DOĞAL SAYI KÜMELERİ İÇİN SONSUZLUKTA ÜST POROSITY VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

MAYA ALTINOK

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

MERSİN
MART- 2019

DOĞAL SAYI KÜMELERİ İÇİN SONSUZLUKTA ÜST POROSITY VE UYGULAMALARI

DOKTORA TEZİ

MAYA ALTINOK

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Danışman
Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN

MERSİN
MART - 2019

ONAY

Maya ALTINOK tarafından Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN danışmanlığında hazırlanan "Doğal Sayı Kümeleri için Sonsuzlukta Üst Porosity ve Uygulamaları" başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 22 Mart 2019 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği ile Doktora tezi olarak kabul edilmiştir.

Görevi	Ünvanı, Adı ve Soyadı	İmza
Başkan	Prof. Dr. Mikail ET	....
Üye	Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM	....
Üye	Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN	....
Üye	Doç. Dr. Tuncay TUNÇ	....
Üye	Doç. Dr. Uğur DEĞER	....

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 26/04/2019 tarih ve 2019.18/459 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cahit BİLİM
Enstitü Müdürü

Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

22/04/2019

İmza / Signature

Maya ALTINOK

ÖZET

DOĞAL SAYI KÜMELERİ İÇİN SONSUZLUKTA ÜST POROSITY VE UYGULAMALARI

Yakınsaklık Matematiksel Analizin en temel problemlerinden birisidir. Bu çalışmada, reel sayıların alt kümeleri için bilinen herhangi bir noktada porosity kavramı kullanılarak doğal sayıların alt kümeleri için sonsuzlukta porosity kavramı tanımlanmıştır. Tanımlanan yeni kavramdan faydalanılarak reel değerli diziler için porosity yakınsaklık tanımlanmış ve klasik yakınsaklık ile ilişkisi incelenmiştir. Ayrıca reel değerli diziler için porosity limit supremum-infimum, porosity yığılma, porosity limit noktası tanımlanmış ve porosity yakınsaklık ile aralarındaki ilişki incelenmiştir.

Anahtar Kelimeler: Porosity, Yakınsaklık, Reel değerli diziler.

Danışman: Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

UPPER POROSITY FOR SETS OF NATURAL NUMBERS AT INFINITY AND ITS APPLICATIONS

Convergence is one of the most fundamental problem of Mathematical Analysis. In this study, the notion of porosity at infinity for subsets of natural numbers was defined by using the notion of porosity at a point for subsets of real numbers. Porosity convergence for real valued sequences was defined by using this new notion and the relation between clasical convergence was investigated. Furthermore, porosity limit supremum-infimum, porosity cluster point and porosity limit point was defined for real valued sequences and the relation between porosity convergence and these notions was investigated.

Keywords: Porosity, Convergence, Real valued sequences.

Advisor: Professor Mehmet KÜÇÜKASLAN, Department of Mathematics, University of Mersin, Mersin.

TEŞEKKÜR

Doktora eğitimim boyunca değerli yardım ve katkılarıyla beni yönlendiren, çalışma motivasyonumuzu sürekli yüksek tutan, her türlü haksızlığa karşı çıkan, çalışkanlığı, fedakârlığı, duyarlılığı değer bilen herkes tarafından takdir edilen saygıdeğer danışman hocam Prof. Dr. Mehmet KÜÇÜKASLAN'a tüm kalbi duygularımla teşekkür ederim.

2014 yılında TUBITAK 2221-Konuk veya Akademik İzinli (Sabbatical) Bilim İnsanı Destekleme Programı kapsamında ülkemize gelen ve bu tez çalışmasındaki ana fikrin ortaya çıkmasında katkı sağlayan Prof. Oleksiy DOVGOSHEY'e, Tez İzleme Komitesinde olan ve bana zaman ayıran değerli hocalarım Prof. Dr. Mikail ET'e ve Prof. Dr. Hüseyin YILDIRIM'a, Tez Sınav Jürisinde yer alan, tezimi sabırla okuyarak bana fikirleri ile yardımcı olan hocalarım Doç. Dr. Tuncay TUNÇ'a ve Doç. Dr. Uğur DEĞER'e teşekkürü bir borç bilirim.

Ayrıca manevi desteklerini benden esirgemeyen eşim Mesut ALTINOK'a, oğlum Yusuf Deha ALTINOK'a ve aileme teşekkür ederim.

2211-Yurt İçi Doktora Burs Programı kapsamında sağladığı destekten ötürü TÜBİTAK Bilim İnsanı Destekleme Daire Başkanlığı birimine teşekkür ederim.

"2016-2-TP3-1921" numaralı tez çalışmamın maddi kısmında desteklerini esirgemeyen Mersin Üniversitesi BAP birimine teşekkür ederim.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	**Tanım**
$\mathbb{R}$	Reel sayılar
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar
$x=(x_n)$	Reel değerli dizi
μ	Salınım fonksiyonu
$(\overline{p}_\mu)$	Porosity yakınsaklık
$(s-\overline{p}_\mu)$	Kuvvetli porosity yakınsaklık
$c_\mu(x)$	Porosity yakınsak diziler uzayı
$c_\mu^s(x)$	Kuvvetli porosity yakınsak diziler uzayı
$B_\mu(x)$	Porosity sınırlı diziler uzayı
$C_\mu(x)$	Porosity Cauchy dizileri uzayı
$L_{\overline{p}_\mu}(x)$	Porosity alt sınırlar kümesi
$U_{\overline{p}_\mu}(x)$	Porosity üst sınırlar kümesi
$\inf_{\overline{p}_\mu} x_n$	Porosity infimum
$\sup_{\overline{p}_\mu} x_n$	Porosity supremum
$L(x)$	Limit noktaları kümesi
$l_{\overline{p}_\mu}(x)$	Porosity limit noktaları kümesi
$\Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$	Porosity yığılma noktaları kümesi
$\blacksquare$	İspat sonu

1. GİRİŞ

Yakınsaklık kavramı Matematiksel Analizin en temel problemlerinden birisidir. Literatürde klasik yakınsaklık kavramının yanı sıra farklı kavramlar kullanılarak klasik yakınsaklıktan daha genel pek çok yakınsaklık tanımlanmıştır. Bunlardan bazıları ölçüsel yakınsaklık, istatistiksel yakınsaklık, A-istatistiksel yakınsaklık v.b.

Reel değerli bir $x=(x_n)$ dizisi ele alınsın ve $l\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer,

$$\text{"}\forall\varepsilon>0 \text{ için } \exists n_0\equiv n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N} \text{ vardır öyle ki } \forall n\geq n_0 \text{ için } |x_n-l|<\varepsilon\text{"} \tag{1.1}$$

ise (x_n) dizisi l sayısına yakınsaktır denir. Bu yakınsaklık tanımı klasik (veya Cauchy anlamda) yakınsaklık olarak bilinir.

Leonard Euler (1707-1783) e kadar yakınsaklık kavramı ile ilgili yapılan çalışmalar Cauchy anlamda yakınsaklık ile sınırlı kalmıştır. Ancak günümüzde, Cauchy anlamda yakınsak olan dizilerin kümesinin farklı anlamlarda genişletilmesi yaygın incelenen problemlerden birisidir.

Pozitif tam sayılarda doğal yoğunluk kavramı kullanılarak Cauchy anlamda yakınsaklıktan daha genel olan istatistiksel yakınsaklık kavramı 1951 yılında birbirinden bağımsız olarak Fast [1] ve Steinhaus [2] tarafından verilmiştir.

$\wp(\mathbb{N})$ doğal sayıların kuvvet kümesi olmak üzere, $\delta:\wp(\mathbb{N})\to[0,1]$ dönüşümü $K\subset\mathbb{N}$ olmak üzere eğer aşağıdaki limit varsa

$$\delta(K):=\lim_{n\to\infty}\frac{|K(n)|}{n} \tag{1.2}$$

biçiminde tanımlanır. Burada $|K(n)|$ ile $K(n)=\{k:k\leq n,k\in K\}$ kümesinin eleman sayısı gösterilmektedir. $\delta(K)$ sayısına K kümesinin asimptotik (veya doğal) yoğunluğu denir.

$x=(x_n)$ reel değerli dizisinin $l\in\mathbb{R}$ sayısına istatistiksel yakınsaklığı (1.2) de verilen doğal yoğunluk kavramı kullanılarak aşağıdaki biçimde tanımlanmıştır: Her $\varepsilon>0$ için

$K(\varepsilon)=\{k:|x_k-l|\geq\varepsilon\}$ olmak üzere

$$\delta(K(\varepsilon))=0 \tag{1.3}$$

ise (x_n) dizisine $l\in\mathbb{R}$ sayısına "istatistiksel yakınsaktır" denir ve $x_n\to l(st)$ biçiminde gösterilir.

Doğal sayıların sonlu her alt kümesinin doğal yoğunluğu sıfır olduğundan (1.3) de verilen koşul (1.1) de verilenden daha geneldir. Yani (1.1) koşulunu sağlayan her dizi (1.3) koşulunu da sağlar. Buradan anlaşılır ki yakınsak her dizi aynı zamanda istatistiksel yakınsaktır.

Ancak istatistiksel yakınsak öyle diziler vardır ki onlar klasik anlamda yakınsak değildir.

Örneğin; $\wp$ asal sayıların kümesi olmak üzere $x=(x_n)$ dizisi,

$$x_n = \begin{cases} 1, & n \in \wp, \\ 0, & n \notin \wp, \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. Her $\varepsilon > 0$ için

$$K(n,\varepsilon) = \{k : k \le n, |x_k - 0| \ge \varepsilon\} = \wp(n)$$

olduğundan açıktır ki $|K(n,\varepsilon)| \le \log(n)$ olur ve

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|K(n,\varepsilon)|}{n} \le \lim_{n\to\infty} \frac{\log(n)}{n} = 0$$

bulunur. Dolayısı ile $x_n \to 0(st)$ elde edilir. Ancak, (1.1) sağlanacak biçimde $n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ bulunamayacağından dizi yakınsak değildir.

Günümüze kadar doğal yoğunluk kavramının farklı genellemeleri kullanılarak klasik yakınsaklığın pek çok genellemesi yapılmıştır [3, 9].

Bu çalışmada, pozitif reel sayıların herhangi bir alt kümesinin porosity sayıları ile bu kümenin pretanjant uzayının arasındaki ilişki kurulacaktır. Daha sonra, pozitif reel sayıların alt kümeleri için 0 daki sağ üst porosity kavramı kullanılarak doğal sayıların alt kümeleri için sonsuzlukta üst porosity kavramı tanımlanacak ve (1.1) deki koşul yerine doğal sayıların alt kümeleri için sonsuzlukta porosity kavramı kullanılarak bir değerlendirme yapılacak, böylece porosity yakınsaklık tanımlanacaktır. Bu yeni yakınsaklığın bazı temel özellikleri incelenecek, klasik yakınsaklık ile karşılaştırılacaktır.

Ayrıca reel değerli diziler için porosity limit noktası, porosity yığılma noktası, porosity alt sınır, porosity üst sınır gibi kavramlar tanımlanacak ve porosity yakınsaklık ile ilişkileri incelenecektir.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

Kümeler için porosity kavramı ilk olarak Denjoy [10, 11] ve Khintchine [12] tarafından farklı terminolojiler altında tanımlanmıştır. Denjoy reel eksende mükemmel kümelerin (yığılma noktaları kümesine eşit olan küme) tümleyenlerinin sınıflandırılması ile ilgilenmiştir. Khintchine yoğunluk kavramını kullanarak çeşitli yeni tanımlamalar yapmıştır. Daha sonra 1967 yılında Dolzenko Plesner teoremini keyfi fonksiyonlara genelleştirmek için porosity kavramından faydalanmıştır [13].

Porosity ile boyut arasındaki ilişki ve porosity yardımı ile boyut hesaplaması porosity notasyonunun çeşitlerinde ortaya çıkar [12], [14, 16].

Ayrıca, porosity ile konikal yoğunluklar ve singüler integraller arasındaki ilişki incellenmiştir [17, 18] ve [19].

1967 yılında Dolzenko sonlu sayıda veya sayılabilir çoklukta porous kümenin birleşimi olarak ifade edilebilen kümeleri σ-porous kümeler olarak adlandırmıştır [13]. Porous kümeler hiçbir yerde yoğun olmayan kümeler olduğundan açıktır ki σ-porous kümeler birinci kategoridendir. Ayrıca, sonlu boyutlu uzaylardan alınan σ-porous kümeler sıfır ölçülüdür. Porous ve σ-porous kümelerin temel yapısı ile ilgili birçok çalışma mevcuttur [20, 22].

Kümeler teorisinde σ-porosity kavramı kullanılarak bazı teoremler verilmiştir [23, 27].

Ayrıca, porosity kavramının küme idealleri ile ilgili ilginç uygulamaları vardır. Örneğin, kompakt kümelerin ideali için günümüzde iyi bilinen sonuçlar Kechris tarafından verilmiştir [28, 29]. Kümelerin ideali için farklı karakterizasyonlar birçok yazar tarafından verilmiştir [30, 32]. Reel sayıların porous alt kümelerinin asal ideali ile sıralı izomorfizmler arasındaki ilişki Semenova ve Florinskii tarafından verilmiştir [33]. Reel sayıların 0 da porous olan alt kümeleri için iki ideal örneği Bilet ve Dovgoshey tarafından kurulmuştur [34].

Reel sayıların alt kümeleri için porosity kavramı kullanılarak bir sınıflandırma Bilet ve Dovgoshey tarafından yapılmıştır [35]. $\mathbb{R}^n$ de porosity kavramı ile kümelerin dağılımı ve Collet-Eckmann Julia kümeleri için porosity kavramı sırasıyla [36] ve [37] çalışmalarında verilmiştir. Ayrıca keyfi herhangi metrik uzaylarda da porosity ile ilgili çalışmalar mevcuttur [38, 39].

Doğal sayı kümeleri için porosity kavramı da [12], [14], [40, 41] incelenmiştir. Bu çalışmada kümeler için porosity kavramının analizdeki diğer sorulardan farklı bir rol oynadığı gösterilecektir.

Porosity ile ilgili temel düzeyde bilgiler Thomson tarafından verilmiştir [22]. Ayrıca, porosity hakkında değişik tanımlarla yapılan karşılaştırmalar [42] ve [43] de bulunabilir.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde, bazı temel tanımlar, teoremler ve notasyonlar verilecektir. İlk kısımda klasik analizden bilinen ve daha sonraki bölümde adı geçecek olan temel tanımlar hatırlatılacaktır. İkinci kısımda ise reel sayıların alt kümeleri için herhangi bir noktadaki (sağ üst, sağ alt, sol üst ve sol alt) porosity tanımı verilecektir. Sonsuzlukta porosity tanımlanırken 0 daki sağ üst porosity kullanılacağından özel olarak 0 daki porosity tanımı yinelenecektir. Ayrıca 0 daki porosity sayısı tanımı verilerek, porosity sayıları kümesi ile porosity kavramının nasıl ifade edildiği açıklanacaktır.

3.1. Temel Kavramlar

Bu kısımda klasik analizde var olan ve bu tez çalışmasında adı geçecek olan temel tanımlar verilecektir.

Tanım 3.1.1. $A\subset\mathbb{R}$ ve $a\in\mathbb{R}$ olsun. Her $\varepsilon>0$ için $\left(\left\{x\in\mathbb{R}:\left|x-a\right|<\varepsilon\right\}-\left\{a\right\}\right)\cap A\neq\varnothing$ ise $a\in\mathbb{R}$ sayısına A kümesinin yığılma noktası denir [44].

Herhangi $A\subset\mathbb{R}$ kümesinin yığılma noktalarının kümesi acA ile gösterilir.

Tanım 3.1.2. Tanım kümesi $\mathbb{N}$ olan fonksiyonlara dizi denir. Terimleri $x_n := f\left(n\right)$ biçiminde verilen bir dizi $x=\left\{x_n\right\}_{n\in\mathbb{N}}$, $x=\left\{x_n\right\}_{n=1}^{\infty}$ veya $x=\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ olarak gösterilir [44].

Tanım 3.1.3. $x=\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ reel değerli bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon>0$ için $\exists n_0\equiv n_0\left(\varepsilon\right)\in\mathbb{N}$ vardır öyle ki $\forall n\geq n_0$ için $\left|x_n-l\right|<\varepsilon$ sağlanırsa $x=\left(x_n\right)$ dizisine, $l\in\mathbb{R}$ sayısına yakınsaktır (Cauchy anlamda yakınsak) [44].

Tanım 3.1.4. $\left(x_{n_k}\right)$, $x=\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir alt dizisi olsun. $\left(x_{n_k}\right)$ dizisi yakınsak ve limiti l ise, bu l sayısına $\left(x_n\right)$ dizisinin limit noktası denir [44].

Tanım 3.1.5. $x=\left(x_n\right)$ reel değerli bir dizi olsun. Her $n>m$ doğal sayıları için $x_m\geq x_n$ (veya $x_m\leq x_n$) sağlanırsa x_m değerine $\left(x_n\right)$ dizisinin üst (veya alt) uç noktası denir [9].

Tanım 3.1.6. $A,B\subseteq\mathbb{R}$ olsun. $f:A\to B$ fonksiyonu örten ve her $x,y\in A$ için $\left|f\left(x\right)-f\left(y\right)\right|=\left|x-y\right|$ koşulunu sağlarsa f fonksiyonuna izometri denir.

3.2. Reel Sayıların Alt Kümeleri İçin Porosity Kavramı

Bu kısımda reel sayıların alt kümeleri için herhangi bir noktada porosity kavramı verilecektir. Ayrıca, porosity sayısı tanımı verilerek herhangi noktadaki porosity kavramının o noktadaki porosity sayıları ile nasıl ifade edileceğine değinilecektir.

Tanım 3.2.1. $E \subseteq \mathbb{R}^+$ bir küme, $a,b \in \mathbb{R}^+$ ve $a<b$ olsun. $\lambda(E,a,b)$ ile $(a,b) \subset \mathbb{R}^+$ aralığının E ile arakesiti boş olan en büyük açık alt aralığının uzunluğu gösterilir [22]. Yani;

$$\lambda(E,a,b) := \sup\left\{|a'-b'| : (a',b') \subseteq (a,b), (a',b') \cap E = \varnothing\right\}$$

dir.

Tanım 3.2.2. $E \subseteq \mathbb{R}^+$ kümesi için herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında sağ üst porosity

$$\overline{p}^{+}(E,x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{\lambda(E,x,x+h)}{h} \tag{3.1}$$

dir. $x \in \mathbb{R}$ noktasında sol üst porosity

$$\overline{p}^{-}(E,x) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{\lambda(E,x-h,x)}{h} \tag{3.2}$$

dir [22].

Tanım 3.2.3. $E \subseteq \mathbb{R}^+$ kümesi için herhangi bir $x \in \mathbb{R}$ noktasında sağ alt porosity

$$\underline{p}^{+}(E,x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{\lambda(E,x,x+h)}{h} \tag{3.3}$$

dir. $x \in \mathbb{R}$ noktasında sol alt porosity

$$\underline{p}^{+}(E,x) = \liminf_{h \to 0^+} \frac{\lambda(E,x-h,x)}{h} \tag{3.4}$$

dir [22].

Bu çalışmada genelliği kaybetmeden 0 daki sağ üst porosity tanımı kullanılacaktır.

Tanım 3.2.4. $E \subseteq \mathbb{R}^+$ olsun. E kümesinin 0 daki sağ üst porosity değeri

$$\overline{p}^{+}(E,0) = \limsup_{h \to 0^+} \frac{\lambda(E,0,h)}{h} \tag{3.5}$$

dir.

Bu tanım dikkate alınarak reel sayıların alt kümeleri için aşağıdaki sınıflandırma yapılabilir:

$E \subseteq \mathbb{R}^+$ kümesi verilsin. Eğer,

- $\overline{p}^{+}(E,0) > 0$ ise E kümesi 0 noktasında porous bir kümedir.
- $\overline{p}^{+}(E,0) = 1$ ise E kümesi 0 noktasında kuvvetli porous bir kümedir.

- $\overline{p}^{+}(E,0)=0$ ise E kümesi 0 noktasında porous değildir (nonporous bir kümedir).

Bir noktada porosity ile yığılma noktaları kümeleri arasındaki ilişki günümüzde çok açıktır. Bu çalışmada ele alınan ilk nokta, bütün porosity sayılarının bir yığılma noktaları kümesinde sağ üst porosity ve sağ alt porosity arasındaki bir içermedir.

Tanım 3.2.5. p pozitif bir reel sayı ve $E \subseteq \mathbb{R}^{+}$ olsun. Eğer, her $k \in \mathbb{N}$ için $h_k > 0$ olmak üzere $(h_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi $\lim_{k\to\infty} h_k = 0$ koşulunu sağlayan bir dizi ve

$$p=\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda(E,0,h_k)}{h_k} \tag{3.6}$$

ise p sayısına E kümesinin 0 daki porosity sayısıdır denir.

E kümesinin 0 daki bütün porosity sayılarının kümesi $\mathrm{P}(E)$ ile gösterilirse, bu küme aynı zamanda

$$\Phi_E(h)=\frac{\lambda(E,0,h)}{h} \tag{3.7}$$

fonksiyonunun yığılma noktalarının kümesidir. (3.6) ve (3.7) den açıktır ki

$$\overline{p}^{+}(E)=\max_{p\in\mathrm{P}(E)} p \quad \text{ve} \quad \underline{p}^{+}(E)=\min_{p\in\mathrm{P}(E)} p$$

eşitlikleri sağlanır.

Şu ana kadar verilen tanımlardan, bir kümenin herhangi bir noktadaki porosity değeri aslında söz konusu kümenin o nokta civarındaki deliklerin en büyüğü olarak anlaşılabilir.

4. BULGULAR ve TARTIŞMA

Bu bölüm üç kısımdan oluşmaktadır. İlk kısımda reel sayıların herhangi bir alt kümesinin 0 (sıfır) daki porosity sayıları kümesi ile aynı noktadaki pretanjant uzayı arasındaki ilişki incelecektir. İkinci kısımda doğal sayıların alt kümeleri için sonsuzlukta porosity kavramı tanımlanacaktır. Ayrıca doğal sayıların alt kümeleri için sonsuzlukta porosity sayısı tanımı verilecek ve aralarındaki ilişkiden faydalanılarak doğal sayıların alt kümelerinin sonsuzluktaki porosity değerinin hesabı için çeşitli teoremler ifade ve ispat edilecektir. Üçüncü kısımda, ilk iki kısmın bir uygulaması olarak, reel değerli diziler için porosity yakınsaklık tanımlanacak ve klasik yakınsaklık ile karşılaştırılacaktır. Daha sonra reel değerli diziler için porosity limit supremum ve porosity limit infimum tanımları verilecek ve porosity yakınsaklık ile aralarındaki ilişki incelenecektir. Son olarak da porosity yığılma noktası ve porosity limit noktası tanımlanacak ve incelenecektir.

4.1. Porosity Sayıları ve Pretanjant Uzaylar

Bu kısımda pretanjant uzay kurulacak ve herhangi bir kümenin pretanjant uzayı ile porosity sayıları kümesi arasındaki ilişki incelenecektir.

İlk olarak $E \subseteq \mathbb{R}^+$ için pretanjant uzayın yapısı hatırlatılacaktır. $\tilde{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ pozitif reel sayıların 0 a yakınsayan bir dizisi olsun. $\tilde{r}$ normalleyen dizi olarak adlandırılacaktır. $\tilde{E}$ ile tüm terimleri E de olan ve $\lim_{n\to\infty} x_n = 0$ koşulunu sağlayan $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizilerinin kümesi gösterilecektir.

Tanım 4.1.1. $x = (x_n)_{n\in\mathbb{N}}, y = (y_n)_{n\in\mathbb{N}} \in \tilde{E}$ dizilerine $\tilde{r}$ normalleyen dizisine göre eğer

$$\lim_{n\to\infty} \frac{|x_n - y_n|}{r_n} := |x - y|_{\tilde{r}} \tag{4.1}$$

sonlu limiti varsa, karşılıklı dengelidir denir.

Bir $F \subseteq \tilde{E}$ ailesine, eğer her $x, y \in F$ için x ile y karşılıklı dengeli ise $\tilde{r}$ normalleyen dizisine göre öz dengelidir denir.

Bir $F \subseteq \tilde{E}$ ailesine, eğer F öz dengeli ve herhangi bir $\tilde{z} \in \tilde{E}$ için ya $\tilde{z} \in F$ ya da $\tilde{z}$ ile karşılıklı dengeli olacak şekilde $x \in F$ yoksa, maksimal öz dengelidir denir.

Önerme 4.1.1. $E \subseteq \mathbb{R}^+$, $0 \in E$ olacak şekilde belirlenmiş bir küme olsun. Her $\tilde{r}$ normalleyen dizisi için $\tilde{0} := (0,0,0,\ldots,0,\ldots) \in \tilde{E}_{0,\tilde{r}}$ olacak şekilde bir maksimal öz dengeli $\tilde{E}_{0,\tilde{r}}$ ailesi vardır.

$|.,.|_{\tilde{r}}$ fonksiyonu $E_{0,\tilde{r}} \times E_{0,\tilde{r}}$ üzerinde tanımlansın. Burada $|x, y|_{\tilde{r}} = |x-y|_{\tilde{r}}$, (4.1) de tanımlanmıştır. $|.,.|_{\tilde{r}}$ fonksiyonu simetriktir, pozitiftir ve her $x, y, \tilde{z} \in E_{0,\tilde{r}}$ için

$|x-y|_{\tilde{r}} \leq |x-\tilde{z}|_{\tilde{r}} + |\tilde{z}-y|_{\tilde{r}}$

eşitsizliği sağlanır. Böylece $\left(E_{0,\tilde{r}}, |.,.|_{\tilde{r}}\right)$ pseudometrik uzaydır.

Tanım 4.1.2. $E \subseteq \mathbb{R}^{+}$ kümesinin $\tilde{r}$ normalleyen dizisine göre $0 \in E$ noktasındaki pretanjant uzayı $\left(E_{0,\tilde{r}}, |.,.|_{\tilde{r}}\right)$ pseudometrik uzayının metriklenmesidir.

Metrik elde etmek için aşağıdaki yol izlenecektir:

$E_{0,\tilde{r}}$ üzerinde $\sim$ bağıntısı “ $x \sim y \Leftrightarrow |x-y|_{\tilde{r}} = 0$ ” olarak tanımlansın. $\sim$ bir denklik bağıntısıdır. $\Omega_{0,\tilde{r}}^{E}$ ile $E_{0,\tilde{r}}$ kümesinin $\sim$ denklik bağıntısı altındaki denklik sınıflarının kümesi gösterilsin. Herhangi $\alpha, \beta \in \Omega_{0,\tilde{r}}^{E}$ ve $x \in \alpha, y \in \beta$ için

$$\rho(\alpha, \beta) := |x-y|_{\tilde{r}} \tag{4.2}$$

olarak tanımlanırsa ρ, $\Omega_{0,\tilde{r}}^{E}$ üzerinde bir metriktir ve $\left(\Omega_{0,\tilde{r}}^{E}, \rho\right)$ metrik uzayı $\left(E_{0,\tilde{r}}, |.,.|_{\tilde{r}}\right)$ pseudometrik uzayının metriklenmesidir.

Önerme 4.1.2. $E \subseteq \mathbb{R}^{+}$, $0 \in E$ ve $E_{0,\tilde{r}}$, $\tilde{r}$ normalleyen dizisine göre maksimal öz dengeli aile olsun. O halde herhangi iki $x, y \in E_{0,\tilde{r}}$ çifti için $x \sim y$ sağlanır ancak ve ancak

$$\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{r_n}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. x ile $\tilde{0}$ karşılıklı dengeli olduğundan

$$|x-\tilde{0}|_{\tilde{r}} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n - 0}{r_n} = \lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{r_n} < \infty$$

sağlanır. Benzer biçimde $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{y_n}{r_n}$ limiti de sonludur. $\sim$ bağıntısının tanımından $x \sim y$ olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{n\to\infty} \frac{|x_n - y_n|}{r_n} = 0$ olmasıdır.

$$\left|\lim_{n\to\infty} \frac{x_n}{r_n} - \lim_{n\to\infty} \frac{y_n}{r_n}\right| = \lim_{n\to\infty} \frac{|x_n - y_n|}{r_n} \tag{4.3}$$

olduğundan her $x, y \in E_{0,\tilde{r}}$ için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{r_n}=\lim_{n\to\infty}\frac{y_n}{r_n}\Leftrightarrow x\sim y \tag{4.4}$$

sağlanır. ■

Sonuç 4.1.1. $0\in E\subseteq\mathbb{R}^+$ ve $E_{0,\tilde{r}}$, $\tilde{r}$ normalleyen dizisine göre maksimal öz dengeli aile olsun. $x\in E$ dizisinin $E_{0,\tilde{r}}$ ailesine ait olması için gerek ve yeter şart $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{r_n}$ sonlu limitinin var olmasıdır.

İspat. Önerme 4.1.2 nin ispatında olduğu gibi $x\in E_{0,\tilde{r}}$ olması $\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{r_n}<\infty$ olmasını sağlar. Tersi ise (4.4) den elde edilir. ■

Bu sonuç, her normalleyen $\tilde{r}$ dizisi ve her $E\subseteq\mathbb{R}^+$ için $0\in E$ olmak üzere tek bir $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ pretanjant uzayının olduğunu gösterir. Bu son özellik herhangi metrik uzaylarda geçerli değildir [45].

$\left(\Omega^E_{0,\tilde{r}},\rho\right)$ metrik uzayı, $\overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}}\subset\mathbb{R}^+$ alt uzayı ile aşağıdaki biçimde ifade edilebilir.

Her $t\in\mathbb{R}^+$ için $t\in\overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}}$ olması için gerek ve yeter şart $t=\lim\limits_{n\to\infty}\frac{x_n}{r_n}$ olacak şekilde $x\in E$ dizisinin var olmasıdır.

$L:\Omega^E_{0,\tilde{r}}\to\overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}}$ dönüşümü

$$L(\alpha):=\lim_{n\to\infty}\frac{x_n}{r_n} \tag{4.5}$$

olacak şekilde tanımlansın. Burada $x=(x_n)$, $E_{0,\tilde{r}}$ ailesinin α denklik sınıfına ait bir elemanıdır.

Önerme 4.1.3. $0\in E\subseteq\mathbb{R}^+$ ve $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ ise $\tilde{r}$ normalleyen dizisine karşılık gelen pretanjant uzay olsun. (4.5) da tanımlanan L dönüşümü $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ ile $\overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}}$ arasında

$$L(\alpha_0)=0$$

eşitliğini sağlayan izometrik bir eşlemedir. Burada α_0, $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ nin $\tilde{0}$ sabit dizisini içeren denklik sınıfıdır. Ayrıca, eğer $0\in A\subseteq\mathbb{R}^+$ için $F:\Omega^E_{0,\tilde{r}}\to A$ dönüşümü $F(\alpha_0)=0$ koşulunu sağlayan bir izometrik eşleme ise o halde $A=\overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}}$ sağlanır.

İspat. L dönüşümünün birebir ve örten olduğu Sonuç 4.1.1 den elde edilir. (4.1), (4.2) ve (4.5) eşitlikleri her $\alpha,\beta\in\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ için

$$\rho(\alpha,\beta)=\left|L(\alpha)-L(\beta)\right|$$

olmasını sağlar. Böylece L izometridir.

Şimdi eğer $0\in A\subseteq\mathbb{R}^{+}$ ve $F:\Omega_{0,\tilde{r}}^{E}\rightarrow A$, $F(\alpha_0)=0$ olacak şekilde izometrik bijektif (birebir, örten) bir dönüşüm ise, her $x\in A$ için $x=F(\beta)$ olacak şekilde bir tek $\beta\in\Omega_{0,\tilde{r}}^{E}$ vardır. Dahası $x=|x-0|=\rho(\beta,\alpha_0)$ olduğundan

$$A=\left\{\rho(\alpha_0,\beta):\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{E}\right\}$$

sağlanır. Ancak $\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{E}=\left\{\rho(\alpha_0,\beta):\beta\in\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{E}\right\}$ olduğundan $A=\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{E}$ elde edilir. ■

Önerme 4.1.4. $0\in E\subseteq\mathbb{R}^{+}$ olsun. Her $\tilde{r}$ normalleyen dizisi için $\Omega_{0,\tilde{r}}^{E}$ pretanjant uzayı tamdır.

İspat. $\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{E}$ nin her $\tilde{r}$ normalleyen dizisi için $\mathbb{R}^{+}$ nın kapalı alt kümesi olduğunun gösterilmesi yeterli olacaktır. Aksi kabul edilsin ve $x\in\mathbb{R}^{+}$ sayısı

$$x\in ac\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{E} \text{ ve } x\notin\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{E}$$

olacak şekilde seçilsin. Buradan $\lim\limits_{m\to\infty}x_m=x$ olacak şekilde bir $(x_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır ve $x_m\in\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{E}$ ve her $m\in\mathbb{N}$ için $|x-x_{m+1}|<|x-x_m|$ eşitsizliği sağlanır. Her $m,n\in\mathbb{N}$ için

$$x_m=\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n,m}}{r_n} \text{ ve } \left|\frac{x_{n,m}}{r_n}-x_m\right|<|x_m-x|$$

sağlanacak şekilde $(x_{n,m})_{n\in\mathbb{N}}\in E$ dizisi vardır. Son eşitsizlik kullanılırsa $n=m$ için

$$\left|\frac{x_{n,n}}{r_n}-x_n\right|<|x_n-x|$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece,

$$\lim_{n\to\infty}\left|\frac{x_{n,n}}{r_n}-x_n\right|=0$$

olması

$$\lim_{n\to\infty}\frac{x_{n,n}}{r_n}=\lim_{n\to\infty}x_n=x$$

eşitliğini verir. Sonuç 4.1.1 den $(x_{n,n})_{n\in\mathbb{N}}\in E_{0,\tilde{r}}$ elde edilir. Böylece $x\in\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{E}$ sağlanır. Bu ise kabul ile çelişir. ■

Tanım 4.1.3. $E,T\subseteq\mathbb{R}^{+}$ olsun. Eğer, $\lim\limits_{n\to\infty}e_n=0$ ve $e_n\in E-\{0\}$ olacak şekilde her $(e_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ dizisi için

$$\lim_{n\to\infty}\frac{e_n}{t_n}=1$$

koşulunu sağlayan ve her $n\in\mathbb{N}$ için $t_n\in T-\{0\}$ olacak şekilde $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi varsa E ön eşittir T denir ve $E\prec T$ yazılır.

Önerme 4.1.5. $E,T\subseteq\mathbb{R}^+$ için $0\in E\cap T$ sağlansın ve $\tilde{r}$ normalleyen bir dizi olsun. Eğer $E\prec T$ ve $T\prec E$ ise

$$\overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}}=\overline{\Omega}^{T}_{0,\tilde{r}} \tag{4.6}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $E\prec T$ ve $T\prec E$ sağlansın. Buradan $0\in acT$ olması için gerek ve yeter şart $0\in acE$ olmasıdır. Eğer $0\notin acT$ ve $0\notin acE$ ise

$$\overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}}=\{0\}=\overline{\Omega}^{T}_{0,\tilde{r}}$$

olup eşitlik sağlanır.

Şimdi $0\in acT$ ve $0\in acE$ olsun. Eğer $t\in\overline{\Omega}^{T}_{0,\tilde{r}}$ ve $t\neq 0$ ise Sonuç 4.1.1 den

$$t=\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{r_n} \tag{4.7}$$

ve her $n\in\mathbb{N}$ için $t_n\in T-\{0\}$ olacak şekilde $(t_n)_{n\in\mathbb{N}}\in T$ dizisi vardır. $T\prec E$ olduğundan

$$\lim_{n\to\infty}\frac{t_n}{s_n}=1 \tag{4.8}$$

olacak şekilde $(s_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E$ vardır. (4.7) ve (4.8) eşitliklerinden

$$t=\lim_{n\to\infty}\frac{s_n}{r_n}$$

sağlanır. Böylece $\overline{\Omega}^{T}_{0,\tilde{r}}\subseteq\overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}}$ elde edilir. Benzer şekilde $E\prec T$ olduğu kullanılırsa $\overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}}\subseteq\overline{\Omega}^{T}_{0,\tilde{r}}$ içermesi elde edilir. Buradan ise (4.6) eşitliği elde edilir. ■

Sonuç 4.1.2. $0\in E\subseteq\mathbb{R}^+$ ve $\overline{E}$, E kümesinin kapanışı olsun. O halde her $\tilde{r}$ normalleyen dizisi için

$$\overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}}=\overline{\Omega}^{\overline{E}}_{0,\tilde{r}}$$

eşitliği sağlanır.

Uyarı 4.1.1. Eğer her $\tilde{r}$ normalleyen dizisi için (4.6) sağlanırsa $E\prec T$ ve $T\prec E$ olduğu ispatlanabilir. Benzer sonuç herhangi metrik uzayların alt kümeleri için de geçerlidir [45].

$(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ doğal sayıların kesin artan bir dizisi olsun. $\tilde{r}'=(r_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ de $\tilde{r}=(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ normalleyen dizisinin alt dizisi olsun. E kümesinin bir alt kümesi olan $E_{0,\tilde{r}'}$ kümesi aşağıdaki kural ile tanımlansın

$$\left((x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in E_{0,\tilde{r}'}\right)\Leftrightarrow\left(\lim_{k\to\infty}\frac{x_{n_k}}{r_{n_k}}<\infty\right).$$

Kolayca görülebilir ki $E_{0,\tilde{r}'}$ kümesi $\tilde{r}'$ normalleyen dizisine göre maksimal öz dengelidir. Yani her $x,y\in E_{0,\tilde{r}'}$ için

$$|x-y|_{\tilde{r}'}=\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{n_k}-y_{n_k}|}{r_{n_k}}$$

sonlu limiti vardır ve eğer $\tilde{z}\in E-E_{0,\tilde{r}'}$ ise öyle bir $x\in E_{0,\tilde{r}'}$ dizisi vardır ki

$$\lim_{k\to\infty}\frac{|x_{n_k}-z_{n_k}|}{r_{n_k}}$$

limiti sonsuzdur veya mevcut değildir. Ayrıca $E_{0,\tilde{r}}\subseteq E_{0,\tilde{r}'}$ olduğu açıktır ve her $x,y\in E_{0,\tilde{r}}$ için $|.,.|_{\tilde{r}'}$, $E_{0,\tilde{r}}$ üzerinde

$$|x-y|_{\tilde{r}}=|x-y|_{\tilde{r}'}$$

eşitliğini sağlayan bir pseudometrik uzaydır. $\left(\Omega^E_{0,\tilde{r}'},\rho'\right)$ uzayı $\left(E_{0,\tilde{r}'},|.,.|_{\tilde{r}'}\right)$ pseudometrik uzayının metriklenmesi olsun. $\overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}'}\subseteq\mathbb{R}^+$ kümesi ve $L':\Omega^E_{0,\tilde{r}'}\to\overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}'}$ dönüşümü sırasıyla

$$\left(t\in\overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}'}\right)\Leftrightarrow\left(\lim_{k\to\infty}\frac{x_{n_k}}{r_{n_k}}=t\text{ olacak şekilde }x\in E_{0,\tilde{r}'}\text{ vardır}\right)$$

ve

$$(x_n)_{n\in\mathbb{N}}\in\alpha\in\Omega^E_{0,\tilde{r}'}\to L'(\alpha)=\lim_{k\to\infty}\frac{x_{n_k}}{r_{n_k}}\in\overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}'}$$

biçiminde tanımlansın. L' birebir, örten, izometrik dönüşümü için $L'(\alpha_0')=0$ sağlanır. Burada α_0', $\Omega^E_{0,\tilde{r}'}$ nin $\tilde{0}$ sabit dizisini içeren bir elemanıdır. Dahası

$$\begin{array}{ccccc}
E_{0,\tilde{r}} & \xrightarrow{\pi} & \Omega^E_{0,\tilde{r}} & \xrightarrow{L} & \overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}} \\
\downarrow in_E & & \downarrow em' & & \downarrow in_{\mathbb{R}^+} \\
E_{0,\tilde{r}'} & \xrightarrow{\pi'} & \Omega^E_{0,\tilde{r}'} & \xrightarrow{L'} & \overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}'}
\end{array}$$

diyagramı değişmelidir. Burada π ve π' sırasıyla

$\pi(x)=\{y\in E_{0,\tilde{r}} : |x-y|_{\tilde{r}}=0\}$

ve

$\pi'(x)=\{y\in E_{0,\tilde{r}'} : |x-y|_{\tilde{r}'}=0\}$

dir. $in_E(x)=x$ ve $in_{\mathbb{R}^+}(t)=t$ biçiminde tanımlanır. em' ise $em'\cdot\pi=in_E\cdot\pi'$ eşitliğini sağlayan bir gömme olsun.

Teorem 4.1.1. $0\in E\subseteq\mathbb{R}^+$ olsun. $p\in\mathbb{R}^+$ reel sayısı E kümesinin 0 daki porosity sayısı olması için gerek ve yeter şart

(i) $\tilde{r}$ normalleyen dizisinin her $\tilde{r}'=(r_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi için

$$(a,b)\cap\overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'}=\varnothing \tag{4.9}$$

dir.

(ii) $\tilde{r}$ normalleyen dizisinin her $\tilde{r}'=(r_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi için $(c,d)\subseteq(0,1)$ olmak üzere

$$(c,d)\cap\overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'}=\varnothing \tag{4.10}$$

ise $|c-d|\le|a-b|$ dir.

koşullarının sağlanması ve $|a-b|=p$ eşitliği sağlanacak biçimde bir $\tilde{r}=(r_n)_{n\in\mathbb{N}}$ normalleyen dizisinin ve bir $(a,b)\subseteq(0,1)$ aralığının var olmasıdır.

İspat. Eğer $0\notin acE$ ise, $\mathrm{P}(E)$ porosity sayılarının kümesi yalnızca bir eleman içerir ve her $\tilde{r}$ normalleyen dizisi için $\overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'}=\{0\}$ dir. Böylece eğer $0\notin acE$ ise teorem açıktır.

Şimdi $0\in acE$ olduğu varsayılsın. Sonuç 4.1.2 den E kümesinin kapalı olduğu varsayılabilir. p, E kümesinin porosity sayısı olsun. O halde $\lim_{m\to\infty}h_m=0$ ve her $m\in\mathbb{N}$ için $h_m>0$ olacak şekilde bir $h=(h_m)_{m\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır ve

$$p=\lim_{m\to\infty}\frac{\lambda(E,0,h_m)}{h_m} \tag{4.11}$$

sağlanır. Burada $\lambda(E,0,h_m)$, Tanım 3.2.1 deki gibidir.

Her $m\in\mathbb{N}$ için $(0,h_m)$ açık aralığının

$$\left(a_m, b_m\right) \cap E = \varnothing \tag{4.12}$$

koşulunu sağlayan en büyük açık alt aralık $\left(a_m, b_m\right)$ olsun. Eğer $p = 0$ ise bu aralık boştur ve $a_m = b_m$ dir. O halde tanımdan

$$\lambda\left(E, 0, h_m\right) = b_m - a_m \tag{4.13}$$

sağlanır. Ayrıca, E kapalı olduğundan $a_m \in E$ dir. h dizisinin $h' = \left(h_{m_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ alt dizisi her $n \in \mathbb{N}$ için

$$b_{m_n} \in E \tag{4.14}$$

olacak biçimde seçilsin. Buradan

$$b = \lim_{n\to\infty} \frac{b_{m_n}}{h_{m_n}} \tag{4.15}$$

sonlu limiti vardır. Her $n \in \mathbb{N}$ için r_n ile, h dizisinin h_{m_n} elemanları gösterilsin ve $\Omega^E_{0,\tilde{r}}$ de $\tilde{r}$ normalleyen dizisine göre E kümesinin pretanjant uzayı olsun. $\tilde{r}$ normalleyen dizisinin her $\tilde{r}\,'$ alt dizisi için $a \in \overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}'}$ ve $b \in \overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}}$ olduğu açıktır. (4.11), (4.13) ve (4.15) eşitliklerinden $|a - b| = p$ sağlanır.

Şimdi her $\tilde{r}\,'$ için (4.9) in sağlandığı gösterilsin. Aksi kabul edilsin. Yani $\tilde{r}$ dizisinin

$$\left(a, b\right) \cap \overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}'} \neq \varnothing$$

olacak şekilde bir $\tilde{r}\,' = \left(r_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizisi var olsun. $x \in \overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}'}$ için

$$a < x < b \tag{4.16}$$

sağlansın. $\overline{\Omega}^E_{0,\tilde{r}'}$ nin tanımından

$$x = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{n_k}}{r_{n_k}}$$

olacak şekilde bir $\left(x_n\right)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dizisi bulunabilir. (4.16) kullanılırsa

$$\lim_{k\to\infty} \frac{a_{n_k}}{r_{n_k}} < \lim_{k\to\infty} \frac{x_{n_k}}{r_{n_k}} < \lim_{k\to\infty} \frac{b_{n_k}}{r_{n_k}}$$

sağlanır. Son eşitsizliklerden yeterince büyük her k için

$$x_{n_k} \in \left(a_{n_k}, b_{n_k}\right) \tag{4.17}$$

elde edilir. $x_{n_k} \in E$ olduğundan (4.17) durumu her $n \in \mathbb{N}$ için

$$\left(a_n, b_n\right) \cap E = \varnothing$$

olması ile çelişir. Böylece her $\tilde{r}$ normalleyen dizisi için (4.9) sağlanır. Yani (i) elde edilmiş olur.

(ii) yi ispatlamak için aksi kabul edilsin. Yani $0 \le c < d \le 1$ olmak üzere (c,d) aralığı için (4.10) sağlanacak fakat $|c-d| > |a-b|$ olacak şekilde $\tilde{r}$ normalleyen dizisinin var olduğu kabul edilsin. Genelliği kaybetmemek için (c,d) nin $(0,1)$ aralığının (ii) koşulunu sağlayan en büyük açık alt aralığı olduğu kabul edilsin. O halde $\overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'}$, $\mathbb{R}^{+}$ da kapalı olduğundan, Önerme 4.1.4 den, ya

$$c \in \overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'} \text{ ve } d \in \overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'} \tag{4.18}$$

ya da

$$c \in \overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'} \text{ ve } d = 1 \tag{4.19}$$

sağlanır. Şimdi (4.18) in sağlandığı kabul edilsin. $\varepsilon > 0$

$$c \le (1+\varepsilon)c < (1-\varepsilon)d < d \text{ ve } |(1+\varepsilon)c - (1-\varepsilon)d| > |a-b| = p \tag{4.20}$$

sağlanacak şekilde seçilsin. (4.18) den $c,d \in \overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'}$ olmak üzere $(c_n)_{n\in\mathbb{N}}, (d_n)_{n\in\mathbb{N}} \in E$ dizileri

$$c = \lim_{k\to\infty} \frac{c_{n_k}}{r_{n_k}} \text{ ve } d = \lim_{k\to\infty} \frac{d_{n_k}}{r_{n_k}}$$

olacak şekilde vardır. (4.20) kullanılırsa, yeterince büyük her k için

$$\left|(1+\varepsilon)c_{n_k} - (1-\varepsilon)d_{n_k}\right| > \lambda\left(E, r_{n_k}\right) \tag{4.21}$$

elde edilir. Sonuç olarak

$$x_{n_k} \in \left((1+\varepsilon)c_{n_k},\ (1-\varepsilon)d_{n_k}\right) \cap E$$

olacak şekilde bir x_{n_k} vardır. Bu alt dizi göz önünde bulundurulursa

$$x = \lim_{k\to\infty} \frac{x_{n_k}}{r_{n_k}} \tag{4.22}$$

sonlu limiti vardır. (4.22) den $x \in \left[(1+\varepsilon)c_{n_k},\ (1-\varepsilon)d_{n_k}\right]$ elde edilir. Ayrıca

$$\left[(1+\varepsilon)c_{n_k},\ (1-\varepsilon)d_{n_k}\right] \subseteq (c,d)$$

içermesinden

$$x \in (c,d)$$

elde edilir. (4.22) den $x \in \overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'}$ sağlanır. O halde $x \in (c,d) \cap \overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'}$ dir. Bu ise (4.10) ile çelişir.

Böylece eğer p bir porosity sayısı olup (4.14) sağlanırsa (i) ve (ii) koşulları sağlanır. Eğer kesin artan $(m_n)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi yoksa (4.15) sağlanır. O halde yeterince büyük her m için $b_m = h_m$ ve $h_m \notin E$ dir. Bu durum da benzer biçimde elde edilir.

Şimdi $\tilde{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}}$, (i) ve (ii) koşullarını sağlayan bir normalleyen dizi ve $(a,b) \subseteq (0,1)$ olsun. $p = |a-b|$ reel sayısının E kümesinin 0 daki porosity sayısı olduğu gösterilsin. $\left(\frac{\lambda(E,0,r_n)}{r_n}\right)_{n\in\mathbb{N}}$ dizisi ele alınsın. Bu dizi $\left(\frac{\lambda\left(E,0,r_{n_k}\right)}{r_{n_k}}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ yakınsak alt dizisine sahiptir. Tanımdan

$$p^* = \lim_{k\to\infty} \frac{\lambda\left(E,0,r_{n_k}\right)}{r_{n_k}}$$

reel sayısı E kümesinin bir porosity sayısıdır. O halde $p^* = |a-b|$ olduğunun ispatlanması yeterlidir. $\tilde{r}^* = \left(r_{n_k}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ olsun. Teoremin ilk kısmında, $\tilde{r}^*$ nın $\tilde{r}^{**}$ alt dizisinin var olduğu ve $\tilde{r}^{**}$ nın her $\tilde{r}\,'$ alt dizisi için (i) ve (ii) koşullarını sağlayacak şekilde $\left(a^*, b^*\right)$ aralığının varlığı ispatlandı. $p^* = \left|a^* - b^*\right|$ dir. (ii) kullanılırsa

$$\left|a^* - b^*\right| \le |a-b| \text{ ve } |a-b| \le \left|a^* - b^*\right|$$

eşitsizlikleri elde edilir. Böylece $p = |a-b| = \left|a^* - b^*\right| = p^*$ elde edilir. Yani $p = |a-b|$, E kümesinin bir porosity sayısıdır. ■

Sonuç 4.1.3. $E, T \subseteq \mathbb{R}^+$ olsun. Eğer $E \prec T$ ve $T \prec E$ ise

$$\mathrm{P}(E) = \mathrm{P}(T) \tag{4.23}$$

sağlanır. Yani E ve T kümelerinin porosity sayıları kümesi eşittir.

İspat. Eğer $0 \in E \cap T$ ise Teorem 4.1.1 ve Önerme 4.1.5 den istenilen elde edilir. Aksi taktirde her $X \subseteq \mathbb{R}^+$ için $\mathrm{P}(X) = \mathrm{P}(X \cup \{0\})$ olacağından ispat elde edilir. ■

Sonuç 4.1.4. $E \subseteq \mathbb{R}^+$ ve $0 \in E$ olsun. E kümesinin 0 da kuvvetli porous olması için gerek ve yeter şart bir $\tilde{r}$ normalleyen dizisinin, her $\tilde{r}\,'$ alt dizisi için

$$(0,1) \cap \overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'} = \varnothing$$

olacak şekilde var olmasıdır.

İspat. $(a,b)\subseteq(0,1)$ ve $|a-b|=1$ olsun. $a=0$ ve $b=1$ olduğunu görmek kolaydır. Ayrıca E kümesinin kuvvetli porous olması için gerek ve yeter şart $1\in \mathrm{P}(E)$ olmasıdır. O halde ispatı tamamlamak için $p=1$ ve $(a,b)=(0,1)$ alınarak Teorem 4.1.1 i kullanmak yeterlidir. ■

Sonuç 4.1.5. $0\in E\subseteq\mathbb{R}^{+}$ olsun. E kümesinin 0 da kuvvetli porous olması için gerek ve yeter şart bir $\tilde{r}$ normalleyen dizisinin her $\tilde{r}\,'$ alt dizisi için $\overline{\Omega}^{E}_{0,\tilde{r}'}$ kümesinin tek nokta kümesi olmasıdır.

4.2. Sonsuzlukta Üst Porosity

Bu kısımda doğal sayıların alt kümeleri için sonsuzlukta üst porosity ve sonsuzlukta alt porosity tanımlanacaktır. Reel sayılarda bilinen tanımdan faydalanabilmek için özel bir fonksiyona ihtiyaç vardır.

$\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{+}$ kesin azalan bir fonksiyon öyle ki $\lim\limits_{n\to\infty}\mu(n)=0$ koşulu sağlansın. Bu koşulları sağlayan μ fonksiyonları bundan sonra salınım fonksiyonu olarak adlandırılacaktır.

Tanım 4.2.1. $E\subseteq\mathbb{N}$ kümesi için sonsuzlukta üst porosity ve alt porosity, sırasıyla

$$\overline{p}_{\mu}(E)=\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda_{\mu}(E,n)}{\mu(n)} \tag{4.24}$$

ve

$$\underline{p}_{\mu}(E)=\liminf_{n\to\infty}\frac{\lambda_{\mu}(E,n)}{\mu(n)} \tag{4.25}$$

dir. Burada,

$$\lambda_{\mu}(E,n):=\sup\left\{\left|\mu\left(n^{(1)}\right)-\mu\left(n^{(2)}\right)\right|:n\le n^{(1)}<n^{(2)},\left(n^{(1)},n^{(2)}\right)\cap E=\varnothing\right\} \tag{4.26}$$

dir.

Bu çalışmada elde edilen sonuçlar doğal sayıların alt kümeleri için sonsuzluktaki üst porosity kavramı kullanılarak verilecektir.

Uyarı 4.2.1. Eğer, E doğal sayıların sonsuz elemanlı bir alt kümesi ise, her $n\in\mathbb{N}$ için $\lambda_{\mu}(E,n)$ sayısı, $(0,\mu(n))$ aralığının $\mu(E)$ ile arakesiti boş olan en büyük açık alt aralığının uzunluğudur ve bu aralık $n^{(1)}<n^{(2)}$ olmak üzere $\left(\mu\left(n^{(2)}\right),\mu\left(n^{(1)}\right)\right)$ biçimindedir.

Ayrıca, E sonlu ise yeterince büyük her n için $\lambda_{\mu}(E,n)=\mu(n)$ dir. Sonuç olarak E sonlu olmak üzere her μ salınım fonksiyonu için

$$\overline{p}_{\mu}(E) = \underline{p}_{\mu}(E) = 1$$

eşitliği sağlanır.

(4.24) de tanımlanan üst porosity ile doğal sayıların alt kümeleri, μ salınım fonksiyonuna göre sonsuzlukta aşağıdaki biçimde sınıflandırılabilir:

- $\overline{p}_{\mu}(E) > 0$ ise $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesi sonsuzlukta porous bir kümedir.
- $\overline{p}_{\mu}(E) = 1$ ise $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesi sonsuzlukta kuvvetli porous bir kümedir.
- $\overline{p}_{\mu}(E) = 0$ ise $E \subseteq \mathbb{N}$ kümesi sonsuzlukta porous değildir (nonporous bir kümedir).

Tanım 4.2.2. $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+}$ bir salınım fonksiyonu ve $E \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Eğer, kesin artan bir $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için

$$p = \lim_{n\to\infty} \frac{\lambda_{\mu}(E, n_k)}{\mu(n_k)} \tag{4.27}$$

ise $p \in \mathbb{R}^{+}$ sayısına E kümesinin μ salınım fonksiyonuna göre sonsuzluktaki porosity sayısı denir.

$E \subseteq \mathbb{N}$ ve μ bir salınım fonksiyonu olmak üzere E kümesinin sonsuzluktaki tüm porosity sayılarının kümesi $\mathrm{P}_{\mu}(E)$ ile gösterilsin. Açıktır ki $\mathrm{P}_{\mu}(E)$ kümesi $[0,1]$ aralığının kapalı bir alt kümesidir ve

$$\overline{p}_{\mu}(E) = \max_{p\in \mathrm{P}_{\mu}(E)} p \quad \text{ve} \quad \underline{p}_{\mu}(E) = \min_{p\in \mathrm{P}_{\mu}(E)} p$$

eşitlikleri sağlanır.

Sıradaki lemmada doğal sayıların, elemanları bir dizi yardımı ile ifade edilebilen herhangi bir alt kümesinin sonsuzluktaki üst porosity değerinin kolayca hesaplanmasını sağlayacak formül verilecektir.

Lemma 4.2.1. (n_k) her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k < n_{k+1}$ eşitsizliğini sağlayan bir dizi olmak üzere $E = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}, \ldots\} \subseteq \mathbb{N}$ olsun. μ keyfi bir salınım fonksiyonu olmak üzere,

$$\overline{p}_{\mu}(E) = 1 - \liminf_{k\to\infty} \frac{\mu(n_k)}{\mu(n_{k-1})} \tag{4.28}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+}$ bir salınım fonksiyonu olmak üzere

$$\begin{aligned}1-\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_k)}{\mu(n_{k-1})}&=\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k-1})-\mu(n_k)}{\mu(n_{k-1})}\\&\le\limsup_{k\to\infty}\frac{\lambda_\mu(E,n_k)}{\mu(n_k)}\\&\le\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda_\mu(E,n)}{\mu(n)}=\overline{p}_\mu(E)\end{aligned}$$

dir. Böylece, (4.28) eşitliğini ispatlamak için

$$\overline{p}_\mu(E)\le 1-\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_k)}{\mu(n_{k-1})} \tag{4.29}$$

olduğunu göstermek yeterlidir. Her $n\in\mathbb{N}$ için $n^{(1)}$ ve $n^{(2)}$, $n\le n^{(1)}<n^{(2)}$ olacak şekilde pozitif tamsayılar ve

$$\lambda_\mu(E,n)=\mu\left(n^{(1)}\right)-\mu\left(n^{(2)}\right)$$

olsun. μ azalan bir fonksiyon olduğundan

$$\frac{\lambda_\mu(E,n)}{\mu(n)}\le\frac{\lambda_\mu(E,n)}{\mu\left(n^{(1)}\right)}$$

eşitsizliği sağlanır. Dahası

$$\lambda_\mu(E,n)=\lambda_\mu\left(E,n^{(1)}\right)$$

dir. Sonuç olarak her $n\in\mathbb{N}$ için

$$\frac{\lambda_\mu(E,n)}{\mu(n)}\le\frac{\lambda_\mu\left(E,n^{(1)}\right)}{\mu\left(n^{(1)}\right)}=1-\frac{\mu\left(n^{(2)}\right)}{\mu\left(n^{(1)}\right)} \tag{4.30}$$

sağlanır. $n_{k+1},n_k\in\mathbb{N}$ olmak üzere her $n\in\mathbb{N}$ için $n^{(2)}=n_{k+1}$ ve $n^{(1)}=n_k$ olacak şekilde vardır ve (4.30) eşitsizliğinden

$$\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda_\mu(E,n)}{\mu(n)}\le\limsup_{n\to\infty}\left(1-\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}\right)$$

elde edilir. Böylece (4.29) sağlanır. ■

Sıradaki teoremde, doğal sayıların alt kümeleri için sonsuzlukta üst porosity kavramının $\mathbb{R}$ de bilinen 0 daki sağ üst porosity kavramı ile nasıl ifade edileceği verilecektir.

Teorem 4.2.1. $E\subseteq\mathbb{N}$ olsun. $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ herhangi bir salınım fonksiyonu olmak üzere

$$\overline{p}_\mu(E)=\overline{p}^+(\mu(E)) \tag{4.31}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eğer $|E|<\infty$ ise (4.31) eşitliği açıktır. Her $k\in\mathbb{N}$ için $n_k<n_{k+1}$ olmak üzere $E=\{n_1,n_2,\dots,n_k,n_{k+1},\dots\}$ sonsuz elemanlı bir küme olsun. Tanımdan $\overline{p}^{+}(\mu(E))\geq\overline{p}_{\mu}(E)$ olduğu açıktır. Tersini yani $\overline{p}^{+}(\mu(E))\leq\overline{p}_{\mu}(E)$ olduğunu ispatlamak için her $h\in(0,\mu(n))$ için

$$\frac{\lambda(\mu(E),h)}{h}\leq\frac{\mu(n_{k-1})-\mu(n_k)}{\mu(n_{k-1})} \tag{4.32}$$

eşitsizliği sağlanacak şekilde bir $n_k=n_k(h)\in E$ olduğunu göstermek yeterlidir. Çünkü, Lemma 4.2.1 ve (4.32) dikkate alınırsa

$$\begin{aligned}\overline{p}^{+}(\mu(E))&=\limsup_{n\to\infty}\frac{\lambda(\mu(E),h)}{h}\\&\leq\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k-1})-\mu(n_k)}{\mu(n_{k-1})}=\overline{p}_{\mu}(E)\end{aligned}$$

elde edilir.

Şimdi (4.32) eşitsizliğinin ispatına dönülsün. Eğer, $\lambda(\mu(E),h)=0$ ise ispat açıktır. O halde $\lambda(\mu(E),h)>0$ olduğunu kabul edilsin. $h\in(0,\mu(n_1))$ keyfi bir sayı ve x,y ise $0<x<y\leq h$ olacak şekilde pozitif tamsayılar olmak üzere

$$y-x=\lambda(\mu(E),h) \tag{4.33}$$

ve

$$(x,y)\cap\mu(E)=\varnothing$$

olsun. Ayrıca, $k=k(h)\in\mathbb{N}$ sayısı

$$k=\min\left\{j\in\mathbb{N}:\mu(n_j)\leq x,n_j\in E\right\}$$

olacak şekilde tanımlansın. Böylece, $k=k(h)$ tanımından

$$\mu(n_k)\leq x<\mu(n_{k-1})$$

elde edilir.

Eğer, $\mu(n_k)<x$ ise

$$(\mu(n_k),y)=(\mu(n_k),x]\cup(x,y)\subseteq(\mu(n_k),\mu(n_{k-1}))\cup(x,y)$$

dir. Sonuç olarak

$$(\mu(n_k),y)\cap\mu(E)=\left[(\mu(n_k),\mu(n_{k-1}))\cap\mu(E)\right]\cup\left[(x,y)\cap\mu(E)\right]=\varnothing$$

ve

$$|y-\mu(n_k)|=|x-\mu(n_k)|+|x-y|$$

sağlanır. Son eşitlik ve (4.33) eşitliğinden

$$\left|y-\mu(n_k)\right|>\lambda(\mu(E),h)$$

elde edilir. Bu ise $\lambda(\mu(E),h)$ tanımı ile çelişir. Böylece,

$$x=\mu(n_k)$$

sağlanır. Buradan

$$(\mu(n_k),\mu(n_{k-1}))\cap\mu(E)=\varnothing$$

ve

$$(x,y)\cap\mu(E)=(\mu(n_k),y)\cap\mu(E)=\varnothing$$

$y\leq\mu(n_{k-1})$ eşitliğini verir. Eğer, $\mu(n_{k-1})\leq h$ ise $x=\mu(n_k)$ eşitliğinin ispatında olduğu gibi

$$\mu(n_{k-1})=y$$

olduğu gösterilebilir.

Böylece, $\lambda(\mu(E),h)=\mu(n_{k-1})-\mu(n_k)$ ve $\mu(n_{k-1})\leq h$ elde edilir. Bu ise (4.32) eşitsizliğini verir. $h<\mu(n_{k-1})$ olması durumunda $y=h$ elde edilir. Eğer, $y<h$ ise

$$|x-y|=|\mu(n_k)-y|<|\mu(n_k)-\mu(n_{k-1})|$$

dir. Bu ise $\lambda(\mu(E)-h)=|x-y|$ eşitliği ile çelişir.

Sonuç olarak, $h<\mu(n_{k-1})$ ise

$$\frac{\lambda(\mu(E),h)}{h}=\frac{y-x}{h}=\frac{h-\mu(n_k)}{h}$$

elde edilir. Böylece,

$$f(t)=\frac{t-\mu(n_k)}{t}$$

biçiminde tanımlı fonksiyon $(\mu(n_k),\infty)$ aralığında artan bir fonksiyon olduğundan $h<\mu(n_{k-1})$ olması

$$\frac{h-\mu(n_k)}{h}\leq\frac{\mu(n_{k-1})-\mu(n_k)}{\mu(n_{k-1})}$$

eşitsizliğini verir. Bu ise (4.32) eşitsizliği ile denktir. ■

Sıradaki önerme $E\subseteq\mathbb{N}$ kümesinin hangi koşullar altında nonporous, porous veya kuvvetli porous olduğunu verir.

Önerme 4.2.1. (n_k) her $k\in\mathbb{N}$ için $n_k<n_{k+1}$ eşitsizliğini sağlayan bir dizi olmak üzere $E=\{n_1,n_2,\dots,n_k,n_{k+1},\dots\}$ doğal sayıların sonsuz elemanlı bir alt kümesi ve $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ herhangi bir salınım fonksiyonu olsun. Bu durumda,

(i) E kümesi sonsuzlukta μ fonksiyonuna göre nonporous bir kümedir (yani $\overline{p}_\mu(E)=0$)

ancak ve ancak

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}=1, \tag{4.34}$$

(ii) E kümesi sonsuzlukta μ fonksiyonuna göre porous bir kümedir (yani $\overline{p}_\mu(E)>0$)

ancak ve ancak

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}<1, \tag{4.35}$$

(iii) E kümesi sonsuzlukta μ fonksiyonuna göre kuvvetli porous bir kümedir (yani $\overline{p}_\mu(E)=1$)

ancak ve ancak

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}=0. \tag{4.36}$$

İspat. (i) $(\Leftarrow)$ (4.34) sağlansın. O halde Lemma 4.2.1 den

$$\overline{p}_\mu(E)=1-\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}=1-\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}=0$$

elde edilir. Böylece E kümesinin sonsuzlukta μ salınım fonksiyonuna göre nonporous olduğu elde edilir.

$(\Rightarrow)$ $\overline{p}_\mu(E)=0$ olsun. O halde Lemma 4.2.1 kullanılırsa

$$1=\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}$$

elde edilir. μ salınım fonksiyonu azalan olduğundan

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}\le 1$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$1=\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}\le\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}\le 1$$

elde edilir. Yani (4.34) sağlanır.

(ii) $(\Leftarrow)$ (4.35) sağlansın. O halde Lemma 4.2.1 den

$$0<\overline{p}_{\mu}(E)=1-\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}<1-\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}<1$$

elde edilir. Böylece E kümesinin sonsuzlukta μ salınım fonksiyonuna göre porous olduğu elde edilir.

$(\Rightarrow)$ E kümesi sonsuzlukta porous olsun. O halde Lemma 4.2.1 den

$$0<\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}<1$$

eşitsizliği sağlanır. Böylece

$$0<\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}\le\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}<1$$

elde edilir. Yani (4.35) sağlanır.

(iii) $(\Leftarrow)$ (4.36) sağlansın. O halde Lemma 4.2.1 den

$$\overline{p}_{\mu}(E)=1-\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}=1$$

elde edilir. Böylece E kümesinin sonsuzlukta μ salınım fonksiyonuna göre kuvvetli porous olduğu elde edilir.

$(\Rightarrow)$ E kümesi sonsuzlukta kuvvetli porous olsun. O halde Lemma 4.2.1 den

$$1=\overline{p}_{\mu}(E)=1-\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}$$

eşitliği elde edilir. Yani (4.36) sağlanır. ■

Teorem 4.2.2. $E\subseteq\mathbb{N}$, $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ salınım fonksiyonu ve $E_\mu=\mu(E)\cup\{0\}$ olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir

(i) E kümesi sonsuzlukta μ salınım fonksiyonuna göre nonporous bir kümedir. Yani

$$\overline{p}_{\mu}(E)=0. \tag{4.37}$$

(ii) Her $\tilde{r}$ normalleyen dizisi için

$$\overline{\Omega}^{E_\mu}_{0,\tilde{r}}=\mathbb{R}^+ \tag{4.38}$$

eşitliği sağlanır.

(iii) Her $\tilde{r}$ normalleyen dizisinin bir $\tilde{r}'$ alt dizisi vardır öyle ki $\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}'}^{E_\mu}$ pretanjant uzayı $(0,1)$ aralığının yoğun bir alt kümesini içerir.

İspat. (i) sağlansın. E kümesi sonsuzlukta nonporous olsun. O halde her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere E sonsuz elemanlıdır. Yani $E = \{n_1, n_n, \ldots, n_k, n_{k+1}, \ldots\}$ biçimindedir. Önerme 4.2.1 den

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)} = 1 \tag{4.39}$$

elde edilir. $h = \{h_m\}_{m\in\mathbb{N}}$, pozitif reel sayıların $\lim_{m\to\infty} h_m = 0$ olacak biçimde herhangi bir dizisi olsun. Her $m \in \mathbb{N}$ için $k(m)$ sayısı

$$k(m) = \min\{k \in \mathbb{N} : \mu(n_k) \le h_m\}$$

olarak tanımlansın. O halde

$$\mu\left(n_{k(m)}\right) \le h_m < \mu\left(n_{k(m)-1}\right) \tag{4.40}$$

eşitsizliği yeterince büyük her m için sağlanır. (4.39) ve (4.40) dan

$$1 \le \liminf_{m\to\infty} \frac{h_m}{\mu\left(n_{k(m)}\right)} \le \limsup_{m\to\infty} \frac{h_m}{\mu\left(n_{k(m)}\right)} \le \limsup_{k\to\infty} \frac{\mu\left(n_{k(m)-1}\right)}{\mu\left(n_{k(m)}\right)} = 1$$

sağlanır. Böylece $\lim_{m\to\infty} \frac{h_m}{\mu\left(n_{k(m)}\right)} = 1$ sağlanır. Buradan

$$\mathbb{R}^+ \prec \mu(E) \prec E_\mu \tag{4.41}$$

elde edilir. Şimdi $\tilde{r}$ bir normalleyen dizi olsun. Önerme 4.1.5 den (4.41) olması

$$\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{E_\mu} = \overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{\mathbb{R}^+}$$

eşitliğini verir. Böylece (4.38) eşitliğinin sağlanması için gerek ve yeter şart

$$\overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{\mathbb{R}^+} = \mathbb{R}^+ \tag{4.42}$$

olmasıdır.

(4.42) eşitliğini ispatlamak için $0 \in \overline{\Omega}_{0,\tilde{r}}^{\mathbb{R}^+}$ olduğu not edilsin. Eğer $s \in (0,\infty)$ ve $x := (sr_n)_{n\in\mathbb{N}}$ olarak alınırsa

$$\lim_{n\to\infty} \frac{sr_n}{r_n} = s$$

elde edilir. Böylece Sonuç 4.1.1 den $\mathbb{R}^{+}_{0,\tilde{r}}$, $\Omega^{\mathbb{R}^+}_{0,\tilde{r}}$ ile bağlantılı olan maksimal öz dengeli aile olmak üzere $x \in \mathbb{R}^{+}_{0,\tilde{r}}$ elde edilir. Önerme 4.1.3 den $s \in \Omega^{\mathbb{R}^+}_{0,\tilde{r}}$ sağlanır. Sonuç olarak (4.42) sağlanır. Böylece (ii) elde edilir.

(ii)$\Rightarrow$(iii) açıktır.

Şimdi (iii) sağlansın. Teorem 4.1.1 kullanılırsa

$$\overline{p}(E_\mu) = 0 \tag{4.43}$$

elde edilir. $\overline{p}(E_\mu) = \overline{p}(\mu(E))$ olduğundan (4.43) olması

$$\overline{p}(\mu(E)) = 0$$

olmasını sağlar. Teorem 4.2.1 den $\overline{p}_\mu(E) = \overline{p}(\mu(E))$ elde edilir. Sonuç olarak (4.37) sağlanır. Yani (i) elde edilmiş olur. ■

Sonuç 4.2.1. $E \subseteq \mathbb{N}$, μ salınım fonksiyonu ve $E_\mu := \mu(E) \cup \{0\}$ olsun. Aşağıdaki durumlar denktir:

(i) E kümesi sonsuzlukta μ salınım fonksiyonuna göre porous bir kümedir.

(ii) $\tilde{r}$ normalleyen dizisi ve $(a,b) \subseteq (0,1)$ aralığı $|a-b| > 0$ olmak üzere vardır ve her $\tilde{r}\,'$ için

$$\overline{\Omega}^{E_\mu}_{0,\tilde{r}'} \cap (a,b) = \varnothing$$

sağlanır.

(iii) En az bir $\tilde{r}$ normalleyen dizisi vardır öyle ki

$$\mathbb{R}^+ - \overline{\Omega}^{E_\mu}_{0,\tilde{r}'} \neq \varnothing$$

sağlanır.

İspat. Teorem 4.2.1 den E kümesinin sonsuzlukta porous olması için gerek ve yeter şart $\mu(E)$ kümesinin 0 da porous olmasıdır. $\mu(E)$ kümesinin 0 da porous olması için gerek ve yeter şart E_μ kümesinin 0 da porous olmasıdır. O halde Teorem 4.2.2 ve Teorem 4.1.1 kullanılırsa istenilen elde edilir. ■

Teorem 4.2.3. $E \subseteq \mathbb{N}$, μ salınım fonksiyonu ve $E_\mu = \mu(E) \cup \{0\}$ olsun. Bir $p \in \mathbb{R}$ sayısının E kümesinin sonsuzlukta porosity sayısı, yani $p \in \mathrm{P}_\mu(E)$ olması için gerek ve yeter şart bir $\tilde{t} \subseteq \mu(\mathbb{N})$ normalleyen dizisinin ve $(a,b) \subseteq (0,1)$ açık aralığının $|a-b| = p$ olacak ve

(i) $\tilde{t}$ normalleyen dizisinin her $\tilde{t}'$ alt dizisi için $(a,b) \cap \overline{\Omega}_{0,\tilde{t}'}^{E_\mu} = \varnothing$ dir;

(ii) Eğer $(c,d) \subseteq (0,1)$ açık aralığı $\tilde{t}$ normalleyen dizisinin her $\tilde{t}'$ alt dizisi için $(c,d) \cap \overline{\Omega}_{0,\tilde{t}'}^{E_\mu} \neq \varnothing$ koşulunu sağlarsa $|c-d| \leq |a-b|$ dir

koşulları sağlanacak şekilde var olmasıdır.

İspat. Bu Teoremin ispatı Teorem 4.1.1 ile benzer biçimde elde edilir. ■

Lemma 4.2.2. $0 \in A \subseteq \mathbb{R}^+$, M ve K kümeleri $\mathbb{R}^+$ nın $0 \in (acM) \cap (acK)$ ve $M \prec K$ koşullarını sağlayan alt kümeleri olsunlar. Her $\tilde{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ normalleyen dizisi için bir $\tilde{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ normalleyen dizisi vardır öyle ki $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ doğal sayıların kesin artan bir dizisi olmak üzere $\tilde{r}' = (r_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ ve $\tilde{t}' = (t_{n_k})_{k\in\mathbb{N}}$ alt dizileri için

$$\Omega_{0,\tilde{r}'}^{A} = \Omega_{0,\tilde{t}'}^{A} \tag{4.44}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. $\tilde{r} = (r_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq M$ olsun. $\prec$ tanımından $\lim_{n\to\infty} \frac{r_n}{t_n} = 1$ sağlanacak biçimde $\tilde{t} = (t_n)_{n\in\mathbb{N}} \subseteq K$ dizisi vardır. Bu eşitlik aynı zamanda doğal sayıların kesin artan her $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi için $\lim_{k\to\infty} \frac{r_{n_k}}{t_{n_k}} = 1$ olmasını verir. Böylece her $x = (x_n) \in A$ için

$$\left(\lim_{k\to\infty} \frac{x_{n_k}}{r_{n_k}} < \infty \right) \Leftrightarrow \left(\lim_{k\to\infty} \frac{x_{n_k}}{t_{n_k}} < \infty \right)$$

sağlanır. Sonuç 4.1.1 kullanılırsa $A_{0,\tilde{r}'} = A_{0,\tilde{t}'}$ eşitliği sağlanır. O halde (4.44) eşitliği elde edilmiş olur. ■

Önerme 4.2.2. Herhangi bir $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ salınım fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{\mu(n+1)}{\mu(n)} = 1 \tag{4.45}$$

koşulu sağlansın. Her $E \subseteq \mathbb{N}$ için

$$\mathrm{P}(\mu(E)) = \mathrm{P}_\mu(E) \tag{4.46}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Teorem 4.2.2 in ispatında olduğu gibi eğer (4.45) sağlanırsa $(0,\infty)\prec\mu(\mathbb{N})$ elde edilir. Şimdi $E\subseteq\mathbb{N}$ olsun.

$\mathrm{P}_{\mu}(E)\subseteq\mathrm{P}(\mu(E))$

içermesi sağlanır. p, $\mu(E)$ kümesinin 0 noktasındaki bir porosity sayısı olsun. Teorem 4.1.1 den $|a-b|=p$ eşitliği sağlanacak ve teoremdeki (i), (ii) koşulları sağlanacak şekilde bir $\tilde{r}\subseteq(0,\infty)$ normalleyen dizisi ve bir $(a,b)\subseteq(0,1)$ açık aralığı vardır. Lemma 4.2.2 kullanılırsa $E_{\mu}=\mu(E)\cup\{0\}$ için Teorem 4.2.3 ün (i) ve (ii) koşulları sağlanacak şekilde bir $\tilde{t}\subseteq\mu(\mathbb{N})$ normalleyen dizisi vardır. Böylece Teorem 4.2.3 den p, E kümesinin μ salınım fonksiyonuna göre sonsuzluktaki bir porosity sayısıdır. Böylece $\mathrm{P}(\mu(E))\subseteq\mathrm{P}_{\mu}(E)$ içermesi sağlanır. Böylece (4.46) eşitliği elde edilmiş olur. ■

Sıradaki teorem ve sonuç herhangi bir $E\subseteq\mathbb{N}$ kümesinin farklı iki salınım fonksiyonuna göre porosity sayıları kümelerinin aynı olması için yeter koşullar verilecektir.

Teorem 4.2.4. μ_1, μ_2 herhangi iki salınım fonksiyonu için

$$\lim_{n,m\to\infty}\frac{\mu_1(n)\mu_2(m)}{\mu_2(n)\mu_1(m)}=1 \tag{4.47}$$

sağlansın. Bu durumda her $E\subseteq\mathbb{N}$ için

$$\mathrm{P}_{\mu_1}(E)=\mathrm{P}_{\mu_2}(E) \tag{4.48}$$

eşitliği sağlanır.

İspat. Eğer E kümesi sonlu ise (4.24) ve (4.25) den

$$\overline{p}_{\mu_1}(E)=\underline{p}_{\mu_1}(E)=\overline{p}_{\mu_2}(E)=\underline{p}_{\mu_2}(E)=1$$

sağlanır. Sonuç olarak $\mathrm{P}_{\mu_1}(E)=\mathrm{P}_{\mu_2}(E)=\{1\}$ elde edilir.

Şimdi E kümesi sonlu olmasın. (4.47) sağlansın ve $p\in\mathrm{P}_{\mu_1}(E)$ olsun. Tanım 4.2.2 den kesin artan bir $(n_k)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisi vardır öyle ki

$$p=\lim_{k\to\infty}\frac{\lambda_{\mu_1}(E,n_k)}{\mu_1(n_k)} \tag{4.49}$$

sağlanır. E sonsuz elemanlı olduğundan her $k\in\mathbb{N}$ için $n_k^{(1)},n_k^{(2)}\in\mathbb{N}$ vardır öyleki $n_k\le n_k^{(1)}<n_k^{(2)}$ olmak üzere

$$\lambda_{\mu_1}(E,n_k)=\mu_1\left(n_k^{(1)}\right)-\mu_1\left(n_k^{(2)}\right) \tag{4.50}$$

eşitliği sağlanır. $\varepsilon>0$ olsun. (4.47) den yeterince büyük m,n için

$$\left(1-\varepsilon\right)\frac{\mu_2\left(n\right)}{\mu_2\left(m\right)} \le \frac{\mu_1\left(n\right)}{\mu_1\left(m\right)} \le \left(1+\varepsilon\right)\frac{\mu_2\left(n\right)}{\mu_2\left(m\right)} \tag{4.51}$$

sağlanır. (4.50) ve (4.51) kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{\mu_1}\left(E,n_k\right)}{\mu_1\left(n_k\right)} &= \frac{\mu_1\left(n_k^{(1)}\right)}{\mu_1\left(n_k\right)} - \frac{\mu_1\left(n_k^{(2)}\right)}{\mu_1\left(n_k\right)} \\ &\le \left(1+\varepsilon\right)\frac{\mu_2\left(n_k^{(1)}\right)}{\mu_2\left(n_k\right)} - \left(1-\varepsilon\right)\frac{\mu_2\left(n_k^{(2)}\right)}{\mu_2\left(n_k\right)} \\ &\le \frac{\mu_2\left(n_k^{(1)}\right)-\mu_2\left(n_k^{(2)}\right)}{\mu_2\left(n_k\right)} + 2\varepsilon \le \frac{\lambda_{\mu_2}\left(E,n_k\right)}{\mu_2\left(n_k\right)} + 2\varepsilon\end{aligned} \tag{4.52}$$

elde edilir. Her k için $\frac{\lambda_{\mu_2}\left(E,n_k\right)}{\mu_2\left(n_k\right)} \le 1$ olduğu açıktır. Böylece $\left(\frac{\lambda_{\mu_2}\left(E,n_k\right)}{\mu_2\left(n_k\right)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir $\left(\frac{\lambda_{\mu_2}\left(E,n_{k'}\right)}{\mu_2\left(n_{k'}\right)}\right)_{k'\in\mathbb{N}}$ alt dizisi vardır.

$$p' = \lim_{k'\to\infty}\frac{\lambda_{\mu_2}\left(E,n_{k'}\right)}{\mu_2\left(n_{k'}\right)} \tag{4.53}$$

olsun. (4.49), (4.52) ve (4.53) den $p \le p'+2\varepsilon$ elde edilir. $\varepsilon \to 0$ için $p \le p'$ eşitsizliği sağlanır. (4.49) yerine (4.53), $\left(n_k\right)_{k\in\mathbb{N}}$ yerine de $\left(n_{k'}\right)_{k'\in\mathbb{N}}$ alınır ve yukarıdaki işlemler tekrarlanırsa $\left(n_{k'}\right)_{k'\in\mathbb{N}}$ dizisinin bir $\left(n_{k''}\right)_{k''\in\mathbb{N}}$ alt dizisi elde edilmiş olur öyleki $\left(\frac{\lambda_{\mu_1}\left(E,n_{k''}\right)}{\mu_1\left(n_{k''}\right)}\right)_{k''\in\mathbb{N}}$ dizisi $\left(\frac{\lambda_{\mu_1}\left(E,n_{k'}\right)}{\mu_1\left(n_{k'}\right)}\right)_{k'\in\mathbb{N}}$ dizisinin yakınsak bir alt dizisidir ve

$$p' \le \lim_{k''\to\infty}\frac{\lambda_{\mu_1}\left(E,n_{k''}\right)}{\mu_1\left(n_{k''}\right)}$$

dir. Ayrıca $\left(\frac{\lambda_{\mu_1}\left(E,n_{k''}\right)}{\mu_1\left(n_{k''}\right)}\right)_{k''\in\mathbb{N}}$ dizisi $\left(\frac{\lambda_{\mu_1}\left(E,n_k\right)}{\mu_1\left(n_k\right)}\right)_{k\in\mathbb{N}}$ dizisinin de bir alt dizisi olduğundan

$$p = \lim_{k''\to\infty}\frac{\lambda_{\mu_1}\left(E,n_{k''}\right)}{\mu_1\left(n_{k''}\right)}$$

eşitliği elde edilir. Böylece $p' \le p$ eşitsizliği sağlanır. Aynı zamanda $p \le p'$ eşitsizliği de sağlandığından $p' = p$ elde edilir. Buradan $p' \in \mathrm{P}_{\mu_2}\left(E\right)$ olduğu elde edilir. p, $\mathrm{P}_{\mu_1}\left(E\right)$

kümesinin keyfi bir elemanı olduğundan $\mathrm{P}_{\mu_1}(E) \subseteq \mathrm{P}_{\mu_2}(E)$ sağlanmış olur. Benzer işlemlerle $\mathrm{P}_{\mu_2}(E) \subseteq \mathrm{P}_{\mu_1}(E)$ elde edilir. O halde (4.48) eşitliği sağlanır. ■

Sonuç 4.2.2. μ_1, μ_2 herhangi iki salınım fonksiyonu ve $c > 0$ için $\lim\limits_{n\to\infty} \dfrac{\mu_1(n)}{\mu_2(n)} = c$ sağlansın. O halde, her $E \subseteq \mathbb{N}$ için (4.48) sağlanır.

Şimdi, doğal sayıların alt kümeleri için porosity kavramı ile ilgili birkaç temel özellik ifade edilecektir. Ayrıca sonraki bölümlerdeki ispatlarda kullanılacak bazı lemmalar ve ispatları verilecektir.

Lemma 4.2.3. $A, B \subset \mathbb{N}$ herhangi iki küme olsun. Eğer, $A \subseteq B$ ise her μ salınım fonksiyonu için

$$\overline{p}_\mu(A) \geq \overline{p}_\mu(B)$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. $A \subseteq B$ olsun. Keyfi $n \in \mathbb{N}$ için

$$\lambda_\mu(B,n) \leq \lambda_\mu(A,n)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan

$$\overline{p}_\mu(B) = \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_\mu(B,n)}{\mu(n)} \leq \limsup_{n\to\infty} \frac{\lambda_\mu(A,n)}{\mu(n)} = \overline{p}_\mu(A)$$

elde edilir.

Sonuç 4.2.3. $A \subseteq B \subseteq \mathbb{N}$ olsun. Aşağıdaki durumlar sağlanır:

(i) $\overline{p}_\mu(B) > 0$ ise $\overline{p}_\mu(A) > 0$ dır.

(ii) $\overline{p}_\mu(A) = 0$ ise $\overline{p}_\mu(B) = 0$ dır.

Uyarı 4.2.2. Lemma 4.2.3 ün doğal bir sonucu olarak

(i) Porous bir küme nonporous bir küme içeremez.

(ii) $A,\ B \subset \mathbb{N}$ olmak üzere eğer $\overline{p}_\mu(A) > 0$ ise $\overline{p}_\mu(A \cap B) > 0$ sağlanır.

Uyarı 4.2.3. $A \Delta B := (A - B) \cup (B - A)$ olmak üzere eğer $A \Delta B$ sonlu ise $\overline{p}_\mu(B) = \overline{p}_\mu(A)$ eşitliği sağlanır.

Uyarı 4.2.4. Herhangi sayıda porous kümenin birleşimi porous olmak zorunda değildir.

Örnek 4.2.1. $i \in \mathbb{N}$ olmak üzere $A_i = \{n : n = i^k, k \in \mathbb{N}\}$ kümeleri göz önüne alınsın. Her $i \in \mathbb{N}$ için $\overline{p}_\mu(A_i) > 0$ olduğu açıktır. Ancak $\bigcup\limits_{i=1}^{\infty} A_i = \mathbb{N}$ olup $\overline{p}_\mu(\mathbb{N}) = 0$ dir.

Lemma 4.2.4. $A=\{n_1,n_2,\dots,n_k,\dots\}\subset\mathbb{N}$, $n_k<n_{k+1}$ olacak şekilde verilsin. Eğer, A kümesi sonsuzlukta porous ise $n_0\in\mathbb{N}$ olmak üzere $n_0A=\{n_0n_1,n_0n_2,\dots,n_0n_k,\dots\}$ kümesi de sonsuzlukta porous bir kümedir.

İspat. $A\subset\mathbb{N}$ kümesi sonsuzlukta porous olsun. O halde Lemma 4.2.1 den

$$\overline{p}_\mu(n_0A)=1-\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_0n_k)}{\mu(n_0n_{k-1})}=1-\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_k)}{\mu(n_{k-1})}=\overline{p}_\mu(A)>0$$

elde edilir. ■

4.3. Sonsuzlukta Üst Porosity İçin Uygulamalar

4.3.1. Porosity Yakınsaklık

Bu kısımda doğal sayıların alt kümelerinin sonsuzluktaki üst porosity tanımı kullanılarak reel değerli diziler için porosity yakınsaklık tanımlanacaktır. Porosity yakınsaklığın temel özelliklerinin yanı sıra onun bir regüler toplanabilme metodu olduğu ispatlanacaktır. Ayrıca, porosity sınırlılık, porosity Cauchy dizisi tanımları verilecek ve aralarındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 4.3.1.1. $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reel değerli bir dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon>0$ için $A_\varepsilon:=\{n:|x_n-l|\geq\varepsilon\}$ olmak üzere

$$\overline{p}_\mu(A_\varepsilon)>0 \text{ ve } \overline{p}_\mu(A_\varepsilon^c)=0, \tag{4.54}$$

ise (x_n) dizisine $l\in\mathbb{R}$ noktasına $\overline{p}_\mu$- yakınsaktır denir ve $x_n\to l(\overline{p}_\mu)$ olarak gösterilir. Burada, A_ε^c ile A_ε kümesinin tümleyeni gösterilmektedir.

Özel olarak, eğer $\overline{p}_\mu(A_\varepsilon)=1$ ve $\overline{p}_\mu(A_\varepsilon^c)=0$ sağlanırsa (x_n) dizisi $l\in\mathbb{R}$ sayısına kuvvetli $\overline{p}_\mu$ - yakınsaktır denir ve $x_n\to l(s-\overline{p}_\mu)$ ile gösterilir.

Teorem 4.3.1.1. Yakınsak her dizi $\overline{p}_\mu$ - yakınsaktır.

İspat. $x_n\to l$, $(n\to\infty)$ olsun. O halde her $\varepsilon>0$ için en az bir $n_0\equiv n_0(\varepsilon)\in\mathbb{N}$ vardır öyleki her $n\geq n_0$ için $|x_n-l|<\varepsilon$ sağlanır. Buradan

$$\{n:|x_n-l|\geq\varepsilon\}\subseteq\{1,2,\dots,n_0\}$$

içermesinin sağlandığı açıktır. Uyarı 4.2.1 ve Lemma 4.2.3 den $x_n\to l(\overline{p}_\mu)$ elde edilir. ■

Uyarı 4.3.1.1. Teorem 4.3.1.1 in tersi doğru değildir.

Örnek 4.3.1.1. $x=(x_n)$ reel değerli dizisi ve $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ salınım fonksiyonu sırasıyla

$$x_n=\begin{cases} n, & n=2^m, m\in\mathbb{N}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

ve

$$\mu(n)=\left(\frac{1}{n}\right),\ n\in\mathbb{N}$$

olarak tanımlansın. Her $\varepsilon>0$ için

$$A_\varepsilon=\{n:|x_n-0|\ge\varepsilon\}=\{n:|x_n|\ge\varepsilon\}=\{n:n=2^m,m\in\mathbb{N}\}$$

olup $\overline{p}_\mu(A_\varepsilon)>0$ sağlanır.

Ayrıca $\overline{p}_\mu(A_\varepsilon^c)=0$ dir. Yani verilen dizi $x_n\to 0(\overline{p}_\mu)$ dir. Ancak verilen dizi 0 a klasik anlamda yakınsak değildir.

Uyarı 4.3.1.2. Teorem 4.3.1.1 ve Uyarı 4.3.1.1 den $\overline{p}_\mu$- yakınsaklığın regüler toplanabilme metodu olduğu anlaşılır.

Teorem 4.3.1.2. $\overline{p}_\mu$ - yakınsak bir dizinin $\overline{p}_\mu$ - limiti tektir.

İspat. $x=(x_n)$ reel değerli dizisinin $\overline{p}_\mu$- limitinin tek olmadığı kabul edilsin. Yani, $x_n\to l(\overline{p}_\mu)$, $x_n\to L(\overline{p}_\mu)$ ve $l\ne L$ olsun.

$\varepsilon>0$ sayısı, $\varepsilon<\frac{1}{2}|l-L|$ biçiminde seçilsin. $\overline{p}_\mu$- yakınsaklık tanımından $\overline{p}_\mu(\{n:|x_n-l|\ge\varepsilon\})>0$ ve $\overline{p}_\mu(\{n:|x_n-L|\ge\varepsilon\})>0$ sağlanır. O halde

$$\{n:|x_n-l|<\varepsilon\}\subset\{n:|x_n-L|\ge\varepsilon\}$$

içermesi sağlanır. Yukarıdaki içerme ve Sonuç 4.2.3 den $\overline{p}_\mu(\{n:|x_n-l|<\varepsilon\})>0$ elde edilir. Bu ise $x_n\to l(\overline{p}_\mu)$ olması ile çelişir. O halde $l=L$ dir. ■

Teorem 4.3.1.3. $x=(x_n)_{n\in\mathbb{N}}$ reel değerli bir dizi olsun. (n_k) doğal sayıların kesin artan bir dizisi olmak üzere $\{n_k:k\in\mathbb{N}\}$ kümesi sonsuzlukta nonporous olsun. Eğer, $x_n\to l(\overline{p}_\mu)$ ise (x_{n_k}) alt dizisi de l sayısına $\overline{p}_\mu$ - yakınsaktır.

İspat. $x_n\to l(\overline{p}_\mu)$ olsun. O halde her $\varepsilon>0$ için

$$\overline{p}_\mu(A_\varepsilon)>0 \text{ ve } \overline{p}_\mu(A_\varepsilon^c)=0$$

sağlanır. $B_\varepsilon=\left\{n_k:\left|x_{n_k}-l\right|\geq\varepsilon\right\}$ kümesi ele alınsın. Açıktır ki

$B_\varepsilon\subset A_\varepsilon$ ve $A_\varepsilon^c\subset B_\varepsilon^c$

içermeleri sağlanır. Yukarıdaki içermeler ve Lemma 4.2.3 den

$\overline{p}_\mu\left(B_\varepsilon\right)>0$ ve $\overline{p}_\mu\left(B_\varepsilon^c\right)=0$

elde edilir.

Böylece $x_{n_k}\to l\left(\overline{p}_\mu\right)$ sağlanır. ■

Uyarı 4.3.1.3. Teorem 4.3.1.3 ün tersi doğru değildir.

Örnek 4.3.1.2. $x=\left(x_n\right)$ dizisi ve $\left(x_{2m}\right)$ alt dizisi sırasıyla aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$x_n:=\begin{cases}2^k, & n=2^k,\\ 3^k, & n=2k-1,\\ 0, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

ve

$$x_{2m}:=\begin{cases}2^k, & m=2^{k-1}\\ 0, & \text{diğer durumlarda,}\end{cases}$$

$\left\{2m:m\in\mathbb{N}\right\}$ kümesi sonsuzlukta nonporous bir kümedir. Yani Teorem 4.3.1.3 ün koşulları sağlanır. Ayrıca $x_{2m}\to 0\left(\overline{p}_\mu\right)$ sağlanır. Ancak $\left(x_n\right)$ dizisi 0 a $\overline{p}_\mu$ - yakınsak değildir.

Uyarı 4.3.1.4. Teorem 4.3.1.3 deki $\left\{n_k:k\in\mathbb{N}\right\}$ kümesinin nonporous olması koşulu kaldırılamaz.

Örnek 4.3.1.1 deki dizi ve $\left\{2^m:m\in\mathbb{N}\right\}$ kümesi göz önüne alınırsa $\overline{p}_\mu\left(\left\{2^m:m\in\mathbb{N}\right\}\right)>0$ sağlanır. Eğer, $\left(x_{2^m}\right)$ alt dizisi ele alınırsa $x_n\to 0\left(\overline{p}_\mu\right)$ olmasına rağmen $x_{2^m}\to 0\left(\overline{p}_\mu\right)$ sağlanmaz.

Teorem 4.3.1.4. $x=\left(x_n\right)$ reel değerli bir dizi ve $l\in\mathbb{R}$ olsun. Eğer, $x_n\to l\left(\overline{p}_\mu\right)$ ise $\left(x_n\right)$ dizisinin $l\in\mathbb{R}$ sayısına klasik anlamda yakınsak olan bir $\left(x_{n_k}\right)$ alt dizisi vardır.

İspat. $x_n\to l\left(\overline{p}_\mu\right)$ olsun. O halde, her $\varepsilon>0$ için A_ε kümesi sonsuzlukta porous A_ε^c ise sonsuzlukta nonporous bir kümedir. Eğer A_ε kümesi sonlu ise $x_n\to l,\ \left(n\to\infty\right)$ olacağından istenilen elde edilir.

Şimdi A_ε kümesi sonlu olmasın. Buradan A_ε kümesi, her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k < n_{k+1}$ ve $k \to \infty$ için $n_k \to \infty$ olmak üzere $A_\varepsilon = \{n_1, n_2, \ldots, n_k, n_{k+1}, \ldots\}$ biçiminde ifade edilebilir. Her $k \in \mathbb{N}$ için $(n_k, n_{k+1}) = \varnothing$ olabilir veya (n_k, n_{k+1}) aralığı sonlu sayıda doğal sayı içerebilir. Boştan farklı ilk aralıktaki en küçük doğal sayı n_k^1 ile gösterilsin; boştan farklı ikinci aralıktaki en küçük doğal sayı n_k^2 ile gösterilsin. Eğer bu şekilde devam edilirse her $i \in \mathbb{N}$ için $n_k^i \notin A_\varepsilon$ ve $n_k^i < n_k^{i+1}$ olmak üzere doğal sayıların $\left(n_k^i\right)_{i \in \mathbb{N}}$ dizisi elde edilmiş olur. Söz konusu dizi kullanılarak oluşturulan $\left(x_{n_k^i}\right)$, (x_n) dizisinin bir alt dizisidir ve $x_{n_k^i} \to l$, $(n \to \infty)$ sağlanır. ■

Teorem 4.3.1.5. $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ reel değerli iki dizi olsun. Eğer $x_n \to l\left(\overline{p}_\mu\right)$ ve $y_n \to t\left(\overline{p}_\mu\right)$ ise $x_n + y_n \to l + t\left(\overline{p}_\mu\right)$ sağlanır.

İspat. $x_n \to l\left(\overline{p}_\mu\right)$ ve $y_n \to t\left(\overline{p}_\mu\right)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $A_{\varepsilon_x} = \{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\}$ ve $A_{\varepsilon_y} = \{n : |y_n - t| \geq \varepsilon\}$ kümeleri sonsuzlukta porous kümelerdir. Kolaylık için $z_n = x_n + y_n$, $l' = l + t$ ve $A_{\varepsilon_{x+y}} = \{n : |z_n - l'| \geq \varepsilon\}$ olarak adlandırılsın. Buradan

$$A_{\varepsilon_{x+y}} \subseteq A_{\varepsilon_x} \cup A_{\varepsilon_y} \tag{4.55}$$

içermesi sağlanır. (4.55) deki kümeler sırasıyla

$A_{\varepsilon_{x+y}} = \{n_k : k \in \mathbb{N}\}$, $A_{\varepsilon_x} = \{n_k^x : k \in \mathbb{N}\}$ ve $A_{\varepsilon_y} = \{n_k^y : k \in \mathbb{N}\}$ olarak ifade edilebilir. $A_{\varepsilon_x} \cap A_{\varepsilon_y} = \varnothing$ olması durumunda yeterince büyük $n \in \mathbb{N}$ ve her $k \in \mathbb{N}$ için

$$\begin{aligned}
&n_{k-1}^x < n_{k-1}^y < n_k^x < n_k^y \\
&n_{k-1}^y < n_{k-1}^x < n_k^y < n_k^x \\
&n_{k-1}^x < n_k^x < n_{k-1}^y < n_k^y \\
&n_{k-1}^y < n_k^y < n_{k-1}^x < n_k^x
\end{aligned} \tag{4.56}$$

eşitsizliklerinden birisi sağlanır. Burada (4.56) daki ilk eşitsizlik ele alınarak ispat yapılacaktır. Diğer durumlar da benzer biçimde ispatlanabilir:

$$\begin{aligned}
\frac{\left|\mu\left(n_{k-1}^x\right) - \mu\left(n_{k-1}^y\right)\right|}{\mu\left(n_{k-1}^x\right)} &= \left|\frac{\mu\left(n_{k-1}^x\right)}{\mu\left(n_{k-1}^x\right)} - \frac{\mu\left(n_{k-1}^y\right)}{\mu\left(n_{k-1}^x\right)}\right| = \left|1 - \frac{\mu\left(n_{k-1}^y\right)}{\mu\left(n_{k-1}^x\right)}\right| \\
&> \left|1 - \frac{\mu\left(n_{k-1}^y\right)}{\mu\left(n_k^y\right)}\right| = \left|\frac{\mu\left(n_k^y\right)}{\mu\left(n_k^y\right)} - \frac{\mu\left(n_{k-1}^y\right)}{\mu\left(n_k^y\right)}\right| \\
&= \frac{\left|\mu\left(n_k^y\right) - \mu\left(n_{k-1}^y\right)\right|}{\mu\left(n_k^y\right)} > \frac{\left|\mu\left(n_k^y\right) - \mu\left(n_{k-1}^y\right)\right|}{\mu\left(n_{k-1}^y\right)}
\end{aligned}$$

olup yukarıdaki eşitsizlikte $k \to \infty$ için limit supremum değerleri hesaplanırsa eşitsizliğin sol tarafı $\overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon_{x+y}}\right)$, sağ tarafı ise $\overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon_y}\right)$ değerlerini verir. Yani

$$\overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon_{x+y}}\right) > \overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon_y}\right)$$

eşitsizliği sağlanır. Buradan ve hipotezden

$$\overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon_{x+y}}\right) = \overline{p}_{\mu}\left(\left\{n : \left|z_n - l'\right| \geq \varepsilon\right\}\right) > 0 \tag{4.57}$$

elde edilir. $A_{\varepsilon_x} \cap A_{\varepsilon_y} \neq \varnothing$ olması durumunda ise (4.56) daki eşitsizliklerden bir kısmı veya tamamı eşitlik olur. Bu durumda da (4.57) benzer biçimde elde edilir.

Diğer taraftan, $x_n \to l\left(\overline{p}_{\mu}\right)$ ve $y_n \to t\left(\overline{p}_{\mu}\right)$ olduğundan, (x_n) ve (y_n) dizilerinin $x_{n_k} \to l$ ve $y_{n_k} \to t$, $(n \to \infty)$ olacak şekilde $\left(x_{n_k}\right)$ ve $\left(y_{n_k}\right)$ alt dizileri vardır vardır. Ayrıca, $\left\{n_k : k \in \mathbb{N}\right\}$ kümesi sonsuzlukta nonporousdur.

(z_n) dizisinin $z_{n_k} = x_{n_k} + y_{n_k}$ olacak şekilde $\left(z_{n_k}\right)$ alt dizisi için $z_{n_k} \to l'$, $(k \to \infty)$ olduğu açıktır. Buradan, $\left\{n_k : \left|z_{n_k} - l'\right| < \varepsilon\right\}$ kümesi nonporousdur. O halde

$$\left\{n_k : \left|z_{n_k} - l'\right| < \varepsilon\right\} \subseteq \left\{n : \left|z_n - l'\right| < \varepsilon\right\}$$

içermesinden ve Lemma 4.2.3 den $\left\{n : \left|z_n - l'\right| < \varepsilon\right\}$ kümesinin de sonsuzlukta nonporous olduğu elde edilir. O halde $x_n + y_n \to l + t\left(\overline{p}_{\mu}\right)$ sağlanır. ■

Teorem 4.3.1.6. $x = (x_n)$ reel değerli bir dizi olsun. Eğer, $x_n \to l\left(\overline{p}_{\mu}\right)$ ise $0 \neq \alpha \in \mathbb{R}$ olmak üzere $\alpha x_n \to \alpha l\left(\overline{p}_{\mu}\right)$ sağlanır.

İspat. $x_n \to l\left(\overline{p}_{\mu}\right)$ olsun. O halde $A_{\varepsilon} = \left\{n : \left|x_n - l\right| \geq \varepsilon\right\}$ olmak üzere $\overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon}\right) > 0$ ve $\overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon}^{c}\right) = 0$ dir. Ayrıca $\alpha x = (\alpha x_n)$ dizisi için

$$\left\{n : \left|\alpha x_n - \alpha l\right| \geq \varepsilon\right\} = \left\{n : \left|x_n - l\right| \geq \varepsilon/\left|\alpha\right|\right\} = A_{\varepsilon/|\alpha|}$$

ve

$$\left\{n : \left|\alpha x_n - \alpha l\right| < \varepsilon\right\} = \left\{n : \left|x_n - l\right| < \varepsilon/\left|\alpha\right|\right\} = A_{\varepsilon/|\alpha|}^{c}$$

sağlanır. $x = (x_n)$ dizisinin $\overline{p}_{\mu}$ - yakınsaklığından

$$\overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon/|\alpha|}\right)>0 \text{ ve } \overline{p}_{\mu}\left(A^{c}_{\varepsilon/|\alpha|}\right)=0$$

sağlanır. Bu ise (αx_n) dizisinin αl sayısına $\overline{p}_{\mu}$ - yakınsaklığını verir. ■

Sıradaki iki teoremde $\overline{p}_{\mu}$ - yakınsaklık ile ilgili karakterizasyonlar verilecektir.

Teorem 4.3.1.7. $x=(x_n)$ reel değerli bir dizi ve $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^{+}$ salınım fonksiyonu olsun. Her $k\in\mathbb{N}$ için $n_k<n_{k+1}$, $n_k,n_{k+1}\in A_{\varepsilon}$ ve $m_k<m_{k+1}$, $m_k,m_{k+1}\in A^{c}_{\varepsilon}$ olmak üzere aşağıdaki durumlar sağlanır:

(i) $x_n\to l(\overline{p}_{\mu})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}<1 \text{ ve } \limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(m_{k+1})}{\mu(m_k)}=1 \tag{4.58}$$

olmasıdır.

(ii) $x_n\to l(s-\overline{p}_{\mu})$ olması için gerek ve yeter şart

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}=0 \text{ ve } \limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(m_{k+1})}{\mu(m_k)}=1$$

olmasıdır.

İspat. (i) $x_n\to l(\overline{p}_{\mu})$ sağlansın. Lemma 4.2.1 den

$$0<\overline{p}_{\mu}(A_{\varepsilon})=1-\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}<1$$

sağlanır. O halde

$$\liminf_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}<\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(n_{k+1})}{\mu(n_k)}<1$$

elde edilir. Ayrıca, $\overline{p}_{\mu}(A^{c}_{\varepsilon})=0$ olduğundan ve Önerme 4.2.1 den

$$\lim_{k\to\infty}\frac{\mu(m_{k+1})}{\mu(m_k)}=1$$

olacağından

$$\limsup_{k\to\infty}\frac{\mu(m_{k+1})}{\mu(m_k)}=1$$

elde edilir.

Şimdi (4.58) sağlansın. O halde Lemma 4.2.1 den

$$0 < \overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon}\right) = 1 - \liminf_{k\to\infty} \frac{\mu\left(n_{k+1}\right)}{\mu\left(n_{k}\right)} < 1$$

ve

$$\overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon}^{c}\right) = 1 - \liminf_{k\to\infty} \frac{\mu\left(m_{k+1}\right)}{\mu\left(m_{k}\right)} = 0$$

sağlanır. O halde buradan $x_n \to l\left(\overline{p}_{\mu}\right)$ elde edilir.

(ii) durumu da benzer işlemlerle elde edilir. ■

Teorem 4.3.1.8. $x = \left(x_n\right)$ reel değerli bir dizi ve $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^{+}$ salınım fonksiyonu olsun. $x_n \not\to l\left(\overline{p}_{\mu}\right)$ olması için gerek ve yeter şart her $k \in \mathbb{N}$ için $n_k < n_{k+1}$ olmak üzere $n_k, n_{k+1} \in A_{\varepsilon}$ için

$$\lim_{k\to\infty} \frac{\mu\left(n_{k+1}\right)}{\mu\left(n_{k}\right)} = 1 \tag{4.59}$$

olmasıdır.

İspat. (4.59) sağlansın. O halde Lemma 4.2.1 den

$$\overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon}\right) = 1 - \liminf_{k\to\infty} \frac{\mu\left(n_{k+1}\right)}{\mu\left(n_{k}\right)} = 1 - \lim_{k\to\infty} \frac{\mu\left(n_{k+1}\right)}{\mu\left(n_{k}\right)} = 0$$

elde edilir. Yani A_{ε} kümesi sonsuzlukta nonporous bir kümedir. O halde $x_n \not\to l\left(\overline{p}_{\mu}\right)$ dir.

Şimdi $x_n \not\to l\left(\overline{p}_{\mu}\right)$ olsun. Lemma 4.2.1 den

$$1 = \liminf_{k\to\infty} \frac{\mu\left(n_{k+1}\right)}{\mu\left(n_{k}\right)}$$

elde edilir. μ azalan olduğundan

$$\limsup_{k\to\infty} \frac{\mu\left(n_{k+1}\right)}{\mu\left(n_{k}\right)} \le 1$$

sağlanır. Böylece

$$1 = \liminf_{k\to\infty} \frac{\mu\left(n_{k+1}\right)}{\mu\left(n_{k}\right)} \le \limsup_{k\to\infty} \frac{\mu\left(n_{k+1}\right)}{\mu\left(n_{k}\right)} \le 1$$

elde edilir. Yani (4.59) sağlanır. ■

Tanım 4.3.1.2. $x = \left(x_n\right)$ reel değerli dizisi verilsin. Eğer, her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük her $n, m \in \mathbb{N}$ için $A\left(\varepsilon\right) = \left\{n : \left|x_n - x_m\right| \ge \varepsilon\right\}$ olmak üzere $\overline{p}_{\mu}\left(A\left(\varepsilon\right)\right) > 0$ ve $\overline{p}_{\mu}\left(A\left(\varepsilon\right)^{c}\right) = 0$ ise $\left(x_n\right)$ dizisine $\overline{p}_{\mu}$ - Cauchy dizisi denir. Burada $A\left(\varepsilon\right)^{c}$, $A\left(\varepsilon\right)$ kümesinin tümleyenidir.

Teorem 4.3.1.9. $x=(x_n)$ dizisi $\overline{p}_\mu$ - yakınsak bir dizi ise $\overline{p}_\mu$ - Cauchy dizisidir.

İspat. (x_n) dizisi $l\in\mathbb{R}$ sayısına $\overline{p}_\mu$ - yakınsak olsun. Her $\varepsilon>0$ için

$$A(\varepsilon)=\{n:|x_n-x_m|\geq\varepsilon\}\subseteq\{n:|x_n-l|\geq\varepsilon\}\cup\{n:|x_m-l|\geq\varepsilon\}$$

içermesi sağlanır. Ayrıca yukarıdaki içermede sağ taraftaki kümelerden birisi diğerinin alt kümesidir. O halde

$$\{n:|x_m-l|\geq\varepsilon\}\subset\{n:|x_n-l|\geq\varepsilon\}=A_\varepsilon$$

kabul edilsin. Buradan sağ taraftaki birleşim A_ε kümesinin kendisi olur. $\overline{p}_\mu$ -yakınsaklıktan ve Sonuç 4.2.3 den

$$\overline{p}_\mu(A(\varepsilon))=\overline{p}_\mu(\{n:|x_n-x_m|\geq\varepsilon\})>0$$

elde edilir.

Ayrıca $A_\varepsilon^c\subseteq A(\varepsilon)^c$ içermesi sağlanır. O halde $\overline{p}_\mu$ -yakınsaklıktan ve Sonuç 4.2.3 den $\overline{p}_\mu\left(A(\varepsilon)^c\right)=0$ elde edilir. Böylece (x_n), $\overline{p}_\mu$ - Cauchy dizisidir. ■

Tanım 4.3.1.3. $x=(x_n)$ reel değerli bir dizi, $M>0$ bir reel sayı ve $S=\{n:|x_n|\geq M\}$ olsun. Eğer, $\overline{p}_\mu(S)>0$ (veya $\overline{p}_\mu(S)=1$) ve $\overline{p}_\mu(S^c)=0$ ise (x_n) dizisine $\overline{p}_\mu$ - sınırlı (veya kuvvetli $\overline{p}_\mu$ - sınırlı) dizidir denir.

Açıktır ki her sınırlı dizi aynı zamanda $\overline{p}_\mu$ - sınırlı dizidir. Ancak tersi doğru olmak zorunda değildir.

Örnek 4.3.1.3. Örnek 4.3.1.1 deki dizi ve salınım fonksiyonu ele alınırsa açıktır ki $\overline{p}_\mu$ - sınırlıdır ancak sınırlı değildir.

Teorem 4.3.1.10. $\overline{p}_\mu$ - yakınsak her dizi $\overline{p}_\mu$ - sınırlıdır.

İspat. $x=(x_n)$ dizisi $\overline{p}_\mu$ - yakınsak bir dizi olsun. Yeterince büyük $M>0$ sayısı ele alınsın. M sayısının seçiminden $S=\{n:|x_n|\geq M\}\subset\{n:|x_n-l|\geq\varepsilon\}=A_\varepsilon$ içermesi ve ayrıca $A_\varepsilon^c=\{n:|x_n-l|<\varepsilon\}\subset\{n:|x_n|<M\}=S^c$ içermesi sağlanır.

Lemma 4.2.3 den S kümesi sonsuzlukta porous, S^c kümesi ise sonsuzlukta nonporous bir kümedir.

O halde (x_n) dizisi $\overline{p}_\mu$ - sınırlıdır. ■

Teorem 4.3.1.11. Her $\overline{p}_\mu$ - Cauchy dizisi aynı zamanda $\overline{p}_\mu$ - sınırlıdır.

İspat. $x=(x_n)$ bir $\overline{p}_\mu$- Cauchy dizisi olsun. O halde her $\varepsilon>0$ için $A(\varepsilon)=\{n:|x_n-x_m|\geq\varepsilon\}$ kümesi sonsuzlukta porous , $A(\varepsilon)^c=\{n:|x_n-x_m|<\varepsilon\}$ kümesi ise sonsuzlukta nonporous bir kümedir. Ayrıca en az bir $M>0$ için

$S=\{n:|x_n|\geq M\}\subseteq A(\varepsilon)$

içermesi sağlanır. Hipotezden ve Lemma 4.2.3 den S kümesi sonsuzlukta porous bir kümedir.

Diğer taraftan $A(\varepsilon)^c\subseteq S^c$ içermesi de sağlanır. O halde hipotezden ve Lemma 4.2.3 den S^c kümesi sonsuzlukta nonporous bir kümedir. Böylece $x=(x_n)$ dizisinin $\overline{p}_\mu$-sınırlı olduğu elde edilmiş olur. ■

$\overline{p}_\mu$-yakınsak, kuvvetli $\overline{p}_\mu$-yakınsak, $\overline{p}_\mu$-sınırlı ve $\overline{p}_\mu$-Cauchy dizilerinin sınıfı sırası ile $c_\mu(x)$, $c_\mu^s(x)$, $B_\mu(x)$ ve $C_\mu(x)$ sembolleri ile gösterilsin. Yani:

$c_\mu(x)=\left\{x=(x_n):\exists l\in\mathbb{R}\ni x_n\to l\left(\overline{p}_\mu\right)\right\}$,

$c_\mu^s(x)=\left\{x=(x_n):\exists l\in\mathbb{R}\ni x_n\to l\left(s-\overline{p}_\mu\right)\right\}$,

$B_\mu(x)=\left\{x=(x_n):(x_n),\overline{p}_\mu-\text{sınırlı}\right\}$,

$C_\mu(x)=\left\{x=(x_n):(x_n),\overline{p}_\mu-\text{Cauchy}\right\}$

olsun.

Uyarı 4.3.1.5. $x=(x_n)$ reel değerli bir dizi ve μ salınım fonksiyonu olmak üzere

$c_\mu(x)\subset c_\mu^s(x)\subset C_\mu(x)\subset B_\mu(x)$

içermeleri sağlanır.

Teorem 4.3.1.12. $x=(x_n)$ reel değerli bir dizi, μ_1 ve μ_2 farklı iki salınım fonksiyonu olsun. Eğer,

$$\lim_{n,m\to\infty}\frac{\mu_1(n)\mu_2(m)}{\mu_2(n)\mu_1(m)}=1 \tag{4.60}$$

ise

$$c_{\mu_1}(x)=c_{\mu_2}(x) \text{ ve } c_{\mu_1}^s(x)=c_{\mu_2}^s(x) \tag{4.61}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. $x_n\to l\left(\overline{p}_{\mu_1}\right)$ olsun ve (4.60) koşulu sağlansın. Hipotezden

$$\overline{p}_{\mu_1}(A_\varepsilon)>0 \text{ ve } \overline{p}_{\mu_1}(A_\varepsilon^c)=0 \tag{4.62}$$

sağlanır.

Eğer, $|A_\varepsilon|<\infty$ ise $\overline{p}_{\mu_1}(A_\varepsilon)=\overline{p}_{\mu_2}(A_\varepsilon)=1$ ve $\overline{p}_{\mu_1}(A_\varepsilon^c)=\overline{p}_{\mu_2}(A_\varepsilon^c)=0$ olacağından (4.61) sağlanır.

Şimdi $|A_\varepsilon|=\infty$ olsun. O halde her $\varepsilon>0$ için $n\le n^{(1)}<n^{(2)}$ olacak şekilde $n^{(1)},n^{(2)}\in\mathbb{N}$ sayıları vardır ve

$$\lambda_{\mu_1}(A_\varepsilon,n)=\mu_1\left(n^{(1)}\right)-\mu_1\left(n^{(2)}\right) \tag{4.63}$$

biçimindedir. (4.60) den yeterince büyük $n,m\in\mathbb{N}$ için

$$(1-\varepsilon)\frac{\mu_2(n)}{\mu_2(m)}\le\frac{\mu_1(n)}{\mu_1(m)}\le(1+\varepsilon)\frac{\mu_2(n)}{\mu_2(m)} \tag{4.64}$$

eşitsizlikleri sağlanır. (4.63) ve (4.64) birlikte kullanılırsa

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{\mu_1}(A_\varepsilon,n)}{\mu_1(n)}&=\frac{\mu_1\left(n^{(1)}\right)}{\mu_1(n)}-\frac{\mu_1\left(n^{(2)}\right)}{\mu_1(n)}\\&\le(1+\varepsilon)\frac{\mu_2\left(n^{(1)}\right)}{\mu_2(n)}-(1-\varepsilon)\frac{\mu_2\left(n^{(2)}\right)}{\mu_2(n)}\\&\le\frac{\mu_2\left(n^{(1)}\right)-\mu_2\left(n^{(2)}\right)}{\mu_2(n)}+2\varepsilon\\&\le\frac{\lambda_{\mu_2}(A_\varepsilon,n)}{\mu_2(n)}+2\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon>0$ keyfi olduğundan

$$\frac{\lambda_{\mu_1}(A_\varepsilon,n)}{\mu_1(n)}\le\frac{\lambda_{\mu_2}(A_\varepsilon,n)}{\mu_2(n)}$$

elde edilir. Son eşitsizlikten ve (4.62) ın ilk kısmından $\overline{p}_{\mu_2}(A_\varepsilon)>0$ elde edilir. Benzer biçimde $\overline{p}_{\mu_2}(A_\varepsilon^c)=0$ olduğu bulunur. Böylece $x_n\to l\left(\overline{p}_{\mu_2}\right)$ elde edilir. O halde $c_{\mu_1}(x)\subseteq c_{\mu_2}(x)$ ispatlanmış olur.

Benzer hesaplamalar ile $c_{\mu_2}(x)\subseteq c_{\mu_1}(x)$ içermesi sağlanır. Sonuç olarak (4.61) daki ilk eşitlik elde edilmiş olur. İkinci eşitlik için de benzer adımlar izlenerek ispat yapılabilir. ■

Sonuç 4.3.1.1. $r>0$ ve μ_1, μ_2 iki salınım fonksiyonu olsun. Eğer, $\lim\limits_{n\to\infty}\dfrac{\mu_1(n)}{\mu_2(n)}=r$ koşulu sağlanırsa (4.61) sağlanır.

Tanım 4.3.1.4. $x=(x_n)$ reel değerli bir dizi olsun. Eğer, $(x_n)_{n\in H}$ dizisi monoton olacak şekilde $\overline{p}_\mu(H)=0$ koşulunu sağlayan $H\subset\mathbb{N}$ kümesi varsa $x=(x_n)$ dizisine $\overline{p}_\mu$ - monotondur denir.

Teorem 4.3.1.13. Her monoton dizi $\overline{p}_{\mu}$ - monotondur.

İspat. $x=(x_n)$ monoton bir dizi olsun. O halde her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n \le x_{n+1}$ (veya $x_{n+1} \le x_n$) sağlanır. $x=(x_n)$ dizisi $\mathbb{N}$ kümesinde monoton olduğundan ve $\overline{p}_{\mu}(\mathbb{N})=0$ olduğundan söz konusu dizi $\overline{p}_{\mu}$ - monotondur. ■

Uyarı 4.3.1.6. Teorem 4.3.1.13 ün tersi doğru değildir.

Örnek 4.3.1.4. $x=(x_n)$ dizisi ve $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ salınım fonksiyonu sırasıyla

$$x_n=\begin{cases} n, & n \text{ çift ise} \\ \frac{1}{n}, & n \text{ tek ise} \end{cases}, \qquad \mu(n)=\frac{1}{n}$$

olacak biçimde seçilsin. (x_n) dizisi, $H=\{n:n=2k,\ k\in\mathbb{N}\}$ olmak üzere $(x_n)_{n\in H}$ monoton artan ve $\overline{p}_{\mu}(H)=0$ olduğundan, $\overline{p}_{\mu}$ - monotondur ancak monoton değildir.

4.3.2. Porosity Limit Supremum, Porosity Limit İnfimum

Bu bölümde reel değerli diziler için $\overline{p}_{\mu}$ - alt sınır ve $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınır tanımları verilecektir. Daha sonra verilen bu yeni tanımlardan faydalanılarak $\overline{p}_{\mu}$ - infimum ve $\overline{p}_{\mu}$ - supremum tanımlanacaktır. Son olarak da $\overline{p}_{\mu}$ - infimum ve $\overline{p}_{\mu}$ - supremum ile yakınsaklık ve $\overline{p}_{\mu}$ - yakınsaklık arasındaki ilişki incelenecektir.

Tanım 4.3.2.1. $x=(x_n)$ reel değerli dizisi verilsin. $l\in\mathbb{R}$ sayısına (x_n) dizisinin porosity alt sınırı denir eğer

$$\overline{p}_{\mu}(\{n:x_n<l\})>0 \text{ ve } \overline{p}_{\mu}(\{n:x_n\ge l\})=0 \tag{4.65}$$

sağlanır ise.

Verilen bir (x_n) dizisinin tüm $\overline{p}_{\mu}$ - alt sınırlarının kümesi $L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ ile gösterilir.

Tanım 4.3.2.2. $x=(x_n)$ reel değerli dizisi verilsin. $L\in\mathbb{R}$ sayısına (x_n) dizisinin $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınırı denir eğer

$$\overline{p}_{\mu}(\{n:x_n>L\})>0 \text{ ve } \overline{p}_{\mu}(\{n:x_n\le L\})=0 \tag{4.66}$$

sağlanır ise.

Verilen bir (x_n) dizisinin tüm $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınırlarının kümesi $U_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ ile gösterilir.

Ayrıca $L(x)=\{l\in\mathbb{R}: l\le x_n, n\in\mathbb{N}\}$ ve $U(x)=\{L\in\mathbb{R}: x_n\le L, n\in\mathbb{N}\}$ kümeleri (x_n) dizisinin klasik anlamda alt ve üst sınırlarının kümesi olmak üzere Tanım 4.3.2.1 ve Tanım 4.3.2.2 den aşağıdaki sonuçlar elde edilir.

Teorem 4.3.2.1. Eğer, $l\in\mathbb{R}$ sayısı, (x_n) dizisinin bir alt sınırı ise aynı zamanda $\overline{p}_\mu$ - alt sınırıdır.

İspat. $l\in L(x)$ olsun. O halde her $n\in\mathbb{N}$ için $l\le x_n$ sağlanır. Buradan $\{n: x_n<l\}=\varnothing$ dir. Böylece $\overline{p}_\mu(\{n: x_n<l\})$=1>0 ve $\overline{p}_\mu(\{n: x_n\ge l\})=\overline{p}_\mu(\mathbb{N})=0$ elde edilir. Yani herhangi bir (x_n) dizisi için $L(x)\subset L_{\overline{p}_\mu}(x)$ içermesi sağlanır. ■

Uyarı 4.3.2.1. Teorem 4.3.2.1 in tersi doğru olmak zorunda değildir. Gerçekten $(x_n)=\left(-\frac{1}{n}\right)$ ve $l=-\frac{1}{2}$ olsun.

$$\overline{p}_\mu\left(\left\{n: x_n<-\frac{1}{2}\right\}\right)=\overline{p}_\mu(\{1\})=1 \text{ ve } \overline{p}_\mu\left(\left\{n: x_n\ge-\frac{1}{2}\right\}\right)=0$$

olduğundan $l=-\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$ sayısı verilen dizinin $\overline{p}_\mu$ - alt sınırıdır ancak alt sınırı değildir.

Teorem 4.3.2.2. Eğer $L\in\mathbb{R}$ sayısı, (x_n) dizisinin bir üst sınırı ise aynı zamanda $\overline{p}_\mu$ - üst sınırıdır.

İspat. $L\in U(x)$ olsun. O halde her $n\in\mathbb{N}$ için $x_n\le L$ sağlanır. Buradan $\{n: x_n>L\}=\varnothing$ dir. Böylece $\overline{p}_\mu(\{n: x_n>L\})$=1>0 ve $\overline{p}_\mu(\{n: x_n\le L\})=\overline{p}_\mu(\mathbb{N})=0$ elde edilir. Yani herhangi bir (x_n) dizisi için $U(x)\subset U_{\overline{p}_\mu}(x)$ içermesi sağlanır. ■

Uyarı 4.3.2.2. Teorem 4.3.2.2 nin tersi doğru olmak zorunda değildir. Gerçekten $(x_n)=\left(\frac{1}{n}\right)$ ve $L=\frac{1}{2}$ olsun.

$$\overline{p}_\mu\left(\left\{n: x_n>\frac{1}{2}\right\}\right)=\overline{p}_\mu(\{1\})=1 \text{ ve } \overline{p}_\mu\left(\left\{n: x_n\le\frac{1}{2}\right\}\right)=0$$

olduğundan $L=\frac{1}{2}\in\mathbb{R}$ sayısı verilen dizinin $\overline{p}_\mu$ - üst sınırıdır ancak üst sınırı değildir.

Teorem 4.3.2.3. $x=(x_n)$ reel değerli bir dizi olsun. Aşağıdakiler doğrudur.

(i) Eğer $l\in\mathbb{R}$ $\overline{p}_\mu$ - alt sınır ve $l'<l$ ise $l'\in\mathbb{R}$ sayısı da $\overline{p}_\mu$ - alt sınırdır.

(ii) Eğer $L\in\mathbb{R}$ $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınır ve $L<L'$ ise $L'\in\mathbb{R}$ sayısı da $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınırdır.

İspat. (i) $l\in\mathbb{R}$ sayısı (x_n) dizisinin $\overline{p}_{\mu}$ - alt sınırı olsun. O halde $\{n: x_n<l\}$ kümesi porous, $\{n: x_n\geq l\}$ kümesi ise nonporous bir kümedir. Ayrıca $l'<l$ olduğundan

$$\{n: x_n<l'\}\subseteq\{n: x_n<l\} \text{ ve } \{n: x_n\geq l\}\subseteq\{n: x_n\geq l'\} \tag{4.67}$$

içermeleri sağlanır. Lemma 4.2.3 ve (4.67) de verilen içermelerden $\overline{p}_{\mu}(\{n: x_n<l'\})>0$ ve $\overline{p}_{\mu}(\{n: x_n\geq l'\})=0$ sağlanır.

Böylece l' reel sayısı da $\overline{p}_{\mu}$ - alt sınırdır.

(ii) $L\in\mathbb{R}$ sayısı (x_n) dizisinin $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınırı olsun. O halde $\{n: x_n>L\}$ kümesi porous, $\{n: x_n\leq L\}$ kümesi ise nonporous bir kümedir. Ayrıca $L<L'$ olduğundan

$$\{n: x_n>L'\}\subseteq\{n: x_n>L\} \text{ ve } \{n: x_n\leq L\}\subseteq\{n: x_n\leq L'\} \tag{4.68}$$

içermeleri sağlanır. Lemma 4.2.3 ve (4.68) deki içermelerden $\overline{p}_{\mu}(\{n: x_n>L'\})>0$ ve $\overline{p}_{\mu}(\{n: x_n\leq L'\})=0$ sağlanır.

Böylece L' reel sayısı da $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınırdır. ■

Sonuç 4.3.2.1. $x=(x_n)$ reel değerli dizisinin bir $\overline{p}_{\mu}$ - alt sınırı (veya $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınırı) varsa sonsuz çoklukta $\overline{p}_{\mu}$ - alt sınırı (veya $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınırı) vardır.

Tanım 4.3.2.3. $l\in\mathbb{R}$, $L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ kümesinin supremumu ise l sayısına (x_n) dizisinin $\overline{p}_{\mu}$ - infimumu denir ve $\inf_{\overline{p}_{\mu}} x_n=l$ yazılır.

Yani $\inf_{\overline{p}_{\mu}} x_n=\sup L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ dir.

Tanım 4.3.2.4. $L\in\mathbb{R}$, $U_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ kümesinin infimumu ise L sayısına (x_n) dizisinin $\overline{p}_{\mu}$ - supremumu denir ve $\sup_{\overline{p}_{\mu}} x_n=L$ yazılır.

Yani $\sup_{\overline{p}_{\mu}} x_n=\inf U_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ dir.

Teorem 4.3.2.4. $x=(x_n)$ reel değerli bir dizi olmak üzere

$$\inf x_n\leq\inf_{\overline{p}_{\mu}} x_n\leq\sup_{\overline{p}_{\mu}} x_n\leq\sup x_n \tag{4.69}$$

eşitsizliği sağlanır.

İspat. Reel değerli diziler için klasik infimum tanımından

$\overline{p}_{\mu}\left(\left\{n : x_n < \inf x_n\right\}\right) = \overline{p}_{\mu}(\varnothing) = 1 > 0$ ve $\overline{p}_{\mu}\left(\left\{n : x_n \geq \inf x_n\right\}\right) = \overline{p}_{\mu}(\mathbb{N}) = 0$

sağlanır. Buradan $\inf x_n \in L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ olduğu görülür. Böylece, $\inf_{\overline{p}_{\mu}} x_n = \sup L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ olduğundan

$$\inf_{\overline{p}_{\mu}} x_n \geq \inf x_n$$

elde edilir. Ayrıca klasik supremum tanımından

$\overline{p}_{\mu}\left(\left\{n : x_n > \sup x_n\right\}\right) = \overline{p}_{\mu}(\varnothing) = 1 > 0$ ve $\overline{p}_{\mu}\left(\left\{n : x_n \leq \sup x_n\right\}\right) = \overline{p}_{\mu}(\mathbb{N}) = 0$

sağlanır. Buradan $\sup x_n \in U_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ olduğu görülür. Böylece, $\sup_{\overline{p}_{\mu}} x_n = \inf U_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ olduğundan

$$\sup_{\overline{p}_{\mu}} x_n \leq \sup x_n$$

elde edilir. İspatı tamamlamak için herhangi $l \in L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ ve $L \in U_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ elemanları için

$$l \leq L \tag{4.70}$$

eşitsizliğinin sağlandığını göstermek yeterli olacaktır.

Şimdi (4.70) eşitsizliğinin sağlanmadığı kabul edilsin. O halde $L' < l'$ olacak şekilde $l' \in L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ ve $L' \in U_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ elemanları vardır. L' sayısı $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınır olduğundan, Teorem 4.3.2.3 (ii) den l' de $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınırdır. Bu ise çelişkidir. O halde (4.70) sağlanır. ■

Sonuç 4.3.2.2. (i) $x = (x_n)$ sabit dizi olsun. O halde $\inf x_n = \inf_{\overline{p}_{\mu}} x_n = \sup_{\overline{p}_{\mu}} x_n = \sup x_n$ sağlanır.

(ii) $x = (x_n)$ dizisi $n \in \{1, 2, 3, \ldots, n_0\}$ için $x_n \leq a$ olmak üzere

$$x_n = \begin{cases} x_n, & n \leq n_0, n_0 \in \mathbb{N} \\ a & n > n_0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O halde $\sup_{\overline{p}_{\mu}} x_n = \sup x_n$ sağlanır.

(iii) $x = (x_n)$ dizisi $n \in \{1, 2, 3, \ldots, n_0\}$ için $x_n \geq a$ olmak üzere

$$x_n = \begin{cases} x_n, & n \leq n_0, n_0 \in \mathbb{N} \\ a & n > n_0 \end{cases}$$

biçiminde tanımlansın. O halde $\inf_{\overline{p}_{\mu}} x_n = \inf x_n$ sağlanır.

Aşağıda verilen iki teoremde bir reel sayının, verilen bir dizinin $\overline{p}_{\mu}$ - supremumu veya $\overline{p}_{\mu}$ - infimumu olması için gerekli ve yeterli koşullar verilecektir:

Teorem 4.3.2.5. $x = (x_n)$ reel değerli dizi ve $l \in \mathbb{R}$ olsun. $\inf_{\overline{p}_{\mu}} x_n = l$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

(i) $\overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n < l-\varepsilon\}\right) > 0$ ve $\overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n \geq l-\varepsilon\}\right) = 0$

(ii) $\overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n < l+\varepsilon\}\right) = 0$ ve $\overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n \geq l+\varepsilon\}\right) > 0$

olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ $\inf_{\overline{p}_{\mu}} x_n = l$ olduğu kabul edilsin. Yani $\sup L_{\overline{p}_{\mu}}(x) = l$ olsun. Böylece supremum tanımından

(a) Her $s \in L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ için $s \leq l$,

(b) Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $s' \in L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ vardır öyleki $l-\varepsilon < s'$

sağlanır. (b) ve Teorem 4.3.2.3 den $l-\varepsilon$ de $\overline{p}_{\mu}$ - alt sınırdır. Böylece (i) sağlanır.

Şimdi (ii) sağlanmasın. Yani en az bir $\varepsilon_0 > 0$ için

$\overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n < l+\varepsilon_0\}\right) > 0$

olsun. O halde $\overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n \geq l+\varepsilon_0\}\right) = 0$ dır. Buradan $l+\varepsilon \in L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ elde edilir. Bu ise $l < l+\varepsilon$ olduğundan l üzerindeki kabul ile çelişir.

$(\Leftarrow)$ Şimdi her $\varepsilon > 0$ için (i) ve (ii) sağlansın. O halde $l-\varepsilon \in L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ ve $l+\varepsilon \notin L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ olduğu açıktır. Buradan her $\varepsilon > 0$ için $L_{\overline{p}_{\mu}}(x) = (-\infty, l-\varepsilon]$ bulunur. Böylece $\sup L_{\overline{p}_{\mu}}(x) = l$ elde edilir.

■

Teorem 4.3.2.6. $x = (x_n)$ reel değerli dizi ve $L \in \mathbb{R}$ olsun. $\sup_{\overline{p}_{\mu}} x_n = L$ olması için gerek ve yeter şart her $\varepsilon > 0$ için

(i) $\overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n > L+\varepsilon\}\right) > 0$ ve $\overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n \leq L+\varepsilon\}\right) = 0$

(ii) $\overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n > L-\varepsilon\}\right) = 0$ ve $\overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n \leq L-\varepsilon\}\right) > 0$

olmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ $\sup_{\overline{p}_{\mu}} x_n = L$ olduğu kabul edilsin. Yani $\inf U_{\overline{p}_{\mu}}(x) = L$ olsun. Böylece infimum tanımından

(a) Her $s \in U_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ için $L \leq s$,

(b) Her $\varepsilon > 0$ için en az bir $s' \in U_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ vardır öyle ki $s' < L+\varepsilon$

sağlanır. (b) ve Teorem 4.3.2.3 den $L+\varepsilon$ de $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınırdır. Böylece (i) sağlanır.

Şimdi (ii) sağlanmasın. Yani en az bir $\varepsilon_0 > 0$ için

$$\overline{p}_\mu\left(\{n : x_n > L-\varepsilon_0\}\right) > 0$$

olsun. O halde $\overline{p}_\mu\left(\{n : x_n \leq L-\varepsilon_0\}\right) = 0$ dır. Buradan $L-\varepsilon \in U_{\overline{p}_\mu}(x)$ elde edilir. Bu ise $L-\varepsilon < L$ olduğundan L üzerindeki kabul ile çelişir.

$(\Leftarrow)$ Şimdi her $\varepsilon > 0$ için (i) ve (ii) sağlansın. O halde $L+\varepsilon \in U_{\overline{p}_\mu}(x)$ ve $L-\varepsilon \notin U_{\overline{p}_\mu}(x)$ olduğu açıktır. Buradan her $\varepsilon > 0$ için $U_{\overline{p}_\mu}(x) = [L+\varepsilon, \infty)$ bulunur. Böylece $\inf U_{\overline{p}_\mu}(x) = L$ elde edilir. ■

Teorem 4.3.2.7. $x = (x_n)$ reel değerli bir dizi olsun. O halde aşağıda verilenler sağlanır.

(i) Eğer, (x_n) dizisi monoton artan ise, $\inf_{\overline{p}_\mu} x_n = \sup x_n$ dir.

(ii) Eğer, (x_n) dizisi monoton azalan ise, $\sup_{\overline{p}_\mu} x_n = \inf x_n$ dir.

İspat. (i) (x_n) dizisi monoton artan olsun ve $\sup x_n < \infty$ sağlansın. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n \leq \sup x_n \tag{4.71}$$

dir ve supremum (klasik anlamda) tanımından her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki

$$\sup x_n - \varepsilon < x_{n_0} \tag{4.72}$$

sağlanır. (4.71) den $\sup x_n \notin L_{\overline{p}_\mu}(x)$ elde edilir. Ayrıca (4.72) dan

$$\{n : x_n < \sup x_n - \varepsilon\} \subset \{1, 2, \ldots, n_0\}$$

dir. Lemma 4.2.3 den $\sup x_n \in L_{\overline{p}_\mu}(x)$ dir. O halde Teorem 4.3.2.3 den her $\varepsilon > 0$ için

$$L_{\overline{p}_\mu}(x) = (-\infty, \sup x_n - \varepsilon)$$

bulunur. Buradan

$$\inf_{\overline{p}_\mu} x_n = \sup L_{\overline{p}_\mu}(x) = \sup x_n$$

elde edilir.

Şimdi $\sup x_n = \infty$ olsun. O halde her $l \in \mathbb{R}$ için en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $l \leq x_{n_0}$ dir ve her $n \geq n_0$ için $x_{n_0} \leq x_n$ sağlanır. Böylece

$$\{n : x_n < l\} \subset \{1, 2, \ldots, n_0\}$$

içermesi elde edilir. Son içermeden ve Lemma 4.2.3 den

$$\overline{p}_\mu\left(\{n : x_n < l\}\right) = 1 > 0 \text{ ve } \overline{p}_\mu\left(\{n : x_n \geq l\}\right) = 0$$

elde edilir. Yani, her $l \in \mathbb{R}$ için $l \in L_{\overline{p}_\mu}(x)$ dir. Böylece

$$L_{\overline{p}_\mu}(x) = (-\infty, \infty)$$

olup $\sup L_{\overline{p}_\mu}(x) = \infty$ elde edilir. Bu ise ispatı tamamlar. Benzer adımlar takip edilerek (ii) de ispatlanır. ■

Sonuç 4.3.2.3. $x = (x_n)$ reel değerli sınırlı bir dizi olsun. Eğer (x_n) monoton azalan (veya artan) ise $\lim_{n\to\infty} x_n = \sup_{\overline{p}_\mu} x_n \left(\text{veya } \inf_{\overline{p}_\mu} x_n\right)$ sağlanır.

Teorem 4.3.2.8. $x = (x_n)$ reel değerli bir dizi olsun. Eğer, x_{n_0} terimi (x_n) dizisi için bir üst (veya alt) uç nokta ise, x_{n_0} aynı zamanda (x_n) dizisinin bir $\overline{p}_\mu$ - üst (veya $\overline{p}_\mu$ - alt) sınırıdır.

İspat. x_{n_0} terimi (x_n) dizisinin üst (veya alt) uç noktası olsun. O halde, her $n \geq n_0$ için $x_n \leq x_{n_0}$ (veya $x_n \geq x_{n_0}$) sağlanır. Buradan

$$\left\{n : x_n > x_{n_0}\right\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n_0\} \quad \left(\text{veya } \left\{n : x_n < x_{n_0}\right\} \subseteq \{1, 2, \ldots, n_0\}\right)$$

içermesi sağlanır. Lemma 4.2.3 den

$$\overline{p}_\mu\left(\left\{n : x_n > x_{n_0}\right\}\right) = 1 > 0 \text{ ve } \overline{p}_\mu\left(\left\{n : x_n \leq x_{n_0}\right\}\right) = 0$$

veya

$$\overline{p}_\mu\left(\left\{n : x_n < x_{n_0}\right\}\right) = 1 > 0 \text{ ve } \overline{p}_\mu\left(\left\{n : x_n \geq x_{n_0}\right\}\right) = 0$$

sağlanır. Bu ise x_{n_0} ın (x_n) dizisi için $\overline{p}_\mu$ - üst (veya $\overline{p}_\mu$ - alt) sınır olması anlamına gelir. ■

Tanım 4.3.2.5. $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ reel değerli iki dizi olsun. Eğer, $A = \{n : x_n \neq y_n\}$ kümesi sonsuzlukta porous ise (x_n) ve (y_n) dizilerine $\overline{p}_\mu$ - denk diziler denir ve $x \overset{\overline{p}_\mu}{\approx} y$ ile gösterilir.

Teorem 4.3.2.9. Eğer $x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ reel değerli dizileri $\overline{p}_\mu$ - denk ise

$$\inf_{\overline{p}_\mu} x_n = \inf_{\overline{p}_\mu} y_n \text{ ve } \sup_{\overline{p}_\mu} x_n = \sup_{\overline{p}_\mu} y_n$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. (x_n) ve (y_n) dizileri $\overline{p}_\mu$ - denk olsun. O halde $A = \{n : x_n \neq y_n\}$ kümesi sonsuzlukta porous bir kümedir. $l \in L_{\overline{p}_\mu}(x)$ olsun. O halde, $l \in \mathbb{R}$ sayısı (x_n) dizisinin $\overline{p}_\mu$ - alt sınırıdır. Buradan

$$\overline{p}_\mu\left(\{n : x_n < l\}\right) > 0 \text{ ve } \overline{p}_\mu\left(\{n : x_n \geq l\}\right) = 0$$

sağlanır. Aşağıdaki içermeden

$$\begin{aligned}\{n: x_n < l\} &= \{n: x_n \neq y_n < l\} \cup \{n: x_n = y_n < l\} \\ &\subset A \cup \{n: x_n = y_n < l\}\end{aligned}$$

ve $\{n: y_n \geq l\} = \{n: x_n \neq y_n \geq l\} \cup \{n: x_n = y_n \geq l\}$ eşitliğinden

$$\overline{p}_\mu(\{n: y_n < l\}) > 0 \text{ ve } \overline{p}_\mu(\{n: y_n \geq l\}) = 0 \tag{4.73}$$

elde edilir. Böylece, (4.73) den $l \in \mathbb{R}$ sayısı $y = (y_n)$ dizisinin bir $\overline{p}_\mu$- alt sınırıdır. Yani $L_{\overline{p}_\mu}(x) \subset L_{\overline{p}_\mu}(y)$ içermesi sağlanır. Benzer biçimde $L_{\overline{p}_\mu}(y) \subset L_{\overline{p}_\mu}(x)$ içermesinin sağlandığı da elde edilir. Böylece,

$$L_{\overline{p}_\mu}(x) = L_{\overline{p}_\mu}(y) \tag{4.74}$$

eşitliği sağlanır. Buradan $\sup L_{\overline{p}_\mu}(x) = \sup L_{\overline{p}_\mu}(y)$ olacağından $\inf_{\overline{p}_\mu} x_n = \inf_{\overline{p}_\mu} y_n$ eşitliği elde edilir. Benzer işlemler ile $\sup_{\overline{p}_\mu} x_n = \sup_{\overline{p}_\mu} y_n$ eşitliği elde edilir. ■

Uyarı 4.3.2.3. Teorem 4.3.2.9 un tersi doğru değildir.

$x = (x_n)$ ve $y = (y_n)$ dizileri $n \in \mathbb{N}$ için

$$x_n = 1 - \frac{1}{n} \text{ ve } y_n = 1 + \frac{1}{n}$$

olarak tanımlansın. Açıktır ki

$$\inf_{\overline{p}_\mu} x_n = \inf_{\overline{p}_\mu} y_n = 1 \text{ ve } \sup_{\overline{p}_\mu} x_n = \sup_{\overline{p}_\mu} y_n = 1$$

eşitlikleri sağlanır. Ancak $A = \{n: x_n \neq y_n\} = \mathbb{N}$ olup $\overline{p}_\mu(\mathbb{N}) = 0$ dır. O halde verilen dizilerin $\overline{p}_\mu$ - denk olmadığı elde edilmiş olur.

Tanım 4.3.2.6. $x = (x_n)$ reel değerli bir dizi ve $K := \{n_k : k \in \mathbb{N}\} \subset \mathbb{N}$ olmak üzere $x' = (x_{n_k})$ bir alt dizi olsun. Bundan sonra $x' = (x_{n_k})$ yerine basitlik için $(x)_K$ yazılacaktır.

(i) Eğer $\overline{p}_\mu(K) > 0$ ise $(x)_K$ dizisine (x_n) dizisinin porous alt dizisi denir.

(ii) Eğer $\overline{p}_\mu(K) = 1$ ise $(x)_K$ dizisine (x_n) dizisinin kuvvetli porous alt dizisi denir.

(iii) Eğer $\overline{p}_\mu(K) = 0$ ise $(x)_K$ dizisine (x_n) dizisinin nonporous alt dizisi denir.

Teorem 4.3.2.10. $x = (x_n)$ reel değerli bir dizi ve $(x)_K$ da (x_n) dizisinin nonporous bir alt dizisi olsun. Eğer,

(i) $\inf_{\overline{p}_\mu} x_n = m$ ise $m \in \mathbb{R}$ sayısı $(x)_K$ dizisinin de $\overline{p}_\mu$ - infimumudur.

(ii) $\sup_{\overline{p}_\mu} x_n = l$ ise $l \in \mathbb{R}$ sayısı $(x)_K$ dizisinin de $\overline{p}_\mu$ - supremumudur.

İspat. (i) $\inf_{\overline{p}_\mu} x_n = m$ olsun. O halde Teorem 4.3.2.5 den her $\varepsilon > 0$ için

$\overline{p}_\mu\left(\{n : x_n < m-\varepsilon\}\right) > 0$ ve $\overline{p}_\mu\left(\{n : x_n \geq m-\varepsilon\}\right) = 0$

sağlanır. $\left\{n_k : x_{n_k} < m-\varepsilon\right\} \subseteq \{n : x_n < m-\varepsilon\}$ içermesinin sağlandığı açıktır. O halde Lemma 4.2.3 den

$\overline{p}_\mu\left(\left\{n_k : x_{n_k} < m-\varepsilon\right\}\right) > 0$ ve $\overline{p}_\mu\left(\left\{n_k : x_{n_k} \geq m-\varepsilon\right\}\right) = 0$

elde edilir. Böylece m sayısı $(x)_K$ için $\overline{p}_\mu$ - infimumudur. (ii) de benzer biçimde ispatlanabilir. ■

Uyarı 4.3.2.4. Teorem 4.3.2.10 un tersi doğru değildir.

$\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ salınım fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(n) = \dfrac{1}{n}$ olarak verilsin. $x = (x_n)$ dizisi ve (x_{2m}) alt dizisi sırası ile aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$x_n = \begin{cases} -2^k, & n = 2^k \\ -3^k, & n = 2k-1 \\ 0, & \text{diğer durumlarda,} \end{cases}$$

ve

$$x_{2m} = \begin{cases} -2^k, & m = 2^{k-1} \\ 0, & \text{diğer durumlarda.} \end{cases}$$

Açıktır ki (x_{2m}), (x_n) dizisinin nonporous alt dizisidir. Yani Teorem 4.3.2.10 un koşulları sağlanır. Ayrıca $\inf_{\overline{p}_\mu} x_{2m} = 0$ dır. Ancak $\inf_{\overline{p}_\mu} x_n \neq 0$ dır.

Uyarı 4.3.2.5. Teorem 4.3.2.10 da alt dizinin nonporous alt dizi olma koşulu atılamaz.

$\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ salınım fonksiyonu her $n \in \mathbb{N}$ için $\mu(n) = \dfrac{1}{n}$ olarak verilsin. $x = (x_n)$ dizisi

$$x_n = \begin{cases} -n, & n = 2^m, m \in \mathbb{N} \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\left(x_{2^m}\right)$ alt dizisi göz önüne alınırsa açıktır ki $\left(x_{2^m}\right)$, nonporous alt dizi değildir. Ayrıca $\inf_{\overline{p}_\mu} x_n = 0$ olmasına rağmen $\inf_{\overline{p}_\mu} x_{2^m} \neq 0$ dır.

Teorem 4.3.2.11. $x = (x_n)$ reel değerli bir dizi olsun. Eğer, $\lim\limits_{n\to\infty} x_n = l$ ise $\sup_{\overline{p}_\mu} x_n = \inf_{\overline{p}_\mu} x_n = l$ eşitliği sağlanır.

İspat. $\lim_{n\to\infty} x_n = l$ olsun. O halde her $\varepsilon > 0$ için en az bir $n_0 = n_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $n \geq n_0$ için

$$|x_n - l| < \varepsilon \tag{4.75}$$

sağlanır. O halde (4.75) den

$$\{n : x_n < l - \varepsilon\} \subset \{1, 2, \ldots, n_0\} \text{ ve } \{n : x_n \geq l - \varepsilon\} \supset \{1, 2, \ldots, n_0\} \tag{4.76}$$

içermeleri sağlanır. Lemma 4.2.3 ve (4.76) göz önünde bulundurulursa

$$\overline{p}_\mu(\{n : x_n < l - \varepsilon\}) = 1, \quad \overline{p}_\mu(\{n : x_n \geq l - \varepsilon\}) = 0$$

ve

$$\overline{p}_\mu(\{n : x_n > l + \varepsilon\}) = 1, \quad \overline{p}_\mu(\{n : x_n \leq l + \varepsilon\}) = 0$$

sağlanır. Buradan her $\varepsilon > 0$ için

$$l - \varepsilon \in L_{\overline{p}_\mu}(x), \quad l + \varepsilon \in U_{\overline{p}_\mu}(x)$$

elde edilir. Ayrıca, Teorem 4.3.2.3 den

$$L_{\overline{p}_\mu}(x) = (-\infty, l] \text{ ve } \mathrm{U}_{\overline{p}_\mu}(x) = [l, \infty)$$

elde edilir. Böylece,

$$\inf_{\overline{p}_\mu} x_n = \sup(-\infty, l] = l$$

ve

$$\sup_{\overline{p}_\mu} x_n = \inf[l, \infty) = l$$

dir. Bu ise ispatı tamamlar. ■

Uyarı 4.3.2.6. Teorem 4.3.2.11 in tersi doğru değildir.

Gerçekten, $x = (x_n)$ dizisi ve $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ salınım fonksiyonu sırasıyla

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = 2^k, k = 1, 2, \ldots \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad \mu(n) = \frac{1}{n}$$

olarak tanımlansın. Açıktır ki $\inf_{\overline{p}_\mu} x_n = \sup_{\overline{p}_\mu} x_n = 0$ dır. Ancak, söz konusu dizi klasik anlamda yakınsak değildir.

Aşağıdaki teoremde $\overline{p}_\mu$- infimum ve $\overline{p}_\mu$- supremum değerlerinin eşit olmasının $\overline{p}_\mu$- yakınsaklık için gerekli ve yeterli olacağı söylenmektedir.

Teorem 4.3.2.12. $x = (x_n)$ reel değerli dizi olsun. $\overline{p}_\mu - \lim_{n\to\infty} x_n = l$ olması için gerek ve yeter şart $\inf_{\overline{p}_\mu} x_n = \sup_{\overline{p}_\mu} x_n = l$ eşitliğinin sağlanmasıdır.

İspat. $(\Rightarrow)$ $\overline{p}_\mu - \lim_{n\to\infty} x_n = l$ olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ için

$$\overline{p}_{\mu}\left(\left\{n:\left|x_n-l\right|\geq\varepsilon\right\}\right)>0 \text{ ve } \overline{p}_{\mu}\left(\left\{n:\left|x_n-l\right|<\varepsilon\right\}\right)=0 \tag{4.77}$$

sağlanır. Ayrıca,

$$\left\{n:\left|x_n-l\right|\geq\varepsilon\right\}=\left\{n:x_n\geq l+\varepsilon\right\}\cup\left\{n:x_n\leq l-\varepsilon\right\}$$

ve

$$\left\{n:\left|x_n-l\right|<\varepsilon\right\}=\left\{n:x_n<l+\varepsilon\right\}\cup\left\{n:x_n>l-\varepsilon\right\}$$

olduğundan Lemma 4.2.3 ve (4.77) den

$$\overline{p}_{\mu}\left(\left\{n:x_n\geq l+\varepsilon\right\}\right)>0, \quad \overline{p}_{\mu}\left(\left\{n:x_n<l+\varepsilon\right\}\right)=0 \tag{4.78}$$

ve

$$\overline{p}_{\mu}\left(\left\{n:x_n\leq l-\varepsilon\right\}\right)>0, \quad \overline{p}_{\mu}\left(\left\{n:x_n>l-\varepsilon\right\}\right)=0 \tag{4.79}$$

elde edilir. Böylece her $\varepsilon>0$ için, sırasıyla, (4.78) ve (4.79) den $l+\varepsilon$ sayısı (x_n) dizisi için $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınır ve $l-\varepsilon$ sayısı (x_n) dizisi için $\overline{p}_{\mu}$ - alt sınırdır. O halde, her $\varepsilon>0$ için

$$L_{\overline{p}_{\mu}}(x)=(-\infty,l) \text{ ve } \mathrm{U}_{\overline{p}_{\mu}}(x)=(l,\infty)$$

sağlanır. Bu ise

$$\sup L_{\overline{p}_{\mu}}(x)=l \text{ ve } \inf \mathrm{U}_{\overline{p}_{\mu}}(x)=l$$

olması demektir.

$(\Leftarrow)$ Şimdi $\inf_{\overline{p}_{\mu}} x_n=\sup_{\overline{p}_{\mu}} x_n=l$ olduğu kabul edilsin. O halde $\sup L_{\overline{p}_{\mu}}(x)=\inf \mathrm{U}_{\overline{p}_{\mu}}(x)=l$ dir. Klasik supremum ve infimum tanımından, her $\varepsilon>0$ için

$$l-\varepsilon<l' \text{ ve } l''<l+\varepsilon$$

olacak biçimde $l'\in L_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ ve $l''\in U_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ elemanları vardır. l'' sayısı $\overline{p}_{\mu}$ - üst sınır olduğundan

$$\left\{n:x_n>l+\varepsilon\right\}\subset\left\{n:x_n>l''\right\}$$

ve

$$\left\{n:x_n\leq l''\right\}\subset\left\{n:x_n\leq l+\varepsilon\right\}$$

içermeleri sağlanır. Böylece

$$\overline{p}_{\mu}\left(\left\{n:x_n>l+\varepsilon\right\}\right)>0 \text{ ve } \overline{p}_{\mu}\left(\left\{n:x_n\leq l+\varepsilon\right\}\right)=0 \tag{4.80}$$

elde edilir. Ayrıca, l' sayısı $\overline{p}_{\mu}$ - alt sınır olduğundan

$$\left\{n:x_n<l-\varepsilon\right\}\subset\left\{n:x_n<l'\right\}$$

ve

$$\left\{n:x_n\geq l'\right\}\subset\left\{n:x_n\leq l-\varepsilon\right\}$$

içermeleri sağlanır. Böylece

$$\overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n < l-\varepsilon\}\right) > 0 \text{ ve } \overline{p}_{\mu}\left(\{n : x_n \geq l-\varepsilon\}\right) = 0 \tag{4.81}$$

elde edilir. (4.80), (4.81) den ve

$$\{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\} = \{n : x_n \geq l+\varepsilon\} \cup \{n : x_n \leq l-\varepsilon\}$$

ile

$$\{n : |x_n - l| < \varepsilon\} = \{n : x_n < l+\varepsilon\} \cup \{n : x_n > l-\varepsilon\}$$

eşitliklerinden

$$\overline{p}_{\mu}\left(\{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\}\right) > 0 \text{ ve } \overline{p}_{\mu}\left(\{n : |x_n - l| < \varepsilon\}\right) = 0$$

elde edilir. Böylece (x_n) dizisi $l \in \mathbb{R}$ sayısına $\overline{p}_{\mu}$ - yakınsaktır. ∎

4.3.3. Porosity Yığılma Noktası

Bu bölümde doğal sayıların alt kümeleri için sonsuzluktaki porosity kavramı kullanılarak reel değerli bir dizinin $\overline{p}_{\mu}$ - limit ve $\overline{p}_{\mu}$ - yığılma noktası tanımları verilecektir. Daha sonra ise bu yeni kavramlar ile ilgili bazı özellikler ve teoremler verilecektir.

Tanım 4.3.3.1. Eğer $x = (x_n)$ dizisinin $\alpha \in \mathbb{R}$ sayısına yakınsak bir nonporous alt dizisi varsa α sayısına (x_n) dizisinin $\overline{p}_{\mu}$ - limit noktasıdır denir.

Verilen bir dizinin tüm $\overline{p}_{\mu}$ - limit noktalarının kümesi $l_{\overline{p}_{\mu}}(x)$ ile gösterilir. Ayrıca verilen bir dizinin tüm limit noktalarının kümesi $l(x)$ ile gösterilsin.

Örnek 4.3.3.1. $x = (x_n)$ reel değerli dizisi ve $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ salınım fonksiyonu, sırasıyla, aşağıdaki biçimde tanımlansın:

$$x_n = \begin{cases} 1, & n = 2^k, k \in \mathbb{N}, \\ 0, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad \mu(n) = \frac{1}{n}$$

Verilen dizi için $l(x) = \{0,1\}$ ve $l_{\overline{p}_{\mu}}(x) = \{0\}$ elde edilir.

Açıktır ki, herhangi bir (x_n) dizisi için $l_{\overline{p}_{\mu}}(x) \subseteq l(x)$ sağlanır. Ayrıca, belirtilsin ki bu iki küme birbirinden tamamen farklı olabilir.

Örnek 4.3.3.2. $\{r_n\}_{n=1}^{\infty}$ değer kümesi tüm rasyonel sayılar olmak üzere, (x_n) dizisi ve $\mu : \mathbb{N} \to \mathbb{R}^+$ salınım fonksiyonu

$$x_n = \begin{cases} r_k, & n = 2^k, k \in \mathbb{N}, \\ n, & \text{diğer durumlarda} \end{cases}, \quad \mu(n) = \frac{1}{n}$$

biçiminde tanımlansın. O halde, $\{2^k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi sonsuzlukta porous olduğundan $l_{\overline{p}_\mu}(x) = \varnothing$ dir. Ancak $\{r_k : k \in \mathbb{N}\}$ kümesi $\mathbb{R}$ de yoğun olduğundan $l(x) = \mathbb{R}$ dir.

Tanım 4.3.3.2. $x = (x_n)$ reel değerli dizi olsun. Eğer, her $\varepsilon > 0$ için

$$\{n : |x_n - \beta| < \varepsilon\}$$

kümesi sonsuzlukta nonporous ise, (yani $\overline{p}_\mu(\{n : |x_n - \beta| < \varepsilon\}) = 0$) $\beta \in \mathbb{R}$ sayısına (x_n) dizisinin $\overline{p}_\mu$ - yığılma noktasıdır denir.

Bir dizinin tüm $\overline{p}_\mu$ - yığılma noktalarının kümesi $\Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ simgesi ile gösterilir. Herhangi bir (x_n) dizisi için tanımdan

$$\Gamma_{\overline{p}_\mu}(x) \subseteq l(x)$$

olduğu açıktır.

Teorem 4.3.3.1. Herhangi reel değerli (x_n) dizisi için $l_{\overline{p}_\mu}(x) \subseteq \Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ dir.

İspat. $\alpha \in l_{\overline{p}_\mu}(x)$ keyfi seçilsin. O halde, $\lim_{k\to\infty} x_{n_k} = \alpha$ olacak şekilde $\{n_k : k \in \mathbb{N}\}$ nonporous kümesi vardır. Buradan, her $\varepsilon > 0$ için $\exists k_0 = k_0(\varepsilon) \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki her $k \geq k_0$ için

$$|x_{n_k} - \alpha| < \varepsilon$$

sağlanır.

Böylece, $\{n_k : |x_{n_k} - \alpha| \geq \varepsilon\} \subseteq \{1, 2, \ldots, k_0(\varepsilon)\}$ olduğundan ve Lemma 4.2.3 den

$$\overline{p}_\mu(\{n_k : |x_{n_k} - \alpha| \geq \varepsilon\}) = 1$$

elde edilir. Ayrıca,

$$\{n_k : k \in \mathbb{N}\} - \{n_k : |x_{n_k} - \alpha| \geq \varepsilon\} \subset \{n_k : |x_{n_k} - \alpha| < \varepsilon\} \tag{4.82}$$

sağlanır. (4.82) içermesinden ve Sonuç 4.2.3 den $\overline{p}_\mu(\{n_k : |x_{n_k} - \alpha| < \varepsilon\}) = 0$ elde edilir. Böylece $\alpha \in \Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ sağlanır. ■

Uyarı 4.3.3.1. Teorem 4.3.3.1 in tersi doğru değildir.

Örnek 4.3.3.3. Genel terimi

$$x_n = \frac{1}{p}, \quad n = 2^{p-1}(2q+1)$$

olarak verilen (x_n) reel değerli dizisi göz önüne alınsın. Burada $p-1$, n doğal sayısının asal çarpanlarındaki 2 lerin sayısıdır. $\mu(n) = \dfrac{1}{n}$ olmak üzere her p için

$$\overline{p}_\mu\left(\left\{n : x_n = \frac{1}{p}\right\}\right) = 0$$

sağlandığından $\dfrac{1}{p} \in l_{\overline{p}_\mu}(x)$ elde edilir.

Ayrıca $\overline{p}_\mu\left(\left\{n : 0 < x_n < \dfrac{1}{p}\right\}\right) = 0$ sağlanır. Böylece, $0 \in \Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ dir. O halde

$\Gamma_{\overline{p}_\mu}(x) = \{0\} \cup \left\{\dfrac{1}{p}\right\}_{p=1}^{\infty}$ dir.

Şimdi (x_n) dizisinin 0 a yakınsayan bir $(x)_K$ alt dizisi göz önünde bulundurulsun. $\overline{p}_\mu(K) > 0$ olduğunu görmek kolaydır. Böylece, $0 \notin l_{\overline{p}_\mu}(x)$ elde edilir.

Teorem 4.3.3.2. Herhangi reel değerli $x = (x_n)$ dizisi için $\Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ kapalı bir kümedir.

İspat. $\Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ kümesinin bir yığılma noktası a olsun. O halde, her $\varepsilon > 0$ için a noktasının delinmiş komşuluğunda $\Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ kümesine ait elemanlar vardır.

Yani en az bir $\gamma \in \Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ elemanı vardır. $(\gamma - \varepsilon', \gamma + \varepsilon') \subset (a-\varepsilon, a+\varepsilon) - \{a\}$ olacak şekilde $\varepsilon' < \varepsilon$ seçilsin. Buradan

$$\{n : |x_n - \gamma| < \varepsilon'\} \subset \{n : |x_n - a| < \varepsilon\}$$

sağlanır. Lemma 4.2.3 den

$$\overline{p}_\mu(\{n : |x_n - a| < \varepsilon\}) \le \overline{p}_\mu(\{n : |x_n - \gamma| < \varepsilon'\}) \tag{4.83}$$

elde edilir. $\gamma \in \Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ olduğundan (4.83) eşitsizliğinden $a \in \Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ sağlanır. ■

Açıktır ki, $l_{\overline{p}_\mu}(x)$ kümesi kapalı olmak zorunda değildir. Örnek 4.3.3.3 den kolayca görülür.

Teorem 4.3.3.3. $x = (x_n)$ reel değerli bir dizi olsun. Eğer, $x_n \to l(\overline{p}_\mu)$ ise $l \in \mathbb{R}$ sayısı (x_n) dizisinin bir $\overline{p}_\mu$ - yığılma noktasıdır.

İspat. $x_n \to l\left(\overline{p}_\mu\right)$ olduğundan her $\varepsilon > 0$ için $\overline{p}_\mu\left(\left\{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\right\}\right) > 0$ ve $\overline{p}_\mu\left(\left\{n : |x_n - l| < \varepsilon\right\}\right) = 0$ elde edilir. O halde, $\overline{p}_\mu$ - yığılma noktası tanımından $l \in \mathbb{R}$ sayısı verilen dizinin $\overline{p}_\mu$ - yığılma noktasıdır. ■

Sonuç 4.3.3.1. Eğer, (x_n) dizisi $\overline{p}_\mu$ - yakınsak ise $\Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ tek nokta kümesidir.

Uyarı 4.3.3.2. Sonuç 4.3.3.1 in tersi doğru değildir.

Örnek 4.3.3.4. $x = (x_n)$ reel değerli dizisi

$$x_n = \begin{cases} \dfrac{1}{n}, & n \text{ çift ise} \\ n, & n \text{ tek ise} \end{cases}$$

olarak tanımlansın. $\{2k : k \in \mathbb{N}\} \subset \{n : |x_n - 0| < \varepsilon\}$ olduğundan, $\mu(n) = \dfrac{1}{n}$ olmak üzere

$$\overline{p}_\mu\left(\left\{n : |x_n - 0| < \varepsilon\right\}\right) \leq \overline{p}_\mu\left(\{2k : k \in \mathbb{N}\}\right)$$

sağlanır. Lemma 4.2.1 den $\overline{p}_\mu\left(\{2k : k \in \mathbb{N}\}\right) = 0$ olduğu açıktır. Böylece $0 \in \Gamma_{\overline{p}_\mu}(x)$ elde edilir. Ancak verilen dizi $\overline{p}_\mu$ - yakınsak değildir.

Teorem 4.3.3.4. $x = (x_n)$ reel değerli bir dizi olmak üzere $M = \{n \in \mathbb{N} : x_n \leq x_{n+1}\}$ kümesi verilsin. Eğer, $\overline{p}_\mu(\mathbb{N} - M) > 0$ ve (x_n) dizisi M kümesi üzerinse sınırlı ise $\overline{p}_\mu$ - yakınsaktır.

İspat. (x_n) reel değerli dizisi M kümesi üzerinde monoton artan ve sınırlı olduğundan $\sup x_n < \infty$ sağlanır. Kısalık için $\sup x_n = l$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$A_\varepsilon = \{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\} \subset \left(\{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\} \cap M\right) \cup \left(\{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\} \cap (\mathbb{N} - M)\right)$$

içermesi sağlanır. $\{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\} \cap (\mathbb{N} - M) \subset (\mathbb{N} - M)$ olduğundan ve Lemma 4.2.3 den

$$\overline{p}_\mu\left(\{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\} \cap (\mathbb{N} - M)\right) > 0$$

elde edilir.

Ayrıca $\lim\limits_{\substack{n \to \infty \\ n \in M}} x_n = l$ olduğundan $\{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\} \cap M$ sonlu bir kümedir. Sonlu bir küme ile porous bir kümenin birleşimi de porous olduğundan

$$\left(\{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\} \cap M\right) \cup \left(\{n : |x_n - l| \geq \varepsilon\} \cap (\mathbb{N} - M)\right)$$

kümesi de porous bir kümedir. Böylece,

$$\overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon}\right) > 0 \tag{4.84}$$

elde edilir. Ayrıca,

$$A_{\varepsilon}^{c} = \left\{\left(\left\{n : \left|x_n - l\right| < \varepsilon\right\} \cap M\right) \cup \left(\left\{n : \left|x_n - l\right| < \varepsilon\right\} \cap (\mathbb{N} - M)\right)\right\}$$

olduğundan ve (x_n) üzerindeki kabulden $\overline{p}_{\mu}\left(\left\{n : \left|x_n - l\right| < \varepsilon\right\} \cap M\right) = 0$ sağlanır. Böylece, Sonuç 4.2.3 den $\overline{p}_{\mu}\left(A_{\varepsilon}^{c}\right) = 0$ elde edilir. Son eşitlik ve (4.84) den $x_n \to l\left(\overline{p}_{\mu}\right)$ elde edilir. ■

Sonuç 4.3.3.2. $x = (x_n)$ reel değerli bir dizi ve $M = \left\{n \in \mathbb{N} : x_n \geq x_{n+1}\right\}$ olsun. Eğer, $\overline{p}_{\mu}(\mathbb{N} - M) > 0$ ve $(x)_K$ alt dizisi M üzerinde sınırlı ise (x_n) dizisi $\overline{p}_{\mu}$ - yakınsaktır.

Teorem 4.3.3.5. $x = (x_n)$ reel değerli bir dizi ve μ_1 ve μ_2 herhangi iki salınım fonksiyonu olsun. Eğer,

$$\lim_{m,n\to\infty} \frac{\mu_1(n)\mu_2(m)}{\mu_2(n)\mu_1(m)} = 1 \tag{4.85}$$

koşulu sağlanırsa

$$\Gamma_{\overline{p}_{\mu_1}}(x) = \Gamma_{\overline{p}_{\mu_2}}(x) \text{ ve } l_{\overline{p}_{\mu_1}}(x) = l_{\overline{p}_{\mu_2}}(x) \tag{4.86}$$

eşitlikleri sağlanır.

İspat. μ_1 ve μ_2 herhangi iki salınım fonksiyonu ve $\beta \in \Gamma_{\overline{p}_{\mu_2}}(x)$ olsun. Her $\varepsilon > 0$ için

$$\overline{p}_{\mu_2}\left(\left\{n : \left|x_n - \beta\right| < \varepsilon\right\}\right) = 0 \tag{4.87}$$

sağlanır. (4.87) den $\left\{n : \left|x_n - \beta\right| < \varepsilon\right\}$ kümesi sonsuz çoklukta eleman içermelidir. O halde, her $n \in \mathbb{N}$ için $n^{(1)}$, $n^{(2)} \in \mathbb{N}$ vardır öyle ki $n \leq n^{(1)} < n^{(2)}$ ve

$$\lambda_{\mu_2}\left(\left\{n : \left|x_n - \beta\right| < \varepsilon\right\}, n\right) = \mu_2\left(n^{(1)}\right) - \mu_2\left(n^{(2)}\right) \tag{4.88}$$

sağlanır. Ayrıca (4.85) den her $\varepsilon > 0$ ve yeterince büyük her m ve n için

$$(1-\varepsilon)\frac{\mu_2(n)}{\mu_2(m)} \leq \frac{\mu_1(n)}{\mu_1(m)} \leq (1+\varepsilon)\frac{\mu_2(n)}{\mu_2(m)} \tag{4.89}$$

sağlanır. (4.88) ve (4.89) dan

$$\begin{aligned}\frac{\lambda_{\mu_1}\left(\left\{n:\left|x_n-\beta\right|<\varepsilon\right\},n\right)}{\mu_1(n)} &= \frac{\mu_1\left(n^{(1)}\right)}{\mu_1(n)}-\frac{\mu_1\left(n^{(2)}\right)}{\mu_1(n)} \\ &\leq (1+\varepsilon)\frac{\mu_2\left(n^{(1)}\right)}{\mu_2(n)}-(1-\varepsilon)\frac{\mu_2\left(n^{(2)}\right)}{\mu_2(n)} \\ &\leq \frac{\mu_2\left(n^{(1)}\right)-\mu_2\left(n^{(2)}\right)}{\mu_2(n)}+2\varepsilon \\ &\leq \frac{\lambda_{\mu_2}\left(\left\{n:\left|x_n-\beta\right|<\varepsilon\right\},n\right)}{\mu_2(n)}+2\varepsilon\end{aligned}$$

elde edilir. $\varepsilon>0$ yeterince küçük keyfi seçildiğinden

$$\frac{\lambda_{\mu_1}\left(\left\{n:\left|x_n-\beta\right|<\varepsilon\right\},n\right)}{\mu_1(n)} \leq \frac{\lambda_{\mu_2}\left(\left\{n:\left|x_n-\beta\right|<\varepsilon\right\},n\right)}{\mu_2(n)}$$

elde edilir. Son eşitsizlik ve (4.87) den

$$\overline{p}_{\mu_1}\left(\left\{n:\left|x_n-\beta\right|<\varepsilon\right\}\right)=0$$

elde edilir.

Böylece $\beta\in\Gamma_{\overline{p}_{\mu_1}}(x)$ dir. Yani $\Gamma_{\overline{p}_{\mu_2}}(x)\subset\Gamma_{\overline{p}_{\mu_1}}(x)$ içermesi elde edilir.

Benzer biçimde $\Gamma_{\overline{p}_{\mu_1}}(x)\subset\Gamma_{\overline{p}_{\mu_2}}(x)$ içermesinin sağlandığı da elde edilir. Böylece (4.86) deki ilk eşitlik sağlanmış olur. İkinci eşitliğin sağlandığı da benzer biçimde gösterilebilir. ■

Sonuç 4.3.3.3. c herhangi pozitif reel sayı, μ_1 ve μ_2 herhangi iki salınım fonksiyonu olsun. Eğer,

$$\lim_{n\to\infty}\frac{\mu_1(n)}{\mu_2(n)}=c$$

koşulu sağlanırsa reel değerli $x=(x_n)$ dizisi için (4.86) deki eşitlikler sağlanır.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

Bu bölümde, ilk olarak bulgular ve tartışma bölümünde ele alınan konu özetlenecek daha sonra ise bu tez çalışmasından faydalanılarak ele alınabilecek problemler verilecektir.

5.1. Sonuçlar

Bu tez çalışmasında, bulgular ve tartışma bölümünün ilk kısmında pozitif reel sayıların alt kümeleri için pretanjant uzay yapısı kurulmuş ve daha sonra bir kümenin pretanjant uzayı ile porosity sayıları kümesi arasındaki ilişki hakkında bir yorum Teorem 4.1.1 de yapılmıştır.

İkinci kısımda doğal sayıların alt kümeleri için sonsuzlukta üst porosity kavramı $\mu:\mathbb{N}\to\mathbb{R}^+$ salınım fonksiyonu yardımı ile Tanım 4.2.1 de tanımlanmıştır. Doğal sayıların herhangi alt kümesi için sonsuzlukta üst porosity değerini hesaplamada kolaylık sağlayan bir eşitlik Lemma 4.2.1 de verilmiştir. Ayrıca herhangi $E\subset\mathbb{N}$ için $\overline{p}_{\mu}(E)=\overline{p}^{+}(\mu(E))$ eşitliğinin sağlandığı Teorem 4.2.1 de gösterilmiştir. Bir kümenin sonsuzlukta porous, kuvvetli porous veya nonporous olması için sağlanması gereken gerek ve yeter koşullar Önerme 4.2.1 de, pretanjant uzaylar ve sonsuzlukta üst porosity arasındaki ilişki Teorem 4.2.2 de verilmiştir. Herhangi bir kümenin farklı iki salınım fonksiyonuna göre porosity sayıları kümesinin aynı olması için sağlanması gereken koşul Teorem 4.2.4 de ifade edilmiştir.

Üçüncü kısım, ilk iki kısmın bir uygulaması olarak hazırlanmıştır. Bu kısımda ilk olarak, reel değerli diziler için porosity yakınsaklık kavramı Tanım 4.3.1.1 de tanımlanmıştır. Verilen yeni yakınsaklık kavramı ile ilgili sonuçlar Teorem 4.3.1.1, Teorem 4.3.1.2, Teorem 4.3.1.3, Teorem 4.3.1.4, Teorem 4.3.1.5, Teorem 4.3.1.6, Teorem 4.3.1.7 de elde edilmiştir.

Daha sonra porosity limit infimum, porosity limit supremum kavramları, sırası ile Tanım 4.3.2.3 ve Tanım 4.3.2.4. de tanımlanmıştır. Bu yeni kavramların klasik yakınsaklık ve porosity yakınsaklık arasındaki ilişki, sırası ile Teorem 4.3.2.11 ve Teorem 4.3.2.12 de verilmiştir.

Son olarak porosity limit noktası ve porosity yığılma noktası kavramları Tanım 4.3.3.1 ve Tanım 4.3.3.2 de tanımlanmış ve porosity yakınsaklık ile ilişkileri Teorem 4.3.3.4 de incelenmiştir.

Böylece, literatüre doğal sayıların alt kümeleri için sonsuzlukta porosity kavramının yanı sıra, reel değerli diziler için porosity yakınsaklık kavramı ve onunla ilgili birçok kavram kazandırılmış oldu.

5.2. Öneriler

Bu tez çalışmasında yapılan işlemlerde ele alınan porosity kavramı, yoğunluk kavramından tamamen farklıdır. Dolayısı ile aşağıda belirtilen problemler bu tez çalışması göz önünde bulundurularak incelenebilir. $A \subset \mathbb{N}$ olmak üzere

1) $\overline{p}_{\mu}(A) = d(A)$ eşitliğini sağlayan kümeler var mıdır?

2) $\overline{p}_{\mu}(A) = 1 \Leftrightarrow d(A) = 0$ önermesini sağlayan kümeleri inceleyiniz?

3) $\overline{p}_{\mu}(A) = 0 \Leftrightarrow d(A) = 1$ önermesini sağlayan kümeleri inceleyiniz?

Bu sorulara cevap bulunduğunda, $\wp$ asal sayılar kümesi olmak üzere $\overline{p}_{\mu}(\wp)$ değerinin hesaplanması da mümkün olacaktır. Bu ise asal sayılar ile ilgili önemli bir bilginin literatüre kazandırılması anlamına gelecektir.

Ayrıca bu çalışmada kullanılan doğal sayı kümeleri için sonsuzlukta üst porosity kavramı yerine sonsuzlukta alt porosity kavramını göz önünde bulundurarak yakınsaklık tanımlamak ve bu iki yakınsaklığı karşılaştırmak, literatüre özgün değeri yüksek olan çok sayıda çalışma kazandıracaktır.

KAYNAKLAR

[1]. Fast, H., Sur la convergence statistique. *Colloqium Math.* **1951**, 2, 241-244.

[2]. Steinhaus, H., Sur la convergence ordinaire et la convergence asymptotique. *Colloqium Math.* **1951**, 2, 73-74.

[3]. Fridy, J. A., On statistical convergence. *Analysis* **1985**, 5, (4), 301-313.

[4]. Fridy, J. A., Statistical limit points. *Proc. Amer. Math. Soc.* **1993**, 118, (4), 1187-1192.

[5]. Connor, J.; Kline, J., On statistical limit points and the consistency of statistical convergence. *J. Math. Anal. Appl.* **1996**, 197, (2), 392-399.

[6]. Koşar, C.; Küçükaslan, M.; Et, M., On asymptotically deferred statistical equivalence of sequences. *Filomat* **2017**, 31, (16), 5139-5150.

[7]. Şengül, H.; Et, M., On (λ, I)-statistical convergence of order α of sequences of function. *Proc. Nat. Acad. Sci. India Sect. A* **2018**, 88, (2), 181-186.

[8]. Miller, I. H., Statistical cluster points of subsequences of double sequences. *Sarajevo J. Math.* **2016**, 12, (25), 261-266.

[9]. Kaya, E.; Küçükaslan, M.; Wagner, R., On statistical convergence and statistical monotonicity. *Annales Univ. Sci. Budapest. Sect. Comp.* **2013**, 39, 257-270.

[10]. Denjoy, A., Sur une propriété des séries trigonométriques. *Verlah v. d. G. V. der Wie-en Natuur. Afd.* **1920**, 29, 220-232.

[11]. Denjoy, A., *Leçons sur les calcul des coefficients d'une série trigonométrique, Part II, Métrique et topologie d'ensembles parfaits et de fonctions:* Gauthier-Villars, Paris, 1941.

[12]. Khintchine, A., An investigation of the structure of measurable functions, (Russian). *Mat. Sbornik* **1924**, 31, 265-285.

[13]. Dolzĕnko, E. P., Boundary properties of arbitrary functions. *Mathematics of the USSR-Izvestiya* **1967**, 1, 1-12.

[14]. Baliaev, D. B.; Smirnov, S. K., On dimension of porous measures. *Math. Ann* **2002**, 323, (1), 123-141.

[15]. Eckmann, J. P.; Järvenpää, E.; Järvenpää, M., Porosities and dimensions of measures. *Nonlinearity* **2000**, 13, (1), 1-18.

[16]. Koskela, P.; Rohde, S., Hausdorff dimension and mean porosity. *Math. Ann.* **1997**, 309, (4), 593-609.

[17]. Dovgoshey, O.; Riihentaus, J., Mean value type inequalities for quasinearly subharmonic functions. *Glasgow Math. J.* **2013**, 55, (2), 349-368.

[18]. Karp, L.; Kilpelainen, T.; Petrosyan, A.; Shagholian, H., On the porosity of free boundaries in degenerate variational inequalities. *J. Differential Equations* **2000**, 164, 110-117.

[19]. Käenmäki, A.; Suomala, V., Conical upper density theorems and porosity of measures. *Adv. Math.* **2008**, 217, (3), 952-966.

[20]. Foran, J.; Humke, P., Some set-theoretic properties of σ-porous sets. *Real Anal. Exchange* **1980-81**, 6, (1), 114-119.

[21]. Humke, P.; Vessey, T., Another note σ-porous sets. *Real Anal. Exchange* **1982-83**, 8, 262-271.

[22]. Thomson, B. S., *Real functions, Lecture Notes in Mathematics,* 1170, Springer-Verlag, Berlin, Heidelberg, New York, Tokyo, 1985; p 183.

[23]. Urbanski, M., Porosity in conformal infinite iterated function system. *J. Number Theory* **2001**, 88, (2), 283-312.

[24]. Yanagihara, N., Angular cluster sets and oriceyelic cluster sets. *Proc. Japan. Acad.* **1969**, 45, 423-428.

[25]. Yoshida, H., Tangential boundary properties of arbitrary functions in the unit disc. *Nagoya Math. J.* **1972**, 46, 111-120.

[26]. Yoshida, H., On the boundary properties and the spherical derivatives of meromorphic functions in the unit discs. *Math. Z.* **1973**, 132, 51-68.

[27]. Zajiček, L., On σ-porous sets in abstract spaces. *Abstr. Appl. Anal.* **2005**, 5, 509-534.

[28]. Kechris, A., Hereditary properties of the class of closed sets of ubiqueness for trigonometric series. *Israel J. Math.* **1991**, 73, (2), 189-198.

[29]. Kechris, A.; Louveau, A.; Woodin, W., The structure of σ-ideals of compact sets. *Trans. Amer. Math. Soc.* **1987**, 301, (1), 263-288.

[30]. Repický, M., Porous sets and additivity of Lebesque measure. *Real Anal. Exchange* **1981**, 15, (1), 282-298.

[31]. Zajiček, L.; Zelený, M., On the complexity of some σ-ideals of σ-P-porous sets. *Comment Math. Univ. Carolin* **2003**, 44, (3), 531-554.

[32]. Zelený, M.; Pelant, J., The structure of the σ-ideals of σ-porous sets. *Comment Math. Univ. Carolin* **2004**, 45, (1), 37-72.

[33]. Semenova, O.; Florinskii, A., Ideals of porous sets in the real line and in metrizable topological spaces. *J. Math. Sci.* **2000**, 102, (5), 4508-4522.

[34]. Bilet, V.; Dovgoshey, O.; Prestin, J., Two ideals connected with strong right upper porosity at a point. *Czechoslovak Math. J.* **2015**, 65, (140), 713-737.

[35]. Bilet, V.; Dovgoshey, O., Investigations of strong right upper porosity at a point. *Real Analysis Exchange* **2013-14**, 39, (1), 1-32.

[36]. Mattila, P., Distribution of sets and measures along planes. *J. London Math. Soc.* **1988**, 38, (1), 125-132.

[37]. Przytycki, F.; Rohde, S., Porosity of Collet-Eckmann Julia sets. *Fund. Math.* **1998**, 155, 189-199.

[38]. Bilet, V.; Dovgoshey, O., Infinitesimal boundedness of metric spaces and strong one-sided porosity, (Russian). *Repoorts of the NASU* **2013**, 2, 13-18.

[39]. Bilet, V.; Dovgoshey, O., Boundedness of pretangent to general metric spaces. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **2009**, 39, 73-82.

[40]. Chousionis, V., Directed porosity on conformal iterated function systems and weak convergence of singular intervals. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **2009**, 34, (1), 215-232.

[41]. Tkadlec, J., Constructions of some non-σ-porous sets on the real line. *Real Anal. Exchange* **1983-84**, 9, (2), 473-482.

[42]. Zajiček, L., On cluster sets of arbitrary functions. *Fund. Math.* **1974**, 83, 197-217.

[43]. Zajiček, L., Porosity and σ-porosity. *Real Anal. Exchange* **1987-88**, 13, 314-350.

[44]. Wade, W. R., *An introduction to Analysis,* Pearson education, 1995.

[45]. Abdullayev, F.; Dovgoshey, O.; Küçükaslan, M., Metric spaces with unique pretangent spaces. Conditions of the uniqueness. *Ann. Acad. Sci. Fenn. Math.* **2011**, 36, (2), 353-392.

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı :Maya ALTINOK

Doğum Tarihi :09.02.1987

E-mail :mayaaltinok@mersin.edu.tr

Öğrenim Durumu :

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Gazi Üniversitesi	2005-2009
Yüksek Lisans	Matematik	Gazi Üniversitesi	2010-2013
Doktora	Matematik	Mersin Üniversitesi	2013-

Görevler :

Görev Ünvanı	**Görev Yeri**	**Yıl**
Araştırma Görevlisi	Mersin Üniversitesi –Matematik Bölümü	2013-

Eserler

1.) **Altınok M.,** İnan B., Küçükaslan M., On Asymptotically Wijsman Deferred Statistical Equivalence of Sequences of Sets. *Thai Journal of Mathematics,* In Press, **2019**

2.) **Altınok M.,** Porosity Supremum-Infimum and Porosity Convergence. *Konuralp Journal of Mathematics,* 6, 163-170, **2018**

3.) **Altınok M.,** Küçükaslan M., Ideal Limit Superior-Inferior. *Gazi University Journal of Science,* 30, 401-411, **2017**

4.) **Altınok M.,** Dovgoshey O., Küçükaslan M., Unions and Ideals of Locally Strongly Porous Sets. *Turkish Journal of Mathematics,* 41, 1510-1534, **2017**

5.) **Altınok M.,** Kurtdişi Z., Küçükaslan M., On Generalized Statistical Convergence. *Palestine Journal of Mathematics,* 5, 50-58, **2016**

6.) **Altınok M.,** Küçükaslan M., On Porosity-Convergence of Real Valued Squences. *An. Şti. Univ. "Al. I. Cuza" Iaşi Sect. I a Mat.,* Accepted, **2016**

7.) **Altınok M.,** Dovgoshey O., Küçükaslan M., Local One-Sided Porosity and Pretangent Spaces. *Analysis,* 1, 1-29, **2015**

8.) **Altınok M.,** İnan B., Küçükaslan M., Deferred Statistical Convegence of Sequence of Sets in Metric Spaces. *Turkish Journal of Mathematics and Computer Science,* 1, 1-19, **2015**

9.) **Altınok M.,** Küçükaslan M., A-Statistical Supremum Infimum and A-Statistical Convergence. *Azerbaijan Journal of Mathematics,* 4, 31-42, **2014**

10.) **Altınok M.,** Küçükaslan M., A-Statistical Convergence and A-Statistical Monotonicity. *Applied Mathematics E- Notes,* 13, 249-260, **2013**

11.) Küçükaslan M., **Altınok M.,** Statistical Supremum Infimum and Statistical Convergence. *The Alligarh Bulletin of Mathematics,* 32, 1-16, **2013**