BİR $q-$ KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLKNUR AYDIN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

MERSİN
NİSAN- 2019

BİR $q-$ KESİRLİ SINIR DEĞER PROBLEMİNİN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

İLKNUR AYDIN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA

MERSİN
NİSAN- 2019

ONAY

İlknur AYDIN tarafından Dr. Öğr Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA danışmanlığında hazırlanan "Bir $q-$Kesirli Sınır Değer Probleminin Spektral Özellikleri" başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 05 Nisan 2019 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği ile Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	**Ünvanı, Adı ve Soyadı**	**İmza**
Başkan	Prof.Dr. İlhan DAĞADUR	....
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Gülistan KAYA GÖK	....
Üye	Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 03/05/2019 tarih ve 2019.19/487 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof.Dr. Cahit BİLİM
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

02/05/ 2019

İmza / Signature

İlknur AYDIN

ÖZET

Bu tezde parçalı sürekli bir fonksiyon içeren ve ikinci mertebeden bir $q-$diferansiyel denklem ile oluşturulan bir sınır değer problemi ele alınmıştır. İlk olarak, probleme uygun Hilbert uzayında bir iç çarpım tanımlanmıştır. Daha sonra, problemin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir. Ayrıca probleme uygun Green fonksiyonu inşa edilmiş ve bu fonksiyonun bazı özellikleri verilmiştir.

Anahtar Kelimeler: $q-$Analiz, Sınır Değer Problemi, Özdeğer ve Özfonksiyon, Green Fonksiyonu, Diferansiyel Denklemler, $q-$Sturm Liouville Problemi (6 adet).

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

This work aims to examine a boundary value problem which consists of a second order $q-$ differential equation together with a piecewise-continuous function. An inner product is introduced in a suitable Hilbert space. The properties of the eigenvalues and eigenfunctions are investigated. The Green's function is constructed and some of its characteristics are given.
Keywords: q-Calculus, Boundary Value Problems, Eigenvalues and Eigenfunctions, Green's Function, Differential Equations, q-Sturm-Liouville Problems (6 keywords).

Advisor: Asst. Prof. Fatma Ayca CETINKAYA, Department of Mathematics, Mersin University, Mersin.

TEŞEKKÜR

Bu yolda olmak istediğimi söylediğim ilk günden beri; bana inanan, güvenen, fikirleriyle ve bilgi birikimiyle bana her zaman destek olan, çalışkanlığını kendime örnek aldığım çok kıymetli danışmanım Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA'ya ve en büyük destekçim olan aileme teşekkürü bir borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{C}$	Kompleks sayılar kümesi
$\langle \cdot,\cdot \rangle$	İç çarpım fonksiyonu
W_q	$q-$ Wronksiyen
$d_q f(x)$	f fonksiyonunun q diferansiyeli
$D_q f(x)$	f fonksiyonunun q türevi
l	Diferansiyel ifade
λ	Özdeğer parametresi
$\square$	İspatın bittiğini gösterir

1. GİRİŞ

$q-$analiz olarak da bilinen kuantum analizinin temelleri ilk kez 1910 yılında Jackson tarafından ortaya konmuştur. q-analiz, $q \neq 1$ sabitlenmiş bir sayı, $t \neq 0$ ve f reel değerli bir fonksiyon olmak üzere

$$\frac{f(qt)-f(t)}{(q-1)t}$$

biçimindeki $q-$notasyona dayanır. Argümandaki kademeli yer değiştirmenin fonksiyonda meydana getirdiği değişimi hesaplayan klasik türevin aksine, $q-$türev fonksiyondaki değişimi argümanın q kadar genişlemesini temel alarak hesaplar. f fonksiyonu $t \neq 0$ noktasında diferansiyellenebilirse,

$$f'(t)=\lim_{q\to 1}\frac{f(qt)-f(t)}{(q-1)t}$$

eşitliğinin sağlandığı açıktır. Klasikte verilen birçok teori ve metot $q-$ analizine genişletilerek önemli sonuçlar elde edilmiştir. $q-$ analizinin özel fonksiyonlarda, dinamik sistemlerde, sayılar teorisinde ve kuantum mekaniğinde uygulamaları mevcuttur.

Tezde,

$$l(y):=-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x)+v(x)y(x)=\lambda r(x)y(x) \quad x\in[0,\pi],\ \lambda\in\mathbb{C}$$

diferansiyel ifadesi ve

$$U_1(y):=\alpha_1 y(0)+\alpha_2 D_{q^{-1}}y(0)=0$$
$$U_2(y):=\beta_1 y(\pi)+\beta_2 D_{q^{-1}}y(\pi)=0$$

sınır koşulları ile oluşturulan sınır değer problemi ele alınmıştır, burada $q\in[0,1)$ sabitlenmiş bir reel sayı, $v(\cdot)$ sıfırda sürekli reel değerli bir fonksiyon, α_i ve β_i ($i=1,2$) sıfırdan farklı keyfi reel sayılar ve $r(x)$

$$r(x)=\begin{cases} r_1, & 0\le x<a \\ r_2, & a<x\le\pi \end{cases}$$

biçiminde verilen parçalı sürekli bir fonksiyondur. Ele alınan bu sınır değer probleminin spektral özellikleri incelenmiştir.

Tez, beş bölümden oluşmaktadır. Bu Giriş bölümünün ardından, ikinci bölümde tezde ele alınan sınır değer problemi ile ilgili kaynak incelemelerine yer verilmiştir. Üçüncü bölüm, tezdeki sonuçları elde etmek için gerekli tanım ve teoremlerle ilgili detaylı bilgi içermektedir. Dördüncü bölüm, tezde ele alınan sınır değer probleminin incelenmesine ve bu problem için elde edilen sonuçların sunulmasına ayrılmıştır. Beşinci bölümde ise sonuçlar ve önerilere yer verilmiştir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Spektral yöntemlerin ve özeşlenik operatörler teorisinin gelişiminde önemli bir rol oynayan Sturm-Liouville teorisi [1] birçok çalışmada Sturm-Liouville operatörü ile oluşturulmuş sınır değer problemleri olarak ele alınmıştır [2]. Şimdiye kadar Sturm-Liouville sınır değer problemlerinde çoğunlukla klasik türev operatörü kullanılmış olsa da [3] çalışmasında (ayrıca bknz [4]) M. H. Annaby ve Z. S. Mansour, Sturm-Liouville sınır değer problemindeki klasik türev operatörünü $q-$Jackson türevi ile değiştirerek konuya farklı bir bakış açısı getirmişlerdir.

Annaby ve Mansour'un elde ettiği sonuçlar farklı problemlere uygulanmıştır ve böylece $q-$Sturm Liouville teorisinde önemli gelişmeler meydana gelmiştir. [5,6] da Sturm-Liouville tipindeki $q-$fark denklemlerinin örneklendirme teorisi ele alınmıştır. [7,8] de aynı mertebeli sol Riemann-Liouville ve sağ Caputo $q-$kesirli türevi içeren regüler bir Sturm-Liouville problemi ele alınmıştır ve bu problemin özdeğer ve özfonksiyon özellikleri incelenmiştir. [9] da tüm eksende tanımlı singüler bir $q-$Sturm Liouville operatörü için Parseval eşitliği ve özfonksiyonlara göre ayrışım formülü verilmiştir. [10] da ikinci mertebeden özeşlenik olmayan $q-$fark denklemlerinin özdeğer özellikleri ve spektral singülariteleri incelenmiştir. [11] de ikinci mertebeden $q-$fark denklemi ve Dirichlet sınır koşulları ile oluşturulmuş bir sınır değer problemi değişkenlere ayrılma yöntemi ile ikinci mertebeden bir Euler $q-$fark denkleminin özdeğer problemine indirgenmiştir. [12] de sınır koşulunda spektral parametre içeren bir $q-$Sturm Liouville sınır değer problemi ele alınmıştır.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, tezin "Bulgular ve Tartışma" kısmındaki sonuçların elde edilmesi için gereken temel tanım ve teoremler, tezin "Kaynaklar" kısmında [4] ile numaralandırılmış kitaptan yararlanılarak verilmiştir.

3.1. GİRİŞ

3.1.1 $q-$ Fark Operatörü

$\mu \in \mathbb{R}$ sabitlenmiş bir sayı olsun ve $A \subset \mathbb{C}$ kümesi göz önüne alınsın. Her $z \in A$ elemanı için $\mu z \in A$ bağıntısı sağlanırsa, $A \subset \mathbb{C}$ kümesine bir $\mu-$ geometrik küme denir. Eğer bir $A \subset \mathbb{C}$ kümesi $\mu-$ geometrik ise, $z \in A$ olmak üzere, bu A kümesi tüm $\left\{ z\mu^n \right\}_{n=0}^{\infty}$ geometrik dizilerini içerir.

f, $q-$geometrik bir A kümesi üzerinde tanımlı, reel veya kompleks değerli bir fonksiyon ve $|q| \neq 1$ olsun. $q-$ fark operatörü D_q

$$D_q f(z) := \frac{f(z) - f(qz)}{z - qz}, \qquad z \in A - \{0\} \tag{3.1.1.1}$$

ile tanımlıdır [13].

(3.1.1.1) ile verilen $q-$ fark operatörü Jackson $q-$ fark operatörü olarak adlandırılır. $0 \in A$ ise, $|q| < 1$ iken, aşağıdaki limitin mevcut ve $z \in A$ elemanından bağımsız olması durumunda

$$D_q f(0) := \lim_{n \to \infty} \frac{f(zq^n) - f(0)}{zq^n}, \qquad z \in A - \{0\}$$

ile ve $|q| > 1$ iken, f fonksiyonunun sıfır noktasındaki $q-$ türevi $D_q f(0) := D_{q^{-1}} f(0)$ ile tanımlıdır.

Altbölüm 3.2.1 de verilecek olan özeşlenik problemin formülasyonu, $D_{q^{-1}}$ ifadesini içerdiğinden burada, $x \in A$ olmak üzere, $D_q f(0)$ $q-$ türevinin var olması durumunda, $D_{q^{-1}} f(x)$ ifadesinin,

$$D_{q^{-1}} f(x) := \begin{cases} \dfrac{f(x) - f(q^{-1}x)}{x(1 - q^{-1})}, & x \neq 0, \\ D_q f(0), & x = 0 \end{cases}$$

ile tanımlı olduğunu belirtmekte yarar vardır.

$q-$ türevin sağ tersi olan $q-$integral

$$\int_a^b f(t)\,d_qt := \int_0^b f(t)\,d_qt - \int_0^a f(t)\,d_qt, \qquad (a,b\in A)$$

olarak verilir [13], burada eşitliğin sağ tarafındaki seri $x=a$ ve $x=b$ noktalarında yakınsak olmak koşulu ile $\int_0^x f(t)\,d_qt$ integrali

$$\int_0^x f(t)\,d_qt := (1-q)\sum_{n=0}^{\infty} xq^n f(xq^n) \qquad (x\in A) \qquad (3.1.1.2)$$

ile tanımlıdır. Bazı $0\le\alpha<1$ sayıları için $x^{\alpha} f(x)$ fonksiyonunun $[0,a]$ aralığında sınırlı olması durumunda, $\int_0^x f(t)\,d_qt$ integralinin tüm $x\in[0,a]$ elemanları için var olduğu [14] de gösterilmiştir. $\int_0^b f(x)\,dx$ integralinin yakınsak olması durumunda,

$$\int_0^b f(x)\,dx = \lim_{q\to 1^-}\int_0^b f(x)\,d_qx$$

eşitliğinin sağlandığı ise [15] de gösterilmiştir.

f, $q-$ geometrik bir A kümesi üzerinde tanımlı bir fonksiyon ve $x>0$ olmak üzere, f fonksiyonunun $[x,\infty)$ aralığındaki $q-$ integrali

$$\int_x^{\infty} f(t)\,d_qt = \sum_{k=1}^{\infty} xq^{-k}(1-q)\, f(xq^{-k})$$

ile tanımlanmıştır [16].

Bir fonksiyonun $[0,\infty)$ aralığındaki $q-$ integrali için tek türlü standart bir tanımlama mevcut değildir. [16] da bir f fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığındaki $q-$ integrali

$$\int_0^{\infty} f(t)\,d_qt = (1-q)\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(q^n)$$

ile tanımlanırken, [17] de bir f fonksiyonunun $[0,\infty)$ aralığındaki $q-$ integrali

$$\int_0^{\infty/b} f(t)\,d_qt = \frac{(1-q)}{b}\sum_{n=-\infty}^{\infty} q^n f(q^n/b) \qquad (b>0)$$

ile tanımlıdır. Sonuç olarak, bir f fonksiyonunun $\mathbb{R}$ kümesindeki $q-$ integrali eşitliğin sağ tarafındaki serinin yakınsak olması koşulu ile

$$\int_{-\infty/b}^{\infty/b} f(t)\,d_qt = \frac{1-q}{b}\sum_{-\infty}^{\infty} q^n\left(f(q^n/b)+f(-q^n/b)\right) \qquad (b>0)$$

ifadesi ile verilebilir.

Tanım 3.1.1.1 f, $q-$ geometrik bir A kümesinde tanımlı bir fonksiyon olsun. f fonksiyonunun $q-$ integrallenebilir olması için gerek ve yeter koşul tüm $z \in A$ elemanları için $\int_0^z f(t)\,d_q t$ integralinin var olmasıdır.

Tanım 3.1.1.2 $q-$ geometrik bir A kümesinde tanımlı bir f fonksiyonu verilsin ve $0 \in A$ olsun. Tüm $z \in A$ elemanları için $\lim_{n\to\infty} f(zq^n) = f(0)$ eşitliği sağlanıyorsa, f fonksiyonuna sıfır noktasında $q-$ regüler fonksiyon denir.

$A \subseteq \mathbb{C}$ kümesi $q-$ geometrik bir küme ve f fonksiyonu bu A kümesi üzerinde tanımlı ve sıfır noktasında $q-$ regüler bir fonksiyonsa $f(0^+)$ ve $f(0^-)$ fonksiyonları sırasıyla, $f(0^+) := \lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ x>0}} f(xq^k)$ ve $f(0^-) := \lim\limits_{\substack{k\to\infty \\ x<0}} f(xq^k)$ eşitlikleri ile tanımlıdır. f fonksiyonunun sıfır noktasında $q-$ regüler bir fonksiyon olması durumunda $f(0) = f(0^+) = f(0^-)$ eşitliğinin sağlandığı açıktır.

Bir f fonksiyonunun sıfır noktasındaki $q-$ regülerliği, bazı durumlarda klasik analizdeki sürekliliğe karşılık gelir. Sıfır noktasındaki süreklilik, sıfır noktasındaki $q-$ regülerliği gerektirirken, bu durumun tersi her zaman doğru değildir. Örneğin, $f:[0,1] \to \mathbb{R}$

$$f(x) = \begin{cases} 1, & x = a_n = \dfrac{1}{\sqrt{n}},\ n \text{ asal} \\ x, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

biçiminde tanmlı f fonksiyonu rasyonel q sayıları için sıfır noktasında $q-$ regüler olmasına rağmen, sıfır noktasında sürekli değilidir.

Sonuç 3.1.1.1 Eğer $x \in A - \{0\}$ ise ve A kümesi x noktasının, f fonksiyonu x noktasında diferansiyellenebilir olacak biçimdeki bir komşuluğunu içeriyorsa, o halde, $\lim_{q\to 1} D_q f(x) = f'(x)$ eşitliği gerçeklenir. $x = 0$ noktasında $f'(0)$ türevi mevcutsa o halde $D_q f(0) = f'(0)$ olur.

Sonuç 3.1.1.2 f fonksiyonu sıfır noktasını içeren $q-$ geometrik bir A kümesinde tanımlı bir fonksiyonsa ve $D_q f(0)$ mevcutsa, o halde f fonksiyonu sıfır noktasında $q-$ regülerdir. Bu durum, klasik analizde, bir fonksiyonun türevlenebilir olmasının, fonksiyonunun sürekliliğini gerektirmesine benzer bir durumdur.

Sonuç 3.1.1.3 $q-$ geometrik bir A kümesi üzerinde tanımlı bir f fonksiyonun $q-$ türevinin sıfır olması için gerek ve yeter koşul tüm $x \in A$ elemanları için $f(x) = f(qx)$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

Aşağıda $q-$ türevle ilgili bazı basit kurallar verilecektir.

İki fonksiyonun toplamının (farkının) $q-$ ***türevi*:** $q-$ geometrik bir A kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları tüm $x \in A$ elemanları için $q-$ türevlenebilir olsun. Bu durumda $f \pm g$ fonksiyonu da A kümesi üzerinde $q-$ türevlenebilirdir ve

$$D_q(f \mp g)(x) = D_q f(x) \mp D_q g(x)$$

eşitliği sağlanır.

İki fonksiyonun çarpımının $q-$ ***türevi:*** $q-$ geometrik bir A kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları tüm $x \in A$ elemanları için $q-$ türevlenebilir olsun. Bu durumda $f \cdot g$ fonksiyonu da A kümesi üzerinde $q-$ türevlenebilirdir ve

$$D_q(fg)(x) = D_q f(x) g(x) + f(qx) D_q g(x)$$

sağlanır.

İki fonksiyonun bölümünün $q-$ ***türevi:*** $q-$ geometrik bir A kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları tüm $x \in A$ elemanları için $q-$ türevlenebilir olsun. Ayrıca $g(x) \neq 0$ ve $g(qx) \neq 0$ eşitlikleri sağlansın. O halde $\frac{f}{g}$ fonksiyonunun $q-$ türevi

$$D_q\left(\frac{f}{g}\right)(x) = \frac{D_q f(x) g(x) - f(x) D_q g(x)}{g(x) g(qx)}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Şimdi, $q-$ integraller ile ilgili bazı kurallar verilsin.

Kısmi $q-$ ***integrasyon kuralı:*** $q-$ geometrik bir A kümesinde tanımlı f ve g fonksiyonları tüm $x \in A$ elemanları için $q-$ türevlenebilir olsun. Bu durumda kısmi $q-$ integrasyon kuralı

$$\int_0^a g(t) D_q f(t) d_q t = (fg)(a) - \lim_{n\to\infty}(fg)(aq^n) - \int_0^a D_q g(t) f(qt) d_q t \qquad (3.1.1.3)$$

ile tanımlıdır. Eğer, f ve g sıfır noktasında $q-$ regüler fonksiyonlar ise, o halde, (3.1.1.3) ün sağ tarafındaki limit $(fg)(0)$ ifadesiyle değiştirilebilir.

Aşağıdaki teorem, analizin temel teoreminin $q-$ benzeridir.

Teorem 3.1.1.1 f fonksiyonu sıfır noktasını içeren $q-$ geometrik bir A kümesi üzerinde tanımlı, sıfır noktasında $q-$regüler bir fonksiyon ve c noktası, A kümesi üzerinde sabitlenmiş bir nokta olmak üzere F fonksiyonu

$$F(z) := \int_c^z f(t)\, d_q t$$

ifadesi ile tanımlansın. O halde, F fonksiyonu $q-$ regülerdir. Her $z \in A$ elemanı için $D_q F(z)$ türevi mevcuttur ve $D_q F(z) = f(z)$ eşitliği sağlanır. Tersine, eğer a ve b noktaları, A kümesinden alınan iki nokta ise o halde,

$$\int_a^b D_q f(t)\, d_q t = f(b) - f(a)$$

eşitliği sağlanır.

Teorem 3.1.1.2 $0 \le a < x \le b$ olmak üzere f fonksiyonu $[a,b]$ aralığında tanımlı bir fonksiyon ve $0 \le \gamma < 1$ eşitsizliğini sağlayan her γ sayısı için $x^\gamma f(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli olsun. Ayrıca, c sayısı $[a,b]$ aralığında sabitlenmiş bir sayı iken

$$F(x) = \int_c^x f(t)\, d_q t\,, \qquad x \in [a,b]$$

eşitliğinin sağlandığı kabul edilsin. O halde, $F(x)$ fonksiyonu $[a,b]$ aralığında sürekli bir fonksiyondur.

3.1.2 Fonksiyon Uzayları

$1 \le p < \infty$, $a > 0$ ve η herhangi reel sayılar ve $L^p_{q,\eta}(0,a)$

$$\int_0^a t^\eta \left| f(t) \right|^p d_q t < \infty$$

şartını sağlayan fonksiyonların denklik sınıflarından oluşan bir uzay olsun, burada iki fonksiyonun denkliği bu fonksiyonların $\{aq^n : n \in N_0\}$ kümesindeki eşitliği ile tanımlıdır. $L^p_{q,\eta}(0,a)$ uzayı

$$\| f \|_{p,\eta,a} := \left(\int_0^a t^\eta \left| f(t) \right|^p d_q t \right)^{\frac{1}{p}}$$

ile tanımlanan norm altında bir Banach uzayıdır.

$p = 2$ durumunda, $L^2_{q,\eta}(0,a)$ uzayı

$$\langle f,g\rangle := \int_0^a t^{\eta} f(t)\overline{g(t)}d_q t \qquad \left(f,g\in L^2_{q,\eta}(0,a)\right)$$

ile tanımlanan iç çarpım altında ayrılabilir bir Hilbert uzayı olur.

$C_q^n[a,b]$ ile $[a,b]$ aralığında $(n-1)-$ nci mertebeden sürekli $q-$ türevli fonksiyonlardan oluşan uzay gösterilsin. $C_q^n[a,b]$ uzayı

$$\|f\| := \sum_{k=0}^{n-1} \max_{a\le x\le b}\left|D_q^k f(t)\right| \qquad \left(f\in C_q^n(a,b)\right)$$

ile tanımlanan norm fonksiyonu altında bir Banach uzayıdır.

3.1.3 Lineer $q-$ Fark Denklemleri

$n-$ nci mertebeden lineer homojen olmayan $q-$ fark denklemi ele alınsın:

$$a_0(x)D_q{}^n y(x)+a_1(x)D_q^{n-1}y(x)+\cdots+a_n(x)y(x)=b(x),\ \ x\in I. \qquad (3.1.3.1)$$

Burada, $a_i(x)$ $(0\le i\le n)$ ve $b(x)$ fonksiyonları I aralığında tanımlı ve sıfırda sürekli fonksiyonlardır ve tüm $x\in I$ lar için $a_0(x)\neq 0$ dır. (3.1.3.1) denkleminin

$$D_q^{i-1}y(0)=b_i \qquad \left(b_i\in\mathbb{C},\ i=1,2,\cdots,n\right) \qquad (3.1.3.2)$$

başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümünün bulunmasına $q-$ tipli Cauchy problemi veya $q-$ tipli başlangıç değer problemi denir. (3.1.3.1)-(3.1.3.2) $q-$ tipli başlangıç değer probleminin, $h>0$ olmak üzere, $J=[-h,h]\subset I$ alt aralığında tanımlı tek bir çözümü vardır. (bknz. [4] Sonuç 2.4, sf 50)

Şimdi, $n-$ nci mertebeden homojen lineer

$$a_0(x)D_q{}^n y(x)+a_1(x)D_q^{n-1}y(x)+\cdots+a_n(x)y(x)=0 \qquad x\in I, \qquad (3.1.3.3)$$

denklemi ele alınsın ve $M\subseteq J$ ile (3.1.3.3) denkleminin çözümlerinin kümesi gösterilsin. M kümesi, $\mathbb{C}$ kompleks sayılar kümesinin bir alt kümesidir. (3.1.3.3) denkleminin (3.1.3.2) koşullarını sağlayan çözümlerinin varlık ve tekliğinden, $\phi\in M$ ve $D_q^i\phi(0)=0$ $(i=0,1,\cdots,n-1)$ olması durumunda J kümesi üzerinde $\phi(x)\equiv 0$ denkliğinin sağlandığı söylenebilir. Buna ek olarak, $D_q^i\phi$ $(0\le i\le n-1)$ fonksiyonları her $\phi\in M$ için sıfırda süreklidir.

Tanım 3.1.3.1 (3.1.3.3)-(3.1.3.2) başlangıç değer probleminin n tane lineer bağımsız çözümlerinden oluşan sisteme, bu başlangıç değer probleminin temel çözümler sistemi denir.

Lemma 3.1.3.1 b_{ij} $(1\le i,j\le n)$ keyfi sayılar ve her j için ϕ_j fonksiyonunun (3.1.3.3) denkleminin

$$D_q^{i-1}\phi_j(0)=b_{ij} \ \ (i,j=1,\cdots,n)$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümü olmak üzere, $\left\{\phi_j\right\}_{j=1}^{n}$ kümesinin (3.1.3.3) denkleminin bir temel çözümler sistemi olması için gerek ve yeter koşul $\det\left(b_{ij}\right)\neq 0$ olmasıdır.

Sonuç 3.1.3.1 M lineer uzayı $n-$ boyutludur.

3.1.3.1 Temel Çözümler Sistemi

a_r, ($0\leq r\leq n$) keyfi sabitler olmak üzere

$$L:=a_0D_q^n+a_1D_q^{n-1}+\cdots+a_n$$

diferansiyel operatörü ele alınsın. L diferansiyel operatörü yardımıyla (3.1.3.3) diferansiyel denklemi

$$Ly(x)=a_0D_q^n y(x)+a_1D_q^{n-1}y(x)+\cdots+a_n y(x)=0 \qquad (3.1.3.1.1)$$

biçiminde yazılabilir. (3.1.3.1.1) diferansiyel denkleminin $P(\lambda)$ karakteristik polinomu

$$P(\lambda)=a_0\lambda^n+a_1\lambda^{n-1}+\cdots+a_n \qquad (\lambda\in\mathbb{C})$$

ile tanımlıdır.

λ_i $(1\leq i\leq k)$, $P(\lambda)$ karakteristik polinomunun farklı köklerini ve m_i, bu köklerin, $\sum_{i=1}^{k}m_i=n$ olacak şekildeki tekrarlanma sayılarını belirtsin. Her λ_i için m_i-boyutlu bir $M_i=\left\{v\in M:\left(D_q-\lambda_i\right)^{m_i}v=0\right\}$ alt uzayı tanımlanabilir. (3.1.3.1.1) in temel çözümler sisteminin inşası

$$M=M_1\oplus M_2\oplus\cdots\oplus M_k$$

eşitliğinin sağlanmasına bağlıdır.

3.1.4 $q-$ Tipli Wronskiyen Determinantı

Tanım 3.1.4.1 $1\leq i\leq n$ olmak üzere y_i $q-$ geometrik bir A kümesi üzerinde tanımlanan fonksiyonlar olsun. y_i fonksiyonları I aralığında $(n-1)-$ nci mertebeden $q-$ türevlenebilir fonksiyonlar olmak üzere, bu fonksiyonların $W_q\left(y_1,\cdots,y_n\right)(x)$ ile gösterilen $q-$ Wronskiyeni

$$W_q\left(y_1,\cdots,y_n\right)(x):=\begin{vmatrix} y_1(x) & y_2(x) & \cdots & y_n(x)\\ D_q y_1(x) & D_q y_2(x) & \cdots & D_q y_n(x)\\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots\\ D_q^{(n-1)}y_1(x) & D_q^{(n-1)}y_2(x) & \cdots & D_q^{(n-1)}y_n(x)\end{vmatrix}$$

ile tanımlıdır.

Lemma 3.1.4.1 $y_1,\cdots,y_n$ fonksiyonları $q-$ geometrik bir A kümesi üzerinde tanımlı fonksiyonlar olsun. O halde, herhangi bir $0\neq x\in A$ için

$$D_qW_q\left(y_1,\cdots,y_n\right)(x)=\begin{vmatrix} y_1(qx) & y_2(qx) & \cdots & y_n(qx) \\ \left(D_qy_1\right)(qx) & \left(D_qy_2\right)(qx) & \cdots & \left(D_qy_n\right)(qx) \\ \vdots & \vdots & \ddots & \vdots \\ \left(D_q^{(n-2)}y_1\right)(qx) & \left(D_q^{(n-2)}y_1\right)(qx) & \cdots & \left(D_q^{(n-2)}y_n\right)(qx) \\ D_q^ny_1(x) & D_q^ny_2(x) & \cdots & D_q^ny_n(x) \end{vmatrix}$$

sağlanır.

Teorem 3.1.4.1 $y_1,\cdots,y_n$ fonksiyonları (3.1.3.3) denkleminin $J\subset I$ aralığındaki çözümleri olsun. Bu durumda, $y_1,\cdots,y_n$ fonksiyonlarının $q-$ Wronskiyenleri aşağıda verilen birinci mertebeden $q-$ fark denklemini sağlar:

$$D_qW_q(x)=-R(x)W_q(x),\qquad x\in J-\{0\},$$

burada $R(x)$ fonksiyonu $R(x)=\sum_{k=0}^{n-1}(x-qx)^k\dfrac{a_{k+1}(x)}{a_0(x)}$ eşitliği ile tanımlıdır.

Aşağıdaki teorem $q-$ Wronskiyen için $q-$ tipli Liouville formülünü verir:

Teorem 3.1.4.2 Her $x\in J$ için $x(1-q)R(x)\neq -1$ olsun. O halde (3.1.3.3) denkleminin $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ çözümler sisteminin $q-$ Wronskiyeni

$$W_q(x)=W_q\left(\phi_1,\cdots,\phi_n\right)(x)=\frac{W_q(0)}{\prod_{k=0}^{\infty}\left(1+x(1-q)q^kR\left(xq^k\right)\right)}$$

formülü ile verilir.

Sonuç 3.1.4.3 (3.1.3.3) denkleminin sıfırı içeren bir $J\subset I$ aralığındaki $\{\phi_i\}_{i=1}^n$ çözümler sisteminin temel çözümler sistemi olması için gerek ve yeter koşul, bu fonksiyonlarla oluşturulmuş $q-$ Wronskiyenin I aralığındaki herhangi bir noktada sıfırdan farklı olmasıdır.

3.2 $q-$ Sturm-Liouville Problemi

$v(\cdot)$ fonksiyonu, $[0,a]$ aralığında tanımlı ve sıfır noktasında sürekli bir fonksiyon olmak üzere aşağıda verilen $q-$ Sturm-Liouville denklemi ele alınsın:

$$-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_qy(x)+v(x)y(x)=\lambda y(x),\qquad (0\le x\le a<\infty,\ \lambda\in\mathbb{C}).\tag{3.2.1}$$

$C_q^2(0)$ ile $y(\cdot)$ ve $D_q y(\cdot)$ fonksiyonlarının sıfır noktasında sürekli olduğu tüm $y(\cdot)$ fonksiyonların uzayı gösterilsin. $C_q^2(0)$ uzayının $L_q^2(0,a)$ Hilbert uzayının bir alt uzayı olduğu açıktır.

(3.2.1) in bir çözümü ile kendisi ve $q-$türevi $x=0$ da önceden belirlenmiş değerlere sahip olan ve sıfır noktasında sürekli bir fonksiyon kastedilecektir. 3.1.3 ve 3.1.4 altbölümlerinden (3.2.1) denkleminin iki lineer bağımsız $\{y_1(\cdot), y_2(\cdot)\}$ çözümlerinden oluşan bir temel çözümler sistemine sahip olduğu bilinmektedir. Yine bu altbölümlerde, $\{y_1(\cdot), y_2(\cdot)\}$ sisteminin bir temel çözümler sistemi olması için gerek ve yeter koşulun bu iki fonksiyonun $q-$ Wronskiyeninin $[0,a]$ aralığının hiçbir noktasında sıfır olmaması durumu olduğu belirtilmiştir. Böylece aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 3.2.1: $c_1, c_2 \in \mathbb{C}$ olmak üzere (3.2.1) in $C_q^2(0)$ uzayında

$$\phi(0,\lambda) = c_1, \quad D_{q^{-1}}\phi(0,\lambda) = c_2 \qquad (\lambda \in \mathbb{C}) \tag{3.2.2}$$

koşullarını sağlayan tek bir çözümü vardır. Ayrıca $\phi(x,\lambda)$ her $x \in [0,a]$ için λ nın bir tam fonksiyonudur.

İspat: Teoremin ispatı [3] e benzer şekilde yapılabilir. □

Eğer (3.2.1) denklemindeki $v(\cdot)$ fonksiyonunun $[0,a]$ aralığında sürekli olduğu kabul edilirse, o halde, aşağıdaki teoremden de görülebileceği üzere, (3.2.1) denkleminin bir çözümü olan $\phi(\cdot,\lambda)$ fonksiyonu da sürekli bir fonksiyon olur.

Teorem 3.2.2: $0 \le q < 1$ olsun ve (3.2.1) de tanımlanan $v(\cdot)$ fonksiyonunun $[0,a]$ aralığında sürekli olduğu kabul edilsin. Bu durumda, (3.2.1) denklemi $C_q^2[0,a]$ da

$$\phi(0,\lambda) = c_1, \quad D_{q^{-1}}\phi(0,\lambda) = c_2 \qquad (\lambda \in \mathbb{C})$$

başlangıç koşullarını sağlayan tek bir çözüme sahiptir. Burada c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir ve $\phi(x,\lambda)$ her $x \in [0,a]$ için λ nın bir tam fonksiyonudur.

İspat. $s^2 := \lambda$ olarak tanımlanmak üzere $\varphi_1(x,\lambda) = \cos(sx;q)$ ve $\varphi_2(x,\lambda) = \begin{cases} \dfrac{\sin(sx;q)}{s}, & \lambda \neq 0 \\ x, & \lambda = 0 \end{cases}$ fonksiyonları $W_q(\varphi_1(\cdot,\lambda), \varphi_2(\cdot,\lambda)) \equiv 1$ $q-$ Wronskiyeni ile

$\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x)+\lambda y(x)=0$ denkleminin bir temel çözümler sistemini oluşturur. Her $x\in[0,a]$ elemanı ve her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $\{y_m(\cdot,\lambda)\}_{m=1}^{\infty}$ ardışık yaklaşımlar dizisi

$$y_1(x,\lambda)=c_1\varphi_1(x,\lambda)+c_2\varphi_2(x,\lambda) \tag{3.2.3}$$

$$y_{m+1}(x,\lambda)=c_1\varphi_1(x,\lambda)+c_2\varphi_2(x,\lambda)-q\int_0^x\{\varphi_2(x,\lambda)\varphi_1(qt,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda)\varphi_2(qt,\lambda)\}v(qt)y_m(qt,\lambda)d_qt \tag{3.2.4}$$

ile tanımlansın. Sabitlenmiş her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $m\to\infty$ iken $y_m(\cdot,\lambda)$ fonksiyonunun düzgün limitinin olduğu ve bu limitin (3.2.1)-(3.2.2) probleminin bir çözümünü tanımladığı ispatlanacaktır.

$\lambda\in\mathbb{C}$ sayısı sabitlenirse, $|y_1(x,\lambda)|\le\tilde{K}(\lambda)$, $|v(x)|\le A$, $|\varphi_i(x,\lambda)|\le\sqrt{\frac{K(\lambda)}{2}}$ ($i=1,2$ $x\in[0,a]$) olacak şekilde pozitif $K(\lambda)$, $\tilde{K}(\lambda)$ ve A sayılarının varlığı söylenebilir. Tümevarım yöntemiyle

$$|y_{m+1}(x,\lambda)-y_m(x,\lambda)|\le\tilde{K}(\lambda)q^{\frac{m(m+1)}{2}}\frac{(AK(\lambda)x(1-q))^m}{(q;q)^m} \quad (m\in\mathbb{N}) \tag{3.2.5}$$

elde edilir. Weierstrass $M-$ testinden

$$y_1(x,\lambda)+\sum_{m=1}^{\infty}y_{m+1}(x,\lambda)-y_m(x,\lambda) \tag{3.2.6}$$

serisinin $[0,a]$ aralığında düzgün yakınsak olduğu sonucu çıkar. Serinin $m-$ nci kısmi toplamı $y_{m+1}(\cdot,\lambda)$, $m\to\infty$ iken $[0,a]$ aralığında $\phi(\cdot,\lambda)$ fonksiyonuna yakınsar. Burada $\phi(x,\lambda)$ serinin toplamıdır. Teorem 3.1.1.2 kullanılarak, m üzerinden tümevarımla, $y_m(x,\lambda)$ ve $D_qy_m(x,\lambda)$ fonksiyonlarının $[0,a]$ aralığında sürekli olduğu ispatlanabilir, burada

$$D_qy_{m+1}(x,\lambda)=c_1D_q\varphi_1(x,\lambda)+c_2D_q\varphi_2(x,\lambda)$$
$$-q\int_0^x\{D_q\varphi_2(x,\lambda)\varphi_1(qt,\lambda)-D_q\varphi_1(x,\lambda)\varphi_2(qt,\lambda)\}y_m(qt,\lambda)d_qt \qquad (m\in\mathbb{N})$$

dir. Dolayısıyla, hem $\phi(\cdot,\lambda)$, hem de $D_q\phi(\cdot,\lambda)$ fonksiyonları $[0,a]$ aralığında sürekli olur. Sonuç olarak $\phi(\cdot,\lambda)\in C_q^2(0)$ elde edilir. Düzgün yakınsaklıktan, (3.2.4) de $m\to\infty$ iken

$$\phi(x,\lambda)=c_1\varphi_1(x,\lambda)+c_2\varphi_2(x,\lambda)-q\int_0^x\{\varphi_2(x,\lambda)\varphi_1(qt,\lambda)-\varphi_1(x,\lambda)\varphi_2(qt,\lambda)\}v(qt)\phi(qt,\lambda)d_qt$$

elde edilir. Elde edilen bu $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (3.2.1) denklemi ve (3.2.2) koşullarını sağladığı açıktır.

(3.2.1), (3.2.2) probleminin tek bir çözümü olduğunu ispatlamak için aksi varsayılır. $\psi_i(\cdot,\lambda)$ $(i=1,2)$ fonksiyonları (3.2.1), (3.2.2) probleminin iki çözümü olsun ve $\kappa(x,\lambda)=\psi_1(x,\lambda)-\psi_2(x,\lambda)$ $(x\in[0,a])$ olarak alınsın. Buradan $\kappa(x,\lambda)$ fonksiyonunun (3.2.1) denkleminin $\kappa(0,\lambda)=D_{q^{-1}}\kappa(0,\lambda)=0$ başlangıç koşullarını sağlayan bir çözümü olduğu görülür. (3.2.1) den iki kere $q-$ integral alınarak,

$$\kappa(x,\lambda)=-q\int_0^x(x-qt)(\lambda-v(qt))\kappa(qt,\lambda)d_qt$$

elde edilir. $\kappa(x,\lambda)$ ve $v(x)$ fonksiyonları $[0,a)$ aralığında sürekli olduğundan

$$N_\lambda=\max_{0\le x\le a}|\kappa(x,\lambda)|,\qquad M_\lambda=\max_{0\le x\le a}|\lambda-v(x)|$$

olacak şekilde pozitif N_λ, M_λ sayıları vardır. k ya göre matematiksel tümevarım kullanılarak

$$|\kappa(x,\lambda)|\le N_\lambda M_\lambda^k q^{k^2}(1-q)^{2k}\frac{x^{2k}}{(q;q)_{2k}}\qquad (k\in\mathbb{N}_0;\ x\in[0,a])$$

elde edilir. $\lim\limits_{k\to\infty}N_\lambda M_\lambda^k q^{k^2}(1-q)^{2k}\dfrac{x^{2k}}{(q;q)_{2k}}=0$ olduğundan, tüm $x\in[0,a]$ elemanları için $\kappa(x,\lambda)=0$ olur ve böylece teklik ispatlanır.

Şimdi, $M>0$ sayısının sabitlenmiş keyfi bir sayı olduğu kabul edilsin. $x\in[0,a]$ olmak üzere $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonunun λ ya göre bir tam fonksiyon olduğunu ispat etmek için $\phi(x,\lambda)$ nın $\Omega_M:=\{\lambda\in\mathbb{C}:|\lambda|\le M\}$ disklerinde analitik olduğu gösterilmelidir. Yani ,M ye göre tümevarım uygulanarak

$$\forall x\in[0,a] \text{ için } y_m(x,\lambda) \text{ nın } \Omega_M \text{ diskinde analitik} \tag{3.2.7}$$

$$\forall\lambda\in\Omega_M \text{ için } \frac{\partial}{\partial\lambda}y_m(x,\lambda) \text{ nın } (0,\lambda) \text{ da sürekli} \tag{3.2.8}$$

olduğu elde edilmelidir. Her $x\in[0,a]$ için $\varphi_1(x,\lambda)$ ve $\varphi_2(x,\lambda)$ fonksiyonlarının λ ya göre tam fonksiyonlar olduğu açıktır. Hatta, $\dfrac{\partial}{\partial\lambda}\phi_i(x,\lambda)$ fonksiyonu her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $(0,\lambda)$ aralığında süreklidir. O halde, $m=1$ durumunda (3.2.7) ve (3.2.8) sağlanır.

(3.2.7) ve (3.2.8) ifadelerinin $m \in \mathbb{N}$ için de sağlandığı kabul edilirse, $x_0 \in [0,a]$ ve $\lambda_0 \in \Omega_M$ için

$$\frac{\partial}{\partial\lambda} y_{m+1}(x_0,\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_0} = \frac{\partial}{\partial\lambda} y_1(x_0,\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_0} - q\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_2(x_0,\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_0}\int_0^{x_0}\varphi_1(qt,\lambda)y_m(qt,\lambda)d_qt$$
$$+q\frac{\partial}{\partial\lambda}\varphi_1(x_0,\lambda)\bigg|_{\lambda=\lambda_0}\int_0^{x_0}\varphi_2(qt,\lambda)y_m(qt,\lambda)d_qt - \frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_0^{x_0}\varphi_1(qt,\lambda)y_m(qt,\lambda)d_qt\right)\bigg|_{\lambda=\lambda_0}$$
$$+q\varphi_1(x_0,\lambda)\frac{\partial}{\partial\lambda}\left(\int_0^{x_0}\varphi_2(qt,\lambda)y_m(qt,\lambda)d_qt\right)\bigg|_{\lambda=\lambda_0} \tag{3.2.9}$$

elde edilir. $\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\varphi_i(qt,\lambda)y_m(qt,\lambda)\big)$ ($i=1,2$) fonksiyonunun $(0,\lambda_0)$ aralığında sürekli olduğu (3.2.8) den görülebilir. Buradan, $n\in\mathbb{N}$, $|\lambda-\lambda_0|\le\delta$ olmak üzere $\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\varphi_i(x_0q^n,\lambda)y_m(x_0q^n,\lambda)\big)\right|\le C$ eşitsizliği sağlanacak biçimde C ve δ sabitlerinin varlığı söylenebilir. Dolayısıyla,

$$x_0(1-q)q^n\left|\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\varphi_i(x_0q^{n+1},\lambda)y_m(x_0q^{n+1}\lambda)\big)\right|\le x_0A(1-q)q^n \qquad (n\in\mathbb{N}_0)$$

eşitsizliği $|\lambda-\lambda_0|\le\delta$ diskindeki her λ sayısı için sağlanır, yani

$$\int_0^{x_0}\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\varphi_i(qt,\lambda)y_m(qt,\lambda)\big)d_qt \qquad (i=1,2)$$

$q-$integraline karşılık gelen seriler $\lambda=\lambda_0$ komşuluğunda düzgün yakınsak olur. O halde, (3.2.9) daki türev ve integral alma işlemlerinin sırası değiştirilebilir. x_0 ve λ_0 keyfi sayılar olduğundan her $x\in[0,a]$ ve $\lambda\in\Omega_M$ için

$$\frac{\partial}{\partial\lambda}y_{m+1}(x,\lambda)=\frac{\partial}{\partial\lambda}y_1(x,\lambda)-q\int_0^x\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\varphi_2(x,\lambda)\varphi_1(qt,\lambda)y_m(qt,\lambda)\big)v(qt)d_qt$$
$$+q\int_0^x\frac{\partial}{\partial\lambda}\big(\varphi_1(x,\lambda)\varphi_2(qt,\lambda)y_m(qt,\lambda)\big)v(qt)d_qt \tag{3.2.10}$$

elde edilir. (3.2.8) den (3.2.10) daki integrallerin $(0,\lambda)$ aralığında sürekli oldukları söylenebilir. Sonuç olarak, $\frac{\partial}{\partial\lambda}y_{m+1}(x,\lambda)$ fonksiyonları $(0,\lambda)$ aralığında sürekli olur. Keyfi $x_0\in[0,a]$ sayıları için $\left|\varphi_i\left(x_0,\lambda\right)\right| \le \sqrt{\dfrac{B(x)}{2}}$ $(i=1,2)$ ve $\left|y_1\left(x,\lambda\right)\right| \le \tilde{B}\left(x_0\right)$ $(\lambda \in \Omega_M)$ eşitsizlikleri sağlanacak biçimde $B\left(x_0\right)$, $\tilde{B}\left(x_0\right)$ sayılarının varlığı söylenebilir. Sonuç olarak, matematiksel tümevarım yöntemi kullanılarak,

$$\left|y_{m+1}\left(x_0,\lambda\right)-y_m\left(x_0,\lambda\right)\right| \le \tilde{B}\left(x_0\right) q^{\frac{m(m+1)}{2}} \frac{\left(AB\left(x_0\right)\lambda(1-q)\right)^m}{(q;q)_m}$$

eşitsizliğine ulaşılır ve buradan $x=x_0$ iken (3.2.6) serilerinin Ω_M de $\phi\left(x_0,\lambda\right)$ fonksiyonuna düzgün yakınsadığı görülür. Dolayısıyla, $\phi\left(x_0,\lambda\right)$ fonksiyonu Ω_M de analitik, yani tam olur. □

3.2.1 Özeşlenik Problem

Bu alt bölümde (3.2.1) $q-$ Sturm-Liouville operatörü ve sınır koşulları ile oluşturulan $q-$ Sturm-Liouville sınır değer problemi tanımlanacak ve bu problemin $L_q^2\left(0,a\right)$ uzayında özeşlenik olduğunu ispatlanacaktır. Aşağıdaki lemma, klasik diferansiyel operatörü $\dfrac{d}{dx}$ in aksine, D_q operatörünün özeşlenik veya skew-özeşlenik olmadığını belirtir. Lemmanın ifadesindeki (3.2.1.2) eşitliği D_q nun eşleniğinin $-\dfrac{1}{q}D_{q^{-1}}$ olduğunu söyler.

Lemma 3.2.1.1. $f\left(\cdot\right), g\left(\cdot\right) \in L_q^2(0,a)$ fonksiyonları $\left[0,q^{-1}a\right]$ aralığında tanımlanmış olsun. O halde $x \in \left[0,a\right]$ için

$$\left(D_q g\right)\left(xq^{-1}\right) = D_{q,xq^{-1}} g\left(xq^{-1}\right) = D_{q^{-1}} g\left(xq\right), \tag{3.2.1.1}$$

$$\left\langle D_q f, g\right\rangle = f\left(a\right)\overline{g\left(aq^{-1}\right)} - \lim_{n\to\infty} f\left(aq^n\right)\overline{g\left(aq^{n-1}\right)} + \left\langle f, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}g\right\rangle \tag{3.2.1.2}$$

$$\left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}} f, g\right\rangle = \lim_{n\to\infty} f\left(aq^{n-1}\right)\overline{g\left(aq^n\right)} - f\left(aq^{-1}\right)\overline{g\left(a\right)} + \left\langle f, D_q g\right\rangle \tag{3.2.1.3}$$

eşitlikleri gerçeklenir.

İspat. (3.2.1.1) eşitliğinin sağlandığı

$$D_{q^{-1}} g\left(x\right) = \frac{g\left(x\right)-g\left(q^{-1}x\right)}{x\left(1-q^{-1}\right)} = \frac{g\left(xq^{-1}\right)-g\left(x\right)}{xq^{-1}\left(1-q\right)} = \left(D_q g\right)\left(xq^{-1}\right) = D_{q,xq^{-1}} g\left(xq^{-1}\right)$$

ifadesinden direkt olarak görülür.

(3.1.1.3) ile verilen $q-$ kısmi integrasyon formülü yardımıyla

$$\left\langle D_q f, g\right\rangle = \int_0^a D_q f\left(x\right)\overline{g\left(x\right)} d_q x = f\left(a\right)\overline{g\left(a\right)} - \lim_{n\to\infty} f\left(aq^n\right)\overline{g\left(aq^n\right)} - \int_0^a f\left(qt\right)\overline{D_q g\left(t\right)} d_q t$$

$$= f(a)\overline{g(a)} - \lim_{n\to\infty} f(aq^n)\overline{g(aq^n)} - \int_0^{qa} f(t)\frac{1}{q}\overline{D_{q^{-1}}g(t)}d_q t$$

$$= f(a)\overline{g(a)} - \lim_{n\to\infty} f(aq^n)\overline{g(aq^n)} + aq^{-1}(1-q)f(a)\overline{D_{q^{-1}}g(a)} + \int_0^{a} f(t) - \frac{1}{q}D_{q^{-1}}g(t)d_q t$$

elde edilir. Böylece (3.2.1.2) ispatlanır. (3.2.1.3), (3.2.1.2) ye benzer biçimde ispatlanabilir. □

Şimdi, aşağıdaki $q-$ Sturm-Liouville problemi ele alınsın.

$$l(y) := -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x) + v(x)y(x) = \lambda y(x),\ (0 \le x < a < \infty, \lambda \in \mathbb{C}) \quad (3.2.1.4)$$

$$U_1(y) := a_{11}y(0) + a_{12}D_{q^{-1}}y(0) = 0 \quad (3.2.1.5)$$

$$U_2(y) := a_{21}y(a) + a_{22}D_{q^{-1}}y(a) = 0 \quad (3.2.1.6)$$

Burada, $v(\cdot)$ reel değerli fonksiyonu sıfırda sürekli bir fonksiyondur ve $\{a_{ij}\}, i, j \in \{1,2\}$ keyfi sayıları, $(a_{ij})_{1\le i, j\le 2}$ matrisinin rankı 2 olacak şekildeki reel sayılardır.

Teorem 3.2.1.1 (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville problemi $C_q^2(0)\cap L_q^2(0,a)$ uzayında özeşleniktir.

İspat: $y(\cdot)$, $z(\cdot)\in L_q^2(0,a)$ olmak üzere aşağıdaki $q-$ Lagrange özdeşliğinin sağlandığı gösterilsin:

$$\int_0^a \left(ly(x)\overline{z(x)} - y(x)\overline{lz(x)}\right)d_q x = [y,z](a) - \lim_{n\to\infty}[y,z](aq^n), \quad (3.2.1.7)$$

burada $[y,z](\cdot)$ ifadesi

$$[y,z](x) := y(x)\overline{D_{q^{-1}}z(x)} - D_{q^{-1}}y(x)\overline{z(x)} \quad (3.2.1.8)$$

ile tanımlıdır. (3.2.1.3) ifadesinde $f(x) = D_q y(x)$ ve $g(x) = z(x)$ alınarak

$$\left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x), z(x)\right\rangle = -(D_q y)(aq^{-1})\overline{z(a)} + \lim_{n\to\infty}(D_q y)(aq^{n-1})\overline{z(aq^n)} + \langle D_q y, D_q z\rangle$$

$$= -D_{q^{-1}}y(a)\overline{z(a)} + \lim_{n\to\infty} D_{q^{-1}}y(aq^n)\overline{z(aq^n)} + \langle D_q y, D_q z\rangle$$

bulunur. Benzer biçimde, (3.2.1.2) ifadesinde $f(x) = y(x)$, $g(x) = D_q z(x)$ alınarak

$$\langle D_q y, D_q z\rangle = y(a)\overline{D_q z(aq^{-1})} - \lim_{n\to\infty} y(aq^n)\overline{D_q z(aq^{n-1})} + \left\langle y, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q z\right\rangle$$

$$= y(a)\overline{D_{q^{-1}}z(a)} - \lim_{n\to\infty} y(aq^n)\overline{D_q z(aq^n)} + \left\langle y, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q z\right\rangle$$

elde edilir. Dolayısıyla,

$$\left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x), z(x)\right\rangle = [y,z](a) - \lim_{n\to\infty}[y,z](aq^n) + \left\langle y, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q z\right\rangle \quad (3.2.1.9)$$

olur. (3.2.1.7) ile verilen $q-$ Lagrange özdeşliğinin sağlandığı (3.2.1.9) ifadesinden ve $v(\cdot)$ fonksiyonunun reel olmasından görülür. $y(\cdot)$ ve $z(\cdot)$ fonksiyonlarının sıfırdaki süreklilikleri $\lim_{n\to\infty}[y,z](aq^n) = [y,z](0)$ olmasını gerektirir. O halde, (3.2.1.9) ifadesi

$$\left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x), z(x)\right\rangle = [y,z](a) - [y,z](0) + \left\langle y, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q z\right\rangle$$

halini alır. (3.2.1.5), (3.2.1.6) sınır koşullarındaki a_{11} ve a_{12} sayılarının her ikisi birden sıfır olmadığından (3.2.1.8) den $[y,z](0) = y(0)\overline{D_{q^{-1}}z(0)} - D_{q^{-1}}y(0)\overline{z(0)} = 0$ bulunur. Benzer biçimde, $[y,z](a) = y(a)\overline{D_{q^{-1}}z(a)} - D_{q^{-1}}y(a)\overline{z(a)} = 0$ elde edilir. $v(x)$ reel değerli bir fonksiyon olduğundan

$$\langle l(y), z\rangle = \left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x) + v(x)y(x), z(x)\right\rangle = \left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x), z(x)\right\rangle + \langle v(x)y, z(x)\rangle$$

$$= \left\langle y, -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q z(x)\right\rangle + \langle y, v(x)z(x)\rangle = \langle y, l(z)\rangle$$

sağlanır ve böylece l operatörünün özeşlenikliği gösterilir. □

Tanım 3.2.1.1 (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville problemi için sıfırdan farklı bir $\phi^*(\cdot)$ çözümü bulunabilecek biçimdeki λ^* sayısına bu problemin bir özdeğeri denir. Bu durumda, $\phi^*(\cdot)$ fonksiyonu (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville probleminin λ^* özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonu olur. Bir özdeğerin tekrarlanma sayısı, bu özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız çözümlerin sayısı ile tanımlanır. Özel olarak, eğer bir özdeğere, lineer bağımsız tek bir çözüm denk geliyorsa bu özdeğer basittir denir.

Lemma 3.2.1.2 (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri ve özfonksiyonları aşağıdaki özellikleri sağlar:

$i)$ Özdeğerler reeldir.

$ii)$ Farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar diktir.

$iii)$ Tüm özdeğerler basittir.

İspat: i) $y_0(\cdot)$ fonksiyonu, λ_0 özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. O halde,

$$\langle l(y_0), y_0\rangle = \langle y_0, l(y_0)\rangle$$

sağlanır. $l(y_0)=\lambda_0 y_0$ olduğundan

$$\left(\lambda_0-\overline{\lambda_0}\right)\int_0^a \left|y_0(x)\right|^2 d_q x=0 \tag{3.2.1.10}$$

bulunur. $y_0(\cdot)$ aşikar olmayan bir çözüm olduğundan $\lambda_0=\overline{\lambda_0}$ olur. Böylece (i) ispatlanır.

ii) λ ve μ birbirinden farklı iki (reel) özdeğer ve $y(\cdot)$ ve $z(\cdot)$ fonksiyonları özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. O halde, (3.2.1.10) dan

$$(\lambda-\mu)\int_0^a y(x)\overline{z(x)}d_q x=0$$

yazılabilir. $\lambda\neq\mu$ kabulü $y(\cdot)$ ve $z(\cdot)$ özfonksiyonlarının birbirine dik olması sonucunu verir. Böylece (ii) ispatlanır.

iii) $y_1(\cdot)$ ve $y_2(\cdot)$ fonksiyonları, λ_0 özdeğerine karşılık gelen iki özfonksiyon olsun. $y_1(\cdot)$ ve $y_2(\cdot)$ fonksiyonlarının $q-$Wronskiyenlerinin $x=0$ noktasında sıfır olmasından yararlanarak (bknz. Sonuç 3.1.4.3), $\{y_1(\cdot),y_2(\cdot)\}$ fonksiyonlarının lineer bağımlı oldukları ispatlanabilir. Gerçekten, $y_1(\cdot)$ ve $y_2(\cdot)$ fonksiyonları (3.2.1.5) ifadesini sağladığından

$$\begin{aligned} W_q(y_1,y_2)(0)&=y_1(0)D_q y_2(0)-y_2(0)D_q y_1(0)=y_1(0)D_{q^{-1}}y_2(0)-y_2(0)D_{q^{-1}}y_1(0)\\ &=[y_1,y_2](0)=0 \end{aligned}$$

bulunur. Böylece ispat biter. □

$\phi_1(\cdot,\lambda)$, $\phi_2(\cdot,\lambda)$ (3.2.1.4) denkleminin $D_q^{j-1}\phi_i(\cdot,\lambda)=\delta_{ij}$ ($i,j=1,2$; $\lambda\in\mathbb{C}$) başlangıç koşullarıyla belirlenen lineer bağımsız çözümleri olsun. $\phi_1(x,\lambda)$ çözümü, (3.2.1.4) de $c_1=1$, $c_2=0$ alınarak ve $\phi_2(x,\lambda)$ çözümü ise (3.2.4) de $c_1=0$, $c_2=1$ alınarak belirlenir. O halde, (3.2.1.4) denkleminin her çözümü

$$y(x,\lambda)=A_1\phi_1(x,\lambda)+A_2\phi(x,\lambda)$$

biçiminde olur, burada A_1 ve A_2 x e bağlı olmayan keyfi sayılardır.(3.2.1.4) denkleminin bir $y(\cdot,\lambda)$ çözümü (3.2.1.5)-(3.2.1.6) sınır koşullarını sağlarsa, yani eğer

$$\begin{aligned} &A_1U_1(\phi_1)+A_2U_1(\phi_2)=0\\ &A_1U_2(\phi_1)+A_2U_2(\phi_2)=0 \end{aligned} \tag{3.2.1.11}$$

sisteminin sıfırdan farklı bir çözümü bulunabilirse, bu çözüm bir özfonksiyon olur. Dolayısıyla $\lambda\in\mathbb{R}$ nin bir özdeğer olması için gerek ve yeter koşul

$$\Delta(\lambda)=\begin{vmatrix} U_1(\phi_1) & U_1(\phi_2) \\ U_2(\phi_1) & U_2(\phi_2) \end{vmatrix}=0 \tag{3.2.1.12}$$

eşitliğinin sağlanmasıdır.

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonu (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville probleminin karakteristik determinantıdır. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun sıfırları (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri ile çakışır. $\phi_1(x,\lambda)$ ve $\phi_2(x,\lambda)$ sabitlenmiş her $x\in[0,a]$ için λ nın tam fonksiyonları olduklarından $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu da tamdır. O halde, (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri sonlu limit noktasına sahip olmayan sayılabilir bir küme oluşturur.

Lemma 3.2.1.2 de özdeğerlerin geometrik olarak basit olduğu ispatlanmıştır. Aşağıdaki teoremde ise, özdeğerlerin cebirsel olarak basit olduğu yani, özdeğerlerin $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun basit sıfırları olduğu gösterilecektir.

Teorem 3.2.1.2 (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville probleminin özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun basit sıfırlarıdır.

İspat: $\theta_1(\cdot,\lambda)$ ve $\theta_2(\cdot,\lambda)$ fonksiyonları aşağıdaki ifadelerle tanımlansın:

$$\begin{cases} \theta_1(x,\lambda):=U_1(\phi_2)\phi_1(x,\lambda)-U_1(\phi_1)\phi_2(x,\lambda), \\ \theta_2(x,\lambda):=U_2(\phi_2)\phi_1(x,\lambda)-U_2(\phi_1)\phi_2(x,\lambda). \end{cases} \tag{3.2.1.13}$$

O halde, $\theta_1(\cdot,\lambda)$ ve $\theta_2(\cdot,\lambda)$ fonksiyonları (3.2.1.4) denkleminin

$$\theta_1(0,\lambda)=a_{12},\ D_{q^{-1}}\theta_1(0,\lambda)=-a_{11},\ \theta_1(a,\lambda)=a_{22},\ D_{q^{-1}}\theta_1(0,\lambda)=-a_{21} \tag{3.2.1.14}$$

koşullarını sağlayan çözümleri olur. Ayrıca,

$$W_q\left(\theta_1(\cdot,\lambda),\theta_2(\cdot,\lambda)\right)(x)=\Delta(\lambda)W_q\left(\phi_1(\cdot,\lambda),\phi_2(\cdot,\lambda)\right)(x)=\Delta(\lambda) \tag{3.2.1.15}$$

olduğu gösterilebilir.

λ_0, (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville probleminin bir özdeğeri olsun. O halde, λ_0 bir reel sayıdır ve dolayısıyla $\theta_i(x,\lambda_0)$ fonksiyonu ($i=1,2$) reel değerli bir fonksiyon olarak alınabilir. Böylece, (3.2.1.15) ten $\theta_1(x,\lambda_0)$, $\theta_2(x,\lambda_0)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı özfonksiyonlar olduğu sonucuna varılabilir. Yani,

$$\theta_1(x,\lambda_0)=k_0\theta_2(x,\lambda_0) \tag{3.2.1.16}$$

eşitliği sağlanacak biçimde sıfırdan farklı bir k_0 sabit sayısı vardır. (3.2.1.14) ve (3.2.1.13) ifadeleri yardımıyla

$$\theta_1(a,\lambda_0)=k_0a_{22}=k_0\theta_2(a,\lambda_0); \qquad D_{q^{-1}}(a,\lambda_0)=-k_0a_{21}=k_0D_{q^{-1}}\theta_2(a,\lambda) \tag{3.2.1.17}$$

yazılabilir. (3.2.1.7) $q-$Lagrange özdeşliğinde $y(x)=\theta_1(x,\lambda)$ ve $z(x)=\theta_1(x,\lambda_0)$ alınırsa,

$$(\lambda-\lambda_0)\int_0^a \theta_1(x,\lambda)\theta_1(x,\lambda_0)\,d_qx=\theta_1(a,\lambda)D_{q^{-1}}\theta_1(a,\lambda_0)-D_{q^{-1}}\theta_1(a,\lambda)\theta_1(a,\lambda_0)$$

$$=k_0\left(\theta_1(a,\lambda)D_{q^{-1}}\theta_2(a,\lambda)-\theta_2(a,\lambda)D_{q^{-1}}\theta_1(a,\lambda)\right)=k_0W_q\left(\theta_1(\cdot,\lambda),\theta_2(\cdot,\lambda)\right)\left(q^{-1}a\right)=k_0\Delta(\lambda)$$

elde edilir. $\Delta(\lambda)$, λ ya göre bir tam fonksiyon olduğundan

$$\Delta'(\lambda_0):=\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}=\frac{1}{k_0}\int_0^a\theta_1^2(x,\lambda_0)\,d_qx\neq 0 \tag{3.2.1.18}$$

bulunur. Buradan, λ_0 nın $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun bir basit sıfırı olduğu sonucuna varılır ve böylece ispat biter. □

Uyarı 3.1.1.1 Uygun $r(\cdot)$ ve $w(\cdot)$ fonksiyonları için (3.2.1.4) q-fark denklemi

$$-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}\left(r(x)D_qy(x)\right)+v(x)y(x)=\lambda w(x)y(x)$$

biçiminde yazılabilir ve bu denklem ile oluşturulan sınır değer problemleri için de şu ana kadar elde edilen sonuçlara benzer sonuçlar elde edilir. Burada dikkat edilmesi gereken tek nokta, (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville probleminin ele alındığı $L_q^2(0,a)$ Hilbert uzayının,

$$\langle f,g\rangle_w=\int_0^a f(x)\overline{g(x)}w(x)\,d_qx \qquad \left(f,g\in\left(L_q^2(0,a);w(\cdot)\right)\right)$$

iç çarpımıyla tanımlı $L_q^2\left((0,a);w(\cdot)\right)$ Hilbert uzayı ile değiştirilmesidir. Benzer şekilde (3.2.1.5) ve (3.2.1.6) sınır koşulları da değiştirilerek (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville sınır değer probleminin çeşitli biçimleri ele alınabilir.

3.2.2 Green Fonksiyonu

Green fonksiyonu, $f(\cdot)\in L_q^2(0,a)$ olmak üzere

$$-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_qy(x)+\{-\lambda+v(x)\}y(x)=f(x) \qquad \left(x\in[0,a];\lambda\in\mathbb{C}\right) \tag{3.2.2.1}$$

homojen olmayan denkleminin (3.2.1.5), (3.2.1.6) sınır koşullarını sağlayan çözümünü ararken ortaya çıkar.

Lemma 3.2.2.1: λ, (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville sınır değer probleminin bir özdeğeri olmasın. O halde, eğer (3.2.2.1) denkleminin bir çözümü varsa, bu çözüm tektir.

İspat: $\kappa_1(x,\lambda)$ ve $\kappa_2(x,\lambda)$ fonksiyonlarının (3.2.2.1) denkleminin iki çözümü olduğu kabul edilsin. O halde, $\kappa_1(x,\lambda)-\kappa_2(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville probleminin bir çözümü olur ve eğer λ bir özdeğer değilse, bu çözüm özdeş olarak sıfıra eşit olur, yani $\kappa_1(x,\lambda)\equiv\kappa_2(x,\lambda)$ özdeşliği sağlanır. Bu ise (3.2.2.1) denkleminin çözümünün tekliğini gösterir ve böylece ispat biter.□

Lemma 3.2.2.1 için başka bir ispat biçimi, aşağıdaki teoremin ispatında verilmiştir.

Teorem 3.2.2.1 λ nın (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville probleminin bir özdeğeri olmadığı ve $\phi(\cdot,\lambda)$ fonksiyonunun (3.2.2.1) $q-$fark denklemini ve (3.2.1.5)-(3.2.1.6) sınır koşullarını sağladığı kabul edilsin. O halde, $f(\cdot)\in L_q^2(0,a)$ olmak üzere, $\phi(\cdot,\lambda)$ fonksiyonu

$$\phi(x,\lambda)=\int_0^a G(x,t,\lambda)\,f(t)\,d_qt,\qquad x\in\{aq^m; m\in\mathbb{N}_0\} \tag{3.2.2.2}$$

biçimindedir, burada $G(x,t,\lambda)$ (3.2.1.4)-(3.2.1.6) $q-$ Sturm-Liouville probleminin aşağıdaki şekilde tanımlanmış Green fonksiyonudur:

$$G(x,t,\lambda):=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\theta_2(x,\lambda)\theta_1(t,\lambda), & 0\le t<x,\\ \theta_1(x,\lambda)\theta_2(t,\lambda), & x<t\le a.\end{cases} \tag{3.2.2.3}$$

Tersine, (3.2.2.2) ile tanımlı $\phi(\cdot,\lambda)$ fonksiyonu (3.2.2.1) denklemini ve (3.2.1.5), (3.2.1.6) sınır koşullarını sağlar. Ayrıca, (3.2.2.3) ifadesi ile verilen Green fonksiyonu tek türlü tanımlıdır. Yani, eğer (3.2.2.2) sağlanacak şekilde başka bir $\tilde{G}(x,t,\lambda)$ fonksiyonu varsa, o halde

$$G(x,t,\lambda)=\tilde{G}(x,t,\lambda)\qquad \left(\forall x,t\in\left\{aq^m \,\middle|\, m\in\mathbb{N}_0\right\}\right)$$

olur. Eğer, $f(\cdot)$ fonksiyonu sıfır noktasında q-regüler ise, o halde, (3.2.2.2) tüm $x\in[0,a]$ lar için sağlanır.

İspat. Sabitlerin değişimi yönteminin $q-$benzeri kullanılarak, (3.2.2.1) homojen olmayan denkleminin bir özel çözümü

$$\phi(x,\lambda)=c_1(x)\theta_1(x,\lambda)+c_2(x)\theta_2(x,\lambda)$$

biçiminde aranabilir. Burada $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonları birinci mertebeden

$$\begin{cases}D_{q,x}c_1(x)=-\dfrac{q}{\Delta(\lambda)}\theta_2(qx,\lambda)\,f(qx)\\[2ex] D_{q,x}c_2(x)=\dfrac{q}{\Delta(\lambda)}\theta_1(qx,\lambda)\,f(qx)\end{cases} \tag{3.2.2.4}$$

$q-$fark denklemlerinin çözümleridir. Eğer $D_{q,x}c_i(x)$ $(i=1,2)$ fonksiyonları $[0,t]$ aralığında $q-$integrallenebilirse, o halde,

$$\lim_{n\to\infty} tq^n\theta_i\left(tq^{n+1},\lambda\right)f\left(t,q^{n+1}\right)=0 \qquad (i=1,2)$$

sağlanır.

$q-$ geometrik bir A_f kümesi

$$A_f:=\left\{x\in[0,a]:\lim_{n\to\infty} xq^n\left|f\left(xq^n\right)\right|^2=0\right\}$$

ifadesi ile tanımlansın. $f\in L_q^2(0,a)$ olduğundan A_f kümesi $\left\{aq^m;m\in\mathbb{N}_0\right\}$ elemanlarını içeren $q-$geometrik bir kümedir. Dolayısıyla, $D_qc_i(\cdot)$, $(i=1,2)$ tüm $x\in A_f$ ler için $[0,x]$ aralığında $q-$integrallenebilirdir ve (3.2.2.4) denklemlerinin uygun çözümleri

$$c_1(x)=c_1(0)+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_0^x\theta_2(qt,\lambda)f(qt)d_qt \qquad (x\in A_f)$$

$$c_2(x)=c_1(a)+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_x^a\theta_1(qt,\lambda)f(qt)d_qt \qquad (x\in A_f)$$

biçiminde olur. O halde, (3.2.1.1) denkleminin genel çözümü

$$\phi(x,\lambda)=c_1\theta_1(x,\lambda)+c_2\theta_2(x,\lambda)+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\theta_1(x,\lambda)\int_0^x\theta_2(qt,\lambda)f(qt)d_qt$$
$$+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\theta_2(x,\lambda)\int_0^x\theta_1(qt,\lambda)f(qt)d_qt \qquad (3.2.2.5)$$

ifadesi ile verilebilir, burada $x\in A_f$ dir ve c_1 ve c_2 keyfi sabitlerdir. Şimdi, $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonu (3.2.1.5), (3.2.1.6) sınır koşullarını sağlayacak biçimde c_1 ve c_2 ler belirlenmek istenirse,

$$\phi(0,\lambda)=c_1\theta_1(0,\lambda)+\left(c_2+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_0^a\theta_1(qt,\lambda)f(qt)d_qt\right)\theta_2(0,\lambda)$$

$$D_{q^{-1}}\phi(0,\lambda)=\lim_{\substack{n\to\infty\\ x\in A_f}}\frac{\phi\left(xq^n,\lambda\right)-\phi(0,\lambda)}{xq^n}=c_1D_{q^{-1}}\theta_1(0,\lambda)+\left(c_2+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_0^a\theta_1(qt,\lambda)f(qt)d_qt\right)D_{q^{-1}}\theta_2(0,\lambda)$$

olduğu kolayca görülür. $a_{11}\phi(0,\lambda)+a_{12}D_{q^{-1}}\phi(0,\lambda)=0$ sınır koşulundan

$$\left(c_2+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_0^a\theta_1(qt,\lambda)f(qt)d_qt\right)W_q(\theta_1,\theta_2)(0)=0$$

yazılabilir. Buradan

$$c_2=-\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_0^a \theta_1(qt,\lambda)\,f(qt)\,d_qt$$

bulunur ve

$$\phi(x,\lambda)=c_1\theta_1(x,\lambda)+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_0^x\big(\theta_1(x,\lambda)\theta_2(qt,\lambda)-\theta_2(x,\lambda)\theta_1(qt,\lambda)\big)f(qt)\,d_qt$$

halini alır.

$\phi(a,\lambda)$ ve $D_{q^{-1}}\phi(a,\lambda)$ fonksiyonları belirlenmek üzere $q-$ integrasyonun (3.1.1.3) ile verilen tanımından ve (3.2.2.5) ifadesinden faydalanılırsa

$$\phi(a,\lambda)=c_1\theta_1(a,\lambda)+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_0^a\big(\theta_1(a,\lambda)\theta_2(qt,\lambda)-\theta_2(a,\lambda)\theta_1(qt,\lambda)\big)f(qt)\,d_qt$$

$$=c_1\theta_1(a,\lambda)+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_0^{q^{-1}a}\big(\theta_1(a,\lambda)\theta_2(qt,\lambda)-\theta_2(a,\lambda)\theta_1(qt,\lambda)\big)f(qt)\,d_qt$$

ve

$$D_{q^{-1}}\phi(a,\lambda)=D_{q^{-1}}\theta_1(a,\lambda)\left(c_1+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_0^{q^{-1}a}\theta_2(qt,\lambda)\,f(qt)\,d_qt\right)-\frac{q}{\Delta(\lambda)}D_{q^{-1}}\theta_2(a,\lambda)\int_0^{q^{-1}a}\theta_1(qt,\lambda)\,f(qt)\,d_qt$$

bulunur. $a_{21}\phi(a,\lambda)+a_{22}D_{q^{-1}}\phi(a,\lambda)=0$ sınır koşulundan

$$\left(c_1+\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_0^{q^{-1}a}\theta_2(qt,\lambda)\,f(qt)\,d_qt\right)W_q(\theta_1,\theta_2)(a)=0$$

yazılabilir ve dolayısıyla

$$c_1=-\frac{q}{\Delta(\lambda)}\int_0^{q^{-1}a}\theta_2(qt,\lambda)f(qt)\,d_qt$$

elde edilir. Bu durumda, $x\in A_f$ için

$$\phi(x,\lambda)=-\frac{q}{\Delta(\lambda)}\theta_2(x,\lambda)\int_0^x\theta_1(qt,\lambda)f(qt)\,d_qt-\frac{q}{\Delta(\lambda)}\theta_1(x,\lambda)\int_x^{q^{-1}a}\theta_2(qt,\lambda)f(qt)\,d_qt$$

$$=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\theta_2(x,\lambda)\int_0^{qx}\theta_1(t,\lambda)\,f(t)\,d_qt-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\theta_1(x,\lambda)\int_{qx}^a\theta_2(t,\lambda)f(t)\,d_qt$$

$$=-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\theta_2(x,\lambda)\int_0^x\theta_1(t,\lambda)f(t)\,d_qt-\frac{1}{\Delta(\lambda)}\theta_1(x,\lambda)\int_a^x\theta_2(t,\lambda)\,f(t)\,d_qt$$

olur ki, bu (3.2.2.2) ve (3.2.2.3) ü ispatlar.

Tersine, direkt hesaplamalarla, $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (3.2.2.2) ifadesi ile verilmesi durumunda, $\phi(x,\lambda)$ (3.2.2.1) denkleminin bir çözümü olur ve (3.2.1.5), (3.2.1.6) sınır koşullarını sağlar.

Şimdi, Green fonksiyonunun tekliğini ispatlamak için

$$\psi(x,\lambda)=\int_0^a \tilde{G}(x,t,\lambda)f(t)d_qt$$

fonksiyonu (3.2.2.1) denkleminin, (3.2.1.5), (3.2.1.6) sınır koşullarını sağlayan bir çözümü olacak biçimde başka bir $\tilde{G}(x,t,\lambda)$ fonksiyonunun varlığı kabul edilsin ve uygunluk için

$$G(x,t,\lambda)=\begin{cases}G_1(x,t,\lambda), & 0\le t\le x\\ G_2(x,t,\lambda), & \mathrm{x}\le t\le a\end{cases}, \qquad \tilde{G}(x,t,\lambda)=\begin{cases}\tilde{G}_1(x,t,\lambda), & 0\le t\le x\\ \tilde{G}_2(x,t,\lambda), & \mathrm{x}\le t\le a\end{cases}$$

alınsın. Buradan, tüm $f(t)\in L_q^2(0,a)$ fonksiyonları ve tüm $x\in\{aq^m : m\in\mathbb{N}_0\}$ elemanları için

$$\int_0^a\left\{G(x,t,\lambda)-\tilde{G}(x,t,\lambda)\right\}f(t)d_qt=0$$

elde edilir. $f(t):=\overline{G(x,t,\lambda)-\tilde{G}(x,t,\lambda)}$ ($x=aq^m$, $m\in\mathbb{N}_0$) alınırsa,

$$\int_0^a\left|G(aq^m,t,\lambda)-\tilde{G}(aq^m,t,\lambda)\right|^2 d_qt=\int_0^{aq^m}\left|G_1(aq^m,t,\lambda)-\tilde{G}_1(aq^m,t,\lambda)\right|^2 d_qt$$
$$+\int_{aq^m}^a\left|G_2(aq^m,t,\lambda)-\tilde{G}_2(aq^m,t,\lambda)\right|^2 d_qt$$

$$=a(1-q)\sum_{n=0}^{\infty}q^n\left|G(aq^m,aq^n,\lambda)-\tilde{G}(aq^m,aq^n,\lambda)\right|^2=0 \qquad (3.2.2.6)$$

bulunur. O halde, (3.2.2.6) dan

$$G(aq^m,aq^n,\lambda)=\tilde{G}(aq^m,aq^n,\lambda) \qquad (m,n\in\mathbb{N}_0)$$

elde edilir. Bu ise tekliğin ispatıdır. Eğer $f(\cdot)$ fonksiyonu sıfır noktasında $q-$ regüler ise, o halde, $A_f\equiv[0,a]$ olur ve (3.2.2.2) ifadesi tüm $x\in[0,a]$ elemanları için tanımlı olur. □

Teorem 3.2.2.2 (3.2.2.3) ifadesi ile tanımlı Green fonksiyonu aşağıdaki özelliklere sahiptir:

i) $G(x,t,\lambda)$, $(0,0)$ noktasında süreklidir.

ii) $G(x,t,\lambda)=G(t,x,\lambda)$ sağlanır.

iii) Sabitlenmiş her $t\in(0,qa]$ için, x in bir fonksiyonu olan $G(x,t,\lambda)$, $(0,t)$ ve $(t,a]$ aralıklarında (3.2.1.4) q -fark denklemini ve (3.2.1.5), (3.2.1.6) sınır koşullarını sağlar.

iv) λ_0, $\Delta(\lambda)$ fonksiyonunun bir sıfırı olsun. O halde; λ_0, $G(x,t,\lambda)$ fonksiyonunun bir basit kutup noktası olur ve bu durumda

$$G(x,t,\lambda)=\frac{-\psi_0(x)\psi_0(t)}{\lambda-\lambda_0}+\tilde{G}(x,t,\lambda)$$

sağlanır. Burada, $\tilde{G}(x,t,\lambda)$ fonksiyonu, λ nın λ_0 komşuluğundaki analitik bir fonksiyon ve $\psi_0(\cdot)$ fonksiyonu ise λ_0 a karşılık gelen normlaştırılmış bir özfonksiyondur.

İspat: i) Sabitlenmiş her $\lambda\in\mathbb{C}$ için $\theta_1(\cdot,\lambda)$ ve $\theta_2(\cdot,\lambda)$ nin sıfırdaki sürekliliğinden görülür.

ii) Doğruluğu kolayca görülebilir.

iii) $t\in(0,qa]$ sabitlenmiş bir sayı olsun. Eğer $x\in[0,t]$ ise o halde,

$$G(x,t,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\theta_1(x,\lambda)\theta_2(x,\lambda)$$

olur. Bu durumda,

$$lG(x,t,\lambda)=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\theta_2(t,\lambda)l\theta_1(x,\lambda)=\frac{\lambda}{\Delta(\lambda)}\theta_2(t,\lambda)\theta_1(x,\lambda)=\lambda G(x,t,\lambda)$$

yazılabilir. Benzer biçimde, eğer $x\in[t,a]$ ise (3.2.1.14) ve (3.2.2.3) den

$$a_{11}G(0,t,\lambda)+a_{11}D_{q^{-1}}G(0,t,\lambda)=\frac{\theta_2(t,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\left\{a_{11}\theta_1(0,\lambda)+a_{12}D_{q^{-1}}\theta_1(0,\lambda)\right\}=0$$

$$a_{21}G(a,t,\lambda)+a_{22}D_{q^{-1}}G(a,t,\lambda)=\frac{\theta_1(t,\lambda)}{\Delta(\lambda)}\left\{a_{21}\theta_1(a,\lambda)+a_{22}D_{q^{-1}}\theta_1(a,\lambda)\right\}=0$$

bulunur.

iv) λ_0, $G(x,t,\lambda)$ fonksiyonunun bir kutup noktası ve $R(x,t)$, $G(x,t,\lambda)$ nın $\lambda=\lambda_0$ daki rezidüsü olsun. (3.2.1.16) ve (3.2.1.18) den

$$R(x,t)=\lim_{\lambda\to\lambda_0}(\lambda-\lambda_0)G(x,t,\lambda)=k_0^{-1}\theta_1(x,\lambda_0)\theta_1(t,\lambda_0)\lim_{\lambda\to\lambda_0}\frac{\lambda-\lambda_0}{\Delta(\lambda)}$$

$$=-\frac{\theta_1(x,\lambda_0)\theta_1(t,\lambda_0)}{\int_0^a|\theta_1(u,\lambda)|^2\,d_qu}=-\psi(x,\lambda_0)\psi_1(t,\lambda_0)$$

elde edilir ve böylece ispat biter. □

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölümde tezde ele alınan problem ve bu problem için elde edilen sonuçlara yer verilmiştir.

4.1 Bir $q-$Kesirli Sınır Değer Problemi

Aşağıdaki $q-$ kesirli sınır değer problemi ele alınsın:

$$\ell(y) := -\frac{1}{q} D_{q^{-1}} D_q y(x) + v(x) y(x) = \lambda r(x) y(x), \quad \left(x \in [0,\pi], \lambda \in \mathbb{C}\right) \tag{4.1.1}$$

$$U_1(y) := \alpha_1 y(0) + \alpha_2 D_{q^{-1}} y(0) = 0, \tag{4.1.2}$$

$$U_2(y) := \beta_1 y(\pi) + \beta_2 D_{q^{-1}} y(\pi) = 0. \tag{4.1.3}$$

Burada, $q \in [0,1)$ sabitlenmiş bir reel sayı, $v(\cdot)$ sıfırda sürekli reel değerli bir fonksiyon, α_i ve β_i ($i = 1,2$) sıfırdan farklı keyfi reel sayılar ve $r(x)$

$$r(x) = \begin{cases} r_1, & 0 \le x < a \\ r_2, & a < x \le \pi \end{cases}$$

biçiminde verilen parçalı sürekli bir fonksiyondur.

$\phi_1(\cdot,\lambda)$ ve $\phi_2(\cdot,\lambda)$ fonksiyonları (4.1.1) denkleminin

$$\phi_1(\cdot,\lambda) = 1, \quad D_q\phi_1(\cdot,\lambda) = 0, \qquad \phi_2(\cdot,\lambda) = 0, \quad D_q\phi_2(\cdot,\lambda) = 1. \tag{4.1.4}$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun ve $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu

$$\Delta(\lambda) := U_1(\phi_1) U_2(\phi_2) - U_1(\phi_2) U_2(\phi_1) \tag{4.1.5}$$

şeklinde tanımlansın. $\Delta(\lambda)$ fonksiyonu λ nın bir tam fonksiyonudur ve bu fonksiyonun sıfırları (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri ile çakışır. Dolayısıyla, (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğerler kümesi sonlu limit noktasına sahip olmayan sayılabilir sayıda elemandan oluşur.

$L^2_{q,r}(0,\pi)$ Hilbert uzayındaki iç çarpım

$$\langle f, g \rangle = \int_0^\pi f(x) \overline{g(x)} r(x) d_q x,$$

ile tanımlansın, burada $f(\cdot), g(\cdot) \in L^2_{q,r}(0,\pi)$ dir.

Aşağıda verilen Lemma, Lemma 3.2.1.1 e benzer biçimde ispatlanabilir.

Lemma 4.1.1 $y(\cdot), z(\cdot) \in L^2_{q,r}(0,\pi)$ fonksiyonları $\left[0, q^{-1}\pi\right]$ aralığında tanımlı olsun. O halde $x \in [0,\pi]$ için

$$D_q y\left(xq^{-1}\right)=D_{q^{-1}}y\left(x\right)=D_{q,xq^{-1}}y\left(xq^{-1}\right),$$

$$\left\langle D_q y,z\right\rangle=y\left(\pi\right)r\left(\pi\right)\overline{z\left(\pi q^{-1}\right)}-\lim_{n\to\infty}y\left(\pi q^{n}\right)r\left(\pi q^{n}\right)\overline{z\left(\pi q^{n-1}\right)}+\left\langle y,-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}z\right\rangle \qquad (4.1.6)$$

$$\left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}y,z\right\rangle=\lim_{n\to\infty}y\left(\pi q^{n-1}\right)r\left(\pi q^{n-1}\right)\overline{z\left(\pi q^{n}\right)}-y\left(\pi q^{-1}\right)r\left(\pi q^{-1}\right)\overline{z\left(\pi\right)}+\left\langle y,D_q z\right\rangle \qquad (4.1.7)$$

Lemma 4.1.2. Keyfi $f\left(\cdot\right),g\left(\cdot\right)\in L^2_{q,r}\left(0,\pi\right)$ fonksiyonları için aşağıdaki q-Lagrange özdeşliği sağlanır:

$$\left\langle lf\left(x\right),g\left(x\right)\right\rangle-\left\langle f\left(x\right),l\,\mathrm{g}\left(x\right)\right\rangle=\left[f,g\right]\left(\pi\right)-\lim_{n\to\infty}\left[f,g\right]\left(\pi q^{n}\right), \qquad (4.1.8)$$

burada

$$\left[f,g\right]\left(x\right):=f\left(x\right)r\left(x\right)\overline{D_{q^{-1}}g\left(x\right)}-D_{q^{-1}}f\left(x\right)r\left(x\right)\overline{g\left(x\right)} \qquad (4.1.9)$$

ile tanımlıdır.

İspat: $\left\langle \ell f\left(x\right),g\left(x\right)\right\rangle-\left\langle f\left(x\right),\ell g\left(x\right)\right\rangle$ farkı aşağıdaki gibi hesaplanabilir:

$$\begin{aligned}\left\langle \ell f\left(x\right),g\left(x\right)\right\rangle-\left\langle f\left(x\right),\ell g\left(x\right)\right\rangle&=\int_0^{\pi}\left(-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q f\left(x\right)+v\left(x\right)f\left(x\right)\right)g\left(x\right)r\left(x\right)d_q x\\&-\int_0^{\pi}f\left(x\right)\left(-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q g\left(x\right)+v\left(x\right)g\left(x\right)\right)r\left(x\right)d_q x\\&=\int_0^{\pi}\left[\left(-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q f\left(x\right)\right)g\left(x\right)-f\left(x\right)\left(-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q g\left(x\right)\right)\right]r\left(x\right)d_q x\\&=\left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q f\left(x\right),g\left(x\right)\right\rangle-\left\langle f\left(x\right),-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q g\left(x\right)\right\rangle.\end{aligned}$$

$y\left(x\right)=D_q f\left(x\right),\quad z=g\left(x\right)$ alınarak (4.1.6) eşitliği yukarıdaki $\left\langle -\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q f\left(x\right),g\left(x\right)\right\rangle$ terimine uygulanırsa

$$\begin{aligned}\left\langle \ell f\left(x\right),g\left(x\right)\right\rangle-\left\langle f\left(x\right),\ell g\left(x\right)\right\rangle&=\lim_{n\to\infty}D_q f\left(\pi q^{n-1}\right)r\left(\pi q^{n-1}\right)\overline{g\left(\pi q^{n}\right)}-D_q f\left(\pi q^{-1}\right)r\left(\pi q^{-1}\right)\overline{g\left(\pi\right)}\\&+\left\langle D_q f\left(x\right),D_q g\left(x\right)\right\rangle-\left\langle f\left(x\right),-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q g\left(x\right)\right\rangle\end{aligned}$$

elde edilir. Benzer biçimde, $y\left(x\right)=f\left(x\right),\ z\left(x\right)=D_q g\left(x\right)$ alınarak (4.1.7) eşitliği yukarıdaki $\left\langle D_q f\left(x\right),D_q g\left(x\right)\right\rangle$ terimine uygulanırsa ve gerekli işlemler yapılırsa

$$\left\langle \ell f\left(x\right),g\left(x\right)\right\rangle-\left\langle f\left(x\right),\ell g\left(x\right)\right\rangle=\left[f,g\right]\left(\pi\right)-\lim_{n\to\infty}\left[f,g\right]\left(\pi q^{n}\right)$$

elde edilir ve böylece ispat biter. □

$A: D_A \to L^2_{q,r}(0,\pi)$ operatörü tüm $y \in D_A$ fonksiyonları için $Ay = ly$ olacak biçimde tanımlansın. Burada, $D_A \subset L^2_{q,r}(0,\pi)$ kümesi $D_q y(\cdot)$ fonksiyonu sıfır noktasında $q-$ regüler ve $D_q^2 y(\cdot) \in L^2_{q,r}(0,\pi)$ olacak biçimdeki kompleks değerli tüm y fonksiyonlarından oluşur. Ayrıca bu y fonksiyonları (4.1.2)-(4.1.3) sınır koşullarını sağlar. Dolayısıyla, A operatörü (4.1.1) q-fark denklemi ve (4.1.2)-(4.1.3) sınır koşulları tarafından oluşturulan bir q-fark operatörüdür.

Teorem 4.1.1 A operatörü simetriktir.

İspat: A operatörünün simetrikliğini göstermek için (4.1.8) eşitliğinin sağ tarafının sıfıra eşit olduğu gösterilmelidir. Bunun için, $f(\cdot), g(\cdot) \in C_q^2(0)$ fonksiyonlarının (4.1.2)-(4.1.3) sınır koşullarını sağladığı varsayılsın:

$$\alpha_1 f(0) + \alpha_2 D_{q^{-1}} f(0) = 0,$$

$$\alpha_1 g(0) + \alpha_2 D_{q^{-1}} g(0) = 0.$$

$f(\cdot)$ ve $g(\cdot)$ fonksiyonlarının sıfır noktasındaki süreklilikleri $\lim\limits_{n\to\infty}[f,g](\pi q^n) = [f,g](0)$ olmasını gerektirir. Bu durumda (4.1.8) eşitliği

$$\langle \ell f(x), g(x)\rangle - \langle f(x), \ell g(x)\rangle = [f,g](\pi) - [f,g](0)$$

halini alır. (4.1.2)-(4.1.3) sınır koşullarından ve (4.1.10) ifadesinden $[f,g](0) = 0$ ve $[f,g](\pi) = 0$ bulunur. Böylece ispat biter. □

4.2 Özdeğer ve Özfonksiyon Özellikleri

Tanım 4.2.1. (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir $\phi^*(\cdot)$ çözümü bulunabilecek biçimdeki λ^* kompleks sayısına (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin bir özdeğeri denir. Bu durumda, $\phi^*(\cdot)$ fonksiyonu (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin λ^* özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonu olur

Lemma 4.2.1: (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri reeldir.

İspat: λ_0 (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin bir özdeğeri ve $f_0(\cdot)$ bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyon olsun. O halde, Teorem 4.1.1 den,

$$\langle \ell f_0(x), f_0(x)\rangle = \langle f_0(x), \ell f_0(x)\rangle$$

yazılabilir. $\ell f_0 = \lambda_0 r f_0$ olduğundan

$$\langle \ell f_0(x), f_0(x)\rangle - \langle f_0(x), \ell f_0(x)\rangle = \left(\lambda - \overline{\lambda_0}\right)\int_0^\pi r(x)\left|f_0(x)\right|^2 d_q x = 0$$

sağlanır. $f_0(\cdot)$ fonksiyonu, (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin bir özfonksiyonu olduğundan $\lambda_0 = \overline{\lambda_0}$ bulunur ve böylece ispat biter. □

Lemma 4.2.2. (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin farklı özdeğerlerine karşılık gelen özfonksiyonları diktir.

İspat: λ ve μ sayıları, (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin birbirinden farklı iki özdeğeri ve $f(\cdot)$ ve $g(\cdot)$ sırasıyla bu özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. O halde, Lemma 4.2.1 den

$$(\lambda-\mu)\int_0^{\pi} f(x)g(x)r(x)d_qx = 0$$

eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür. $\lambda \neq \mu$ olduğundan $\langle f, g\rangle = 0$ elde edilir ve böylece ispat biter. □

Aşağıdaki lemmaya geçmeden önce, bir özdeğerin tekrarlanma sayısından, o özdeğere karşılık gelen lineer bağımsız çözümlerin sayısının anlaşılması gerektiği bilgisini vermek yararlı olacaktır.

Lemma 4.2.3 (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin tüm özdeğerleri basittir.

İspat. λ_0 ,(4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin bir özdeğeri ve $f_1(\cdot)$ ve $f_2(\cdot)$ fonksiyonları bu özdeğere karşılık gelen özfonksiyonlar olsun. $f_1(\cdot)$ ve $f_2(\cdot)$ fonksiyonlarının $q-$ Wronskiyeninin sıfıra eşit olduğu kolayca görülür. Gerçekten,

$$W_q(f_1, f_2)(0) = f_1(0)D_qf_2(0) - f_2(0)D_qf_1(0) = f_1(0)D_{q^{-1}}f_2(0) - f_2(0)D_{q^{-1}}f_1(0)$$
$$= [f_1, f_2](0) = 0$$

sağlanır. Sonuç 3.1.4.3 yardımıyla, bu eşitliğin $f_1(\cdot)$ ve $f_2(\cdot)$ fonksiyonlarının lineer bağımlı olması gerektiği sonucunu verdiği söylenebilir. Böylece ispat biter. □

Lemma 4.2.3 te, (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin geometrik olarak basit olduğu ispatlanmıştır. Aşağıdaki teorem, (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğerlerinin aynı zamanda cebirsel olarak da basit olduğunu gösterecektir.

Teorem 4.2.1 (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin özdeğerleri $\Delta(\lambda)$ fonksiyonun basit sıfırlarıdır.

İspat: Aşağıdaki biçimde tanımlanan $\theta_1(\cdot,\lambda)$ ve $\theta_2(\cdot,\lambda)$ fonksiyonları ele alınsın:

$$\begin{cases} \theta_1(x,\lambda) := U_1(\phi_2)\phi_1(x,\lambda) - U_1(\phi_1)\phi_2(x,\lambda), \\ \theta_2(x,\lambda) := U_2(\phi_2)\phi_1(x,\lambda) - U_2(\phi_1)\phi_2(x,\lambda). \end{cases} \tag{4.2.1}$$

$\theta_1(\cdot,\lambda)$ ve $\theta_2(\cdot,\lambda)$ fonksiyonlarının (4.1.1) denkleminin (4.1.2), (4.1.3) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olduğu kolayca gösterilebilir:

$$\theta_1(0,\lambda)=\alpha_2,\ D_{q^{-1}}\theta_1(0,\lambda)=-\alpha_1,\ \theta_2(\pi,\lambda)=\beta_2,\ D_{q^{-1}}\theta_1(0,\lambda)=-\beta_1. \qquad (4.2.2)$$

(4.1.4), (4.1.5) ve (4.2.1) ifadeleri yardımıyla,

$$W_q\left(\theta_1(\cdot,\lambda),\theta_2(\cdot,\lambda)\right)(x)=\Delta(\lambda)W_q\left(\phi_1(\cdot,\lambda),\phi_2(\cdot,\lambda)\right)(x)=\Delta(\lambda)$$

elde edilir.

Şimdi λ_0 sayısının, (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin bir özdeğeri olduğu kabul edilsin. Bu durumda λ_0 bir reel sayı olur ve dolayısıyla $\theta_i(x,\lambda_0),(i=1,2)$ reel değerli bir fonksiyon olarak alınabilir. $\theta_1(x,\lambda_0)$ ve $\theta_2(x,\lambda_0)$ fonksiyonlarının (4.1.1)-(4.1.3) sınır değer probleminin lineer bağımlı özfonksiyonları olduğu açıktır.

Yani;

$$\theta_1(x,\lambda_0)=k_0\theta_2(x,\lambda_0) \qquad (4.2.3)$$

olacak şekilde sıfırdan farklı bir k_0 sabit sayısı vardır. (4.2.2) ve (4.2.3) den

$$\theta_1(\pi,\lambda_0)=k_0\beta_2=k_0\theta_2(\pi,\lambda),D_{q^{-1}}\theta_1(\pi,\lambda_0)=k_0D_{q^{-1}}\theta_2(\pi,\lambda)=-k_0\beta_1$$

yazılabilir. (4.1.8) $q-$Lagrange özdeşliğinde

$$f(x)=\theta_1(x,\lambda) \text{ ve } g(x)=\theta_1(x,\lambda_0)$$

alınırsa,

$$(\lambda-\lambda_0)\int_0^{\pi}\theta_1(x,\lambda)\theta_1(x,\lambda_0)r(x)d_qx=\left[\theta_1(\cdot,\lambda),\theta_1(\cdot,\lambda_0)\right](\pi)=k_0\left[\theta_1(\cdot,\lambda),\theta_2(\cdot,\lambda_0)\right]$$

$$=k_0W_q\left(\theta_1(\cdot,\lambda),\theta_2(\cdot,\lambda)\right)\left(q^{-1}\pi\right)=k_0\Delta(\lambda)$$

bulunur.

$\Delta(\lambda)$ fonksiyonu, λ nın bir tam fonksiyonu olduğundan

$$\frac{d}{d\lambda}\Delta(\lambda):=\lim_{n\to\infty}\frac{\Delta(\lambda)}{\lambda-\lambda_0}=\frac{1}{k_0}\int_0^{\pi}\theta_1^2(x,\lambda_0)r(x)d_qx\neq 0$$

elde edilir. Dolayısıyla, λ_0 $\Delta(\lambda)$ nın bir basit sıfırı olur ve böylece ispat biter.□

4.3. Green Fonksiyonu

Aşağıdaki sınır değer problemi ele alınsın:

$$-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_qy(x)+v(x)y(x)=\lambda r(x)y(x)+f(x)r(x),\ \left(x\in[0,\pi],\lambda\in\mathbb{C}\right), \qquad (4.3.1)$$

$$\alpha_1y(0)+\alpha_2D_{q^{-1}}y(0)=0, \qquad (4.3.2)$$

$$\beta_1 y(\pi)+\beta_2 D_{q^{-1}} y(\pi)=0 \tag{4.3.3}$$

burada $f(\cdot)\in L^2_{q,r}(0,\pi)$ dir.

Eğer λ, (4.3.1)-(4.3.3) homojen olmayan sınır değer probleminin bir özdeğeri değilse, o halde bu problemin tek bir çözümü vardır. Gerçekten, homojen olmayan sınır değer probleminin iki çözümünün farkının homojen sınır değer probleminin bir özfonksiyonu olduğu ve bu farkın özdeş olarak sıfıra eşit olması gerektiği açıktır.

Teorem 4.3.1 λ nın (4.3.1)-(4.3.3) sınır değer probleminin bir özdeğeri olmadığı kabul edilsin. O halde, (4.3.1)-(4.3.2) sınır değer probleminin çözümü

$$\phi(x,\lambda)=\int_0^\pi G(x,t;\lambda) f(t) r(t) d_q t \tag{4.3.4}$$

biçiminde verilebilir. Burada, $G(x,t;\lambda)$ fonksiyonu

$$G(x,t;\lambda):=\frac{1}{\Delta(\lambda)}\begin{cases}\theta_2(x,\lambda)\theta_1(t,\lambda), & t\le x,\\ \theta_1(x,\lambda)\theta_2(t,\lambda), & x\le t\end{cases}$$

biçiminde tanımlı Green fonksiyonudur. Tersine, (4.3.4) ile tanımlı $\phi(\cdot,\lambda)$ fonksiyonu (4.3.1)-denklemini ve (4.3.2), (4.3.3) sınır koşullarını sağlar. Eğer, $f(x)$ fonksiyonu sıfır noktasında q-regüler bir fonksiyon ise o halde (4.3.4) ifadesi tüm $x\in[0,\pi]$ elemanları için sağlanır.

İspat: Sabitlerin değişimi yönteminin $q-$benzeri kullanılarak, (4.3.1)-(4.3.3) sınır değer probleminin çözümü aşağıdaki biçimde aranır:

$$\phi(x,\lambda)=c_1(x)\theta_1(x,\lambda)+c_2(x)\theta_2(x,\lambda).$$

Burada, $c_1(x)$ ve $c_2(x)$ fonksiyonları

$$\begin{cases} D_{q,x}c_1(x)=-\dfrac{q}{\Delta(\lambda)}\theta_2(qx,\lambda) f(qx) r(qx)\\ D_{q,x}c_2(x)=\dfrac{q}{\Delta(\lambda)}\theta_1(qx,\lambda) f(qx) r(qx)\end{cases} \tag{4.3.5}$$

q-fark denklemlerinin çözümleridir. $D_{q,x}c_1(x)$ ve $D_{q,x}c_2(x)$ fonksiyonları $[0,t]$ aralığında q-integrallenebilir fonksiyonlarsa o halde

$$\lim_{n\to\infty} tq^n\theta_i\left(tq^{n+1},\lambda\right) f\left(tq^{n+1}\right)=0 \qquad (i=1,2)$$

sağlanır. $f\in L^2_{q,r}(0,\pi)$ olduğundan

$$S_f:=\left\{x\in[0,\pi];\lim_{n\to\infty} xq^n r(xq^n)\left|f(xq^n)\right|^2=0\right\}$$

kümesi $\{\pi q^m; m \in \mathbb{N}_0\}$ elemanlarını içeren q-geometrik bir küme olur. Dolayısıyla, $D_q c_1(x)$ ve $D_q c_2(x)$ fonksiyonları tüm $x \in S_f$ elemanları için $[0,x]$ aralığında q-integrallenebilir fonksiyonlardır. $x \in S_f$ ve $\tilde{c}_1$ ve $\tilde{c}_2$ keyfi sabitler olmak üzere, (4.3.5) denklemlerinin çözümleri sırasıyla

$$c_1(x) = \tilde{c}_1 + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^x \theta_2(qt,\lambda) f(qt) r(qt) d_q t$$

ve

$$c_2(x) = \tilde{c}_2 + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_x^\pi \theta_1(qt,\lambda) f(qt) r(qt) d_q t$$

biçiminde verilir. O halde, $x \in S_f$ olmak üzere (4.3.1) denkleminin genel çözümü

$$\phi(x,\lambda) = \tilde{c}_1 \theta_1(x,\lambda) + \tilde{c}_2 \theta_2(x,\lambda) + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_1(x,\lambda) \int_0^x \theta_2(qt,\lambda) f(qt) r(qt) d_q t$$

$$+ \frac{q}{\Delta(\lambda)} \theta_2(x,\lambda) \int_x^\pi \theta_1(qt,\lambda) f(qt) r(qt) d_q t \tag{4.3.6}$$

eşitliği ile verilebilir. $\tilde{c}_1$ ve $\tilde{c}_2$ sabitleri (4.3.2) ve (4.3.3) sınır koşulları kullanılarak belirlenebilir. Gerçekten,

$$\phi(0,\lambda) = \tilde{c}_1 \theta_1(0,\lambda) + \left(\tilde{c}_2 + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_x^\pi \theta_1(qt,\lambda) f(qt) r(qt) d_q t \right) \theta_2(0,\lambda),$$

$$D_{q^{-1}} \phi(0,\lambda) = \tilde{c}_1 D_{q^{-1}} \theta_1(0,\lambda) + \left(\tilde{c}_2 + \frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_x^\pi \theta_1(qt,\lambda) f(qt) r(qt) d_q t \right) D_{q^{-1}} \theta_2(0,\lambda)$$

alınırsa (4.3.2) sınır koşulundan

$$\tilde{c}_2 = -\frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \theta_1(qt,\lambda) f(qt) r(qt) d_q t$$

elde edilir. Benzer biçimde, (4.3.3) sınır koşulu kullanılarak,

$$\tilde{c}_1 = -\frac{q}{\Delta(\lambda)} \int_0^\pi \theta_2(qt,\lambda) f(qt) r(qt) d_q t$$

bulunur. Bu ifadeler (4.3.6) da yerlerine yazılarak, (4.3.4) ifadesine ulaşılır.

Tersine, direkt hesaplamalarda, (4.3.4) ifadesi ile verilen $\phi(x,\lambda)$ fonksiyonunun (4.3.1)-(4.3.3) sınır değer probleminin bir çözümü olduğu kolayca görülebilir. Eğer, $f(x)$ $x=0$ noktasında q-regüler bir fonksiyon ise o halde $S_f \equiv [0,\pi]$ olur ve (4.3.4) tüm $x \in [0,\pi]$ elamanları için sağlanır. □

Teorem 4.3.2 (4.3.1)-(4.3.2) sınır değer probleminin Green fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

$i)$ $G(x,t;\lambda)$ fonksiyonu $(0,0)$ noktasında süreklidir.

$ii)$ $G(x,t;\lambda)=G(t,x;\lambda)$ sağlanır.

$iii)$ Sabitlenmiş her $t\in[0,q\pi]$ için, $G(x,t;\lambda)$ fonksiyonu $[0,t)$ ve $(t,\pi]$ aralıklarında (4.3.1) q -fark denklemini ve (4.3.2)-(4.3.3) sınır koşullarını sağlar.

İspat: Teorem 3.2.2.2 ye benzer biçimde yapılabilir. □

4.4. Örnekler

Örnek 4.4.1. Aşağıda verilen $q-$ kesirli sınır değer problemi ele alınsın:

$$-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x)=\lambda y(x), \tag{4.4.1}$$

$$U_1(y):=y(0)=0, \tag{4.4.2}$$

$$U_2(y)=y(\pi)=0. \tag{4.4.3}$$

$\phi_1(x,\lambda)=\cos\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)$ ve $\phi_2(x,\lambda)=\dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)}{\sqrt{\lambda}}$ ile verilen $\phi_1(\cdot,\lambda)$ ve $\phi_2(\cdot,\lambda)$ fonksiyonları (4.4.1) denkleminin

$$\phi_1(0,\lambda)=1,\quad D_q\phi_1(0,\lambda)=0,\qquad \phi_2(0,\lambda)=0\quad D_q\phi_2(0,\lambda)=1$$

başlangıç koşullarını sağlayan çözümleri olsun.

(4.4.1)-(4.4.3) $q-$ kesirli sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu $\Delta(\lambda)$

$$\Delta(\lambda):=U_1(\phi_1)U_2(\phi_2)-U_1(\phi_2)U_2(\phi_1)=\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)}{\sqrt{\lambda}}$$

biçiminde verilebilir.

$$\theta_1(x,\lambda):=U_1(\phi_2)\phi_1(x,\lambda)-U_1(\phi_1)\phi_2(x,\lambda),$$

$$\theta_2(x,\lambda):=U_2(\phi_2)\phi_1(x,\lambda)-U_2(\phi_1)\phi_2(x,\lambda)$$

ile tanımlanan $\theta_1(x,\lambda)=\dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x,q\right)}{\sqrt{\lambda}}$ ve

$\theta_2(x,\lambda)=\dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)}{\sqrt{\lambda}}\cos\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)-\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)\dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)}{\sqrt{\lambda}}$ fonksiyonları göz önüne alınırsa, bu fonksiyonların (4.4.1) denkleminin (4.4.2), (4.4.3) sınır koşullarını sağlayan çözümleri olduğu gösterilebilir.

Eğer λ bir özdeğer değilse, (4.4.1)-(4.4.3) $q-$ kesirli sınır değer probleminin Green fonksiyonu $0\le t\le x$ için

$$G(x,t,\lambda)=\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t;q\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)}{\sqrt{\lambda}}\cos\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)-\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

ve $x\le t\le \pi$ için

$$G(x,t,\lambda)=\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)}\left(\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)}{\sqrt{\lambda}}\cos\left(\sqrt{\lambda}t;q\right)-\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)\frac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t;q\right)}{\sqrt{\lambda}}\right)$$

ifadeleri ile verilebilir.

Örnek 4.4.2. Aşağıda verilen $q-$ kesirli sınır değer problemi ele alınsın:

$$-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x)=\lambda y(x), \tag{4.4.4}$$

$$U_1(y):=D_{q^{-1}}y(0)=0, \tag{4.4.5}$$

$$U_2(y):=D_{q^{-1}}y(\pi)=0. \tag{4.4.6}$$

Bu durumda, $\theta_1(x,\lambda)$ ve $\theta_2(x,\lambda)$ fonksiyonları sırasıyla $\theta_1(x,\lambda)=\cos\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)$ ve $\theta_2(x,\lambda)=\cos\left(\sqrt{\lambda}q^{-1/2}\pi;q\right)\cos\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)+\sqrt{q}\sin\left(\sqrt{\lambda}q^{-1/2}\pi;q\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)$ ifadeleri ile verilebilir. (4.4.4)-(4.4.6) $q-$ kesirli sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu $\Delta(\lambda)=\sqrt{q\lambda}\sin\left(\sqrt{\lambda}q^{-1/2}\pi;q\right)$ ifadesi ile tanımlıdır.

Eğer λ bir özdeğer değilse, (4.4.4)-(4.4.6) $q-$ kesirli sınır değer probleminin Green fonksiyonu $0\le t\le x$ için

$$G(x,t,\lambda)=\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}t;q\right)}{\sqrt{q\lambda}}\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}q^{-1/2}\pi;q\right)\cos\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)+\sqrt{q}\sin\left(\sqrt{\lambda}q^{-1/2}\pi;q\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)\right)$$

ve $x\le t\le \pi$ için

$$G(x,t,\lambda)=\frac{\cos\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)}{\sqrt{q\lambda}}\left(\cos\left(\sqrt{\lambda}q^{-1/2}\pi;q\right)\cos\left(\sqrt{\lambda}t;q\right)+\sqrt{q}\sin\left(\sqrt{\lambda}q^{-1/2}\pi;q\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}t;q\right)\right)$$

ifadeleri ile verilebilir.

Örnek 4.4.3 Aşağıdaki $q-$ kesirli sınır değer problemi ele alınsın:

$$-\frac{1}{q}D_{q^{-1}}D_q y(x)=\lambda y(x), \tag{4.4.7}$$

$$U_1(y)=y(0)+D_{q^{-1}}y(0)=0, \tag{4.4.8}$$

$$U_2(y)=y(\pi)=0. \tag{4.4.9}$$

Bu problem için, $\theta_1(x,\lambda)$ ve $\theta_2(x,\lambda)$ fonksiyonları sırasıyla

$\theta_1(x,\lambda)=\cos\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)-\dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)}{\sqrt{\lambda}\pi}$ ve

$\theta_2(x,\lambda)=\dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)}{\sqrt{\lambda}}\cos\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)-\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)$ ifadeleri ile verilebilir. (4.4.7)-(4.4.9) $q-$ kesirli sınır değer probleminin karakteristik fonksiyonu

$\Delta(\lambda)=\dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)}{\sqrt{\lambda}}-\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)$ biçimindedir.

Eğer λ bir özdeğer değilse, (4.4.7)-(4.4.9) $q-$ kesirli sınır değer probleminin Green fonksiyonu $0\le t\le x$ için

$$G(x,t,\lambda)=\frac{\left(\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)\cos\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)-\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)\right)\left(\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}t;q\right)-\dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}t;q\right)}{\pi}\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)-\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)}$$

ve $x\le t\le\pi$ için

$$G(x,t,\lambda)=\frac{\left(\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)\cos\left(\sqrt{\lambda}t;q\right)-\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)\sin\left(\sqrt{\lambda}t;q\right)\right)\left(\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)-\dfrac{\sin\left(\sqrt{\lambda}x;q\right)}{\pi}\right)}{\sin\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)-\sqrt{\lambda}\cos\left(\sqrt{\lambda}\pi;q\right)}$$

ifadeleri ile verilebilir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Tezde süreksiz katsayılı bir $q-$ kesirli Sturm-Liouville operatörü ve sınır koşulları ile oluşturulmuş bir $q-$ kesirli Sturm-Liouville sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu sınır değer problemine uygun Hilbert uzayında iç çarpım tanımlanmış ve sınır değer probleminin bazı spektral özellikleri incelenmiştir. Ayrıca ele alınan sınır değer problemine uygun Green fonksiyonu inşa edilmiş ve bu fonksiyonun özellikleri verilmiştir.

5.2 Öneriler

Değişik sınır değer koşullarıyla elde edilen ikinci mertebeden parçalı sürekli katsayılı $q-$ kesirli sınır değer problemlerinin spektral özellikleri incelenerek literatüre katkı sağlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Amrein,W. O. ;Hinz, A. M. ; Pearson, D. P. ,*Sturm-Liouville Theory; Past and Present,* Basel: Birkhauser, (2005).

[2] Zettl, A. , Sturm-Liouville theory*. American Mathematical Society* **2010**, Vol. 121.

[3] Annaby, M. H. ; Mansour, Z. S. , Basic Sturm-Liouville problems*. J. Phys. A: Math* **2005**, Gen. 38, 3775-3797

[4]Annaby, M. H. ;Mansour, Z. S. , *q -Fractional Calculus and Equations,* Springer, (2012)

[5] Abreu, L. Sampling theory associated with q -difference equations of the Sturm-Liouville type. *J. Phys. A* **2005**, 38(48), 10311-10319.

[6]Annaby. M. ; Bustoz, J. ; İsmail, M. , On sampling theory and basic Sturm-Liouville systems. *J. Comput. Appl. Math.* **2007**, 206, 73-85.

[7]Al-Towailb, M. A. , A q -fractional approach to the regular Sturm-Liouville problems, *Electronic Journal of Differential Equations* **2017**, 2017(88), 1-13.

[8] Mansour, Z. S. , On fractional q -Sturm-Liouville problems. *J.Fixed Point Theory Appl.* **2017,** 19, 1591-1612.

[9] Allahverdiev, B.P ; Tuna, H. , An expansion theorem for q -Sturm-Liouville operators on the whole line. Turkısh *Journal of Mathematics* **2018** ,42(3),doı: 10.3906/mat-1705-22, 1060-1071.

[10] Adıvar, M. ; Bohner, M. , Spectral analysis of q-difference equations with spectral singularities. *Mathematical and Computer Modelling* **2006** , 43(7-8), 695-703.

[11] Bohner, M. ; Hudson, T. , Euler-type boundary value problems in quantum calculus. *Internetional Journal of Applied Mathematics and Statics* **2017(June)**, 9(J07),19-23.

[12] Eryılmaz, A.,Spectral analysis of a q -Sturm-Liouville problem with spectral parameter in the boundary conditions. *Journal of Function Spaces and Applications* **2012**, Volume 2012, Article id 736437, 17 pages.

[13] Jackson, F. H., On $q-$ functions and a certain difference operator. *Trans. Roy. Soc. Edinb.* **1908,** 46, 64-72.

[14] Kac, V., Cheung P., *Quantum Calculus*, Springer, New York, (2002)

[15] Bromwich, T. J. I'A., *An Introduction to the Theory of Infinite Series*, 1st. Edition, Macmillan, London, (1908)

[16] Hahn, W., Beitrage zur theorie der heineschen reihen (German), *Math. Nachr.***1949,** 2, 340-379.

[17] Matsuo, A. Jackson integrals of Jordan-Pochhammer type and quantum Knizhnik-Zamolodchikov equations. *Comm. Math. Phys.* **1993**, 151(2), 263-273.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı **:**İlknur AYDIN

Doğum Tarihi **:**23.10.1995

E-mail **:** aydnilknur95 @gmail.com

Öğrenim Durumu **:**

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2013-2017
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2017-2019

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

Makale:
1.Çetinkaya, F. A. ; Aydın, İ. **,**Spectral properties of a $q-$ boundary value problem with piecewise-continuous coefficient. *Palestine Journal of Mathematics* **2019**, 8(1), 390-396.
Bildiri:
1. Çetinkaya, F. A. ; Aydın, İ. , Spectral properties of a $q-$ fractional boundary value problem, *International Conference on Pure and Applied Mathematics* ICPAM-VAN 2018,Van 11-13 Eylül 2018, pp. 65