p-ADİK SAYILARIN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET CİHAN BOZDAĞ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

MERSİN
AĞUSTOS – 2018

p-ADİK SAYILARIN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

YÜKSEK LİSANS TEZİ

MEHMET CİHAN BOZDAĞ

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Hamza MENKEN

MERSİN
AĞUSTOS - 2018

ONAY

Mehmet Cihan BOZDAĞ tarafından Prof. Dr. Hamza MENKEN danışmanlığında hazırlanan "p-Adik Sayıların İstatistiksel Yakınsaklığı Üzerine" başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 16 Ağustos 2018 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği/çokluğu ile Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	Ünvanı, Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	Prof.Dr. Hamza MENKEN	....
Üye	Prof.Dr. Hanlar REŞİDOĞLU	....
Üye	Dr.Öğr.Üyesi İlknur YEŞİLCE	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 05/10/2018 tarih ve 2018-39/1388 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cahit BİLİM

Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

16 Ağustos 2018/16 August 2018

Mehmet Cihan BOZDAĞ

ÖZET

p-ADİK SAYILARIN İSTATİSTİKSEL YAKINSAKLIĞI ÜZERİNE

Bu çalışmada p-adik sayılar cisminde dizilerin istatistiksel yakınsaklığı çalışılmıştır. Reel veya kompleks terimli sayı dizilerin istatistiksel yakınsaklığı için verilen özelliklerin benzerleri p-adik terimli diziler için elde edilmiş ve bazı karşılaştırmalar yapılmıştır.

Anahtar Kelimeler: p-adik sayı, istatistiksel yakınsama, p-adik sayılar cisminde istatistiksel yakınsama, p-adik sayılar cisminde istatistiksel Cauchy dizileri.

Danışman: Prof. Dr. Hamza MENKEN, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin

ABSTRACT

ON STATISTICAL CONVERGENCE OF P-ADIC NUMBERS

In this thesis, statistical convergence of sequences of p-adic numbers is studied. Similar properties which are given for sequences of real or complex numbers are obtained for sequences of p-adic numbers, and some comparisons are given.

Keywords: p-adik number: p-adic number, statistical convergence, statistical convergence in the p-adic numbers field, statistical Cauchy sequences in the p-adic numbers field.

Advisor: Assoc. Prof. Hamza MENKEN, Department of Mathematics, University of Mersin,Mersin.

TEŞEKKÜR

Bu tez konusunun belirlenmesini sağlayan, çalışmalarımı dikkat ve titizlikle takip edip her aşamasında bilgisini, yardımını, tecrübesini ve sempatisini kararlılıkla sürdüren ve üzerimde emeği büyük olan değerli danışman hocam sayın Prof. Dr. Hamza MENKEN'e yüksek lisans eğitimim boyunca deneyimleriyle ve tecrübesiyle bana ışık olan değerli hocam Prof. Dr. Hanlar REŞİDOĞLU'na sonsuz teşekkürlerimi sunarım.

Mersin Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü görev yapan tüm öğretim üyelerine ve araştırma görevlilerine teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca fedakârlık gösteren eşime ve aileme teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
□	Rasyonel sayılar kümesi
□	Doğal sayılar kümesi
□	Reel sayılar
C(□)	□ nun $\lvert\ \rvert_p$ e göre bütün Cauchy dizilerinin kümesi
$□_p$	p-adik sayılar cismi
$□_p$	p-adik tamsayılar halkası
$\xrightarrow{st}$	İstatiksel yakınsaklık
h.h.k	Hemen her k
$\delta(K)$	K kümesinin asimptotik yoğunluğu

1.GİRİŞ

Reel veya kompleks sayı dizileri için istatistiksel yakınsaklık kavramı ilk olarak H. Fast [1] ve H. Steinhaus [2] tarafından bağımsız şekilde 1951 de tanımlandı. (x_n) bir reel (veya kompleks) sayı dizisi olmak üzere, eğer $\forall\, \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\left\{k \in \mathbb{N} : k \leq n, \left|x_k - x\right| \geq \varepsilon\right\}\right| = 0$$

ise (x_n) dizisi x sayısına istatistiksel yakınsaktır denir. Yakınsaklık kavramından daha zayıf olan istatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilgili temel özellikler Schoenberg [3] tarafından verilmiştir.

İstatistiksel yakınsaklık kavramı ile birlikte Cauchy istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel sınırlılık, istatistiksel limit, yoğunluk kavramları gibi kavramlar da tanımlanmış ve bunlar arasındaki ilişkiler birçok yazar tarafından incelenmiştir. İstatistiksel yakınsaklık kavramı ile ilgili olarak Fourier analiz teorisinde, ergodic teoride ve sayılar teorisinde birçok çalışma yapılmıştır [1–6]

İstatistiksel yakınsaklık Fonksiyonel Analizde önemli bir yer tutmakta ve birçok matematikçi tarafından incelenmiş ve incelenmeye de devam edilmektedir.

Rasyonel sayılar cisminin p-adik norma göre tamlaştırması olan p-adik sayılar cisminde istatistiksel yakınsama kavramı henüz literatürde incelenmemiştir. Bu çalışmada p-adik sayı terimli dizilerin istatistiksel yakınsaklık kavramının tartışılarak özelliklerinin verilmesi hedeflenmektedir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMASI

İstatistiksel yakınsaklık kavramı doğal sayıların alt kümelerinin yoğunluğu kavramına dayanır. Doğal sayıların bir alt kümesinin yoğunluğu aşağıdaki şekilde verilir:

Bir $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesi için eğer

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : k \in K \} \right|$$

limiti var ise buna K kümesinin asimptotik yoğunluğu (veya yoğunluğu) denir. [6] Doğal sayıların her sonlu kümenin yoğunluğu sıfırdır. Fakat sonlu küme olmayıp yoğunluğu sıfır olan kümeler vardır.

Yoğunluk kavramına bağlı olarak bir $x = (x_k)$ reel veya kompleks terimli dizinin istatistiksel yakınsaklığı şöyle verilebilir: Eğer $\forall \varepsilon \geq 0$ için,

$$\delta\left(k : |x_k - L| \geq \varepsilon\right) = 0 \ ,$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon \} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L noktasına istatiksel yakınsaktır denir [1]. Buna göre, her yakınsak reel sayı dizi istatiksel yakınsaktır. Fakat tersi doğru değildir [5]. Böylece istatistiksel yakınsaklık yakınsaklıktan daha zayıf bir kavram olur. İstatistiksel yakınsaklık kavramına paralel olarak istatistiksel Cauchy dizisi, istatistiksel sınırlılık, istatistiksel limit kavramları tanımlanmış ve özellikleri birçok yazar tarafından incelenmiştir.

Bilindiği gibi $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi (Arşimed prensibini sağladığından) Arşimedyan bir cisimdir. Birçok Arşimedyan olmayan cisim vardır. Bunlardan biri, p bir asal sayı olmak üzere, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin $|\cdot|_p$ $p-$ adik normuna göre tamlaştırılması olan $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismidir. Şimdi $|\cdot|_p$ $p-$adik normunu ve $p-$adik sayıların bazı özelliklerini hatırlatalım.

p keyfi ve sabit bir asal sayı olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{Q}$, $x \neq 0$ için,

$$x = p^{v_p(\mathrm{n})} \cdot \frac{a}{b}, \ p \nmid a \cdot b$$

olacak şekilde tek türlü belirli bir $v_p(\mathrm{n}) \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır ve bu durumda,

$$|x|_p = p^{-v_p(n)}$$

ile tanımlanır. Eğer $x = 0$ ise $|0|_p = 0$ olarak alınır. $|\cdot|_p$ fonksiyonu bir norm tanımlar ve üçgen eşitsizliğinden daha güçlü ultrametrik üçgen eşitsizliği olarak bilinen

$$|x+y|_p \leq \max\left\{|x|_p, |y|_p\right\}$$

eşitsizliğini sağlar. Ultrametrik üçgen eşitsizliğini sağlayan normlara Arşimedyan olmayan norm denir. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi trival olmayan hiçbir norma göre tam değildir. $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin $|\cdot|_p$ $p-$adik normuna göre tamlaştırılması ile elde edilen cisme $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi denir. Ostrowski teoremi ile $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cisminin mümkün olan bütün tamlaştırmaları Arşimedyan olan $\mathbb{R}$ reel sayılar cismi ve p bir asal olmak üzere Arşimedyan olmayan $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayı cisimleridir. $\mathbb{Q}_p$ $p-$adik sayılar cismi 1904'te Kurt Hensel tarafından inşa edilmiş ve uzun bir süre bu sayılar sadece sayılar teorisinin özel bir alanında kullanılmıştır [11]. Fizikte neden sadece reel veya kompleks sayıların kullanıldığı sorgulanmış ve 1968'de A.F. Monna ve F. Van der Blij tarafından $p-$adik sayılar fizikte kullanılmıştır. 1984'te V.S. Vladimirov ve I. V. Volovich tarafından $p-$adik sayıların süper cisim teorisine başarılı bir şekilde uygulanması ile birlikte $p-$adik sayılar uygulamalı alanlarda da kullanılmaya başlanmıştır [12]. Bununla beraber fizikte $p-$adik evren modeli, $p-$adik kuantum teorisi, $p-$adik sicim kuramı gibi alanlar oluşmuştur. Matematikte $p-$adik sayıların kullanılması ile yapılan çalışmalar $p-$adik analiz denilen bir alanda toplanmıştır. Reel sayılarla verilen kavramlar $p-$adik sayıların kullanılması ile yeniden tanımlanmış ve yorumlanmıştır.

Bu çalışmada Arşimedyan olan reel (veya kompleks) sayılarda verilen istatistiksel yakınsak kavramının Arşimedyan olmayan p-adik sayılar cisminde incelmesi yapılacaktır. Reel durumda sağlanan özelliklerin p-adik sayılar cisminde karşılıkları araştırılacaktır.

3. MATERYAL VE YÖNTEM

Bu bölümde "Bulgular ve Tartışmalar " kısmında kullanılan verilen özelliklerin temelini oluşturan kavramlara ve özeliklere ayrılmıştır. Önce yoğunluk ve istatistiksel yakınsaklık kavramalarını verelim.

3.1. Reel sayı Dizilerin İstatistiksel Yakınsaklığı:

Tanım3.1: $K \subseteq \mathbb{N}$ kümesini ele alalım.

$$\delta(K) = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \le n : k \in K \} \right|$$

limiti var ise buna K kümesinin asimptotik yoğunluğu denir. [6]

Yoğunluk kavramına bağlı olarak bir reel veya kompleks terimli dizinin istatistiksel yakınsaklığı şöyle verilebilir.

Tanım3.2: $x = (x_k)$ bir reel veya kompleks sayıların bir dizisi olsun.

Eğer $\forall \varepsilon \ge 0$ için,

$$\delta\left(k : |x_k - L| \ge \varepsilon\right) = 0 \text{ ,}$$

veya

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \le n : |x_k - L| \ge \varepsilon \} \right| = 0$$

ise $x = (x_k)$ dizisi L noktasına istatiksel yakınsaktır. $st - \lim_{k\to\infty} x_k = L$ şeklinde gösterilir. Eğer $L = 0$ ise bu takdirde istatiksel sıfır dizisi denir. [1]

Örnek3.1: $x = (x_k)$ dizisini

$$x_k = \begin{cases} 1, & k = n^2, n \in \mathbb{N} \\ 0, & k \ne n^2, n \in \mathbb{N} \end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece;

$$x_k = (1,0,0,1,0,0,0,0,1,0,0,\ldots)$$

şeklindedir. Tanım3.1 den bu kümenin asimptotik yoğunluğunun sıfır olduğu görülür. Böylelikle limite geçersek $st - \lim_{k\to\infty} x_k = 0$ dır.

Örnek3.2: $x=(x_k)$ dizisi için

$$x_n=\begin{cases}\sqrt{k}, & k=n^2, n\in\mathbb{N}\\ 1, & k\neq n^2, n\in\mathbb{N}\end{cases}$$

biçiminde tanımlayalım. Böylece;

$$x=(1,1,1,2,1,1,1,1,3,1,1,...)$$

şeklindedir. $\forall\varepsilon>0$ için

$$\{k:|x_k-1|\geq\varepsilon\}=\{4,9,16,...\}$$

olduğundan $st-\lim_{k\to\infty}x_k=1$ dir.

Örnek3.1 ve Örnek3.2 den de anlaşıldığı üzere sınırlı ıraksak veya sınırsız ıraksak bir takım diziler istatistiksel yakınsaklığa sahip olabilirler.

Teorem3. 1: Yakınsayan her her dizi istatistiksel yakınsaktır; ancak bunun tersine istatistiksel yakınsayan her dizi yakınsak değildir. [7]

İspat: $x=(x_k)$ dizisi bir L noktasına yakınsasın. L nin $\forall\varepsilon>0$ komşuluğunun dışında $x=(x_k)$ dizisinin sonlu sayıda elemanı bulunabilir. Buda bize $\{k:|x_k-L|\geq\varepsilon\}$ kümesinin sonlu olduğunu ve yoğunluğunun ise sıfır olduğunu söyler. Böylelikle $x=(x_k)$ dizisi L noktasına istatistiksel yakınsak olduğunu verir. Tersi durumda ise Örnek3.1 den anlaşılacağı üzere $x=(x_k)$ dizisi 0 noktasına istatistiksel yakınsak olduğu durumda olmasına rağmen yakınsak değildir.

Tanım3.3: $\forall\varepsilon>0$ için,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k\leq n:|x_k-x_N|\geq\varepsilon\}\right|=0$$

yani

$$|x_k-x_N|<\varepsilon$$

olacak biçimde $N=N(\varepsilon)$ sayısı var ise x dizisi istatistiksel Cauchy dizisi denir. [5]

Teorem3.2: Aşağıda verilen önermeler denktir.

İ) x dizisi istatistiksel yakınsaktır.

İİ) x dizisi istatistiksel Cauchy dizisidir.

İİİ) $x_k = y_k$ (h.h.k) olacak biçimde yakınsak bir y dizisi vardir. [5]

İspat: $(i) \Rightarrow (ii)$: (i) doğru olsun yani $\varepsilon > 0$ için $x_k \xrightarrow{st} L$ dir. Bu durumda h.h.k için $|x_k - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ ve eğer $N, |x_N - L| < \frac{\varepsilon}{2}$ olacak şekilde seçilirse,

$$\begin{aligned} |x_k - x_N| &= |x_k - L + L - x_N| \\ &\leq |x_k - L| + |x_N - L| \\ &< \frac{\varepsilon}{2} + \frac{\varepsilon}{2} \\ &< \varepsilon \end{aligned}$$

olur. Yani

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \{ k \leq n : |x_k - x_N| \geq \varepsilon \} \right| = 0$$

olduğundan $x = (x_k)$ bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

$(ii) \Rightarrow (iii)$: şimdi de (ii) doğru olsun. $I = [x_N - 1, x_N + 1]$ aralığı h.h.k için x terimini içerecek şekilde bir N sayısı seçelim. Yine

$$I = \left[x_M - \frac{1}{2}, x_M + \frac{1}{2} \right]$$

Aralığı h.h.k için x_k terimini içerecek şekilde bir M seçelim. Şimdi iddia edelim ki $I_I = I \cap I'$ aralığı h.h.k için x_k ları içerir. Burdan

$$\{ k \leq n : x_k \notin I \cap I' \} = \{ k \leq n : x_k \notin I \} \cup \{ k \leq n : x_k \notin I' \}$$

olduğundan

$$\left| \{ k \leq n : x_k \notin I \cap I' \} \right| = \left| \{ k \leq n : x_k \notin I \} \cup \{ k \leq n : x_k \notin I' \} \right|$$

$$\leq \left|\{k \leq n : x_k \notin I\}\right| + \left|\{k \leq n : x_k \notin I'\}\right|$$

olup,

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\}\right| \leq \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \notin I\}\right| + \lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \notin I'\}\right| = 0$$

dır. O halde

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \notin I \cap I'\}\right| = 0$$

dır. Böylece I uzunluğu 1 den küçük veya eşit ve h.h.k için x_k ları içeren ve boyu

$$|I_1| = \left| x_M + \frac{1}{2} - x_M + \frac{1}{2} \right| = 1$$

olan kapalı bir aralıktır. Şimdi $N(2)$ yi seçelim.

$$I'' = \left[x_{N(2)} - \frac{1}{4}, x_{N(2)} + \frac{1}{4} \right]$$

h.h.k için x_k ları içerir ve $I_2 = I_1 \cap I''$ h.h.k için x_k terimini içeren ve boyu

$$|I_2| = \left| x_{N(2)} + \frac{1}{4} - x_{N(2)} + \frac{1}{4} \right| = \frac{1}{2}$$

olan kapalı bir aralıktır. Bu şekilde devam ederek $\forall m$ için $I_m \supset I_{m+1}$ şeklinde kapalı aralıkların dizisi $\{I_m\}_{m=1}^{\infty}$ oluşturabiliriz. Bu durumda I_m, x_k terimlerini içeren ve boyu,

$$|I_m| = \left| x_{N(m)} + \frac{1}{2^m} - x_{N(m)} + \frac{1}{2^m} \right| = 2.\frac{1}{2^m} = 2^{1-m}$$

olan kapalı bir aralıktır. Burada I_m nin uzunluğu 2^{1-m} den büyük değildir. H.h.k için $x_k \in I_m$ dir. İç içe aralıklar teoreminden bir λ sayısı vardır ve bu $\bigcap_{m=1}^{\infty} I_m$ e eşittir. H.h.k için $x_k \in I_m$ olduğundan artan pozitif tamsayıların öyle bir $\{T_m\}_{m=1}^{\infty}$ dizisi seçebiliriz ki $n > T$ ise,

$$\frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \notin I_m\}\right| < \frac{1}{m}$$

dir.

Şimdi $k > T_1$ ve $T_m < k < T_{m-1}$ olduğunda $x_k \notin I_m$ olacak şekilde x in bütün x_k terimlerini içeren bir z alt dizisini tanımlayalım. Ayrıca y dizisini de,

$$y_k = \begin{cases} \lambda, & x_k \in z \\ x_k, & x_k \notin z \end{cases}$$

olarak tanımlayalım. Bu durumda $\lim_{k\to\infty} y_k = \lambda$ dir. $\varepsilon > \frac{1}{m} > 0$ ve $k > T_m$ ise ya $y_k = \lambda$ olacak şekilde x_k , z nin bir terimi ya da $y_k = x_k \in I_m$ ve $|y_k - \lambda| \leq I_m$ nin uzunluğu $\leq 2^{1-m}$ dir.şimdi iddia ediyoruz ki h.h.k için $y_k = x_k$ dır. Eğer $T_m < n < T_{m+1}$ ise bu durumda,

$$\{k \leq n : y_k \neq x_k\} \subset \{k \leq n : x_k \notin I_m\}$$

yazılır. Öte yandan $n > T_m$ olmak üzere,

$$\frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \notin I_m\}\right| < \frac{1}{m}$$

$$\frac{1}{n}\left|\{k \leq n : y_k \neq x_k\}\right| \leq \frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \notin I_m\}\right| < \frac{1}{m}$$

$n \to \infty$ için limite geçersek

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k \leq n : y_k \neq x_k\}\right| = 0$$

elde edilir. H.h.k için $x_k = y_k$ olur. Burdan x istatistiksel Cauchy dizisi ise h.h.k $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi varlığı görülür.

$(iii) \Rightarrow (i)$: (iii) doğru olsun. H.h.k için $x_k = y_k$ olacak şekilde yakınsak bir y dizisi var olsun ve $\lim_{k\to\infty} y_k = L$ diyelim. Böylece $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\} \subset \{k \leq n : x_k \neq y_k\} \cup \{k \leq n : |y_k - L| > \varepsilon\}$$

olup ve $\lim_{k\to\infty} y_k = L$ olduğundan son kümemiz sabit sayıda tam sayı içerir. Bu kümeye $I = I(\varepsilon)$ diyelim. H.h.k için $x_k = y_k$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k \leq n : |x_k - L| \geq \varepsilon\}\right| \leq \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\{k \leq n : x_k \neq y_k\}\right| + \lim_{n\to\infty}\frac{1}{n} = 0$$

elde edilir. H.h.k için $|x_k - L| < \varepsilon$ elde edildi. İspat biter.

Teorem3.3: $x = (x_k)$ dizisi bir L sayısına istatiksel yakınsak olsun. Bu durumda $x = y + z$ olacak şekilde L sayısına yakınsak bir y dizisi ve istatistiksel sıfır z dizisi vardır. (Connor 1988)

İspat: $x \xrightarrow{st} L$ olsun. Bu durumda $N_0 = 0$ olacak şekilde $n \geq N_j (j = 1,2,3,...)$ üzere

$$\frac{1}{n}\left\{k \leq n : |x_k - L| \geq \frac{1}{j}\right\} < \frac{1}{j}$$

olacak biçimde pozitif tamsayılarda artan bir N_j dizisi bulunabilir.

Şimdi y ve z dizilerini

$N_0 < k < N_1$ olduğunda $z_k = 0$ ve $y_k = x_k$ olsun. $j \geq 1$ olmak üzere $N_j < k \leq N_{j+1}$ olsun.

$$|x_k - L| < \frac{1}{j} \text{ olduğunda } z_k = 0 \text{ ve } y_k = x_k;$$

$$|x_k - L| \geq \frac{1}{j} \text{ olduğunda } z_k = x_k - L \text{ ve } y_k = L \text{ alalım.}$$

Bu durumda $x = y + z$ şeklinde yazılabilirdir.

İddia edelim ki $y_k \to L(k \to \infty)$ olsun. $\varepsilon > 0$ verilsin ve $\varepsilon > \frac{1}{j}$ olacak şekilde bir j seçelim.

$$k > N_j \text{ için } |x_k - L| < \frac{1}{j} \Rightarrow |y_k - L| = |L - L| = 0 \text{ ve}$$

$$|x_k - L| < \frac{1}{j} \Rightarrow |y_k - L| = |x_k - L| < \frac{1}{j} < \varepsilon$$

olduğundan

$$\lim_{k \to \infty} y_k = L$$

elde edilir.

Şimdi z dizisinin istatistiksel sıfır dizisi olduğunu gösterelim. Bunu göstermek için

$$\lim_{n \to \infty} \frac{1}{n} \left| \{k \leq n : z_k \neq 0\} \right| = 0$$

Olduğunu göstermek yeterli olacaktır.

$\varepsilon > 0$ için

$$\{k \leq n : |z_k| \geq \varepsilon\} \subset \{k \leq n : z_k \neq 0\}$$

olduğundan

$$\left|\{k \le n : |z_k| \ge \varepsilon\}\right| \le \left|\{k \le n : z_k \ne 0\}\right|$$

gerçeklenir.

Şimdi $\delta > 0$ ve $j \in \mathbb{N}$ için $\frac{1}{j} < \delta$ ise $\forall n > N_j$ için $\frac{1}{n}\left|\{k \le n : z_k \ne 0\}\right| < \delta$ olduğunu göstermeliyiz.

$N_j < k \le N_{j+1}$ olsun. Buradan $z_k \ne 0$ olması ancak $|x_k - L| \ge \frac{1}{j}$ olmasıyla mümkündür. O halde

$$\{k \le n : z_k \ne 0\} = \left\{k \le n : |x_k - L| \ge \frac{1}{j}\right\}$$

olur. Dolayısıyla

$$N_v < k < N_{v+1} \text{ ve } v > j \text{ ise}$$

$$\frac{1}{n}\left|\{k \le n : z_k \ne 0\}\right| \le \frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : |x_k - L| \ge \frac{1}{v}\right\}\right| < \frac{1}{v} < \frac{1}{j} < \delta$$

buda ispatı tamamlar.

Sonuç3.1: Bir x dizisi L sayısına istatistiksel yakınsak ise aynı noktaya alışılmış manada yakınsayan alt dizi vardır. [4-5]

Bu çalışmada istatistiksel yakınsaklık kavramı Rasyonel sayılar cisminin başka bir tamlaması olan p-adik sayılar cisminde ele alınacaktır. Şimdi p-adik sayılar cismi dolayı ayrıntılı inceleyelim.

3.1 p-ADİK SAYILAR

Tanım3.1.1: K bir cisim olmak üzere, $|\;| : K \to [0,\infty)$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlarsa buna K da bir norm denir:

1) Her $x \in K$ için, $|x| \ge 0$, $|x| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

2) Her $x,y \in K$ için, $|xy| = |x||y|$

3) Her $x,y \in K$ için, $|x+y| \le |x| + |y|$ (üçgen eşitsizliği)

$|\;|$ fonksiyonu bu üç koşula ek olarak

4) Her $x,y \in K$ için, $|x+y| \le \max\{|x|,|y|\}$

koşulu sağlanırsa buna K da bir **non-arşimedyan norm** denir. (4) koşulunu sağlamayan | | mutlak değerine **arşimedyan** denir.

(4) koşuluna "**ultrametrik eşitsizliği**" denir ve üçgen eşitsizliğinden daha güçlüdür. Çünkü

$\forall$ x, y $\in$ K için $\max\{|x|+|y|\} \leq |x|+|y|$ sağlanır.

Örnek3.1.1: □ cismi üzerinde $x \in$ □ olmak üzere

$$|x| = \begin{cases} x, & x \geq 0 \\ -x, & x < 0 \end{cases}$$

ile tanımlı mutlak değer normu arşimedyandır. Çünkü $x = y = 1$ seçersek (4) koşulu sağlanmaz.

Bu mutlak değere genellikle sonsuz mutlak değer denir ve $|\ |_\infty$ ile gösterilir.

Örnek3.1.2: K bir cisim olmak üzere, $x \in K$ için,

$$\|x\| = \begin{cases} 1, & x \neq 0 \\ 0, & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlı norm herhangi bir K cismi üzerinde non-Arşimedyandır. Buna trivial (aşikar) norm denir.

Tanım3.1.2: p sabit fakat keyfi bir asal sayı olmak üzere $|\ |_p$ p-adik normu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Herhangi bir $x \in$ □ , $x \neq 0$ için

$$x = p^{\alpha} \cdot \frac{a}{b},\ p \nmid a \cdot b$$

olacak şekilde tek türlü belirli bir $\alpha \in$ □ tamsayısı vardır ve bu durumda

$$|x|_p = p^{-\alpha}$$

ile tanımlanır[7].

Eğer $x = 0$ ise $|0|_p = 0$ olarak alınır.

Örnek3.1.3: p=5 için $|35|_5 = 5^{-1}$, p=3 için $|45|_3 = 3^{-2}$ dir.

Her p asal sayısı için $|\ |_p$ non-arşimedyandır.

Teorem3.1.1: (Ostrowski) □ üzerinde tanımlı her non-trivial norm, p=∞ veya p bir asal sayı olmak üzere bir $| \ |_p$ normuna denktir.

Ostrowski teoremi ile □ da mümkün olan bütün normlar belirlidir.

Tamlaştırma için gerekli olan topoloji kavramları hatırlayalım:

Tanım3.1.3: K bir cisim ve $| \ |$ K da bir norm olsun.

1) $(|x_n|) \subset K$ da bir dizi olsun. Her 0< ε için $\exists N \in$ □ vardır ki

$\forall n, m \geq N$ iken $|x_n - x_m|$<ε ise (x_n) ye bir Cauchy dizisi denir.

2) K nın her Cauchy dizisi (K da) bir limite sahipse K ya tamdır denir.

$$B(x,\varepsilon) \cap S \neq 0$$

3) $S \subset K$ olsun. $\forall x \in K$ ve $\forall \varepsilon < 0$ için $B(x,\varepsilon) \cap S \neq 0$ ise S ye K da yoğundur denir.

Teorem3.1.2: □ cismi herhangi bir trivial olmayan norma göre tam değildir.

Analizden biliyoruz ki

• $| \ |_\infty$ □ ye genişletilebilir.

• □ , $| \ |_\infty$ normuyla üretilen metriğe göre tamdır.

• □ , □ de yoğundur.

Yani, □ □ nun $| \ |_\infty$ normuna göre tamlaştırılmasıdır.

□ nun $| \ |_p$ p-adik normuna göre tamlaştırılması aşağıdaki şekilde yapılabilir:

Teorem3.1.3: □ nun bir (x_n) dizisi non-arşimedyan $| \ |_p$ normuna göre bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul, $\lim\limits_{n \to \infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$ olmasıdır.

Tanım3.1.4: $| \ | = | \ |_p$, □ da bir p-adik norm olsun. □ nun $| \ |_p$ ye göre bütün Cauchy dizilerinin kümesini C veya C(□)ile gösterelim:

$$C = C(□) = \{(x_n) : (x_n), | \ |_p \text{ ye göre bir Cauchy dizisidir}\}$$

C kümesi

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$

$$(x_n).(y_n) = (x_n.y_n)$$

ile tanımlı işlemlere göre bir birimli halkadır.

Tanım3.1.5: $N \subset C$ ideali, $|\ |_p$ ye göre 0 a yakınsayan dizilerin kümesi olarak

$$N = \{(x_n) \in C : x_n \to 0\} = \{(x_n) : \lim_{n\to\infty} |x_n|_p = 0\}$$

ile tanımlanan küme C nin bir maksimal idealidir. Buna göre N maksimal ideal olduğundan $C \setminus N$ bir cisim oluşturur.

Tanım3.1.6: $\mathbb{Q}_p$ p-adik sayılar cismi, C halkasının N maksimal idealine bölüm cismi olarak tanımlanır:

$$\mathbb{Q}_p = C \setminus N$$

$\mathbb{Q}_p$ ye **p-adik sayılar cismi** denir[7].

Her $x \in \mathbb{Q}$ sayısı (x) sabit dizisinin denklik sınıfının temsilcisi olarak alırsa $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ olduğu görülür ve $|\ |_p$, $\mathbb{Q}_p$ ye genişletilebilir.

Tanım3.1.7: $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ ve (x_n) λ ile gösterilen bir Cauchy dizisi ise

$$|\lambda|_p := \lim_{n\to\infty} |x_n|_p$$

ile tanımlıdır.

($\mathbb{Q}_p$ bir bölüm cismi olduğundan $\mathbb{Q}_p$ nin elemanları Cauchy dizilerinin denklik sınıflarıdır)

Teorem3.1.4: $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ nin yoğun bir altkümesidir.

Sonuç3.1.1: Her $p \in Z$ asal sayısı için , $|\ |_p$ non-arşimedyan norma sahip bir $\mathbb{Q}_p$ cismi vardır öyle ki;

1) $|\ |_p$ nin $\mathbb{Q}$ ya kısıtlanışı $|\ |_p$ p-adik normunu verir.

2) $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$ de yoğundur.

3) $\mathbb{Q}_p$, $|\ |_p$ ye göre tamdır.

(1), (2) ve (3) koşullarını sağlayan $\mathbb{Q}_p$ cismi normu koruyan izomorfizm hariç tek türlü belirlidir.

Tanım3.1.8: 0-merkezli kapalı birim topuna

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \le 1\}$$

p -adik tamsayılar halkası denir. Bu küme hem kapalı hem açıktır.

Teorem3.1.5: (Gösterim)

- $\forall x \in \square_p$ için

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + ...$$

olacak şekildeki tek türlü

$$a_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$$

sayıları vardır.

- $\forall x \in \square_p$ için

$$x = a_{-m} p^{-m} + ... + a_{-1} p^{-1} + a_0 + a_1 p + ...$$

olacak şekilde tek türlü belirli

$$a_i \in \{0, 1, ..., p-1\}$$

sayıları vardır. Burada, $a_{-m} \neq 0$ ise $|x|_p = p^m$ dir.

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Tanım 4.1: (x_n) Q_p de bir dizi ve $\ell \in Q_p$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \in \mathbb{N} : \left| x_k - \ell \right|_p \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

ise (x_n) e, ℓ ye istatistiksel yakınsaktır denir ve

$$st - \lim_{k\to\infty} x_k = \ell$$

yazılır.

Eğer $\ell = 0$ ise (x_n) e bir istatistiksel sıfır dizisi denir.

Teorem4.1: (x_n) Q_p de bir dizi ve $\ell \in Q_p$ olsun. Eğer (x_n), ℓ ye yakınsak ise (x_n), ℓ ye istatistiksel yakınsaktır.

İspat:

$\forall \varepsilon > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} (x_n) = \ell$ olduğundan $\exists N \in \mathbb{N}$ öyle ki $n \geq N$ için $\left| x_n - \ell \right|_p < \varepsilon$ dur.

Buna göre $\left\{ k \in \mathbb{N} : \left| x_k - \ell \right|_p \geq \varepsilon \right\}$ kümesi en fazla N elemanlıdır. Böylece

$$\frac{1}{n} \left| \left\{ k \leq n : \left| x_k - \ell \right|_p \geq \varepsilon \right\} \right| \leq \frac{N}{n}$$

yazılabilir. Limite geçersek

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{n} \left| \left\{ k \in \mathbb{N} : \left| x_k - \ell \right|_p \geq \varepsilon \right\} \right| = 0$$

NOT4.1: Teorem 4.1 in tersi doğru değildir. Gerçekten,

$$x_k = \begin{cases} 1, & \exists n \in \mathbb{N} : k = n^2 \\ 0, & diğerdurumda \end{cases}$$

dizisi 0 a istatistiksel yakınsaktır, fakat yakınsak değildir.

NOT4.2: (x_n), Q_p istatistiksel yakınsak ise istatistiksel limiti tek türlü belirlidir. Gerçekten ℓ ve ℓ' (x_n) nin istatistiksel yakınsak olduğu iki nokta olsun.

$$0<\varepsilon<|\ell-\ell'|_p$$

olsun.

Buna göre

$$A(\varepsilon)=\{k\in\mathbb{N}:|x_k-\ell|_p\geq\varepsilon\},$$

$$B(\varepsilon)=\{k\in\mathbb{N}:|x_k-\ell'|_p\geq\varepsilon\}$$

kümelerinin yoğunlukları sıfırdır. Böylece

$$A'(\varepsilon)=\{k\in\mathbb{N}:|x_k-\ell|_p<\varepsilon\}$$

$$B'(\varepsilon)=\{k\in\mathbb{N}:|x_k-\ell'|_p<\varepsilon\}$$

kümelerinin yoğunlukları "1" dir. Diğer yandan $k\in B'(\varepsilon)$ ise $|x_k-\ell'|_p<\varepsilon$ dır.

$$|x_k-\ell|_p=|x_k-\ell'+\ell'-\ell|_p$$

ve

$$|x_k-\ell'|_p<\varepsilon<|\ell'-\ell|_p$$

olduğundan

$$|x_k-\ell|_p=\max\left\{|x_k-\ell'|_p,|\ell-\ell'|_p\right\}=|\ell-\ell'|_p\geq\varepsilon$$

elde edilir. Böylece

$$B'(\varepsilon)\subset A(\varepsilon)$$

dır. Bu ise $B'(\varepsilon)$ nun yoğunluğunun sıfır olmasını gerektirir ki bu bir çelişkidir. O halde $\ell=\ell'$ olmak zorundadır.

NOT4.3: İstatistiksel bir p-adik dizisinin sınırlı olması gerekmez. Örneğin

$$x_n=\begin{cases}p^{-n}, & n=k^2\\ p^n, & diğerdurumlar\end{cases}$$

dizisi istatistiksel olarak "0" a yakınsar fakat sınırlı değildir. Gerçekten herhangi bir $\varepsilon>0$ için

$$A(\varepsilon)=\left\{k\in\mathbb{N}:|x_k-0|_p\geq\varepsilon\right\}=\left\{1^2,2^2,3^2,\ldots\right\}=\left\{k^2\mid k\in\mathbb{N}\right\}$$

Kümesinin yoğunluğu sıfır olduğundan $x_n\xrightarrow{st}0$ dır. Fakat x_n sınırlı değildir.

4.1 p-Adik İstatistiksel Cauchy Dizileri

Tanım4.1.1: $(x_n),Q_p$ de bir dizi olsun. Eğer $\forall\varepsilon>0$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\in\mathbb{N}:|x_k-\ell|_p\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

olacak şekilde bir $N\in\mathbb{N}$ varsa (x_n) e bir p-adik istatistiksel Cauchy dizisi denir.

Teorem4.1.1: $(x_n),Q_p$ de bir dizi olsun.

(x_n) istatistiksel yakınsak $\Leftrightarrow$ (x_n) istatistiksel Cauchy dizisidir.

İspat:

"$\Rightarrow$" (x_n) istatistiksel yakınsak ve limiti ℓ olsun. $\varepsilon>0$ keyfi olsun. Buna göre

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k\in\mathbb{N}:\left|x_k-\ell\right|_p\geq\varepsilon\right\}\right|=0$$

dir, yani

$$A(\varepsilon)=\left\{k\in\mathbb{N}:\left|x_k-\ell\right|_p\geq\varepsilon\right\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfırdır. Başka bir deyişle

$$A'(\varepsilon)=\left\{k\in\mathbb{N}:\left|x_k-\ell\right|_p<\varepsilon\right\}$$

kümesinin yoğunluğu "1" dir. Böylece

$$\left|x_N-\ell\right|_p<\varepsilon$$

olacak şekilde bir $N\in\mathbb{N}$ seçelim.

$$B(\varepsilon)=\left\{k\in\mathbb{N}:\left|x_k-x_N\right|_p\geq\varepsilon\right\}$$

kümesinin yoğunluğunun sıfır olduğunu gösterelim.

$$B'(\varepsilon)=\left\{k\in\mathbb{N}:\left|x_k-x_N\right|_p<\varepsilon\right\}$$

olsun. $k\in A'(\varepsilon)$ ise $\left|x_k-\ell\right|_p<\varepsilon$ ve buradan

$$\left|x_k-x_N\right|_p\leq\max\left\{\left|x_k-\ell\right|_p,\left|x_N-\ell\right|_p\right\}<\varepsilon$$

sağlanır. Böylece

$$A'(\varepsilon)\subset B'(\varepsilon) \text{ veya } B(\varepsilon)\subset A(\varepsilon)$$

elde edilir. $\delta\left(A(\varepsilon)\right)=0$ olduğundan $\delta\left(B(\varepsilon)\right)=0$ olur. O halde (x_n) bir istatistiksel Cauchy dizisidir.

"$\Leftarrow$" (x_n) bir istatistiksel Cauchy dizisi olsun.

$\forall\varepsilon>0$ için $\exists N\in\mathbb{N}$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{1}{n}\left|\left\{k \le n : \left|X_k - X_N\right|_p \ge \varepsilon\right\}\right| = 0$$

O halde $\exists N \in \mathbb{N}$

$$A(\varepsilon) = \left\{k \in \mathbb{N} : \left|x_k - x_N\right|_p \ge \varepsilon\right\}$$

kümesinin yoğunluğu sıfırdır ve

$$A'(\varepsilon) = \left\{k \in \mathbb{N} : \left|x_k - x_N\right|_p < \varepsilon\right\}$$

$$= \left\{k \in \mathbb{N} : x_k \in B\left(x_N, \varepsilon\right)\right\}$$

kümesinin yoğunluğu "1" dir.

$\varepsilon = p^{-1}$ seçersek $\exists N_1 \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$A'_1 = \left\{k \in \mathbb{N} : x_k \in B\left(x_{N_1}, p^{-1}\right)\right\}$$

$$= \left\{k \in \mathbb{N} : \left|x_k - x_{N_1}\right|_p < p^{-1}\right\}.$$

kümesinin yoğunluğu "1" dir.

Benzer şekilde $\varepsilon = p^{-2}$ için $\exists N_2 \in \mathbb{N}$ öyle ki

$$A'_2 = \left\{k \in \mathbb{N} : \left|x_k - x_{N_2}\right|_p < p^{-2}\right\}$$

kümesinin yoğunluğu "1" yani

$$A'_2 = \left\{k \in \mathbb{N} : x_k \in B\left(x_{N_2}, p^{-2}\right)\right\} \subset \mathbb{N}$$

kümesinin yoğunluğu "1" dir.

Non arşimedyan bir cisimde iki açık top ya ayrık ya da iç içedir. İki küme $\mathbb{N}$ nin yoğunluğu "1" olan iki alt kümesi olduğundan ayrık olamazlar.

O halde

$$B\left(x_{N_2}, p^{-2}\right) \subset B\left(x_{N_1}, p^{-1}\right)$$

olmalıdır. Genellikten bir şey kaybetmeden $N_1 \leq N_2$ varsayabiliriz. Bu şekilde devam edersek $\forall n \in \Box$ için

$$B\left(x_N, p^{-n}\right) \subset B\left(x_{N-1}, p^{-n+1}\right)$$

iç içe topları bulabiliriz. Böylelikle

$$A_n = \left\{k \in \Box : x_k \in B\left(x_N, p^{-n}\right)\right\} \subset \Box$$

Kümesinin yoğunluğu "1" dir. Biliyoruz ki

$$\bigcap_{n=1}^{\infty} B\left(x_{N_n}, p^{-n}\right) = \{\ell\}$$

dir. O halde (x_n), ℓ ye istatistiksel yakınsaktır.

Teorem4.1.2: $(x_n) \subset Q_p$ bir dizi ve $\ell \in Q_p$ olsun. Bu takdirde

(x_n), ℓ noktasına istatistiksel yakınsaktır $\Leftrightarrow$ $\exists K \subset \Box$ öyle ki $\delta(K) = 1$ ve $\lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ k\in K}} x_k = \ell$

İspat:

"$\Rightarrow$" (x_n), ℓ noktasına istatistiksel yakınsak olsun.

$$K_j = \left\{n \in \Box : \left|x_k - \ell\right|_p < \frac{1}{j}\right\} \quad (j = 1, 2, \ldots)$$

Tanımlansın. $x_n \xrightarrow{st} \ell$ olduğundan $\delta\left(K_j\right) = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots)$

$$K_1 \supset K_2 \supset K_3 \supset \ldots \supset K_j \supset K_{j+1} \supset \ldots \qquad (1)$$

$$\delta(K_j) = 1 \quad (j = 1, 2, \ldots) \qquad (2)$$

$v_1 \in K_1$ keyfi $\exists v_2 > v_1, v_2 \in K_2$ öyle ki her $n \geq v_2$ için $\dfrac{K_2(n)}{n} > \dfrac{1}{2}$ dir.

Üstelik $\exists v_3 \in K_3, v_3 > v_2$ ve her $n \geq v_3$ için $\dfrac{K_3(n)}{n} > \dfrac{2}{3}$

Tüme varım ile

$$v_1 < v_2 < \ldots < v_j < \ldots \qquad (v_j \in K_j)$$

pozitif tamsayılar dizisi olmuştu öyle ki $\forall n \geq v_j \qquad (j = 1, 2, \ldots)$

$$\frac{K_j(n)}{n} > \frac{j-1}{j} \qquad (3)$$

$$n \in \{v_j, \ldots, v_{j+1}\} \text{ için}$$

$$K = \bigcup_{j=1}^{\infty} \{v_j, \ldots, v_{j+1}\} \cap K_j$$

$v_j \leq n < v_{j+1}$ (2) ve (3) durumlarından

$$\frac{K(n)}{n} \geq \frac{K_j(n)}{n} > \frac{j-1}{j} \Rightarrow \delta(k) = 1$$

$$\lim_{\substack{k \to \infty \\ k \in K}} x_k = \ell$$

olduğunu gösterelim.

$\varepsilon > 0$ verilsin. $\exists j \in \square, \frac{1}{j} < \varepsilon, n \geq v_j$ ve $n \in K$ olsun. $\exists s \in \square$ öyle ki

$$v_s \leq n < v_{s+1}$$

dır. Buradan K nın tanımından $n \in K_s$ ve böylece

$$|x_n - \ell|_p < \frac{1}{s} \leq \frac{1}{j} < \varepsilon$$

Böylece $\forall n \geq v_j, n \in K$ için $|x_n - \ell|_p < \varepsilon$ yani

$$\lim_{n \to \infty} x_n = \ell$$

"$\Leftarrow$" $\exists K = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots\} \in \square, \delta(k) = 1$ ve $\lim_{\substack{n \to \infty \\ n \in K}} x_n = \ell$

olsun.

$\varepsilon > 0$ keyfi olsun. $\exists n_0 \in \square, \forall n \geq n_0$ için

$$|x_{n_k} - \ell|_p < \varepsilon \qquad (4)$$

$A_\varepsilon = \{n \in \square : |x_n - \ell|_p \geq \varepsilon\}$ olsun. (4) ten $A_\varepsilon \subset \square - \{K_{n_0+1}, K_{n_0+2}, \ldots\}$

$\delta(k) = 1$ olduğundan $\delta(\{K_{n_0+1}, K_{n_0+2}, \ldots\}) = 1$ ve böylece $\delta(\square - \{K_{n_0+1}, K_{n_0+2}, \ldots\}) = 0$

olur.

O halde $\delta(A_\varepsilon) = 0, x_n \xrightarrow{st} \ell$

Teorem4.1.3: $(x_n) \subset Q_p$ ve $\ell \in Q_p$ olsun.

$x_n \xrightarrow{st} \ell \Leftrightarrow \exists K = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots\} \subset \square$ öyle ki $\delta(k) = 1$ ve

$$\lim_{n \to \infty} |x_{k_{n+1}} - x_{k_n}|_p = 0$$

İspat:

$x_n \xrightarrow{st} \ell \Leftrightarrow \exists K = \{k_1 < k_2 < \ldots < k_n < \ldots\} \subset \square$, $\delta(k) = 1$ öyle ki

$$\lim_{n \to \infty} x_{k_n} = \ell \quad \Leftrightarrow \quad \lim_{n \to \infty} |x_{n_{k+1}} - x_{n_k}|_p = 0$$

4.2 p-Adik Zayıf İstatistiksel Yakınsaklık

Tanım4.2.1: x_n , $\square_p$ de bir dizi ve $\ell \in \square_p$ olsun. Eğer $\forall \varepsilon > 0$ için

$$K(n,\varepsilon) = \left\{ k \in \square : k \le n, \left| x_k - \ell \right|_p \ge \varepsilon \right\}$$

olmak üzere $\square_p$ de

$$\lim_{n\to\infty} p^{n-|K(n,\varepsilon)|} = 0$$

ise (x_n) ye zayıf istatistiksel yakınsaktır ve ℓ ye (x_n) nin bir zayıf istatistiksel limiti denir.

Bu tanımdaki $\square_p$ de

$$\lim_{n\to\infty} p^{n-|K(n,\varepsilon)|} = 0$$

koşulu $\square$ de

$$\lim_{n\to\infty} p^{|K(n,\varepsilon)|-n} = 0$$

koşuluna denktir. Çünkü

$$\left| p^{n-|K(n,\varepsilon)|} \right|_p = p^{|K(n,\varepsilon)|-n}$$

dir.

Not4.2.1: (x_n), $\square_p$ de bir zayıf istatistiksel yakınsak dizi ise limiti tek türlü belirli değildir. Örneğin;

$$(x_n) = \begin{cases} 1, & n = 2k \\ 0, & n = 2k+1 \end{cases}$$

dizisi hem 0 hemde 1e zayıf istatistiksel yakınsaktır. Gerçekten; $\forall \varepsilon > 0$ için

$$K(n,\varepsilon) = \left\{ k \in \square : k \le n, \left| x_k - 1 \right|_p \ge \varepsilon \right\} = \frac{1}{2}$$

olduğundan

$$\lim_{n\to\infty} p^{n-|K(n,\varepsilon)|} = p^{\frac{n}{2}-n} = p^{-\frac{n}{2}} = 0$$

dır.

Benzer şekilde (x_n), 1 e zayıf istatistiksel yakınsaktır. Benzer şekilde (x_n), 0 da zayıf istatistiksel yakınsaktır.

Tanım4.2.2: $(x_n) \subset \mathbb{Q}_p$ dizisine zayıf p-adik istatistiksel sınırlıdır $\Leftrightarrow$

$$\exists M \in \mathbb{R}^+ : \lim_{n\to\infty} p^{n-\left|\left\{K:k\le n,|x_n|_p \ge M\right\}\right|} = 0$$

Tanım4.2.3: $(x_n) \subset \mathbb{Q}_p$ bir dizi ve $L \in \mathbb{Q}_p$ olsun. (x_n) e zayıf p-adik istatistiksel yakınsak denir $\Leftrightarrow$ $\lim_{n\to\infty} p^{n-\left|\left\{K:k\le n,|x_n-L|_p \ge \varepsilon\right\}\right|} = 0$

Teorem4.2.1: (x_n), $\mathbb{Q}_p$ de bir dizi olsun. (x_n) p-adik yakınsak ise (x_n) p-adik zayıf istatistiksel yakınsaktır.

İspat: (x_n) bir $x \in \mathbb{Q}_p$ sayısına p-adik yakınsak olduğundan

$$\forall \varepsilon > 0 \text{ , } \exists N = N(\varepsilon) \in \mathbb{N} \ : \forall n \ge N \text{ için } |x_n - x|_p < \varepsilon$$

$$K(n,\varepsilon) = \left\{k : k \le n, |x_n - x|_p \ge \varepsilon\right\}$$

olsun. Bu durumda $n \le N$ için $|K(n,\varepsilon)| \le N$ ve böylece

$$\left|p^{n-k_n}\right|_p = p^{-n+k_n} \le p^{N-n} \to 0 (n \to \infty)$$

O halde (x_n) zayıf istatistiksel yakınsaktır.

Not4.2.2: Teorem4.2.1 in tersi doğru değildir.

$$x_n = \begin{cases} p^n, & k = n^2 \\ n, & k \neq n^2 \end{cases}$$

dizisi p-adik yakınsak olmayıp p-adik istatistiksel yakınsaktır.

Teorem4.2.2: $(x_n) \subset \square_p$ ve $x_n \xrightarrow{|\,|_p} x$ olsun. (x_n) p-adik istatistiksel sınırlıdır.

İspat:

$$x_n \xrightarrow{|\,|_p} x \Rightarrow \forall \varepsilon > 0,\ \exists N = N(\varepsilon) \in \square \ : |x_n - x|_p < \varepsilon$$

$$\forall n \geq N \text{ için } |x_n|_p = |x_n - x + x|_p \leq \max\left\{|x_n - x|_p, |x|_p\right\} \leq \max\left\{\varepsilon, |x|_p\right\}$$

dir.

$M = \max\left\{\varepsilon, |x|_p\right\}$ seçilirse $k_n = \left|\left\{k : k \leq n, |x_n|_p \geq M\right\}\right|$

$$\left| p^{n - \left|\left\{k : k \leq n, |x_n|_p \geq M\right\}\right|} \right|_p = p^{k_n - n} \leq p^{\square - n} \to 0$$

sağlanır.

Teorem4.2.3: $(x_n) \subset \mathbb{Q}_p$ ve $x \in \mathbb{Q}_p$ olsun.

x_n p-adik istatistiksel yakınsak ise (x_n) p-adik istatistiksel sınırlıdır.

İspat: $\varepsilon > 0$ keyfi olsun. (x_n) p-adik istatistiksel yakınsak olduğundan ve

$$k_n = \left|\left\{k : k \le n, |x_n - x|_p \ge \varepsilon\right\}\right|$$

olmak üzere

$$p^{n-k_n} \xrightarrow{|\ |_p} 0$$

dır. $|\ |_p$ nin non-arşimedyanlık özelliği ile

$$|x_n|_p = |x_n - x + x|_p \le \max\left\{|x_n - x|_p, |x|_p\right\}$$

dır.

$$M \ge \max\left\{\varepsilon, |x|_p\right\}$$

seçilirse

$$k_n = \#\left\{k : k \le n, |x_n - x|_p \ge \varepsilon\right\} \ge \ell_n = \#\left\{k : k \le n, |x_n|_p \ge M\right\}$$

böylece

$$\left|p^{n-\ell_n}\right|_p = p^{\ell_n - n} \le p^{k_n - n} \to 0$$

O halde (x_n) p-adik istatistiksel sınırlıdır.

Teorem4.2.4: (x_n), $\mathbb{Q}_p$ de bir dizi ve $\ell \in \mathbb{Q}_p$ olsun. Eğer (x_n), ℓ ye istatistiksel yakınsak ise (x_n), ℓ ye zayıf istatistiksel yakınsaktır.

İspat: $\varepsilon > 0$ keyfi olmak üzere $st - \lim_{n\to\infty} x_n = \ell$ olduğundan

$$K(n,\varepsilon)=\left\{k : k \le n, \left|x_k-\ell\right|_p \ge \varepsilon\right\}$$

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\left|K(n,\varepsilon)\right|}{n}=0$$

dır. Buna göre $\exists n \in \mathbb{N} : \forall n \ge N$ için

$$\frac{\left|K(n,\varepsilon)\right|}{n}<\varepsilon$$

sağlanır. Böylece $\forall n \ge N$ için

$$\left|K(n,\varepsilon)\right|<\varepsilon.n \qquad (1)$$

dır. Şimdi $\mathbb{Q}_p$ de

$$\lim_{n\to\infty} p^{n-\left|K(n,\varepsilon)\right|}=0$$

veya denk olarak $\mathbb{R}$ de

$$\lim_{n\to\infty} p^{\left|K(n,\varepsilon)\right|-n}=0$$

Olduğunu gösterelim. (1) den

$$\lim_{n\to\infty} p^{\varepsilon.n-n}=p^{n.(1-\varepsilon)}=0$$

dır.

Not4.2.3: Teorem4.2.4 tersi doğru değildir. Örneğin

$$x_n=\begin{cases}1, & n=2k\\ 0, & n=2k+1\end{cases}$$

zayıf istatistiksel yakınsak olup istatistiksel yakınsak değildir.

5.SONUÇLAR VE ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde p-adik terimli dizler için istatistiksel yakınsaklık, istatistiksel Cauchy, istatistiksel sınırlılık gibi kavramlar incelenmiş ve aşağıdaki sonuçlar elde edilmiştir:

1) Bir $x=(x_n)$ p-adik terimli dizisi bir $\ell \in \mathbb{Q}_p$ noktasına istatistiksel yakınsak ise ℓ tek türlü belirlidir.

2) Bir $x=(x_n)$ p-adik terimli dizisi bir $\ell \in \mathbb{Q}_p$ noktasına yakınsak ise ℓ'ye istatistiksel yakınsaktır.

3) Bir $x=(x_n)$ p-adik terimli dizisi istatistiksel yakınsak ise istatistiksel sınırlıdır.

4) Bir $x=(x_n)$ p-adik terimli dizisi istatistiksel yakınsak olması için gerek ve yeter koşul $x=(x_n)$ in istatistiksel Cauchy dizisi olmasıdır.

5.2 Öneriler

Bu çalışmanın devamı olarak p-adik terimli serilerin istatistiksel yakınsaklığı ve p-adik terimli serilerin toplanabilme özellikleri incelenebilir. Reel terimli dizlerin sağladıkları özelliklerle karşılaştırmalar yapılabilir.

KAYNAKLAR

[1] Fast, H., Sur la convergence statistique, Colloq. Math., 241-244 (1951).

[2] Schoenberg, I.J., The integrability of certain functions and related summability methods, Amer. Math. Monthly, 66, 361–375 (1959)

[3] Buck, R.C., Generalized Asymptotic Density, Amer. J. Math. 75 335–346 (1953)

[4] Šalát, T., On statistically convergent sequences of real numbers, Mathematica Slovaca, vol.30 issue 2, pp. 139-150 (1980).

[5] Fridy, J.A., On the Statistical Convergence, Analysis, 5, 301-313 (1985)

[6] Niven, I. and Zuckerman, H.S., An Introduction to the Theory of Numbers, John Wiley & Sons, New York (1960)

[7] Gouvea, F. Q. "p-Adic Numbers An Introduction" Springer-Verlag, Berlin, 298 p. (1997).

[8] Koblitz, N. "p-Adic Numbers, p-Adic Analysis and Zeta Functions", Springer-Verlag, New York, 150 p. (1982).

[9] Robert, A. M., "A Course on p-Adic Analysis", Springer-Verlag, New York, 436 p. (2000).

[10] Khrennikov, A. "p-Adic Valued Distributions in Mathematical Physics", Kluwer Academic Pub.Dordrecht, 261 p. (1994).

[11] Koblitz, N. "p-Adic Analysis:A Short Course on Recent Works", Cambridge University Press, Cambridge, 163 p. (1980).

[12] Vladimirov, V. S., Volovich, I. V. and Zelenov, E. I., "p-Adic Analysis and Mathematical Physics", World Scientific, 319 p. (1998).

[13] Schikhof, W.S., "Ultrametric Calculus" Cambridge Unv. Press, 306 p. (2006).

ÖZGEÇMİŞ VE ESERLER LİSTESİ

Adı Soyadı: MEHMET CİHAN BOZDAĞ

Doğum Tarihi: 22.01.1986

E-mail: mehmetcihanbozdag@gmail.com

Derece	Bölüm/Program	Üniversite	Yıl
Lise		Erdemli Anadolu Lisesi	2002-2004
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2005-2010
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2010-2018

(Varsa) Görevler:

Görev Unvanı	Görev Yeri	Yıl
Öğretmen	Özel Mersin Cebir Temel Lisesi	2018-
Öğretmen	Özel Pozcu Şifa Mesleki ve Teknik Anadolu Lisesi	2014-2018
Öğretmen	Özel Erdemli Birey Dershanesi	2012-2014
Öğretmen	Özel Mersin Cebir Dershanesi	2009-2012

Seminer

On Statistical Convergence of Sequences of p-Adic Numbers. (3rd International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference, 29 August-1 September, 2016, Mersin-TURKEY)