# BAZI $p$-ADİK TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN MAHLER AÇILIMLARI ÜZERİNE

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**


**SUNA ÇİÇEK**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK**

**ANABİLİM DALI**



**MERSİN**
**MAYIS- 2019**

# BAZI $p$-ADİK TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN MAHLER AÇILIMLARI ÜZERİNE

**YÜKSEK LİSANS TEZİ**

**SUNA ÇİÇEK**

**MERSİN ÜNİVERSİTESİ**
**FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ**

**MATEMATİK**
**ANABİLİM DALI**

**Danışman**
**Prof. Dr. Hamza MENKEN**

**MERSİN**
**MAYIS-2019**

## ONAY

Suna Çiçek tarafından Prof. Dr. Hamza MENKEN danışmanlığında hazırlanan "Bazı *p*-adik Trigonometrik Fonksiyonların Mahler Açılımları Üzerine" başlıklı çalışma aşağıda imzaları bulunan jüri üyeleri tarafından 27.05. 2019 tarihinde yapılan Tez Savunma Sınavı sonucunda oy birliği ile Yüksek Lisans tezi olarak kabul edilmiştir.

| Görevi | Ünvanı, Adı ve Soyadı | İmza |
|---|---|---|
| Başkan | Prof.Dr. Hamza MENKEN | |
| Üye | Prof.Dr. Hanlar REŞİDOĞLU | ................... |
| Üye | Prof.Dr. Ahmet İPEK | ................... |

Yukarıdaki Jüri kararı Fen Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 12/07/2019 tarih ve 2019-898/28 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

Prof. Dr. Cahit BİLİM
Fen Bilimleri Enstitü Müdürü

*Bu tezde kullanılan özgün bilgiler, şekil, tablo ve fotoğraflardan kaynak göstermeden alıntı yapmak 5846 sayılı Fikir ve Sanat Eserleri Kanunu hükümlerine tabidir.*

## ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

## ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

27/05/ 2019

İmza / Signature

SUNA ÇİÇEK

## ÖZET

**BAZI $p$ −ADİK TRİGONOMETRİK FONKSİYONLARIN MAHLER AÇILIMLARI ÜZERİNE**

Bu tezde bazı $p$-adik trigonometrik fonksiyonlar göz önüne alınmıştır. $p$-adik değişkenli trigonometrik fonksiyonlar kuvvet serileri ile tanımlı fonksiyonlar olarak gözönüne alınmaktadır. Reel durumda olduğu gibi her sürekli fonksiyona bir polinomla yaklaşılabilir. Fakat $p$-adik durumda durum daha sadedir. Gerçekten her $f \in C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ fonksiyonu için $\binom{x}{n}$ binom katsayısı (n.dereceden bir polinom) olmak üzere,

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

şeklinde yazılır. Bu açılıma $f$ nin Mahler açılımı denir. Burada $a_n$ sayıları

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(n-k), \quad (n = 0,1,2,\dots)$$

ile belirlidir ve bunlara $f$ nin Mahler katsayıları denir.

Bu çalışmada bazı $p$-adik trigonometrik fonksiyonların Mahler açılımları elde edilmiş ve Mahler katsayıları hesaplanmıştır. Ayrıca, bu fonksiyonların Volkenborn integralleri ve fermiyonik $p$-adik integralleri için sonuçlar elde edilmiştir.



**Anahtar Kelimeler:** Mahler açılımı, Mahler katsayıları, $p$ −adik trigonometrik fonksiyonlar, Volkenborn integrali, fermiyonik $p$ −adik integral



**Danışman:** Prof. Dr. Hamza MENKEN, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

## ABSTRACT

### ON THE MAHLER EXPANSIONS OF SOME $p$ −ADIC TRIGONOMETRIC FUNCTIONS

In this thesis we consider some $p$ −adic trigonometric funtions. The trigonometric functions with a $p$ −adic variable are defined by power series. As the real case, for every continous function can be approximatied by a polynomial functions. But in $p$ −adic case, the situation is more simple. In fact , for every $f \in C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ can be writen in the form of

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

where $\binom{x}{n}$ is the binomial coefficient (a polynomial of degree $n$). This expansion is called as Mahler expansion of *f*. The numbers $a_n$ are determined by formula

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(n-k), \quad (n = 0,1,2, \dots)$$

and they are called as Mahler coefficients of *f.*

Their in this work, Mahler expansions of some $p$-adic trigonometric functions were obtained and Mahler coefficients were calculated. In addition, some results were obtained for Volkenborn integrals and fermionic $p$-adic integrals of these functions.



**Keywords:** Mahler expansion, Mahler coefficients, $p$ −adic trigonometric functions, Volkenborn integral, fermionic $p$ −adik integral.



**Advisor:** Prof. Dr. Hamza MENKEN, Department of Mathematics, University of Mersin.

## TEŞEKKÜR

Mersin Üniversitesi'nde Lisansüstü eğitime başladığım günden bugüne dek her konuda yardım ve desteğini benden esirgemeyen saygıdeğer hocam sayın Prof. Dr. Hamza MENKEN'e ve bilgilerinden faydalandığım tüm bölüm hocalarıma teşekkür ediyorum.

Aldığım her kararda desteklerini ve sevgilerini derinden hissettiğim başta annem Rahime ÇİÇEK, babam Ali ÇİÇEK ve kardeşlerim İlknur, Orhan ve Mehmet Ali olmak üzere tüm aileme teşekkürlerimi iletiyor, bu çalışmamı onlara ithaf ediyorum.

Bu çalışmayı 2018-3-TP2-3055 kodlu projeyle destekleyen Mersin Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Birimi'ne teşekkür ederim.

# İÇİNDEKİLER

## SİMGE VE KISALTMALAR DİZİNİ

| | |
|---|---|
| $\mathbb{N}$ | Doğal sayılar kümesi |
| $\mathbb{Z}$ | Tam sayılar kümesi |
| $\mathbb{Q}$ | Rasyonel sayılar kümesi |
| $\mathbb{R}$ | Reel sayılar kümesi |
| $\mathbb{C}$ | Karmaşık sayılar kümesi |
| $\mathbb{Z}_p$ | $p$ −adik tam sayılar halkası |
| $\|\|_\infty$ | Mutlak değer normu |
| $\|\cdot\|_p$ | $p$ −adik norm |
| $\mathbb{Q}_p$ | $p$ −adik sayılar cismi |
| $\mathbb{C}_p$ | $\mathbb{Q}_p$ $p$-adik sayılar cisminin cebirsel kapanışının tamlaştırıcı cismi |
| $\nu_p$ | $p$ −adik değerlendirme |
| $(n!)_p$ | $p$ −adik faktöriyel |
| $B(a,r)$ | $a$ merkezli $r$ yarıçaplı açık yuvar |
| $(n)_q$ | $n$ nin $q$-analogu |
| $\binom{n}{k}_q$ | $q$-binomial katsayı |
| $\binom{x}{n}$ | Mahler tabanı |
| $a_{n,m}$ | 2.tip Stirling sayıları |
| $b_n$ | Klasik Bernoulli sayısı |
| $\mathcal{E}_n$ | Klasik Euler sayısı |
| $B_n$ | $p$-adik Bernoulli sayısı |
| $E_n$ | Euler sayısı |
| $\mu$ | ölçü |
| $\int_{\mathbb{Z}_p}$ | $\mathbb{Z}_p$ üzerinde $p$-adik integral |
| $\mu_q$ | $q$-ölçü |
| $I_q(f) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\mu_q(x)$ | $p$-adik $q$-integral ($q$ −Volkenborn integrali) |
| $I_{-q}(f) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\mu_{-q}(x)$ | $\mathbb{Z}_p$ üzerinde fermiyonik anlamda $p$-adik $q$ −integral |
| $I_{-1}(f) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x) d\mu_{-1}(x)$ | $\mathbb{Z}_p$ üzerinde fermiyonik anlamda $p$-adik integral |

# 1. GİRİŞ

Bilimsel çalışmalarda ve günlük yaşamda genellikle $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismi kullanılır. $\mathbb{Q}$ Rasyonel sayılar cismi sadece trivial norma göre tamdır ve $\mathbb{Q}$ Rasyonel sayılar cisminin genel mutlak değer normuna göre tamlaştırılması ile $\mathbb{R}$ Reel sayılar cismi elde edilir. Ostrowski Teoremi ile $\mathbb{Q}$ 'daki her norm ya genel mutlak değer normuna ya da $p$ bir asal sayı olmak üzere $|\cdot|_p$ $p$-adik normuna denktir [1]. Şimdi $p$-adik normu kısaca tanıtalım. $p$ keyfi fakat sabit bir asal sayı olsun. Herhangi bir $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ için

$$x = p^{\alpha}.\frac{a}{b}\,, \qquad p \nmid a.b$$

olacak şekilde tek türlü belirli bir $\alpha \in \mathbb{Z}$ tamsayısı vardır ve bu durumda

$$|x|_p = p^{-\alpha}$$

ile tanımlanır. Eğer $x = 0$ ise $|0|_p = 0$ olarak alınır. $|\cdot|_p$fonksiyonu bir norm tanımlar ve üçgen eşitsizliğinde daha güçlü olan ve ultra metrik üçgen eşitsizliği adı verilen

$$|x+y|_p \leq \max\{|x|_p, |y|_p\}$$

eşitsizliğini sağlar. Ultrametrik üçgen eşitsizliğini sağlayan bir norma bir Arşimedyan olmayan norm ve bu normlu cisimlerde yapılan analize de non-Arşimedyan Analiz denir.

$p$-adik sayılar cismi, $\mathbb{Q}_p$ 1904 te Kurt Hensel tarafından inşa edilmiş ve belli bir süre sadece sayılar teorisinde, cebirsel geometride, cebirsel ve aritmetiksel dinamiklerde ve şifreleme gibi matematiksel alanlarda kullanılmıştır [2].

1987 de Volovich tarafından bazı fiziksel sistemlerin modellenmesinde ve $p$-adik saçılma genliğinin yapılandırılmasıyla birlikte $p$-adik sayılar uygulamalı alanlarda kullanılmaya başlamıştır. Örneğin; sicim kuramında kuantum mekaniğinde, yer çekiminde $p$-adik sayılar kullanılmıştır. Daha sonraki yıllarda tıp, psikoloji, sosyoloji, kontrol teorisi için $p$-adik metodlar kullanılmaya başlamıştır [3-4].

## 2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

$\mathbb{Q}$ Rasyonel sayılar cismin $|\cdot|_p$ $p$-adik normuna göre tamlaştırılması ile elde edilen cisme $\mathbb{Q}_p$ $p$-adik sayılar cismi denir. Ostrowski teoremi ile $\mathbb{Q}$ Rasyonel sayılar cismin mümkün olan tamlaştırmaları Arşimedyan olan $\mathbb{R}$ Reel sayılar cismi ve $p$ bir asal olmak üzere Arşimedyan olmayan $\mathbb{Q}_p$ $p$-adik sayı cisimleridir. $\mathbb{Q}_p$ $p$-adik sayılar cismi 1904 te Kurt Hensel tarafından inşa edilmiş ve uzun süre $p$-adik sayılar sadece sayılar teorisinin bir alanında kullanılmıştır [2]. Fizikte niye sadece reel sayıların kullanıldığı sorgulanmaya başlanmış ve 1968 te iki teorik matematikçi olan A.F. Monna ve F. Van der Blij tarafından $p$-adik sayılar fizikte kullanılmaya başlanmıştır. 1984 te V.S. Vladimirov ve I. V. Volovich $p$-adik sayıların süper cisim teorisine başarılı şekilde uygulanması ile birlikte $p$-adik sayılar uygulamalı alanlarda da kullanılmaya başlanmıştır [3]. Bununla beraber fizikte $p$-adik evren modeli, $p$-adik kuantum teorisi, $p$-adik sicim kuramı gibi alanlar oluşmuştur. Matematikte $p$-adik sayıların kullanılması ile yapılan çalışmalar $p$-adik analiz denilen bir alanda toplanmıştır. Reel sayılarla yapılan kavramlar $p$-adik sayıların kullanılması ile yeniden tanımlanmasına ve yorumlanmasına başlanmıştır [3-4].

$\mathbb{C}_p, \mathbb{Q}_p$ $p$-adik sayıları cisminin cebirsel kapanışının tamlaştırıcı cismi olmak üzere, Kaplansky Teoremi ile her $f: \mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p$ sürekli fonksiyona polinom fonksiyonlarla düzgün olarak yaklaşılabilir [5]. Burada $x \in \mathbb{Z}_p$ olmak üzere binom katsayıları $\binom{x}{0} = 1$ ve

$$\binom{x}{n} = \frac{x.(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$$

(n=1,2,… ) ile tanımlansın. Buna göre $\binom{x}{n}$ n. dereceden bir polinomdur ve

$$x \to \binom{x}{n} \qquad (x \in \mathbb{Z}_p, n \in \mathbb{N})$$

polinom fonksiyonları $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ uzayının bir ortonormal tabanını oluşturur. Başka bir deyişle her $f \in C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ için tek türlü belirli $a_0, a_1, a_2, \dots \in \mathbb{C}_p$ sayıları vardır ki

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \qquad (x \in \mathbb{Z}_p)$$

dir. $\left\{\binom{*}{n}: n \in \mathbb{N}\right\}$ tabanına $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ nin Mahler tabanı ve

$$f(x) = \sum a_n \binom{x}{n}$$

deki $\{a_n : n \in \mathbb{N}\}$ sayılarına Mahler katsayıları denir [6]. Bu çalışmada bazı $p$-adik trigonometrik fonksiyonların Mahler açılımları ve Mahler katsayıları belirlenmiştir.

Reel değerli sürekli fonksiyonlar uzayındaki ölçü teorisinin aksine olarak $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ uzayında ötelemeyi koruyan tek ölçü $\mu = 0$ ölçüsüdür. Bunun için $p$-adik fonksiyonlarda bu özellik terkedilmiştir. Bir $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ fonksiyonu için

$$\lim_{n\to\infty} \frac{1}{p^n} \sum_{j=0}^{\infty} f(j)$$

limiti var ve bu limit $f$ nin Volkenborn integrali olarak tanımlanır ve

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx$$

ile gösterilir. Eğer $f(x) = c$ ise

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = c$$

dir. Ayrıca öteleme altında invaryantlık özelliği yerine

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = f'(0)$$

sağlanır. Bunun yanında eğer

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \in C^1(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$$

ise bunun Volkenborn integrali

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

dır [5-7]. Bu tezde bazı $p$-adik trigonometrik fonksiyonların Volkenborn integralleri hesaplanmış ve bunlarla ilgili özellikler verilmiştir.

Volkenborn integrali ilk defa 1971 de A. Volkenborn tarafından ortaya koyulmuştur [8-9].

Taekyun Kim, 2002 de $q$-Volkenborn integralini ve Fermiyonik anlamda $q$-Volkenborn integralini tanımlamıştır [12]. 2005 te de Fermiyonik anlamda $q$-Volkenborn integralinin bazı özelliklerini araştırmış ve bu integralden yaralanılarak $q$-Euler sayısını tanımlamıştır [11]. 2008 de Fermiyonik anlamda $q$-Volkenborn integralini kullanarak Bernoulli ve Euler sayılarına ilişkin Witt'nin formülleri verilmiştir [12-13]. $p$-adik sayılar cismi üzerinde Euler sayı ve polinomları ile ilgili Bernstein polinomlarının Fermiyonik $p$-adik integral temsilleri üzerine çalışılmıştır [14-15]. Fermiyonik $p$-adik integral kullanılarak, Bernoulli polinomları, Euler polinomları ve trigonometrik fonksiyonlar üzerine çalışılmıştır [16-17].

Bu çalışmanın son kısmında bazı trigonometrik fonksiyonların fermiyonik $p$-adik integralleri ile ilgili bağıntılar elde edilmiştir.

Bu tezde bazı $p$-adik trigonometrik fonksiyonlar göz önüne alınmıştır. Bu fonksiyonların Mahler açılımları, Mahler katsayıları bulunmuştur. Ayrıca bunların Volkenborn integralleri ve Fermiyonik $p$-adik integralleri hesaplanmıştır.

# 3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölümde tez boyunca kullanılacak bazı temel tanımlar ve teoremlere yer verilecektir.

## 3.1. $p$-ADİK SAYILAR

### 3.1.1 Bir Cisim Üzerinde Norm

**Tanım 3.1.1.** $K$ bir cisim olmak üzere, $|\cdot|: K \to [0, \infty)$ fonksiyonu,

**i.** Her $x \in K$ için, $\|x\| \geq 0$, $\|x\| = 0 \Leftrightarrow x = 0$

**ii.** Her $x,\ y \in K$ için, $\|xy\| = \|x\|\|y\|$

**iii.** Her $x,\ y \in K$ için, $\|x + y\| \leq \|x\| + \|y\|$

şeklindeki üç koşulu sağlıyorsa bu fonksiyona bir norm denir.

Eğer bu fonksiyon,

**iv.** Her $x, y \in K$ için, $\|x + y\| \leq max\{\|x\|,\ \|y\|\}$

koşulunu da sağlarsa bu norma $K$ üzerinde bir non-Arşimedyan (Arşimed olmayan) norm

denir [1] . (iv) koşulunu sağlamayan bir norma bir Arşimedyan norm denir.

(iv) koşulu, (iii) koşulundan daha güçlüdür. Çünkü $max\{\|x\|,\ \|y\|\} \leq \|x\| + \|y\|$ eşitsizliği, $\forall\ x,\ y \in K$ için sağlanır.

**Örnek 3.1.1:** $x \in \mathbb{Z}_p$ ve $|x| = \begin{cases} -x, & x < 0 \\ x, & x \geq 0 \end{cases}$ ile tanımlı mutlak değer arşimedyandır. Bu mutlak değere genellikle sonsuzda mutlak değer denir ve $|\cdot|_\infty$ ile gösterilir.

**Lemma 3.1.1.** Bir $K$ cismi üzerinde herhangi bir $|\cdot|$ normu için aşağıdakiler sağlanır [1]:

**i.** $\|1\| = 1$.

**ii.** $x \in K$ ve $n \in \mathbb{Z}\backslash\{0\}$ için, $\|x^n\| = 1$ ise, $\|x\| = 1$.

**iii.** $\|-1\| = 1$.

**iv.** Her $x \in K$ için, $\|-x\| = \|x\|$.

**v.** Eğer $K$ sonlu bir cisim ise, $|\cdot|$ normu trivialdir.

### 3.1.2. $p$ −Adik Değerlendirme ve $p$ −Adik Norm

**Tanım 3.1.2:** $p$ herhangi bir asal sayı olsun. $n \neq 0$ ve $n \in \mathbb{Z}$ için $v_p(n), n\ yi$ bölen $p$ nin en büyük kuvvetini göstersin:

$$n = p^{v_p(n)}n' , \qquad p \nmid n'.$$

Bu gösterim tektir.

Bu taktirde, $v_p: \mathbb{Z}\backslash\{0\} \to \mathbb{Z}^+ \cup \{0\}$ fonksiyonuna $\mathbb{Z}'de\ p - adik\ değerlendirme$ denir.

**Örnek 3.1.2:** $p = 5$ için 145 sayısı, $135 = 5^1.29$ olduğundan, $v_5(145) = 1$ bulunur.

**Not 3.1.2:** $\boldsymbol{x = \frac{a}{b}} \in \mathbb{Q}^{\boldsymbol{x}}$ için,

$$v_p(x) = v_p(a) - v_p(b) \tag{3.1}$$

tanımı ile $v_p$ fonksiyonu, $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar cismine genişletilmiş olur. Burada $v_p(x)$ değeri, $x\ in$ kesir gösteriminden bağımsızdır. Yani, $a/b = c/d$ ise,

$$v_p(a) - v_p(b) = v_p(c) - v_p(d)$$

Kolayca gösterilebilir ki, $x = \boldsymbol{\frac{a}{b}} \in \mathbb{Q}^{\boldsymbol{x}}\ p - adik$ değerlendirme,

$$x = p^{v_p(x)}.\frac{a'}{b'} \qquad , \ p \nmid a'\ b'$$

ile belirlenir.

**Örnek 3.1.3.** $p = 5$ için, $v_5(1) = 0$ , $v_5(145) = 1$ ve böylece (3.1) ile,

$$\begin{aligned} v_5\left(\frac{1}{145}\right) &= v_5(1) - v_5(145) \\ &= 0 - 1 \\ &= -1 \end{aligned}$$

bulunur.

**Lemma 3.1.4 .** Her $x,\ y \in \mathbb{Q}$ için,

- **i.** $v_p(x.y) = v_p(x) + v_p(y)$
- **ii.** $v_p(x + y) \geq min\{v_p(x),\ v_p(y)\}$ [1].

### 3.1.3. $p$ −Adik Değerlendirmenin Özellikleri

**Tanım 3.1.3:** $p$ sabit fakat keyfi bir asal sayı olmak üzere $|\cdot|_p$ $p$-adik normu aşağıdaki şekilde tanımlanır:

Herhangi bir $x \in \mathbb{Q}, x \neq 0$ için

$$x = p^{\alpha} \cdot \frac{a'}{b}, p \nmid a \cdot b$$

olacak şekilde tek türlü belirli bir $a \in \mathbb{Z}_p$ tamsayısı vardır ve bu durumda

$$|x|_p = p^{-\alpha}$$

ile tanımlanır [1].

Eğer $x = 0$ise $|0|_p = 0$ olarak alınır.

**Örnek 3.1.4:** $p$=5 için $|35|_5 = 5^{-1}$, p=3 için $|45|_3 = 3^{-2}$ dir.

**Sonuç 3.1.3:** Her $p$ asal sayısı için $|\cdot|_p$ non-arşimedyandır.

**Arşimed Özelliği:** $K$ bir cisim olsun. $\forall\ x,\ y \in K, x \neq 0$ için, $\exists\ n \in \mathbb{Z}^+$ vardır öyle ki $\|nx\| > \|y\|$ eşitsizliği sağlanır.

**Uyarı:** Arşimed özelliği $\mathbb{Q}$ ve $\mathbb{R}$ deki genel mutlak değer normu için geçerlidir.

Keyfi bir $K$ cismi için $\varphi: \mathbb{Z} \to K$

$$n \to \begin{cases} \underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\ kez}, & n > 0 \\ 0\ , & n = 0 \\ -\left(\underbrace{1 + 1 + \cdots + 1}_{n\ kez}\right), & n < 0 \end{cases}$$

dönüşümü tanımlansın.

**Teorem 3.1.5.** $A = \varphi(\mathbb{Z}) \subset K$ kümesine $K$ nın tamsayıları denir. $K$ da bir $|\cdot|$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, her $a \in A$ için $|a| \leq 1$ olmasıdır [1].

**Sonuç 3.1.5** Bir $|\cdot|$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul,

$$sup\{\|n\|: n \in \mathbb{Z}\} = 1 \text{ olmasıdır.}$$

### 3.2. Metrik Uzay

**Tanım 3.2.1.** $K$ bir cisim ve $|\cdot|$, $K$ da bir norm olsun. $\forall\ x,\ y \in K$ için,

$$d(x,y) = |x-y|$$

ile tanımlı

$$d: K \times K \to \mathbb{R}^+ = [0,\infty)$$

fonksiyonuna, $|\cdot|$ *normuyla üretilen metrik* denir [18].

$d(x,y)$ fonksiyonu aşağıdaki özellikleri sağlar:

**i.** Her $x,\ y \in K$ için $d(x,y) \geq 0$ ve $d(x,y) = 0 \Leftrightarrow x = y$,
**ii.** Her $x,\ y \in K$ için $d(x,y) = d(y,x)$,
**iii.** Her $x,\ y,\ z \in K$ için $d(x,y) \leq d(x,z) + d(z,y)$ (üçgen eşitsizliği).

**Tanım 3.2.2.** Bir küme üzerinde bir metrik tanımlı ise bu metrik ile birlikte bu kümeye bir *metrik uzay* denir.

**Lemma 3.2.3** $(|\cdot|, K)$ cismi üzerinde bir norm ve metrik $d(x,y) = |x-y|$ ile tanımlı olsun. Bu takdirde, $|\cdot|$ normunun non-Arşimedyan olması için gerek ve yeter koşul, her $x,\ y,\ z \in K$ için,

$$d(x,y) \leq max\{d(x,z),\ d(z,y)\} \text{ (\textit{ultra metrik eşitsizliği})}$$

olmasıdır [18].

**Lemma 3.2.4.** $|\cdot|_1$ ve $|\cdot|_2$ bir $K$ cisminde iki norm olsun. Aşağıdaki ifadeler denktir [1]:

**i.** $|\cdot|_1$ ve $|\cdot|_2$ denk normlardır.
**ii.** Her $x \in K$ için $|x|_1 < 1 \Leftrightarrow |x|_2 < 1$.
**iii.** $\exists \alpha \in \mathbb{R},\ \alpha > 0$ öyle ki her $x \in K$ için, $|x|_1 = {|x|_2}^{\alpha}$.
**iv.** $\forall x \in K$ için $|x|_1 \leq 1 \Leftrightarrow |x|_2 \leq 1$ .

**Teorem 3.2.5: (Ostrowski)** $\mathbb{Q}$ üzerinde tanımlı her non-trivial norm, $p$=∞ veya $p$ bir asal sayı olmak üzere bir $|\cdot|_p$ normuna denktir [1].

Ostrowski teoremi ile $\mathbb{Q}$ da mümkün olan bütün normlar belirlidir.

**Lemma 3.2.5.** $K$ bir cisim ve $|.|$, $K$ da bir non arşimedyan norm olsun. Eğer $x, y \in K$ ise

$$|x+y| = \max\{|x|, |y|\}$$

dir.

**Örnek 3.2.2.** $p = 5$ için $\mathbb{Q}$ da 5-$p$-adik norm ile köşeleri

$$x = \frac{2}{15}\,, y = \frac{1}{5}\,, z = \frac{7}{15}$$

olan üçgenin kenar uzunlukları:

$$d(x, y) = \left|\frac{2}{15} - \frac{1}{5}\right|_5 = \left|\frac{1}{15}\right|_5 = \frac{|1|_5}{|15|_5} = 5^{-v_p(1/5)} = 5^{-(-1)} = 5$$

$$d(x, z) = \left|\frac{2}{15} - \frac{7}{15}\right|_5 = \left|\frac{-5}{15}\right|_5 = \left|\frac{-1}{3}\right|_5 = \frac{|1|_5}{|3|_5} = 5^0 = 1$$

$$d(y, z) = \left|\frac{1}{5} - \frac{7}{15}\right|_5 = \left|\frac{-4}{15}\right|_5 = \frac{|4|_5}{|15|_5} = 5^{-v_p(1/5)} = 5^{-(-1)} = 5.$$

**Sonuç 3.2.2.** Bir ultra metrik uzayda bütün üçgenler ikizkenardır [5].

Tamlaştırma için gerekli olan topoloji kavramları hatırlayalım:

**Tanım 3.2.6:** $K$ bir cisim ve $|\cdot|$ $K$ da bir norm olsun.

**1)** $(|x_n|) \subset K$ da bir dizi olsun. Eğer her $\varepsilon > 0$ için öyle bir $N \in \mathbb{N}$ vardır ki her $n, m \geq N$ iken $|x_n - x_m| < \varepsilon$ ise $(x_n)$ ye bir Cauchy dizisi denir.

**2)** $K$ nın her Cauchy dizisi ($K$ $da$) bir limite sahipse $K$ ya tamdır denir.

**3)** $S \subset K$ olsun. Her $x \in K$ ve her $\varepsilon > 0$ $için$ $B(x, \varepsilon) \cap S \neq 0$ ise

$S$ ye $K$ da yoğundur denir.

**Teorem 3.2.7:** $\mathbb{Q}$ cismi, trivial olmayan herhangi bir norma göre tam değildir [1].

Reel analizden biliniyor ki:

- $|\cdot|_\infty$, $\mathbb{R}$ ye genişletilebilir.

- $\mathbb{R}$, $|\cdot|_\infty$ normuyla üretilen metriğe göre tamdır.

• $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$ de yoğundur.

Yani,

$\mathbb{R}$, $\mathbb{Q}$ nun $|\cdot|_\infty$ normuna göre tamlaştırılmasıdır.

$\mathbb{Q}$ nun $|\cdot|_p$ $p$-adik normuna göre tamlaştırılması aşağıdaki şekilde yapılabilir:

**Teorem 3.2.8:** $\mathbb{Q}$ nun bir $(x_n)$ dizisi non-arşimedyan $|\cdot|_p$ normuna göre bir Cauchy dizisi olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lim_{n\to\infty} |x_{n+1} - x_n|_p = 0$$

olmasıdır.

**Lemma.** $|\cdot|_p$ , $\mathbb{Q}$ da bir $p$-adik norm olsun. $\mathbb{Q}$ nun $|\cdot|_p$ ye göre bütün Cauchy dizilerinin kümesini $C$ veya $C(\mathbb{Q}\ )$ile gösterelim:

$C = C(Q) = \{(x_n) : (x_n)$ $|\cdot|_p$ ye göre bir Cauchy dizisidir.

$C$ kümesi,

$$(x_n) + (y_n) = (x_n + y_n)$$

$$(x_n).(y_n) = (x_n \cdot y_n)$$

ile tanımlı işlemlere göre bir birimli halkadır.

**Tanım 3.2.9.** $\mathcal{N} \subset C$ ideali, $|\cdot|_p$ ye göre $sıfıra$ $(0)$ yakınsayan dizilerin kümesi olarak

$$\mathcal{N} = \{(x_n) \in C : x_n \to 0\} = \left\{(x_n) : \lim_{n\to\infty} |x_n|_p = 0\right\}$$

ile tanımlanan küme C nin bir maksimal idealidir. Buna göre $\mathcal{N}$ maksimal ideal olduğundan $C\backslash\ \mathcal{N}$ bir cisim oluşturur.

**Tanım 3.2.10.** $\mathbb{Q}_p$ $p$-adik sayılar cismi, $C$ halkasının $\mathcal{N}$ maksimal idealine bölüm cismi olarak tanımlanır:

$$\mathbb{Q}_p = C\backslash\mathcal{N}.$$

$\mathbb{Q}_p$ ye **$p$-adik sayılar cismi** denir [1]. Her $x \in \mathbb{Q}$ sayısı $(x)$ sabit dizisinin denklik sınıfının temsilcisi olarak alınırsa $\mathbb{Q} \subset \mathbb{Q}_p$ olduğu görülür $|\cdot|_p$ $\mathbb{Q}_p$ ye aşağıdaki şekilde genişletilebilir.

**Tanım 3.2.12.** $\lambda \in \mathbb{Q}_p$ ve $(x_n)$, $\lambda$ ile gösterilen bir Cauchy dizisi ise

$$|\lambda|_p := \lim_{n\to\infty} |x_n|_p$$

ile tanımlıdır.

$\mathbb{Q}_p$bir bölüm cismi olduğundan $\mathbb{Q}_p$ nin elemanları Cauchy dizilerinin denklik sınıflarıdır.

**Teorem 3.2.13.** $\mathbb{Q}$ , $\mathbb{Q}_p$nin yoğun bir alt kümesidir.

**Sonuç 3.2.14.** Her $p \in \mathbb{Z}$ asal sayısı için , $|\cdot|_p$non-arşimedyan norma sahip bir $\mathbb{Q}_p$ cismi vardır öyle ki;

**1)** $|\cdot|_p$ nin $\mathbb{Q}$ ya kısıtlanışı $|\cdot|_p$ $p$-adik normunu verir.

**2)** $\mathbb{Q}$, $\mathbb{Q}_p$de yoğundur.

**3)** $\mathbb{Q}_p$, $|\cdot|_p$ ye göre tamdır [1].

(1), (2) ve (3) koşullarını sağlayan $\mathbb{Q}_p$ cismi normu koruyan izomorfizm hariç tek türlü belirlidir.

**Tanım 3.2.15..** 0-merkezli kapalı birim topuna

$$\mathbb{Z}_p = \{x \in \mathbb{Q}_p : |x|_p \leq 1\}$$

*p -adik tamsayılar halkası* denir. Bu küme hem kapalı hem açıktır.

**Teorem 3.2.16. (Gösterim)**

- $\forall x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$x = a_0 + a_1 p + a_2 p^2 + \cdots$$

olacak şekildeki tek türlü $a_i \in \{0,1,\ldots,p-1\}$ sayıları vardır.

- $\forall x \in \mathbb{Q}_p$ için

$$x = a_{-m}p^{-m} + \cdots + a_{-1}p^{-1} + a_0 + a_1 p + \cdots$$

olacak şekilde tek türlü belirli

$$a_i \in \{0,1,\dots,p-1\}$$

sayıları vardır. Burada,

$$a_{-m} \neq 0 \text{ ise } |x|_p = p^m$$

dir.

**Lemma 3.2.17.** $\mathbb{Q}_p$'de bir $(a_n)$ dizisinin bir Cauchy dizisi veya buna denk olarak yakınsak olması için gerek ve yeter koşul,

$$\lim_{n\to\infty} |a_{n+1} - a_n|_p = 0$$

olmasıdır.

**Sonuç 3.2.18.**

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n$$

$\mathbb{Q}_p$de bir seri olsun.

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \text{ yakınsaktır} \Leftrightarrow \lim_{n\to\infty} a_n = 0$$

dır. Bu durumda,

$$\left|\sum_{n=0}^{\infty} a_n\right|_p \leq \max_n |a_n|_p$$

eşitsizliği sağlanır.

**Örnek 3.2.17.**

**a)** $a_n = \frac{1}{n}$ dizisi için ,

$$\lim_{n\to\infty} \left|\frac{1}{n+1} - \frac{1}{n}\right|_p = \lim_{n\to\infty} \frac{1}{|n(n+1)|_p}$$

$$v_p = \left(\frac{1}{n(n+1)}\right) \nrightarrow 0$$

olduğundan dizi yakınsak değildir.

**a)** $a_n = p^n$ dizisi için,

$$\lim_{n\to\infty} |p^{n+1} - p^n|_p = \lim_{n\to\infty} |p^n(p-1)|_p$$

$$= \lim_{n\to\infty} |p^n|_p \lim_{n\to\infty} |p-1|_p = 0$$

olduğundan dizi yakınsaktır ve limiti 0 dır.

**Önerme:**

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olsun ve

$$\rho = \frac{1}{\lim sup \sqrt[n]{|a_n|}}$$

tanımlansın. Burada limit sıfır veya sonsuz olduğunda ($0 \leq \rho \leq \infty$) aşağıdaki kuralları kullanırız:

- **i.** $\rho = 0$ ise o zaman $f(x)$ sadece $x = 0$ için yakınsar.
- **ii.** $\rho = \infty$ ise $f(x)$ her $x \in \mathbb{Q}_p$ için yakınsar.
- **iii.** $0 < \rho < \infty$ $ve$ $\lim_{n\to\infty} |a_n|\rho^n = 0$ ise yakınsaktır $f(x) \Leftrightarrow |x_p \leq \rho$.
- **iv.** $Eğer$ $0 < \rho < \infty$ $ve\ n\ sonsuza\ giderken$ $|a_n|\rho^n$ sıfıra gitmez ise o zaman

$$f(x) \Leftrightarrow |x_p| \leq \rho \text{ yakınsar}$$

[1].

**Tanım (Binomial katsayı polinomu)**: $(1+x)^n$ ifadesini $\mathbb{Q}[x]$ in (rasyonel katsayılı polinom halkası) polinomu olarak düşünelim ve burada $n \geq 0$ bir tamsayıdır.

$(1+x)^n$ açılımında her $k > 0$ tamsayısı için $x^k$ ve $\binom{n}{k}$ katsayıları olmak üzere;

$$(1+x)^n = \binom{n}{0} + \binom{n}{1}x + \binom{n}{2}x^2 + \cdots = \sum_{k=0}^{\infty} \binom{n}{k} x^k$$

yazılımı vardır. Burada,

$$\binom{n}{0} = 1, \qquad \binom{n}{n} = 1$$

binomial eşitlikleri vardır.

**Tanım (Bernoulli Sayıları):** $b_n$ Bernoulli sayıları sayı teorisi ile önemli ilişkileri olan ve bir çok aritmetik özelliğe sahip olan rasyonel sayılar dizisidir.

$$\frac{t}{e^t-1}=\sum_{n=0}^{\infty} b_n \frac{t^n}{n!}\ , \qquad |t|<2\pi \quad (n>1)$$

İfadesi exponansiyel fonksiyonun genelleştirilmesidir. Serideki $b_n$ sayılarına Bernoulli sayıları denir.Bu sayılar trigonometrik fonksiyonların açılımında ortaya çıkar. Sayılar teorisinde ve analizde çok önemli yere sahiptir.

Bazı Bernoulli sayıları $b_0=1,\ b_1=-\frac{1}{2},\ b_2=\frac{1}{6}, b_3=0,\ldots$ dir. $b_1$ den sonraki tüm tek sayı indexleri *0* dır. Bu sayılar trigonometrik seri açılımlarında görülür ve sayı teorisi ve analizinde önemlidir.

**Tanım (Euler Sayıları):** Euler sayıları, aşağıdaki Taylor seri açılımı tarafından tanımlanan tam sayıların $\varepsilon_m$ dizisidir. Açılımda $\varepsilon_m$ katsayıları,

$$\frac{2}{e^t+1}=\sum_{n=0}^{\infty} \varepsilon_n \frac{t^n}{n!} \ \ (|t|<\pi)$$

dir. Her $m=0,1,\ldots$ tamsayıları için $\varepsilon_{2m+1}=0$ olmak üzere,

$$\varepsilon_0=1, \varepsilon_1=-\frac{1}{2}, \varepsilon_2=-1, \varepsilon_4=5,\ldots$$

dir.

Euler sayıları için

$$\varepsilon_m=-\sum_{\substack{k=0\\ 2|m-k}} \binom{m}{k}\varepsilon_k$$

dir.

Leonard Euler tarafından Euler polinomları ve Bernoulli polinomları tanımlanmıştır. 1954 te Leonard Carlitz klasik Euler polinomları ve Euler sayılarını genişletmiştir ve $q$-Bernoulli ve $q$-Euler polinomları ve sayılarını tanımlamıştır [19-20].

### 3.3. Bazı Trigonometrik Fonksiyonların $p$-adik Kuvvet Seri Açılımları

1.

$$\sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}.x^{n}}{n}$$

serisi $|x|_p < 1$ için yakınsaktır ve bu seri $log(1+x)$ ile gösterilir. Buna göre

$$\log(x) = \sum_{n=1}^{\infty}\frac{(-1)^{n+1}.(x-1)^{n}}{n}$$

serisi $|x|_p < 1$ için yakınsaktır ve buna $p$-adik logaritma fonksiyonu denir ve $log(x)$ ile gösterilir.

2.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{x^{n}}{n!}$$

kuvvet serisi $|x|_p < p^{\frac{1}{1-p}}$ için yakınsaktır ve buna $p$-adik üstel fonksiyon denir ve $exp(x)$ile gösterilir.

❖ **Özellik**

$x \in \mathbb{Z}_p$ , $|x| < p^{\frac{1}{1-p}}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur.

**i.** $|log(1+x)|_p = |x|_p$ , $|exp(x) - 1| < 1$

**ii.** $|exp(x)| = |x|$

❖ **Özellik**

$|x|_p < p^{\frac{1}{1-p}}$ , $|y|_p < p^{\frac{1}{1-p}}$ ise bu durumda aşağıdaki önermeler doğrudur [1].

**i.** $\exp(x+y) = exp(x).exp(y)$ .

**ii.** $log\big(exp(x)\big) = x$ .

**iii.** $exp\big(log(1+x)\big) = 1 + x$ .

3.

$$\sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^{n}x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

serisi $x \in E$ için yakınsaktır ve bu kuvvet serisi $sinx$ ile gösterilir. Buna göre,

$$sinx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$x \in E$ için yakınsaktır ve buna $p$-adik sinüs fonksiyonu denir.

4.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

kuvvet serisi $x \in E$ için yakınsaktır ve bu kuvvet serisi $cosx$ ile gösterilir. Buna göre,

$$cosx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n}}{(2n)!}$$

serisine $p$-adik cosinüs fonksiyonu denir.

5.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

serisi $x \in E$ için yakınsaktır ve bu kuvvet serisi $sinhx$ ile gösterilir. Buna göre,

$$sinhx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

serisine $p$-adik hiperbolik sinüs fonksiyonu denir.

6.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

serisi $x \in E$ için yakınsaktır ve bu kuvvet serisi $coshx$ ile gösterilir. Buna göre,

$$coshx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{x^{2n}}{(2n)!}$$

serisine $p$-adik hiperbolik cosinüs fonksiyonu denir.

7.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n-1}). b_{2n}}{(2n)!} . x^{2n-1}$$

serisi $x \in \mathbb{Z}_p$ için yakınsaktır ve bu kuvvet serisi $tanx$ ile gösterilir. Buna göre,

$$tanx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n} (2^{2n-1}). b_{2n}}{(2n)!} . x^{2n-1}$$

$x \in \mathbb{Z}_p$ için yakınsaktır ve buna $p$-adik tanjant fonksiyonu denir. Burada $b_n$ $n - inci$ klasik Bernoulli sayısıdır.

8.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} 2^{2n}. b_{2n}}{(2n)!} . x^{2n-1}$$

serisi $x \in \mathbb{Z}_p$ için yakınsaktır ve bu kuvvet serisi $cotx$ ile gösterilir. Buna göre,

$$cotx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n} 2^{2n}. b_{2n}}{(2n)!} . x^{2n-1}$$

serisi $x \in \mathbb{Z}_p$ için yakınsaktır ve buna $p$-adik cotanjant fonksiyonu denir. Burada $b_n$ $n - inci$ klasik Bernoulli sayısıdır.

9.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{E}_k \frac{2^k}{n!}$$

serisi $x \in \mathbb{Z}_p$ için yakınsaktır ve bu kuvvet serisi $sechx$ ile gösterilir. Buna göre,

$$sechx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{E}_k \frac{2^k}{n!}$$

$x \in \mathbb{Z}_p$ için yakınsaktır ve buna $p$-adik hiperbolik secant fonksiyonu denir. Burada $\mathcal{E}_k$ $k - yıncı$ klasik Euler sayısıdır.

10.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} (2^{2n-1} - 1). b_{2n}}{(2n)!} . x^{2n-1}$$

serisi $x \in \mathbb{Z}_p$ için yakınsaktır ve bu kuvvet serisi $cosecx$ ile gösterilir. Buna göre,

$$cosecx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}(2^{2n-1}-1).b_{2n}}{(2n)!}.x^{2n-1}$$

$x \in \mathbb{Z}_p$ için yakınsaktır ve buna $p$-adik cosecant fonksiyonu denir. Burada $b_n$ $n - inci$ klasik Bernoulli sayısıdır.

11.

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

serisi $x \in \mathbb{Z}_p$ için yakınsaktır ve bu kuvvet serisi $arctanx$ ile gösterilir. Buna göre,

$$arctanx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n x^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

$x \in \mathbb{Z}_p$ için yakınsaktır ve buna $p$-adik tanjant fonksiyonunun tersi denir.

### 3.4. $C(\mathbb{Z}_p \to K)$ için Mahler Tabanı

Bu tez boyunca $K \supset \mathbb{Q}_p$ olsun. $p$ -adik değişkenli sürekli fonksiyonların davranışları reel sürekli fonksiyonlarınkinden oldukça farklıdır. Reel analizdeki birçok temel teoremin $p$-adik analizde karşılığı yoktur. Klasik analizde, bir yuvar üzerinde reel veya karmaşık değerli fonksiyonlara düzgün olarak yaklaşılabilir.

1958 de Mahler, özel polinomları kullanarak $\mathbb{Z}_p$ *den* $K$ *ya* sürekli fonksiyonlar için bir açılım tanımlamıştır[6]. Ayrıca, tüm $x \in \mathbb{Z}_p$ için $|\binom{x}{n}|_p \leq 1$ olacak şekilde $\mathbb{Z}_p$ den $\mathbb{Z}_p$ *ye n. binomial* katsayı polinomunu incelemiştir. $\lim_{n\to\infty} a_n = 0$ ile her bir $a_n \in K$ dizisi için

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \qquad (x \in \mathbb{Z}_p)$$

serisi $\mathbb{Z}_p \to K$ bir sürekli fonksiyon tanımlar. Mahler,

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} (-1)^n f(k), \quad \sup_{x\in\mathbb{C}p} |f(x)|_p = \max_{n\geq 0} |a_n|_p$$

ile tek türlü $\mathbb{Z}_p$ *den K ya* sürekli fonksiyonları tanımlamıştır. Burada $a_n, f$ nin *Mahler katsayıları* ve

$$\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

serisine *f nin Mahler açılımı* denir.

**Tanım:** $\binom{x}{n}$ sembolü $x \in K, n \in \{0,1,2,\dots\}$,

$$\binom{x}{0} := 1 \; ve \; \binom{x}{n} = \frac{x.(x-1)\dots(x-n+1)}{n!}$$

ile tanımlanır.

**Teorem 3.4.1.** $\binom{*}{0}, \binom{*}{1}, \binom{*}{2}, \dots$ fonksiyonları $C(\mathbb{Z}_p \to K)$ nin bir ortonormal tabanını (Mahler tabanını) oluşturmaktadır. Diğer bir deyişle aşağıdaki özelliklere sahiptir [5]:

**i.** $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ olsun.

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \qquad (x \in \mathbb{Z}_p)$$

olacak şekilde $K$ $nın$ $a_0, a_1, \dots$ tek türlü elemanları ($f$ nin Mahler katsayıları) vardır. Bu seri düzgün yakınsaktır ve

$$\|f\|_\infty = \max\{|a_n|: \ n \in 0,1,2,\dots\}\ dır.$$

**ii.** Eğer $a_0, a_1, \dots$ elemanları $K$ $da$ sıfır dizisi ise

$$x \to \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

fonksiyonu $(\mathbb{Z}_p \to K)$ ya sürekli bir fonksiyon tanımlar.

$a_n$ katsayısı fark operatörü ile bulunabilir. Yani; $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ için

$$(L_1 f)(x) = f(x+1) \quad (x \in \mathbb{Z}_p)$$

$$\Delta f = L_1 f - f$$

tir. Varsayalım ki, $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ ve $f(x)$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

Mahler açılımına sahip olsun. O halde

$$\Delta f = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \binom{*}{n}$$

dir. $k \in \mathbb{Z}_p, \quad k \geq 0$ için,

$$\Delta^k f = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n+1} \binom{*}{n}$$

dir. Buradan,

$$(\Delta^k f)(0) = a_k$$

bulunur.

$$\Delta^k = (L_1 - I)^k = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} L_j$$

dir. Burada

$$(L_j f)(x) = f(x+j)$$

dir. O halde

$$\Delta^k f = \sum_{j=0}^{k} (-1)^{k-j} \binom{k}{j} f(j)$$

dir [21].

**Lemma 3.4.2** $(C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p), \| \|_\infty)$ uzayı ortogonal tabana sahiptir.

**Lemma 3.4.3.** $(C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p), \| \|_\infty)$ uzayı $\mathbb{Q}_p$ üzerindeki bir Banach uzayı olarak ortogonal tabana sahiptir.

**Teorem 3.4.4:** $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ fonksiyonu

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

Mahler açılımına sahip olsun. $a_n$ katsayısı

$$a_n = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} f(j) \qquad (n = 0,1,2, \dots)$$

ile $f$ fonksiyonundan tekrar elde edilir [21].

**Lemma 3.4.5:** $f \in \mathbb{Z}_p \to K$ sınırlı fonksiyon ve

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^{n-k} \binom{n}{k} f(k)$$

olsun. $a_n$ i bulmanın bir farklı yolu da

$$\sum_{n=0}^{\infty} f(n) \frac{x^n}{n!} = (expx) \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{x^n}{n!} \qquad (x \in E)$$

Denklemini kullanmaktır. Burada E,

$$\sum \frac{x^n}{n!}$$

kuvvet serisinin yakınsaklık bölgesidir [21].

**Örnek 3.4.6.** (Sinüs ve Cosinüs fonksiyonları için Mahler açılımı)

$p \neq 2, a \in p\mathbb{Z}_p$ olsun. O zaman

$$\sin ax = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

$$\cos ax = \sum_{n=0}^{\infty} b_n \binom{x}{n}$$

Burada $x \in \mathbb{Z}_p$ dir. Her $n$ için;

$$a_{2n} = (-1)^n 2^{2n} (\sin \frac{1}{2} a)^{2n} \sin na$$

$$a_{2n+1} = (-1)^n 2^{2n+1} (\sin \frac{1}{2} a)^{2n+1} \cos(\mathrm{n} + \frac{1}{2}) a$$

$$b_{2n} = (-1)^n 2^{2n} (\sin \frac{1}{2} a)^{2n} \cos na$$

$$b_{2n+1} = (-1)^n 2^{2n+1} (\sin \frac{1}{2} a)^{2n+1} \sin(\mathrm{n} + \frac{1}{2}) a$$

dir [5].

### 3.5.1. Volkenborn İntegrali

Klasik Riemann integralinde çalıştığımız fonksiyonların en basit sınıfı kompakt bir yuvar üzerinde sürekli fonksiyonlar sınıfıdır. $p$-adik durumda, daha güçlü özellik olan sürekli olarak diferansiyellenebilme koşulu varsaymalıyız.

**Tanım 3.5.1:** Eğer,

$$f(x, y) = \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = l$$

olarak tanımlanan iki değişkenli fonksiyon $(x, y) \to (a, a)$ , $x \neq y \ iken \ l = f'(a)$ limite sahipse $f$ fonksiyonuna $a \in \mathbb{Z}_p$ noktasında sürekli diferansiyellenebilirdir ve $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ ile gösterilir.

$p$-adik değerli fonksiyonların integrasyonu ilk kez F. Thomas ve F. Bruhat tarafından düşünüldü. Ancak bu integraller analitik ve aritmetiksel amaçları için oldukça sınırlıydı. Bunun üzerine A. Volkenborn yeni bir integral tanımladı.

Bir $f$ fonksiyonu için Riemann toplamı

$$\frac{1}{p^n} \sum_{j=0}^{p^n - 1} f(j) = \sum_{j=0}^{p^n - 1} f(j) \mu(j + p^n \mathbb{Z}_p)$$

eşitliğidir. $\mathbb{Z}_p$ üzerinde $f$ nin integrali bu toplamın limiti , eğer bu limit varsa, tanımlanır.

**Tanım 3.5.2:** A.Volkenborn 1972 de $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ $nın$ Volkenborn integralini

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x) dx \coloneqq \lim_{n \to \infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n - 1} f(j)$$

olarak tanımlanmıştır.

**Tanım.3.5.3.** $f \in C(\mathbb{Z}_p \to K)$ sürekli fonksiyonun belirsiz toplamı $n \in \mathbb{N}$ için

$$n \to \sum_{j=0}^{n-1} f(j)$$

interpole edilen $Sf$ sürekli fonksiyondur [21].

$x \in \mathbb{Z}_p$ olmak üzere *Sf(x)* şu şekilde yazılır:

$$\sum_{j=0}^{x-1} f(j) = \lim_{\substack{n \to x \\ n \in \mathbb{N}}} \sum_{j=0}^{n-1} f(j)$$

dir.

**Teorem 3.5.4.** $f: \mathbb{Z}_p \to K$ sürekli bir fonksiyon ve $Sf$ de $f$ fonksiyonun belirsiz toplamı olsun. O halde,

$$Sf(x+1) - Sf(x) = f(x)$$

dir [21].

### 3.5.2. Volkenborn İntegralinin Özellikleri

**1)** $\int_{\mathbb{Z}_p}$ üzerinde K lineer sürekli fonksiyon üzerinde $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ olsun. Gerçekten,

$$\left|\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx\right| \leq p\|f\|_1 \qquad (f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K))$$

dir. $\|f\|_1 = \{\sup|a_n| : n \in \mathbb{N} \cup \{0\}\}$. Özellikle, eğer $f, f_1, f_2, \ldots \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ ve $\lim_{n\to\infty} f_n = f$ olmak üzere

$$\lim_{n\to\infty} \int_{\mathbb{Z}_p} f_n\,(x)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx$$

dir.

**2)** (Mahler katsayıları cinsinden Volkenborn integrali)

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{*}{n} \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$$

olsun. O halde,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

dir.

**3)** (Analitik bir fonksiyonun Volkenborn integrali)

$f: \mathbb{Z}_p \to K$ analitik fonksiyon olmak üzere

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n$$

olsun. O halde ,

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n x^n\right)dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} x^n dx$$

dir.

**4)** $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ $ve$ $s \in \mathbb{Z}_p$ olsun. Bu durumda

$\boldsymbol{i}.$ $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx = (Sf)'(s)$

$\boldsymbol{ii}.$ $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = (Sf)'(s)$

veya

$\boldsymbol{iii}.$ $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = \sum_{j=0}^{s-1} f'(j)$

$\boldsymbol{iv}.$ $\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+s+1)dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x+s)dx = f'(s)$

dir.

Özellikle,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = f'(0)$$

dir.

**6)** $f \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$ olsun. Aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(-x)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)dx$$

dir. Ek olarak, eğer $f$ tek fonksiyon ise

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = -\frac{1}{2}f'(0)$$

dir.

### 3.5.3. Volkenborn integralinin Mahler katsayıları

$$f = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{*}{n} \in C^1(\mathbb{Z}_p \to K)$$

olsun. O zaman;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}) dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

dir [5].

**Örnek 3.5.2.** $x^0 x, x^2, x^3$ fonksiyonlarının Volkenborn integral değerini hesaplayalım.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} dx = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n-1} j^0 = 1$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} xdx = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n-1} j = -\frac{1}{2}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^2 dx = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n-1} j^2 = \frac{1}{6}$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^3 dx = \lim_{n\to\infty} p^{-n} \sum_{j=0}^{p^n-1} j^3 = 0$$

dir.

**Tanım[$p$-adik Bernoulli sayıları]:** Bernoulli sayıları, $B_0, B_1, \ldots$ olacak şekilde

$$B_n := \int_{\mathbb{Z}_p} x^n dx \qquad (n = 0,1,2,\ldots)$$

şeklinde tanımlanır. Volkenborn integralini

$$\int_{\mathbb{Z}_p} f(x+1)dx - \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)dx = f'(0)$$

özelliğinden

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+1)^n dx - \int_{\mathbb{Z}_p} x^n dx = \begin{cases} 1, & n = 1 \\ 0, & n \in \{0,2,3,\dots\} \end{cases} \tag{3.2}$$

yazılır. Burada

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+1)^n dx = \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} \int_{\mathbb{Z}_p} x^j dx \tag{3.3}$$

$$= \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j$$

dir. Böylece,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (x+1)^n dx - \int_{\mathbb{Z}_p} x^n dx = \begin{cases} 0\ , & n = 0 \\ \sum_{j=0}^{n} \binom{n}{j} B_j\ , & n \in \{1,2,3,\dots\} \end{cases} \tag{3.4}$$

yazılabilir. Buradan (3.2) ve (3.4) den $B_0 = 1$ ve

$$\sum_{j=0}^{n-1} \binom{n}{j} B_j = 0 \qquad (\ n \geq 2\ için)$$

eşitliği yazılır. Özellik 5 ve (3.2) den;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} (-x)^n\, dx = \int_{\mathbb{Z}_p} (x+1)^n\, dx = \begin{cases} B_1 + 1, & n = 1 \\ B_n, & n \in \{0,2,3,\dots\} \end{cases}$$

dir. Böylece $B_1 = -\frac{1}{2}$ ve $n \geq 2$ için $(-1)^n B_n = B_n$ eşitliği elde edilir. Bu nedenle; $B_3 = B_5 = B_7 = \cdots = 0 \ dır.$

**Örnek 3.5.3.** $a \in \mathbb{C}_p^+, a \neq 1$ için

$$\int_{\mathbb{Z}_p} a^x dx = \frac{\log_p a}{a-1}$$

dir.

Gerçekten,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} a^x dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{j=0}^{\infty} \binom{x}{j} (a-1)^j dx = \sum_{j=0}^{\infty} (a-1)^j \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{j} dx$$

dir.

Özellik 3.5.1 den

$$\int_{\mathbb{Z}_p} a^x dx = \sum_{j=0}^{\infty} (a-1)^j \frac{(-1)^j}{j+1} = \sum_{j=0}^{\infty} (a-1)^j \frac{(-1)^{j-1}}{j}$$

yazılır ve logaritma tanımından

$$\int_{\mathbb{Z}_p} a^x dx = \sum_{j=0}^{\infty} (a-1)^j \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \sum_{j=0}^{\infty} \frac{(a-1)^j}{a-1} \frac{(-1)^{j-1}}{j} = \frac{\log_p a}{a-1}$$

elde edilir [5].

### 3.6.1. Fermiyonik $p$-Adik $q$-İntegral

$|1-q|_p < p^{\frac{1}{p-1}}$ ile $q \in \mathbb{C}_P$ ve $p$ tek asal sayı olsun . Kim, Euler sayısı polinomları içeren yararlı formülleri türetmek için ve Shriatini ve Yamamoto da $p$ −adik Euler sayılarını interpole etmek için $p$-adik $q$-integrali birbirinden habersiz bir şekilde tanımlamışlardır.

**Tanım 3.6.2.** Bir $f$ fonksiyonu için Rieamann toplamının $q$ −analogu

$$\frac{1}{(p^n)_q}\sum_{j=0}^{p^{n-1}} q^j f(j) = \sum_{j=0}^{p^{n-1}} f(j)\mu_q(j+p^n\mathbb{Z}_p)$$

şeklinde ifade edilir. Eğer bu toplamın limit ($n \to \infty$) varsa $\mathbb{Z}_p$ üzerinde $f$ nin integrali tanımlanır.

**Tanım 3.6.3.** $f: C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ fonksiyonunun $p$-adik $q$-integral ya da başka bir deyişle $q$-Volkenborn integrali

$$I_q = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_q(x) = \lim_{n\to\infty}\frac{1}{(p^n)_q}\sum_{j=0}^{p^{n-1}} f(j)\,q^j$$

ile tanımlanır.

**Tanm 3.6.4.** Fermiyonik anlamda $\mathbb{Z}_p$ üzerinde $q$-Volkenborn integrali

$$I_{-\boldsymbol{q}}(f) = \int_{\mathbb{Z}_p} f(x)d\mu_{-q}(x) = \lim_{N\to\infty}\frac{1}{(p^n)_{-q}}\sum_{j=0}^{p^{n-1}} f(j)\,q^j(-1)^j \qquad (3.5)$$

olarak tanımlanır. Burada $(x)_{-q} = \frac{1-(-q)^x}{1+q}$ dır. $f \in (\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ fonksiyonu ve $n \in \mathbb{N}$ için (3.5) eşitliğinden aşağıdaki eşitlik elde edilir [17]:

$$q^{-n}I_{-q}\big(f(x+n)\big) + (-1)^{n-1}I_{-q}\big(f(x)\big) = (2)_q\sum_{j=0}^{p^N-1} f(j)q^j(-1)^{n-1-j}\,.$$

Özel durumda $n=1$ iken

$$qI_{-q}\big(f(x+1)\big) + I_{-q}\big(f(x)\big) = (2)_q f(0) \qquad (3.6)$$

dır.

### 3.6.2. Fermiyonik *p*-Adik İntegral

$p$ tek asal sayısı olsun. Fermiyonik anlamda $p$-adik $q$-integralde yararlanılarak, $f \in C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ fonksiyonu için $\mathbb{Z}_p$ üzerinde fermiyonik $p$-adik integral

$$I_{-1}(f) = \int_{\mathbb{C}_p} f(x) d\mu_{-1}(x) = \lim_{N\to\infty} \sum_{j=0}^{p^N-1} f(j)(-1)^j \tag{3.7}$$

olarak tanımlanır. $f \in C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ fonksiyonu için (3.7) eşitliğinden yararlanılarak $n \in \mathbb{N}$ için

$$I_{-1}\big(f(x+n)\big) - (-1)^n I_{(-1)}\big(f(x)\big) = 2\sum_{n=0}^{n-1}(-1)^{n-1-j} f(j) \tag{3.8}$$

$$I_{-1}\big(f(x+1)\big) + I_{-1}\big(f(x)\big) = 2f(0) \quad dır \tag{3.9}$$

eşitlikleri yazılır [17].

# 4. BULGULAR ve TARTIŞMA

## 4.1. Bazı *p*-Adik Trigonometrik Fonksiyonların Mahler Açılımları

Bazı $p$-adik trigonometrik fonksiyonların Mahler açılımları için faydalı blgiler içeren aşağıdaki lemmayı verelim.

**Lemma 4.1. ([5]).** $x \in \mathbb{Z}_p$ ve $m \in \mathbb{N} \cup \{0\}$ için $\frac{a_{n,m}}{n!}$ , 2.tip Stirling sayıları olmak üzere

$$x^m = \sum_{n=0}^{\infty} a_{n,m} \binom{x}{n}$$

eşitsizliğini dikkate alalım. $n, m \in \{0,1,2, \dots\}$ ise aşağıdaki özellikler sağlanır:

$i)$ $a_{0,0} = 1$ ; $a_{0,m} = a_{0,n} = 0 \quad (m,n) \neq 0$ ; $a_{n,m} = 0 \quad (n > m \; iken)$,

$ii)$ $a_{n,m} = \sum_{j=0}^{n} (-1)^{n-j} \binom{n}{j} j^m$ ,

$iii)$ $a_{n,m}$ bir tamsayıdır ve $n!$ ile bölünebilir.

$iv)$ $f_{n,m}(x) = (x\frac{d}{dx})^m (x-1)^n \quad (x \in \mathbb{Z}_p)$ tanımlansın. Buna göre

$$a_{n,m} = f_{n,m}(1)$$

$v)$ $a_{n,m+1} = n\left(a_{n,m} + a_{n-1,m}\right) \quad (n \geq 1)$

$vi)$ $a_{n+1,m} = \sum_{j=0}^{m-1} \binom{m}{j} a_{n,j} \quad (m \geq 1)$

$p$ −adik sinüs hiperbolik fonksiyonunun Mahler açılımı aşağıdaki teorem ile verilmiştir.

**Teorem 4.1.1:** $p > 2$ bir asal sayı , $a \in p\mathbb{Z}_p$ ve

$$\sinh(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \quad (x \in \mathbb{Z}_p)$$

olsun. Bu taktirde her $n$ için $a_n$ katsayıları

$$a_{2n} = \frac{1}{2}\frac{(expa-1)^{2n}.[(expa)^{2n}-1]}{(expa)^{2n}}$$

$$a_{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{(expa-1)^{2n+1}.[(expa)^{2n+1}+1]}{(expa)^{2n+1}}$$

formülleri ile elde edilir.

**İspat 4.1.1:** Biliyoruz ki,

$$\sinh(ax) = \frac{\exp(ax)-\exp(-ax)}{2}$$

dir. Buradan;

$$\begin{aligned}\sinh(ax) &= \frac{1}{2}\exp(ax) - \frac{1}{2}\exp(-ax)\\ &= \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\exp(a)-1)^n\binom{x}{n} - \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\exp(-a)-1)^n\binom{x}{n}\\ &= \sum_{n=0}^{\infty}\frac{1}{2}[(\exp(a)-1)^n-(\exp(-a)-1)^n]\binom{x}{n}\end{aligned}$$

serisi elde edilebilir. Buradan $a_n$ $leri$ belirleyelim.

$$a_n = \frac{1}{2}(\exp(a)-1)^n - \frac{1}{2}(\exp(-a)-1)^n$$

$$= \frac{1}{2}[(\exp(a)-1)^n - \left(\frac{1}{\exp(a)}-1\right)^n]$$

$$= \frac{1}{2}[(\exp(a)-1)^n - \frac{(1-\exp(a))^n}{(\exp(a))^n}$$

$$a_n = \frac{1}{2}\frac{(\exp(a)-1)^n.(\exp(a))^n-(1-\exp(a))^n}{(\exp(a()^n}$$

bulunur. $n$ yerine $2n$ yazılırsa;

$$a_{2n} = \frac{1}{2}\frac{(\exp(a)-1)^{2n}.[(\exp(a))^{2n}-1]}{(\exp(a))^{2n}}$$

ve $n$ yerine $2n+1$ yazılırsa;

$$a_{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{(\exp(a)-1)^{2n+1}.\,[(\exp(a))^{2n+1}+1]}{(\exp(a))^{2n+1}}$$

bulunur.

**Teorem 4.1.2:** $a_{m,n}$ (Lemma 4.1 de verilen) 2.tip Stirling sayıları olmak üzere, $\sinh(ax)$ fonksiyonunun Mahler katsayıları,

$$a_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} a_{m,n}$$

dir.

**İspat 4.1.2.** $a \in E$ olsun. $\sinh(ax)$ fonksiyonunun Mahler açılımı,

$$\sinh(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

dir. $\sinh(ax)$ kuvvet seri açılımından

$$\sinh(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}$$

dir.

$n < m$ iken $a_{m,n}$=0 olduğundan,

$$\sinh(ax) = \sum_{m=0}^{\infty}\left(\sum_{n=m}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} a_{m,n}\right)\binom{x}{m}$$

elde edilir. Buna göre $\sinh(ax)$ in Mahler katsayıları,

$$a_n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} a_{m,n}$$

olur.

Şimdi $p$-adik cosinüs hiperbolik fonksiyonun Mahler açılımını ve Mahler katsayılarını verelim.

**Teorem 4.1.3:** $p$ tek bir asal sayı olsun. $a \in p\mathbb{Z}_p$ $ve$ $x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\cosh(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} c_n \binom{x}{n}$$

olsun. Bu taktirde;

$$c_{2n} = \frac{1}{2}\frac{(expa-1)^{2n}[(expa)^{2n}+1]}{(expa)^{2n}}$$

ve

$$c_{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{(expa-1)^{2n+1}[(expa)^{2n+1}-1]}{(expa)^{2n+1}}$$

sağlanır.

**İspat 4.1.3:** Biliyoruz ki;

$$\cosh(ax) = \frac{\exp(ax)+\exp(-ax)}{2}$$

dir. Buradan eksponansiyel fonksiyonun Mahler açılımı ile

$$\cosh(ax) = \frac{1}{2}\exp(ax) + \frac{1}{2}\exp(-ax)$$

dir. Böylece

$$\cosh(ax) = \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\exp(a)-1)^n\binom{x}{n} + \frac{1}{2}\sum_{n=0}^{\infty}(\exp(-a)-1)^n\binom{x}{n}$$

dir.

Buradan,

$$\cosh(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{1}{2}[(\exp(a)-1)^n + (\exp(-a)-1)^n]\binom{x}{n}$$

bulunur.

Buradan $c_n$ in Mahler katsayılarını daha açık yazalım.

$$c_n = \frac{1}{2}[(\exp(a)-1)^n + (\exp(-a)-1)^n]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\exp(a)-1)^n + \left(\frac{1}{expa}-1\right)^n\right]$$

$$= \frac{1}{2}\left[(\exp(a)-1)^n + \left(\frac{1-expa}{expa}\right)^n\right]$$

$$c_n = \frac{1}{2}\frac{(expa-1)^n((expa)^n + (1-expa)^n)}{(expa)^n}$$

dir. $n$ yerine $2n$ yazılırsa;

$$c_{2n} = \frac{1}{2}\frac{(expa-1)^{2n}[(expa)^{2n}+1]}{(expa)^{2n}}$$

ve $n$ yerine $2n+1$ yazılırsa;

$$c_{2n+1} = \frac{1}{2}\frac{(expa-1)^{2n+1}[(expa)^{2n+1}-1]}{(expa)^{2n+1}}$$

bulunur. Şimdi $\cosh(ax)$'in Mahler katsayılarını Stirling sayıları cinsinden bulalım.

**Teorem 4.1.4:** $a_{m,n}$ (Lemma 4.1 de verilen) 2.tip Stirling sayıları olmak üzere, $\cosh(ax)$ fonksiyonunun Mahler katsayıları,

$$a_m = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} a_{m,n}$$

dir.

**İspat 4.1.4.** $a \in E$ olsun. $\cosh(ax)$ fonksiyonunun Mahler açılımı,

$$\cosh(ax) = \sum c_n \binom{x}{n}$$

olsun. $\cosh(ax)$ kuvvet seri açılımından,

$$\cosh(ax) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} x^{2n}$$

dir. $n < m$ iken $a_{m,n}$=0 olduğundan,

$$\cosh(ax) = \sum_{m=0}^{\infty} \left( \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} a_{m,n} \right) \binom{x}{m}$$

elde edilir. Buna göre $\cosh(ax)$ in Mahler katsayıları 2.tip Stirling sayıları cinsinden,

$$c_n = \sum_{n=m}^{\infty} \frac{a^{2n}}{(2n)!} a_{m,n}$$

şeklinde yazılır.

**Teorem 4.1.5**. $a \in E, x \in \mathbb{Z}_p$ için

$$\sin(ax) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

seri açılımında $(a_n)$ ler Lemma 4.1 deki gibi olsun. Bu taktirde;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

dir.

**İspat 4.1.5:**. $a \in E, x \in \mathbb{Z}_p$ olsun. Buradan

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \left( \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n} \right) dx$$

dir. İntegral özelliği ile

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} dx$$

dir.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} dx = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

olduğundan,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

dir.

**Sonuç 1:** $(a_n)$ ler Lemma 4.1 deki gibi olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1} = -\frac{a}{2}$$

dir.

**İspat:** Lemma 4.1 ve Teorem 4.1.5. ten açıktır.

**Teorem 4.1.6.** $a \in E, x \in \mathbb{Z}_p$

$$\cos(ax) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

ve $(a_n)$ ler Lemma 4.1 deki gibi olsun. Bu taktirde;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

dir.

**İspat 4.1.6:**

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \left(\sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}\right) dx$$

dir. Buradan,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} dx$$

dir.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} dx = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

olduğundan,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

dir.

**Sonuç 2:** $(a_n)$ ler Lemma 4.1 deki gibi olmak üzere,

$$\sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1} = -\frac{a}{2}$$

dir.

**Teorem 4.1.7:** $a \in E, x \in \mathbb{Z}_p$

$$\sinh(ax) = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

ve $(a_n)$ ler Lemma 4.1 deki gibi olsun. Bu taktirde;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

dir.

**İspat 4.1.7:** Teorem 4.1 ile

$$sinhax = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

ve $(a_n)$ ler Lemma 4.1 deki gibi olsun.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\,dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \left( \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1} \right) dx$$

ve buradan,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} dx$$

dir.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \binom{x}{n} dx = \frac{(-1)^n}{n+1}$$

olduğundan,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\,dx = \sum_{n=1}^{\infty} a_n \frac{(-1)^n}{n+1}$$

dir.

## 4.2 Bazı *p*-Adik Elemanter Fonksiyonların Volkenborn İntegralleri

**Teorem 4.2.1.** $x \in \mathbb{Z}_p,\ a \in E\ ve\ x \neq 0$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, dx = -\frac{a}{2}$$

dir.

**İspat 4.2.1:** $\sinh(ax)$ fonksiyonunun tanımı ve Volkenborn integralinin özelliği ile

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n\geq 0} \frac{a^{2n+1}.\, x^{2n+1}}{(2n+1)!} dx$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} \int_{\mathbb{Z}_p} x^{2n+1}\, dx$$

dir. Fakat

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^n\, dx = B_n$$

olduğundan;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{a^{2n+1}}{(2n+1)!} B_{2n+1}$$

yazılır. $n \geq 1$ için $B_{2n+1} = 0$ ve $B_1 = -\frac{1}{2}$ olduğundan,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, dx = -\frac{a}{2}$$

elde edilir.

**Teorem 4.2.2:** $\cosh(ax)$ fonksiyonunun tanımı ve Volkenborn integralinin özelliği ile;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, dx = 1$$

dir.

**İspat 4.2.2:** Her $x \in \mathbb{Z}_p$ elemanı için;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n\geq 0} \frac{a^{2n}.x^{2n}}{(2n)!} dx$$

$$= \sum_{n\geq 0} \frac{a^{2n}}{(2n)!} \int_{\mathbb{Z}_p} x^{2n}\, dx$$

dir. Fakat,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} x^n\, dx = B_n$$

olduğundan;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, dx = \sum_{n\geq 0} \frac{a^{2n}}{(2n)!} B_{2n}$$

elde edilir. Buradan

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, dx = 1$$

bulunur.

**Teorem 4.2.3:** $a \in E$ olsun. Bu durumda;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sec h(ax)\, dx = \sum_{n=0}^{\infty} \sum_{k=0}^{n} \binom{n}{k} \mathcal{E}_k \frac{2^k}{n!} a^{2n}.B_{2n}$$

dir. Burada $B_n$ $n - inci$ $p$-adik Bernoulli sayısı ve $\mathcal{E}_k$ $k - yıncı$ klasik Euler sayısıdır.

**İspat 4.2.3:** Gerçekten;

$$\sec h(ax) = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{E}_k\frac{2^k}{n!}a^{2n}$$

olduğundan,

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\sec h(ax)\,dx = \int_{\mathbb{Z}_p}\sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{E}_k\frac{2^k}{n!}a^{2n}\,dx$$

$$= \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{E}_k\frac{2^k}{n!}\int_{\mathbb{Z}_p} x^n\,dx$$

dir. Böylece,

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\sec h(ax)\,dx = \sum_{n=0}^{\infty}\sum_{k=0}^{n}\binom{n}{k}\mathcal{E}_k\frac{2^k}{n!}a^{2n}.B_{2n}$$

bulunur.

**Teorem 4.2.4:** $x \in \mathbb{Z}_p\ ve\ a \in E$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\arctan(ax)dx = -\frac{a}{2}$$

Burada $B_n$ $n - inci$ $p$-adik sayısıdır.

**İspat 4.2.4:** Gerçekten,

$$\int_{\mathbb{Z}_p}\arctan(ax)dx = \sum_{n=0}^{\infty}\frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!}$$

olduğundan,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \arctan(ax)dx = \int_{\mathbb{Z}_p} \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} x^{2n+1}dx$$

$$\sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{2n+1} \int_{\mathbb{Z}_p} x^{2n+1}dx$$

ve böylece $B_{2n+1}$ $n - inci\ p -$ adik Bernoulli sayısı olmak üzere

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \arctan(ax)dx = \sum_{n\geq 0}^{\infty} \frac{(-1)^n a^{2n+1}}{(2n+1)!} B_{2n+1}$$

dir. Fakat $B_1 = -\frac{1}{2}$ ve $B_{2n+1} = 0 \quad n \geq 1$ olduğundan

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \arctan(ax)\,dx = -\frac{a}{2}$$

dir.

### 4.3 Bazı $p$-Adik Trigonometrik Fonksiyonların Fermiyonik $p$-Adik İntegrali

**Teorem 4.3.1. a)** Eğer $a \in E$ ise buradan;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, d_{\mu-1} = -\frac{\sin a}{\cos a + 1} \int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, d_{\mu-1}(x)$$

dir.

**İspat 4.3.1.**

$f(x) = \sin(ax)$ olsun.

$f(0) = sin0$

$= 0$ dir.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} sina(x+1) d_{\mu-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \sin a\, d_{\mu-1}(x) = 2f(0)$$

$$\Rightarrow \sin a \int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, d_{\mu-1}(x) + \cos a \int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, d_{\mu-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow (\cos a + 1) \int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, d_{\mu-1}(x) + \sin a \int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 0$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, d_{\mu-1}(x) = \frac{-\sin a}{\cos a + 1} \int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, d_{\mu-1}(x)$$

dir.

**b)** $a \in E$ olsun. Bu durumda;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 1$$

**İspat 4.3.2.**

$f(x) = \cos(ax)$ olsun.

$f(0) = cos0$

$= 1$ dir.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} cosa(x+1)d_{\mu-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, d_{\mu-1}\,(x) = 2f(0)$$

$$\cos a \int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, d_{\mu-1}(x) - \sin a \int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, d_{\mu-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 2$$

$$(\cos a + 1) \int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, d_{\mu-1}(x) + \sin a \int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 2$$

dir. Buradan $\sin ax$ fonksiyonunu yerine koyarsak;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, d_{\mu-1}(x).\left(\cos a + 1 - \frac{\sin a . \sin a}{\cos a + 1}\right) = 2$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cos(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 1$$

dir.

**Sonuç:**

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sin(ax)\, d_{\mu-1}(x) = \frac{-\sin a}{\cos a + 1}$$

dir.

**Teorem 4.3.2. a)** Eğer $a \in E$ ise buradan;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, d_{\mu-1} = -\frac{\sinh a}{\cosh a + 1} \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, d_{\mu-1}(x)$$

dir.

**İspat 4.3.2. a)**

$f(x) = \sinh(ax)$ olsun. Buna göre,

$f(0) = sinh0$

$= 0$ dir.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} sinha(x+1)d_{\mu-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, d_{\mu-1}\,(x) = 2f(0)$$

$$\Rightarrow \sinh a \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, d_{\mu-1}(x) + \cosh a \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, d_{\mu-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 0$$

$$\Rightarrow (\cosh a + 1) \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, d_{\mu-1}(x) + \sinh a \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 0$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, d_{\mu-1}(x) = \frac{-\sinh a}{\cosh a + 1} \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, d_{\mu-1}(x)$$

dir.

**b)** $a \in E$ olsun. Bu durumda;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 1$$

dir.

**İspat b)**

$f(x) = \cosh(ax)$ olsun. Buna göre,

$f(0) = cos0$

$\quad = 1$ dir.

$$\int_{\mathbb{Z}_p} cosha(x+1) d_{\mu-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh a\, d_{\mu-1}(x) = 2f(0)$$

$$\cosh a \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, d_{\mu-1}(x) + \sinh a \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, d_{\mu-1}(x) + \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 2$$

$$(\cosh a + 1) \int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, d_{\mu-1}(x) + \sinh a \int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 2$$

dir. Buradan $\sinh ax$ fonksiyonunu yerine koyarsak;

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, d_{\mu-1}(x). \left(\cosh a + 1 - \frac{\sinh a . \sinh a}{\cosh a + 1}\right) = 2$$

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \cosh(ax)\, d_{\mu-1}(x) = 1$$

dir.

**Sonuç:**

$$\int_{\mathbb{Z}_p} \sinh(ax)\, d_{\mu-1}(x) = \frac{-\sinh a}{\cosh a + 1}$$

**Teorem 4.3.3.** $x \in \mathbb{Z}_p\ ve\ x \neq 0$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{Z}_p} tanx d_{\mu-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}.(2^{2n}-1).b_{2n}}{(2n)!} E_{2n-1}$$

dir. Burada $b_n$ $n'inci$ klasik Bernoulli sayısı ve $E_n$ $n'inci$ $p$-adik Euler sayısıdır.

**İspat 4.3.3.** Biliyoruz ki

$$tanx = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}.(2^{2n}-1).b_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}$$

dir. Burada

$$\int_{\mathbb{Z}_p} tanx d_{\mu-1}(x) = \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}.(2^{2n}-1).b_{2n}}{(2n)!} \int_{\mathbb{Z}_p} x^{2n-1} d_{\mu-1}(x)$$

$$= \sum_{n=1}^{\infty} \frac{(-1)^{n-1} 2^{2n}.(2^{2n}-1).b_{2n}}{(2n)!} . E_{2n-1}$$

dir.

**Teorem 4.3.4.** $x \in \mathbb{Z}_p\ ve\ x \neq 0$ olmak üzere

$$\int_{\mathbb{Z}_p} cosecx d_{\mu-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1} 2.(2^{2n-1}-1).b_{2n}}{(2n)!} E_{2n-1}$$

dir. Burada $b_n$ $n'inci$ klasik Bernoulli sayısı ve $E_n$ $n'inci$ $p$-adik Euler sayısıdır.

**İspat 4.3.4.** Biliyoruz ki,

$$cosecx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}2.(2^{2n-1}-1).b_{2n}}{(2n)!} x^{2n-1}$$

dir. Burada

$$\int_{\mathbb{Z}_p} cosecxd_{\mu-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.2.(2^{2n-1}-1).b_{2n}}{(2n)!} \int_{\mathbb{Z}_p} x^{2n-1} d_{\mu-1}(x)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^{n+1}.2.(2^{2n-1}-1).b_{2n}}{(2n)!}.E_{2n-1}$$

dir.

**Teorem 4.3.5.** $x \in \mathbb{Z}_p$ $ve$ $x \neq 0$ olmak üzere

$$cotx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}.b_{2n}}{(2n)!} E_{2n-1}$$

dir. Burada $b_n$ $n'inci$ klasik Bernoulli sayısı ve $E_n$ $n'inci$ $p$-adik Euler sayısıdır.

**İspat 4.3.5.** Biliyoruz ki,

$$cotx = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.2^{2n}.b_{2n}}{(2n)!}.x^{2n-1}$$

dir. Burada,

$$\int_{\mathbb{Z}_p} cotxd_{\mu-1}(x) = \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n 2^{2n}.b_{2n}}{(2n)!} \int_{\mathbb{Z}_p} x^{2n-1} d_{\mu-1}(x)$$
$$= \sum_{n=0}^{\infty} \frac{(-1)^n.2^{2n}.b_{2n}}{(2n)!}.E_{2n-1}$$

dir.

# 5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

## 5.1 SONUÇLAR

Bu tezde elementer fonksyonların önemli sınıfını oluşturan $p$-adik trigonometrik fonksiyonlar göz önüne alınmıştır. $p$-adik analizde bu fonksiyonlar kuvvet serileri ile tanımlanır ve yakınsaklık bölgeleri klasik durumdan farklıdır. Benzer olarak klasik analizde her sürekli fonksiyona bir polinomlar yaklaşılabilir, fakat $p$-adik analizde durum sadedir. $\binom{x}{n}$ binom katsayısı $x \in \mathbb{Z}_p$olmak üzere, $\binom{x}{0} = 1$ ve $n \in \mathbb{Z}^+$ için

$$\binom{x}{n} = \frac{x(x-1)\cdots(x-n+1)}{n!} = \frac{(x)_n}{n!}$$

ile tanımlanır. Buna göre, $\binom{x}{n}$ n. dereceden bir polinomdur ve

$$x \to \binom{x}{n} \;\; (x \in \mathbb{Z}_p, n \in \mathbb{N})$$

fonksiyonlar kümesi $C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$ sürekli fonksiyonları uzayı için bir ortonormal taban oluşturur. Buna göre, her $f \in C(\mathbb{Z}_p \to \mathbb{C}_p)$fonksiyonu için $a_n \in \mathbb{C}_p$

$$f(x) = \sum_{n=0}^{\infty} a_n \binom{x}{n}$$

şeklinde yazılır. Bu açılıma $f$ nin Mahler açılımı denir. $a_n$ sayıları

$$a_n = \sum_{k=0}^{n} (-1)^k \binom{n}{k} f(n-k), \quad (n = 0,1,2,\dots)$$

ile belirlidir ve bunlara $f$ nin Mahler katsayıları denir.

Bu çalışmada bazı $p$-adik trigonometrik fonksiyonların Mahler açılımları elde edilmiş ve Mahler katsayıları hesaplanmıştır. Ayrıca, bu fonksiyonların Volkenborn integralleri ve fermiyonik $p$-adik integralleri için sonuçlar elde edilmiştir.

## 5. 2. ÖNERİLER

Bu çalışmada elde edilen sonuçların devamı olarak $p$-adik trigonometrik fonksiyonların $q$-Volkenborn integralleri hesaplanabilir. Ayrıca $p$-adik trigonometrik fonksiyonların $q$-genişlemeleri incelenebilir ve bunların Mahler açılımları ve integral gösterimleri araştırılabilir.

**KAYNAKLAR**

[1]. Gouvêa, Fernando Q. *p*-adic numbers. An introduction. Second edition.Universitext. *Springer-Verlag, Berlin,* 1997.

[2]. Dragovich,B., Khrennikov, A. Y., Kozyrev, S. V . Volovich, I.V. On *p*-adic mathematical physics. *p-Adic Numbers .Ultrametric Anal. Appl.,*1.(2009), no.1, 1-17.

[3]. V. S. Vladimirov and I. V. Volovich, "Differential calculus," Theor. Math. Phys., 59, 317–335 (1984)

[4]. Vladimirov, V. S.; Volovich, I. V.; Zelenov, E. I. *p*-adic analysis and mathematical physics. Series on Soviet and East European Mathematics, 1. *World Scientific Publishing Co., Inc., River Edge, NJ,* 1994.

[5]. Schikhof, W. H. Ultrametric calculus. An introduction to *p*-adic analysis.Cambridge Studies in Advanced Mathematics, 4. *Cambridge University Press, Cambridge,* 1984.

[6]. Mahler, K. An interpolation series for continuous functions of a *p*-adic variable. *J. Reine Angew. Math.* 199 1958 23–34.

[7]. Robert, Alain M. A course in *p*-adic analysis. Graduate Texts in Mathematics, 198. *Springer-Verlag, New York,* 2000.

[8]. Volkenborn, Arnt Ein *p*-adisches Integral und seine Anwendungen. I. (German) *Manuscripta Math.* 7 (1972), 341–373.

[9]. Volkenborn, Arnt Ein *p*-adisches Integral und seine Anwendungen. II. (German) *Manuscripta Math.* 12 (1974), 17–46.

[10]. Kim, T. *q*-Volkenborn integration. *Russ. J. Math. Phys.* 9 (2002), no. 3, 288–299.

[11]. Kim, Taekyun A note on *q*-Volkenborn integration. *Proc. Jangjeon Math. Soc.* 8(2005), no. 1, 13-17.

[12]. Kim, Taekyun An invariant *p*-adic *q*-integral on Zp. *Appl. Math. Lett.* 21 (2008),no. 2, 105–108.

[13]. Kim, T. (2008). On *p*-adic iterpolating function for *q*-Euler numbers and its derivates, *J. Journal of Nonlinear Mathematical Physics*, 14:1, 15-27.

[14]. Kim, T.; Choi, J.; Kim, Y. H.; Ryoo, C. S. On the fermionic *p*-adic integral representation of Bernstein polynomials associated with Euler numbers and polynomials. *J. Inequal. Appl.* 2010, Art. ID 864247, 12 pp.

[15]. Kim, Taekyun; Choi, Jongsung; Kim, Young-Hee On extended Carlitz's type *q*-Euler numbers and polynomials. *Adv. Stud. Contemp. Math. (Kyungshang)* 20 (2010), no. 4, 499–505.

[16]. Araci, Serkan; Erdal, Dilek; Seo, Jong Jin A study on the fermionic *p*-adic *q*-integral representation on Zp associated with weighted *q*-Bernstein and *q*-Genocchi polynomials. *Abstr. Appl. Anal.* 2011, Art. ID 649248, 10 pp.

[17]. Kim, Taekyun On the analogs of Euler numbers and polynomials associated with $p$-adic $q$-integral on Zp at $q$=−1. *J. Math. Anal. Appl.* 331 (2007), no. 2, 779–792.

[18]. Katok, S.(2007). *p-dic Numbers: an introduxtion. Germany: Springer.*

[19]. Carlitz, L. $q$-Bernoulli numbers and polynomials. *Duke Math. J.* 15, (1948). 987–1000.

[20]. Carlitz, L. $q$-Bernoulli and Eulerian numbers. *Trans. Amer. Math. Soc.* 76,(1954). 332–350.

[21]. Ryoo, C. S. An identity of the $q$-Euler polynomials associated with the $p$-adic $q$-integrals on Zp. *J. Comput. Anal. Appl.* 15 (2013), no. 6, 1104–1109.

## ÖZGEÇMİŞ

**Adı ve Soyadı** : Suna ÇİÇEK

**Doğum Tarihi** : 28.06.1991

**E-mail** : sunacicek459@gmail.com

**Öğrenim Durumu** :

| **Derece** | **Bölüm/Program** | **Üniversite** | **Yıl** |
|---|---|---|---|
| Lisans | Matematik | İnönü Üniversitesi | 2011-2015 |
| Yüksek Lisans | Matematik | Mersin Üniversitesi | 2016-2019 |

## ESERLERİ

1. Çiçek, S.; Menken, H., A Note on the Mahler Expansions of Some *p*-Adic Trigonometric Functions. 2nd International Mediterranean Science and Engineering Congress, 2017-11-25, 2017-11-27, Adana, Türkiye, **2017**

2. Çiçek, S.; Çolakoğlu Havare, Ö.; Menken, H., On the Volkenborn Integral of Some *p*-adic Trigonometric Functions. 4. International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference, 2017-05-03, 2017-05-07, Mersin, Türkiye, **2017**

3. Çiçek, S.; Menken, H., On *q*-Volkenborn Integral of Some *p*-Adic Elemantary Functions. 5th International Intuitionistic Fuzzy Sets and Contemporary Mathematics Conference September, 05-09, 2018, Kahramanmaras, Turkey pp:35-35 , **2018**