right)}{\left(q^{n+1}-1\right)\left(q^{n-k}-1\right)}\binom{s-j-1}{n-j}_q+\frac{1}{q^{n+1}-1}\binom{s-1}{n}_q\right] \tag{4.13}$$

elde edilir. (4.11) ve (4.13) eşitsizliklerinden istenilen sonuca ulaşılır.

Teorem 4.2.4. Her $x\in\mathbb{Z}_p$ ve $|q-1|_p<p^{\frac{-1}{p-1}}$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}(x+1)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{p,q}(n)\frac{q^{\frac{-n^2+n}{2}}(-1)^n\ln q}{q^{n+1}-1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x\in\mathbb{Z}_p$ olsun. Teorem 3.3.2 kullanılarak

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}(x+1)\,dx=\int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{p,q}(n)\binom{x}{n}_q dx=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{p,q}(n)\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x}{n}_q dx \tag{4.14}$$

eşitliği yazılır. Teorem 4.2.3 de $s=0$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x}{n}_q dx=\frac{q^n\ln q}{q^{n+1}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{-j}\left(q^{-k}-1\right)}{\left(q^{n-k}-1\right)}\binom{-j-1}{n-j}_q+\binom{-1}{n}_q\right]$$

dir. $k=0$ için seri toplamı 0 dır. Buradan ve Özellik 3.3.3 (ii) nin özel durumundan

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x}{n}_q dx=\frac{q^{\frac{-n^2+n}{2}}(-1)^n\ln q}{q^{n+1}-1}$$

sonuçu bulunur ve (4.14) eşitliğinden istenilen sonuça varılır.

Teorem 4.2.5. $x,s\in\mathbb{Z}_p$ ve $|q-1|_p<p^{\frac{-1}{p-1}}$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}(x+s)\,dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_{p,q}(n)q^{n-s+1}\ln q}{q^{n+1}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{s-1-j}\left(q^{s-1-k}-1\right)}{\left(q^{n-k}-1\right)}\binom{s-j-2}{n-j}_q+\binom{s-2}{n}_q\right]$$

eşitliği elde edilir.

İspat: $\Gamma_{p,q}$ nın Mahler açılımından yararlanılırsa

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}(x+s)\,dx=\int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{p,q}(n)\binom{x+s-1}{n}_q dx=\sum_{n=0}^{\infty}\tau_{p,q}(n)\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x+s-1}{n}_q dx \tag{4.15}$$

eşitliği yazılır. Teorem 4.2.3 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x+s-1}{n}_q dx=\frac{q^{n-s+1}\ln q}{q^{n+1}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{s-1-j}\left(q^{s-1-k}-1\right)}{\left(q^{n-k}-1\right)}\binom{s-j-2}{n-j}_q+\binom{s-2}{n}_q\right]$$

olduğu biliniyor. Yukarıdaki eşitlik ve (4.15) eşitliğinden

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}\left(x+s\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_{p,q}\left(n\right)q^{n-s+1}\ln q}{q^{n+1}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{s-1-j}\left(q^{s-1-k}-1\right)}{\left(q^{n-k}-1\right)}\binom{s-j-2}{n-j}_q+\binom{s-2}{n}_q\right]$$

elde edilir.

Teorem 4.2.6. $\left|q-1\right|_p<p^{-\frac{1}{p-1}}$ için

$$\gamma_{p,q}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_{p,q}\left(n\right)\ln q}{q^{n+1}-1}\left[q^{\frac{-n^2+n}{2}}\left(-1\right)^{n+1}+\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{n-j}\left(q^{-1-k}-1\right)}{\left(q^{n-k}-1\right)}\binom{-j-2}{n-j}_q+q^{n+1}\binom{-2}{n}_q\right]$$

eşitliği yazılır.

İspat: Özellik 3.4.3 ün özel durumundan aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}\left(x+1\right)dx-\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}\left(x\right)dx=\Gamma'_{p,q}(0). \tag{4.16}$$

Tereom 4.2.5 da $s=0$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}\left(x\right)dx=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_{p,q}\left(n\right)q^{n+1}\ln q}{q^{n+1}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{-1-j}\left(q^{-1-k}-1\right)}{\left(q^{n-k}-1\right)}\binom{-j-2}{n-j}_q+\binom{-2}{n}_q\right] \tag{4.17}$$

dir. (4.17) ve Teorem 4.2.4 eşitliklerini (4.16) da yazılırsa

$$\Gamma'_{p,q}\left(0\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_{p,q}\left(n\right)\ln q}{q^{n+1}-1}\left[q^{\frac{-n^2+n}{2}}\left(-1\right)^{n}-\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{n-j}\left(q^{-1-k}-1\right)}{\left(q^{n-k}-1\right)}\binom{-j-2}{n-j}_q-q^{n+1}\binom{-2}{n}_q\right]$$

elde edilir. Buradan ve Teorem 3.3.4 den p-adik Euler sabitinin q-genişlemesi için bir seri açılım bulunur.

Teorem 4.2.7. p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin türevi

$$\Gamma_{p,q}{}'\left(s\right)=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_{p,q}\left(n\right)\ln q}{q^{n+1}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{n-j}}{q^{n-k}-1}\left(\left(q^{s-k}-1\right)\binom{s-j-1}{n-j}_q-\left(q^{s-1-k}-1\right)\binom{s-j-2}{n-j}_q\right)\right]$$
$$+\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\tau_{p,q}\left(n\right)q^{n-s}\ln q}{q^{n+1}-1}\left[\left(q^{n}-q\right)\binom{s-2}{n}_q+\binom{s-2}{n-1}_q\right]$$

şeklinde yazılır.

İspat: Özellik 3.4.3 (iii) den

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_{p,q}(x+s+1)\,dx - \int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_{p,q}(x+s)\,dx = \Gamma'_{p,q}(s) \tag{4.18}$$

yazılır. $\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_{p,q}(x+s+1)\,dx$ değeri; Teorem 3.3.2 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_{p,q}(x+s+1)\,dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{p,q}(n) \binom{x+s}{n}_q dx = \sum_{n=0}^{\infty} \tau_{p,q}(n) \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x+s}{n}_q dx$$

bulunur. Teorem 4.2.3 ten

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_{p,q}(x+s+1)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_{p,q}(n) q^{n-s} \ln q}{q^{n+1}-1} \left[\sum_{j=1}^{n} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{q^{s-j}\left(q^{s-k}-1\right)}{\left(q^{n-k}-1\right)} \binom{s-j-1}{n-j}_q + \binom{s-1}{n}_q \right] \tag{4.19}$$

elde edilir. (4.18) eşitliğinde (4.19) eşitliği ve Teorem 4.2.5 deki eşitlik kullanılırsa

$$\Gamma_{p,q}'(s) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_{p,q}(n)\ln q}{q^{n+1}-1} \left[\sum_{j=1}^{n} \prod_{k=0}^{j-1} \frac{q^{n-j}}{q^{n-k}-1} \left(\left(q^{s-k}-1\right)\binom{s-j-1}{n-j}_q - \left(q^{s-1-k}-1\right)\binom{s-j-2}{n-j}_q \right) \right]$$
$$+ \sum_{n=0}^{\infty} \frac{\tau_{p,q}(n) q^{n-s} \ln q}{q^{n+1}-1} \left[\left(q^n - q\right)\binom{s-2}{n}_q + \binom{s-2}{n-1}_q \right]$$

elde edilir.

p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin $p\mathbb{Z}_p$ üzerinde Volkenborn integrali altındaki yansıması için Mahler açılımından yararlanılmalıdır. Ancak Conrad'ın bulduğu Mahler açılımı bizim için yeterli değildir. Conrad'nın Mahler açılımı Barsky gibi Yardımcı Teorem 3.3.1 den yararlanılarak bulunmuştur. Barsky ve Conrad'ın yöntemi kullanılarak aşağıdaki teorem elde edilir.

Teorem 4.2.8. $q \in \mathbb{C}_p$, $|q-1|_p < p^{\frac{-1}{p-1}}$ için $\Gamma_{p,q}$ Mahler açılımı

$$\Gamma_{p,q}(pn) = \sum_{k=0}^{\infty} \lambda_{p,q} \binom{pn}{k}_q \quad (n \in \mathbb{N})$$

ve

$$\sum_{n\geq 0} (-1)^{pn} \lambda_{p,q} \frac{X^{pn}}{(pn)_q!} = E_{1\backslash q}(X) E_{q^p}\left(\frac{X^p}{(p)_q} \right)$$

şeklinde ifade edilir. Burada $\lambda_{p,q}$, $\Gamma_{p,q}(pn)$ dizisinin n inci q-Mahler katsayısıdır.

İspat: Özellik 3.3.4 (iv) den

$$\Gamma_{p,q}\left(pn+1\right)=\frac{\left(-1\right)^{pn+1}\left(pn\right)_q!}{\left(p\right)^{\left[\frac{pn}{p}\right]_q}\left(\left[\frac{pn}{p}\right]\right)_{q^p}!}=\frac{\left(-1\right)^{pn+1}\left(pn\right)_q!}{\left(p\right)^{(n)_q}\left(n\right)_{q^p}!}$$

yazılır. Özellik 3.3.1 ve Tanım 3.3.2 den

$$\Gamma_{p,q}\left(pn\right)=\frac{\left(-1\right)^{pn}\left(pn-1\right)_q!}{\left(p\right)_q^{(n-1)}\left(n-1\right)_{q^p}!}=\frac{\left(-1\right)^{pn}\left(pn\right)_q\left(pn-1\right)_q!}{\left(p\right)_q\left(n\right)_{q^p}\left(p\right)_q^{(n-1)}\left(n-1\right)_{q^p}!}=\frac{\left(-1\right)^{pn}\left(pn\right)_q!}{\left(p\right)_q^{(n)}\left(n\right)_{q^p}!} \tag{4.20}$$

bulunur. Yardımcı Teorem 3.3.1 den ve (4.20) eşitliklerinden

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{pn}\Gamma_{p,q}\left(pn\right)\frac{X^{pn}}{\left(pn\right)_q!}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{\left(p\right)_q^n\left(n\right)_{q^p}!}X^{pn}=\sum_{n=0}^{\infty}\frac{\left(\frac{X^p}{\left(p\right)_q}\right)^n}{\left(n\right)_{q^p}!}$$

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{pn}\Gamma_{p,q}\left(pn\right)\frac{X^{pn}}{\left(pn\right)_q!}=E_{q^p}\left(\frac{X^p}{\left(p\right)_q}\right)$$

elde edilir. $\lambda_{p,q}$, $\Gamma_{p,q}\left(pn\right)$ dizisinin n inci q-Mahler katsayısı olsun. Yardımcı Teorem 3.3.1 den

$$\sum_{n=0}^{\infty}\left(-1\right)^{pn}\lambda_{p,q}\frac{X^{pn}}{\left(pn\right)_q!}=E_q\left(-X\right)^{-1}E_{q^p}\left(\frac{X^p}{\left(p\right)_q}\right)=E_{1/q}\left(X\right)E_{q^p}\left(\frac{X^p}{\left(p\right)_q}\right)$$

dur. $E_{1/q}\left(X\right)E_{q^p}\left(\frac{X^p}{\left(p\right)_q}\right)$, $e^{X+X^p/p}$ nin q-benzeridir. (3.7) da $n\to\infty$ iken p-adik olarak $b_{p,q}\left(n\right)\to 0$ dır, bu yüzden $n\to\infty$ iken $\lambda_{p,q}\to 0$ olduğu görülür. O halde $\Gamma_{p,q}\left(pn\right)$ nın Mahler açılımı vardır.

Teorem 4.2.9. $x\in p\mathbb{Z}_p$ için $\Gamma_{p,q}$ nın Volkenborn integrali

$$\int_{p\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}\left(x\right)dx=\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\lambda_{p,q}\frac{p^{-1}\left(-1\right)^{k-j}q^{\binom{k-j}{2}}\binom{k}{j}_q\frac{\log q^{kp}}{q^{kp}-1}}{q^{\frac{k(k-1)}{2}}\left(q^k-1\right)\left(q^{k-1}-1\right)\ldots\left(q-1\right)}$$

şeklinde yazılır.

İspat: Teorem 3.4.3 den

$$\int_{p\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}\left(x\right)dx=p^{-1}\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}\left(px\right)dx \tag{4.21}$$

dur. Teorem 4.2.8 ve (4.21) den

$$\int_{p\mathbb{Z}_p} \Gamma_{p,q}(x)\,dx = p^{-1}\int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{p,q}\binom{px}{k}_q dx = p^{-1}\sum_{k=0}^{\infty}\lambda_{p,q}\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{px}{k}_q dx \tag{4.22}$$

eşitliği bulunur. $\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{px}{k}_q dx$ değerini hesaplayalım: (3.5) eşitliğinden

$$\binom{px}{k}_q = \frac{\left(q^{px}-1\right)\left(q^{px-1}-1\right)\ldots\left(q^{px-k+1}-1\right)}{\left(q^k-1\right)\left(q^{k-1}-1\right)\ldots\left(q-1\right)} = \frac{\left(q^{px}-1\right)\frac{\left(q^{px}-q\right)}{q}\ldots\frac{\left(q^{px}-q^{k-1}\right)}{q^{k-1}}}{\left(q^k-1\right)\left(q^{k-1}-1\right)\ldots\left(q-1\right)}$$

elde edilir. Özellik 3.3.3 (iii) kullanılırsa

$$\binom{px}{k}_q = \frac{\left(q^{px}-1\right)\left(q^{px}-q\right)\ldots\left(q^{px}-q^{k-1}\right)}{q^{\frac{k(k-1)}{2}}\left(q^k-1\right)\left(q^{k-1}-1\right)\ldots\left(q-1\right)} = \frac{\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j} q^{\binom{k-j}{2}}\binom{k}{j}_q q^{kpx}}{q^{\frac{k(k-1)}{2}}\left(q^k-1\right)\left(q^{k-1}-1\right)\ldots\left(q-1\right)}$$

elde edilir. $A^{-1} = q^{\frac{k(k-1)}{2}}\left(q^k-1\right)\left(q^{k-1}-1\right)\ldots\left(q-1\right)$ olsun. O halde

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{px}{k}_q dx = \int_{\mathbb{Z}_p} A\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j} q^{\binom{k-j}{2}}\binom{k}{j}_q q^{kpx}dx = A\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j} q^{\binom{k-j}{2}}\binom{k}{j}_q \int_{\mathbb{Z}_p} q^{kpx}dx$$

bulunur. $a = q^{pk}$, $q^{pk} \neq 1$ için Örnek 3.4.2 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{px}{k}_q dx = A\sum_{j=0}^{k}(-1)^{k-j} q^{\binom{k-j}{2}}\binom{k}{j}_q \frac{\log q^{kp}}{q^{kp}-1} \tag{4.23}$$

yazılır. (4.22) ve (4.23) eşitliklerinden,

$$\int_{p\mathbb{Z}_p}\Gamma_{p,q}(x)\,dx = \sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\lambda_{p,q}\frac{p^{-1}(-1)^{k-j} q^{\binom{k-j}{2}}\binom{k}{j}_q \frac{\log q^{kp}}{q^{kp}-1}}{q^{\frac{k(k-1)}{2}}\left(q^k-1\right)\left(q^{k-1}-1\right)\ldots\left(q-1\right)}$$

eşitliği elde edilir.

Teorem 4.2.10. $x \in T_p$ olsun. O halde

$$\int_{T_p}\Gamma_{p,q}(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\tau_{p,q}(n)\frac{\ln q.q^{-2-n}}{q^{n+1}-1}\left[\sum_{j=1}^{n}\prod_{k=0}^{j-1}\frac{q^{-j}\left(q^{-1-k}-1\right)}{q^{n-k}-1}\binom{-j-2}{n-j}_q + \binom{-2}{n}_q\right]$$
$$-\sum_{k=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{k}\lambda_{p,q}\frac{p^{-1}(-1)^{k-j} q^{\binom{k-j}{2}}\binom{k}{j}_q \frac{\log q^{kp}}{q^{kp}-1}}{q^{\frac{k(k-1)}{2}}\left(q^k-1\right)\left(q^{k-1}-1\right)\ldots\left(q-1\right)}$$

İspat: (4.17) ve Teorem 4.2.9 dan istenilen sonuç elde edilir.

4.3. p -Adik Gama Fonksiyonunun ve Türevinin Fermiyonik p -adik İntegralleri

Bu kısımda Changhee sayları ve polinomları ile p -adik gama fonksiyonu arasında ilişkiler elde edilmiş p -adik gama fonksiyonunun integral değeri bulunmuştur. Ayrıca p -adik Euler sabiti için yeni eşitlikler verilmiştir.

Teorem 4.3.1. $x\in\mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_p(x+1)\,d\mu_{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{Ch_n}{n!}$$

eşitlik sağlanır.

İspat: $x\in\mathbb{Z}_p$ ve $\Gamma_p(x+1)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{x}{n}$, $\exp\left(x+\frac{x^p}{p}\right)\frac{1-x^p}{1-x}=\sum_{n=0}^{\infty}(-1)^{n+1}n!a_nx^n\ (x\in E)$

olsun. Böylece,

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_p(x+1)\,d\mu_{-1}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{x}{n}d\mu_{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x}{n}d\mu_{-1}(x) \tag{4.24}$$

yazılır. Not edelim ki $(x)_n=n!\binom{x}{n}$ dir. Özellik 3.5.1 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_p(x+1)\,d\mu_{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{\mathbb{Z}_p}\binom{x}{n}d\mu_{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{Ch_n}{n!}$$

elde edilir.

Özellik 3.5.3 ve (4.24) eşitliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.1. $n\geq 0$ ve $x\in\mathbb{Z}_p$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_p(x+1)\,d\mu_{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\left(\frac{-1}{2}\right)^n.$$

Teorem 4.3.2. $x,s\in\mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_p(x+s)\,d\mu_{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\frac{Ch_n(s-1)}{n!}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Teorem 3.2.7 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\Gamma_p(x+s)\,d\mu_{-1}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{n=0}^{\infty}a_n\binom{x+s-1}{n}d\mu_{-1}(x)=\sum_{n=0}^{\infty}a_n\int_{\mathbb{Z}_p}\frac{(x+s-1)_n}{n!}d\mu_{-1}(x)$$

yazılır. Özellik 3.5.2 den istenilen sonuç elde edilir.

$\Gamma_p(x)$ fonksiyonunun fermiyonik p-adik integralini bulmak için aşağıdaki teoreme ihtiyaç duyulur.

Teorem 4.3.3. $n \geq 0$ ve $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x-1}{n} d\mu_{-1}(x) = \left(2^{n+1}-1\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^n$$

vardır.

İspat: (3.12) eşitliğinden

$$I_{-1}\left(\binom{x}{n}\right) + I_{-1}\left(\binom{x-1}{n}\right) = 2\binom{0-1}{n}$$

yazılır. Buradan ve Özellik 3.5.3 ten,

$$\left(\frac{-1}{2}\right)^n + I_{-1}\left(\binom{x-1}{n}\right) = 2(-1)^n$$

elde edilir ve ispat tamamlanır.

Sonuç 4.3.2. $n \in \mathbb{N}$ için $Ch_n(-1) = \left(2^{n+1}-1\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^n n!$ eşitliği sağlanır.

İspat: Özellik 3.5.2 den $\int_{\mathbb{Z}_p} (x+y)_n \, d\mu_{-1}(y) = Ch_n(x)$ olduğu biliyor. Buradan $Ch_n(-1)$ hesaplanılır:

$$Ch_n(-1) = \int_{\mathbb{Z}_p} (-1+y)_n \, d\mu_{-1}(y) = \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{-1+y}{n} n! d\mu_{-1}(y)$$

dır. Teorem 4.3.3 ten

$$Ch_n(-1) = \left(2^{n+1}-1\right)\left(\frac{-1}{2}\right)^n n!$$

elde edilir.

Teorem 4.3.4. $x, s \in \mathbb{Z}_p$ olsun.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x+s) \, d\mu_{-1}(x) = \sum_{n\geq 1} \sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1} Ch_j(s-1)}{j!(n-j)}$$

İspat: Teorem 4.1.10 den aşağıdaki eşitlik yazılır:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x+s)\, d\mu_{-1}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j)} \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x+s-1}{j} d\mu_{-1}(x)$$
$$= \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j)} \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{(x+s-1)_j}{j!} d\mu_{-1}(x).$$

Buradan ve Özellik 3.5.2 den ispat tamamlanır.

Teorem 4.3.4 te $s=1$ iken aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.3.3. $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x+1)\, d\mu_{-1}(x) = \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1} Ch_j}{j!(n-j)}$$

elde edilir.

Teorem 4.3.5. p -adik Euler sabitinin seri açılımı

$$\gamma_p = \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^j}{n-j}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: (3.12) eşitliğinde $f(x) = \Gamma'_p(x)$ iken

$$I_{-1}\left(\Gamma'_p(x+1)\right) + I_{-1}\left(\Gamma'_p(x)\right) = 2\Gamma'_p(0)$$

yazılır. Teorem 4.1.10 ve Teorem 3.2.6 dan

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j)} \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{j} d\mu_{-1}(x) + \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j)} \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x-1}{j} d\mu_{-1}(x) = -2\gamma_p \tag{4.25}$$

eşitliği elde edilir. Özellik 3.5.3 ve Teorem 4.3.3 kullanılarak p -adik Euler sabiti için bir seri açılımı elde edilir.

Teorem 4.3.6. p -adik Euler sabiti ve Changhee sayıları arasındaki ilişki

$$\gamma_p = \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j}}{2(n-j)\, j!}\left(Ch_j + Ch_j(-1)\right)$$

dir.

İspat: (4.25) eşitliğinde Özellik 3.5.1 ve Özellik 3.5.2 kullanılırsa

$$\sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j)\, j!} Ch_j + \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j)\, j!} Ch_j(-1) = -2\gamma_p$$

elde edilir ve istenilen sonuca ulaşılır.

p -adik gama fonksiyonunun negatif değerleri için birkaç sonuç elde edilmiştir:

Teorem 4.3.7. $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(-x+1)\,d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\hat{Ch}_n}{n!}$$

ve

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(-x+1)\,d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_n \frac{(-1)^n}{j!}\binom{n-1}{n-j} Ch_j$$

sağlanır.

İspat: Teorem 3.2.7 ve ikinci tür Changhee sayıları tanımından

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(-x+1)\,d\mu_{-1}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{-x}{n} d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{(-x)_n}{n!}\,d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\hat{Ch}_n}{n!}$$

elde edilir. $\binom{-x}{n} = (-1)^n \binom{x+n-1}{n}$ olduğundan,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(-x+1)\,d\mu_{-1}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{-x}{n} d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} (-1)^n \binom{x+n-1}{n} d\mu_{-1}(x)$$

yazılır. Özellik 3.1.1 (ii) kullanılırsa

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(-x+1)\,d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n (-1)^n \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{j=0}^{n} \binom{x}{j}\binom{n-1}{n-j} d\mu_{-1}(x)$$

ve

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(-x+1)\,d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_n (-1)^n \binom{n-1}{n-j} \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{(x)_j}{j!}\,d\mu_{-1}(x)$$

bulunur. Özellik 3.5.1 den de istenilen sonuca ulaşılır.

Sonuç 4.3.4. Özellik 3.5.3 ten aşağıdaki eşitlik elde edilir:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(-x+1)\,d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{j=0}^{n} a_n (-1)^{n+j} \binom{n-1}{n-j}\left(\frac{1}{2}\right)^j .$$

Teorem 4.3.8. $x, s \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(-x-s+1)\,d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{\hat{Ch}_n(s)}{n!}$$

dır.

İspat: Teorem 3.2.7 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(-x-s+1)\,d\mu_{-1}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{-x-s}{n} d\mu_{-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{(-x-s)_n}{n!}\,d\mu_{-1}(x)$$

eşitliği yazılır. İkinci tür Changhee polinomun tanımından istenilen sonuç elde edilir.

4.4. p-Adik Gama Fonksiyonunun ve Türevinin Fermiyonik p-Adik q-İntegralleri

Bu kısımda p-adik gama fonksiyonunun ve türevinin fermiyonik p-adik q-integral altındaki değeri elde edilmiştir. Ayrıca p-adik Euler sabiti ve q-Changee sayları ve polinomları arasındaki ilişki incelenmiştir. p-adik Euler sabiti için yeni açılımlar ve gösterimler bulunmuştur.

Bu bölümde $q \in \mathbb{C}_p$, $|1-q|_p < p^{1/(1-p)}$ olsun.

Teorem 4.4.1. $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+1)\, d\mu_{-q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{Ch_{n,q}}{n!}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $x \in \mathbb{Z}_p$ olsun. Teorem 3.2.7 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+1)\, d\mu_{-q}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} d\mu_{-q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} d\mu_{-q}(x) \tag{4.26}$$

yazılır. Not edelim ki $(x)_n = n!\binom{x}{n}$ dir. Özellik 3.5.4 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+1)\, d\mu_{-q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} d\mu_{-q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{Ch_{n,q}}{n!}$$

elde edilir.

Özellik 3.5.7 ve (4.26) eşitliğinden aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.1. $n \geq 0$ ve $x \in \mathbb{Z}_p$ için aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+1)\, d\mu_{-q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \left(\frac{-q}{1+q}\right)^n.$$

Teorem 4.4.2. $x, s \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+s)\, d\mu_{-q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{Ch_{n,q}(s-1)}{n!}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Teorem 3.2.7 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma_p(x+s)\, d\mu_{-q}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x+s-1}{n} d\mu_{-q}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{(x+s-1)_n}{n!} d\mu_{-q}(x)$$

yazılır. Özellik 3.5.6 den istenilen sonuç elde edilir.

Teorem 4.4.3. $x, s \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x+s)\, d\mu_{-q}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1} Ch_{j,q}(s-1)}{j!(n-j)}$$

eşitliği elde edilir.

İspat: Teorem 4.1.10 den,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x+s)\, d\mu_{-q}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j)} \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x+s-1}{j} d\mu_{-q}(x)$$
$$= \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1}}{(n-j)} \int_{\mathbb{Z}_p} \frac{(x+s-1)_j}{j!} d\mu_{-q}(x)$$

bulunur. Burada Özellik 3.5.6 özelliği kullanılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.3 te $s=1$ iken aşağıdaki sonuç elde edilir.

Sonuç 4.4.2. $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \Gamma'_p(x+1)\, d\mu_{-q}(x) = \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1} Ch_{j,q}}{j!(n-j)}$$

elde edilir.

Teorem 4.4.4. p-adik Euler sabiti ve q-Changhee sayıları arasındaki ilişki

$$\gamma_p = \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j}\left(qCh_{j,q} + Ch_{j,q}(-1)\right)}{(2)_q\, j!(n-j)}$$

şeklinde ifade edilir.

İspat: (3.9) eşitliğinde $f(x) = \Gamma'_p(x)$ iken

$$qI_{-q}\left(\Gamma'_p(x+1)\right) + I_{-q}\left(\Gamma'_p(x)\right) = (2)_q\, \Gamma'_p(0) \tag{4.27}$$

dır. Teorem 4.4.3 te $s=0$ iken elde edilen eşitlik ve Sonuç 4.4.2 ü, (4.27) eşitliğinde yazılırsa elde edilen eşitlik ile Teorem 3.2.6 dan

$$q\sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1} Ch_{j,q}}{j!(n-j)} + \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^{n-j-1} Ch_{j,q}(-1)}{j!(n-j)} = -(2)_q\, \gamma_p$$

eşitliği elde edilir. Gerekli düzenlemeler yapılırsa ispat tamamlanır.

Teorem 4.4.5. p-adik Euler sabiti için

$$\gamma_p = \sum_{n\geq 1}\sum_{j=0}^{n-1} a_n \frac{(-1)^n}{(2)_q (n-j)} \left(\frac{(q)^{j+1}}{(1+q)^j} + \sum_{i=0}^{j} \frac{1}{(1+q)^i (j-i)!} \right)$$

gösterimi vardır.

İspat: Özellik 3.5.4 ve Özellik 3.5.7 den q-Changhee sayılarının

$$Ch_{n,q} = n!\left(\frac{-q}{1+q}\right)^n \tag{4.28}$$

olduğu biliniyor. $Ch_{n,q}(-1)$ değeri için Özellik 3.5.9 ten $Ch_{n,q}(1-2) = \hat{Ch}_{n,q}(2)$ yazılır. $\hat{Ch}_{n,q}(2)$ değerini (3.15) eşitliğinden:

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{Ch}_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!} = \frac{1+q}{1+q+t}(1+t)^{1-x} = \frac{1+q}{1+q+t}\sum_{n\geq 0}\binom{1-x}{n}t^n$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{Ch}_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\frac{(-1)^n}{(1+q)^n}t^n \sum_{n\geq 0}\binom{1-x}{n}t^n$$

veya

$$\sum_{n=0}^{\infty} \hat{Ch}_{n,q}(x)\frac{t^n}{n!} = \sum_{n\geq 0}\sum_{i=0}^{n}\left(\frac{-1}{1+q}\right)^i\binom{1-x}{n-i}t^n$$

olarak yazılır. Buradan

$$\hat{Ch}_{n,q}(x) = \sum_{i=0}^{n}\left(\frac{-1}{1+q}\right)^i\binom{1-x}{n-i}n! \tag{4.29}$$

elde edilir. Hatırlatalım ki $x^n = (-1)^n(-x)_n$ dir. O halde (4.29) eşitliği

$$\hat{Ch}_{n,q}(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^i}{(1+q)^i}\frac{(-1+x)^{n-i}(-1)^{n-i}}{(n-i)!}n! \tag{4.30}$$

şekline yazılır. (4.30) eşitliğinde $x=2$ değeri için

$$\hat{Ch}_{n,q}(2) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1+2)^{n-i}(-1)^n n!}{(1+q)^i(n-i)!} = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1)^n n!}{(1+q)^i(n-i)!} \tag{4.31}$$

sonucu bulunur. (4.28) ve (4.31) i, Teorem 4.4.4 te yazılır ve düzenlenirse

$$\gamma_p = \sum_{n\geq 0}\sum_{j=0}^{n-1}a_n\frac{(-1)^n}{(2)_q(n-j)}\left(\frac{(q)^{j+1}}{(1+q)^j} + \sum_{i=0}^{j}\frac{1}{(1+q)^i(j-i)!}\right)$$

sonucu elde edilir.

Sonuç 4.4.3. (4.30) eşitliğinden ikinci tür q-Changhee polinomunun seri açılımı

$$\hat{Ch}_{n,q}(x) = \sum_{i=0}^{n}\frac{(-1+x)^{n-i}(-1)^n}{(n-i)!(1+q)^i}n!$$

ifadesidir.

4.5. p -Adik Log Gama ve p -Adik q -Log Gama Tipli Fonksiyonlar Üzerine

Bu kısımda, fermiyonik p -adik q -integrali yardımıyla p -adik Diamond-Euler log gama fonksiyonu, fermiyonik p -adik q -integral ile Kim'in $q\text{-}Log\Gamma$ fonksiyonu ve fermiyonik p -adik integrali ile Kim ve Rim'in tanımladığı p -adik q -Log gama fonksiyonu tanımlanmıştır ve onların birkaç temel özellikleri incelenmiştir.

$\log_p(1+T)$ nin kuvvet serisinden yararlanılarak,

$(1+T)\log_p(1+T)-T=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}T^{n+1}$ olduğunu gösterelim:

$|T|_p<1$ için $\left((1+T)\log_p(1+T)\right)'=1+\log_p(1+T)=1+\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n}T^n$ dır.

Buradan $(1+T)\log_p(1+T)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}T^{n+1}+T+c$ bulunur. Burada c sabit sayıdır, $T=0$ iken $c=0$ sağlanır ve

$$(1+T)\log_p(1+T)-T=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}T^{n+1} \tag{4.32}$$

olduğu kolaylıkla görülür.

Kim ve Hu'nun düşüncesinden yararlanılarak, fermiyonik p -adik q -integrali ile p -adik Diamond-Euler Log Gama fonksiyonu, $x\in\mathbb{C}_p\setminus\mathbb{Z}_p$ için

$$Log\Gamma_{D,E,-q}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left((x+u)\log_p(x+u)-(x+u)\right)d\mu_{-q}(u) \tag{4.33}$$

olarak tanımlanır.

Teorem 4.5.1. (Stirling'in Serileri) $x\in\mathbb{C}_p$ ve $|x|_p>1$ olsun. Aşağıdaki ilişki sağlanır.

$$Log\Gamma_{D,E,-q}(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{1}{x^n}\tilde{E}_{n+1,q}-\log_p x\,\tilde{E}_{1,q}-\left(x\log_p x+x\right)$$

İspat: $g(x,u)=(x+u)\log_p(x+u)-(x+u)$ olsun.

$$g(x,u)=x\left(1+\frac{u}{x}\right)\left(\log_p\left(1+\frac{u}{x}\right)-\log_p x\right)-(x+u)=x\left(\left(1+\frac{u}{x}\right)\log_p\left(1+\frac{u}{x}\right)-\frac{u}{x}\right)-(x+u)\left(\log_p x+1\right)+u$$

olarak düzenlenir. $u\in\mathbb{Z}_p$ için $\left|\frac{u}{x}\right|_p<1$ olduğundan (4.32) den

$$g(x,u) = x\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\left(\frac{u}{x}\right)^{n+1} - (x+u)\log_p x - x$$

bulunur ve $g(x,u)$ nun fermiyonik p -adik q -integrali altındaki yansıması

$$Log\Gamma_{D,E,-q}(x) = \int_{\mathbb{Z}_p}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{u^{n+1}}{x^n} - (x+u)\log_p x - x\right)d\mu_{-q}(u)$$

veya

$$Log\Gamma_{D,E,-q}(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{1}{x^n}\int_{\mathbb{Z}_p} u^{n+1}d\mu_{-q}(u) - \log_p x\int_{\mathbb{Z}_p} ud\mu_{-q}(u) - (x\log_p x + x)\int_{\mathbb{Z}_p} d\mu_{-q}(u)$$

bulunur ve (3.25) ten

$$Log\Gamma_{D,E,-q}(x) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{1}{x^n}\tilde{E}_{n+1,q} - \log_p x\,\tilde{E}_{1,q} - (x\log_p x + x)$$

sonucu elde edilir.

Teorem 4.5.2. $x \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p$ için

$$qLog\Gamma_{D,E,-q}(x+1) + Log\Gamma_{D,E,-q}(x) = (2)_q\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\tilde{E}_{n+1,q}(-1) - \tilde{E}_{1,q}\right)$$

eşitliği vardır.

İspat: (3.9) eşitliğinden

$$qLog\Gamma_{D,E,-q}(x+1) + Log\Gamma_{D,E,-q}(x) = (2)_q\, Log\Gamma_{D,E,-q}(0) \tag{4.34}$$

yazılır. (4.33) eşitliğinde $x = 0$ yazılırsa

$$Log\Gamma_{D,E,-q}(0) = \int_{\mathbb{Z}_p}(u\log_p u - u)d\mu_{-q}(u) = \int_{\mathbb{Z}_p}\left(((u-1)+1)\log_p((u-1)+1) - (u-1) - 1\right)d\mu_{-q}(u)$$

olarak düzenlenir. (4.32) eşitliğinden yararlanılırsa

$$Log\Gamma_{D,E,-q}(0) = \int_{\mathbb{Z}_p}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}(u-1)^{n+1}}{n(n+1)} - 1\right)d\mu_{-q}(u) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\int_{\mathbb{Z}_p}(u-1)^{n+1}d\mu_{-q}(u) - \int_{\mathbb{Z}_p} d\mu_{-q}(u)$$

eşitliği bulunur. (3.25) ve (3.26) ten

$$Log\Gamma_{D,E,-q}(0) = \sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\tilde{E}_{n+1,q}(-1) - \tilde{E}_{1,q}$$

eşitliği elde edilir ve bu eşitliği (4.34) de yazılırsa istenilen sonuç elde edilir.

T. Kim'in q - $Log\Gamma$ sının fermiyonik q -integral ile $x \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p$ için

$$G_{p,-q}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left(\left(x+(u)_q\right)\log_p\left(x+(u)_q\right)-\left(x+(u)_q\right)\right)d\mu_{-q}(u) \tag{4.35}$$

şeklinde tanımlanır. Burada $\log_p$ Iwasawa logaritmasıdır.

Teorem 4.5.3. $x\in\mathbb{C}_p\setminus\mathbb{Z}_p$ için

$$G_{p,-q}(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{1}{x^n}\tilde{\tilde{E}}_{n+1,q}-\log_p x\,\tilde{\tilde{E}}_{1,q}-\left(x\log_p x+x\right)$$

dır.

İspat: $g\left(x,(u)_q\right)=\left(x+(u)_q\right)\log_p\left(x+(u)_q\right)-\left(x+(u)_q\right)$ olsun.

$$g\left(x,(u)_q\right)=x\left(\left(1+\frac{(u)_q}{x}\right)\log_p\left(1+\frac{(u)_q}{x}\right)-\frac{(u)_q}{x}\right)-\left(x+(u)_q\right)\left(\log_p x+1\right)+(u)_q$$

düzenlenir. (4.32) ve (4.35) dan

$$G_{p,-q}(x)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{(u)_q^{n+1}}{x^n}-\left(x+(u)_q\right)\log_p x-x\right)d\mu_{-q}(u)$$

denk olarak

$$G_{p,-q}(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{1}{x^n}\int_{\mathbb{Z}_p}(u)_q^{n+1}d\mu_{-q}(u)-\log_p x\int_{\mathbb{Z}_p}(u)_q\,d\mu_{-q}(u)-\int_{\mathbb{Z}_p}\left(x\log_p x+x\right)d\mu_{-q}(u)$$

yazılır. (3.19) ve (3.20) eşitliklerinden

$$G_{p,-q}(x)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{1}{x^n}\tilde{\tilde{E}}_{n+1,q}-\log_p x\,\tilde{\tilde{E}}_{1,q}-\left(x\log_p x+x\right)$$

olduğu görülür.

Teorem 4.5.4. $x\in\mathbb{C}_p\setminus\mathbb{Z}_p$ için

$$qG_{p,-q}(x+1)+G_{p,-q}(x)=(2)_q\sum_{n\geq 1}\frac{(-q)^{n+1}}{n(n+1)}\tilde{\tilde{E}}_{n+1,q}(-1)-(2)_q$$

ilişkisi vardır.

İspat: (3.9) eşitliğinden

$$qG_{p,-q}(x+1)+G_{p,-q}(x)=(2)_q\,G_{p,-q}(0) \tag{4.36}$$

yazılır ve (4.35) eşitliğinden,

$$G_{p,-q}(0)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left((u)_q\log_p(u)_q-(u)_q\right)d\mu_{-q}(u)$$

elde edilir. $(u)_q=q(u-1)_q+1$ olduğu biliniyor ve bu eşitlikten

$$G_{p,-q}(0)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left(\left(q(u-1)_q+1\right)\log_p\left(q(u-1)_q+1\right)-q(u-1)_q-1\right)d\mu_{-q}(u)$$

elde edilir. (4.32) den

$$G_{p,-q}(0)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left(\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n+1}\left(q(u-1)_q\right)^{n+1}}{n(n+1)}-1\right)d\mu_{-q}(u)=\sum_{n\geq1}\frac{(-q)^{n+1}}{n(n+1)}\int_{\mathbb{Z}_p}\left((u-1)_q\right)^{n+1}d\mu_{-q}(u)-1$$

eşitliği bulunur. (3.18) eşitliğinden

$$G_{p,-q}(0)=\sum_{n\geq1}\frac{(-q)^{n+1}}{n(n+1)}\tilde{\tilde{E}}_{n+1,q}(-1)-1$$

elde edilir ve bu eşitlik ile (4.36) eşitliğinden

$$qG_{p,-q}(x+1)+G_{p,-q}(x)=(2)_q\sum_{n\geq1}\frac{(-q)^{n+1}}{n(n+1)}\tilde{\tilde{E}}_{n+1,q}(-1)-(2)_q$$

sonucu bulunur.

Kim ve Rim 'in tanımladığı p-adik q-log gama fonksiyonunun fermiyonik p-adik integrali ile $x\in\mathbb{C}_p\setminus\mathbb{Z}_p$ için

$$G_{p,q,-1}(x)=\int_{\mathbb{C}_p}\left((x+u)_q\log_p(x+u)_q-(x+u)_q\right)d\mu_{-1}(u). \tag{4.37}$$

şeklinde tanımlanır.

Teorem 4.5.5. $x\in\mathbb{C}_p\setminus\mathbb{Z}_p$ için

$$G_{p,q,-1}(x)=\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{q^{x(n+1)}}{(x)_q^n}E_{n+1,q}-q^x\log_p(x)_q E_{1,q}-(x)_q\log_p(x)_q-(x)_q$$

eşitliği sağlanır.

İspat: $g(x,u)=(x+u)_q\log_p(x+u)_q-(x+u)_q$ olsun. $(x+u)_q=(x)_q+q^x(u)_q$ olduğundan

$$g(\mathrm{x},\mathrm{u})=(x)_q\left(\left(1+q^x\frac{(u)_q}{(x)_q}\right)\log_p\left(1+q^x\frac{(u)_q}{(x)_q}\right)-q^x\frac{(u)_q}{(x)_q}\right)-\left((x)_q+q^x(u)_q\right)\left(\log_p(x)_q+1\right)+q^x(u)_q$$

şeklinde düzenlenir. (4.37) eşitliğinden

$$G_{p,q,-1}(x)=\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{q^{x(n+1)}}{(x)_q^n}\int_{\mathbb{Z}_p}(u)_q^{n+1}d\mu_{-1}(u)-q^x\log_p(x)_q\int_{\mathbb{Z}_p}(u)_q d\mu_{-1}(u)-\int_{\mathbb{Z}_p}\left((x)_q\log_p(x)_q+(x)_q\right)d\mu_{-1}(u)$$

yazılır. (3.21) eşitliği kullanılırsa

$$G_{p,q,-1}(x)=\sum_{n\geq1}\frac{(-1)^{n+1}}{n(n+1)}\frac{q^{x(n+1)}}{(x)_q^n}E_{n+1,q}-q^x\log_p(x)_q E_{1,q}-(x)_q\log_p(x)_q-(x)_q$$

bulunur.

Teorem 4.5.6. $x \in \mathbb{C}_p \setminus \mathbb{Z}_p$ için

$$G_{p,q,-1}(x+1)+G_{p,q,-1}(x)=2\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-q)^{n+1}}{n(n+1)}E_{n+1,q}(-1)-1\right)$$

ilişkisi vardır.

İspat: (3.12) ve (4.37) dan

$$G_{p,q,-1}(x+1)+G_{p,q,-1}(x)=2G_{p,q,-1}(0) \tag{4.38}$$

olduğu görülür. $G_{p,q,-1}(0)$ ın değeri;

$$G_{p,q,-1}(0)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left((u)_q \log_p (u)_q-(u)_q\right)d\mu_{-1}(u)$$

yazılır ve burada $(u)_q = q(u-1)_q+1$ olduğu biliniyor. Böylece,

$$G_{p,q,-1}(0)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left(\left(q(u-1)_q+1\right)\log_p\left(q(u-1)_q+1\right)-q(u-1)_q-1\right)d\mu_{-1}(u)$$

olarak düzenlenir. (4.32) eşitliğinden

$$G_{p,q,-1}(0)=\int_{\mathbb{Z}_p}\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-1)^{n+1}\left(q(u-1)_q\right)^{n+1}}{n(n+1)}-1\right)d\mu_{-1}(u)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-q)^{n+1}}{n(n+1)}\int_{\mathbb{Z}_p}\left((u-1)_q\right)^{n+1}d\mu_{-1}(u)-1$$

yazılır ve (3.23) eşitliğinden de

$$G_{p,q,-1}(0)=\sum_{n\geq 1}\frac{(-q)^{n+1}}{n(n+1)}E_{n+1,q}(-1)-1$$

elde edilir. (4.38) ten

$$G_{p,q,-1}(x+1)+G_{p,q,-1}(x)=2\left(\sum_{n\geq 1}\frac{(-q)^{n+1}}{n(n+1)}E_{n+1,q}(-1)-1\right)$$

sonucu bulunur.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında elde edilen sonuçlar matematik, fizik, mühendislik ve diğer bilim dallarına ışık tutacaktır. Bulgular kısmı beş kısımdan oluşmaktadır.

İlk kısımda p-adik gama fonksiyonu ve Volkenborn integrali üzerine çalışılmıştır. Bu bölümün ilk teoreminde p-adik gama fonksiyonunun Volkenborn integral değeri elde edilmiştir. İkinci teoremde, p-adik gama fonksiyonunun Volkenborn integral değeri ile p-adik Euler sabiti arasında ilişki elde edilmiştir. Üçüncü teoremde p-adik gama fonksiyonunun Volkenborn integral değerinin ifadesi, seri açılım ile bulunmuştur. İkinci ve üçüncü teoremlerden p-adik Euler açılımının bir başka gösterilimi elde edilmiştir. Dördüncü teoremde bir fonksiyon olarak p-adik gama fonksiyonunun Volkenborn integrali incelenmiştir. Beşinci teoremde, p-adik gama fonksiyonunun $p\mathbb{Z}_p$ üzerinde integral değeri araştırılmıştır. Bu bölümün altıncı teoreminde, p-adik gama fonksiyonunun T_p üzerinde p-adik integral değeri incelenmiştir. Yedinci teoremde, p-adik gama fonksiyonunun negatif değerleri için Volkenborn integral değeri bulunmuştur. Sekinci teoremde, p-adik gama fonksiyonunun tersinin Volkenborn integral değeri hesaplanmıştır. Dokuzuncu teoremde ise sekizinci teoremin $p=2$ için değeri bulunmuştur. Onuncu teoremde ise bu sefer p-adik gama fonksiyonunun türevi bulunmuş ve $x=0$ değeri hesaplanarak p-adik Euler sabiti için bir kuvvet serisiyle gösterim verilmiştir. Onbirinci teoremde, p-adik gama fonksiyonunun türevinin Volkenborn integral değeri araştırılmıştır. Onikinci teoremde ise iki değişkene bağlı Mahler tabanının Volkenborn integrali incelenmiştir. Onüçüncü teoremde ise iki değişkene bağlı p-adik gama fonksiyonunun türevinin Volkenborn integrali hesaplanmıştır. Ondorduncü teoremde ise p-adik gama fonksiyonunun türevinin $p\mathbb{Z}_p$ üzerinde p-adik integral değeri, Onbeşinci teoreminde ise p-adik gama fonksiyonunun türevinin T_p üzerindeki Volkenborn integral değeri bulunmuştur.

Bulgular bölümünün ikinci kısmında, p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesi ve Volkenborn integrali düşünülmüştür. Teorem 4.2.1 de, q-Mahler katsayısının belirsiz toplamı bulunmuştur. Teorem 4.2.2 de q-Mahler katsayısının türevi elde edilmiştir. Teorem 4.2.3 te q-Mahler katsayısının Volkenborn integrali bulunmuştur. Teorem 4.2.4 de ise p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin Volkenborn integral değeri elde edilmiştir. Teorem 4.2.5 de iki değişkene bağlı p-adik gama fonksiyonunun Volkenborn integrali incelenmiştir. Teorem 4.2.6 da p-adik Euler sabitinin q-genişlemesi için yeni bir gösterim elde edilmiştir. Teorem

4.2.7 de p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin türevi bulunmuştur. Teorem 4.2.8 de p-adik gama fonksiyonunun pn değeri için Mahler açılımı bulunmuştur. Teorem 4.2.9 da p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin $p\mathbb{Z}_p$ üzerinde p-adik integral değeri bulunmuş ve Teorem 4.2.10 da ise p-adik gama fonksiyonunun q-genişlemesinin T_p üzerinde p-adik integral değeri incelenmiştir.

Tezin bulgular bölümünün üçüncü kısmında ise p-adik gama fonksiyonu ve fermiyonik p-adik integrali incelenmiştir. Bu kısmın ilk teoreminde p-adik gama fonksiyonunun fermiyonik p-adik integral değeri Changhee sayıları ile ifade edilmiştir. Teorem 4.3.2 de iki değişkene bağlı p-adik gama fonksiyonunun fermiyonik p-adik integral değeri bulunmuştur. Sonuç 4.3.2 de ise Changhee sayısının -1 deki değeri bulunmuştur. Teorem 4.3.3 de Mahler tabanının fermiyonik p-adik integral değeri hesaplanmış, Teorem 4.3.4 de p-adik gama fonksiyonunun türevinin fermiyonik p-adik integral değeri verilmiştir. Teorem 4.3.5 de p-adik Euler sabiti için yeni gösterimi fermiyonik p-adik integral kullanılarak hesaplanmıştır. Teorem 4.3.6 da ise p-adik Euler sabiti ile Changhee sayıları arasında bir ilişki elde edilmiştir. Teorem 4.3.7 de ise p-adik gama fonksiyonunun negatif değerleri için p-adik gama fonksiyonunun fermiyonik p-adik integral altında değeri verilmiştir. Benzer şekilde Teorem 4.3.8 de iki değişkenli p-adik gama fonksiyonunun fermiyonik p-adik integral değeri için bir sonuç verilmiştir.

Bulgular bölümünün dördüncü kısmında p-adik gama fonksiyonunun fermiyonik p-adik q-integrali üzerine bir çalışma mevcuttur. Teorem 4.4.1 de p-adik gama fonksiyonunun fermiyonik p-adik q-integral değeri Changhee sayısının q-genişlemesiyle ifade edilmiştir. Teorem 4.4.2 de iki değişkene bağlı p-adik gama fonksiyonunun fermiyonik p-adik q-integral değeri bulunmuştur. Teorem 4.4.3 de p-adik gama fonksiyonunun türevinin fermiyonik p-adik q-integrali hesaplanmıştır. Teorem 4.4.4 de p-adik Euler sabiti ile Changhee sayıları arasında bir ilişki verilmiştir. Teorem 4.4.5 de p-adik Euler sabiti için q sayılarla yeni bir kuvvet serisi açılımı bulunmuştur. Son olarak ikinci tür q-Changhee polinomu için bir seri açılımı verilmiştir.

Bulgular bölümünün son kısımda, fermiyonik p-adik q-integrali yardımıyla p-adik Diamond-Euler log gama fonksiyonu tanımlanmış ve Teorem 4.5.1 de bu fonksiyonun Stirling'in seri açılımı ve ayrıca Teorem 4.5.2 de bu fonksiyon için önemli bir özellik verilmiştir. Bu kısımda fermiyonik p-adik q-integrali ile Kim'in q-$Log\Gamma$ fonksiyonu tanımlanmış ve Teorem 4.5.3 de bu integral yardımıyla stirling serileri verilmiş ve Teorem 4.5.4 de ise bu tanım altında p-adik

Euler sayılarının q-genişlemesiyle ilgili bir sonuç verilmiştir. Bu kısımda son olarak Kim ve Rim'in tanımladığı p-adik q-Log gama fonksiyonu fermiyonik p-adik integrali ile tanımlanmış ve Teorem 4.5.5 de bu fonksiyon yardımıyla Stırling'in serileri bulunmuş ve ayrıca Teorem 4.5.6 da tanımlanan fonksiyonun ilgi çekici bir özelliği incelenmiştir.

5.2. Öneriler

Bu tezde elde edilen sonuçlar kullanılarak çeşitli p-adik gama fonksiyonları, p-adik q-log gama fonksiyonları ve bunların türevleri tanımlanarak Volkenborn integralleri, q-Volkenborn integralleri, fermiyonik p-adik q-integralleri altındaki yansımaları incelenebilir. Ayrıca, çeşitli p-adik q-gama fonksiyonlarının farklı türdeki polinom aileleri ile ilişkileri araştırılabilir.

KAYNAKLAR

[1]. Dragovich, B., Khrennikov, A. Y., Kozyrev, S. V. and Volovich, I. V. (2009). On p-adic Mathematical Physics. *p-Adic Numbers Ultrametric Analysis and Applications*, 1(1), 1–17.
[2]. Volovich, I. V. (2010). Number Theory as the Ultimate Physical Theory. *p-Adic Numbers, Ultrametric Analysis and Applications,* 2(1), 77–87*.*
[3]. Vladimirov, V. S., Volovich I. V. and. Zelenov E. I. (1994). *p-Adic Analysis and Mathematical Physics*. World Scientific Publishing.
[4]. Vladimirov, V. S. and Volovich, I. V. (1984). Superanalysis. I. Differential calculus. *Theoretical and Mathematical Physics,* 59, 317.335.
[5]. Morita, Y. (1975). A p-adic analogue of the Γ-function. *Journal of Faculty Science University,* Tokyo, 22(2), 225- 266.
[6]. Thomas, E. (2012). *A Comprehensive Treatment of q-Calculus*. Springer Basel.
[7]. Koblitz, N. (1980). q-extension of the p-adic Gamma function. *Transactions of American Mathematical Society*, 260(2), 449-457.
[8]. Koblitz, N. (1982). q-extension of the p-adic Gamma function II. *Transactions of the American Mathematical Society*, 273(1), 111.129.
[9]. Ghoshal, D. (2006). *Quantum Extended Arithmetic Veneziano Amplitude*, 12 Ekim 2018 tarihinde http://inspirehep.net/record/718449 adresinden erişildi.
[10]. Mahler, K. (1958). An Interpolation Series for Continuous Functions of a p-adic Variable. *Journal für die reine und angewandte Mathematik*, 199, 23-34.
[11]. Barsky, D. (1981). On Morita's p-adic Gamma function. *Mathematical Proceedings of the Cambridge Philosophical Society*, 89(1), 23-27.
[12]. Conrad, K. (2000). A q-Analogue of Mahler Expansions I. *Advances in Mathematics,* 153(2), 185-230.
[13]. Volkenborn A. (1972). Ein p-adisches Integral und seine Anwendungen. I, *Manuscripta Mathematics,* 7-4, 341.373.
[14]. Volkenborn A. (1974). Ein p-adisches Integral und seine Anwendungen II, *Manuscripta Mathematics,* 12, 17-46.
[15]. Diamond, J. (1977), The p-adic log Gamma function and p-adic Euler constants. *Transactions American Mathematical Society*, 233, 321-337.
[16]. Kim, T. (2002). q-Volkenborn integration. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 9(3), 288-299.
[17]. Kim, T.(2005). A note on q-Volkenborn İntegration. *Proceedings of the JangJeon Mathematical Society*, 8, 13-17.
[18]. Simsek, Y., Yardimci, A. (2016). Applications on the Apostol-Daehee numbers and polynomials associated with special numbers, polynomials, and p-adic integrals. *Advances in Difference Equations,* 2016:308.
[19]. Dwork, B. (1983). A note on p-adic Gamma function. *Groupe de travail d.analyse ultrametrique*, 9(3), J1-J10.
[20]. Kim, T. (1997). *A note on analogue of Gamma functions.* Proceedings Conference on 5th Transcendental Number Theory 5, No. 1, Gakushin Univ. Tokyo Japan, 111-118.
[21]. Conrad, K. (1997). *p-adic Gamma Functions. PhD. Thesis*, Harvard University, Cambrdge, Massachusetts.
[22]. Gross, B. H. and Koblitz, N. (1979). Gauss Sums and the p-adic Γ-function. *The Annals of Mathematics, Second Series*, 109(3), 569-581.
[23]. Cohen H., Friedman, E. (2008). Raabe's formula for p-adic Gamma and zeta functions. *Annales De L'Institut Fourier (Grenoble),* 58(1), 363-376.

[24]. Shapiro, I. (2012). Frobenius map and the p-adic Gamma function. *Journal of Number Theory*, 132(8), 1770-1779.
[25]. Nakazato, H. (1988). The q-analogue of the p-adic Gamma function. *Kodai Mathematical Journal*, 11(1), 141.153.
[26]. Kim, Y. S. (1998). q-analogues of p-adic Gamma functions and p-adic Euler constants. *Communications of the Korean Mathematical Society*, 13 (4), 735.741.
[27]. Kim, T. (2008). An invariant p-adic q-integral on $\mathbb{Z}_p$. *Applied Mathematics Letters 21*, 105–108.
[28]. Kim, T., Choi, J., Kim, Y. H. and Ryoo, C. S. (2010). On the fermionic p-adic integral representation of Bernstein polynomials associated with euler numbers and polynomials. *Journal of Inequalities and Applications*, 2010, Article ID 864247, 12pages.
[29]. Kim, T. (2007). On the analogs of euler numbers and polynomials associated with p-adic q-integral on $\mathbb{Z}_p$ at q=-1. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 331, 779-792.
[30]. Park, J. W. (2016). On the Special twisted q-polynamials. *Journal of Computational Analysis and Applications*, 21 (2), 283-292.
[31]. Araci, S. and Acikgoz, M. (2016). On the van Staudt-Clausen's theorem related to q-Fobenius-Euler numbers. *Journal of Number Theory*, 159, 329-339.
[32]. Araci, S., Acikgoz, M., Jolany, H. and He, Y. (2014). Identities involving q-Genocchi numbers and polynomials. *Notes on Number Theory and Discrete Mathematics*, 20(5), 2014, 64–74.
[33]. Kim, D. S., Kim, T., Seo, J.J. (2013). A note on Changhee Polynomials and numbers, *Advanced Studies Theoretical Physics*, 7(20), 993-1003.
[34]. Kwon, J., Choi, Y., Jang, M., Yang, S., Seong, M. (2016). Some identities involving Changhee polynomials arising from a differential equation. *Global Journal of Pure and Applied Mathematics,* 12(6), 4857–4866.
[35]. Araci, S., Erdal, D., Seo, J. J. (2011). A study on the fermionic p-adic q-integral representation on $\mathbb{Z}_p$ associated weighted q-Bernstein and q-Genocchi polynomials. *Abstract Application Analysis*, Article ID 649248, 10pages.
[36]. Kim, T., Kwon, H., Seo, J. J. (2016). Degenerate q-Changhee polynomials. *Journal of Nonlinear Science and Applications*, 9, 2389-2393.
[37]. Kim, T., Mansour T., Rim, S. H., Seo, J.J. (2014). A note on q-Changhee polynomials and numbers. *Advanced Studies Theoretical Physics,* 8(1), 35-41.
[38]. Ryoo, C. S. (2013). An identity of the q-Euler polynomials associated with the p-adic q-integrals on $\mathbb{Z}_p$. *Journal of Computaional Analysis and Applications*, 15(6), 1104-1109.
[39]. Kim, T., Choi, J. (2012). On the q-Euler Numbers and Polynomials with weight 0. *Abstract and Applied Analysis*, 120, ID795304, 7pages.
[40]. Kim, T. (1999). On a q-Analogue of the p-adic log Gamma functions and related integrals. *Journal of Number Theory*, 76, 320-329.
[41]. Kim, D., Ozden Ayna, H., Simsek, Y. and Yardimci, A. (2017). New families of special numbers andpolynomials arising from applications of p-adic q-integrals. *Advances in Difference Equations,* 2017:207.
[42]. Acikgoz, M., Araci, S. and Cangül, I. N. (2011). A note on the modifed q-Bernstein polynomials for functions of several variables and their refections on q-Volkenborn integration. *Applied Mathematics and Computation*, 218, 707-712.
[43]. Carlitz, L. (1948). q-Bernoulli numbers and polynomials. *Duke Mathematical Journal,* 15, 987–1000.
[44]. Carlitz, L. (1954). q-Bernoulli and Eulerian numbers. *Transactions of the American Mathematical Society ,* 76, 332–350.

[45]. Choi, J., Anderson P. J. and Srivastava, H. M. (2009). Carlitz's q-Bernoulli and q-Euler numbers and polynomials and a class of q-Hurwitz zeta functions. *Applied Mathematics Computation.,* 215, 1185–1208.
[46]. Kim, T., Choi, J.S. and Kim, Y. H. (2010). On extended Carlitz's type q-Euler numbers and polynomials. *Advenced Studies Contemporary. Mathematics,* 20, 499–505.
[47]. Luo, Q. M. and Srivastava, H. M. (2011). q-Extensions of some relationships between the Bernoulli and Euler polynomials. *Taiwanese Journal Mathematics,* 15, 241–257.
[48]. Kim, T. (2007). q-Euler numbers and polynomials associated with p-adic q-integrals. *Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 14:1, 15-27.
[49]. Kim, T. (2008). On p-adic interpolating function for q-Euler numbers and its derivatives. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 339, 598–608.
[50]. Kim, T., Choi, J. (2012). On the q-Euler Numbers and Polynomials with Weight 0. *Hindawi Publishing Corporation Abstract and Applied Analysis*, Volume 2012, Article ID 795304, 7 pages.
[51]. Choi, J.-S. , Kim, T. and Kim, Y. H. (2010). A recurrence formula for q-Euler numbers of higher order. *Proceedings of the Jangjeon Mathematical Society,* 13, 321–326.
[52]. Hwang, K.-W. , Kim, Y. H. and Kim, T. (2009). Interpolation functions of q-extensions of Apostol's type Euler polynomials. *Journal of Inequalities and Applications*, Article ID 451217, 1–12.
[53]. Kim, T. (2002). Some formulae for the q-Bernoulli and Euler polynomial of higher order. *Journal of Mathematical Analysis Applications,* 273, 236–242.
[54]. Kim, T. (2006). q-Generalized Euler numbers and polynomials. *Russian Journal of Mathematical Physis,* 13, 293–298.
[55]. Ozden H. and Simsek, Y. (2008). A new extension of q-Euler numbers and polynomials related to their interpolation functions. *Applications Mathematical Letters,* 21, 934–939.
[56]. Şen, E., Acikgoz, M., Araci, S. (2013). q-hardy-littlewood-type maximal operator with weight related to fermionic p-adic q-integral on $\mathbb{Z}_p$. *Turkish Journal of Analysis and Number Theory,* 1(1), 4-8.
[57]. Simsek, Y. (2014). Special Numbers on Analytic Functions. *Applied Mathematics*, 5, 1091-1098.
[58]. Simsek, Y. (2016). Analysis of the p-adic q-Volkenborn integrals: An approach to generalized Apostol-type special numbers and polynomials and their applications. *Cogent Mathematics*, 3: 1269393.
[59]. Araci, S., Ağyüz, E., Acikgoz, M. (2015). On a q-analogue of some numbers and polynomials, *Journal of Inequalities and Applications*, 2015:19.
[60]. Kim, T. (2007). Note on the q-extension of Euler and Genocchi numbers. *Journal of Mathematical Analysis and Applications*, 326(2), 1458-1465.
[61]. Gouvea, F. Q. (1997). p *-adic numbers: an introduction*. Germany: Springer.
[62]. Katok, S. (2007). p *-adic Analysis Compared with Real*, AMS/MASS, Student Mathematical Library, Vol. 37, Providence.
[63]. Koblitz, N. (1984). p *-adic Numbers,* p *-adic analysis and Zeta-Functions*. New York: Springer.
[64]. Schikhof, W. H. (1984). *Ultrametric calculus: An introduction to* p *-adic analysis*. New York: Cambridge University Press.
[65]. Cohen, H. (2007). *Number Theory Volume II: Analytic and Modern Tools*. New York: Springer.
[66]. Rodriguez Villegas F. (2007). *Experimental number theory*, Oxford Graduate Texts in Mathematics, 13. Oxford University Press, Oxford.
[67]. Kac, V. and Cheung, P. (1943). *Quantum Calculus*. New York: Springer.

[68]. Araci, S., Acikgoz, M. (2015). A note on the values of weighted q-Bernstein polynomials and weighted q-Genocchi numbers, *Advances in Differences Equations*, 30, 1-9.
[69]. Gauss, C. F. (1876). *Summatio Quarumdam Serierum Singularium.* Werke, Germany.
[70]. Mansour, T., Schork, M. (2015). *Commutation Relations, Normal Ordering, and Stirling Numbers*. Chapman and Hall/CRC.
[71]. Kim, T., Kim, D. S., Mansour, T., Rim, S. H. and Schork, M. (2013). Umbral calculus and Sheffer sequences of polynomials. *Journal of Mathematical Physis*, 54, 083504 (2013); doi:10.1063/1.4817853.
[72]. Kim, T. (2009). Some identities on the q-euler polynomials of higher order and q-stirling numbers by the fermionic p-adic integrals on $\mathbb{Z}_p$. *Russian Journal of Mathematical Physics*, 16, 484–491.
[73]. Kim, T., Lee, B., Choi, J., Kim, Y. H. and Rim, S. H. (2011). On the q-Euler numbers and weighted q-Bernstein polynomials. *Advanced studied in Contemporary Mathematics*, 21, 13-18.
[74]. Kim, MS. And Hu, S. (2013), On p-adic Diamond-Euler Log Gamma functions. *Journal of Number Theory*, 133, 4233-4250.
[75]. Rim, SH. and Kim, T. (2009). A note on the q-analogue of p-adic log-Gamma function, *Advanced Studies Contemporary Mathematics (Kyungshang),* 18(2), 245-248.
[76]. Araci, S., Acikgoz, M. and Park, K. H. (2013). A note on the q-analogue of Kim's p-adic log Gamma type functions associated with q-extension of Genocchi and Euler numbers with weight α. *Bulletin of the Korean Mathematical Society*, 50(2), 583-588.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı :Özge ÇOLAKOĞLU HAVARE

Doğum Tarihi :29.02.1988

E-mail : ozgecolakoglu@mersin.edu.tr

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Ege Üniversitesi	2005-2010
Yüksek Lisans	Uygulamalı Matematik	Ege Üniversitesi	2010-2012
Doktora	Matematik	Mersin Üniversitesi	2014-2018

Görevler :

Görev Ünvanı	**Görev Yeri**	**Yıl**
Araştırma Görevlisi	Mersin Üniversitesi	2013-2018

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)
Makaleler

1. Özge ÇOLAKOĞLU HAVARE, Max-min Rodeg index of bridge graphs and fullerenes, **Malaysian Journal of Fundamental and Applied Sciences,** 14(1), 2018, 48-51.

2. Özge ÇOLAKOĞLU HAVARE, Hamza MENKEN, A note on the p-adıc Gama functıon and q-changhee polynomıals, **Journal of Mathematics and Computer Science (JMCS)**, 18(1), 2018, 11-17.

3. Özge ÇOLAKOĞLU HAVARE, Hamza MENKEN, The Volkenborn Integral of the p-Adic Gamma Function, **International Journal of Advanced and Applied Sciences,** 5(2), 2018, 56-59.

4. Özge ÇOLAKOĞLU HAVARE, On Thorny Fuzzy Graphs, **Intern. J. Fuzzy Mathematical Archive**, 13(2), 2017, 213-217.

5.Özge ÇOLAKOĞLU HAVARE, Hamza MENKEN, On the Volkenborn integral of the q-extension of the p-adic Gama function, **Journal of Mathematical Analysis**, 8(2), 2017, 64-72.

6. Özge ÇOLAKOĞLU HAVARE, Hamza MENKEN, On corona product of two fuzzy graphs, **Intern. J. Fuzzy Mathematical Archive**, 10(2), 2016, 95-100.

7. Özge ÇOLAKOĞLU HAVARE, Hamza MENKEN, Some Properties of the q-extension of the p-adic Beta Function**, Neural, Parallel, and Scientific Computations**, 24, 2016, 409-418.

8. Özge ÇOLAKOĞLU HAVARE, Hamza MENKEN, Some Properties of the p-Adic Log Beta Function, **Journal of Inequalities and Special Functions**, 7(2), 2016, 26-32.

9. Hamza MENKEN and Özge ÇOLAKOĞLU, Gauss Legendre Multiplication Formula For p-Adic Beta Function, **Palestine Journal of Mathematics**, 4 (1), 2015, 508–514.

10. Özge ÇOLAKOĞLU, On Sequential Join of Fuzzy Graphs, **International Journal of Fuzzy Mathematical Archive**, 8(1), 2015, 19-27.

11. Hamza MENKEN and Özge ÇOLAKOĞLU, Some Properties of the p-adic Beta Function, **European Journal of Pure And Applıed Mathematıcs**, 8(2), 2015, 214-231.

12. Pınar DÜNDAR, Mücella GÜNER, Özge ÇOLAKOĞLU, Approach to the modular line balancing problem for an apparel product manufacturing with graph theory, **Tekstil ve konfeksiyon**, 22(4), 2012, 369-374.

Bildiriler

1. COLAKOGLU HAVARE Özge, 'Max-min Rodeg Index of Link of Fullerenes', **2nd International Mediterranean Science and Engineering Congress (IMSEC 2017)**, October 25-27, 2017, Adana, Türkiye, 644.

2. COLAKOGLU HAVARE Özge, HAVARE Ali Kemal, 'Max-min Rodeg index and thermodynamic properties of monocarboxylic acids with QSPR approach', **2nd International Mediterranean Science and Engineering Congress (IMSEC 2017)**, October 25-27, 2017, Adana, Türkiye, 685.

3. COLAKOGLU HAVARE Özge, HAVARE Ali Kemal, 'The Forgotten Topological Index of some Carbon Base Nanomaterials', **The Second Malta Conference in Graph Theory and Combinatorics**, June 26-30, 2017, Qawra, Malta, 46.

4. COLAKOGLU HAVARE Özge, MENKEN Hamza, 'On The p-adic Gama Function, Changhee Numbers and Polynomials', **Modern Mathematics and its Applications Mathematical Conference**, May 18-20, 2017, Ufa-Rusya, 24.

5. MENKEN H. and COLAKOGLU HAVARE O., 'A Note on The p-Adic Gama Function and q-Changhee Polynomials', **Modern Mathematics and its Applications Mathematical Conference**, May 18-20, 2017, Ufa-Rusya, 54.

6. COLAKOGLU HAVARE Özge, HAVARE Ali Kemal, 'The Forgotten-coindex of TUC5C7 and TUHAC5C6C7 nanotubes', **Lebanese International Conference on Mathematics and Applications**, May 16-19, 2017, Beirut, Lebanon, 85.

7. ÇOLAKOĞLU HAVARE Özge and MENKEN Hamza 'On q-Extension of p-Adic Diamond-Euler Log Gama Functions', **International Conference on Mathematics and Engineering**, May 10-12, 2017, Istanbul- Turkey, 220

8.ÇOLAKOĞLU HAVARE Özge, 'On The Harmonic Index of C_{60+12N} Fullerenes', **International Conference on Mathematics and Engineering**, May 10-12, 2017, Istanbul- Turkey, 230.

9. CİCEK Suna, COLAKOGLU HAVARE Özge, MENKEN Hamza, 'On the Volkenborn Integral of Some p-adic Trigonometric Function', **4. International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference**, May 3-7, 2017, Mersin-Turkey, 30.

10. COLAKOGLU HAVARE Özge, MENKEN Hamza, 'A Note on Derivative of the q-Extension of p-Adic Gama Function', **Ufa International Mathematical Conference**, September 27-30, 2016, Ufa-Rusya, 85.

11. MENKEN H. and COLAKOGLU HAVARE O., 'The Volkenborn Integral of q-Extension of p-Adic Gama Function', **Ufa International Mathematical Conference**, September 27-30, 2016, Ufa-Rusya, 107.

12. HAVARE Ali Kemal, ÇOLAKOĞLU HAVARE Özge, 'Calculation and Analysis of Electronic Parameters of Electroluminescent Device Cells through I-V Based Modeling', **3rd International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference**, 29 August-1 September, 2016, Mersin-Turkey, 87.

13. ÇOLAKOĞLU HAVARE Özge, MENKEN HAMZA, 'A Note on q-binom Coefficients', **3rd International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference**, 29 August-1 September, 2016, Mersin-Turkey, 65.

14. ÇOLAKOĞLU HAVARE Özge, MENKEN HAMZA, 'On p-adic Gama Function', **2nd International Conferance on Analysis and Its Applications**, July 12-15, 2016, Kırşehir-Turkey, 238.

15. ÇOLAKOĞLU Özge, ' Strong edge coloring of Thorny graphs', **2nd International Conference on Pure and Applied Science (ICPAS-2016)**, June 1-5, 2016, Istanbul- Turkey, 164.

16. MENKEN Hamza, ÇOLAKOĞLU Özge, 'A Note On p-Adic DiGama Function', **International Conference on Advancements in Mathematical Sciences (AMS 2015)**, 5-7 November 2015, Antalya, 153.

17. MENKEN Hamza, ÇOLAKOĞLU Özge, 'On the p-adic Log Beta Function', **International Conference on Pure and Applied Mathematics,** 25-28/08/2015, Van, 105.

18. ÇOLAKOĞLU Özge, MENKEN Hamza**,** 'On the q-extension of the p-adic beta function'**, International Conference on Pure and Applied Mathematics,** 25-28/08/2015, Van, 47.

19. ÇOLAKOĞLU Özge, MENKEN Hamza**,** **'** p-adik Beta Fonksiyonu için Gauss Legendre Çarpım Formulü', **14. Matematik Sempozyumu**, 14-16/05/2015, Niğde, 97-98.

20. MENKEN Hamza, ÇOLAKOĞLU Özge, ' p-adik Gama Fonksiyonun Volkenborn İntegrali', **14. Matematik Sempozyumu**, 14-16/05/2015, Niğde, 99-100.

21. ÇOLAKOĞLU Özge, MENKEN Hamza**,** 'On the p-adic Beta and Its Some Properties'**, "International Conference on Algebra and Number Theory",** 5-8 /08/2014, SAMSUN, 94.

22. ÇOLAKOĞLU Özge, DÜNDAR Pınar, 'Rainbow connection number of sequential joined graphs' "**The 24th Internationa Conference of Jangjeon Mathematical Society"**, 20-27/07/2011, Dedeman Oteli KONYA, 15.