ZAMAN SKALASINDA İKİNCİ MERTEBEDEN UYUMLU DİNAMİK BİR OPERATÖRÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEKİ CEYLAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK

ANABİLİM DALI

MERSİN
HAZİRAN- 2020

ZAMAN SKALASINDA İKİNCİ MERTEBEDEN UYUMLU DİNAMİK BİR OPERATÖRÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

YÜKSEK LİSANS TEZİ

ZEKİ CEYLAN

MERSİN ÜNİVERSİTESİ
FEN BİLİMLERİ ENSTİTÜSÜ

MATEMATİK
ANABİLİM DALI

Danışman
Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA

MERSİN
HAZİRAN – 2020

ETİK BEYAN

Mersin Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim Yönetmeliğinde belirtilen kurallara uygun olarak hazırladığım bu tez çalışmasında,

- Tez içindeki bütün bilgi ve belgeleri akademik kurallar çerçevesinde elde ettiğimi,
- Görsel, işitsel ve yazılı tüm bilgi ve sonuçları bilimsel ahlâk kurallarına uygun olarak sunduğumu,
- Başkalarının eserlerinden yararlanılması durumunda ilgili eserlere bilimsel normlara uygun olarak atıfta bulunduğumu,
- Atıfta bulunduğum eserlerin tümünü kaynak olarak kullandığımı,
- Kullanılan verilerde herhangi bir tahrifat yapmadığımı,
- Bu tezin herhangi bir bölümünü Mersin Üniversitesi veya başka bir üniversitede başka bir tez çalışması olarak sunmadığımı,
- Tezin tüm telif haklarını Mersin Üniversitesi'ne devrettiğimi

beyan ederim.

ETHICAL DECLERATION

This thesis is prepared in accordance with the rules specified in Mersin University Graduate Education Regulation and I declare to comply with the following conditions:

- I have obtained all the information and the documents of the thesis in accordance with the academic rules.
- I presented all the visual, auditory and written informations and results in accordance with scientific ethics.
- I refer in accordance with the norms of scientific works about the case of exploitation of others' works.
- I used all of the referred works as the references.
- I did not do any tampering in the used data.
- I did not present any part of this thesis as an another thesis at Mersin University or another university.
- I transfer all copyrights of this thesis to the Mersin University.

05/06/ 2020

İmza / Signature

Zeki CEYLAN

ÖZET

ZAMAN SKALASINDA İKİNCİ MERTEBEDEN UYUMLU DİNAMİK BİR OPERATÖRÜN SPEKTRAL ÖZELLİKLERİ

Bu tezde, zaman skalası üzerinde uyumlu türev operatörü yardımıyla tanımlanan ikinci mertebeden uyumlu dinamik bir operatör ele alınmıştır. Bu operatör yardımıyla oluşturulmuş bir başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği araştırıldıktan sonra, çözümleri inşa etmeye yarayan bir yöntemden bahsedilmiştir. Ele alınan uyumlu dinamik operatör için Lagrange özdeşliği ispatlanmıştır. Daha sonra, ikinci mertebeden uyumlu öz eşlenik bir dinamik denklem ve sınır koşulları ile oluşturulan bir sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problemin bazı özdeğer özellikleri incelenmiş ve Green teoremi ispatlanmıştır.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan "Giriş" bölümünden sonra, önceki çalışmalara değinilen "Kaynak Araştırmaları" isimli ikinci bölümde, ele alınan konu ile ilgili literatürün özeti verilmiştir. Üçüncü bölüm olan "Materyal ve Yöntem" isimli bölüm, sonraki bölümde kullanılacak olan bazı temel kavramların hatırlatılmasına ayrılmıştır. *Başlığı "Bulgular ve Tartışma" olan dördüncü bölüm tezin orijinal kısmıdır.* Beşinci bölümde ise sonuç ve önerilere yer verilmiştir.

Tezden elde edilen sonuçların, zaman skalasında uyumlu kesirli türev yardımıyla tanımlanan çeşitli problemlerin incelenmesinde yol gösterici olacağı düşünülmektedir.

Anahtar Kelimeler: Zaman Skalası, Uyumlu Kesirli Türev, Sınır Değer Problemi, Lagrange Özdeşliği, Green Fonksiyonu.

Danışman: Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA, Mersin Üniversitesi, Matematik Anabilim Dalı, Mersin.

ABSTRACT

SPECTRAL PROPERTIES OF A SECOND ORDER CONFORMABLE DYNAMIC OPERATOR ON TIME SCALES

In this thesis, we deal with a conformable dynamic operator of second order on an arbitrary time scale. We define an initial value problem consisting of a dynamic equation which is generated by this dynamic operator and initial conditions. We prove an existence and uniqueness theorem for the solutions of this initial value problem equation and we suggest a method to construct these solutions. Then, we prove the conformable Lagrange identity. After that, we derive a conformable boundary value problem which consists of the above-mentioned conformable dynamic equation and boundary conditions. We prove Green's theorem with the help of conformable Lagrange identity and we provide a characterization for the eigenvalues of this conformable boundary value problem.

This thesis, consists of five chapters. After making an introduction in Chapter 1, a detailed literature analysis about the existing studies is given in Chapter 2. Chapter 3 is devoted to mention some fundamental notions which will be needed in the sequel. Chapter 4 is the original part of the thesis. Finally, in chapter 5 some concluding remarks are given.

We believe that the results of this thesis includes novel material that we hope will achieve an inspirational impact in the field.

Keywords: Time Scale, Conformable Fractional Derivative, Boundary Value Problem, Lagrange Identity, Green's Function.

Advisor: Asst. Prof. Fatma Ayca CETINKAYA, Department of Mathematics, University of Mersin, Mersin.

TEŞEKKÜR

Yüksek lisans çalışmam boyunca attığım her adımda bilgi ve hoşgörüsünden yararlandığım, değerli ilgi ve desteğini benden esirgemeyen, aynı zamanda yol göstericim de olan saygıdeğer hocam Dr. Öğr. Üyesi Fatma Ayça ÇETİNKAYA' ya, aldığım her kararda bana anlayış gösteren, destek ve sevgilerini eksik etmeyen aileme ve biricik yeğenim Zeynep KIRIKKAYIŞ' a teşekkür ediyorum.

İÇİNDEKİLER

KISALTMALAR ve SİMGELER

Kısaltma/Simge	Tanım
$\mathbb{R}$	Reel sayılar kümesi
$\mathbb{N}$	Doğal sayılar kümesi
$\mathbb{Z}$	Tam sayılar kümesi
$\mathbb{T}$	Zaman skalası
$\Re$	Regresif fonksiyonlar kümesi
C_{rd}	$rd-$ sürekli fonksiyonlar kümesi
$\sigma(t)$	İleri sıçrama operatörü
$\rho(t)$	Geri sıçrama operatörü
$\mu(t)$	Tanecik fonksiyonu
$f^{\Delta}(t)$	f fonksiyonunun $\Delta-$türevi
$T_{\alpha}(f)(t)$	f fonksiyonunun uyumlu türevi
$f^{\Delta_{\alpha}}(t)$	f fonksiyonunun uyumlu $\Delta-$ türevi

1. GİRİŞ

Doğada meydana gelen olayların anlaşılmasını sağlayan yasaların çoğu, bir veya daha fazla büyüklüğün diğer bir takım büyüklüklere göre değişim hızını içerir. Bu değişim hızı matematiğin temel kavramlarından biri olan türev kavramı ile ifade edilir.

Bilindiği üzere, $A \subset \mathbb{R}$, $x_0 \in A$, A kümesinin bir yığılma noktası ve f fonksiyonu A dan $\mathbb{R}$ ye bir fonksiyon olmak üzere $\lim\limits_{x \to x_0} \dfrac{f(x) - f(x_0)}{x - x_0}$ limiti veya $x = x_0 + h$ yazmakla elde edilen $\lim\limits_{h \to 0} \dfrac{f(x_0 + h) - f(x_0)}{h}$ limiti mevcutsa, f fonksiyonu x_0 noktasında türevlenebilirdir denir ve bu limit değeri f fonksiyonunun x_0 noktasındaki türevi adını alır. Bu türev $f'(x_0)$, $\dfrac{df(x_0)}{dx}$ veya $Df(x_0)$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Tüm pozitif tamsayılar için $f(x)$ fonksiyonunun n mertebeden türevi, Leibniz tarafından, $\dfrac{d^n f(x)}{dx^n}$ biçiminde tanımlanmıştır. Leibniz'in 1695 yılında L'Hopital'e sorduğu "Tam sayı mertebeden türevler kesirli mertebeden türevlere genişletilebilir mi?" sorusu kesirli mertebeden türevin ortaya çıkış tarihi olarak gösterilebilir. Kesirli mertebeden türev, klasik türev kavramının genelleştirilmesidir.

Literatürde kesirli mertebeden türevin birçok tanımı olsa da, bu tanımların en meşhur olanları Riemann-Liouville ve Caputo kesirli mertebeden türevleridir. Riemann-Liouville ve Caputo kesirli mertebeden türev tanımları da dâhil literatürdeki tüm kesirli mertebeden türev tanımlarının klasik türev tanımıyla tek ortak yönü hem kesirli mertebeden türevlerin hem de klasik türevin lineerlik özelliğini sağlıyor olmasıdır. Lineerlik dışında yer alan özelliklerle ilgili olarak, kesirli mertebeden türev ve klasik türev arasında herhangi bir uyuma rastlanmamaktadır.

Yakın zamanda, uyumlu türev olarak isimlendirilen ve klasik türev tanımına dayandırılarak verilen yeni bir yerel türev tanımı ortaya konmuştur [1]. Uyumlu türev, klasik türevin doğal özelliklerini koruyarak, bilinen anlamdaki türev tanımlarını genişletmeyi ve bu türev tanımını kullanarak elde edilen uyumlu diferansiyel denklemler yardımıyla diferansiyel denklemler teorisine yeni bakış açıları kazandırmayı amaçlar.

Zaman skalası, reel sayıların boş olmayan kapalı bir altkümesidir. Bu teori, ayrık ve sürekli analizi birleştirmek amacıyla Stefan Hilger'in [2] doktora tezinde ortaya konmuştur. Zaman skalası reel sayılarda tanımlı diferansiyel denklemler ile tam sayılarda tanımlı fark denklemleri için ayrı sonuçlar elde etmek yerine, zaman skalasında tanımlı dinamik denklemler için sonuçlar elde etmeye ve dolayısıyla reel sayılardaki sürekli ve tam sayılardaki kesikli durumları genelleştirmeye yarar. Zaman skalası kavramı sadece reel ve tam sayılar için değil aynı zamanda mümkün diğer uzaylar için de sonuçlar elde etme imkânı sağlar.

Bu tez beş bölümden oluşmaktadır. Birinci bölüm olan bu "Giriş" bölümünden sonra, önceki çalışmalara değinilen "Kaynak Araştırmaları" isimli ikinci bölümde, ele alınan konu ve denklemlerle ilgili literatürün özeti verilmiştir. Üçüncü bölüm olan "Materyal ve Yöntem" isimli bölüm, sonraki bölümde kullanılacak olan bazı temel kavramların hatırlatılmasına ayrılmıştır. Başlığı "Bulgular ve Tartışma" olan dördüncü bölüm tezin orijinal kısmıdır. Dört alt bölümden oluşan bu bölümde, $\mathbb{T}$ zaman skalasında tanımlı ikinci mertebeden uyumlu

$$Lx(t) = \left(px^{\Delta_\alpha}\right)^{\Delta_\alpha}(t) + q(t)x^\sigma(t)$$

dinamik operatörü ele alınmıştır, burada $p, q \in C_{rd}$ dir ve tüm $t \in \mathbb{T}$ elemanları için $p(t) \neq 0$ sağlanır. Bu operatör yardımıyla oluşturulan bir başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği araştırıldıktan sonra çözümleri inşa etmeye yarayan bir yöntemden bahsedilmiştir. Ele alınan uyumlu dinamik operatör için Lagrange özdeşliği ispatlanmıştır. Daha sonra, ikinci mertebeden uyumlu öz eşlenik dinamik $Lx = x^{\Delta_\alpha \Delta_\alpha} + qx^\sigma$ operatörü ve sınır koşulları ile oluşturulan

$$Lx + \lambda x^\sigma = 0, \quad R_a(x) = R_b(x) = 0$$

sınır değer problemi ele alınmıştır. Burada, uyumlu öz eşlenik dinamik L operatöründeki q katsayısı $q : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ $rd-$ sürekli bir fonksiyon ve $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ ve $\left(\gamma_1^2 + \gamma_2^2\right)\left(\delta_1^2 + \delta_2^2\right) \neq 0$ olmak üzere $R_a(x)$ ve $R_b(x)$

$$R_a(x) = \gamma_1 x(\rho(a)) + \gamma_2 x^{\Delta_\alpha}(\rho(a)) = 0,$$

$$R_b(x) = \delta_1 x(\rho(b)) + \delta_2 x^{\Delta_\alpha}(\rho(b)) = 0$$

biçiminde verilmiş sınır koşullarıdır. Bu sınır değer probleminin bazı özdeğer özellikleri incelenmiş ve Green teoremi ispatlanmıştır.

2. KAYNAK ARAŞTIRMALARI

İlk kez on yedinci yüzyılda Leibniz'in çalışmalarında tam sayı olmayan mertebeden türev kavramına değinmesi sonucunda ortaya çıkan kesirli mertebeden türev kavramı, ortaya çıktığı andan itibaren sadece matematiksel problemlerin çözümünü kolaylaştırmakla kalmayıp, mühendislik, fizik, kimya ve biyoloji alanlarındaki uygulamalarda da kendisine önemli bir yer edinmiştir [3-10]. Öte yandan, klasik türevle lineerlik özelliği dışında ortak bir özelliğe sahip olmayan kesirli mertebeden türev kavramı ile ilgili bazı eksiklikler mevcuttur. Bunlardan bazıları herhangi bir sabit sayının (Caputo kesirli mertebeden türevi hariç) kesirli mertebeden türevinin sıfır olmaması, kesirli mertebeden türevlerin, klasik türevdeki çarpımın ve bölümün türevi kurallarını sağlamaması, kesirli mertebeden türevlerin hiçbirinin zincir kuralına uymaması şeklinde sıralanabilir.

2014 yılında Khalil ve arkadaşları [1] tarafından yeni bir yerel türev operatörü tanımı verilmiştir. Limit kavramı yardımıyla verilen ve "uyumlu türev" olarak adlandırılan bu yeni tanım klasik türevin doğal bir genişletilmesidir ve yukarıda bahsedilen eksikliklerin hiçbirisini taşımamaktadır.

Khalil ve arkadaşlarının tanımladığı bu yeni uyumlu türev pek çok farklı problem için motivasyon kaynağı olmuştur. Örneğin, Abdeljawad [11] bu yeni tanım için sağ ve sol uyumlu türev kavramlarını, kesirsel zincir kuralını ve Grönwall eşitsizliğini ortaya koymuştur. Batarfi ve arkadaşları [12] bu uyumlu türev yardımıyla tanımlanan bir diferansiyel denklemden ve başlangıç ve üç-noktalı sınır koşullarından oluşan bir sınır değer problemini ele almıştır. Batarfi ve arkadaşları ele aldıkları bu problemin çözümünün varlık ve tekliğini araştırdıktan sonra, probleme uygun Green fonksiyonunu inşa etmiş ve daha sonra da lineer olmayan problemin bazı özelliklerini incelemiştir. Kurt ve arkadaşları [13], uyumlu türev yardımıyla tanımladıkları zamana bağlı Burger denklemi ve Dirichlet ve başlangıç koşullarıyla oluşturdukları sınır değer probleminin çözümünü Hopf-Cole dönüşümü yardımıyla elde etmişlerdir. Çenesiz ve Kurt [14] uyumlu türev tanımını kullanarak elde ettikleri iki ve üç boyutlu zamana bağlı dalga denklemini incelemiş ve böylece uyumlu türev tanımının yüksek mertebeden denklemlerin çözümlerini bulmakta ne kadar kullanışlı olduğunu göstermiştir. Gökdoğan ve arkadaşları [15] ardışık lineer uyumlu diferansiyel denklemler için varlık ve teklik teoremleri ispatlamışlardır. Iyiola ve Nwaeze [16], Khalil ve arkadaşlarının [1] ispatladıkları uyumlu ortalama değer teoremini genişletmiş, uyumlu türevli fonksiyonlar için Racetrack prensibini kanıtlamış ve ayrıca, ikinci mertebeden uyumlu bir diferansiyel denklem için D'Alambert yaklaşımını kullanarak çözümler elde etmişlerdir. Pospisil ve Skripkova [17] uyumlu türevle tanımlanan diferansiyel denklemler için Sturm ayırma ve Sturm karşılaştırma teoremlerini ispatlamışlardır. Khudair [18] uyumlu türev ve klasik türev arasındaki ilişkiyi incelemiştir. Al-Refai ve arkadaşları [19] uyumlu türev yardımıyla tanımlanan bir diferansiyel denklem ve sınır koşulları ile oluşturulmuş bir sınır değer probleminin spektral özelliklerini incelemiştir. Silva ve arkadaşları [20] uyumlu türev yardımıyla oluşturulan sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemleri ele almış ve klasik diferansiyel denklemler teorisinin bazı argümanlarını kullanarak, bu denklemin çözümleri için yeterli koşulu uyumlu Laplace dönüşümü metodu yardımıyla elde etmişlerdir. Erbey [21] yüksek lisans tezinde (ayrıca bknz. Çetinkaya [22]) uyumlu bir dalga denklemine genelleştirilmiş Fourier metodu uygulanarak elde edilen uyumlu sınır değer probleminin özdeğer ve özfonksiyon özelliklerini incelemiştir. Mortazaasl ve Akbarfam [23] uyumlu türev yardımıyla tanımladıkları ikinci mertebeden bir diferansiyel denklem ve sınır koşulları ile oluşturulmuş sınır değer probleminin düz ve nodal noktalara göre ters problemini incelemişlerdir. Keskin [24] uyumlu bir boyutlu Dirac tipli integro diferansiyel denklem sistemini ele almış ve bu sistemin düz ve nodal noktalara göre ters problemini incelemiştir.

Stefan Hilger'in 1988 yılında yayımladığı doktora tezinden beri birçok matematikçinin ilgi odağı haline gelen zaman skalası teorisi ile ilgili ilk kitap Kaymakçalan, Lakshmikanham ve Sivasundaran [25] tarafından yazılmıştır. Daha sonra, Bohner ve Peterson zaman skalasındaki birçok temel tanım ve teoremin bulunduğu iki kitap yayımlamışlardır [26, 27]. Zaman skalasıyla alakalı son yıllarda yapılan çalışmalara ilgi duyan okuyucular [28-39] çalışmalarına ve bu çalışmalarda yer verilen kaynaklara yönlendirilebilir.

Zaman skalasında uyumlu türev kavramı ilk kez Benkhettou, Hassani ve Torres [40] tarafından verilmiştir. Bahsi geçen yazarların bu çalışması oldukça ilgi uyandırmış ve literatüre çeşitli açılardan önemli ölçüde katkıda bulunulmasını sağlamıştır. Örneğin, Wang, Zhou ve Li [41] zaman skalasında uyumlu analizin temel tanım ve teoremlerinden yararlanarak, Sobolev uzayları kavramını tanıtmışlardır ve bu uzaylardaki normların denkliği gibi özellikleri incelemişlerdir. Gülşen, Yılmaz ve Göktaş [42] herhangi bir zaman skalasında tanımladıkları uyumlu Dirac sistemi ve ayrık sınır koşulları ile oluşturulmuş sınır değer problemi ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir. Böylece, buradan elde ettikleri sonuçlarla, literatürde hali hazırda var olan, klasik Dirac denklemler sistemi ile ilgili sonuçları, zaman skalasında tanımlı uyumlu türev durumuna genişletme imkanı bulmuşlardır. Zang ve Sun [43] zaman skalasında tanımlı uyumlu diferansiyel denklemler için Sturm-Picone karşılaştırma teoremini ispatlamıştır. Bayour, Hammoudi ve Torres [44] zaman skalasında tanımlı uyumlu türev ve integralle ilgili bazı tanım ve teoremlerden bahsettikleri çalışmalarında, sabit katsayılı lineer diferansiyel denklemleri ve hiperbolik ve trigonometrik fonksiyonları inceleme fırsatı bulmuşlardır. Feng ve Meng [45] ise zaman skalasında tanımlı bir sınıf uyumlu dinamik denklemlerin salınım ve asimtotik özelliklerini incelemişlerdir. Gülşen, Yılmaz ve Kemaloğlu [46] zaman skalasında uyumlu türev operatörü yardımıyla tanımladıkları Sturm-Liouville denklemi ve sınır koşullarından oluşan bir sınır değer probleminin çözümünün varlığını garanti eden yeterli koşulu veren teoremi ispatlamışlar ve bu sınır değer probleminin bazı spektral özelliklerini incelemişlerdir. Bohner ve Hatipoğlu [47] ise uyumlu türev operatörü yardımıyla oluşturdukları dinamik Cobweb modellerini ele almışlardır ve bu modellerin genel çözümleri ve kararlılık kriterleri ile ilgili sonuçlar elde etmişlerdir.

.

3. MATERYAL ve YÖNTEM

Bu bölüm üç alt bölümden oluşmaktadır ve bir sonraki bölüm olan "Bulgular ve Tartışma" başlıklı bölümde verilen sonuçların elde edilmesini sağlayan temel tanım ve teoremleri içermektedir. İlk alt bölümde zaman skalası ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Bunun için tezin Kaynaklar kısmındaki [26] numaralı çalışmadan faydalanılacaktır. İkinci alt bölümde uyumlu türev ve integralin çeşitli özelliklerinden bahsedilecektir. Bunun için Kaynaklar kısmında verilen [1] numaralı makaleden yararlanılacaktır. Üçüncü alt bölümde ise, bu kez [40] numaralı makaleden faydalanarak, zaman skalasında tanımlı uyumlu türev ile ilgili temel tanım ve teoremlere yer verilecektir.

3.1 Zaman Skalası İle İlgili Temel Tanım ve Teoremler

Zaman skalası, reel sayıların herhangi boş olmayan kapalı bir alt kümesi olarak tanımlanır. $\mathbb{R}$ reel sayılar, $\mathbb{Z}$ tam sayılar, $\mathbb{N}$ doğal sayılar, $\mathbb{N}_0$ negatif olmayan tam sayılar, $[0,1]\cup[2,3]$, $[0,1]\cup\mathbb{N}$ ve Kantor kümesi birer zaman skalası iken; $\mathbb{Q}$ rasyonel sayılar, $\mathbb{R}\setminus\mathbb{Q}$ irrasyonel sayılar, $\mathbb{C}$ karmaşık sayılar ve $(0,1)$ açık aralığı birer zaman skalası değildir. Reel sayıların standart topolojisi ile donatıldığı varsayılan zaman skalası $\mathbb{T}$ sembolü ile gösterilir.

Zaman skalası analizi, ayrık ve sürekli analizi birleştirecek bir teori oluşturmak için ilk kez 1988 yılında ortaya konmuş bir teoridir. Gerçekten, $\mathbb{T}$ zaman skalasında tanımlanan bir f fonksiyonunun, tanımı daha sonra (bknz. Tanım 3.1.2) verilecek olan delta türevi f^{Δ} için aşağıdaki ifadeler yazılabilir.

1. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ ise delta türevi klasik türev ile çakışır: $f^{\Delta}=f'$.

2. $\mathbb{T}=\mathbb{Z}$ ise delta türevi ileri fark operatörü ile çakışır: $f^{\Delta}=\Delta f$.

Bu alt bölümde, bazı temel zaman skalası kavramları tanıtıldıktan sonra, zaman skalasında tanımlı fonksiyonlar için delta türev tanımı verilecektir ve bu türevin bazı özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.1.1: [26, sf. 1, Tanım 1.1] $\mathbb{T}$ bir zaman skalası olsun. Her $t\in\mathbb{T}$ için ileri sıçrama operatörü $\sigma:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, $\sigma(t):=\inf\{s\in\mathbb{T}: s>t\}$ biçiminde ve geri sıçrama operatörü $\rho:\mathbb{T}\to\mathbb{T}$, $\rho(t):=\sup\{s\in t: s<t\}$ biçiminde tanımlıdır.

Ayrıca, $\varnothing$ sembolü boş kümeyi belirtmek üzere, $\inf\varnothing=\sup\mathbb{T}$ olarak verilir. Yani eğer t noktası $\mathbb{T}$ nin bir maksimum noktası ise $\sigma(t)=t$ olur. Benzer biçimde, $\sup\varnothing=\inf\mathbb{T}$ olduğu göz önüne alınırsa, t noktasının $\mathbb{T}$ nin bir minimum noktası olması durumunda $\rho(t)=t$ olur. Eğer $\sigma(t)>t$ ise t noktasına sağa saçılmış nokta, $\rho(t)<t$ ise t noktasına sola saçılmış nokta denir. Hem sağa, hem sola saçılmış noktalara ise izole noktalar denir. Ayrıca, eğer $t<\inf\mathbb{T}$ ve

$\rho(t)=t$ ise t noktası sağ yoğun nokta, $t>\inf\mathbb{T}$ ve $\rho(t)=t$ ise t noktası sol yoğun nokta olarak isimlendirilir. Aynı anda hem sağ yoğun, hem sol yoğun olan noktalara yoğun noktalar denir. Son olarak, $\mu:\mathbb{T}\to[0,\infty)$ sıçrama (tanecik) fonksiyonu $\mu(t):=\sigma(t)-t$ ile tanımlanır. Burada, her $t\in\mathbb{T}$ için, $\sigma(t)$ ve $\rho(t)$ fonksiyonlarının $\mathbb{T}$ zaman skalasının elemanları olduğunu belirtmekte yarar vardır. Çünkü, daha önce de belirtildiği gibi $\mathbb{T}$ zaman skalası, $\mathbb{R}$ reel sayılar kümesinin kapalı bir alt kümesidir.

İlerleyen bölümlerde ihtiyaç duyulacak $\mathbb{T}^{\kappa}$ kümesi, eğer $\mathbb{T}$ sola saçılmış bir m maksimumuna sahipse $\mathbb{T}^{\kappa}=\mathbb{T}-\{m\}$, diğer durumlarda ise $\mathbb{T}^{\kappa}=\mathbb{T}$ biçiminde tanımlıdır. Bu durum kısaca aşağıdaki gibi yazılabilir:

$$\mathbb{T}^{\kappa}=\left\{\begin{array}{ll}\mathbb{T}\setminus(\rho(\sup\mathbb{T}),\sup\mathbb{T}), & \text{eğer} \quad \sup\mathbb{T}<\infty \\ \mathbb{T} & , \text{eğer} \quad \sup\mathbb{T}=\infty\end{array}\right\}.$$

Ayrıca, $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olmak üzere, her $t\in\mathbb{T}$ elemanı için $f^{\sigma}:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu $f^{\sigma}(t)=f(\sigma(t))$ ile tanımlıdır. Yani $f^{\sigma}=f\circ\sigma$ sağlanır.

Tanım 3.1.2: [26, sf. 5, Tanım 1.10] $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun ve her $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ elemanı göz önüne alınsın. Bu durumda, her ve t nin U komşuluğundaki her $s\in U$ elemanı için

$$\left|[f(\sigma(t))-f(s)]-f^{\Delta}(t)[\sigma(t)-s]\right|\leq\varepsilon[\sigma(t)-s]$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $f^{\Delta}(t)$ sayısı varsa, bu $f^{\Delta}(t)$ sayısına f fonksiyonunun delta (veya Hilger) türevi denir.

Hilger türevininin aşağıdaki özellikleri mevcuttur.

Teorem 3.1.1: [26, sf. 5, Teorem 1.16] $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

1. f fonksiyonu t noktasında diferansiyellenebilirse, t noktasında süreklidir.

2. f fonksiyonu t noktasında sürekli ve t sağa saçılmış bir nokta ise, o halde f fonksiyonu t noktasında diferansiyellenebilirdir ve $f^{\Delta}(t)=\dfrac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}$ eşitliği sağlanır.

3. Eğer t noktası sağ yoğun bir nokta ise f fonksiyonunun diferansiyellenebilir olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{s\to t}\dfrac{f(t)-f(s)}{t-s}$ limitinin sonlu bir sayıya eşit olmasıdır. Bu durumda ,

$$f^{\Delta}(t)=\lim_{s\to t}\frac{f(t)-f(s)}{t-s}$$ olur.

4. f fonksiyonu t noktasında diferansiyellenebilirse, o halde $f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)f^{\Delta}(t)$ sağlanır.

$f,g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları her $t\in\mathbb{T}^k$ noktasında diferansiyellenebilir fonksiyonlar olsun. O halde, $f+g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da t noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$(f+g)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)+g^{\Delta}(t)$$

sağlanır. Herhangi bir α sabiti için, $(\alpha f)^{\Delta}(t)=\alpha f^{\Delta}(t)$ olur. $fg:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu da t noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$(fg)^{\Delta}(t)=f^{\Delta}(t)g(t)+f(\sigma(t))g^{\Delta}(t)=f(t)g^{\Delta}(t)+f^{\Delta}(t)g(\sigma(t))$$

eşitliği gerçeklenir. Eğer $f(t)f(\sigma(t))\neq 0$ ise $\dfrac{1}{f}$ fonksiyonu t noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$\left(\frac{1}{f}\right)^{\Delta}(t)=-\frac{f^{\Delta}(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$$

eşitliği mevcuttur. Eğer $g(t)g(\sigma(t))\neq 0$ ise o halde $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonu da t noktasında diferansiyellenebilirdir ve

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta}(t)=\frac{f^{\Delta}(t)g(t)-f(t)g^{\Delta}(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

eşitliği doğrudur.

''İntegrallenebilir'' fonksiyon sınıflarını tarif etmek için, aşağıdaki iki kavrama ihtiyaç duyulacaktır.

Tanım 3.1.3: [26, sf. 22, Tanım 1.57] Bir $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. $\mathbb{T}$ nin tüm sağ yoğun noktalarında bu f fonksiyonunun sağ taraflı limiti mevcut ve sonlu, aynı şekilde $\mathbb{T}$ nin tüm sol yoğun noktalarında bu f fonksiyonunun sol taraflı limiti mevcut ve sonlu ise f fonksiyonuna regulated fonksiyon ismi verilir.

Tanım 3.1.4: [26, sf. 22, Tanım 1.58] Bir $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Bu f fonksiyonu $\mathbb{T}$ nin sağ yoğun noktalarında sürekli ise ve $\mathbb{T}$ nin sol yoğun noktalarında bu f fonksiyonunun sol taraflı limiti mevcutsa, bu f fonksiyonuna $rd-$sürekli fonksiyon denir. $\mathbb{T}$ den $\mathbb{R}$ ye tüm rd-sürekli f fonksiyonları $C_{rd}=C_{rd}(\mathbb{T})=C_{rd}(\mathbb{T},\mathbb{R})$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Aşağıdaki teoremde $rd-$ sürekli ve regulated fonksiyonlarla ilgili bazı sonuçlar verilmiştir.

Teorem 3.1.2: [26, sf. 22, Teorem 1.60] $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır.

i. f sürekli bir fonksiyonsa, f $rd-$ süreklidir.

ii. f fonksiyonu $rd-$ sürekli ise f regulated fonksiyondur.

iii. Sıçrama operatörü σ $rd-$ süreklidir.

iv. Eğer f regulated veya $rd-$ sürekli bir fonksiyon ise f^{σ} fonksiyonu da regulated veya $rd-$ sürekli bir fonksiyondur.

v. f sürekli bir fonksiyon olsun. Eğer $g:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ regulated veya $rd-$ sürekli bir fonksiyon ise $f\circ g$ fonksiyonu da regulated veya $rd-$ sürekli bir fonksiyondur.

Tanım 3.1.5 $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ olsun. $F^{\Delta}(t)=f(t)$ şartını sağlayan $F:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonuna f fonksiyonunun delta antitürevi denir. Her $a,b\in\mathbb{T}$ için $\int_a^b f(t)\Delta t=F(b)-F(a)$ sağlanır.

Teorem 3.1.3: [26, sf. 28, Teorem 1.75] Eğer $f\in C_{rd}$ ve $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ ise o halde $\int_t^{\sigma(t)} f(\tau)\Delta(\tau)=\mu(t)f(t)$ sağlanır.

3.1.1 İkinci Mertebeden Lineer Denklemler

$p,q,f\in C_{rd}$ olmak üzere aşağıdaki biçimde verilen ikinci mertebeden dinamik denklem göz önüne alınsın:

$$y^{\Delta\Delta}+p(t)y^{\Delta}+q(t)y=f(t). \tag{3.1.1.1}$$

$L_2:C_{rd}^2\to C_{rd}$ operatörü her $t\in\mathbb{T}^{\kappa^2}$ için $L_2y(t)=y^{\Delta\Delta}+p(t)y^{\Delta}+q(t)y$ biçiminde tanımlanırsa (3.1.1.1) denklemi $L_2y=f$ biçiminde yazılabilir. Eğer $y\in C_{rd}$ ve her $t\in\mathbb{T}^{\kappa^2}$ için $L_2y(t)=f(t)$ eşitliği sağlanıyorsa, bu y fonksiyonu $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde $L_2y=f$ denkleminin bir çözümü olur.

Teorem 3.1.1.1: [26, sf. 81, Teorem 3.1] $L_2:C_{rd}^2\to C_{rd}^2$ operatörü lineer bir operatördür.

Tanım 3.1.1.1: [26, sf. 81, Tanım 3.3] Her $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ ve $p,q,f\in C_{rd}$ için $1-\mu(t)p(t)+\mu^2(t)q(t)\neq 0$ koşulu sağlanırsa (3.1.1.1) denklemi regresif olarak adlandırılır.

Regresif ve $rd-$ sürekli tüm $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesi $\Re=\Re(\mathbb{T})=\Re(\mathbb{T},\mathbb{R})$ sembollerinden biri ile gösterilir.

Teorem 3.1.1.2: [26, sf. 81, Teorem 3.4] (3.1.1.1) denkleminin regresif olduğu kabul edilsin. y_0 ve y_0^{Δ} sabitler olmak üzere her $t_0\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için

$$L_2y=f(t),\qquad y(t_0)=y_0,\qquad y^{\Delta}(t_0)=y_0^{\Delta}$$

şeklindeki başlangıç değer problemin tüm $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlı tek bir çözümü vardır.

Şimdi, $t_0 \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ve $y_0, y_0^{\Delta} \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$L_2 y = 0, \qquad y(t_0) = y_0, \qquad y^{\Delta}(t_0) = y_0^{\Delta}$$

başlangıç değer problemi göz önüne alınsın. Eğer, y_1 ve y_2 fonksiyonları $L_2 y = 0$ denkleminin iki çözümü ise, o halde Teorem 3.1.1.1 den $y(t) = \alpha y_1(t) + \beta y_2(t)$ fonksiyonunun da $L_2 y = 0$ denkleminin bir çözümü olduğu söylenebilir. Bu durumda

$$y_0 = y(t_0) = \alpha y_1(t_0) + \beta y_2(t_0),$$

$$y_0^{\Delta} = y^{\Delta}(t_0) = \alpha y_1^{\Delta}(t_0) + \beta y_2^{\Delta}(t_0)$$

eşitlikleri sağlanır. Buradan

$$\begin{pmatrix} y_1(t_0) & y_2(t_0) \\ y_1^{\Delta}(t_0) & y_2^{\Delta}(t_0) \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \alpha \\ \beta \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} y_0 \\ y_0^{\Delta} \end{pmatrix}$$

sistemi elde edilir. Bu sistemin tek bir çözümünün olması sistemdeki 2×2 boyutundaki matrisin tersinir olmasına bağlıdır. Böylelikle aşağıdaki tanım verilebilir:

Tanım 3.1.1.2: [26, sf. 82, Tanım 3.5] Diferansiyellenebilir iki y_1 ve y_2 fonksiyonunun $W(y_1, y_2)$ Wronskiyeni

$$W(t) = \det \begin{pmatrix} y_1(t) & y_2(t) \\ y_1^{\Delta}(t) & y_2^{\Delta}(t) \end{pmatrix}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

Her $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ için $W(y_1, y_2)(t) \neq 0$ olması durumunda y_1 ve y_2 fonksiyonları $L_2 y = 0$ denkleminin temel çözümler sistemini oluşturur.

3.1.2 Özeşlenik Denklemler

Bu bölümde $Lx(t) = (px^{\Delta})^{\Delta}(t) + q(t)x^{\sigma}(t)$ olmak üzere aşağıda verilen ikinci mertebeden özeşlenik dinamik denklem ele alınacaktır:

$$Lx = 0. \tag{3.1.2.1}$$

Burada, $p, q \in C_{rd}$ olduğu ve ayrıca her $t \in \mathbb{T}$ için $p(t) \neq 0$ olduğu kabul edilecektir. $\mathbb{D}$ kümesi $x^{\Delta} : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu ve $(px^{\Delta})^{\Delta} : \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $rd-$sürekli olacak biçimdeki tüm $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesi olsun. Tüm $t \in \mathbb{T}^{\kappa^2}$ ler için $Lx(t) = 0$ olacak şekildeki $x \in \mathbb{D}$ fonksiyonlarına (3.1.2.1) denkleminin bir çözümü denir.

Teorem 3.1.2.1: [26, sf. 136, Teorem 4.5] f $rd-$sürekli bir fonksiyon, $t_0 \in \mathbb{T}$ ve x_0, x_0^{Δ} verilmiş sabitler olmak üzere

$$Lx = f(t), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad x^{\Delta}(t_0) = x_0^{\Delta}$$

başlangıç değer probleminin $\mathbb{T}$ zaman skalasında tek bir çözümü vardır.

Teorem 3.1.2.2: [26, sf.139, Teorem 4.12] Eğer $a, b \in C_{rd}$ ise ve tüm $t \in \mathbb{T}^{\kappa^2}$ ler için

$$1 - a(t)\mu(t) + b(t)\mu^2(t) \neq 0$$

eşitliği sağlanıyorsa, o halde, $t_0 \in \mathbb{T}^{\kappa}$ iken $p(t) = e_{\alpha}(t, t_0)$, $\alpha(t) = \dfrac{a(t) - \mu(t)b(t)}{1 - a(t)\mu(t) + b(t)\mu^2(t)}$ ve $q(t) = e_{\alpha}^{\sigma}(t, t_0)b(t) = \left[1 + \mu(t)\alpha(t)\right] p(t)b(t)$ olmak üzere

$$x^{\Delta\Delta} + a(t)x^{\Delta} + b(t)x = 0$$

ikinci mertebeden dinamik denklemi, (3.1.2.1) özeşlenik denklemi biçimde yazılabilir.

Teorem 3.1.2.3: [26, sf. 141, Teorem 4.17]Eğer $a \in \Re$ ise o halde $p = e_a(\cdot, t_0)$ ve $q = bp$ olmak üzere

$$\left(x^{\Delta}\right)^{\Delta} + a(t)\left(x^{\Delta}\right)^{\sigma} + b(t)x^{\sigma} = 0$$

ikinci mertebeden dinamik denklemi (3.1.2.1) özeşlenik denklemi biçiminde yazılabilir.

Prüfer dönüşümünün ikinci dereceden Sturm-Liouville diferansiyel denklemler teorisinde kullanışlı bir kavram olduğu söylenebilir. Bu kavramın zaman skalasına olan genişlemesi ise aşağıdaki gibi yapılabilir. x fonksiyonunun (3.1.2.1) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü olduğu kabul edilsin. O halde, her $t \in \mathbb{T}$ için $x^2(t) + \left(p(t)x^{\Delta}(t)\right)^2 \neq 0$ eşitliği sağlanır ve her t için

$$x(t) = \rho(t)\sin\varphi(t), \tag{3.1.2.2}$$

$$p(t)x^{\Delta}(t) = \rho(t)\cos\varphi(t) \tag{3.1.2.3}$$

eşitlikleri sağlanacak biçimde $\rho(t) > 0$ ve $0 \leq \varphi(t) < 2\pi$ fonksiyonları bulunabilir. (3.1.2.2) ve (3.1.2.3) dönüşümlerine Prüfer dönüşümleri adı verilir.

Teorem 3.1.2.4: [26, sf. 142, Teorem 4.19] Eğer x fonksiyonu (3.1.2.1) denkleminin aşikar olmayan bir çözümü ise ve ρ ve φ fonksiyonları (3.1.2.2) ve (3.1.2.3) eşitlikleri ile tanımlıysa, o halde

$$\rho^{\Delta}=\rho\left(\frac{1}{p}\cos\varphi(\sin\varphi)^{\sigma}-q\sin\varphi(\cos\varphi)^{\sigma}-\frac{\mu q}{p}\cos\varphi(\cos\varphi)^{\sigma}-(\sin\varphi)^{\Delta}(\sin)^{\sigma}-(\cos\varphi)^{\Delta}(\cos\varphi)^{\sigma}\right)$$

$$(\sin\varphi)^{\Delta}(\cos\varphi)^{\sigma}-(\cos\varphi)^{\Delta}(\sin\varphi)=\frac{1}{p}\cos\varphi(\cos\varphi)^{\sigma}+q\sin\varphi(\sin\varphi)^{\sigma}+\frac{\mu q}{p}\cos\varphi(\sin\varphi)^{\sigma}$$

eşitlikleri geçerlidir.

Tanım 3.1.2.1: [26, sf. 143, Tanım 4.21] Bir $x:\mathbb{T}\times\mathbb{T}^{\kappa^2}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Sabitlenmiş her $s\in\mathbb{T}^{\kappa^2}$ için $x(\cdot,s)$ fonksiyonunun

$$Lx(\cdot,s)=0,\quad x(\sigma(s),s)=0,\qquad x^{\Delta}(\sigma(s),s)=\frac{1}{p(\sigma(s))}$$

başlangıç değer probleminin bir çözümü olması durumunda bu x fonksiyonuna (3.1.2.1) denkleminin bir Cauchy fonksiyonu denir.

Teorem 3.1.2.5: [26, sf.143, Teorem 4.24] $f\in C_{rd}$ olsun ve $a\in\mathbb{T}$ olduğu kabul edilsin. Ayrıca $x(t,s)$ fonksiyonunun (3.1.2.1) denklemi için bir Cauchy fonksiyonu olduğu varsayılsın. O halde, her $t\in\mathbb{T}$ için $x(t)=\int_a^t x(t,s)f(s)\Delta s$ eşitliği ile verilen x fonksiyonu $Lx=f(t)$, $x(a)=0$, $x^{\Delta}(a)=0$ başlangıç değer preobleminin bir çözümüdür.

Teorem 3.1.2.6: [26, sf. 144, Teorem 4.26] (3.1.2.1) denkleminin x Cauchy fonksiyonu $t\geq\sigma(s)$ için $x(t,s)\geq 0$ koşulunu sağladığı kabul edilsin. Eğer $u,v\in\mathbb{D}$ fonksiyonları tüm $t\in[a,b]$ ler için $Lu(t)\geq Lv(t)$, $u(a)=v(a)$, $u^{\Delta}(a)=v^{\Delta}(a)$ ifadelerini gerçekliyorsa, o halde tüm $t\in\left[a,\sigma^2(b)\right]$ ler için $u(t)\geq v(t)$ eşitsizliği sağlanır.

Tanım 3.1.2.2: [26, sf. 145, Tanım 4.27] $x,y:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları göz önüne alınsın. x ve y fonksiyonları $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise, bu fonksiyonların Wronskiyenleri her $t\in\mathbb{T}^{k}$ için $W(x,y)(t)=\det\begin{pmatrix}x(t) & y(t)\\ x^{\Delta}(t) & y^{\Delta}(t)\end{pmatrix}$ biçiminde tanımlanır.

Lemma 3.1.2.1: [26, sf. 145, Lemma 4.28] $x,y:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları göz önüne alınsın. x ve y fonksiyonları $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise her $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için $W(x,y)(t)=\det\begin{pmatrix}x^{\sigma}(t) & y^{\sigma}(t)\\ x^{\Delta}(t) & y^{\Delta}(t)\end{pmatrix}$ eşitliği geçerlidir.

Tanım 3.1.2.3: [26, sf. 145, Tanım 4.29] $x,y:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde diferansiyellenebilir fonksiyonlar ise, o halde bu x ve y fonksiyonlarının Lagrange parantezi tüm $t\in\mathbb{T}^{\kappa}$ için $\{x;y\}(t)=p(t)W(x,y)(t)$ ile tanımlıdır.

Teorem 3.1.2.7: [26, sf. 145, Teorem 4.30] $x, y \in \mathbb{D}$ olsun O halde, tüm $t \in \mathbb{T}^{\kappa^2}$ ler için $x^{\sigma}(t)Ly(t) - y^{\sigma}(t)Lx(t) = \{x; y\}^{\Delta}(t)$ eşitliği sağlanır.

3.2 Uyumlu Türev ve İntegral

Bu bölümde uyumlu türev ve integral tanımları verilecek ve çeşitli özelliklerinden bahsedilecektir. Bunun için Kaynaklar kısmında verilen [1] numaralı makaleden yararlanılacaktır.

3.2.1 Uyumlu Türev Tanımı ve Özellikleri

$f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon ve $t > 0$ olsun. f fonksiyonunun t noktasındaki türevi $\frac{df}{dt} = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t+\varepsilon) - f(t)}{\varepsilon}$ biçiminde tanımlıdır. Bu tanıma göre, $\frac{dt^n}{dt} = nt^{n-1}$ olduğu kolayca görülebilir. Burada, akla şu soru gelebilir: $0 < \alpha \le 1$ olmak üzere, yukarıda verilen türev tanımına benzer biçimde tanımlanabilecek α mertebeden bir türev var mıdır? Benzer türev tanımı, $n \in \mathbb{N}$ olmak üzere $\alpha \in (n, n+1]$ için de yapılabilir mi?

T_α ile α mertebeden türev olarak isimlendirilen operatör belirtilsin. $\alpha = 1$ iken T_1 operatörü aşağıdaki özellikleri sağlar.

i) Tüm $a, b \in \mathbb{R}$ elemanları ve T_1 in tanım kümesinden alınan her f, g fonksiyonu için $T_1(af + bg) = aT_1(f) + bT_1(g)$ dir.

ii) Tüm $p \in \mathbb{R}$ için $T_1(t^p) = pt^{p-1}$ dir.

iii) $T_1(fg) = fT_1(g) + gT_1(f)$ dir.

iv) $T_1\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{gT_1(f) - fT_1(g)}{g^2}$ dir.

v) Tüm sabit $f(t) = \lambda$ fonksiyonları için $T_1(\lambda) = 0$ dır.

Aşağıdaki tanım, $\alpha \in (0,1]$ olmak üzere, α mertebeden türevin en basit, en doğal ve en etkili tanımıdır. Burada, bu tanımın, herhangi bir α sayısı için genelleştirilebileceğini belirtmekte yarar vardır. Fakat yine de $\alpha \in (0,1]$ durumu en önemli durumdur ve türev tanımı bu durum için yapıldıktan sonra, diğer durumları elde etmek kolaydır.

Tanım 3.2.1.1: [1] $f:[0,\infty) \to \mathbb{R}$ fonksiyonu verilsin. Tüm $t > 0$ ve $\alpha \in (0,1]$ için f fonksiyonunun α mertebeden "uyumlu türevi"

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{\varepsilon \to 0} \frac{f(t + \varepsilon t^{1-\alpha}) - f(t)}{\varepsilon}$$

ile tanımlıdır. Eğer bazı $a>0$ sayıları için f fonksiyonu $(0,a)$ aralığında α diferansiyellenebilirse ve $\lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ mevcutsa f fonksiyonunun 0 noktasındaki α mertebeden türevi $f^{(\alpha)}(0)=\lim_{t\to 0^+} f^{(\alpha)}(t)$ biçimindedir.

Bazen, f in α mertebeden uyumlu türevi $T_\alpha(f)(t)$ yi belirtmek için $f^{(\alpha)}(t)$ gösterimi de kullanılabilir. Eğer f in α mertebeden türevi mevcutsa, kısaca f α türevlenebilirdir denir. Burada ayrıca $T_\alpha\left(t^p\right)=pt^{p-\alpha}$ olduğunu belirlemekte yarar vardır.

Aşağıdaki teorem, yukarıdaki tanımın bir sonucu olarak verilebilir.

Teorem 3.2.1.1: [1] $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere, $f:[0,\infty)\to\mathbb{R}$ fonksiyonu bir $t_0>0$ noktasında α diferansiyellenebilinirse, o halde f fonksiyonu t_0 noktasında süreklidir.

Tanım 3.2.1.1 ile verilen T_α uyumlu türevinin sağladığı özellikler aşağıdaki teoremde belirtilmiştir.

Teorem 3.2.1.2: [1] $\alpha\in(0,1]$ olsun ve f ve g fonksiyonlarının bir $t>0$ noktasında α diferansiyellenebilir fonksiyonlar olduğu kabul edilsin. Bu durumda

1) Her $a,b\in\mathbb{R}$ için $T_\alpha(af+bg)=aT_\alpha(f)+bT_\alpha(g)$ dır.

2) Her $p\in\mathbb{R}$ için $T_\alpha\left(t^p\right)=pt^{p-\alpha}$ dır.

3) Tüm sabit $f(t)=\lambda$ fonksiyonları için $T_\alpha(\lambda)=0$ sağlanır.

4) $T_\alpha(fg)=fT_\alpha(g)+gT_\alpha(g)$ dır.

5) $T_\alpha\left(\dfrac{f}{g}\right)=\dfrac{gT_\alpha(f)-fT_\alpha(g)}{g^2}$ sağlanır.

6) Eğer f fonksiyonu diferansiyellenebilinirse $T_\alpha(f)(t)=t^{1-\alpha}\dfrac{df}{dt}(t)$ olur.

Aşağıda belirli bazı fonksiyonların uyumlu türevleri verilmiştir:

1) Her $p\in\mathbb{R}$ için $T_\alpha\left(t^p\right)=pt^{p-\alpha}$ dır.

2) $T_\alpha(1)=0$ dır.

3) Her $c\in\mathbb{R}$ için $T_\alpha\left(e^{cx}\right)=cx^{1-\alpha}e^{cx}$ dır.

4) Her $b\in\mathbb{R}$ için $T_\alpha(\sin bx)=bx^{1-\alpha}\cos bx$ dir.

5) Her $b\in\mathbb{R}$ için $T_\alpha(\cos bx)=-bx^{1-x}\sin bx$ dir.

6) $T_\alpha\left(\frac{1}{\alpha}t\right)=1$dır.

Bunlara ek olarak, aşağıdaki eşitlikler de verilebilir:

i) $T_\alpha\left(\sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)=\cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha$.

ii) $T_\alpha\left(\cos\frac{1}{\alpha}t^\alpha\right)=-\sin\frac{1}{\alpha}t^\alpha$.

iii) $T_\alpha\left(e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}\right)=e^{\frac{1}{\alpha}t^\alpha}$.

Uyumlu türevin en önemli durumu α nın $(0,1]$ aralığında olduğu durum olmasına rağmen, $\alpha\in(n,n+1]$ iken uyumlu türevin nasıl tanımlanması gerektiği aşağıda belirtilmiştir.

Tanım 3.2.1.2: [1] $\alpha\in(n,n+1]$ olmak üzere f, $t>0$ noktasında n mertebeden diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. Bu durumda, f in α mertebeden uyumlu türevi aşağıdaki gibidir:

$$T_\alpha(f)(t)=\lim_{\varepsilon\to0}\frac{f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}\left(t+\varepsilon t^{\lceil\alpha\rceil-\alpha}\right)-f^{(\lceil\alpha\rceil-1)}(t)}{\varepsilon}.$$

Burada, $\lceil\alpha\rceil$ α sayısının tam değerini belirtir.

Tanım 3.2.1.2 nin ışığında, $\alpha\in(n,n+1]$ ve f, $t>0$ noktasında $(n+1)$ mertebeden diferansiyellenebilir bir fonksiyon olmak üzere $T^\alpha(f)(t)=t^{(\lceil\alpha\rceil-\alpha)}f^{\lceil\alpha\rceil}(t)$ olduğu kolayca gösterilebilir. Uyumlu türev için yukarıda verilen tanımlar, α diferansiyellenebilir fonksiyonların analizini yapmayı gerektirmese de, klasik analizin Rolle Teoremi ve Ortalama Değer Teoremi gibi önemli teoremlerinin uyumlu türev için yapılan genelleştirmelerinin verilmesine engel de değildir.

Teorem 3.2.1.3: (Uyumlu Türevlenebilir Fonksiyonlar için Rolle Teoremi)

$a>0$ olsun ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonunun aşağıdaki koşulları sağladığı varsayılsın:

i) f, $[a,b]$ de süreklidir.

ii) Bazı $\alpha\in(0,1)$ ler için f fonksiyonu α diferansiyellenebilirdir.

iii) $f(a)=f(b)$ dır.

Bu durumda $f^{(\alpha)}(c)=0$ olacak biçimde bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

Teorem 3.2.1.4: (Uyumlu Türevlenebilir Fonksiyonlar İçin Ortalama Değer Teoremi)

$a>0$ olsun ve $f:[a,b]\to\mathbb{R}$ fonksiyonu aşağıdaki koşulları sağlasın:

i) f , $[a,b]$ de süreklidir.

ii) Bazı $\alpha\in(0,1)$ ler için f α diferansiyellenebilirdir.

Bu durumda $f^{(\alpha)}(c)=\dfrac{f(b)-f(a)}{\frac{1}{\alpha}b^{\alpha}-\frac{1}{\alpha}a^{\alpha}}$ olacak biçimde bir $c\in(a,b)$ sayısı vardır.

3.2.2 Uyumlu İntegral

$\alpha\in(0,\infty)$ olsun ve $\alpha\neq -p$ olmak üzere keyfi $p\in\mathbb{R}$ için $J_{\alpha}\left(t^{p}\right)=\dfrac{t^{p+\alpha}}{p+\alpha}$ fonksiyonu tanımlansın. Eğer $f(t)=\sum_{k=0}^{n}b_k t^k$ ise $J_{\alpha}(f)$ ifadesi $J_{\alpha}(f)=\sum_{k=0}^{n}b_k J_{\alpha}\left(t^k\right)=\sum_{k=0}^{n}b_k\dfrac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$ ile ve $f(t)=\sum_{k=0}^{n}b_k t^k$ ise, serinin düzgün yakınsak olması durumunda $J_{\alpha}(f)=\sum_{k=0}^{n}b_k\dfrac{t^{k+\alpha}}{k+\alpha}$ ile tanımlıdır. J_{α} nın tanım kümesinde lineer olduğu açıktır. Ayrıca, eğer $\alpha=1$ ise, o halde J_{α} klasik integral ile örtüşür.

Bu tanıma göre, $\alpha=\dfrac{1}{2}$ iken, $J_{\alpha}(\sin t)=\sum_{k=0}^{\infty}\dfrac{(-1)^n t^{2n+\frac{3}{2}}}{\left(2n+\frac{3}{2}\right)(2n+1)!}$ olur. Herhangi $\alpha\in(0,1)$ için $\cos t$ ve e^t ifadeleri de benzer biçimde hesaplanabilir. Bu örnekler, $a\geq 0$ olmak üzere, bir f fonksiyonunun α integralini aşağıdaki gibi tanımlamamıza olanak sağlar.

Tanım 3.2.2.1: [1] $\alpha\in(0,1)$ olmak üzere $I_{\alpha}^{a}(f)(t)=I_{1}^{a}\left(t^{\alpha-1}f\right)=\int_{a}^{t}\dfrac{f(x)}{x^{1-\alpha}}dx$ ile tanımlıdır.

Burada integral klasik Riemann genelleştirilmiş integralidir.

Teorem 3.2.2.1: [1] $t\geq a$ ve f , I_{α} nın tanımlı olduğu bölgede sürekli bir fonksiyon olmak üzere $T_{\alpha}I_{\alpha}^{a}(f)(t)=f(t)$ dır.

3.3 Zaman Skalasında Uyumlu Türev ve İntegral

Bu alt bölümde, daha önceki iki alt bölümde verilen temel tanım ve teoremlerden yararlanarak elde edilen, zaman skalasında uyumlu türev ve integral kavramlarına ilişkin temel tanım ve teoremlere yer verilecektir. Bu tanım ve teoremler [40] numaralı kaynaktan faydalanarak verilecektir.

3.3.1 Zaman Skalasında Uyumlu Türev

$\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası, $t \in \mathbb{T}$ ve $\delta > 0$ olsun. t nin $\delta-$ komşuluğu $V_t := (t-\delta, t+\delta) \cap \mathbb{T}$ kümesi ile tanımlıdır. Aşağıdaki tanım zaman skalasındaki $\alpha \in (0,1]$ mertebeden uyumlu türevin tanımıdır.

Tanım 3.3.1.1: [40] $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ bir fonksiyon, $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ve $\alpha \in (0,1]$ olsun. Bu durumda, her $\varepsilon > 0$ ve $t > 0$ noktasının bir $V_t \subset \mathbb{T}$ $\delta-$ komşuluğundaki her s elemanı için

$$\left| \left[f(\sigma(t)) - f(s) \right] t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t) \left[\sigma(t) - s \right] \right| \leq \varepsilon \left| \sigma(t) - s \right|$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde bir $T_\alpha(f)(t)$ sayısı mevcutsa f fonksiyonu t noktasında α mertebeden uyumlu türevlidir denir. 0 noktasındaki uyumlu türev $T_\alpha(f)(0) = \lim_{t \to 0^+} T_\alpha(f)(t)$ ile tanımlıdır.

Uyarı 3.3.1.1: [40] Tanım 3.3.1.1 de $\alpha = 1$ alınması durumunda zaman skalasında tanımlı delta türev tanımı elde edilir. Sıfır mertebeli uyumlu türev özdeşlik operatörüyle tanımlanır: $T_0(f) := f$.

Uyarı 3.3.1.2: [40] $T_\alpha(f)(t)$ gösterimi yerine $(f(t))^{(\alpha)}$ gösterimi de kullanılabilir.

Aşağıdaki teorem Tanım 3.3.1.1 ile verilen zaman skalası üzerinde tanımlı uyumlu türevin bazı kullanışlı özelliklerine yer vermesi açısından önem taşır.

Teorem 3.3.1.1: [40] $\alpha \in (0,1]$ olsun ve $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olmak üzere $f : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Ayrıca $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) f fonksiyonu $t > 0$ noktasında α mertebeden uyumlu türeve sahipse f fonksiyonu t noktasında süreklidir.

ii) f fonksiyonu t noktasında sürekliyse ve t sağa saçılmış bir nokta ise o halde f fonksiyonunun t noktasında α mertebeden uyumlu kesirli türevi

$$T_\alpha(f)(t) = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} \tag{3.3.1.1}$$

eşitliği ile tanımlıdır.

iii) t sağ yoğun bir nokta ise ve f fonksiyonunun t noktasında α mertebeden uyumlu türeve sahip olması için gerek ve yeter koşul $\lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha}$ limitinin mevcut olmasıdır. Bu durumda

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha}$$

olur.

iv) f fonksiyonu t noktasında α mertebeli uyumlu türeve sahipse

$$f(\sigma(t)) = f(t) + (\mu(t))t^{\alpha-1}T_\alpha(f)(t)$$

eşitliği yazılabilir.

İspat. i) f fonksiyonunun t noktasında uyumlu türevlenebilir olduğu kabul edilsin. O halde, $s \in V_t$ elemanları için

$$\left|\left[f(\sigma(t)) - f(s)\right]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)\left[\sigma(t) - s\right]\right| \le \varepsilon\left|\sigma(t) - s\right|$$

eşitsizliği sağlanacak biçimde t nin bir V_t komşuluğu vardır. Dolayısıyla, tüm $s \in V_t \cap (t-\varepsilon, t+\varepsilon)$ lar için

$$\left|f(t) - f(s)\right| \le \left|\left[f(\sigma(t)) - f(s)\right] - T_\alpha(f)(t)\left[\sigma(t) - s\right]t^{\alpha-1}\right| + \left|\left[f(\sigma(t)) - f(t)\right]\right| + \left|f^{(\alpha)}(t)\right|\left|\left[\sigma(t) - s\right]\right|\left|t^{\alpha-1}\right|$$

eşitsizliği yazılabilir ve t sağ yoğun nokta olduğundan

$$\left|f(t) - f(s)\right| \le \left|\left[f^\sigma(t) - f(s)\right] - f^{(\alpha)}(t)\left[\sigma(t) - s\right]^\alpha\right| + \left|f^{(\alpha)}(t)[t-s]^\alpha\right| \le \varepsilon\delta + \left|t^{\alpha-1}\right|\left|T_\alpha(f)(t)\right|\delta$$

sağlanır. $s \to t$ iken $\delta \to 0$ olduğundan ve $t > 0$ sağlandığından f fonksiyonunun t noktasındaki sürekliliği elde edilir.

ii) f fonksiyonunun t noktasında sürekli olduğu ve t nin sağa saçılmış bir nokta olduğu varsayılsın. Süreklilikten,

$$\lim_{s \to t} \frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} t^{1-\alpha} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\sigma(t) - t} t^{1-\alpha} = \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha}$$

yazılabilir. Dolayısıyla, verilmiş $\varepsilon > 0$, $\alpha \in (0,1]$ ve tüm $s \in V_t$ ler için

$$\left|\frac{f(\sigma(t)) - f(s)}{\sigma(t) - s} t^{1-\alpha} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)}\right| \le \varepsilon$$

olacak biçimde t nin bir V_t komşuluğu vardır. Buradan tüm $s \in V_t$ ler için

$$\left|\left[f(\sigma(t)) - f(s)\right]t^{1-\alpha} - \frac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha}(\sigma(t) - s)\right| \le \varepsilon(\sigma(t) - s)$$

yazılabilir. (3.3.1.1) eşitliği Tanım 3.3.1.1 den kolaylıkla görülür.

iii) f fonksiyonunun t noktasında α mertebeden kesirli türevlenebilir olduğu ve t nin bir sağ yoğun nokta olduğu kabul edilsin. $\varepsilon > 0$ verilsin. f fonksiyonu t noktasında α mertebeden uyumlu kesirli türevlenebilir olduğundan t nin bir V_t komşuluğundaki tüm s ler için

$$\left|\left[f(\sigma(t)) - f(s)\right]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)(\sigma(t) - s)\right| \le \varepsilon\left|\sigma(t) - s\right|$$

eşitsizliği yazılabilir. $\sigma(t)=t$ olduğundan, $s\neq t$ olacak biçimdeki tüm $s\in V_t$ ler için

$$\left|\frac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}-T_\alpha(f)(t)\right|\leq\varepsilon$$

sağlanır. Dolayısıyla, (3.3.1.2) eşitliği elde edilir. Şimdi, (3.3.1.2) nin sağ tarafındaki limitin var olduğu ve bu limit değerinin bir L sayısına eşit olduğu kabul edilsin. Ayrıca, t nin sağ yoğun bir nokta olduğu göz önüne alınsın. O halde, tüm $s\in V_t$ ler için $\left|\left(f(t)-f(s)\right)t^{1-\alpha}-L(t-s)\right|\leq\varepsilon|t-s|$ eşitsizliği sağlanacak biçimde bir V_t komşuluğu vardır. t sağ yoğun olduğundan

$$\left|\left(f(\sigma(t))-f(s)\right)t^{1-\alpha}-L(\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon|\sigma(t)-s|$$

eşitsizliği yazılabilir, bu ise f fonksiyonunun t noktasında α mertebeden uyumlu türevlenebilir olduğunu ve $T_\alpha(f)(t)=L$ eşitliğinin sağlandığını gösterir.

iv) Eğer t noktası sağ yoğun bir nokta ise, yani $\sigma(t)=t$ ise, o halde $\mu(t)=0$ olur ve

$$f(\sigma(t))=f(t)=f(t)+\mu(t)T_\alpha(f)(t)t^{1-\alpha}$$

sağlanır. Diğer yandan, t nin sağa saçılmış olması durumunda, yani $\sigma(t)>t$ iken, (iii) den

$$f(\sigma(t))=f(t)+\mu(t)t^{\alpha-1}\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}t^{1-\alpha}=f(t)+\left(\mu(t)\right)^{\alpha-1}T_\alpha(f)(t)$$

yazılabilir ve böylece ispat biter. □

Uyarı 3.3.1.3: [40] Bir $\mathbb{T}$ zaman skalası reel sayıların alışılageldik topolojisi ile donatıldığından, bu zaman skalasında tanımlı bir f fonksiyonu izole edilmiş bir t noktasında sürekli olur.

Örnek 3.3.1.1: [40] $h>0$ ve $\mathbb{T}=h\mathbb{Z}:=\{hk:k\in\mathbb{Z}\}$ olsun. O halde, her $t\in\mathbb{T}$ için $\sigma(t)=t+h$ ve $\mu(t)=h$ olur. $f:t\in\mathbb{T}\to t^2\in\mathbb{R}$ fonksiyonu için $T_\alpha(f)(t)=\left(t^2\right)^{(\alpha)}=(2t+h)t^{1-\alpha}$ sağlanır.

Örnek 3.3.1.2: [40] $q>1$ olsun ve $\mathbb{T}=\overline{q^{\mathbb{Z}}}:=q^{\mathbb{Z}}\cup\{0\}$ olmak üzere $q^{\mathbb{Z}}:=\{q^k:k\in\mathbb{Z}\}$ biçiminde tanımlansın. Bu zaman skalasında $\sigma(t)=\begin{cases}qt, & t\neq0\\ 0, & t=0\end{cases}$ ve $\mu(t)=\begin{cases}(q-1)t, & t\neq0\\ 0, & t=0\end{cases}$ ile tanımlıdır. Burada 0 noktası sağ yoğun bir minimum noktadır ve $\mathbb{T}$ nin diğer tüm noktaları izoledir. Bir önceki örnekte ele alınan $f:t\in\mathbb{T}\to t^2\in\mathbb{R}$ fonksiyonu için

$$T_\alpha(f)(t)=\left(t^2\right)^{(\alpha)}=\begin{cases}(q+1)t^{2-\alpha}, & t\neq0\\ 0, & t=0\end{cases}$$

olur.

Örnek 3.3.1.3: [40] $q>1$ olsun ve $\mathbb{T}=q^{\mathbb{N}_0}:=\{q^n:n\in\mathbb{N}_0\}$ olarak tanımlansın. Her $t\in\mathbb{T}$ için $\sigma(t)=qt$ ve $\mu(t)=(q-1)t$ olarak verilsin. Her $t\in\mathbb{T}$ için $\sigma(t)=qt$ ve $\mu(t)=(q-1)t$ olarak elde edilir. $f: t \in \mathbb{T} \to \log(t) \in \mathbb{R}$ fonksiyonu göz önüne alınırsa, her $t \in \mathbb{T}$ için $T_\alpha(f)(t) = (\log(t))^{(\alpha)} = \dfrac{\log(q)}{(q-1)t^\alpha}$ elde edilir.

Önerme 3.3.1.1: [40] Eğer $f:\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm $t \in \mathbb{T}$ ve $c \in \mathbb{R}$ ler için $f(t) = c$ biçiminde tanımlıysa o halde $T_\alpha(f)(t) = (c)^{(\alpha)} = 0$ olur.

İspat: Eğer t noktası sağa saçılmış bir nokta ise, Teorem 3.3.1.1 (ii) den $T_\alpha(f)(t) = \dfrac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} = 0$ olur. Diğer durumda, yani t noktası sağ yoğun bir nokta ise, bu kez Teorem 3.3.1.1 (iii) den $T_\alpha(f)(t) = \lim\limits_{s\to t} \dfrac{c-c}{t-s} t^{1-\alpha} = 0$ bulunur. Böylece ispat biter. □

Önerme 3.3.1.2: [40] Eğer $f:\ \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu tüm $t \in \mathbb{T}$ ler için $f(t) = t$ biçiminde tanımlıysa, o halde $T_\alpha(f)(t) = (t)^{(\alpha)} = \begin{cases} t^{1-\alpha}, & \alpha \neq 1 \\ 1, & \alpha = 1 \end{cases}$ olur.

İspat: Teorem 3.3.1.1 (iv) den $\sigma(t) = t + \mu(t) t^{\alpha-1} T_\alpha(f)(t)$ ve $\mu(t) = \mu(t) t^{\alpha-1} T_\alpha(f)(t)$ olur. Eğer $\mu(t) \neq 0$ ise o halde $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}$ olur ve böylece istenen sonuç elde edilir. Şimdi $\mu(t) = 0$ olduğu yani $\sigma(t) = t$ olduğu kabul edilsin. Bu durumda t sağ yoğundur ve Teorem 3.3.1.1 (iii) den $T_\alpha(f)(t) = \lim\limits_{s\to t} \dfrac{t-s}{t-s} t^{1-\alpha} = t^{1-\alpha}$ elde edilir. Dolayısıyla, eğer $\alpha = 1$ ise o halde $T_\alpha(f)(t) = 1$ ve eğer $0 < \alpha < 1$ ise $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}$ olur. Böylece ispat biter.□

Aşağıda verilen iki sonuç sırasıyla $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ ve $h > 0$ olmak üzere $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ durumlarıyla ilgilidir.

Sonuç 3.3.1.1: [40] $f: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun bir $t \in \mathbb{R}$ noktasında α mertebeden uyumlu türevlenebiliir olması için gerek ve yeter koşul $\lim\limits_{s\to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t-s} t^{1-\alpha}$ limitinin sonlu bir sayıya eşit olmasıdır. Bu durumda,

$$T_\alpha(f)(t) = \lim_{s\to t} \frac{f(t) - f(s)}{t-s} t^{1-\alpha} \tag{3.3.1.3}$$

eştiliği sağlanır.

İspat. Burada $\mathbb{T} = \mathbb{R}$ dir ve dolayısıyla, tüm noktalar sağ yoğundur. İstenen sonuç Teorem 3.3.1.1 (iii) den kolayca elde edilir. □

Uyarı 3.3.3.4: [40] (3.3.1.3) eşitliği [1] de elde edilen ve daha sonra [11] de daha detaylı biçimde incelenen kesirli türev tanımıyla aynıdır.

Sonuç 3.3.1.2: [40] $h>0$ olsun. Eğer $f: h\mathbb{Z} \to \mathbb{R}$ ise, f fonksiyonu bir $t \in h\mathbb{Z}$ noktasında α mertebeden uyumlu türevlenebilirdir ve $T_\alpha(f)(t) = \frac{f(t+h)-f(t)}{h} t^{1-\alpha}$ sağlanır.

İspat. Burada $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$ dir ve dolayısıyla tüm noktalar sağa saçılmış noktadır. Dolayısıyla istenen sonuç Teorem 3.3.1.1 (ii) den kolayca elde edilir. □

Aşağıda verilen teorem zaman skalasında tanımlı uyumlu türevin kullanışlı özelliklerini vermesi açısından önemlidir.

Teorem 3.3.1.2: [40] $f, g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları α mertebeden uyumlu türevlenebilir fonksiyonlar olsun. Bu durumda aşağıdaki özellikler sağlanır:

i) f ve g fonksiyonlarının toplamı olan $f+g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da α mertebeden uyumlu türevlenebilirdir ve $T_\alpha(f+g) = T_\alpha(f) + T_\alpha(g)$ eşitliği sağlanır.

ii) Herhangi bir $\lambda \in \mathbb{R}$ için $\lambda f: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu da α mertebeden uyumlu türevlenebilirdir ve $T_\alpha(\lambda f) = \lambda T_\alpha(f)$ eşitliği sağlanır.

iii) f ve g fonksiyonlarının sürekli fonksiyonlar olması durumunda $fg: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ çarpım fonksiyonu α mertebeden uyumlu türevlenebilir olur ve $T_\alpha(fg) = T_\alpha(f)g + (f \circ g)T_\alpha(g) = T_\alpha(f)(g \circ \sigma) + fT_\alpha(g)$ eşitliği sağlanır.

iv) Eğer f fonksiyonu sürekliyse, o halde $\frac{1}{f}$ fonksiyonu α mertebeden uyumlu türevlenebilirdir ve $f(t)f(\sigma(t)) \neq 0$ ifadesinin gerçeklendiği $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktalarında $T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right) = -\frac{T_\alpha(f)}{f(f \circ \sigma)}$ eşitliği sağlanır.

v) Eğer f ve g fonksiyonlarının sürekli fonksiyonlarsa, o halde $\frac{f}{g}$ fonksiyonu α mertebeden uyumlu türevlenebilirdir ve $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ ifadesinin gerçeklendiği $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktalarında $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right) = \frac{T_\alpha(f)g - fT_\alpha(g)}{g(g \circ \sigma)}$ eşitliği sağlanır.

İspat: $\alpha \in (0,1]$ olsun ve f ve g fonksiyonlarının $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktalarında uyumlu türevlenebilir olduğu kabul edilsin.

i) $\varepsilon > 0$ olsun. O halde, sırasıyla, tüm $s \in V_t$ ve tüm $s \in U_t$ noktaları için

$$\left|\left[f(\sigma(t)) - f(s)\right]t^{1-\alpha} - T_\alpha(f)(t)(\sigma(t)-s)\right| \leq \frac{\varepsilon}{2}|\sigma(t)-s|$$

ve

$$\left|\left[g(\sigma(t))-g(s)\right]t^{1-\alpha}-T_\alpha(g)(t)(\sigma(t)-s)\right|\leq\frac{\varepsilon}{2}\left|\sigma(t)-s\right|$$

eşitsizlikleri sağlanacak biçimde t noktasının V_t ve U_t komşulukları mevcuttur. $W_t=V_t\cap U_t$ olsun. Bu durumda

$$\left|\left[(f+g)(\sigma(t))-(f+g)(s)\right]t^{1-\alpha}-\left[T_\alpha(f)(t)+T_\alpha(g)(t)\right](\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$$

eşitsizliği tüm $s\in W_t$ noktaları için sağlanır. Buradan, $f+g$ fonksiyonun t noktasında uyumlu türevlenebilir olduğu ve $T_\alpha(f+g)(t)=T_\alpha(f)(t)+T_\alpha(g)(t)$ eşitliğinin gerçeklendiği görülebilir.

ii) $\varepsilon>0$ olsun. O halde, $\left|\left[f(\sigma(t))-f(s)\right]t^{1-\alpha}-T_\alpha(f)(t)(\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon\left|\sigma(t)-s\right|$ eşitsizliği tüm $s\in V_t$ noktaları için geçerlidir. Buradan, yine tüm $s\in V_t$ noktaları için

$$\left|\left[(\lambda f)(\sigma(t))-(\lambda f)(s)\right]t^{1-\alpha}-\lambda T_\alpha(f)(t)(\sigma(t)-s)\right|\leq\varepsilon|\lambda|\left|\sigma(t)-s\right|$$

eşitsizliği elde edilir. Dolayısıyla, λf fonksiyonu t noktasında uyumlu türevlenebilirdir ve $T_\alpha(\lambda f)=\lambda T_\alpha(f)$ sağlanır.

iii) t sağ yoğun bir nokta ise, o halde

$$\begin{aligned}T_\alpha(fg)(t)&=\lim_{s\to t}\left[\frac{f(t)-f(s)}{t-s}t^{1-\alpha}\right]g(t)+\lim_{s\to t}\left[\frac{g(t)-g(s)}{t-s}t^{1-\alpha}\right]f(t)\\&=T_\alpha(f)(t)g(t)+T_\alpha(g)(t)f(t)\\&=T_\alpha(f)(t)g(\sigma(t))+T_\alpha g(t)f(t)\end{aligned}$$

yazılabilir. Eğer t sağa saçılmış bir nokta ise o halde

$$\begin{aligned}T_\alpha(fg)(t)&=\left[\frac{f(\sigma(t))-f(t)}{\mu(t)}t^{1-\alpha}\right]g(\sigma(t))+\left[\frac{g(\sigma(t))-g(t)}{\mu(t)}t^{1-\alpha}\right]f(t)\\&=T_\alpha(f)(t)g(\sigma(t))+f(t)T_\alpha(g)(t)\end{aligned}$$

eşitliği sağlanır. Teoremde çarpımın türevi için verilen diğer kural f ve g fonksiyonlarının yerleri değiştirilerek elde edilebilir.

iv) Önerme 3.3.1.1 den ve Teorem 3.3.1.2 (iii) den $T_\alpha\left(f\cdot\frac{1}{f}\right)(t)=(1)^{(\alpha)}=0$ yazılabilir. Dolayısıyla (iii) den $T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right)(t)f(\sigma(t))+T_\alpha(f)(t)\cdot\frac{1}{f(t)}=0$ elde edilir. $f(\sigma(t))\neq0$ kabulünden $T_\alpha\left(\frac{1}{f}\right)(t)=-\frac{T_\alpha(f)(t)}{f(t)f(\sigma(t))}$ elde edilir.

v) (ii) ve (iv) kullanılarak, $T_\alpha\left(\frac{f}{g}\right)(t)=T_\alpha\left(f\cdot\frac{1}{g}\right)(t)=f(t)T_\alpha\left(\frac{1}{g}\right)(t)+T_\alpha(f)(t)\frac{1}{g(\sigma(t))}$

$$=\frac{T_\alpha(f)(t)g(t)-f(t)T_\alpha(g)(t)}{g(t)g(\sigma(t))}$$

elde edilir. Böylece ispat biter. □

Teorem 3.3.1.3: [40] c bir sabit sayı, $m\in\mathbb{N}$ ve $\alpha\in(0,1]$ olsun. O halde, aşağıdaki eşitlikler sağlanır:

i) Eğer $f(t)=(t-c)^m$ ise, o halde $T_\alpha(f)(t)=t^{1-\alpha}\sum_{p=0}^{m-1}(\sigma(t)-c)^{m-1-p}(t-c)^p$ olur.

ii) Eğer $g(t)=\frac{1}{(t-c)^m}$ ve $(t-c)(\sigma(t)-c)\neq 0$ ise, o halde $T_\alpha(g)(t)=-t^{1-\alpha}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{1}{(\sigma(t)-c)^{p+1}(t-c)^{m-p}}$ olur.

İspat: i) İspat için matematiksel tümevarım kullanılacaktır. Eğer $m=1$ ise, o halde $f(t)=t-c$ dir ve $T_\alpha(f)(t)=t^{1-\alpha}$ eşitliği Önerme 3.3.1.1, Önerme 3.3.1.2 ve Teorem 3.3.1.2 (i) den gerçeklenir. Şimdi, $T_\alpha(f)(t)=t^{1-\alpha}\sum_{p=0}^{m-1}(\sigma(t)-c)^{m-1-p}(t-c)^p$ eşitliğinin $f(t)=(t-c)^{m+1}=(t-c)f(t)$ fonksiyonu için sağlandığı varsayılsın ve $F(t)=(t-c)^{m+1}=(t-c)f(t)$ fonksiyonu göz önüne alınsın. Teorem 3.3.1.2 (iii) den

$$(F(t))^{(\alpha)}=T_\alpha(t-c)f(\sigma(t))+T_\alpha(f)(t)(t-c)=t^{1-\alpha}\sum_{p=0}^{m}(\sigma(t)-c)^{m-p}(t-c)^p$$ yazılabilir.

Dolayısıyla, (i) deki eşitliğin matematiksel tümevarımdan sağlandığı görülür.

ii) $g(t)=\frac{1}{(t-c)^m}=\frac{1}{f(t)}$ olsun. Teorem 3.3.1.2 (iv) den $(t-c)(\sigma(t)-c)\neq 0$ olması durumunda

$$g^{(\alpha)}(t)=-\frac{T_\alpha(f)(t)}{f(t)f(\sigma(t))}=-t^{1-\alpha}\sum_{p=0}^{m-1}\frac{1}{(\sigma(t)-c)^{p+1}(t-c)^{m-p}}$$

yazılabilir. □

Aşağıda Teorem 3.3.1.3 ün bazı uygulamaları verilecektir.

Örnek 3.3.1.4: [40] $\alpha\in(0,1]$ olsun ve $f(t)=t^m$ olarak alınsın. Bu durumda, $T_\alpha(f)(t)=t^{1-\alpha}\sum_{p=0}^{m-1}\sigma(t)^{m-1-p}t^p$ dir. Eğer, t sağ yoğun ise, o halde $T_\alpha(f)(t)=mt^{m-\alpha}$ olur. $\mathbb{T}=\mathbb{R}$ iken $\alpha=1$ alınırsa klasik $T_1(f)(t)=mt^{m-1}=f'(t)$ türevi elde edilir.

Örnek 3.3.1.5: [40] $\alpha \in (0,1]$ olsun ve $f(t) = \frac{1}{t^m}$ olarak alınsın. O halde, $T_\alpha(f)(t) = -t^{1-\alpha} \sum_{p=0}^{m-1} \frac{1}{t^{p-m} \sigma(t)^{p+1}}$ olur. Eğer, t sağ yoğun ise, o halde $T_\alpha(f)(t) = -\frac{m}{t^{m+\alpha}}$ dır. $\alpha = 1$ alınırsa, $T_1(f)(t) = -\frac{m}{t^{m+1}}$ elde edilir.

Örnek 3.3.1.6: [40] Eğer $f(t) = (t-1)^2$ ise, o halde tüm $\alpha \in (0,1]$ için $T_\alpha(f)(t) = t^{1-\alpha}\left[(\sigma(t)+1)^2 + (\sigma(t)+1)(t+1) + (t+1)^2\right]$ sağlanır.

Klasik analizdeki zincir kuralı, zaman skalasında tanımlı uyumlu türev için sağlanmaz. Bu durum aşağıdaki örnekle gösterilebilir.

Örnek 3.3.1.7: [40] $\alpha \in (0,1)$ olsun ve $\mathbb{T} = \mathbb{N} = \{1, 2, \cdots\}$ alınsın. Bu durumda $\sigma(t) = t+1$ ve $\mu(t) = 1$ dir. $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{T}$ fonksiyonları $f(t) = g(t) = t$ eşitliği ile tanımlansın. Bu durumda, $T_\alpha(f \circ g)(t) = t^{1-\alpha}$ iken $T_\alpha(f)(g(t))T_\alpha(g)(t) = t^{2(1-\alpha)}$ olur. Böylece $T_\alpha(f \circ g)(t) \neq T_\alpha(f)(g(t))T_\alpha(g)(t)$ olduğu görülür.

Zaman skalasında tanımlı uyumlu türev için zincir kuralı ancak aşağıdaki özel hal için sağlanır.

Teorem 3.3.1.4: [40] $\alpha \in (0,1]$ olsun. $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun sürekli bir fonksiyon olduğu ve $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktalarında α mertebeden uyumlu türevlenebilir olduğu kabul edilsin, ayrıca $f : \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde, $[t, \sigma(t)] \subset \mathbb{R}$ aralığında

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = f(g(c))T_\alpha(g)(t) \tag{3.3.1.4}$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir c sayısı vardır.

İspat: $t \in \mathbb{T}^\kappa$ alınsın ve öncelikle t nin sağa saçılmış olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = \frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{\mu(t)} t^{1-\alpha}$$

olur. Eğer $g(\sigma(t)) = g(t)$ ise, o halde $T_\alpha(f \circ g)(t) = 0$ ve $T_\alpha(g)(t) = 0$ olur. Dolayısıyla, (3.3.1.4) $[t, \sigma(t)]$ aralığındaki herhangi bir c reel sayısı için sağlanır. $g(\sigma(t)) \neq g(t)$ ise ortalama değer teoreminden

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = \frac{f(g(\sigma(t))) - f(g(t))}{g(\sigma(t)) - g(t)} \cdot \frac{g(\sigma(t)) - g(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha} = f(\xi)T_\alpha(g)(t)$$

yazılabilir, burada $\xi \in \left(g(t), g(\sigma(t))\right)$ dir. $g: \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu sürekli olduğundan $g(c) = \xi$ olacak biçimde bir $c \in [t, \sigma(t)]$ vardır, böylece istenen sonuç elde edilir. Şimdi, t nin sağ yoğun olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$T_\alpha(f \circ g)(t) = \lim_{s \to t} \frac{f(g(t)) - f(g(s))}{g(t) - g(s)} \cdot \frac{g(t) - g(s)}{t - s} t^{1-\alpha}$$

yazılabilir. Ortalama değer teoreminden $T_\alpha(f \circ g)(t) = \lim_{s \to t}\left\{ f'(\xi_s) \frac{g(t) - g(s)}{t - s} t^{1-\alpha} \right\}$ olacak biçimde bir $\xi_s \in \left(g(t), g(\sigma(t))\right)$ vardır. g fonksiyonunun sürekliliğinden, $\lim_{s \to t} \xi_s = g(t)$ bulunur ve $T_\alpha(f \circ g)(t) = f'(g(t)) T_\alpha(g)(t)$ sağlanır. t sağ yoğun olduğundan, $c = t = \sigma(t)$ elde edilir. Böylece ispat biter. □

Örnek 3.3.1.8:[40] $\mathbb{T} = 2^{\mathbb{N}}$ olsun. Bu durumda, $\sigma(t) = 2t$ ve $\mu(t) = t$ olur.

i) $f(t) = t^2$ ve $g(t) = t$ alınırsa Teorem 3.3.1.4 den

$$T_\alpha(fog)(t) = f'(g(c)) T_\alpha(g)(t) \tag{3.3.1.5}$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir $c \in [t, \sigma(t)] = [t, 2t]$ sayısı bulunabilir. Gerçekten, Teorem 3.3.1.1 yardımıyla $T_\alpha(fog)(t) = 3t^{1-\alpha}$, $T_\alpha(g)(t) = t^{1-\alpha}$ ve $f'(g(c)) = 2c$ bulunur. Eşitlik (3.3.1.5), $3t^{1-\alpha} = 2ct^{1-\alpha}$ olmasını gerektirir ve dolayısıyla $c = \frac{3}{2} t \in [t, 2t]$ bulunur.

ii) Tüm $t \in \mathbb{T}$ ler için $f(t) = g(t) = t^2$ alınsın. O halde $15t^{4-\alpha} = T_\alpha(fog)(t) = f'(g(c)) T_\alpha(g)(t)$ $= 2c^2 \cdot 3t^{2-\alpha}$ bulunur ve böylece $c = \sqrt{\frac{5}{2}} t \in [t, 2t]$ elde edilir.

Bu alt bölüm, yüksek mertebeden türev kavramı verilerek bitirilecektir. Daha iyi ifade etmek gerekirse, n keyfi bir doğal sayı olduğunda $\alpha \in (n, n+1]$ elemanları için T_α uyumlu türevinin tanımı verilecektir.

Tanım 3.3.1.2: [40] $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası, $n \in \mathbb{N}$, $\alpha \in (n, n+1]$ olsun ve f fonksiyonunun $t \in \mathbb{T}^{\kappa^n}$ noktalarında n kez delta diferansiyellenebilir olduğu kabul edilsin. f fonksiyonunun α mertebeden uyumlu türevi $T_\alpha(f)(t) := T_{\alpha-n}\left(f^{\Delta_n}\right)(t)$ olarak tanımlanır. Bu gösterim yerine, $\left(f(t)\right)^{(\alpha)}$ gösterimi de kullanılabilir.

Örnek 3.3.1.9: [40] $h > 0$, $\mathbb{T} = h\mathbb{Z}$, $f(t) = t^3$ ve $\alpha = 2.1$ alınsın. O halde, Tanım 3.3.1.2 den $T_{2.1}(f) = T_{0.1}\left(f^{\Delta^2}\right)$ yazılabilir. $\sigma(t) = t + h$ ve $\mu(t) = h$ olduğundan

$T_{2.1}(f)(t)=\left(t^3\right)^{(2.1)}=\left(6t+6h\right)^{(0.1)}$ elde edilir. Önerme 3.3.1.1 ve Teorem 3.3.1.2 (i) ve (ii) den $T_{2.1}(f)(t)=6(t)^{(0.1)}$ bulunur. Önerme 3.3.1.2 den ise $T_{2.1}(f)(t)=6t^{0.9}$ elde edilir.

Teorem 3.3.1.5: [40] $n\in\mathbb{N}$ ve $\alpha\in(n,n+1]$ olsun. O halde, aşağıdaki eşitlik sağlanır:

$$T_\alpha(f)(t)=t^{1+n-\alpha}f^{\Delta^{1+n}}(t). \tag{3.3.1.6}$$

İspat: f fonksiyonu n kez delta diferansiyellenebilir bir fonksiyon olsun. O halde $\alpha\in(n,n+1]$ için $\alpha=n+\beta$ olacak biçimde bir $\beta\in(0,1]$ sayısı vardır. Tanım 3.3.1.2 den $T_\alpha(f)=T_\beta\left(f^{\Delta^n}\right)$ yazılabilir. Yüksek mertebeden delta türev tanımı ve Teorem 3.3.1.1 (ii) ve (iii) den $T_\alpha(f)(t)=t^{1-\beta}\left(f^{\Delta^n}\right)^{\Delta}(t)$ elde edilir ve böylece ispat biter. □

3.3.2 Zaman Skalasında Uyumlu İntegral

Bu alt bölümde, zaman skalası üzerinde tanımlanan α uyumlu integral (α integral) tanımı verilecektir ve bu integralin bazı özelliklerinden bahsedilecektir.

Tanım 3.3.2.1: [40] $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu regulated bir fonksiyon olsun. O halde, $0<\alpha\leq 1$ olmak üzere, f fonksiyonunun α integrali $\int f(t)\Delta^\alpha t:=\int f(t)t^{\alpha-1}\Delta t$ eşitliği ile tanımlıdır.

Tanım 3.3.2.2: [40] $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu regulated bir fonksiyon olsun ve $\alpha\in(0,1]$ olmak üzere, f fonksiyonunun α mertebeden belirsiz integrali $F_\alpha(t)=\int f(t)\Delta^\alpha t$ eşitliği ile verilsin. Bu durumda, tüm $a,b\in\mathbb{T}$ elemanları için f fonksiyonun α Cauchy integrali $\int_a^b f(t)\Delta^\alpha t=F_\alpha(b)-F_\alpha(a)$ eşitliği ile tanımlıdır.

Örnek 3.3.2.1: [40] $\mathbb{T}=\mathbb{R}$, $\alpha=\dfrac{1}{2}$ ve $f(t)=t$ olsun. O halde $\int_1^{10^{2/3}} f(t)\Delta^\alpha(t)=6$ olarak hesaplanır.

Teorem 3.3.2.1: [40] $\alpha\in(0,1]$ olsun. O halde, tüm $f:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ $rd-$ sürekli fonksiyonları ve tüm $t\in\mathbb{T}^\kappa$ elemanları için $T_\alpha(F_\alpha)(t)=f(t)$ eşitliği sağlanacak biçimde bir $F_\alpha:\mathbb{T}\to\mathbb{R}$ fonksiyonu vardır. Bu F_α fonksiyonu, f fonksiyonunun α ilkeli olarak adlandırılır.

İspat: İspatın $\alpha=1$ durumu [26] da verilmiştir. Bu sebeple, burada sadece $\alpha\in(0,1)$ durumu ispat edilecektir. f fonksiyonunun $rd-$ sürekli bir fonksiyon olduğu kabul edilsin. O halde, Teorem 3.1.2 (ii) den f fonksiyonunun regulated bir fonksiyon olduğu söylenebilir. Bu durumda, $F_\alpha(t)=\int f(t)\Delta^\alpha t$ fonksiyonu $\mathbb{T}^\kappa$ üzerinde uyumlu türevlenebilir bir fonksiyon olur.

(3.3.1.6) dan ve Tanım 3.3.2.1 den tüm $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ elemanları için $T_{\alpha}(F_{\alpha})(t) = t^{1-\alpha}(F_{\alpha}(t))^{\Delta} = f(t)$ elde edilir. Böylece ispat biter. □

Aşağıda verilen teorem, zaman skalasında tanımlı α integralin kullanışlı özelliklerini vermesi açısından önemlidir.

Teorem 3.3.2.2: [40] $\alpha \in (0,1]$, $a,b,c \in \mathbb{T}$, $\lambda \in \mathbb{R}$ olsun ve f ve g fonksiyonlarının $rd-$ sürekli fonksiyonlar olduğu kabul edilsin. O halde,

i) $\int_a^b [f(t) + g(t)]\Delta^{\alpha}t = \int_a^b f(t)\Delta^{\alpha}t + \int_a^b g(t)\Delta^{\alpha}t$

ii) $\int_a^b (\lambda f)(t)\Delta^{\alpha}t = \lambda \int_a^b f(t)\Delta^{\alpha}t$

iii) $\int_a^b f(t)\Delta^{\alpha}t = -\int_b^a f(t)\Delta^{\alpha}t$

iv) $\int_a^b f(t)\Delta^{\alpha}t = \int_a^c f(t)\Delta^{\alpha}t + \int_c^b f(t)\Delta^{\alpha}t$

v) $\int_a^a f(t)\Delta^{\alpha}t = 0$

eşitlikleri sağlanır. Ayrıca,

vi) Tüm $t \in [a,b]$ elemanları için $|f(t)| \le g(t)$ olacak biçimde bir $g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu varsa, o halde $\left|\int_a^b f(t)\Delta^{\alpha}t\right| \le \int_a^b g(t)\Delta^{\alpha}t$ eşitsizliği sağlanır.

vii) Tüm $t \in [a,b]$ elemanları için $f(t) > 0$ oluyorsa, $\int_a^b f(t)\Delta^{\alpha}t \ge 0$ olur.

İspat: Teoremde verilen özellikler Tanım 3.3.2.1 ve Tanım 3.3.2.2 den, delta integralin benzer özelliklerinden ve ayrıca alt bölüm 3.3.1 de verilen zaman skalası üzerinde tanımlı uyumlu türevin özelliklerinden kolayca elde edilir. □

Teorem 3.3.2.3: [40] Eğer $f : \mathbb{T}^{\kappa} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $rd-$ sürekli bir fonksiyonsa ve $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ ise, o halde $\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta^{\alpha}s = f(t)\mu(t)t^{1-\alpha}$ eşitliği sağlanır.

İspat: f fonksiyonu $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde $rd-$ sürekli bir fonksiyon olsun. O halde, f aynı zamanda regulated bir fonksiyondur. Tanım 3.3.2.1 ve Teorem 3.3.2.1 den

$$\int_t^{\sigma(t)} f(s)\Delta^{\alpha}s = F_{\alpha}(\sigma(t)) - F(t) = T_{\alpha}(F_{\alpha})(t)\mu(t)t^{1-\alpha} = f(t)\mu(t)t^{1-\alpha}$$

eşitliği sağlanacak biçimde bir F_α ilkel fonksiyonunun var olduğu söylenebilir. Böylece ispat biter. □

Teorem 3.3.2.4: [40] $\mathbb{T}$ herhangi bir zaman skalası olsun ve $a<b$ olmak üzere $a,b\in\mathbb{T}$ alınsın. Tüm $t\in[a,b]\cap\mathbb{T}$ elemanları için $T_\alpha f(t)\geq 0$ eşitsizliği sağlanıyorsa, o halde f fonksiyonu $[a,b]\cap\mathbb{T}$ üzerinde artan bir fonksiyondur.

İspat: $T_\alpha(f)$ türevinin $[a,b]\cap\mathbb{T}$ üzerinde mevcut olduğu ve tüm $t\in[a,b]\cap\mathbb{T}$ elemanları için $T_\alpha(f)(t)\geq 0$ eşitsizliğinin sağlandığı kabul edilsin. O halde, Teorem 3.2.1.1 (i) den $T_\alpha(f)$ fonksiyonunun $[a,b]\cap\mathbb{T}$ üzerinde sürekli olduğu söylenebilir. Dolayısıyla, Teorem 3.3.2.2 (vii) den $a\leq s\leq t\leq b$ eşitsizliğini sağlayan s ve t ler için $\int_s^t T_\alpha f(\xi)\Delta^\alpha(\xi)\geq 0$ elde edilir. Tanım 3.3.2.2 den $f(t)=f(s)+\int_s^t T_\alpha f(\xi)\Delta^\alpha\xi\geq f(s)$ bulunur ve böylece ispat biter. □

4. BULGULAR VE TARTIŞMA

Bu bölüm, tezin özgün kısmıdır ve dört alt bölümden oluşur. Bu bölümde, ilerleyen alt bölümlerde işe yarayacak bazı hatırlatmaların yapıldığı Giriş bölümünden sonra, uyumlu dinamik bir operatör yardımıyla oluşturulan bir başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği araştırılmış ve bu operatör ile ifade edilen denklemin çözümlerini inşa etmeye yarayan bir yöntemden bahsedilmiştir. Bundan sonra, ele alınan uyumlu dinamik operatör için Lagrange özdeşliği ispatlanmıştır. Daha sonra, ikinci mertebeden uyumlu özeşlenik dinamik bir denklem ve sınır koşulları ile oluşturulan bir sınır değer problemi ele alınmış, bu problemin bazı özdeğer özellikleri incelenmiş ve Green teoremi ispatlanmıştır.

Burada, tezin bundan sonraki kısmında, 3.3 numaralı alt bölümde yararlanılan [40] numaralı kaynağın aksine, zaman skalasında tanımlı uyumlu türevi belirtmek için $f^{\Delta_\alpha}(t)$ gösteriminin kullanıldığını belirtmekte yarar vardır.

4.1 Giriş

Bu tezde, herhangi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tanımlanan

$$Lx(t) = \left(px^{\Delta_\alpha}\right)^{\Delta_\alpha}(t) + q(t)x^{\sigma}(t) \tag{4.1.1}$$

ikinci mertebeden uyumlu dinamik operatörü ele alınacaktır, burada tüm $t \in \mathbb{T}$ elemanları için $p(t) \neq 0$ olduğu kabul edilecektir ve ayrıca p ve q fonksiyonlarının $rd-$ sürekli fonksiyonlar olduğu varsayılacaktır.

Daha önce de belirtildiği gibi, herhangi bir $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde uyumlu türev ilk kez [40] çalışmasında aşağıdaki gibi tanımlanmıştır:

$$f^{\Delta_\alpha}(t) = \begin{cases} \dfrac{f(\sigma(t)) - f(t)}{\mu(t)} t^{1-\alpha}, & \sigma(t) > t, \\ \lim\limits_{s \to t} \dfrac{f(t) - f(s)}{t - s} t^{1-\alpha}, & \sigma(t) = t. \end{cases} \tag{4.1.2}$$

Ayrıca, eğer f fonksiyonu bir $t \in \mathbb{T}^{\kappa}_{[0,\infty]}$ sağa saçılmış noktasında Δ türevlenebilirse, yukarıdaki tanımdan f fonksiyonunun uyumlu türevlenebilir olduğu ve $f^{\Delta}(t) = \dfrac{f^{\sigma}(t) - f(t)}{\sigma(t) - t}$ olmak üzere

$$f^{\Delta_\alpha}(t) = t^{1-\alpha} f^{\Delta}(t) \tag{4.1.3}$$

eşitliğinin sağlandığını söylemek mümkündür. Burada, bu bölümün devamında oldukça fazla kullanılacak olan

$$f(\sigma(t)) = f(t) + \mu(t) t^{\alpha-1} f^{\Delta_\alpha}(t) \tag{4.1.4}$$

formülünü de hatırlatmakta yarar vardır.

Bunlara ek olarak, $f, g : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının α mertebeden uyumlu türevlenebilir olmaları durumunda $fg : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonunun da α mertebeden uyumlu türevlenebilir olduğu ve

$$(fg)^{\Delta_\alpha} = f^{\Delta_\alpha} g + (f \circ \sigma) g^{\Delta_\alpha} = f^{\Delta_\alpha} (g \circ \sigma) + f g^{\Delta_\alpha} \tag{4.1.5}$$

eşitliğinin sağlandığı, ayrıca f ve g fonksiyonlarının sürekli fonksiyonlar olması durumunda $\dfrac{f}{g}$ fonksiyonunun α mertebeden uyumlu türevlenebilir olduğu ve tüm $t \in \mathbb{T}^\kappa$ noktaları için $g(t)g(\sigma(t)) \neq 0$ iken

$$\left(\frac{f}{g}\right)^{\Delta_\alpha} = \frac{f^{\Delta_\alpha} g - f g^{\Delta_\alpha}}{g(g \circ \sigma)} \tag{4.1.6}$$

formülünün geçerli olduğu söylenebilir.

4.2 Uyumlu Dinamik Denklem

Bu bölümde, (4.1.1) ikinci mertebeden α uyumlu dinamik operatörü ele alınacaktır. Bu operatör yardımıyla tanımlanan bir başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği araştırılacak ve daha sonra aynı operatör yardımıyla verilen denklemin çözümlerini inşa etmeye yarayan bir yöntemden bahsedilecektir.

Teorem 4.2.1: $f \in C_{rd}$, $t_0 \in \mathbb{T}$ olsun ve x_0 ve x_0^α sayılarının herhangi sayılar olduğu kabul edilsin. Bu durumda,

$$Lx(t) = f(t), \qquad x(t_0) = x_0, \qquad x^{\Delta_\alpha}(t_0) = x_0^\alpha \tag{4.2.1}$$

başlangıç değer probleminin $\mathbb{T}$ zaman skalası üzerinde tek bir çözümü vardır.

İspat $y(t)$ fonksiyonu $y(t) = p(t) x^{\Delta_\alpha}(t)$ eşitliği ile tanımlansın. Buradan kolayca

$$x^{\Delta_\alpha}(t) = \frac{y(t)}{p(t)} \tag{4.2.2}$$

yazılabilir. (4.1.1), (4.1.3), (4.1.4) ve (4.2.1) ifadelerinin yardımıyla

$$\begin{aligned} y^{\Delta_\alpha}(t) = (p x^{\Delta_\alpha})^{\Delta_\alpha}(t) = f(t) - q(t) x^\sigma(t) &= f(t) - q(t)\left(x(t) + \mu(t) t^{\alpha-1} x^{\Delta_\alpha}(t)\right) \\ &= f(t) - q(t)x(t) - q(t)\mu(t) t^{\alpha-1} x^{\Delta_\alpha}(t) \\ &= f(t) - q(t)x(t) - q(t)\mu(t) t^{\alpha-1} \frac{y(t)}{p(t)} \\ &= -q(t)x(t) - \frac{q(t)\mu(t) t^{\alpha-1}}{p(t)} y(t) + f(t) \end{aligned}$$

elde edilir. $z(t)=\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t) \end{bmatrix}$ olduğu kabul edilsin. O halde (4.1.3) kullanılarak

$$t^{\alpha-1}z^{\Delta}(t)=t^{\alpha-1}\begin{bmatrix} x^{\Delta}(t) \\ y^{\Delta}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} x^{\Delta_\alpha}(t) \\ y^{\Delta_\alpha}(t) \end{bmatrix}=\begin{bmatrix} \dfrac{y(t)}{p(t)} \\ f(t)-q(t)x(t)-q(t)\mu(t)t^{\alpha-1}\dfrac{y(t)}{p(t)} \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} \dfrac{y(t)}{p(t)} \\ -q(t)x(t)-q(t)\mu(t)t^{\alpha-1}\dfrac{y(t)}{p(t)} \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

$$=\begin{bmatrix} 0 & \dfrac{1}{p(t)} \\ -q(t) & \dfrac{-q(t)\mu(t)t^{\alpha-1}}{p(t)} \end{bmatrix}\begin{bmatrix} x(t) \\ y(t \end{bmatrix}+\begin{bmatrix} 0 \\ f(t) \end{bmatrix}$$

bulunur. Bu, bileşenleri $rd-$ sürekli fonksiyonlar olan bir dinamik denklemler sistemidir. Bu sistemin çözümünün varlığı ve tekliği [26, Teorem 5.24] den kolaylıkla görülebilir. Böylece ispat biter. □

(4.1.1) uyumlu dinamik operatörü yardımyla tanımlanan $Lx=0$ denkleminin çözümlerini inşa etmek için öncelikle x fonksiyonunun bu denkleminin aşikar olmayan bir çözümü olduğu kabul edilsin. Bu durumda her $t\in\mathbb{T}$ için

$$x^2(t)+(px^{\Delta_\alpha})^2(t)\neq 0$$

eşitliği sağlanır ve

$$x(t)=\rho(t)\sin\varphi(t) \tag{4.2.3}$$

$$p(t)x^{\Delta_\alpha}(t)=\rho(t)\cos\varphi(t) \tag{4.2.4}$$

eşitlikleri sağlanacak biçimde $\rho(t)>0$ ve $0\leq\varphi(t)\leq 2\pi$ reel sayıları bulunabilir. (4.2.3) ve (4.2.4) eşitliklerine Prüfer dönüşümü adı verilir.

Teorem 4.2.2: Eğer x fonksiyonu $Lx=0$ denkleminin aşikar olmayan bir çözümüyse ve ρ ve φ (4.2.3) ve (4.2.4) eşitliklerini sağlıyorsa,

$$\rho^{\Delta_\alpha}=\frac{\rho}{p}\cos\varphi(\sin\varphi)^{\sigma}-\rho q\sin\varphi(\cos\varphi)^{\sigma}-\frac{\rho\mu q t^{\alpha-1}}{p}\cos\varphi(\cos\varphi)^{\sigma}$$
$$-\rho(\sin\varphi)^{\Delta_\alpha}(\cos\varphi)^{\sigma}-\rho(\cos\varphi)^{\Delta_\alpha}(\cos\varphi)^{\sigma} \tag{4.2.5}$$

ve

$$(\sin\varphi)^{\Delta_\alpha}(\cos\varphi)^{\sigma}-(\cos\varphi)^{\Delta_\alpha}(\sin\varphi)^{\sigma}=\frac{1}{p}\cos\varphi(\cos\varphi)^{\sigma}+q\sin\varphi(\sin\varphi)^{\sigma}$$

$$+\frac{\mu q t^{\alpha-1}}{p}\cos\varphi(\sin\varphi)^{\sigma} \qquad (4.2.6)$$

ifadeleri doğrudur.

İspat: (4.2.3) eşitliği için (4.1.5) ile verilen çarpımın türevi kuralı kullanılarak

$$\rho^{\Delta_\alpha}(\sin\varphi)^{\sigma}+\rho(\sin\varphi)^{\Delta_\alpha}=(\rho\sin\varphi)^{\Delta_\alpha}=x^{\Delta_\alpha}=\frac{1}{p}(px^{\Delta_\alpha})=\frac{1}{p}\rho\cos\varphi$$

elde edilir. Aynı yol, (4.2.4) eşitliği için de izlenerek

$$\rho^{\Delta_\alpha}(\cos\varphi)^{\sigma}+\rho(\cos\varphi)^{\Delta_\alpha}=(\rho\cos\varphi)^{\Delta_\alpha}=(px^{\Delta_\alpha})^{\Delta_\alpha}=-q(x+\mu t^{\alpha-1}x^{\Delta_\alpha})=-qx-\frac{\mu q t^{\alpha-1}}{p}(px^{\Delta_\alpha})$$

$$=-q\rho\sin\varphi-\frac{\mu q t^{\alpha-1}}{p}\rho\cos\varphi$$

bulunur. Burada, x fonksiyonunun $Lx=0$ denkleminin bir çözümü olduğu göz önüne alınmış ve (4.1.4) formülünden faydalanılmıştır. Dolayısıyla, aşağıdaki iki eşitlik yazılabilir:

$$\rho^{\Delta_\alpha}(\sin\varphi)^{\sigma}+\rho(\sin\varphi)^{\Delta_\alpha}=\frac{1}{p}\rho\cos\varphi\,, \qquad (4.2.7)$$

$$\rho^{\Delta_\alpha}(\cos\varphi)^{\sigma}+\rho(\cos\varphi)^{\Delta_\alpha}=-qp\sin\varphi-\frac{\mu q t^{\alpha-1}}{p}\rho\cos\varphi\,. \qquad (4.2.8)$$

(4.2.7) eşitliği $(\sin\varphi)^{\sigma}$ ve (4.2.8) eşitliği $(\cos\varphi)^{\sigma}$ ile çarpılarak ve elde edilen eşitlikler birbirleriyle toplanarak (4.2.5) ifadesine ulaşılır. (4.2.6) yı elde etmek için ise, (4.2.7) eşitliği $(\cos\varphi)^{\sigma}$ ile ve (4.2.8) eşitliği ise $-(\sin\varphi)^{\sigma}$ ile çarpılmalı ve yine elde edilen eşitlikler birbirleriyle toplandıktan sonra, eşitliklerin her iki yanı $\rho>0$ ile bölünmelidir. Böylece ispat biter. □

Burada, φ için yazılan *(4.2.6) uyumlu dinamik denkleminin* ρ sayısından bağımsız olduğuna dikkat etmek gerekir. *(4.2.6) uyumlu dinamik denklemi* için bir çözüm elde etmek kolay olmasa da, bu denklem için bir çözüm elde edilmesi durumunda ρ için yazılan *(4.2.5) uyumlu dinamik denklemi* için de bir çözüm elde etmek oldukça kolay olacaktır.

4.3 Uyumlu Lagrange Özdeşliği

Bu bölümde, bir sonraki bölümde kullanılacak olan bazı tanım ve lemmalar verilecektir. Bunun için öncelikle $\alpha-$ Wronskiyen determinantından ve bu determinantın bir özelliğinden bahsedilecek, daha sonra iki fonksiyonun Lagrange parantezi tanımı verilecek ve en son uyumlu Lagrange özdeşliği ispatlanacaktır.

Tanım 4.3.1: Eğer $x, y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde uyumlu türevlenebilirse, o halde bu iki fonksiyonun $\alpha -$ Wronskiyeni tüm $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ elemanları için

$$W_{\alpha}(x, y)(t) = \det \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ x^{\Delta_{\alpha}}(t) & y^{\Delta_{\alpha}}(t) \end{pmatrix}$$

eşitliği ile tanımlanır.

Aşağıdaki lemma, Teorem 4.3.1 in ispatında kullanılması açısından önemlidir.

Lemma 4.3.1: Eğer $x, y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde uyumlu türevlenebilir fonksiyonlarsa, o halde tüm $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ elemanları için

$$W_{\alpha}(x, y)(t) = \det \begin{pmatrix} x^{\sigma}(t) & y^{\sigma}(t) \\ x^{\Delta_{\alpha}}(t) & y^{\Delta_{\alpha}}(t) \end{pmatrix}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: Tüm $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ elemanları için, (4.1.4) eşitliğinden

$$\det \begin{pmatrix} x^{\sigma}(t) & y^{\sigma}(t) \\ x^{\Delta_{\alpha}}(t) & y^{\Delta_{\alpha}}(t) \end{pmatrix} = \det \begin{pmatrix} x(t) + \mu(t) t^{\alpha-1} x^{\Delta_{\alpha}}(t) & y(t) + \mu(t) t^{\alpha-1} y^{\Delta_{\alpha}}(t) \\ x^{\Delta_{\alpha}}(t) & y^{\Delta_{\alpha}}(t) \end{pmatrix}$$

$$= \det \begin{pmatrix} x(t) & y(t) \\ x^{\Delta_{\alpha}}(t) & y^{\Delta_{\alpha}}(t) \end{pmatrix} = W_{\alpha}(x, y)(t)$$

elde edilir. Böylece ispat biter. □

Aşağıda verilen iki uyumlu türevlenebilir fonksiyonun Lagrange parantezi tanımı, uyumlu Lagrange özdeşliğini ispatlamada yardımcı olması açısından önemlidir.

Tanım 4.3.2: Eğer $x, y : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $\mathbb{T}^{\kappa}$ üzerinde uyumlu türevlenebilir fonksiyonlar ise bu iki fonksiyonun Lagrange parantezi tüm $t \in \mathbb{T}^{\kappa}$ elemanları için

$$\{x; y\}(t) = p(t) W_{\alpha}(x, y)(t)$$

eşitliği ile tanımlıdır.

$x^{\Delta_{\alpha}} : \mathbb{T}^{\kappa^2} \to \mathbb{R}$ fonksiyonları $rd-$sürekli fonksiyonlar olacak biçimdeki tüm $x : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonlarının kümesi $\mathbb{D}$ ile gösterilsin. Bu durumda aşağıdaki teorem verilebilir.

Teorem 4.3.1: (Uyumlu Lagrange Özdeşliği) $x, y \in \mathbb{D}$ olsun. Bu durumda, tüm $t \in \mathbb{T}^{\kappa^2}$ elemanları için

$$x^{\sigma}(t)Ly(t) - y^{\sigma}(t)Lx(t) = \{x; y\}^{\Delta_\alpha}(t) \tag{4.3.1}$$

eşitliği sağlanır.

İspat: (4.1.5) ile verilen çarpımın uyumlu türevi formülünden tüm $t \in \mathbb{T}^{\kappa^2}$ elemanları için

$$\{x; y\}^{\Delta_\alpha} = \{xpy^{\Delta_\alpha} - px^{\Delta_\alpha}y\}^{\Delta_\alpha}$$

$$= x^{\sigma}(py^{\Delta_\alpha})^{\Delta_\alpha} + (py^{\Delta_\alpha})x^{\Delta_\alpha} - y^{\sigma}(px^{\Delta_\alpha})^{\Delta_\alpha} - y^{\Delta_\alpha}(px^{\Delta_\alpha})$$

$$= x^{\sigma}(py^{\Delta_\alpha})^{\Delta_\alpha} - y^{\sigma}(px^{\Delta_\alpha})^{\Delta_\alpha}$$

$$= x^{\sigma}(py^{\Delta_\alpha})^{\Delta_\alpha} - y^{\sigma}(px^{\Delta_\alpha})^{\Delta_\alpha} + qx^{\sigma}y^{\sigma} - qx^{\sigma}y^{\sigma}$$

$$= x^{\sigma}\left((py^{\Delta_\alpha})^{\Delta_\alpha} + qy^{\sigma}\right) - y^{\sigma}\left((px^{\Delta_\alpha})^{\Delta_\alpha} + qx^{\sigma}\right)$$

$$= x^{\sigma}Ly - y^{\sigma}Lx$$

elde edilir ve böylece ispat biter. □

4.4 Uyumlu Bir Sınır Değer Problemi ve Green Fonksiyonu

Bu bölümde aşağıdaki sınır değer problemi ele alınacaktır:

$$Lx + \lambda x^{\sigma} = 0, \qquad R_a(x) = R_b(x) = 0. \tag{4.4.1}$$

Burada $q : \mathbb{T} \to \mathbb{R}$ fonksiyonu $rd-$sürekli bir fonksiyon olmak üzere L operatörü $Lx = x^{\Delta_\alpha \Delta_\alpha} + qx^{\sigma}$ biçiminde tanımlanmıştır, ayrıca $\gamma_1, \gamma_2, \delta_1, \delta_2 \in \mathbb{R}$ ve $(\gamma_1^2 + \gamma_2^2)(\delta_1^2 + \delta_2^2) \neq 0$ olmak üzere sınır koşulları

$$R_a(x) = \gamma_1 x(\rho(a)) + \gamma_2 x^{\Delta_\alpha}(\rho(a)),$$

ve

$$R_b(x) = \delta_1 x(\rho(b)) + \delta_2 x^{\Delta_\alpha}(\rho(b))$$

eşitlikleri ile verilmiştir.

(4.4.1) sınır değer probleminin sıfırdan farklı bir x çözümü bulunabilecek biçimdeki $\lambda \in \mathbb{R}$ sayısına bu sınır değer probleminin bir özdeğeri denir. Bu durumda x fonksiyonu (4.4.1) sınır değer probleminin λ özdeğerine karşılık gelen bir özfonksiyonu olur.

x ve y fonksiyonlarının $[\rho(a),b]$ aralığı üzerindeki iç çarpımı $\langle x,y\rangle = \int_{\rho(a)}^{b} x(t)y(t)\Delta_\alpha t := \int_{\rho(a)}^{b} x(t)y(t)t^{\alpha-1}\Delta t$

eşitliği ile tanımlanır. $\langle x,y\rangle = 0$ olması durumunda x ve y fonksiyonları $[\rho(a),b]$ aralığı üzerinde ortogonal fonksiyonlar olarak adlandırılır. x fonksiyonunun normu $\|x\| = \sqrt{\langle x,x\rangle}$ eşitliği ile verilir.

Teorem 4.4.1(Green teoremi) $x,y\in\mathbb{D}$ olsun. Bu durumda,

$\langle x^\sigma, Ly\rangle - \langle y^\sigma, Lx\rangle = \{x;y\}(b) - \{x;y\}(a)$

eşitliği sağlanır.

İspat: Gösterilmek istenen eşitlik, (4.3.1) eşitliği ile verilen uyumlu Lagrange özdeşliğinin her iki tarafının $[a,b]$ aralığı boyunca integrali alınarak ve iç çarpım tanımı kullanılarak kolayca elde edilir. □

$R_a(x) = R_a(y) = 0$ ise $W_\alpha(x,y)(\rho(a)) = 0$ olduğu ve $R_b(x) = R_b(y) = 0$ olduğunda ise $W_\alpha(x,y)(b) = 0$ eşitliğinin sağlandığı kolayca görülür. Gerçekten, Tanım 4.3.1 den

$$W_\alpha(x,y)(\rho(a)) = \det\begin{pmatrix} x(\rho(a)) & y(\rho(a)) \\ x^{\Delta_\alpha}(\rho(a)) & y^{\Delta_\alpha}(\rho(a)) \end{pmatrix} = \det\begin{pmatrix} -\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} x^{\Delta_\alpha}(\rho(a)) & -\dfrac{\gamma_2}{\gamma_1} y^{\Delta_\alpha}(\rho(a)) \\ x^{\Delta_\alpha}(\rho(a)) & y^{\Delta_\alpha}(\rho(a)) \end{pmatrix} = 0$$

sağlanır. $R_b(x) = R_b(y) = 0$ eşitliği ise $W_\alpha(x,y)(b) = 0$ olmasından elde edilir.

Şimdi (4.4.1) sınır değer probleminin özdeğerlerinin bir özelliğinden bahsedilecektir. Bunun için $\lambda\in\mathbb{R}$ olmak üzere

$$Lx + \lambda x^\sigma = 0, \qquad x(\rho(a)) = \gamma_2, \qquad x^{\Delta_\alpha}(\rho(a)) = -\gamma_1 \tag{4.4.2}$$

uyumlu başlangıç değer probleminin tek çözümü (bknz. Teorem 4.2.1) $x(\cdot,\lambda)$ ile gösterilecek ve ayrıca $\Lambda(\lambda) = R_b(x(\cdot,\lambda))$ olduğu göz önünde bulundurulacaktır.

Teorem 4.4.2: λ sayısının (4.1.1) sınır değer probleminin bir özdeğeri olabilmesi için gerek ve yeter koşul $\Lambda(\lambda) = 0$ olmasıdır.

İspat: Eğer $R_b(x(\cdot,\lambda)) = 0$ ise, o halde $x = x(\cdot,\lambda)$ fonksiyonu

$$Lx + \lambda x^\sigma = 0, \qquad R_a(x) = R_b(x) = 0$$

eşitliklerini sağlar, yani λ sayısı (4.4.1) sınır değer probleminin bir özdeğeri olur. Tersine, λ sayısı (4.4.1) sınır değer probleminin bir özdeğeri ve x fonksiyonunun da bu özdeğere karşılık gelen bir özfonksiyon olduğu kabul edilirse, (4.4.2) uyumlu başlangıç değer probleminin çözümünün tekliğinden (burada $R_a(x)=0$ olduğuna dikkat ediniz) $x=cx(\cdot,\lambda)$ eşitliğinin $c=\dfrac{\gamma_2 x(\rho(a))-\gamma_1 x^{\Delta_\alpha}(\rho(a))}{\gamma_1^2+\gamma_2^2}$ iken sağlandığı söylenebilir. Bu durumda, $R_b(x(\cdot,\lambda))=0$ olur ki bu elde edilmek istenen sonuçtur. Böylece ispat biter. □

Teorem 4.4.2 nin ispatı, (4.4.1) sınır değer probleminin özdeğerlerinin basitliğini göstermesi açısından da önemlidir. Ayrıca, Teorem 4.4.1 göz önünde bulundurularak farklı özdeğerlere karşılık gelen özfonksiyonların birbirlerine dik oldukları söylenebilir.

5. SONUÇLAR ve ÖNERİLER

5.1 Sonuçlar

Bu tezde, zaman skalası üzerinde uyumlu türev operatörü yardımıyla tanımlanan ikinci mertebedenuyumlu dinamik bir operatör ele alınmıştır. Bu operatör yardımıyla oluşturulmuş bir başlangıç değer probleminin çözümünün varlığı ve tekliği araştırıldıktan sonra, çözümleri inşa etmeye yarayan bir yöntemden bahsedilmiştir. Ele alınan uyumlu dinamik operatör için Lagrange özdeşliği ispatlanmıştır. Daha sonra, ikinci mertebeden uyumlu özeşlenik dinamik bir denklem ve sınır koşulları ile oluşturulan bir sınır değer problemi ele alınmıştır. Bu problemin bazı özdeğer özellikleri incelenmiş ve Green teoremi ispatlanmıştır. Tezin "Bulgular ve Tartışma" kısmında verilen sonuçlar 29 Şubat-1 Mart 2020 tarihlerinde Cahit Arf'ın anısına Boğaziçi Üniversitesi'nde düzenlenen Bahar Matematik Buluşmaları'nda sunulmuştur. Buna ek olarak, tezden elde edilen sonuçlarla hazırlanan bir makale uluslararası alan indekslerince taranan Journal of Universal Mathematics dergisine gönderilmiş olup, makalenin incelemesi, tezin savunulduğu tarihte halen devam etmektedir. Bu tez çalışmasından elde edilen özgün sonuçlar, matematikçiler için yardımcı kaynak rolü oynayacak niteliktedir.

5.2 Öneriler

Zaman skalası üzerinde tanımlanan uyumlu dinamik denklemler farklı sınır koşullarıyla ele alınarak oluşturulan farklı sınır değer problemlerinin özellikleri incelenerek literatüre katkı sağlanabilir.

KAYNAKLAR

[1] Khalil, R., Horani, M. Al., Yousef, A., Sababheh, M. (2014). A new definition of fractional derivative. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 264, 65-70.

[2] Hilger, S. (1988). *Ein Mabkettenkalkül mit anvendug auf zentrumsmannigfaltigkeiten.* Doktora tezi. Universitat Würzburg.

[3] Oldham, K. B., ;Spainer, J. (1974). *The fractional calculus, theory and applications of differentiation and integration to arbitrary order.* Academic Press: New York.

[4] Miller, K. S.,(1993). *An introduction to fractional calculus and fractional differential equations*. J. Wiley and Sons: New York.

[5] Podlubny, I.(1999). *Fractional differential equations.* Academic Press:USA.

[6] Kilbas, A., Srivastava, H., Trujillo, J. (2006). *Theory and applications of fractional differential equations.* Math. Studies. North-Holland: New York.

[7] Schneider, W., Wyss, W. (1989). Fractional diffusion and wave equations. *J.Math. Phys.,* 30(1), 134-144.

[8] Kulish., V. V., Lage, J. L. (2002). Application of fractional calculus to fluid mechanics. *J. Fluids Eng.,* 124(3), 803-806.

[9] Magin, R. L. (2010). Fractional calculus models of complex dynamics in biological tissues. *Comput. Math. Appl.,* 59(5), 1586-1593.

[10] Balachandran, K., Kiruthika, S., Rivero, M., Trujillo, J. J. (2010). Existence of solutions for fractional delay integrodifferential equations. *Journal of Applied Nonlinear Dynamics,* 59(5), 1586-1593.

[11] Abdeljawad, T. (2015). On conformable fractional calculus. *Journal of Computational and Applied Mathematics,* 27(9), 57-66.

[12] Batarfi, H., Losada, J., Nieto, J. J., Shammakh, W. (2015). Three-point boundary value problems for conformable fractional differential equations. *Journal of Function Spaces*, 2015, Article ID 706383, 6 pages, doi:10.1155/2015/706383

[13] Kurt, A., Çenesiz, Y., Taşbozan, O. (2015). On the solution of Burger's equation with the new fractional derivative. *Open Phys*., 13, 355-360, doi:10.1515/phys-2015-0045

[14] Çenesiz, Y., Kurt, A. (2015). The new solution of time fractional wave equation with conformable fractional derivative definition. *Journal of New Theory*, 7, 79-85.

[15] Gökdoğan, A., Ünal, E., Çelik, E. (2016). Existence and uniqueness theorems for sequential linear conformable fractional differential equations. *Miskolc Mathematical Notes*, 17 (1), 267-279, doi: 10.18514/MMN.2016.1635

[16] Iyiola, O. S., Nwaeze, E. R. (2016). Some new results on the new conformable fractional calculus with application using D'Alambert approach. *Progr. Fract. Differ. Appl.*, 2(2), 115-122, doi:10.18576/pfda/020204

[17] Pospisil, M., Skripkova, L. P. (2016). Sturm's theorems for conformable fractional differential equations. *Math. Commun.*, 21, 273-281.

[18] Khudair, W. R. (2017). On solving comformable fractional differential equations. *Journal of Progressive Research in Mathematics*, 12(5), 2073-2079.

[19] Al-Refai, M., Abdeljawad, T. (2017). Fundamental results of conformable Sturm-Liouville eigenvalue problems. *Complexity*, 2017, Article ID 3720471, 7 pages, doi:10.1155/2017/3720471

[20] Silva, F. S., Moreina, D. M., Moret, M. A. (2018). Conformable Laplace transform of fractional differential equations. *Axioms*, 7(55), doi:10.3390/axioms7030055

[21] Erbey, N. (2019). *Uyumlu kesirli bir dalga denklemi üzerine.* Yükseklisans tezi, Mersin Üniversitesi.

[22] Cetinkaya, F. A. (2018). Uyumlu kesirli bir dalga denklemi üzerine. *Süleyman Demirel Üniversitesi Fen Bilimleri Enstitüsü Dergisi*, 22(3), 1110-1113, doi:10.19113/sdufenbed.430296

[23] Mortazaasl, H., Akbarfam, A. J. (2019). Trace formula and inverse nodal problem for a conformable fractional Sturm-Liouville problem, *Inverse Problems in Science and Engineering*, doi:10.1080/17415977.2019.1615909

[24] Keskin, B. (2020). Inverse problems for one dimensional conformable fractional Dirac type integro differential system, *Inverse Problems*, in press, doi:10.1088/1361-6420/ab7e03

[25] Kaymakçalan, B., Lakshmikantham, V., Sivasundaram, S. Dynamic Systems on Measure Chains, Kluwer Academic Publishers, Boston, 1996.

[26] Bohner, M., Peterson A. Dynamic Equations on Time Scales, Birkhauser, Boston, 2001.

[27] Bohner, M., Peterson A. Advances in Dynamic Equations on Time Scales, Birkhauser, Boston, 2003.

[28] Atıcı, M. F., Guseinov, G. S. (2002). On Green's functions and positive solutions for boundary value problems on time scales. *J. Comput. Appl. Math.*, 141(1-2), 75-99.

[29] Anderson, D. R. (2002). Eigenvalue intervals for a two-point boundary value problem on a measure chain. *Journal of Computational and Applied Mathematics*, 141 (1-2), 57-64.

[30] Henderson, J., Peterson, A., Tisdell, C. C., (2004). On the existence and uniqueness of solutions to boundary value problems on time scale. *Advances in Difference Equations*, 2004(2), 93-109.

[31] Agarwal, R. P., Bohner, M., O'Regan, D., Peterson, A. (2006). Dynamic equations on time scales: A survey. *J. Comput. Appl. Math.*, 141(1-2), 1-26.

[32] Bohner, M., Luo, H. (2006). Singular second-order multipoint dynamic boundary value problems with mixed derivatives. *Advances in Difference Equations*, 2006, Article ID 54989, 15 pages.

[33] Guseinov G. S. (2007). Eigenfunction expansions for a Sturm-Liouville problem on time scales. *Int. J. Diff. Equ.*, 2, 93-104.

[34] Rynne, B. P. (2007). L^2 spaces and boundary value problems on time scales. *J. Math. Anal. Appl.* 238, 1217-1236.

[35] Bohner, M., Guseinov, G. Sh., Karpuz, B. (2011). Properties of the Laplace transform on time scales with arbitrary graininess. *Integral Transforms Spec. Funct.*, 22(11), 785-800.

[36] Ahmadkonlu, A., Jahanshahi, M. (2012). On the existence and uniqueness of solution of initial value problem for fractional order differential equations on time scales. *Bull. Iran Math.* Soc., 38, 241-252.

[37] Erbe, L., Mert, R., Peterson, A. (2012). Spectral parameter power series for Sturm-Liouville equations on time scales. *Appl. Math. Comput.* 218, 7671-7678.

[38] Benkhettou, N., Hammoudi, A. Torres, D. F. M. (2016) Existence and uniqueness of solution for a fractional Riemann-Liouville initial value problems on time scales. *J. King Saud. Univer. Sci.*, 28, 87-92.

[39] Gulsen, T. Yılmaz, E. (2017) Spectral theory of Dirac system on time scales. *Appl. Anal.*, 96, 2684-2694.

[40] Benkhettou, N., Hassani, S., Torres, D. F. M. (2016). A conformable calculus on arbitrary time scales. J. King Saud. Univ. Sci.,Special Issue on Fractional Calculus, 28(1), 93-98

[41] Wang, Y., Zhou, J., Li, Y. (2016). Fractional Sobolev's spaces on time scales via conformable fractional calculus and their applicaiton to a fractional differential equation on time scales. Advances in Mathematical Physics, 2016, Article ID 9636491, 21 pages, doi:10.1155/2016/9636491

[42] Gülşen, T., Yılmaz, E., Göktaş, S. (2017). Conformable fractional Dirac system on time scales. Journal of Inequalities and Applications, 2017(161), doi:10.1186/s13660-017-1434-8

[43] Zhang, C., Sun, S. (2017). Sturm-Picone comparison theorem of a kind of conformable fractional differential equations on time scales. J. Appl. Math. Comput., 55, 191-203, doi:10.1007/s12190-01-1032-9

[44] Bayour, B. Hammoudi, A., Torres, D. F. M. (2018). A truly conformable calculus on time scales. Glob. Stoch. Anal., 5(1), 1-14.

[45] Feng, Q., Meng, F. (2018). Oscillation results for a fractional order dynamic equation on time scales with conformable fractional derivative. Advances in Difference Equations, 2018(193), doi:10.1186/s13662-018-1643-6

[46] Gülşen, T., Yılmaz, E., Kemaloğlu, H. (2018). Conformable fractional Sturm-Liouville equation and some existence results on time scales. Turkish Journal of Mathematics, 2, 1348-1360, doi:10.3906/mat-1704-120

[47] Bohner, M., Hatipoğlu, V. F. (2019). Dynamic Cobweb models with conformable fractional derivatives. Nonlinear Analysis: Hybrid Systems, 32, 157-167.

[48] Bendouma, B., Hammoudi, A. (2019). Nonlinear functional boundary value problems for conformable fractional dynamic equations on time scales. Mediterr. J. Math., 16 (25).

ÖZGEÇMİŞ

Adı ve Soyadı **:** Zeki CEYLAN

Doğum Tarihi **:** 08.09.1995

E-mail **:** z2.ceylann@gmail.com

Öğrenim Durumu **:**

Derece	**Bölüm/Program**	**Üniversite**	**Yıl**
Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2013-2017
Yüksek Lisans	Matematik	Mersin Üniversitesi	2017-2020

ESERLER (Makaleler ve Bildiriler)

Makale:

1. Ceylan, Z. Spectral properties of a conformable boundary value problem on time scales. Journal of Universal Mathematics, (hakem sürecinde)

Bildiri:

1. Ceylan, Z., Zaman Skalasında Tanımlı Bir Sınır Değer Probleminin Spektral Özellikleri, *Bahar Matematik Buluşmaları, Cahit Arf'ın Anısına,* Boğaziçi Üniversitesi, İstanbul, 29 Şubat-1 Mart 2020.