İLKÖĞRETİM BEŞİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN ÖRÜNTÜLERE İLİŞKİN ANLAMA VE KAVRAMA BİÇİMLERİNİN BELİRLENMESİ

Dilek TANIŞLI

Doktora Tezi

Haziran 2008

İLKÖĞRETİM BEŞİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN ÖRÜNTÜLERE İLİŞKİN ANLAMA VE KAVRAMA BİÇİMLERİNİN BELİRLENMESİ

Dilek TANIŞLI

DOKTORA TEZİ
İlköğretim Anabilim Dalı
Sınıf Öğretmenliği Doktora Programı
Danışman: Prof. Dr. Aynur ÖZDAŞ

Eskişehir
Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü
2008

Bu Tez Çalışması Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu Başkanlığı Tarafından Desteklenmiştir. Proje No: 060531

DOKTORA TEZ ÖZÜ

İLKÖĞRETİM BEŞİNCİ SINIF ÖĞRENCİLERİNİN ÖRÜNTÜLERE İLİŞKİN ANLAMA VE KAVRAMA BİÇİMLERİNİN BELİRLENMESİ

Dilek TANIŞLI
İlköğretim Anabilim Dalı Sınıf Öğretmenliği Doktora Programı
Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü
Danışman: Prof. Dr. Aynur ÖZDAŞ

Bu araştırmanın amacı, ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesidir. Araştırmada verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir. Araştırmanın uygulaması, 2007-2008 öğretim yılı Eskişehir İli Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda toplam 12 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırma verilerinin toplanmasında; veri toplama araçları olarak "klinik görüşme tekniği", "kişisel bilgi formu", "öğrenci günlükleri" ve "araştırmacı günlüğü", verilerin çözümlenmesinde ise, "verinin işlenmesi", "verinin görsel hale getirilmesi", "sonuç çıkarma ve teyit etme" şeklinde üç bölümden oluşan bir sınıflama kullanılmıştır.

Araştırma sonucunda tekrarlanan örüntülerde tekrar biriminin belirlenmesinin, örüntünün sonlu bir adıma devam ettirilebilmesinde, tekrar biriminde yer alan şekiller arası sayısal ilişkinin bulunmasında ve tekrarlanan bir örüntü oluşturulmasında etkili olduğu saptanmıştır. Sayı örüntülerinde tüm etkinliklerde, genel olarak örüntüye ilişkin bir terimin bir önceki terimle ilişkilendirildiği ya da örüntüdeki terimlerin doğasına odaklanıldığı, ancak sayı örüntüsü fonksiyon tablosu biçiminde verilmişse, bunlara ilaveten terim ve terim sırası ilişkisinin kurulabildiği şekil örüntülerinde ise, görsel ve cebirsel yaklaşımın benimsendiği belirlenmiştir. İstenilen örüntünün oluşturulması ya da oluşturulamamasının, sırasıyla örüntünün özelliklerinin dikkate alınmasına bağlı olduğu saptanmıştır. Kullanılan örüntü çeşitlerinde tüm etkinliklerde, en çok "sözlü", "sembol" ve "matematiksel cümle" ifade biçimlerinin kullanıldığı görülmüştür.

Örüntülerde gerçekleştirilen tüm etkinliklerde strateji seçimlerinde öğrenci başarı düzeylerinin etkili olmadığı, buna karşın örüntülerin sunuluş biçiminin (sayı dizisi, fonksiyon tablosu, şekil) etkili olduğu belirlenmiştir. Tekrarlanan, sabit ve artarak değişen örüntülerde aynı amaca yönelik kullanılan stratejilerin ortak bir yapı gösterdiği sadece örüntünün yapısına bağlı farklılaşmaların olduğu saptanmıştır.

Ph. D. DISSERTATION

ABSTRACT

IDENTİFYİNG THE PRIMARY SCHOOL
5th GRADE STUDENTS' COMPREHENSION AND GRASP MANNERS
REGARDING PATTERNS

Dilek TANIŞLI
DEPARTMENT OF PRIMARY EDUCATION- DOCTORAL DEGREE- PROGRAM
IN PRIMARY SCHOOL EDUCATION
Anadolu University Graduate School of Education
Advisor: Prof. Dr. Aynur ÖZDAŞ

The aim of this study is to identifying the primary school 5th grade students' comprehension and grasp manners regarding patterns. The qualitative research method was used in the data collection, analysis and interpretation in this study. The study was conducted in Cumhuriyet primary school in Eskisehir city center in 2006-2007 academic years participating twelve students. The data were collected through "clinical interview techniques", "personal information form", "student journals" and "researcher journals". The collected data were analyzed through classification containing three sections, namely; data reduction, data display, drawing conclusion and verification.

Consequently, it was ascertained that defining the unit of repeat in repeated patterns is effective in extending the pattern to the next step, obtaining the numerical relations between the shapes in the unit of repeat and forming a pattern. In addition, it was detected that in number patterns in all activities the term in the pattern is associated with the previous term or the nature of the terms is focused on. However, it was seen that if the number pattern is given in the form of function table, in addition to them, the

relation of term and term order are established, it was determined that visual and algebraic approaches were adopted in the shape patterns. It was detected that to form or not to form the desired pattern depends on taking account of the features of patterns in sequence. In all kinds of patterns in activities, the most common expression types were respectively “verbal”, “symbol” and “mathematical sentence”. It was determined that the success levels of the students do not have effects on the activities for patterns on the other hand, the presentation forms of the patterns were effective. It was ascertained that in repeated, lineer and quadratic patterns, the strategies used for the same purpose indicate a common structure, but they differ in terms of the structure of the pattern.

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Dilek TANIŞLI'nın "İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Örüntülere İlişkin Anlama ve Kavrama Biçimlerinin Belirlenmesi" başlıklı tezi 13.06.2008 tarihinde, aşağıda belirtilen jüri üyeleri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca İlköğretim Anabilim Dalı Sınıf Öğretmenliği Programında, Doktora tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	İmza
Üye (Tez Danışmanı)	: Prof.Dr.Aynur ÖZDAŞ	....
Üye	: Prof.Dr.Gürhan CAN	....
Üye	: Prof.Dr.Murat ALTUN	....
Üye	: Prof.Dr.Naci ÖZER	....
Üye	: Doç.Dr.Sinan OLKUN	....

Prof.Dr.İlknur KEÇİK
Eğitim Bilimleri Enstitüsü Müdürü

ÖNSÖZ

Örüntüler matematiksel kavramların anlaşılmasında, matematiksel ilişkileri görmede, matematiğin düzenini ve mantığını anlamada anahtar bir faktördür. Aynı zamanda örüntüler, matematiksel düşüncelerin ve ilişkilerin soyutlanmasında, ilişkilerin genellenmesinde, matematiksel akıl yürütme becerilerinin gelişiminde, matematiksel kavramları ve bu kavramları yansıtan temsillerin daha iyi anlaşılabilmesinde etkili bir kavramdır. Örüntüler cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye dayalı kavramların gelişimine de yol açarlar. Bu nedenle okulöncesinden itibaren örüntülerin öğrencilere kazandırılması gereklidir.

Bir çok ülkede ilköğretim programlarının önemli bölümlerinden birini oluşturan örüntülere, Türkiye'de ilk kez 2005'de uygulamaya konulan İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı'nda yer verilmiştir. Örüntüler ile yeni tanışan öğrencilerin onları nasıl yapılandırdıkları, bu yapılandırmada bilişsel süreçlerini nasıl çalıştırdıklarının bilinmesi, onların cebirsel düşünme ve fonksiyon kavramının gelişimini sağlama açısından önemlidir.

Bu araştırma, pek çok kişinin destek ve katkılarıyla gerçekleştirilmiştir. Öncelikle araştırmanın her aşamasında akademik ve manevi desteğini esirgemeyen, değerli katkılarıyla, hoşgörüsü ve sabrından her zaman güç aldığım hocam ve tez danışmanım Sayın Prof. Dr. Aynur ÖZDAŞ'a sonsuz teşekkür ederim.

Tez izleme komitemde yer alan, olumlu eleştirileri ve değerli katkılarıyla, bana yol gösteren hocalarım Sayın Prof. Dr. Gürhan CAN ve Sayın Doç. Dr. Sinan OLKUN'a teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmanın yürütülmesinde önemli katkıları ve her konudaki desteklerinden dolayı değerli arkadaşlarım Öğr. Gör. Nilüfer YAVUZSOY KÖSE ve Arş. Gör. Çiğdem KILIÇ'a sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca araştırma sürecinde desteğini esirgemeyen ve sıkıntılarımı paylaşan değerli arkadaşım Yard. Doç. Dr. Tangül KABAEL'e ve her zaman yanımda olan ve yardımıma koşan değerli arkadaşım Öğr. Gör. Dr. Dilruba KÜRÜM'e teşekkürlerimi sunarım.

Araştırmanın uygulamasının yapıldığı Cumhuriyet İlköğretim Okulu yönetimine, öğretmenlerine ve görüşmeler yaptığım öğrencilere teşekkür ederim.

Araştırma boyunca her türlü desteği ile her zaman yanımda olan sevgili eşim Doç. Dr. Murat TANIŞLI'ya ve onunla geçireceğimiz vakitten çaldığım canım kızım İstem Sena'ya sonsuz teşekkür ederim. Ayrıca varlıklarıyla her zaman güç aldığım sevgili annem ve kardeşime, destekleri ve gösterdikleri sabırdan dolayı teşekkürlerimi sunarım. Son olarak, doktorayı bitirdiğimi görmeyi çok arzu eden, ancak ömrü vefa etmeyen canım babama yaptığım bu çalışmayı atfediyorum.

Dilek TANIŞLI

Eskişehir, 2008

ÖZGEÇMİŞ

Dilek TANIŞLI
İlköğretim Anabilim Dalı Sınıf Öğretmenliği Doktora Programı

Eğitim

Yüksek Lisans	2002	Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri (Eğitim Programları ve Öğretim) Anabilim Dalı
Lisans	1989	Anadolu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi Matematik Bölümü
Lise	1985	Bursa, Yenişehir Osman Gazi Lisesi

İş

1997-	Öğretim Görevlisi. Anadolu Üniversitesi İlköğretim Bölümü
1993-1997	Yunus Emere lisesi
1992-1993	Emek İlköğretim Okulu
1991-1992	Sarıcakaya Lisesi
1990-1991	Anadolu Sistem Dershanesi
1989-1990	Anadolu Bilim Dershanesi

Yayınlar

Uluslararası Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler

Tanisli, D. ve Özdaş, A. (2006). Validity and reliability of pattern test. In G. Nicmans, M. Bosmans, L. Brants (Ed.), *First European Practice-Based and Practitioner Research Conference,* (October 19-21, 2006). Leuven, Belgium.

Kılıç, Ç; **Tanışlı, D**.; Köse Yavuzsoy, N.; Özdaş, A. (2005). Elementary teachers' conceptions about teaching word problem solving. In N. Lederman, L. Flick, V. Amburgey (Ed.), *School Science and Mathematics Association Annual Convention*. (10/11/2005). Fort Worth, Texas.

Ulusal Hakemli Dergilerde Yayınlanan Makaleler

Kılıç, Ç.; Köse Yavuzsoy, N.; **Tanışlı, D.** ve Özdaş, A. (2007). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin süsleme etkinliklerindeki van Hiele geometrik düşünce düzeylerinin belirlenmesi. [Elektronik Dergi]. *İlköğretim-Online,* 6(1), 11-23.

Tanışlı, D. ve Sağlam M. (2006). Matematik öğretiminde işbirlikli öğrenmede bilgi değişme tekniğinin etkililiği. *Eğitimde Kuram ve Uygulama.* 2(2):2-21.

Ulusal Bilimsel Toplantılarda Sunulan ve Bildiri Kitabında Basılan Bildiriler

Özdaş A.; **Tanışlı, D.**; Köse Yavuzsoy, N.; Kılıç, Ç (2007). İlköğretim sınıf öğretmenlerinin matematik dersinde kullandıkları değerlendirme araç ve yöntemlerine ilişkin görüşleri *VI. Ulusal Sınıf Öğretmenliği Eğitimi Sempozyumu Bildiri Kitabı* (124-130). (27-29 Nisan 2007). Eskişehir.

Özdaş, A.; **Tanışlı, D.**; Köse Yavuzsoy, N.; Kılıç, Ç. (2005). Yeni ilköğretim matematik dersi (1.-5. Sınıflar) öğretim programının öğretmen görüşlerine dayalı olarak değerlendirilmesi. *Eğitimde Yansımalar VIII Yeni İlköğretim Programlarını Değerlendirme Sempozyumu (Tekışık Eğitim Araştırma Geliştirme Vakfı ve Erciyes Üniversitesi), Bildiri Kitabı* (239-255). (14/11/2005). Ankara: Sim Matbaası.

Projeler

Tanışlı, D. ve Sağlam M. (2001). Matematik öğretiminde bilgi değişme tekniğinin etkililiği. Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Fonu. Proje No: 0505.

Kişisel Bilgiler

Doğum Yeri ve Yılı	: Bandırma, 1967
Cinsiyet	: Kadın
Yabancı Dil	: İngilizce

İÇİNDEKİLER

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

Sayfa

ŞEKİL LİSTESİ

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

Şekil **Sayfa**

TABLO LİSTESİ

Tablo **Sayfa**

1. GİRİŞ

1.1. Problem

Bilim ve teknolojide olduğu gibi sosyal, kültürel ve ekonomik alanlarda da çok hızlı değişimin yaşandığı dünyamızda, toplumların bu hızlı değişime ayak uydurabilmeleri ve gelişimleri büyük ölçüde eğitim sistemine bağlıdır. Eğitim sistemi içinde yer alan en önemli öğretim basamaklarından biri ilköğretimdir. İlköğretim, öğrencilere yaşamlarında gereksinim duyacakları bilimsel ve toplumsal etkinlikleri sürdürebilmeleri için gerekli olan bilgi, beceri ve davranışların yanı sıra, eğitimleri için de gerekli olan bilişsel becerileri kazandırır. Bu bilişsel beceriler içinde matematikle ilgili olanlar büyük bir yer tutar.

Bir düşünme biçimi ve evrensel bir dil olan matematik; bilimsel araştırmalar, teknolojik gelişmeler ve toplum yaşamı için vazgeçilmez bir alandır. Günlük yaşamımızda karşılaştığımız çeşitli sorunların çözümünde herkes için gerekli olan mantıklı düşünme ve iletişim kurabilme, ilişkileri tanıma ve genelleme yapabilme, yaratıcı ve sezgisel düşünebilme, zihinsel bağımsızlığı geliştirebilme, çözümleyebilme, usavurabilme gibi davranışları geliştiren bir alan olarak matematiğin öğrenilmesi kaçınılmazdır (Aksu, 1991; Çakmak, 1998).

Matematiğin insan yaşamındaki yeri, önemi ve bilimin gelişimine olan katkısı nedeniyle matematik eğitimi, Dünya'da ve Türkiye'de giderek daha fazla önem kazanmaktadır. Matematik eğitimi, bireyleri çeşitli bilgilerle donatmaktan çok onlara karşılaştıkları problemleri çözmede yardımcı olacak yöntem ve becerilerin kazandırılmasını amaçlar (Özdaş, 1996, s.80). Matematik eğitimi; bireylere çeşitli deneyimlerini analiz edebilecek, açıklayabilecek, tahminde bulunacak ve problem çözebilecek bir dil ve sistematik kazandırır. Ayrıca onlarda yaratıcı düşünmeyi geliştirdiği ve estetik gelişimi sağladığı gibi, çeşitli matematiksel durumların incelendiği ortamlar oluşturarak bireylerin akıl yürütme becerilerinin gelişmesini hızlandırır (MEB, 2005, s.7). Matematikteki mantıksal yapı, bireylerin düşünme süreçlerini biçimlendirerek, onların sorgulama ve araştırma becerilerini geliştirmektedir. Bu nedenle matematik eğitimi ile bireyler matematik konuları ve bunlar arasındaki ilişkileri anlayabilecek geniş bir bilgi ve beceri donanımına sahip olurlar.

Matematik; sayılar, cebir, ölçme, düzlemsel şekiller, uzay ve veri gibi konu alanlarını kapsar. Bunlardan cebir, matematikte önemli ancak en çok zorlanılan konu alanlarından biridir. Çünkü cebir yapmak soyutlama yapabilme gücü gerektirir. Bu nedenle cebir öğretimine çocukların soyut düşünebilmeye başladığı ilköğretim ikinci basamakta, 13-14 yaş civarında başlanır (Altun, 2008, s. 203). Ancak ilköğretim birinci basamakta cebir kelimesi işitilmemesine karşın, bu basamakta matematiksel deneyimler ve sınıf içi tartışmalar sıklıkla cebirsel düşünme öğelerini içerir. Bunlar matematiğin anlaşılması için zengin bir içerik sağlar ve ileride cebir çalışmalarının daha çok şekillenmesini destekler (NCTM, 2000).

Öğrencilerin cebirde karşılaşabilecekleri güçlükleri ortadan kaldırmak için, ilköğretim birinci basamakta, cebirsel düşünmenin gelişimini sağlayıcı çalışmaların yapılması gereklidir. Bunlardan biri de, soyutluk ve değişken kavramının başlangıcı olan örüntü çalışmalarıdır (Blair, 2001, s. 65). Cebirsel düşünmenin temelinde örüntü arama ve genelleme yer almaktadır. Diğer bir deyişle, öğrencilerin cebirsel olarak düşünebilmeleri için sayısal ilişkileri anlamada örüntüleri tanıma, devam ettirme ve genelleyebilmeleri gerekir (Smith, 2003; Akt. Steele, 2005, s.142). Zaskis ve Liljedahl (2002, s.379) matematikte özellikle de cebirde herşeyin örüntülerin bir genellemesi olduğunu, bu nedenle de örüntülerin matematiğin kalbi ve özü olduğunu ifade ederler.

Bir örüntüde nicelikler arasındaki ilişkileri bulmaya yönelik çalışmalar, matematiksel ilişkiler ve fonksiyonlarla ilgili önemli bilgilerin ortaya çıkmasını sağlar (Blair, 2001, s.65). Sayılar, geometri ve ölçülerle ilgili olan örüntüler, öğrencilerin matematiksel kavramlar arasındaki ilişkileri anlamalarına yardımcı olmaktadır. Bu tür ilişkiler ise, daha sonraki aşamalarda öğrenilecek olan daha soyut düşünceler için temel oluşturan matematiksel düşünmeyi teşvik eder (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998, s.315). Örüntüler üzerine yapılan çalışmalar, öğrencilerin örüntüleri tanıma, tanımlama ve genelleme ile ilgili güçlükleri, kavram yanılgıları, öğrencilerin örüntü çalışmalarında kullandıkları stratejileri vb. şeklindeki çalışmalardır.

Yapılan çalışmaların bir çoğunda, öğrencilerin örüntüyü anlamaları ile ilgili güçlükleri, ortak yanlışları ve yanılgıları olduğu görülmüştür. Örneğin, 1978-1982 yılları arası gerçekleştirilen bir matematik projesini izleyen The Assesment and Performance Unit'in (APU) değerlendirme raporunda, 11 ile 15 yaş arasındaki öğrencilerin sayı örüntülerini anlama ve devam ettirme performansları ile ilgili şu sonuçlara ulaşılmıştır (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998, ss.31-317):

- Öğrenciler örüntüleri açıklarken, örüntüleri devam ettirmeye nazaran daha çok zorlanmışlardır.
- 11 yaş öğrencilerinden bir bölümü, sabit farkı olmayan örüntüleri (artarak değişen) devam ettirmede başarısız olmuştur.
- Öğrencilerin çok azı kare ya da üçgen sayı örüntüleri gibi örüntülerin isimlerini bilmektedir.
- Birçok öğrenci sadece kısmi bilgileri kullanarak genelleme yapmıştır.

Örüntü konusunda gerçekleştirilen bir diğer araştırmada ortaya çıkan tablo ise şöyledir; öğrenciler bir fonksiyon tablosunda karşılıklı olarak sıralanmış ve aralarında basit bir ilişki bulunan sayılar arasındaki örüntüyü tanımlayamamış, cebirsel bir kurala karşılık gelen genellemeyi yapamamış ya da örüntüleri tablolaştıramamıştır (MacGregor ve Stacey, 1993, s.196). National Assesment of Educational Progress'in (NAEP) (1992) dördüncü, altıncı ve sekizinci sınıf öğrencilerin matematik performanslarını değerlendirmek amacıyla yapmış olduğu araştırmada ise, öğrencilerin örüntüler ile ilgili kavram yanılgılarına sahip oldukları ve bir örüntüyü anlamış gibi göründükleri durumlarda bile örüntüleri güçlükle açıklayabildikleri, örüntülerle ilgili düşüncelerini güçlükle yazabildikleri ya da yazamadıkları belirlenmiştir. Öğrencilerin genelde tekrarlanan örüntülerde başarılı oldukları, özellikle dördüncü sınıf öğrencilerinin tekrarlanan bir örüntüde, tekrar birimini belirleyebildikleri ve buna bağlı olarak örüntünün devamında gelen şekli ya da sayıyı bulabildikleri, ayrıca artarak değişen örüntülerde, sabit değişen örüntülere göre daha az başarılı oldukları görülmüştür.

Bunların yanı sıra öğrencilerin, genel olarak bir örüntüde eksik olan bölümü tamamlamada ve büyüklüğü artan örüntü sorularında da zorlandıkları belirlenmiştir. NAEP (1996) da ise, öğrencilerin örüntüleri tanımlarken ve genellerken zorlandıkları saptanmış, NAEP (2000) de, dördüncü sınıf öğrencilerinin sadece %3'nün örüntüleri genelleyebildikleri ve bu genellemelerini savunabildikleri görülmüştür (Looney, 2004, s. 11; Kenney ve Silver, 1997, s. 1; Blair, 2001, s. 68).

Sekizinci sınıflar arasında yapılan ve aralarında Türkiye'nin de bulunduğu 38 ülkenin katıldığı, Üçüncü Uluslar Arası Matematik ve Fen Araştırması'nda (TIMSS, 1999) öğrencilerin örüntü arama ve bilgiyi düzenleme becerisini ölçmek amacıyla bir soru sorulmuştur. Bu sorunun doğru yanıtlanmasında uluslararası ortalama %30 iken, Türk öğrencilerinin ancak %11'i bu soruyu doğru yanıtlayabilmiştir (Toluk, 2003, s. 37).

Yukarıda sunulan ve özetlenen araştırmaların dışında, uluslararası alan-yazında örüntülere ilişkin pek çok araştırmaya rastlanmış, Türkiye'de ise, özellikle de ilköğretim basamağında, örüntüler üzerine gerçekleştirilen bir araştırmaya rastlanamamıştır. Daha önceki Matematik Dersi Öğretim Programında örüntülere yer verilmemesi, bu konuda araştırma yapılmamasının bir nedeni olabilir. Oysa, ilköğretim birinci basamak için ayrı bir önemi olan, örüntü kavramında; öğrencilerin örüntüleri nasıl yapılandırdıkları, bu yapılandırmada bilişsel süreçlerini nasıl çalıştırdıkları ve nasıl bir zihinsel fonksiyona sahip olduklarının bilinmesi, onların cebirsel düşünme ve fonksiyon kavramının gelişimini sağlama açısından önemlidir. Bu nedenle örüntü kavramına dayalı ciddi oranda araştırmaya gereksinim vardır. Aynı zamanda 1999 yılında yapılan TIMSS'de Türkiye'deki öğrencilerin örüntü sorularına ilişkin başarı düzeylerinin, uluslararası ortalamanın çok altında kalması, ilköğretim matematik öğretiminde varolan durumun ne denli inceleme ve araştırma gerektirdiğini göstermektedir. Bu araştırma ile ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin algıları belirlenmeye çalışılmıştır.

1.1.1. Matematik Eğitiminde Örüntüler

1.1.1.1. Örüntünün Tanımı ve Kapsamı

Örüntü nedir? sorusunun değişik yanıtları verilmiştir. Örneğin;

- Örüntü; geometrik şekillerin, seslerin, sembollerin ya da eylemlerin sistematik bir birleşimidir (Souviney, 1994, s.368).
- Örüntü; yapılandırılan bir dizi matematiksel nesnenin (sayılar, şekiller vb.) öğeleri arasındaki bir kuraldır (Guerrero ve Rivera, 2002, s. 263).
- Örüntü; sayısal ya da uzaysal düzenliliktir (Papic ve Mulligan, 2005, s. 609).
- Örüntü; düzenli dizilmiş nesne ya da şekillerin oluşturduğu manzumedir (Olkun ve Toluk-Uçar, 2006, s.120).

Örüntü yaşamın her boyutunda bulunmaktadır. Yaşamımızla bütünleşmiş olan bu olguyu belkide genel olarak görsel ve kavramsal algı boyutunda sınıflandırarak, kapsam alanları hakkında bilgi ve örnekler vermek suretiyle anlatmak daha kolay olacaktır. Duvar kağıdında, çini kaplamalarda, trafikte ve hatta televizyon programlarında bile örüntü vardır ifadesiyle, örüntünün görsel algı boyutunun kapsam alanları örneklenmektedir (Billstein, Libeskind ve Lott, 2004, s.3). Doğada, sanatta, müzikte, ticarette, tıpta ve sosyoloji de bile örüntü bulunur. Matematik ise, örüntüyü keşfeder, onu yorumlar ve kullanır (Van De Walle, 2004) ifadesi ile örüntünün kavramsal algı boyutunun kapsam alanları örneklenmektedir.

1.1.1.2. Örüntülerin Matematikteki Yeri ve Önemi

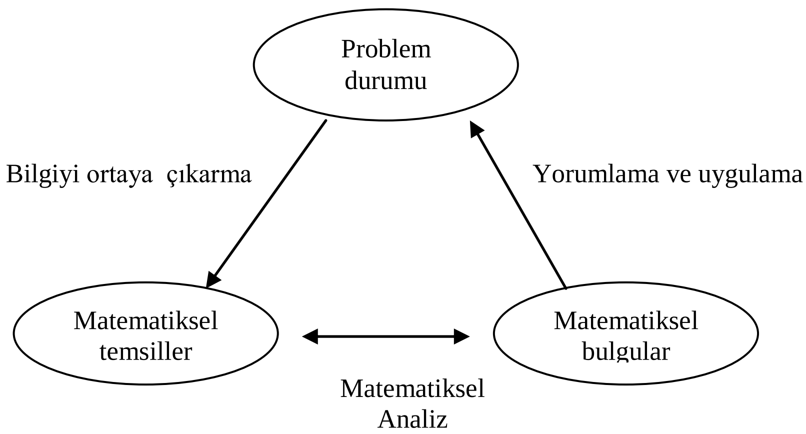
Matematik eğitimcileri örüntülerin matematikteki önemini matematiği tanımlarken açıkça vurgulamışlardır. Onlar matematiğin sınıflama ve olası bütün örüntülerin çalışması olduğunu, örüntü ve düzen aramanın matematiğin bütününde gerçekleştirilen eylemlerden biri olduğunu, matematiğin örüntüler ve ilişkiler aramak olduğunu ifade ederler ve matematiği basitçe örüntülerin çalışması olarak tanımlarlar (Sawyer, 1955, s.12; Williams ve Shuard, 1982, s.330; Biggs ve Shaw, 1985, s.1; Mattershead, 1985, s.vii; Akt. Orton, 1999).

Örüntüler matematiksel kavramların anlaşılmasında anahtar bir kavramdır. Örüntüleri tanıma, devam ettirme ve oluşturma yeteneği; matematiksel ilişkileri görmede, genelleme yapmada, matematiğin düzenini ve mantığını anlamada temeldir (Burns, 2000, s.112). Çocuklarda sayı hissi ve matematiksel keşif örüntülerle gelişir. Örüntüler çocukların önce sıralama, hesaplama ve dizme gelişimlerine yardımcı olurlar. Daha sonra temel işlemler için düşünme stratejilerinin gelişimini sağlarlar (Reys ve diğerleri, 1998, s. 94). Örüntüler özellikle küçük çocukların matematiksel gelişimlerinin temel bir öğesi ve matematiksel sorgulamanın merkez bir binasıdır. Örüntülerin birçok tanımı "işitsel, görsel ve psikomotor keşfetme" süreci ile özdeşleşir (Waters, 2004, s. 565). Örüntüler, düzenlilik ve ardışıklık düşüncesinin gelişimini de sağlarlar. Aynı zamanda çok farklı iki durumun aynı matematiksel özelliklere sahip olması düşüncesinin temellerini de hazırlarlar (Threlfall, 1999, ss. 20-26).

Okulöncesinden itibaren ilköğretim birinci basamakta gerçekleştirilen örüntü etkinlikleri cebirin temelini oluşturmada önemli bir role sahiptir (Herbert ve Brown, 1997, s. 123). Küçük sınıflarda sayı örüntüleri ve sayılar arasındaki ilişkilerle ilgili çalışmalar, daha sonraki cebir gelişimini hızlandırır (DES, 1998; Akt. Orton ve Orton, 1994, s. 1063). Çünkü örüntüler sembolleri yorumlamayı öğrenmede bir araç olup ileride cebirde karşılaşılan sayılar ve şekillerle ilgili genel ifadeleri oluşturmayı ve tanımayı sağlarlar (Threlfall, 1999, ss. 20-26). Bu nedenle örüntüler cebir için kavramsal bir köşe taşı olarak değerlendirilir (Resnick ve diğerleri, 1987; Akt. Threlfall, 1999, s. 21). Kısacası örüntüler cebir için bir yaklaşımdır ve öğrencilerin aritmetikten cebire geçişini sağlarlar (Orton ve Orton, 1999**;** Zazkis ve Liljedahl, 2002, s. 382).

Genel olarak örüntüler, matematiksel düşüncelerin ve ilişkilerin soyutlanmasında, ilişkilerin genellenmesinde, matematiksel akıl yürütme becerilerinin gelişiminde (Papic ve Mulligan, 2005, s.609), matematiksel kavramları ve bu kavramları yansıtan temsillerin daha iyi anlaşılabilmesinde etkili bir kavram olmakla birlikte (Bishop, Otto ve Lubunski, 2001, s. 509) cebirsel ve fonksiyonel düşünmeye dayalı kavramların gelişimine de yol açarlar.

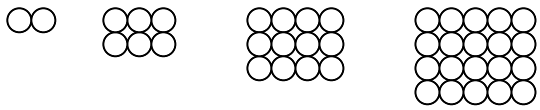
Cebirsel düşünme; örüntüleri tanıma ve analiz etme, örüntüler arasındaki sayısal ilişkileri gösterebilme ve bu sayısal ilişkileri genelleyebilme yeteneği olarak ifade edilebilir (Steele, 2005, s.142). Diğer bir deyişle Şekil 1'de görüldüğü gibi, cebirsel düşünme üç aşamadan oluşmaktadır. Bunlar; örüntü arama, örüntüyü tanıma ve tanımlama ve örüntüyü genellemedir. Örüntü arama, bir problem durumundan bilgiyi ortaya çıkarmadır. Örüntüyü tanıma ve tanımlama; bir matematiksel analizdir. Yani, bilgiyi matematiksel olarak kelime, diyagram, tablo, grafik ve denklemlerle temsil etmedir. Örüntüyü genelleme ise, bilinmeyeni bulma, varsayımları test etme ve fonksiyonel bir ilişki tanımlama gibi matematiksel bulguların yorumlanması ve uygulanmasıdır (Herbert ve Brown, 1997, ss. 123-124).



Şekil 1: Cebirsel Düşünmenin Çatısı

Kaynak: Herbert, K. ve Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics.* s. 124'den uyarlanmıştır.

İlişki ve değişimin temeli olan fonksiyon kavramı, belli niceliklerin değerinin, diğer niceliklerin değeri ile nasıl ilişkili olduğu, değerlerin nasıl değiştiği ya da niceliklerin yerinin ne olduğu gibi, iki veri seti arasındaki ilişkiyi vurgular. Bir veri setinde iki değişimin arandığı örüntü etkinlikleri bu nedenle fonksiyonel düşünceyi destekler (Warren ve Cooper, 2006, s. 9). Örneğin; aşağıda verilen şekil örüntüsünde adım sayısı (girdi) ve her adıma karşılık gelen toplam daire sayısı (çıktı) alınarak bir tablo oluşturulabilir. Tabloda girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişkiyi görebilmek fonksiyonel ilişkiye bir örnektir. Bu bakımdan bu tür örüntülerin fonksiyon kavramı ve matematiksel düşünme için bir başlangıç noktası olduğu söylenebilir (Van De Walle, 2004, s.420).



1. 2. 3. 4.

Adım	1	2	3	4	5		20
Daire sayısı	2	6	12	20			?

+4 +6 +8

Örüntüler dizi kavramının temelini oluştururlar. Örneğin, fonksiyon tablosunda girdi değerleri 1, 2, 3,….n olursa, bunlara karşılık gelen çıktı değerleri bir dizi oluşturur. Böylece bir dizi, girdi değerlerinin sırası ile ilişkilendirilen bir fonksiyondur. Bazı durumlarda bu ilişki cebirsel olarak tanımlanabilir ve dizinin her bir terimi, bu cebirsel kural yardımı ile bulunabilir. İşte bu örüntünün kuralı, genelleme ya da dizinin n. terimi olarak isimlendirilir. Örneğin 2, 4, 6, ….pozitif çift sayı dizisinin n. terimi 2n'dir (Cathcart, Pothier, Vance ve Bezuk, 2003, s. 411).

1.1.1.3. Örüntü Çeşitleri

Örüntüler, yapılarına ve sunuluş biçimlerine göre çeşitlilik göstermektedirler. Genelde örüntüler tekrarlanan ve değişen olmak üzere iki grupta toplanabilir. Örüntüler ister tekrarlanan, isterse de değişen olsun sayılarla ve şekillerle temsil edilebilirler.

1. ***Tekrarlanan Örüntüler***

Tekrarlanan örüntüler; terimler arası ilişkinin sabit bir dizilimin ötelenmesi şeklinde oluşturulduğu örüntülerdir (Olkun ve Yeşildere, 2007, s. 12). Diğer bir değişle bir örüntü içinde, tekrar eden öğelerin en kısa dizilimidir (Threlfall, 1999, s. 22**;** Zaskis ve

Liljedahl, 2002, s. 380). Tekrarlanan örüntüler, örüntünün en küçük kısmının tekrarlı bir uygulamasıyla meydana gelebilen döngüsel bir yapıya sahiptirler (Liljedahl, 2004). Döngüsel bu yapı "tekrarlanma döngüsü" ya da "tekrar birimi" olarak adlandırılır. Liljedahl (2004) tekrar birimini, örüntünün en küçük alt kümesinin öğeleri olarak tanımlamıştır. Örneğin, ABCABCABC… üç sembol ile tekrarlanan ve tekrar birimi üç olan, ABCabABCab ise, beş sembol ile tekrarlanan ve tekrar birimi beş olan bir örüntüdür (Threlfall, 1999, s. 22**;** Zaskis ve Liljedahl, 2002, s. 380). Tekrarlanan örüntüde tekrar eden örüntü döngüsünün, en az iki tam tekrarı yer almalıdır. Örneğin bu tür bir örüntünün tekrar birimi ABB şeklinde ise, örüntü sorusu ABBABB şeklinde verilmelidir. Soru ABBABBA ya da ABBA şeklinde verilirse bir belirsizlik söz konusu olur (Van De Walle, 2004, s. 432). Aşağıda, tekrarlanan örüntülerden şekil ve sayı örüntü örnekleri gösterilmiştir.

Tekrarlanan şekil örüntüsü örneği:

☺ ☾ ☾ ☺ ☾ ☾ ☺ ☾ ☾ …

Bu örüntünün, tekrar birimi üçtür.

Tekrarlanan sayı örüntüsü örneği:

1 2 1 2 1 2 …

Bu örüntünün tekrar birimi ikidir.

Tekrarlanan örüntüler veriliş biçimlerine bağlı olarak kolay ya da karmaşık olabilir. Tekrarlanan bir örüntünün karmaşıklığı, örüntünün öğelerinin bazı sembolleri (boyut, renk vb. olarak) çeşitlendirilerek ve bazı sembolleri de sabit tutularak gerçekleştirilebilir (Cathcart, Pothrer, Vance ve Bezuk, 2003, s.393). Ancak, küçük çocuklarla çalışırken onların kavrayabildikleri örüntülerle çalışmak gerekir. Örneğin, ilk başta ABABAB gibi tekrar birimi iki olan bir örüntüyle başlamak yerinde olur. Ayrıca renklerle, geometrik şekillerle, seslerle, sayılarla oluşturulmuş tekrarlanan örüntülerle de çalışılmalıdır (Reys ve diğerleri, 1998, s. 339).

Tekrarlanan örüntüler, sayı teorisi ve genelleme için bir önkoşul olarak görülür (Zaskis ve Liljedahl, 2006). Ancak tekrarlanan örüntülerde genelleme yapabilmek için tekrar biriminin algılanması önemlidir. Örneğin;

□	□	■	■	■	□	□	■	■	■	……..
1	2	3	4	5	6	7	8	9	10	………

yukarıdaki örüntüde tekrar biriminin beş olduğunu algılayan bir çocuk sayılar, şekiller ve aralarındaki ilişkileri çözümleyerek, somut bir durumdan soyutlanmış bir durum olan cebire başlangıç yapacaktır (Orton, 1992; Akt. Threlfall, 1999, s. 26). Bu nedenle tekrarlanan bir örüntüde tekrar biriminin üzerinde durulması gerekmektedir.

Öğrencilerin tekrarlanan bir örüntüyü açıklayabilmeleri, diğer örüntülerle benzerliklerini ve farklılıklarını ifade edebilmeleri önemlidir. Bunun için çocuklarla tekrarlanan örüntülere ilişkin; örüntüyü kopyalama, tekrar birimini tanımlama, örüntüyü devam ettirme, örüntüyü tamamlama, bir örüntü oluşturma gibi etkinliklerin gerçekleştirilmesi gerekir. Bu etkinlikler her sınıf seviyelerindeki matematik için önemli olup, özellikle küçük çocuklara çeşitli temsiller arasında bağlantı kurmayı geliştirmede ve temsiller arasındaki benzerlikleri ve farklılıkları aramada yardımcı olur (Warren ve Cooper, 2006, s. 11).

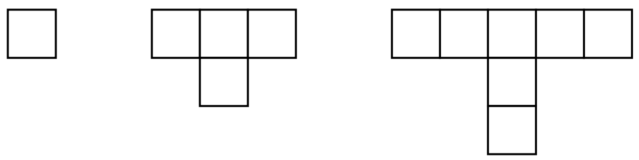
2. *Değişen Örüntüler*

Değişen örüntüler bir dizi sayının, şeklin ya da somut materyallerin düzenli olarak sıralanmasıdır (Billstein, Libeskind ve Lott, 2004, s. 5). Bu örüntülerde terimler arası ilişki, genişleyen ya da daralan bir seyir izler. Değişen örüntüler üç farklı biçimde gruplanabilir (Olkun ve Yeşildere, 2007, s. 13):

- *Sabit değişen örüntü:* Takip eden her bir terimin bir öncekine sabit bir sayı eklenerek ya da çıkarılarak elde edildiği örüntülere denir.
- *Artarak değişen örüntü:* Takip eden terimler arası farkların arttığı örüntülere denir. Bu örüntülerde her şekil ve sayı arasındaki farklılık ardışık sayılardan oluşur.
- *Diğer örüntüler:* Sabit ya da artarak değişen olmayan, ancak bir düzen içerisinde değişen örüntülere denir.

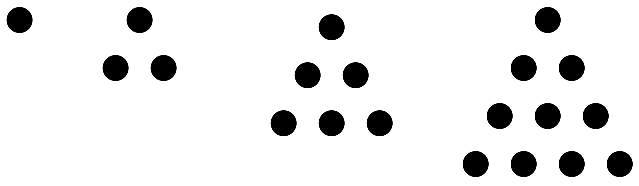
Yukarıda tanımları verilen değişen örüntü çeşitleri kısaca şekil ve sayı örüntüleri şeklinde iki grupta toplanabilir. Aşağıda sabit ve artarak değişen örüntülerden şekil ve sayı örüntü örnekleri gösterilmiştir:

Sabit değişen şekil örüntüsü örneği:



Örüntünün kuralı: Bir kare ile başlanmış, daha sonra her adımdaki şekil, önceki şekle, şeklin yatay ve düşey doğrultusundaki uçlarına birer tane olmak üzere, toplam üç kare eklenerek oluşturulmuş şeklinde açıklanabilir.

Artarak değişen şekil örüntüsü örneği:



Örüntünün kuralı: Bir nokta ile başlanmış daha sonra her adımdaki şekil, önceki şekle, şeklin alt satırındaki nokta sayısından bir fazla nokta içeren satırın eklenmesiyle oluşturulmuş şeklinde açıklanabilir.

Değişen şekil örüntülerinin amacı; öğrencinin, daha çok görsel/geometrik yaklaşımla, düşünmesini desteklemek ve görsel bir yaklaşımdan yola çıkarak, sayılar için alternatif bir yol bulabilmelerini sağlamaktır. Aynı zamanda şekil örüntüleri sembolik olarak verilen örüntülerden daha basit görülür. Bu görüşü destekleyenlerden biri Bruner' dir (1966; Akt. Orton, Orton ve Roper, 1999, s. 121). Bruner, yeni düşüncelerin öğrenilmesi aşamasında, eylemselden, imgesele ve imgeselden semboliğe doğru bir sıra izlendiğini ifade eder. Şekil örüntülerinin bir başka amacı da, bir problemin çözülebilme yollarını çeşitlendirmektir. Değişen şekil örüntüleri, öğrencilerin gerekli durumlarda değişiklik yapabilmelerine ve bir adımdan yeni bir adım oluşturabilmelerine yardım edebileceği gibi, onlar için aynı zamanda da eğlencelidir (Orton, Orton ve Roper**,** 1999, s. 122). Öğrenciler şekil örüntülerinde şekilsel ipuçları yakalayarak ilişkileri algılayabilirler (Rivera ve Becker, 2005, s. 199). Böylece, bazı öğrenciler için şekil içerikli sorular; soruları yorumlamaya, canlandırmaya ve yalınlaştırmaya olanak sağlar.

Değişen sayı örüntüleri ise, sayı dizileri ve fonksiyon tablosu biçiminde gösterilebilir. Atlayarak sayma olarak da bilinen sayı dizilerinde, sayılar arasındaki matematiksel ilişki sayıların ilgili dizisi içine gömülmüştür. Sayı dizilerinde öğrencilerden, dizinin daha ilerideki terimlerini tahmin etmeleri ve dizideki herhangi bir terimi bulabilmek için kural ortaya çıkarmaları istenir (Ley, 2005, s. 4).

Sayı dizileri, soldan sağa ve her sayı arasına virgül konarak ya da aralık bırakılarak sıralanır (Cathcart, Pothrer, Vance ve Bezuk, 2003, s. 411). Sayı dizilerinin tanımı ve analizi ise, sayıların uzamsal düzenlemesi yardımıyla yapılabilir. Eğer bir sayı dizisinin terimleri,

1 1 2 3 5 8 13 …

örneğinde olduğu gibi, düzenli aralıklarla sıralanmamış ise, bu durum büyük şaşkınlık yaşanmasına neden olabilir. Çocuklar sayı dizilerinde düzenli aralıklara alışkındırlar. Örüntülerdeki terimler ile ilgili herhangi bir alıştırmada, düzenli aralık olmazsa verilen örüntü sorusu çocuklara çok zor gelebilir. Bu durumda çocuklar açıkça örüntüyü tanımlayamazlar (Burke ve Orton, 1999, s. 137).

Sabit değişen sayı örüntüsü örneği:

2   6   10   14   18 …

Örüntünün kuralı: 2 ile başlanmış, daha sonra her terim bir önceki terime 4 eklenerek bulunmuş şeklinde açıklanabilir.

Artarak değişen sayı örüntüsü örneği:

4   6 10 16   24   …

Örüntünün kuralı: 4 ile başlanmış, daha sonra her terim sırasıyla öncekine ardışık çift sayılar eklenerek bulunmuş şeklinde açıklanabilir.

Artarak değişen sayı örüntülerinde, örüntünün terimleri arasındaki farklarla oluşturulan ikinci sayı örüntüsünün doğasının tayini, ilk örüntüye ilişkin yararlı bilgiler ortaya çıkarabilir.

4   6   10   16   24…

2   4   6   8   Birinci farklılık

2   2   2   İkinci farklılık

ve

1   3   6   10   15   21

2   3   4   5   6

1   1   1   1

örneklerde görüldüğü gibi, sabit değişen sayı örüntüsü olarak ortaya çıkan, ikinci örüntüyü devam ettirmeye ilişkin bulunan kural, birinci örüntüyü devam ettirmeyi sağlayıcı bir kural oluşturmaya destek vermektedir.

Sonuç olarak, sabit değişen sayı örüntülerinde ulaşılan kuralların genel formu; a ve b birer sabiti, n örüntüdeki terim sırasını ve f(n) n. sıradaki terimi belirtmek üzere, f(n)=an+b dir. Artarak değişen sayı örüntülerinde ise ulaşılan kuralların genel formu; a, b, c birer sabit olup, n örüntüdeki terim sırasını, f(n) ise örüntünün n. sıradaki terimini göstermek üzere; $f(n)=an^2+bn+c$ biçimindedir (Orton ve Orton 1999, s. 108).

Değişen sayı örüntülerini temsil etmenin bir başka biçimi de fonksiyon tablosudur. Aşağıda örneği verilen tabloda, A sütunu girdi sayılarından, B sütunu ise çıktı sayılarından oluşmaktadır. Bu tür örüntülerde öğrencilerden, girdi sütunundaki sayıları çıktı sütunundaki sayılara dönüştürmede kullanılan matematiksel kuralı (fonksiyon) belirlemeleri istenir (Ley, 2005, s. 5).

A	B
1	2
2	4
3	6
4	8
5	?

Fonksiyon tabloları, bir çok sonucu sistematik olarak kaydetmede ve örüntü aramada çok önemli bir role sahiptir. Öğrenciler tablodaki verileri kullanarak örüntüleri tanımlarlar ve sonucu genelleyebilirler. Veriyi genellemek önemli ölçüde değişken kavramını anlamaya katkıda bulunur. Aynı zamanda çocukta fonksiyon kavramının gelişimini de sağlar (English ve Warren, 1995; Akt. Ellis, 2004, s. 60; Cathcart, Pothier, Vance ve Bezuk, 2003, s. 394). Diğer bir deyişle, başlangıçta tablo ile verilen örüntüler yardımıyla çocukta fonksiyonel düşünmeye giriş, daha sonra onlarda fonksiyon kavramının daha derin anlaşılmasını hızlandırabilir. Son zamanlarda yapılan araştırmalarda da, ilköğretim öğrencilerinin fonksiyonel ilişkiyi anladıkları görülmüştür. Bu araştırmalarda, küçük yaştaki öğrencilerin girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişki hakkında düşünebildikleri diğer bir değişle fonksiyonel olarak düşünmeye başlayabildikleri ve cebirsel notasyonları kullanabildikleri belirlenmiştir (Warren ve Cooper, 2007). Özellikle fonksiyon tablolarının ve grafiklerin, çocukları fonksiyonel ilişkiye teşvik ettiği de ortaya konmuştur (Martinez ve Brizuela, 2006, s.286).

Sonuç olarak, sabit ya da artarak değişen sayı ve şekil örüntülerinde, her yeni adım bir önceki adımla ilişkilidir. Bu örüntülerde öğrenciler, örüntünün adımlarındaki ilişkileri bulma ve devam ettirmenin yanı sıra örüntüde n. adımı bulmak için genel bir kural belirlemeye çalışırlar (Van De Walle, 2004, s. 420). Öğrencilerin öncelikle, örüntülerin nasıl devam ettiğini görmeye başlayana kadar, çok sayıda farklı değişen örüntüler ile karşılaşmaları daha sonra da, örüntülerdeki kuralı tanımlamaları gerekir. Öğrenciler kuralı sözelleştirdikleri zaman, değişimi temsil etmek için sembolik notasyonlar da kullanabilirler (Cathcart, Pothrer, Vance ve Bezuk, 2003, s. 394; Van De Walle, 2004, s. 420). Değişen örüntüler ile ilgili çalışmalar; örüntüleri tanıma, tanımlama, devam ettirme ve oluşturma için olanak sağlar ve formal cebirin bir öncüsü olarak son derece önemli olduğu düşünülür (Hale, 1981; DES, 1988; NCTM, 1989; Akt. Hargreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998; 1999; Maeers ve Seaman, 2006).

1.1.2. İlköğretim Matematik Programlarında Örüntüler

National Council of Teacher of Mathematics (NCTM), matematik eğitiminde uluslararası düzeyde kabul gören bir merkezdir. Bu organizasyonun çalışmaları bugün dünyada matematik eğitimi alanında pek çok araştırmacı için referans kabul edilmektedir. Aynı zamanda uluslararası birçok matematik dersi öğretim programlarında da NCTM’nin çalışmalarına yer verilmiştir.

NCTM en son 2000’de, okul matematiğinin ilkeleri ve standartları isimli belgesini yayınlamıştır. Bu belgede okulöncesinden itibaren okul matematiğinin ilkelerinin neler olması gerektiği açıklanarak, tüm öğrenciler için kapsamlı matematik standartları belirlenmiştir. Bu standartlar okulöncesi dönemden lise dönemine kadar olan matematik öğretim programını taramaktadır. Bu standartlardan sayılar ve işlemler, cebir, geometri, ölçme, veri analizi ve olasılık içerik standartlarını; problem çözme, akıl yürütme ve ispat, ilişkiler, iletişim ve temsil ise süreç standartlarını oluşturmaktadır (NCTM, 2000; Akt. Umay, Akkuş ve Duatepe Paksu, 2006).

Örüntüler, içerik standartları arasındaki cebir standardı içinde ele alınmıştır. Standartta öğrencilerin örüntüler ve fonksiyonları öğrenme ve kullanmaları, onların matematiksel anlama ve özellikle cebirsel düşünmelerini geliştirmek için gerektiği açıkça ifade edilmiştir (NCTM, 2000).

Okulöncesinden ilköğretim ikinci sınıfa kadar olan aralıktaki eğitimde NCTM'nin belirlediği örüntüleri, bağıntıları ve fonksiyonları anlama standardının içeriği, öncelikle büyüklüklerine, sayılarına ve diğer özelliklerine göre nesneleri ayırma, sıralama ve sınıflama, daha sonra tekrarlanan ve değişen örüntüleri tanıma, tanımlama, devam ettirme, analiz etme ve örüntü oluşturma çalışmalarından oluşmaktadır (NCTM, 2000). Bu sınıflarda çocuklar, öncelikle yaşadıkları deneyimlerle örüntüleri keşfederler. Onlar için nesnelerin sınıflandırılması ve sıralanması doğal ve ilginç bir deneyimdir. Nesneleri ayırma, sıralama ve sınıflama örüntü çalışmalarının temel becerileridir. Bu beceriler örüntüler arasındaki benzerlik ve farklılıkları tanıma ve tanımlama yeteneğine temel oluştururlar (Papic ve Mulligan, 2005, s. 609).

Başlangıçta öğrenciler tekrarlanan örüntülerle ilgili deneyim yaşarlar ve örüntüleri sembollerden çok ritmik sayma, ritmik şarkı söyleme gibi sözel olarak ifade etme eğilimindedirler. İkinci sınıfa kadar öğrenciler, ilk başta kırmızı-mavi-kırmızı-mavi-kırmızı-mavi…… gibi bir örüntüyü daha sonra ise, yıldız-yıldız-daire-yıldız-yıldız-daire….. gibi daha karmaşık bir örüntüyü tanıyabilirler ve sözel olarak bulduklarını tartışabilirler. Eğer notasyon bazı öğrenciler için anlamlı olursa, notasyon kullanarak örüntüleri ifade edebilirler, çevrelerindeki örüntüleri bulabilirler ve bir örüntüde sonradan geleni tahmin edebilirler (NCTM, 2000). Aynı zamanda öğrenciler; ipler, boncuklar, manyetik şekiller ve oyun materyalleri gibi somut araç gereçler kullanarak tekrarlanan bir örüntü oluşturabilirler. Ayrıca tekrar eden bir örüntüyü kopyalayabilmeyi, devam ettirebilmeyi ve genellemeyi de öğrenebilirler. Ancak, bunları gerçekleştirirken öğrencilerin, tekrarlanan bir örüntüdeki tekrar birimini algılaması gereklidir (Threlfall, 1999).

İlköğretim üçüncü sınıftan beşinci sınıfa kadar olan aralıktaki eğitimde NCTM'nin belirlediği örüntüleri, bağıntıları ve fonksiyonları anlama standardının içeriğinde ise, örüntülerle ilgili tanımlama, devam ettirme ve genelleme yapma, sözel olarak tanımlama, tablo ve grafik kullanarak örüntü ve fonksiyonları analiz ve temsil etme çalışmaları yer almaktadır. Bu sınıflarda öğrenciler, örüntüleri tanımlamak ve devam ettirmek için matematiksel ifadeler ya da semboller ile değişkenleri ve cebirsel ifadeleri kullanmaya başlayabilirler. Onlar örüntülerin, nasıl genişlediğini ya da değiştiğini analiz edebildikleri gibi yapısını da analiz edebilir ve örüntülerdeki matematiksel ilişkilerle ilgili genellemeleri geliştirmek için analiz sonuçlarını kullanabilirler. Beşinci sınıfın sonunda öğrenciler bir örüntünün yapısıyla ilgili genelleme yapabilirler. Dolayısıyla bu sınıftaki öğrencilere; basit bir durumda bir örüntüyü genellemeleri ya da onun karakteristik özelliklerini tartışabilmeleri ve örüntüyü devam ettirebilmeleri gereken örüntü soruları yöneltilebilir. Yedinci ve sekizinci sınıftan itibaren de öğrenciler, sembol ya da harf kullanarak örüntüleri genellemeye başlayabilirler ve sonrasında da fonksiyonları keşfedebilirler (NCTM, 2000).

Türkiye'de NCTM'nin çalışmaları da dikkate alınarak, 2005 yılında İlköğretim Matematik Dersi Öğretim Programı (1.-5. sınıf) yenilenerek uygulamaya konulmuştur. Programda örüntülere sayılar ve geometri öğrenme alanlarında sınıf düzeylerine göre basitten karmaşığa doğru yer verilmiştir. Birinci ve ikinci sınıflarda tekrarlanan, sabit değişen örüntüler, üçüncü sınıftan beşinci sınıfa kadar ise, tekrarlanan, sabit ve artarak değişen örüntüler yer almıştır. Bu örüntüler sayı, şekil, tablo ve çeşitli materyaller kullanılarak gösterilmiştir. Sınıf düzeylerine göre örüntülere yönelik yapılan çalışmalar ve öğrenci yeterlilikleri, öğretim programında şu şekilde yer almaktadır.

Programda birinci sınıfta öğrenciler, ritmik sayma, nesneleri ayırma, karşılaştırma ve sıralama yapma ile örüntü çalışmalarına başlarlar. Daha sonra belli bir düzen içinde yerleştirilen çeşitli nesnelerdeki örüntüyü fark ederler. Geometrik cisimler, resimler ya da çevredeki malzemeleri kullanarak örüntü oluştururlar. Ayrıca öğrenciler somut nesne ve modellerle oluşturulmuş bir örüntüdeki ilişkiyi belirlerler ve örüntüyü devam ettirirler.

İkinci sınıfta ise, ritmik sayma ile örüntü çalışmalarına devam edilir ve öğrenciler ritmik saymaya dayalı sayı örüntüleri oluştururlar. Ayrıca, bir sayı örüntüsünde eksik olan bölümü tamamlar, örüntüdeki ilişkiyi belirler ve örüntüyü devam ettirirler. Geometrik cisimler, resimler ya da çevredeki malzemeleri kullanarak bir örüntüde öğeler arasındaki ilişkiyi açıklayarak eksik bırakılan öğeleri tamamlarlar. Bir örüntüdeki ilişkiyi kullanarak farklı malzemelerle aynı ilişkiye sahip örüntüler oluştururlar.

Üçüncü sınıfta öğrenciler, ritmik saymaya dayalı sayı örüntüleri oluştururlar. Değişen bir örüntüdeki sayısal ilişkiyi belirler ve örüntüyü devam ettirirler. Dördüncü sınıfta çeşitli materyallerle oluşturulan bir örüntüdeki ilişkiyi belirlerler ve sayılarla ifade ederler. Daha sonra sayılar arasındaki ilişkiyi kurarlar. Beşinci sınıfta ise, öğrenciler, kuralında bir işlem bulunan örüntü oluştururlar ve bir örüntüde verilmeyen sayı ya da sayıları belirlerler.

1.1.3. Örüntüde Genellemeye Ulaşma

Genellemeyi keşfetme, matematiksel etkinliklerin merkezidir ve sayısal durumların genellenmesi öğrencilerin formal cebire geçişinde bir araçtır. Genelleme, öğrencilerin sembolik temsilleri anlamalarına ve aritmetikteki ön bilgileri arasındaki ilişkileri kurabilmelerine yardımcı olur (Lannin, 2005, s. 233).

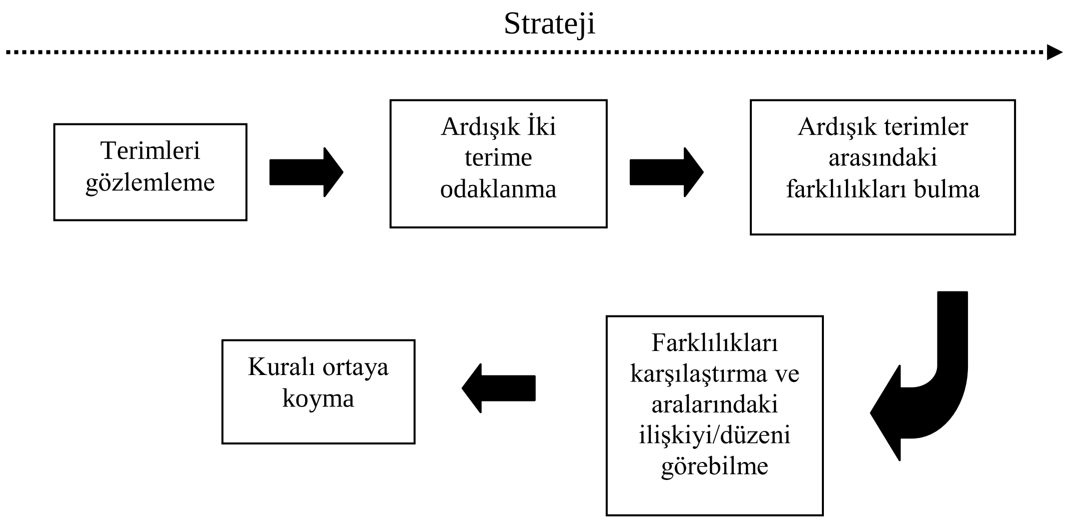
Matematiksel bir süreçte örüntü arama, bir genellemenin biçimlenmesinde temel bir adım olup, genelmeye ulaşmada oldukça önemlidir (Jones, 1993; Akt. Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1999, s. 67). Çünkü matematiğin bir yapısı/yapılanması vardır ve bu yapılanma, örüntü ve ilişkilerin araştırılması ile oluşturulur. Bu örüntü ve ilişkiler, yapılan genellemelerle anlaşılabilir, ifade edilebilir ve kullanılabilir. Bu nedenle matematikte, genelleme gerektiren örüntüleri keşfetme etkinlikleri ve bunlara yöneltilen çaba ve dikkat daha sık uygulanmalıdır (Department of Education and Sciences, 1993; Akt. Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998, s. 315). Örüntüleri fark etme, tanımlama ve devam ettirme, formal cebir için ön koşul olması nedeniyle önemlidir (NCTM, 1989; DES, 1988; Hale, 1981; Akt. Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998, ss. 315-316). Jones (1993; Akt. Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998, s.316) bu durumu, “genelleme cebirin kalbindedir/özündedir ve örüntüleri araştırmak genelleme yapabilmek için gerekli bir adımdır” şeklinde açıklamaktadır.

Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall (1998; s. 319), verilen bir dizi terimlerle ilgili genellemenin iki anlama geldiğini belirtirler. Biri, bir örüntünün genellenmesi diğeri ise, bir dizinin genellenmesidir. Örüntünün genellenmesi daha çok sayı kümesinin görülmesidir, dizinin genellenmesi ise, sayı kümesinin daha ötesine geçilmesidir.
Bir örüntü genellenirken, çocukların örüntüde verilenin dışına çıkmaları gereklidir. Örneğin, 1, 3, 5, 7, 9 sayı örüntüsünde çocuğun, sayıların tek sayı olduğunu ve ikişer artarak devam ettiğini ifade etmesi genelleme olarak adlandırılır. Ancak genellemenin birçok farklı yolu vardır. Örneğin, 1, 3, 5, 7, 9 sayı örüntüsünde, sayıların ikişer artarak devam ettiğinin bilinmesi; örüntüyü devam ettirmede, tek sayıların daha fazla anlaşılmasını sağlamada ve daha karmaşık örüntüleri çözmede yardımcı olur. Burada, örüntüdeki sayıların tek sayı olduklarını bilmek, sayı gruplarının bir özelliği ile ilgili bir genellemedir. Dolayısıyla, sadece bu özellik dikkate alınarak örüntüyü devam ettirirken, sayıların ikişer artma ilişkisine ve sayıların sırasına önem verilmeyebilir. Örneğin, 1, 3, 5, 7, 9, 21, 37, 15 gibi. 1, 3, 5, 7, 9 örüntüsüyle ilgili genellemede, daha fazla matematiksel deneyim kazanmak için n. terimi $f(n)=2n-1$ gibi cebirsel olarak sembolize etmek gereklidir. Bu durum ise, daha sonra örüntüdeki herhangi bir terimin değerini bulmayı sağlar. Örneğin, 10. terim, $f(10)=2.10-1=19$ şeklinde bulunur (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1999, s. 70).

1.1.4. Örüntüde Genellemeye Ulaşmada Kullanılan Stratejiler

Strateji, bir amaca ulaşmayı sağlayan eylem şekli ya da sıraya konulan işlemlerin bir koleksiyonu şeklinde tanımlanabilir. Strateji, bir ya da daha fazla işlemin birleşiminden de oluşabilir. Örneğin bir çocuk, bir örüntüyle ilgili genellemeyi oluşturmak amacıyla birçok işlemi içeren stratejiler kullanabilir.

Şekil 2’de görüldüğü gibi, verilen bir örüntüde işlem yaparken çocuk, bütün terimleri gözlemler, sonra birinci ve ikinci terime odaklanır. Daha sonra terimler arasındaki farklılığı bulur. Bu işlemler diğer terimler için de tekrar edilebilir. En sonunda bu farklılıklar, farklılıklar arasında bir örüntü varsa, bunu bulmak için birbiriyle karşılaştırılır. Daha sonra örüntünün kuralı ortaya konulur (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1999, s. 71).



Şekil 2: Bir Örüntüyü Genellemede Kullanılabilecek Strateji Örneği

Kaynak: Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. ve Threlfall, J. (1999). Children's strategies with number patterns. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (67-83). London and New York: Cassell. s. 71'den uyarlanmıştır.

Bir amaca ulaşmak için, birçok işlemi içeren strateji benzer amaçlara ulaşmak için tekrar kullanılabilir. Örneğin bir çocuk Şekil 2'de gösterilen birkaç işlemin birleştirildiği bir stratejiyi daha sonra başka bir örüntüde de kullanabilir. Bu durum bir problemi çözerken bir stratejiyi hızlı kullanmada yarar sağlar. Ancak, uygun olmayan bir strateji seçilirse ya da uygun strateji yanlış kullanılırsa zorluklar birbirini izler. Bu nedenle bir stratejiyi uygulama öncesinde, adımı planlamak temeldir (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1999, s.72).

1.1.5. Tekrarlanan Örüntülerde Kullanılan Stratejiler

Tekrarlanan örüntülerde kullanılan temel stratejiler ***kalanlı bölme*** (***division with remainder***) ve ***çarpımdan sayma (counting from a multiple)*** şeklinde ele alınmaktadır

(Liljedahl, 2004). Bu stratejiler tekrarlanan bir örüntü sorusu üzerinde şu şekilde açıklanabilir:

"1000 tane vagona sahip oyuncak bir tren hayal ediniz. Trenin ilk 7 vagonunun rengi sırasıyla, kırmızı, turuncu, sarı, yeşil, mavi, mor ve beyaz olsun. Oyuncak trenin vagonları sekizinci vagondan itibaren tekrar sırasıyla kırmızı, turuncu, sarı, yeşil, mavi, mor ve beyaz şeklinde devam ederse 800. vagonun rengi ne olur?"

Kalanlı bölme: Örüntünün tekrar birimi 7 olduğundan, $800 \div 7 = 114$ ve 2 kalan elde edelir. Bu durumda 800. vagon baştan 2. vagon ile aynı renge sahip olur. Dolayısıyla 800. vagonun rengi turuncudur.

Çarpımdan sayma: Örüntünün 7. vagonu beyaz olduğundan, yedinin katları olan sayılara karşılık gelen vagonların renkleri de beyaz olur. Bu durumda 7x114=798 olduğundan, 798. vagon beyazdır. Böylece 799. kırmızı, 800. vagon turuncu olur.

1.1.6. Değişen Örüntülerde Kullanılan Stratejiler

Sabit ya da artarak değişen sayı ve şekil örüntülerinde kullanılan stratejiler, ***yinelemeli stratejiler*** *(Recursive Strategies)* ve ***değişenler arası ilişki bulma stratejileri*** *(Explicit Strategies)* olmak üzere iki başlık altında ele alınmaktadır (Martinez ve Brizuela, 2006; Mor ve diğerleri, 2006; Warren, 1996; 2000; 2005; Akt. Ley, 2005, ss. 7-8; Orton ve Orton,1999; Sasman, Olivier ve Linchevski, 1999).

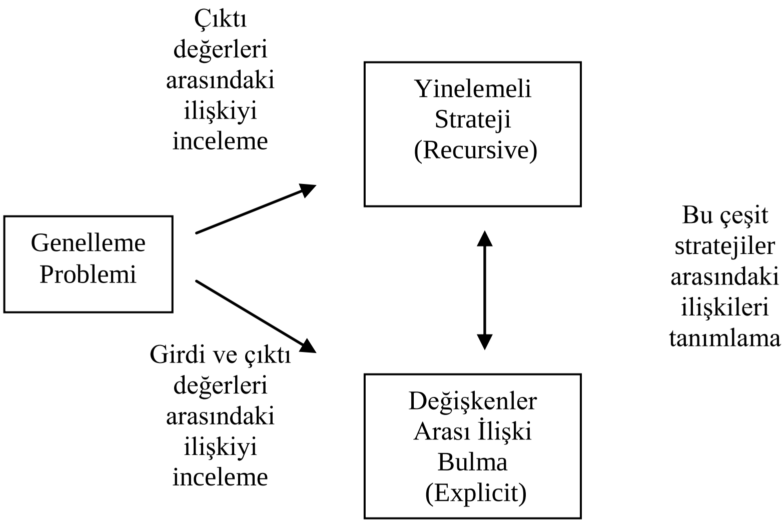
Yinelemeli stratejiler; bir önceki terimden/şekilden bir sonraki terimin/şeklin elde edildiği stratejilerdir. Diğer bir değişle, bir dizide sonraki terimi/şekli bulmak için, önceki terimin/şeklin kullanılmasını içeren stratejilerdir (Orton ve Orton,1999; Sasman, Olivier ve Linchevski, 1999; Mor ve diğerleri, 2006). Bu stratejiler girdi (bağımlı) ve çıktı (bağımsız) değerleri arasındaki ilişkiden ziyade yalnızca çıktı değerlerine odaklanmayı içerir (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998; 1999**;** Orton ve Orton, 1999; Warren, 1996; 2000; 2005; Akt. Ley 2005, ss.7-8). Yinelemeli stratejiler ile girdi değerini (bağımlı değişken) bulmak kolay ve çabuktur. Ayrıca bu stratejiler, öğrencilerin sezgisel bilgilerini analiz etmelerini de sağlar. Öğrencilerin sezgisel bilgilerini, değişkenler arası ilişki bulma stratejilerine dönüştürebilmelerine yardımcı olur. Bu stratejiler yardımıyla, öğrencilerin ne bildiği ya da bilmediği belirlenebilir. Böylece öğrencilere bilgilerini birleştirebilecekleri, genişletebilecekleri, ve sonunda da bilgiye ulaşabilecekleri durumlar önerilebilir. Ancak bu stratejilerin kullanılabilmesi için çıktı değerlerinin ilkinin (bağımlı değişken) bilinmesi gereklidir. Bu stratejilerde çıktı değerleri (bağımsız değişken) ile ilgili herhangi bir bilgiyi kullanmaya gerek yoktur (Martinez ve Brizuela, 2006). Yinelemeli stratejiler ile fonksiyonel kuralları bulmak zordur (Warren, 1996; 2000; 2005; Akt. Ley, 2005). Diğer bir deyişle, bu stratejileri kullanan bir çocuğun, genel formülle ilgili fikir ileri sürmesi, yani girdi ve çıktı değerleri (bağımlı ve bağımsız değişken) arasındaki ilişkiyi ifade etmesi olası değildir (Martinez ve Brizuela, 2006).

Değişkenler arası ilişki bulma stratejileri; girdi (bağımlı) ve çıktı (bağımsız) değerleri arasındaki ilişkinin genellenmesidir. Bu durum formüller ve denklemler kullanarak fonksiyonları ifade etmede ilk adımdır. Değişkenler arası ilişki bulma stratejileri örüntünün hem yakın hem de sonlu adımındaki terimler için geçerli değişmez kuraldır. Böylece değişkenler arası ilişki bulma stratejileri, genel kuralı oluşturmada ve dolayısıyla örüntünün herhangi bir terimini (n. terimi) bulmada yardım edicidir (Ley, 2005, s.9).

Yinelemeli stratejiler ve değişkenler arası ilişki bulma stratejilerini kullanan öğrencilerin, verileri toplama ve analiz etmelerine yol gösteren kavramsal bir model geliştirilmiştir. Şekil 3'te görülen bu modele göre, bir öğrencinin özel bir problem durumunda göz önüne alacağı potansiyel ilişkiler, üç şekilde ele alınmıştır. Bu ilişkiler sayısal durumları genellemek için öğrenciler tarafından kullanılabilmektedir. Bunlar (Lannin, Barker ve Townsend, 2006, s. 303):

- Çıktı değerleri arasında var olan genel bir ilişkiyi belirleme (Yinelemeli-recursive),
- Girdi ve buna ilişkin çıktı değerleri arasında var olan ilişkiyi inceleme (Değişkenler arası ilişki bulma-explicit),

- Yinelemeli stratejiler ve değişkenler arası ilişki bulma stratejisi arasındaki ilişkiyi göz önüne alma.



Şekil 3: Sayısal Durumları Genellemede Kullanılan Kavramsal Model

Kaynak: Lannin, J. K., Barker, D. D. ve Townsend, B. E. (2006). Recurcive and expicit rules: How can we build student algebraic understanding?. *Journal of Mathematical Behavior.* 25, 299-317. s. 303'ten uyarlanmıştır.

Yinelemeli ve değişkenler arası ilişki bulma stratejileri içinde yer almayan başka stratejilere de rastlanılmıştır. Bu stratejilerden kimileri hatalı uygulamalar olabilmektedir. Bu araştırmada bu stratejiler, araştırmacı tarafından ***"diğer stratejiler"*** olarak tanımlanmıştır. Diğer taraftan alan-yazında karşılaşılan öğrenci yanıtlarını kapsayan kimi (bilmiyorum ya da tahmin ediyorum vb. gibi) yanıtların, *etki etmeyen stratejiler* olarak ifade edildiği de görülmüştür.

Örüntülere ilişkin ifade edilen yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve diğer stratejiler değişen örüntülerde; örüntünün kuralını bulmada, örüntüyü devam ettirmede ve örüntü oluşturmada nasıl kullanıldıkları incelenmiştir.

1.1.6.1. Değişen Örüntülerde Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Değişen örüntüler ve bunlarda kullanılan stratejiler; değişen sayı örüntülerinde kuralı bulmada kullanılan stratejiler ve değişen şekil örüntülerinde kuralı bulmada kullanılan stratejiler olmak üzere iki başlık altında ele alınmıştır.

1.1.6.1.1. Değişen Sayı Örüntülerinde Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Sabit ya da artarak değişen sayı örüntüleri, sayı dizisi ya da fonksiyon tablosu ile ifade edildiği için, bu tür örüntülerde kullanılan stratejiler, örüntünün ifade ediliş biçimine göre ayrılarak, sayı dizisi biçiminde verilen sayı örüntülerinde kuralı bulmada kullanılan stratejiler ve fonksiyon tablosu biçiminde verilen sayı örüntülerinde kuralı bulmada kullanılan stratejiler şeklinde ele alınmıştır.

1. Sayı Dizisi Biçiminde Verilen Sayı Örüntülerinde Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Alan-yazın taramasından elde edilen bilgiler doğrultusunda, sayı dizisi biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde kuralı bulmada, öğrenciler tarafından kullanılan stratejiler genel sınıflama çerçevesinde aşağıdaki şekilde ele alınmıştır.

- ***Yinelemeli stratejiler:*** Sayı dizisi biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde, bu kapsamda öğrenciler tarafından kullanılan stratejiler; *farklılığı arama* ve *farklılık arasında farklılık arama'*dır (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998**;** 1999).

  ***** *Farklılığı arama: F*arklılığı arama, en çok kullanılan stratejilerden biridir. Bu strateji genel olarak sayı dizisi biçiminde verilen bir örüntüde, ardışık terimler arasındaki farkların aranmasıdır. Örneğin;

1 3 5 7 9 2 4 8 14 22

2 2 2 2 2 4 6 8

* *Farklılık arasında farklılık arama:* Bu strateji, örüntüde terimler arasındaki farkların eşit olmaması durumunda, terimler arası farklar ile oluşan yeni sayı dizisinde *farklılığı arama* stratejisinin ugulanmasıdır. Örneğin;

2 4 7 11 16

2 3 4 5

1 1 1

- ***Değişkenler arası ilişki bulma stratejileri:*** Sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntülerinde, bu kapsamda öğrenciler tarafından kullanılan stratejiler, *çarpım tablosu arama, lineer yöntem, orantısal akıl yürütme stratejileri*'dir.

* *Çarpım tablosu arama (Looking for multiplication tables):* Bu strateji, bir sayının sıralı tam katlarını, verilen örüntünün terimleri ile ilişkilendirme biçimidir. Örneğin, aşağıda verilen sabit değişen sayı örüntüsünde, öğrenciler tarafından kullanılan bu strateji ile örüntünün terimleri üçün sıralı tam katları ile ilişkilendirilmektedir.

4 7 10 13 16

4= 3+1= (3.1)+1

7= 6+1= (3.2)+1

10= 9+1= (3.3)+1

13= 12+1=(3.4)+1

16= 15+1= (3.5)+1

Uygulanan bu strateji ile örüntü devam ettirilebilir. Örneğin, 20. terim bulunmak istendiğinde (3.20)+1 ilişkisi kullanılarak 61 sayısı elde edilir (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998**;** 1999).

* *Lineer yöntem (Linear method):* Bu strateji a ve b sabit $(a \neq 0)$, n terim sırasını belirtmek üzere an+b cebirsel yapısı ile tanımlanan bir stratejidir. Öğrenciler tarafından kullanılmış bu stratejinin bir örneği aşağıda verilmiştir. Örneğin,

4 10 16 20 26 32 40

şeklinde verilen sabit değişen bir sayı örüntüsünde 100. adımda yer alan terim sayısı; (100-7).6=558, [f(7)= 40] 558+40=598 olacak şekilde elde edilmiştir. Bu strateji n. adım için düşünüldüğünde (n-7).6+f(7) şeklinde modellenir. Buradan (n-7).6+40=6n-42+40=6n-2 şeklinde örüntünün genel kuralı elde edilir (Stacey, 1989).

* *Orantısal (Doğru orantısal) akıl yürütme stratejisi:* Orantısal akıl yürütme, orantısal durumlar içindeki çarpımsal ilişkili matematiksel yapıları anlayabilmektir (Akkuş Çıkla ve Duatepe, 2002, s.32). Diğer bir değişle, orantısal akıl yürütme, bir x değişkeni büyüdüğünde ya da küçüldüğünde, bir y değişkeninin de aynı oranda büyüyeceğinin ya da küçüleceğinin bilinmesidir (Vollrath, 1986, s. 388). Örneğin;

4 8 12 16 ---

şeklinde sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde, birinci terim 4 ise, beşinci terim 4.5=20'dir.

- ***Diğer stratejiler:*** Bu kapsamda yer alan stratejiler; *sayıların doğasına bakma, farklılığın doğasına bakma* ve *terimleri birleştirme'*dir (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998**;** 1999).

* *Sayıların doğasına bakma:* Sayı örüntülerinde kullanılan genel bir strateji olup, örüntüdeki sayılar için bir nitelik ya da özelliğin aranmasıdır. Örneğin,

3 8 13 18 23

şeklinde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde terimlerin tek, çift, tek, çift, tek şeklinde devam ettiğinin ifade edilmesi bu stratejiye ilişkin bir örnektir.

* *Farklılığın doğasına bakma:* Artarak değişen sayı örüntülerinde uygulandığı görülen bu strateji, örüntünün terimleri arasındaki farkın sabit olmaması durumunda, bulunan farkların doğasından yararlanarak çıkarsamada bulunmadır. Örneğin, aşağıda verilen artarak değişen sayı örüntüsünde terimler arasındaki farklılık bulunduktan sonra, farkların tek sayı olduğunun ifade edilmesi bu stratejiye bir örnektir.

2 5 10 17 26

3 5 7 9

* *Terimleri birleştirme:* Bu strateji, örüntüdeki bir terimi bulmak için, o terimden önce gelen terimlerinin toplanması şeklinde izlenen yoldur. Örneğin,

2 5 10 17 26

verilen örüntüde, bir öğrenci 2+5+10=17 olacak biçimde, ilk üç terimi toplamış dördüncü terimi bulmuştur. Daha sonra terimlerin çift, tek, çift, tek olarak devam ettiğini fark etmiş ve bu verileri örüntünün terimlerini bulmada kullanmayı planlamıştır. Daha sonra 10+17+26=53 toplamını elde etmiş ancak hatalı olarak altıncı terimi bulmuştur.

2. Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Sayı Örüntülerinde Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Alan-yazın taramasından elde edilen bilgiler doğrultusunda fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde kuralı bulmada kullanılan stratejiler, genel sınıflama içinde yer alan *yinelemeli* ve *değişkenler arası ilişki bulma* stratejileridir (Looney, 2004; Ley, 2005; Lannin, Barker ve Townsend, 2006).

- ***Yinelemeli strateji:*** Fonksiyon tablosu biçiminde verilen sayı örüntülerinde yinelemeli strateji ile sadece ardışık çıktı değerleri, yani n. ve (n+1). çıktı değerleri arasında genel bir ilişki kurulur. Örneğin, aşağıdaki tabloda çıktı değerleri 2, 4, 6, 8… şeklinde verilen sabit değişen bir sayı örüntüsünde, yinelemeli stratejiyi kullanan bir öğrenci, sadece çıktı değerlerini göz önüne alarak her çıktı değerinin, bir önceki çıktı değerinden iki fazla olduğunu belirtir.

Girdi	Çıktı
1	2
2	4
3	6
4	8

- ***Değişkenler arası ilişki bulma stratejisi:*** Fonksiyon tablosu biçiminde verilen sayı örüntülerinde değişkenler arası ilişki bulma stratejisi ile, girdi ve çıktı değerleri aynı anda göz önüne alınır. Diğer bir deyişle, girdi değerleri ve onlara ilişkin çıktı değerleri arasında genel bir ilişki kurulur. Örneğin, yukarıdaki tabloda girdi ve çıktı değerlerini kullanan bir öğrenci, 1 girdi değerine karşılık 2 çıktı değeri, 2 girdi değerine karşılık 4 çıktı değeri, 3 girdi değerine karşılık 6 çıktı değeri …olduğunu fark edip, çıktı değerinin, girdi değerinin iki ile çarpımı olduğunu belirtebilir.
- ***Girdi ve çıktı değerleri arasında farklılığı arama stratejisi:*** Bu strateji, aşağıdaki tabloda da görüldüğü gibi, girdi ve çıktı değerleri arasındaki farkların bulunmasıdır. Böylece stratejinin genel formu $f(n)=n+g(n)$ olarak

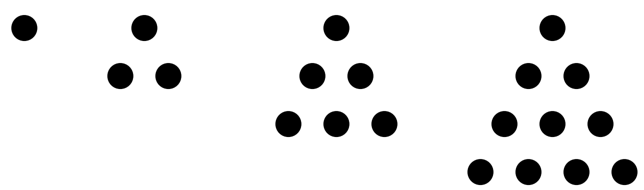
gösterilmektedir. Bu stratejide, f(n) değerine, tanımlanmış g(n) ile ulaşılabilir (Martinez ve Brizuela, 2006). Örneğin, tabloda bu tür bir stratejinin uygulandığı örüntü görülmektedir.

Girdi		Çıktı
1	$\xrightarrow{+3}$	4
2	$\xrightarrow{+4}$	6
3	$\xrightarrow{+5}$	8
4	$\xrightarrow{+6}$	10

1.1.6.1.2. Değişen Şekil Örüntülerinde Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Şekil örüntülerinde kullanılan stratejiler ise*, cebirsel/sayısal* ve *geometrik/görsel* olmak üzere iki yaklaşım altında ele alınmaktadır.

Cebirsel/sayısal yaklaşım; verilen örüntünün her adımında yer alan şekillerin sayısallaştırılarak, şekil örüntüsünün sayı örüntüsüne dönüştürülmesidir (Stacey, 1989, s. 150; Orton, Orton ve Roper 1999, s. 122**,** Krebs, 2005, ss. 284-285). Örneğin;



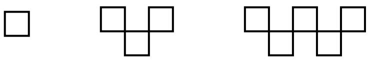
1 3 6 10

Yukarıdaki şekil örüntüsünde, her şekilde verilen noktalar sayılarak, verilen şekil örüntüsü sayı örüntüsüne dönüştürülür. Daha sonra sayı örüntülerinde kullanılan yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve diğer stratejiler dikkate alınabilir. *Geometrik/görsel yaklaşım ise,* şeklin yapısal özelliğinin dikkate alınmasıdır (Krebs, 2005, ss. 284-285).

Her şekle göre kullanılan stratejiler çeşitlilik göstermesine karşın, şekil örüntülerinde görsel yaklaşım altında, şeklin yapısına bağlı olarak *yinelemeli*, *değişkenler arası ilişki bulma* ve *diğer stratejiler* içinde yer alan stratejiler kullanılmaktadır.

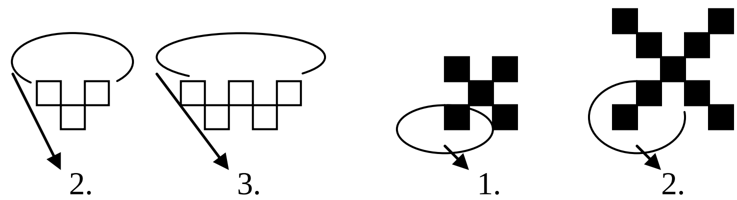
- ***Yinelemeli stratejiler:*** Bu kapsamda yer alan strateji, *bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme stratejisi*'dir.

* *Bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme:* Örüntüdeki ardışık şekillerin oluşumunda geçerli ve örüntüdeki şekillerin oluşum yapısının korunduğu bir kural aramadır. Bu strateji aşağıda verilen örnek üzerinde açıklanabilir. Örüntüde ardışık şekillerin yapısı dikkate alındığında, önceki adımda yer alan kare sayısına şeklin yapısal özelliğine göre, iki kare eklenerek, bir sonraki adım elde edilmektedir (Sasman, Olivier ve Linchevski, 1999, s. 5).



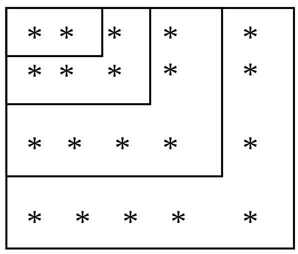
- ***Değişkenler arası ilişki bulma stratejileri:*** Bu kapsamda kullanılan stratejiler, *fonksiyonel bir ilişki bulma* ve *görme stratejisi*'dir.

* *Fonksiyonel bir ilişki bulma:* Sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerinde, örüntüdeki şekillerin yapısının şekil sırası (terim sırası/adım sayısı) ile ilişkilendirilmesi yoluyla kuralın bulunmasıdır. Örneğin,



verilen birinci şekil örüntüsünde, örüntüdeki şekillerin oluşum yapısı nedeniyle kareler iki sıra oluşturmaktadır. Alt ve üst sırada yer alan kare sayıları ve ikinci şekil örüntüsünde ortadaki karenin köşelerinde yer alan kare sayıları, terim sırası (adım sayısı) ile ilişkilendirilir. Elde edilen bu fonksiyonel ilişkiler, örüntülerdeki şekillere ilişkin farklı arayışlara yanıt aramada, genel kural oluşturmada etkili olur. Örneğin, birinci şekil örüntüsünde, şekillerdeki karelerin toplam kenar sayısı ve ikinci şekil örüntüsünde şekillerdeki toplam kare sayısının bulunabileceği genel kural oluşturulabilir. Böylece birinci şekil örüntüsünün aranan yanıtı için genel kuralı [n+(n-1)].4=8n-4, ikinci şekil örüntüsünün aranan yanıtı için, genel kural 4n+1 şeklinde ifade edilebilir (Sasman, Olivier ve Linchevski, 1999, ss. 6-7).

* *Görme stratejisi:* Verilen şekil örüntüsünün zihinde çizilerek genişletilmesidir. Örneğin, aşağıda verilen şekilde iç içe geçmiş dikdörtgenler yer almaktadır. En içteki dikdörtgende iki yıldız, ikincisinde altı yıldız, üçüncüsünde oniki yıldız, dördüncüsünde ise, yirmi yıldız yer almaktadır. Buna göre,



Beşinci dikdörtgende kaç yıldız olmalıdır?
100. dikdörtgende kaç yıldız olmalıdır? Nasıl bulabilirsin?
n. dikdörtgende kaç yıldız olmalıdır? Nasıl bulabilirsin?
Şeklinde yöneltilen sorulara yanıt ara.

Verilen şekil örüntüsünde, farklılıkları sağlayan sınırlar L-şekliyle dikkati çekmektedir. Bir süre sonra şekildeki algı, L şeklindeki sınırlardan kutular algısına dönüşebilir. Bu örnekte bazı öğrenciler, L şeklindeki sınırlar dışındaki farklılığı kullanmadan, dikdörtgen üzerindeki yıldızların sayısına odaklanarak yani, boyutları 2.1, 3.2, 4.3, 5.4, … ve n.(n+1) olan dikdörtgenleri dikkate alarak, daha kolay çözüme ulaşabilmişlerdir (Lee ve Wheeler, 1987; Akt. Orton, Orton ve Roper, 1999, ss. 122-123).

- ***Diğer stratejiler:*** Bu strateji kapsamında yer alan strateji, *modelleme yapma*'dır.

  * *Modelleme yapma:* Bir şekil çizme ya da problemi temsil eden bir model oluşturma ve istenilen niteliği saymadır (Lannin, 2003; 2005).

1.1.6.2. Değişen Örüntüleri Devam Ettirmede Kullanılan Stratejiler

Bir örüntüde kuralı bulmada kullanılan stratejiler, örüntüyü devam ettirirken de dikkate alınmaktadır. Ancak bazı durumlarda, örüntünün kuralı doğru bir şekilde tanımlanırken, örüntünün devamında bu kuralın göz ardı edildiği ya da hatalı uygulandığı gözlenebilmektedir (Stacey, 1989, s.155; Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1999, s.79).

Alan-yazın taramasından elde edien bilgiler doğrultusunda değişen örüntüleri devam ettirmede öğrenciler tarafından kullanılan stratejiler genel sınıflama çerçevesinde ele alınmıştır.

- ***Yinelemeli stratejiler:*** Bu kapsamda yer alan stratejiler örüntüyü devam ettirmede daha çok yakın bir adımdaki terimi bulmada kullanılmaktadır (Ley, 2005; Samsan, Olivier ve Linchevski, 1999).

- ***Değişkenler arası ilişki bulma stratejileri:*** Bu kapsamda yer alan stratejiler örüntüyü devam ettirmede daha çok sonlu bir adımdaki terimi bulmada kullanılmaktadır (Ley, 2005; Samsan, Olivier ve Linchevski, 1999).

- ***Diğer stratejiler:*** Örüntüyü devam ettirmede bu kapsamda yer alan stratejiler; *bütüne genişletme stratejisi* ve *farkın çarpımı stratejisi*'dir.

* *Bütüne genişletme stratejisi* (*Whole Object Method):* Sayı örüntülerinde kullanılan bu strateji, bilinen doğru bir ifadeden hareketle, benzer bir mantığın örüntüde bir terimi bulmak amacıyla kullanılmaya çalışıldığı ve çoğunlukla da hatalı olarak kullanıldığı bir stratejidir (Stacey, 1989; Lannin, 2003; Ley, 2005). Örneğin,

1 4 7 10 13

şeklinde verilen bir sayı örüntüsünde 20. terimi bulabilmek için, 20=4.5 çarpımındaki mantığı, aranan örüntü terimini bulmak için kullanarak f(20)=4. f(5) biçiminde hesaplama yapılmasıdır. Bu strateji, n=k.m ise, f(n)=k.f(m) şeklinde modellenebilir.

* *Farkın Çarpımı Stratejisi (Difference Method):* Sabit değişen örüntülerde sabit farklılığın tanımlanması ve daha sonra terim sırası ile farkın çarpılmasıdır (Stacey, 1989, s. 150). Bu strateji, genel formu y=mx dışındaki sabit değişen örüntülerde hatalı olarak kullanılan stratejidir. Örneğin,

3 5 7 9

şeklinde sabit farklılığı iki olan bir örüntüde 25. terimi bulabilmek için, 25.2=50 biçiminde hesaplama yapılmasıdır.

1.1.6.3. Değişen Örüntü Oluşturmada Kullanılan Stratejiler

Alan-yazın taraması sonucunda sayı örüntüleri dışında şekil ya da fonksiyon tablosu biçiminde verilen örüntülerinin oluşturulmasına yönelik bir araştırma bulgusu elde edilememiştir. Sayı dizisi biçiminde verilen sayı örüntüleri oluşturulurken ise, öğrencilerin *kat alma*, *farklılığı arama*, *terimlerin atlanması* ve *azalan bir örüntü oluşturma* şeklinde stratejileri kullandığı görülmüştür (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1999, ss. 80-81).

* *Kat alma stratejisi:* Bu strateji, belli bir terimin katlarının alınarak örüntünün oluşturulmasıdır. Örneğin,

11 22 33 44 55

şeklinde verilen bu örüntü 11'in katları alınarak oluşturulmuştur. Bu strateji sayı örüntüsü oluşturmada en çok kullanılan stratejilerden biridir.

* *Farklılığı Arama:* Örüntü oluştururken, bir önceki terime sabit fark ekleyerek ya da seçilen başlangıç sayısının, örüntünün her bir terimini oluşturmada, önceki terime ekleyerek bir sonraki terimin elde edilmesidir. Örüntü oluştururken farklılığı arama stratejisi de en çok kullanılan stratejidir. Örneğin,

368 736 1104 1472 1840

şeklinde verilen örüntü başlangıçtan itibaren her terime başlangıç sayısı eklenerek oluşturulmuştur.

368+368=736   736+368=1104   1104+368=1472   1472+368=1840

* *Terimlerin Atlanması:* Bu strateji, örüntü oluşturmada başlangıçtan itibaren bazı terimleri atlayarak, arada kalan terimler ile örüntünün oluşturulmasıdır. Örneğin, aşağıdaki örüntünün oluşumu, üç terim atlanarak gerçekleştirilmiştir.

1 5 9 13 17

2-3-4 6-7-8 10-11-12 14-15-16

* *Azalan Bir Örüntü Oluşturma:* Örüntü oluşturulurken, çok ender de olsa kuralı daha karmaşık stratejiler kullanılmaktadır. Örneğin,

44 28 20 16 14

şeklinde verilen örüntünün oluşumunda kullanılan kural, başlangıç teriminden itibaren, devam eden terimlerin, önceki terimin yarısının altı fazlasını alarak oluşturulmasıdır.

f(1)=44
f(2)=[f(1):2]+6=28
f(3)=[f(2):2]+6=20
f(4)=[f(3):2]+6=16
f(5)=[f(4):2]+6=14

1.1.7. İlgili Araştırmalar

Bu araştırma, ilköğretim beşinci sınıf düzeyinde gerçekleştirildiği için örüntülere ilişkin araştırmalar içinden, aşağıda ulaşılabilen sadece ilköğretim basamağı ile ilgili olanlar verilmiştir.

Lan Ma (2007), araştırmasında ilköğretim beşinci ve altıncı sınıf öğrencilerinin artarak değişen bir örüntüde, nasıl genelleme yaptıklarını ve süreci nasıl analiz ettiklerini, başarılı bir genelleme yapabilmede öğrencileri engelleyen nedenlerin neler olduğunu ve öğrencilerin yararlandıkları yaklaşımları belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma yüksek, orta ve düşük başarı düzeylerine sahip toplam 40 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere dört tane artarak değişen şekil ve dört tane sayı dizisi biçiminde verilen sayı örüntüsü sunulmuştur. Bu örüntü sorularından bir tanesi hem şekil hem de sayı dizisi biçiminde hazırlanmıştır. Öğrencilerden, örüntüleri 5., 10. ve 100. adıma devam ettirmeleri istenmiştir. Bu araştırmada öğrencilerin sadece, hem şekil hem de sayı dizisi biçiminde verilen, artarak değişen örüntü sorusuna ilişkin sonuçları verilmiştir. Araştırma sonunda, öğrencilerin şekil örüntülerinde görsel ve cebirsel yaklaşımı kullandıkları görülmüştür. Görsel yaklaşımı benimseyen düşük ve orta başarılı iki öğrencinin, bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme stratejisini kullandıkları ve bu bağlamda örüntüyü yakın bir adıma devam ettirebildikleri ancak sonlu bir adıma devam ettiremedikleri, yüksek başarılı bir öğrencinin ise, şeklin yapısına bağlı genel kuralı elde ettiği ve dolayısıyla örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirebildiği belirlenmiştir. Cebirsel yaklaşımı kullanan orta ve yüksek başarılı iki öğrencinin ise, örüntüde sadece girdi değerlerine odaklandıkları ve örüntüyü yakın bir adıma devam ettirebildikleri ancak sonlu bir adıma devam ettirirken bütüne genişletme (whole object) stratejisini kullandıkları ortaya çıkmıştır. Sayı dizisinde ise, öğrenciler terimler arası farklılığı arama ve bir sayının katlarını arama stratejilerini kullandıkları ve bu bağlamda örüntüyü yakın bir adıma devam ettirebildikleri ancak sonlu bir adıma devam ettiremedikleri belirlenmiştir. Sonuç olarak, başarılı bir genelleme yapabilmede öğrencileri engelleyen temel nedenin, öğrencilerin örüntüyü genelleyebilmeleri buna karşın diziyi genelleyememeleri olduğu görülmüştür. Ayrıca görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerin genelleme yapabilme potansiyelinin daha fazla olduğu sonucuna da ulaşılmıştır.

Martinez ve Brizuela (2006) araştırmalarında, ilköğretim üçüncü sınıfa giden bir öğrencinin, fonksiyon tablosu ile verilen sabit değişen bir sayı örüntüsünde kullandığı bir strateji tartışılmıştır. Araştırmada öğrenciye bir tane sözel örüntü problemi verilmiş ve bu problemi bir fonksiyon tablosunda çözmesi istenmiştir. Öğrenci, tabloda çıktı değerlerinden girdi değerlerini çıkararak bir sayı dizisi elde etmiş ve bu sayıların bir artarak devam ettiğini ifade etmiştir. Araştırma sonunda öğrencinin kullandığı stratejinin, skaler ve fonksiyonel bir yaklaşım arasında kalan bir strateji olduğu sonucuna ulaşılmıştır.

Becker ve Rivera (2006) araştırmalarında, öğrencilerin örüntüleri genellerken kullandıkları şekilsel ve sayısal stratejilerini belirlemeyi amaçlamışlardır. Araştırma ilköğretim altıncı sınıfa giden toplam 29 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere sekiz hafta süren bir öğretim uygulanmış, öğretim öncesi ve sonrası kimi öğrenciler ile görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonunda, öğrencilerin şekil örüntülerinde görsel ve cebirsel yaklaşımı benimsedikleri görülmüştür. Ön görüşme sonuçlarına göre, cebirsel yaklaşımı benimseyen kimi öğrencilerin farklılığı arama stratejisini kullanarak örüntüyü yakın bir adıma devam ettirdikleri belirlenmiştir. Ayrıca örüntüyü yakın bir adıma devam ettirmede, kimi öğrencilerin görsel yaklaşımı kullandığı da görülmüştür. Örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmede ise, öğrencilerin görsel ve cebirsel yaklaşımı kullanma oranının aynı olduğu görülmüştür. Ancak cebirsel yaklaşımı kullanan öğrencilerin, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmede zorlandıkları, görsel yaklaşımı kullanan öğrencilerin ise örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmede, sonlu adımdaki şekli doğru olarak belirledikleri ortaya çıkmıştır. Bunların dışında, görsel yaklaşımı kullanan öğrencilerin, şeklin yapısına bağlı olarak fonksiyon kuralını da elde ettikleri, kimi öğrencilerin ise, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken hatalı bir strateji olan farkın çarpımı stratejisini kullandıkları görülmüştür. Son görüşmelerden elde edilen sonuçlar ise şöyledir. Kimi öğrencilerin sabit değişen örüntülerde sayısal ya da görsel yaklaşımı kullanarak genel kuralı elde edebildiği, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmeden önce, örüntünün genel kuralını belirlediği sonuçları elde edilmiştir. Ayrıca ön görüşmelerde görsel yaklaşımı tercih eden öğrencilerin son görüşmelerde ise, sayısal yaklaşımı tercih ettikleri de belirlenmiştir.

Warren (2005) araştırmasında, küçük çocukların tekrarlanan ve değişen örüntüleri nasıl genelledikleri ve bu genellemeleri nasıl sembolleştirdiklerini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma orta başarı düzeyine sahip 24 ve yüksek başarı düzeyine sahip 21 öğrencinin yer aldığı bir ilköğretim okulunda, iki farklı sınıfta toplam 45 öğrenci (yaklaşık 9 yaş) üzerinde, bir öğretim yapılarak gerçekleştirilmiştir. Öğretim yapılmadan önce, öğrencilerin tekrarlanan ve değişen örüntülere ilişkin yeteneklerini belirlemek için öğrencilere bir ön test uygulanmıştır. Öğretim süreci ise; tekrarlanan örüntülerle ilgili olmak üzere, örüntü oluşturma ve devam ettirme, örüntüdeki verileri bir fonksiyon tablosuna yerleştirme, tablodaki ilişkileri tanımlama ve kullanma aşamalarının yer aldığı örüntü etkinlikleri ile gerçekleştirilmiştir. Araştırma sonunda, öğrencilerin değişen örüntülerde, tekrarlanan örüntülere nazaran daha çok zorlandıkları görülmüştür. Öğretimler sırasında öğrencilerin çoğunluğunun tekrarlanan bir örüntü oluşturabildikleri, KYYKYYKYY şeklinde tekrarlanan bir örüntüde K ve Y sayılarını bir fonksiyon tablosuna yerleştirdikleri ve bu tabloda daha çok çıktı değerlerine odaklandıkları belirlenmiştir. Ancak bir fonksiyon tablosunda girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişkinin incelenmesine yönelik öğretim yapıldıktan sonra, çıktı değerlerine olan eğilimlerde değişmeler olduğu ve 100. adım gibi büyük sayılarda doğru yanıtlar elde edildiği görülmüştür. Sonuç olarak, öğretimler sonucunda küçük çocukların girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişkiyi bulabildikleri ve aynı zamanda bu ilişkiyi soyut sembollerle de ifade edebildikleri belirlenmiştir.

Ley (2005) araştırmasında, öğrencilerin lineer örüntü problemlerine yönelik yeteneklerini belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma ikinci sınıftan beşinci sınıfa kadar toplam 97 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere genel formları mx+b ve mx olan beş lineer örüntü problemi; şekil, sayı dizisi, fonksiyon tablosu ve sözel örüntü problemleri şeklinde farklı biçimlerde sunulmuştur. Örüntü sorularında öğrencilerden, örüntülerin kuralını, 5., 9. ve 41. adımlarını bulmaları istenmiştir. Verilerin analizinde öğrencilerin kullandıkları stratejiler; çıktı değerlerine odaklanan (recursive), girdi-çıktı değerlerine odaklanan (explicit) ve bilmiyorum ya da tahmin ediyorum vb. gibi yanıtları içine alan *etki etmeyen stratejiler* şeklinde üç başlık altında ele alınmıştır. Araştırma sonunda, örüntülerin sunuluş biçiminin, strateji seçiminde etkili olduğu görülmüştür. Öğrencilerin özellikle örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken tek veri setine odaklanan stratejileri daha sık, iki veri setine odaklanan stratejileri ise daha az kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca iki veri setine odaklanan stratejileri, kimi öğrencilerin şekil örüntülerinde özellikle örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken daha sık kullandıkları da görülmüştür. Bunların dışında öğrencilerin yaşları büyüdükçe etkisiz strateji kullanımlarının azaldığı, iki veri setine odaklanan strateji kullanımlarının arttığı, örüntü problemlerin çözümünün doğruluğunun örüntüyü yakın bir adıma devam ettirmede yüksek, sonlu bir adıma devam ettirmede azalan ve daha uzak sonlu bir adıma devam ettirmede ise, son derece düşük olduğu da elde edilen sonuçlar arasındadır.

Blanton ve Kaput (2004) araştırmalarında, anasınıfı öncesinden başlamak üzere, beşinci sınıf sonuna kadar tüm öğrencilerin, fonksiyonel bir ilişkiyi nasıl belirlediklerini ve nasıl ifade ettiklerini ortaya koymayı amaçlamışlardır. Öğrencilerin yanıtları, görüşmelerle ve yazılı olarak toplanmıştır. Öğrencilere sabit değişen iki örüntü problemi sunularak, onlardan örüntülerin kuralını bulmaları ve sonlu bir adıma devam ettirmeleri istenmiştir. Böylece öğrencilerin hangi temsil biçimlerini seçtikleri, fonksiyonel ilişkiyi tanımlarken nasıl bir matematiksel dil kullandıkları, öğrencilerin verileri nasıl sıraladıkları ve düzenledikleri, fonksiyonel ilişkiyi bulurken hangi matematiksel işlemleri kullandıkları ve fonksiyonel bir ilişkiyi nasıl ifade ettikleri belirlenmek istenmiştir. Araştırma sonunda, öğrencilerin matematiksel ilişkileri tablo, grafik, şekil, sözel ve sembol kullanarak ifade ettikleri görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin örüntülerde; görsel olarak nesneleri sayma, şekil çizme, işaretleyerek sayma gibi stratejiler kullandıkları belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin veriyi sıralarken ve düzenlerken fonksiyon tablosu kullandıkları, sınıf düzeyi yükseldikçe fonksiyonel bir ilişkiyi sembolize ettikleri ve bunu sözel olarak ifade ettikleri, fonksiyonel ilişkiyi bulurken çarpma ve toplama gibi cebirsel işlemleri kullandıkları da görülmüştür.

Looney (2004) araştırmasında, öğrencilerin bir örüntüyü devam ettirme, örüntünün öğeleri arasındaki fonksiyonel ilişkiyi gösterme ve örüntünün öğeleri arasındaki ilişkiyi sözel ifade ya da sembol kullanarak temsil etme yeteneklerini değerlendirerek, öğrencilerin fonksiyon kavramını anlamalarını belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma ilköğretim üçüncü, dördüncü ve beşinci sınıflarda okuyan toplam 228 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğrencilerin örüntü ve fonksiyon kavramını anlamalarını değerlendirmek için bir ölçme aracı geliştirilmiştir. Ölçme aracında örüntü soruları fonksiyon tablosu, şekil ve sayı dizileri şeklinde üç biçimde sunulmuştur. Araştırma sonunda; beşinci sınıf öğrencilerinin dördüncü ve üçüncü sınıf öğrencilerine göre daha başarılı oldukları görülmüştür. Bunun dışında öğrencilerin en çok fonksiyon tablosu daha sonra şekil ve sayı dizisi biçiminde verilen örüntülerde başarılı oldukları, öğrencilerin örüntüleri devam ettirmede, örüntüleri tanımlama ve sembolleştirmeye göre daha başarılı oldukları ancak, örüntünün öğeleri arasındaki fonksiyonel bir ilişkiyi bulmada yeterince başarılı olamadıkları belirlenmiştir. Diğer taraftan öğrencilerin örüntülerdeki ilişkiyi sözel ya da sembol kullanarak başarılı bir şekilde ifade ettikleri de belirlenmiştir. Ayrıca tüm öğrencilerin örüntü sorularını çözerken yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve diğer stratejileri kullandıkları görülmüştür. Üçüncü sınıf öğrencilerinin yinelemeli stratejileri, değişkenler arası ilişki bulma stratejisine oranla daha çok kullandıkları, dördüncü ve beşinci sınıf öğrencilerinin genel olarak değişkenler arası ilişki bulma, yinelemeli ve diğer stratejileri kullandıkları belirlenmiştir. Diğer taraftan öğrencilerin fonksiyon tablosu biçiminde verilen sayı örüntülerinde en fazla değişkenler arası ilişki bulma stratejisini, sayı dizisi biçiminde verilen sayı örüntülerinde yinelemeli ve şekil örüntülerinde ise, yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve diğer stratejileri kullandıkları görülmüştür.

Lin ve Yang (2004) araştırmalarında, ilköğretim öğrencilerinin, sabit ve artarak değişen şekil örüntülerine ilişkin düşünme süreçlerini belirlemeyi amaçlamışlardır. Araştırma 1181 ilköğretim yedinci sınıf, 1105 ilköğretim sekizinci sınıf öğrencisi üzerinde gerçekleştirilmiştir. Verilerin toplanmasında sabit ve artarak değişen şekil örüntülerinden oluşan bir ölçme aracı hazırlanmış, verilerin analizinde ise, altı maddeden oluşan bir kodlama anahtarı kullanılmıştır. Araştırma sonunda, yedinci ve sekizinci sınıf öğrencilerinin artarak değişen şekil örüntülerini, sabit değişen şekil örüntülerine göre daha iyi genelledikleri görülmüştür. Sabit değişen şekil örüntüsünü, yedinci sınıf öğrencilerinin %35.4'ü, sekizinci sınıf öğrencilerinin %52.7'si doğru yanıtlamıştır. Yanlış yanıtlarda ise, orantısal akıl yürütme stratejisi kullanılmıştır. Artarak değişen şekil örüntüsünü ise, yedinci sınıf öğrencilerinin %36.3'ü, sekizinci sınıf öğrencilerinin %64.3'ü doğru yanıtlamıştır.

Samsan, Olivier ve Linchevski (1999) araştırmalarında, öğrencilerin düşünme süreçlerini genellerken farklı temsillerin etkisini belirlemeyi amaçlamışlardır. Araştırma ilköğretim sekizinci sınıfa giden toplam 10 öğrenci üzerinde, görüşme yapılarak gerçekleştirilmiştir. Görüşmelerde öğrencilere sabit ve artarak değişen sekiz örüntü etkinliği, dördü fonksiyon tablosu, dördü ise şekil kullanılarak sunulmuştur. Örüntü sorularında bir sayının katı olarak ifade edilebilen ve çekici sayılar adı verilen (5., 20. ve 100. adım gibi) ve bir sayının katı olmayan (19., 59. adım gibi) adım sayıların bulunması istenmiştir. Araştırma sonunda, öğrencilerin çoğunluğunun, herhangi bir etkinlikte örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken zorlanmadıkları, fonksiyon kuralını buldukları ve doğru bir şekilde kullandıkları, kimi öğrencilerin ise, örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken sadece çıktı değerlerine odaklandıkları görülmüştür. Ayrıca örüntüleri sonlu bir adıma devam ettirirken, kimi öğrencilerin doğru kimilerinin de yanlış stratejiler kullandığı belirlenmiştir. Şekil ve fonksiyon tablosu ile verilen artarak değişen örüntülerde kimi öğrencilerin fonksiyon kuralını kolayca bulduğu, buna karşın sabit değişen şekil ve sayı örüntülerinde daha az sayıda öğrencinin fonksiyon kuralına ulaşabildiği görülmüştür. Fonksiyon tablosunda çıktı değerlerine odaklanan öğrencilerin, sabit değişen örüntülerde terimler arası farklığı, artarak değişen örüntülere nazaran daha kolay buldukları belirlenmiştir. En fazla kullanılan yanlış stratejinin ise, çekici sayılarda bütüne genişletme (whole object) stratejisi olduğu görülmüştür. Yanlış stratejilerden bir diğerinin ise, hem çekici ve hem de çekici olmayan sayılarda uygulanan farkın çarpımı stratejisi olduğu belirlenmiştir. Diğer taraftan, tüm etkinliklerde öğrencilerin çoğunluğunun bir fonksiyonun kuralını, sembol yerine daha çok sözel olarak ifade ettikleri sonucuna da ulaşılmıştır.

Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall (1998) araştırmalarında, öğrencilerin sayı örüntülerini nasıl genellediklerini ve nasıl bilişsel bir süreç geçirdiklerini belirlemeyi amaçlamışlardır. Araştırma 7-11 yaş arasında toplam 315 öğrenci üzerinde gerçekleştirilmiştir. Araştırma verileri sabit değişen, artarak değişen ve fibonacci örüntülerini içeren ve toplam dokuz sorudan oluşan bir ölçme aracıyla toplanmıştır. Ayrıca 60 öğrenci ile de bireysel görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonunda, öğrencilerin farklı tip genellemeler yaptığı ve farklı bilişsel süreçler geçirdikleri görülmüştür. Öğrencilerin farklılığı arama, farklılığın doğasına bakma, farklılık arasında farklılık arama, sayıların doğasına bakma, çarpım tablosu arama ve terimleri birleştirme şeklinde stratejiler kullandıkları belirlenmiştir. Aynı zamanda kimi öğrencilerin sayı örüntülerine değişken bir tarzla yaklaştıkları ancak, çoğunluğunun en fazla farklılığı arama stratejisini kullandıkları görülmüştür. Kimi öğrencilerin de farklı örüntü yapılarının farkında oldukları ve örüntülerdeki ilişkiyle ilgili genelleme yapabildikleri belirlenmiştir. Ayrıca öğrencilerin yaşları artıkça uygun stratejileri seçtikleri ve verilen bir sayı örüntüsüyle ilgili genelleme yapmaya çalıştıklarında ise, bir tane tek tip strateji kullandıkları görülmüştür.

Orton ve Orton (1994) araştırmalarında öğrencilerin örüntüleri algılamalarını, örüntüleri kullanmalarını ve genellemelerini belirlemeyi amaçlamışlardır. Bu bağlamda araştırma dört tane çalışmadan oluşmuştur. Dört çalışmanın ikisinde sabit ve artarak değişen örüntülerden oluşan bir ölçme aracı kullanılmış, diğer iki çalışmada ise bireysel görüşmeler yapılmıştır. Dört çalışmadan bir tanesi 11-12 yaş grubunda toplam 350 öğrenci üzerinde gerçekleşmiştir. Araştırma sonunda, öğrencilerin çoğunluğunun her iki örüntü çeşidinde de terimler arası farklılığı arama, artarak değişen örüntülerde ise, farkın farkını bulma stratejilerini, düşük başarılı öğrencilerin, sayıların doğasına bakma stratejisini kullandıkları (tek ya da çift sayı), ayrıca sayıların katlarına ve küçük sayılara odaklandıkları görülmüştür. Kimi öğrencilerin ise, artarak değişen örüntüyü genelledikleri, kimilerinin de bu genellemeyi sözlü olarak yaptıkları belirlenmiştir. Diğer taraftan kimi öğrencilerin örüntülerin genel kuralını sembolik olarak ifade etmede zorlandıkları sonucuna da ulaşılmıştır. 11-12 yaş grubunda toplam 24 düşük başarılı öğrenci üzerinde gerçekleştirilen diğer araştırmada ise, öğrencilere kibrit çöpleri ile oluşturulmuş üç tane örüntü sorusu sunulmuş ve öğrencilerden 5. ve 10. adımlar için gerekli olan kibrit çöpü sayısı istenmiştir. Araştırma sonunda, öğrencilerin her örüntüdeki kibrit çöpü sayısını, sayarak buldukları, çok az öğrencinin şekil sayısı ile kibrit çöpü sayısı arasındaki ilişkiyi belirledikleri görülmüştür. Diğer taraftan öğrencilerin çoğunluğunun, yakın adımdaki kibrit çöpü sayısını buldukları ancak sonlu adımdaki kibrit çöpü sayısını bulmakta zorlandıkları sonucuna da ulaşılmıştır. Yüksek başarı düzeyine sahip, 9-13 yaş gubu öğrenciler üzerinde gerçekleştirilen diğer araştırmada ise, öğrencilere diğer çalışmada olduğu gibi kibrit çöplerinden oluşturulmuş üç tane farklı örüntü sorusu sunulmuştur. Örüntüler üç adımda verilmiş ve öğrencilerden örüntünün dördüncü adımını oluşturmaları, daha sonra ise, 5., 20., 100. ve n. adımında yer alan toplam kibrit çöpü sayısını bulmaları istenmiştir. Araştırma sonunda, bir öğrenci dışında tüm öğrencilerin dördüncü şekli oluşturdukları ve tüm öğrencilerin beşinci şekil için gerekli olan kibrit çöpü sayısını buldukları belirlenmiştir. Diğer taraftan kimi öğrencilerin 20. adım, kimilerinin ise, 100. adım için gerekli olan kibrit çöpü sayısına ulaştıkları da görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin bütüne genişletme ve farkın çarpımı şeklinde hatalı stratejileri de kullandıkları belirlenmiştir. Bunların yanı sıra öğrencilerin çoğunluğunun daha çok sözel, kimilerinin ise, n4, nx3+1, 2n+1 şeklinde sembolik genelleme yaptıkları görülmüştür. Sonuç olarak dört çalışmada da, kimi öğrencilerin genelleme yapabildikleri ancak bunu örüntüyü devam ettirmede kullanamadıkları, kimi öğrencilerin aritmetik yetersizliğinin ve sadece çıktı değerlerine odaklanmalarının, ciddi anlamda genelleme yapabilmelerini engellediği belirlenmiştir.

MacGregor ve Stacey (1993) araştırmalarında, yaşları 14 ve 15 olan öğrencilerin, fonksiyon tablolarını nasıl yorumladıklarını ve genelleme için sembol kullanırken karşılaştıkları zorlukların neler olduğunu belirlemeyi amaçlamışlardır. Bu amaçla düşük sosyo-ekonomik düzeydeki bir okulda toplam 143 öğrenciye, genel formları n+4, 3n ve 3n+2 olan, fonksiyon tablosu ile verilmiş örüntüler sunulmuştur. Örüntü sorularında öğrencilerden öncelikle örüntüleri yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmeleri ve örüntünün kuralını bulmaları daha sonra ise, kuralı cebirsel olarak ifade etmeleri istenmiştir. Ayrıca 15 öğrenci ile de bireysel görüşmeler yapılmıştır. Araştırma sonunda, hemen hemen tüm öğrencilerin tabloları doğru bir şekilde okuyabildikleri ve tabloyu devam ettirebildikleri görülmüştür. Ancak görüşmelerden elde edilen sonuçlarda öğrencilerin çoğunluğunun, fonksiyonel ilişkiyi algılayamadıkları belirlenmiştir. Fonksiyonel ilişkiyi algılayan öğrencilerin ise, örüntüleri cebirsel ya da sözel olarak tanımlayabilmede zorlandıkları görülmüştür. Öğrencilerin cebirsel kuralları formülleştirirken karşılaştıkları zorlukların temel nedenlerinin;

- Öğrencilerin girdi-çıktı içeren örüntülerdeki ilişkileri belirlerken, çıktı değerlerindeki ilişkilere odaklandığı,
- Öğrencilerin örüntülerin yapısı ve basit bir dil kullanarak ilişkileri belirlemede yetersiz olmaları,

olduğu belirlenmiştir.

Stacey (1989) araştırmasında, 9-13 yaş grubundaki öğrencilerin genel terimleri 3n+2, 4n-1 ve 6n-2 olan sabit değişen genelleme problemlerini nasıl yanıtladıklarını belirlemeyi amaçlamıştır. Araştırma, önce yaşları 9, 10 ve 11 olan ilköğretim birinci basamak öğrencileri üzerinde, daha sonra da yaşları 12 ve 13 olan ilköğretim ikinci basamak öğrencileri üzerinde gerçekleştirilmiştir. Öğrencilere ikisi şekil biri de sayı dizisi biçiminde verilmiş örüntü soruları sunulmuştur. Öğrencilerden örüntüleri yakın bir adım olarak 20. adıma, sonlu bir adım olarak ise, 100. ve 1000. adıma devam ettirmeleri istenmiştir. Araştırma sonunda, tüm yaş grubundaki öğrencilerin, genel olarak sayma stratejisi (counting method), farkın çarpım stratejisi (difference method), bütüne genişletme stratejisi (whole-object method) ve lineer yöntem (linear method) olmak üzere dört strateji kullandıkları görülmüştür. Bütün yaş gruplarında genel olarak aynı stratejilerin ve her iki grupta da en çok sayma stratejisinin kullanıldığı belirlenmiştir. Örüntülerde sabit farklılık özelliğinin, genel olarak öğrenciler tarafından fark edildiği ve özellikle 12-13 yaş grubunda yer alan, ilköğretim ikinci basamak öğrencilerinin büyük çoğunluğunun doğru bir şekilde kullandığı görülmüştür. Bazı sorularda ise, öğrencilerin birden fazla strateji kullandıkları da belirlenmiştir. Ayrıca ilköğretim birinci basamak öğrencilerinin genelleme yapmada isteksiz oldukları, onların doğru genelleme yapmaktan ziyade daha çok basit genelleme yapabildikleri görülmüştür. Bunların dışında kimi öğrencilerin lineer yöntem olarak tanımlanan "örüntünün son teriminden sonra sonlu terime kadar toplam farkı bulup son terime ekleme" stratejisini kullanarak, örüntülerin 100. ve 1000. adımındaki terimleri buldukları belirlenmiştir. Araştırmada stratejilerin seçiminde önemli tutarsızlıklar da gözlenmiştir. Örneğin, bir soruya başlayan bir öğrencinin sorunun kolay bölümünde stratejiyi doğru kullandığı ancak sorunun zor bölümünde stratejiyi yanlış kullandığı belirlenmiştir.

1.2. Araştırmanın Amacı

Bu araştırmanın genel amacı, ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesidir. Belirtilen bu genel amaç kapsamında öğrencilerin başarı düzeyleri dikkate alınarak aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

1. İlköğretim beşinci sınıf öğrencileri tekrarlanan şekil örüntüsünde;
    - örüntünün kuralını nasıl bulmaktadırlar?
    - örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma nasıl devam ettirmektedirler?
    - istenen bir örüntüyü nasıl oluşturmaktadırlar?
    - bir örüntüdeki ilişkileri nasıl ifade (yazılı ya da sözel ifade, sayısal ifade, sembol, şekil, tablo, grafik vb.) etmektedirler?
2. İlköğretim beşinci sınıf öğrencileri sabit değişen sayı ve şekil örüntülerinde;
    - örüntünün kuralını nasıl bulmaktadırlar?
    - örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma nasıl devam ettirmektedirler?
    - istenen bir örüntüyü nasıl oluşturmaktadırlar?
    - bir örüntüdeki ilişkileri nasıl ifade (yazılı ya da sözel ifade, sayısal ifade, sembol, şekil, tablo, grafik vb.) etmektedirler?

3. İlköğretim beşinci sınıf öğrencileri artarak değişen sayı ve şekil örüntülerinde;

- örüntünün kuralını nasıl bulmaktadırlar?
- örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma nasıl devam ettirmektedirler?
- istenen bir örüntüyü nasıl oluşturmaktadırlar?
- bir örüntüdeki ilişkileri nasıl ifade (yazılı ya da sözel ifade, sayısal ifade, sembol, şekil, tablo, grafik vb.) etmektedirler?

4. İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin, örüntünün kuralını bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve istenen bir örüntü oluşturmada kullandıkları stratejiler örüntü çeşidine göre farklılaşmakta mıdır?

1.3. Araştırmanın Önemi

Türkiye'de, eğitim alanında yaşanan hızlı değişimlere ayak uydurabilmek amacıyla 2004 yılında ilköğretim 1.-5. sınıf tüm derslerin öğretim programları yinelenmiş ve 2005-2006 öğretim yılında uygulamaya konulmuştur. Bu programlardan biri de Matematik Dersi Öğretim Programıdır. Matematik Dersi Öğretim Programı, sekiz yıllık ilköğretim bütünlüğü ve matematiğin evrensel bir dil olduğu göz önüne alınarak hazırlanmıştır. Yenilenen programda, bir çok ülkede ilköğretim programlarının önemli bölümlerinden birini oluşturan örüntülere ilk kez yer verilmiştir.

Örüntüler, cebir ve cebirsel düşünmenin başlangıç noktasıdır ve cebirin temel kavramlarının oluşmasına olanak sağlarlar. Diğer bir deyişle, örüntüler ve örüntüler arasındaki ilişkilerle ilgili çalışmalar cebir için bir ön koşuldur ve gelişimi için bir temeldir. Başlangıç yıllarında örüntü çalışmalarıyla cebire giriş, daha sonraki formal cebire girişteki zorluğu hafifletir (Resnick ve diğerleri, 1987; Akt. Threlfall, 1999; Orton ve Orton, 1999; Zazkis ve Liljedahl, 2002; Orton ve Orton, 1994). Bu durum ise, öğrencilerin daha sonraki matematik ve kariyer seçimleri için, daha geniş olanaklara sahip olmalarını sağlar. Bu nedenle öğrencilerin cebirsel kavramlar ve düşüncelerin gelişimi için, okulöncesinden itibaren örüntülerle ilgili deneyimler yaşaması gerekir. Bu deneyimler boyunca öğrenciler genelleme, tahmin, bağıntı kurma ve ilişkileri görmeyi öğrenebilirler. Bu durum öğrencilerin en çok zorluk yaşadıkları fonksiyon kavramının gelişimine de katkıda bulunur. Ayrıca örüntüler özellikle küçük çocuklarda, matematiksel keşfetme, sorgulama, matematiksel düşünme ve akıl yürütme becerilerinin gelişimini de sağlarlar. Aynı zamanda çocukların örüntülerdeki ilişkileri keşfetmeleri ve bunları genellemeleri, onların çevrelerindeki dünyayı daha iyi algılayabilme becerilerinin gelişimine de yardımcı olurlar.

Bu araştırmayla, bir ilköğretim okulunun beşinci sınıfında okuyan öğrencilerin bir örüntüyü nasıl algıladıklarının belirlenmesi amaçlanmıştır. Bu bağlamda öğrencilerin örüntülere ilişkin düşünme süreçleri belirlenerek, öğrencilerde cebirsel düşünme ve fonksiyon kavramının gelişimi sağlanabilir. Diğer taraftan öğrencilerin örüntülere ilişkin nasıl düşündükleri ve nasıl akıl yürüttükleri belirlenerek, kendi bilgilerini yapılandırmalarına da yardım edilebilir. Aynı zamanda öğrencilerin örüntülerle ilgili en çok zorlandıkları ve yanıldıkları noktalar belirlenerek bunların giderilmesine yönelik önlemler de alınabilir. Bunların dışında alan-yazın taraması yapıldığında Türkiye'de örüntü konusuna ilişkin bir araştırmaya rastlanamamıştır. Bu bağlamda bu çalışma sonucunda ortaya konulacak sonuçların özellikle Türkiye'de alana katkı sağlayacağı umulmaktadır. Ayrıca yenilenen Matematik Dersi Öğretim Programında örüntüler konusunun geliştirilmesi ve ders kitaplarında yeni örüntü etkinliklerinin tasarlanması açısından bu araştırmanın sonuçlarının da önemli bir katkı sağlayacağı söylenebilir.

1.4. Sınırlılıklar

Bu araştırma;

- İçerik bakımından Matematik Dersi doğal sayılar alt öğrenme alanında bulunan "örüntüler" ile,

- 2006-2007 öğretim yılı bahar dönemi, Eskişehir ili Cumhuriyet İlköğretim Okulu 5/A, 5/B, 5/C sınıfına devam eden ve klinik görüşmelere katılan 12 öğrenci ile sınırlıdır.

1.5. Tanımlar

Cebirsel Düşünme: Örüntüleri tanıma ve analiz etme, örüntüler arasındaki sayısal ilişkileri gösterebilme ve bu sayısal ilişkileri genelleyebilme yeteneği olarak ifade edilebilir (Steele, 2005, s.142).

Örüntü: Geometrik şekillerin, seslerin, sembollerin ya da eylemlerin sistematik bir birleşimidir (Souviney, 1994, s.368).

Tekrarlanan Örüntü: Tekrarlanan örüntüler; terimler arası ilişkinin sabit bir dizilimin ötelenmesi ile oluşturulan örüntülerdir (Olkun ve Yeşildere, 2007, s.12).

Tekrar birimi: Tekrarlanan örüntülerde tekrar eden örüntü döngüsünün iki tam tekrarından oluşan kısmın devridir. Bu kısım "tekrarlanma döngüsü" ya da "tekrar birimi" olarak da adlandırılır (Threlfall, 1999, Akt. Zaskis ve Liljedahl, 2002, s.380).

Sabit Değişen Örüntü: Takip eden her bir terimin bir öncekine sabit bir sayı ilave edilerek ya da çıkarılarak elde edildiği örüntülere denir (Olkun ve Yeşildere, 2007, s.12).

Artarak Değişen Örüntü: Takip eden terimler arası farkların arttığı ya da azaldığı örüntülere denir. Bu örüntülerde her şekil ve sayı arasındaki farklılık ardışık sayılardan oluşur (Olkun ve Yeşildere, 2007, s.12).

1.6. Kısaltmalar

APU :The Assesment and Performance Unit
DES : Department of Education and Sciences
NAEP : National Assesment of Educational Progress
NCTM: National Council of Teacher of Mathematics
TIMSS:Trends in International Mathematics and Science Study
Y : Görüşme yapılan yüksek başarı düzeyine sahip öğrenci

O : Görüşme yapılan orta başarı düzeyine sahip öğrenci

D : Görüşme yapılan düşük başarı düzeyine sahip öğrenci

2. YÖNTEM

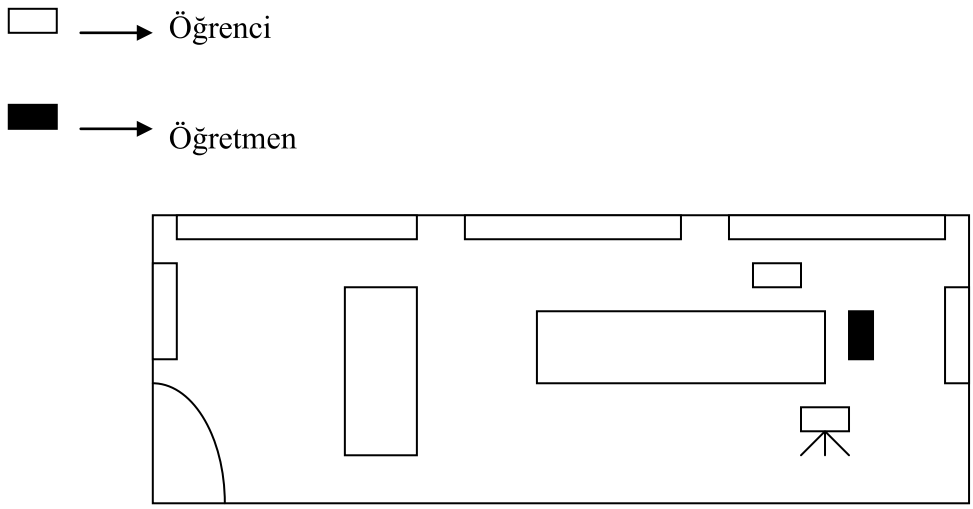
İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesinin amaçlandığı bu araştırmada, genellikle başarıdan daha çok, öğrencilerin örüntülere yaklaşımları, düşünme ve akıl yürütme süreçleri ile ilgilenildiğinden verilerin toplanması, çözümlenmesi ve yorumlanmasında nitel araştırma yöntemi benimsenmiştir.

Yorumlayıcı araştırma ya da alan araştırması olarak adlandırılan nitel araştırma, eğitim ortamlarına uyarlanan, sosyoloji ve antropoloji gibi disiplinlerden gelen bir yöntemdir (Lodici, Spaulding ve Voegtle, 2006). Nitel araştırma, sosyal olguların anlamını açıklamaya ve anlamaya yardım eden; insanların duyguları, davranışları, düşünceleri ve dünyayı nasıl anlamlandırdıkları ile ilgilenen bir araştırma çeşididir (Merriam, 1998). Nitel araştırmada veri kaynağı doğal ortamdır. Araştırmacı, anahtar bir araç olup davranışların, içeriğin anlaşılmasını sağlayan ayrıntılı ve derinlemesine bilgi toplamak amacıyla davranışların nasıl ve neden meydana geldiğine odaklanır (McMillan, 2004). Nitel araştırma ürün ya da sonuçla değil süreçle ilgilidir. Nitel araştırmada araştırma konusu bütüncül bir yaklaşımla belirlenir ve elde edilen veriler bütüncül bir yaklaşımla analiz edilir (Bogdan ve Biklen, 1998).

2.1. Araştırma Ortamı

Araştırmanın uygulaması, Milli Eğitim Bakanlığı'ndan izin alınarak (EK-1) Eskişehir il merkezinde yer alan Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda, 2006-2007 öğretim yılı bahar döneminde gerçekleştirilmiştir. Okul sosyo-ekonomik düzeyleri orta olan ailelerin çocuklarına tam gün eğitim-öğretim veren, Milli Eğitim Bakanlığı'na bağlı bir kurumdur. Bu okulun seçilmesinde, öğrencilerin yaklaşık aynı sosyo-ekonomik koşullara sahip olmaları ve okulda klinik görüşmelerin gerçekleştirilmesi için uygun mekanların yer alması düşüncesi etkili olmuştur.

Araştırma sürecinde klinik görüşmeler, öğrencilerin kendilerini rahat hissettikleri, sessiz bir ortam olan okulun kütüphanesinde yapılmıştır. Görüşmeler sırasında kullanılan video kamera; öğrencileri, öğrencilerin çalışma kağıtlarını, araştırmacıyı görebilecek ve öğrencilerin dikkatini dağıtmayacak şekilde yerleştirilmiştir. Görüşmeci görüşmeler sırasında öğrenci ile etkileşim içinde olduğundan, video kamera çekimlerinde beklenilen deneyime sahip bir eleman kullanılmıştır. Ayrıca görüşmeler sırasında, görüşmecinin öğrenci ile yüz yüze gelebildiği ve aynı zamanda öğrencinin yaptıklarını rahat görebildiği bir oturma düzeni de oluşturulmuştur. Aşağıda Şekil 4'te oturma düzeni örnek olarak gösterilmiştir.



Şekil 4 : Klinik Görüşmelerin Gerçekleştirildiği Kütüphanede Görüşmeci ve Öğrenci Oturma Düzeni

2.2. Araştırmanın Katılımcıları

Nitel araştırmada amaç genelleme değil, bütüncül bir resim elde etmek olduğu için, çalışılan konuyu derinlemesine ve tüm olası ayrıntıları ile incelemek amaçlanır. Bu nedenle de örnekleme yöntemlerinden amaçlı örnekleme yöntemi benimsenir. Amaçlı örnekleme, zengin bilgiye sahip olduğu düşünülen durumların derinlemesine çalışılmasına, olgu ve olayların keşfedilmesine ve açıklanmasına olanak vermektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 107).

Amaçlı örneklem kendi içinde pek çok örnekleme yöntemlerinden oluşur. Bu yöntemlerden biri ölçüt örnekleme yöntemidir. Ölçüt örnekleme, önceden belirlenmiş bir dizi ölçütü karşılayan bütün durumların çalışılmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s.

112). Araştırmada katılımcıların belirlenmesinde bu yöntemin kullanılması benimsenmiş ve bu bağlamda şu ölçütler belirlenmiştir:

- *Katılımcıların sınıf düzeyi:* Zengin veri elde edebilecek ve bir çok örüntü çeşidi ve tipi ile tanışmış öğrenci düzeyinin uygun olacağı düşünülerek, sınıf düzeyi ilköğretim beşinci sınıf olarak benimsenmiştir.
- *Katılımcıların seçimi:* Araştırma sürecinde çeşitlilik gösteren durumlar arasında ortak ya da farklı olguların olup olmadığının görülebilmesi için, öğrenciler üç farklı (yüksek, orta, düşük) başarı düzeyinden seçilmiştir. Öğrenci başarı düzeylerini belirlemede etken olan faktörler ise aşağıdadır.

    1. Örüntü testinden alınan puan
    2. 2006-2007 güz dönemi matematik dersi karne notu
    3. Sınıf öğretmenlerinin öğrencilerle ilgili görüşleri

Uygulamalar sırasında bir takım aksiliklerle karşılaşılabilme olasılığı dikkate alınarak, katılımcı sayısı 12 olarak belirlenmiştir. Katılımcıların tümü ile gerçekleştirilecek ve bir görüşme gününde tamamlanması planlanan görüşmelerde sorunlar yaşanmaması (öğrencilerin etkileşimde bulunması vb.) için, katılımcılar okulun birisi sabahçı, ikisi öğlenci olan farklı üç şubesinden seçilmiştir.

Aşağıda klinik görüşme yapılacak öğrencileri belirlemek için kullanılan örüntü testinin geliştirilmesi, geçerlik ve güvenirlik çalışmaları açıklanmıştır.

Örüntü Testi: Klinik görüşme yapılacak öğrencileri belirlemek amacıyla, bir örüntü testi geliştirilmiştir (EK-2). Bunun için önce testte yer alan sorular; araştırmanın amaçları, alan-yazın taramasından elde edilen veriler, ilköğretim matematik dersi öğretim programında belirtilen kazanımlar ve uzmanlarla yapılan görüşmelerden elde edilen bilgiler dikkate alınarak hazırlanmıştır. Aynı zamanda, öğrencilerin ders kitaplarından da yararlanılmıştır. Testte; tekrarlanan, sabit ve artarak değişen ve fibonacci olmak üzere dört örüntü çeşidine yer verilmiştir. Ayrıca test, öğrencilerin bir örüntüdeki ilişkiyi belirlemeleri ve açıklamaları, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirebilmeleri gibi bilişsel süreçlerini belirlemek amacıyla alt maddeleriyle birlikte 21 madde olarak hazırlanmıştır.

Testin geçerliliği, kapsam geçerliliği araştırılarak belirlenmiştir. Kapsam geçerliliği, bir bütün olarak testin ve testteki her bir maddenin amaca ne derece hizmet ettiğidir. Kapsam geçerliliği mantıksal ya da rasyonel yaklaşım ve istatistiksel yaklaşımla belirlenebilir (Tekin, 2003, s. 46). Bu çalışmada mantıksal yaklaşım benimsenmiştir. Mantıksal olarak kapsam geçerliliğini belirlemede; testteki her bir maddenin ve bir bütün olarak testteki maddelerin dağılımının, ölçülmesi planlanan kazanımlar ve konuları kapsayıp kapsamadığına bakılır. Bu amaçla öncelikle testte yer alan her maddeye ilişkin kazanımlar belirlenmiştir. Daha sonra testte yer alan maddelerin bu kazanımları ölçme yönünden uygunluğu için, "Kapsam Geçerliliği Belirleme Formu" hazırlanmış ve test kitapçığı ile birlikte Anadolu Üniversitesi, Ankara Üniversitesi ve Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi'nde görevli matematik eğitimi alanında uzman üç öğretim üyesi ile, ilköğretim okullarında görev yapan sınıf öğretmenlerinden oluşan grubun görüşlerine başvurulmuştur. Uzmanlar, her test sorusunun ölçmek istediği kazanımlara uygunluğunu kapsam geçerliliğini belirleme formundaki "Uygun", "Kısmen uygun", "Uygun değil" seçeneklerinden birini işaretleyerek belirlemişlerdir. Uzman öğretim üyeleri, bazı soru maddelerinin ifadelerinin daha kısa ve anlaşılır olmasını, Fibonacci örüntü sorusunda yer alan sayıların daha küçük sayılardan oluşması gerektiğini ve iki sorunun da ilköğretim beşinci sınıf öğrencileri için zor olabileceğini ifade etmiştir. Alınan bu görüşler sonucunda örüntü testinde gerekli düzenlemeler yapılarak bir soru çıkarılmış, bazı soruların ifadeleri değiştirilmiştir. Birkaç kazanımı içeren bazı sorularda parçalanıp madde sayısı artırılarak her bir soru daha kısa ve anlaşılır bir hale getirilmiştir. Bu durumda test alt maddeleriyle birlikte 26 madde olarak yeniden düzenlenmiştir. Testin uygulama süresi ise, 30+30 dakika olarak belirlenmiştir.

Hazırlanan testin pilot uygulaması, 2005-2006 bahar dönemi Eskişehir il merkezinde yer alan ve araştırmanın yürütüleceği okula benzer bir ilköğretim okulunun, beşinci sınıfına devam eden 14 kız ve 17 erkek öğrenci üzerinde yapılmıştır.

Testin güvenirliliğini ölçmek için, öncelikle testteki soruların yanıt anahtarı hazırlanmış ve her bir yanıt puanlanmıştır. Daha sonra her soruya yönelik ölçütler belirlenerek verilen puan bu ölçütlere göre paylaştırılmıştır. Testin pilot uygulaması yapıldıktan sonra gelen yanıtlara göre ölçütler ve puanlar tekrar düzenlenmiştir (EK-3). Daha sonra üç alan uzmanı hazırlanan ölçütleri ve puanları dikkate alınarak değerlendirme yapmıştır. Üç değerlendirme arasındaki ilişkinin araştırılmasında ise, alfa güvenirlik katsayısına ve bağımsız gözlemciler arası uyuma bakılmıştır. Bağımsız gözlemciler arası uyum, birden çok gözlemcinin birbirinden bağımsız olarak, aynı şeyleri ölçmeye çalıştıkları durumlarda uygulanan bir güvenirlik ölçütüdür. Bu tür ölçmelerde, gözlemcilerin ayrı ayrı yaptıkları ölçümlerin ortalaması alınarak, her durum için, bir tek değer bulunur. Asıl olan bu değerin güvenirliğidir. Ayrı ayrı gözlem sonuçları birbirine ne kadar yakın ise, sonuçta elde edilen ortalama değerin güvenirliği de o kadar yüksek olur (Karasar, 1986, s.149). Güvenirlik çalışmasında SPSS paket programı, alfa katsayısının değerlendirilmesinde ise, aşağıda belirtilen ölçütler kullanılmıştır (Özdamar, 1997, s. 500):

$0.00 \leq \alpha < 0.40$ ise ölçek güvenilir değildir

$0.40 \leq \alpha < 0.60$ ise ölçek düşük güvenirliktedir

$0.60 \leq \alpha < 0.80$ ise ölçek oldukça güvenilirdir

$0.80 \leq \alpha < 1.00$ ise ölçek oldukça yüksek güvenirliktedir.

Örüntü testinin güvenirliliği için testten elde edilen alfa güvenirlik katsayısı $\alpha=0.9787$ ve bağımsız gözlemciler arası uyum ortalaması ise $\alpha=0.9395$ olarak bulunmuştur.

Geçerlilik ve güvenirliliği yapılmış olan örüntü testi, 8 Mart 2007 Perşembe günü Cumhuriyet İlköğretim Okulu 5/A, 5/B ve 5/C sınıfındaki tüm öğrencilere uygulanmıştır. Daha sonra öğrencilerin yanıtları, puanlama anahtarına göre puanlanmış ve en yüksekten en düşüğe doğru sıralanmıştır. Yüksek (Y), orta (O) ve düşük (D) başarı düzeyindeki öğrencileri belirlemek üzere, puanlar 80-100 arası yüksek, 55-65 arası orta ve 40-50 arası düşük olmak üzere üç bölüme ayrılmıştır. Daha sonra her üç sınıftan bu puan aralıklarında yer alan öğrenciler belirlenmiştir. Yüksek, orta ve düşük başarı düzeyinde yer alan öğrenciler arasından seçim yapmak için de sınıf öğretmenlerinin görüşüne başvurulmuştur. Elde edilen görüşler doğrultusunda, özellikle ifade becerisi iyi öğrencilerin seçilmesine de dikkat edilmiştir. Ayrıca matematik dersi karne notları ile aldıkları puanların örtüştüğü de görülmüştür. Böylece Tablo 1'de görüldüğü gibi, 5/A şubesinden başarı düzeyi iki yüksek, iki orta, bir düşük, 5/B şubesinden başarı düzeyi bir yüksek, bir orta ve bir düşük, 5/C şubesinden ise, başarı düzeyi bir yüksek, iki orta ve bir düşük toplam 12 öğrenci seçilmiştir. Başarı düzeyi yüksek olan öğrenciler Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, başarı düzeyi orta olan öğrenciler O_1, O_2, O_3, O_4 ve başarı düzeyi düşük olan öğrenciler ise D_1, D_2, D_3, D_4 şeklinde gösterilmiştir.

Tablo 1:Katılımcıların Dağılımı

Sınıf	Başarı Düzeyi Yüksek	Başarı Düzeyi Orta	Başarı Düzeyi Düşük
5/A	2	2	1
5/B	1	1	1
5/C	1	1	2
Öğrenci sayısı	4	4	4
Toplam	12		

Araştırmaya katılan öğrencilerin kişisel özellikleri, Tablo 2'de verilmiştir. Katılımcı öğrencilerin kişisel özellikleri; cinsiyet, kardeş sayısı, ailenin aylık gelir durumu, anne-babanın eğitim durumu, anne–babanın meslek bilgileri ile oluşturulmuştur. Bu bilgilere ilişkin sayısal yüzde oranları tabloda yer almaktadır.

Tablo 2: Araştırmaya Katılan Öğrencilerin Kişisel Özellikleri

Öğrencilerin Özellikleri	f	%
Cinsiyet		
Erkek	3	25
Kız	9	75
Kardeş Sayısı		
Yok	3	25
1	8	67
2	1	8
Ailenin Aylık Gelir Durum		
501-1000 YTL	5	42
1001-1500 YTL	4	33
1501 YTL'den fazla	3	25
Anne-Babanın Eğitim Durumu		
Anne		
İlkokul	5	42
Ortaokul	1	8
Lise	3	25
Üniversite	3	25
Baba		
İlkokul	1	8
Ortaokul	4	33
Lise	3	25
Üniversite	4	33
Anne-Babanın Mesleği		
Anne		
Ev Hanımı	8	67
Hemşire	1	8
İşçi	1	8
Emekli	1	8
Öğretmen	1	8
Baba		
Esnaf	3	25
İşçi	4	33
Emekli	2	17
Çiftçi	1	8
Öğretmen	1	8
Mimar	1	8

2.3. Veri Toplama Araçları ve Geliştirilmesi

Nitel araştırmada; çevreyle ilgili veri, süreçle ilgili veri ve algılara ilişkin veri olmak üzere üç tür veri elde edilir ve bu veriler; görüşme, gözlem ve doküman incelemesi aracılığıyla toplanır (Yıldırım ve Şimşek, 2005, ss. 39-40). Bu araştırmanın temel verilerinin toplanmasında ise, görüşme tekniğinin bir çeşidi olan ve matematik eğitiminde sıklıkla kullanılan klinik görüşme tekniği kullanılmıştır. Bunun yanı sıra, kişisel bilgi formu, öğrenci günlükleri ve araştırmacı günlüğü aracılığıyla da veri toplanmıştır. Araştırmada kullanılan veri toplama araçları ve bu araçların geçerlik ve güvenirlik çalışmaları aşağıda açıklanmıştır.

2.3.1. Klinik Görüşme

Klinik görüşme, bilgi yapısının biçimini ve akıl yürütme sürecini araştırmak için Piaget'nin öncülük ettiği bir tekniktir (Clement, 2000, s.547). Bu teknik öğrencilerin düşüncelerini derinlemesine incelemek amacıyla, öğrenciyle karşılıklı yapılan görüşmeleri içerir. Klinik görüşme, öğrencilerin düşünce doğası ile ilgili önemli ipuçları verir ve aynı zamanda, öğrencilerin kendi dünyalarını nasıl oluşturduklarını, nasıl düşündüklerini, bilişsel süreçlerini nasıl işlediklerini ve zihinlerini nasıl çalıştırdıklarını anlamaya da yardımcı olur (Ginsburg, 1981).

Klinik görüşme, genel olarak araştırmalarda iki amaçla kullanılır (Goldin, 1998, s.40):

- Problem çözme yöntemi ile yetişkinler ya da çocukların matematiksel davranışlarını gözlemlemek,
- Gözlemlerden öğrencilerin matematiksel anlamaları, bilgi yapıları, bilişsel süreçleri ve bu süreçteki duyuşsal değişiklikleri hakkında sonuçlar çıkarmak.

Ginsburg (1981) ise, klinik görüşmenin keşfetme, tanımlama ve yeterlilik olmak üzere üç amacını, Piaget'nin zihinsel gelişim kuramını kaynak göstererek, aşağıdaki şekilde tanımlamıştır:

- *Keşfetme:* Öğrencinin bir problem durumuna yaklaşımındaki zihinsel olguyu keşfetmektir.
- *Tanımlama:* Öğrencinin bir problem durumuna yaklaşımındaki zihinsel olguya dayanan bilişsel süreci tanımlamaktır.
- *Yeterlik:* Öğrencinin bir görevi yerine getirebilme becerisidir.

Bu araştırmada da, bir örüntünün kuralını bulmada, bir örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede, istenen bir örüntüyü oluşturmada ve bir örüntüdeki ilişkilerin ifade edilme biçimlerini belirlemede, öğrencilerin düşünme ve akıl yürütme süreçlerini belirlemek ve derinlemesine bilgi toplamak amacıyla klinik görüşme tekniği kullanılmıştır.

Klinik görüşmelerde veriler, ses kayıt cihazı, video kamera, gözlemci notu ve öğrenci çalışmaları ile toplanır. Aynı zamanda görüşmecinin görüşme sürecinde yönelttiği keşfedici sorular, ipuçları, birbirini izleyen ilişkili problemler, geriye dönük sorular ya da beklenmedik müdahaleler gibi durumlarla daha belirleyici ve açık veriler de elde edilir. Elde edilen veriler kapsamında, sözel ve sözel olmayan davranışların ya da etkileşimlerin analiz edilmesiyle, öğrencilerin problem çözme ya da öğrenmesi ve matematiksel düşünceleri ile ilgili yorumlar yapılır. Daha sonra bu yorumlardan matematik eğitiminin çeşitli durumlarıyla ilgili derin bilgiler elde edilir. Klinik görüşmede öğrencinin doğru ya da yanlış yanıtlarına değil, matematiksel görevlerini gerçekleştirebilme sürecine dikkat edilir. Böylece, matematiksel öğrenme ile ilişkili; matematiksel keşfetme, problem çözme, problem çözme ve öğrenme arasındaki ilişki, biliş ve tutum arasındaki ilişki gibi konular daha derinlemesine incelenebilir. Klinik görüşme, matematiği öğrenme ve matematiksel problem çözmenin psikolojisini gözlemlemede bir araştırma aracı olarak kullanılabileceği gibi, matematik eğitimi uygulamalarının gelişimi ya da öğrencilerin bilgi yapılarını tanımlamada bir değerlendirme aracı olarak da kullanılabilir (Goldin, 2000, s. 520).

Klinik görüşme üç temel tekniği içerir (Ginsburg, 2004, s.175) :

- *Deneme:* Öğrencinin düşünmesi ile ilgili varsayımları aydınlatmak için planlanan görev ya da seçilen testlerin dikkatli bir şekilde uygulanmasıdır.
- *Gözlemleme:* Görüşmeci tarafından, öğrencinin bir problemi çözerken üstün davranışlarının yakın bir şekilde incelenmesidir. Ayrıca öğrencinin yapmış olduğu ağız hareketleri ve fısıltıları; spontane yorumları ve duygusal ifadeleri gibi iki grup özelliği fiziksel olarak birleştiren davranışların not edilmesidir.
- *Çözüm yolunun istenmesi:* Çözümü nasıl buldun? sorusu ile öğrencinin çözüm yolunun istenmesidir.

Çözüm yollarını sözel ifade etme becerisine sahip olmayan, özellikle küçük çocuklarda, sadece yukarıda ifade edilen deneme ve gözlemleme teknikleri kullanılabilir. Bu araştırma kapsamında ise; deneme, gözlemleme ve çözüm yolunun istenmesi tekniklerinin üçü de kullanılmıştır.

2.3.1.1. Klinik Görüşmelerin Planlanması

Klinik görüşme planlanırken; görevler, görüşme soruları, sonda sorular, öğrencilerin seçimi, görüşme ortamı, materyallerin hazırlanması gibi pek çok değişken kontrol edilebilir ya da kısmen kontrol edilebilir. Klinik görüşmeler gelişi güzel planlanırsa, gözlem sonuçlarından elde edilen çıkarımların geçerliliği de şüpheli olur. Bu nedenle değişkenler kontrol altına alınıp iyi bir planlama yapılması gereklidir. Klinik görüşmelerin yapılandırılması ve planlanmasında 10 ilke söz konusudur. Bunlar (Goldin, 2000, ss.539-544):

- *Araştırma ve klinik görüşme sorularının hazırlanması:* Bir araştırma planı, araştırma sorularının yanıtlarına göre planlanmalıdır. Bunun için görüşmecinin, araştırmanın amaçlarını ve klinik görüşme sorularını açık ve belirgin olarak önceden belirlemesi gerekir.
- *Pilot test:* Pilot çalışma yapmak, takip dilecek her metni garantilemek için gereklidir.
- *Öğrenciler için uygun görevler seçme:* Görüşme görevleri, öğrenci için uygun matematiksel düşünceler ve yapıları temsil etmelidir.
- *Zengin temsil yapılarını kapsayan görevler seçme:* Matematiksel görevler öğrencilerin kapasitelerini ortaya çıkaracak şekilde düzenlenmelidir. Bunun için görevler, aritmetik, cebirsel, geometrik vb. soyut matematiksel yapıları, görsel, uzaysal gibi görselleştirmeyi temsil eden şematik yapıları içermelidir.
- *Tanımlanan görüşmeleri detaylı bir şekilde açıklama:* Görüşmelerin planlanmasının ve uygulanmasının her aşaması; çalışmanın devamı, tekrar edilebilirliği ya da diğer araştırmalar için mümkün olduğunca detaylı olarak açıklanması gerekir.

- *Dış öğrenme çevresiyle maksimum iletişim:* Öğrenciler için her görüşme sırasında çeşitli öğrenme ve problem çözme ortamlarıyla zengin etkileşim geçirebilecekleri ortamlar düzenlenmelidir.
- *Neyin kayıt edileceğine karar vermek ve mümkün olduğunca çok kayıt etmek:* Araştırma soruları ve gözlemlerden çıkarsama yapmada kullanılacak ölçütler yardımıyla, görüşmelerde neyin ve nasıl kaydedileceği belirlenebilir.
- *Yeni ya da tahmin edilemeyen durumlar için uyanık olma:* Görüşmelerde öğrencilerden şaşırtıcı ya da beklenmedik yanıtlar alınabilir. İyi bir klinik görüşmeyi planlamak için tahmin edilemeyen olasılıkları dikkate almak gerekir.
- *Öğrenciyi özgür problem çözmeye cesaretlendirme:* Görüşme sırasında öğrencilerin problem çözerken davranış ve düşüncelerini gözlemleyebilmek için onların mümkün olduğunca özgür bırakılmaları gerekir.
- *Uygun olduğunda uzlaşma:* Klinik görüşme devam ederken ya da planlanırken, klinik görüşme ilkeleri arasında bazen bir çatışma olabilir. Örneğin öğrencileri özgür problem çözmeye cesaretlendirme ilkesi göz önüne alındığında, eğer çok zaman harcanırsa bir sonraki görüşme sorularına geçilemeyebilir. Bu nedenle görüşmecinin tüm ilkelerle uzlaşma içinde olması gerekir.

Bu araştırma sürecinde ise, klinik görüşmelerin planlanması ve yürütülmesinde yukarıda ifade edilen ilkeler göz önüne alınmıştır. Öncelikle araştırmanın genel amacı ve alt amaçları belirlenmiş, daha sonra bunlar dikkate alınarak örüntü sorularını içeren görevler ve öğrencilerin örüntü sorularının çözümü sırasında düşünme süreçlerini ortaya çıkaracak klinik görüşme soruları hazırlanmıştır. Daha sonra klinik görüşme soruları araştırmada yer alan katılımcılara benzer bir gruba uygulanarak test edilmiştir. Görüşmeler sırasında örüntü soruları çözülürken öğrencilere mümkün olduğunca yeterli süre tanınmış ve öğrenciler rahat olmaları konusunda cesaretlendirilmiştir.

2.3.1.2. Klinik Görüşmelerde Görevlerin ve Klinik Görüşme Sorularının Hazırlanması

Klinik görüşmede matematiksel görevler; özel ölçütler ve daha önce yapılmış araştırma sonuçları, içerik, ortam, düzen ve yapıya bağlı olarak hazırlanabilir. Görüşmeci ise, hazırlanan bir ya da birden fazla matematiksel görevler (sorular, problemler ya da etkinlikler) ile, öğrencilerle uyumlu bir etkileşime girer ve öğrencilerin problemi çözerken ne yaptığı ile değil, problemi nasıl çözdüğü ile ilgilenir (Goldin, 2000; Ginsburg, 2004). Aşağıda klinik görüşmede kullanılan görevlerin seçimi ve gelişiminde dikkate alınacak ölçütler verilmiştir (Hunting, 1997, ss. 151-152):

- *Zaman:* Görüşme süresi, öğrencinin yaşına bağlıdır. Örneğin, 5-8 yaşındaki çocuklarla 10-20 dk., 10-12 yaşındaki çocuklarla 35-50 dk., görüşme yapılabilir. Görüşmelerde öğrencilerin kıpırdanmaları ve rahatsız oturmaları konsantrasyonlarının azaldığının bir göstergesidir. Bu durumda görüşmenin kesilmesi gerekir. Klinik görüşmelerde önemli olan belirtilen zaman içinde maksimum bilgiyi elde etmektir.
- *Ön Bilgi:* Görüşmede kapsamlı bir görev hazırlamak, öğrenciyi tanımakla, diğer bir deyişle ön bilgisiyle mümkündür. Öğrencilerin sınavları ve yapılan gözlemler, onların ön bilgilerinin belirlenmesinde yol gösterir.
- *Yenilik:* Görüşmede, bir görevin öğrencinin ilgisini çekmesi oldukça önemlidir. Görevin içeriği ya da sunumu ne kadar yeni ise öğrencinin daha çok ilgisini çekecektir.
- *İçerik:* Görev, öğrencinin matematiksel düşüncesini ortaya çıkaracak şekilde düzenlenmeli ve öğrenci için gerçeğe uygun bir ortam oluşturulmalıdır.
- *Materyaller:* Bazı görevler öğrencilerin fiziksel materyal kullanmalarını gerektirir. Bu tür görevler öğrencilerin sözel ifadeleri ve yorumları ile birlikte eylemlerini gözlemlemeye olanak sağlar.
- *Esneklik:* Farklı yeteneklere sahip öğrenciler için görevler daha basit ve daha kolay alt görevlerle birleştirilerek hazırlanabilir.

- *Araştırma Temeli:* Görevlerin hazırlanmasında konuyla ilgili yapılmış araştırmaları incelemek oldukça önemlidir. Çünkü bu araştırmalarda kullanılan görevlerle, genellikle bir dereceye kadar ayrıntılı analizler yapılır. Ayrıca araştırma konusuna nasıl yaklaşılacağı ile ilgili yeni ya da alternatif kavramsallaştırmalar dikkate alınabilir. Bir araştırma temeline dayanan görevler öğrencilerin matematiksel gelişimlerine yeni bakış açıları sunar ve programlarda yeniliklere yol açar.

Bu araştırma kapsamında, örüntü sorularını içeren klinik görüşme görevleri hazırlanırken, öncelikle öğrencilerin örüntülere ilişkin bilgilerini tespit etmek amacıyla, klinik görüşme yapılacak öğrencilerin belirlendiği sınıflarda, iki hafta süreyle gözlem yapılmıştır. Bunun dışında örüntü soruları hazırlanırken, araştırmanın amaçları, alan-yazın taramasından elde edilen veriler, ilköğretim matematik dersi öğretim programında belirtilen kazanımlar, yerli ve yabancı ders kitapları ve öğrenci etkinlik kitapları ve örüntülere yönelik yapılmış araştırmalar dikkate alınarak, farklı tip örüntülerin bulunduğu sorular hazırlanmıştır. Sorularda; tekrarlanan, sabit değişen ve artarak değişen olmak üzere üç çeşit örüntü yer almıştır. Bu örüntüler sayı ve şekil olmak üzere iki şekilde sunulmuştur. Tekrarlanan örüntü ister sayı, ister şekil vb. olsun örüntünün yapısı değişmeyeceği için araştırmada tekrarlanan örüntü sadece şekil örüntüsü olarak verilmiştir. Tekrarlanan örüntüyü yakın bir adıma devam ettirme kapsamında, örüntünün iki adım devam ettirilmesi, sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında ise, örüntüde yer alan şekillerin devamı için sonlu bir adımdaki şeklin belirlenmesi istenmiştir. Sabit ve artarak değişen örüntülerde ise, biri sabit değişen diğeri artarak değişen olacak şekilde, iki sayı dizisi ve iki fonksiyon tablosu biçiminde verilen toplam dört sayı örüntüsü sorulmuştur. Sayı dizisi biçiminde verilen sayı örüntülerinde, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında, 6. ve 10. adım istenirken, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sayı örüntülerinde yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında, 6. ve 60. adım istenmiştir. Ayrıca sabit ve artarak değişen örüntülerde dört tane de şekil örüntüsü sorulmuştur. Sabit ve artarak değişen şekil örüntü sorularından biri, şeklin yapısına bağlı olarak fonksiyonel ilişkinin kolay bulunabileceği şekilde verilmiştir. Bu nedenle örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında 4. ve 50. adımdaki şekil sayısı istenmiştir. Diğer sabit ve artarak değişen şekil örüntüsü sorularında, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında, 5. ve 10. adım ile 4. ve 7. adımdaki şekillerin çizilmesi istenmiştir. Böylece bir tane tekrarlanan, iki tane sabit değişen sayı, iki tane sabit değişen şekil, iki tane artarak değişen sayı ve iki tane artarak değişen şekil olmak üzere toplam dokuz örüntü sorusundan oluşan klinik görüşme görevleri hazırlanmıştır. Klinik görüşme görevlerinde her bir örüntü sorusu için de klinik görüşme soruları hazırlanmıştır.

Sorular, klinik görüşme görevlerinin anahtar bir özelliğidir. Çünkü bir sorunun doğası ve düzenlenmesi görüşmeci için kritiktir. Klinik görüşmede genel olarak sorular (Hunting, 1997, s. 153):

- Açık uçlu olmalıdır. Böylece öğrenciler yanıtlarında kendi tercih ettikleri yolları seçme özgürlüğüne sahip olurlar.
- Düşünme sürecinin açıklanabilmesi için maksimum düzeyde tartışmaya ve diyaloga olanak sağlamalıdır.
- Hem öğrenci hem de görüşmeciye sırayla düşünme süreçlerini yansıtmalarına izin vermelidir.

Bu bağlamda araştırma kapsamında, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme, istenen bir örüntü oluşturma olmak üzere üç bileşen içeren klinik görüşme sorularında "*Ben senin düşünce tarzını öğrenmeye çalışıyorum. O yüzden bu soruyu çözerken yüksek sesle düşüncelerini benimle paylaşır mısın?", "Ne yaptığını yüksek sesle söyler misin?*", "*Bunu nasıl düşündüğünü söyler misin?*", "*Nasıl çözdüğünü açıklayabilir misin?*", "*Nasıl biliyorsun? Nasıl karar verdin?*", "*Niçin?*", "*Bulduğun sonucun doğruluğunu nasıl kontrol edersin?*", "*Emin misin?*" şeklinde soru biçimleri kullanılmıştır. Ayrıca soruların tam olarak anlaşılamama olasılığına karşın ise, *"Tekrar açıklar mısın?"* gibi alternatif ve sonda sorular da sorulmuştur (Clement, 2000, s.572). Yine yönlendirme yapmaksızın *"çok güzel", "aferin", "tamam"* gibi cesaretlendirici sözel ipuçları da kullanılmıştır. Daha sonra hazırlanan klinik görüşme soruları iki uzman görüşüne sunulmuş ve gelen görüşler doğrultusunda sorulara son şekli verilmiştir.

2.3.1.3. Pilot Çalışma

Pilot çalışmanın amacı, görüşme sorularının benzer biçimde diğer öğrenciler tarafından tekrarlanabilirliğinin ve soruların net anlaşılabilirliğinin belirlenmesidir. Pilot çalışma ile, dil kullanımındaki olası yanlışlıklar, matematiksel yanlış anlamalar, belirsizlikler ve beklenmedik durumlar ortaya çıkarılır (Goldin 2000, s. 543).

Hazırlanan klinik görüşme sorularının, araştırmada yer alan katılımcılara benzer bir gruba uygulanarak pilot çalışma yapılmıştır. Pilot uygulamada düşük, orta ve yüksek başarı düzeyine sahip üç öğrenci ile çalışılmış ve görüşmeler iki gün sürmüştür. Görüşmeler sırasında da video kaydı yapılmıştır. Birinci gün öğrencilere ilk beş soru, ikinci gün dört soru yöneltilmiştir. Pilot uygulama sonucunda fonksiyon tablosunda verilmiş örüntü sorularında değişiklikler yapılmıştır. Artarak değişen şekil örüntüsü sorusu da çizimi uzun zaman alması nedeniyle bir başka şekil örüntüsüyle değiştirilmiştir. Ayrıca bazı soruların ifadelerinde de düzeltmeler yapılmış ve sonda sorular hazırlanmıştır. Daha sonra üzerinde değişiklikler yapılan klinik görüşme soruları için ikinci bir pilot çalışma yapılmıştır. İkinci pilot uygulamada da aynı okulda farklı bir sınıftan, diğer gruptan biraz daha düşük düzeyde olan, düşük, orta ve yüksek başarı düzeyine sahip üç öğrenci ile çalışılmıştır. İkinci pilot uygulamada iki gün sürmüştür. Birinci gün öğrencilere, ilk beş soru ve ikinci gün kalan dört soru yöneltilmiştir. Daha sonra pilot görüşmelerden örnekler tez izleme jürisi tarafından izlenmiş ve klinik görüşme sorularının bu haliyle işlediğine karar verilmiştir. Klinik görüşme soruları EK-4 ‘te verilmiştir.

2.3.2. Kişisel Bilgi Formu

Kişisel bilgi formu araştırmaya katılan öğrencilerin kişisel bilgilerini elde etmek amacıyla kullanılmıştır. Bu form araştırmacı tarafından hazırlanmış ve klinik görüşmelerden önce öğrencilere uygulanmıştır. Kişisel bilgi formunda cinsiyet, kardeş sayısı, ailenin aylık gelir durumu, anne babanın eğitim durumu ve anne babanın meslek durumuna ilişkin altı soruya yer verilmiştir. Kişisel bilgi formu EK-5’te verilmiştir.

2.3.3. Öğrenci Günlükleri

Günlük, öğrencilerin, araştırma süresince araştırma konusu, yapılan görüşmeler, araştırmacı ile öğrencinin iletişimi gibi pek çok konuda duygu ve düşüncelerin kaydedildiği bir defterdir. Günlük, öğrencilerin bilişsel gelişimleri ile matematik derslerinde sosyal-duyuşsal gereksinmelerini karşılar (Stewart ve Chance, 1995, Akt. Edwards, 1999). Günlük öğrenciler için; matematiksel kavramları anlamalarını pekiştirmede, matematik korku ve endişelerini azaltmada, öğretmenle iletişim kurmada, öğrencilerin kendi programlarını hazırlamada mükemmel bir araçtır (Edwards, 1999).

Matematikte bir günlük bir çok amaca hizmet eder (Edwards, 1999; Norwood ve Carter, 1994, Akt. Edwards, 1999). Örneğin;

- Öğrencilerin ön bilgilerini ya da konu üzerindeki bakış açılarını belirler.
- Öğrencileri bireysel olarak değerlendirmede bir araçtır.
- Öğrencinin işlemsel bilgilerinin yanında kavramsal anlamaları da belirlenir.
- Öğrencinin öğrenme stili tanımlanır.
- Öğretmenin bir sınavda gözden kaçırdığı, öğrencilerin sahip olduğu temel bilgiler belirlenir.

Bu araştırmada da öğrenci günlüğü, araştırma sürecinde öğrencilerin her örüntü çeşidine yönelik bakış açıları, yaşadıkları sorunlar gibi konularda derinlemesine bilgi elde etmek amacıyla kullanılmıştır. Öğrenciler her klinik görüşme sonrasında günlük tutmuşlar ve düşüncelerini araştırmacı tarafından verilen küçük defterlere yazmışlardır. Daha sonra bu günlükler araştırmacı tarafından öğrencilerden sözel izin alınarak destek veri olarak kullanılmıştır.

2.3.4. Araştırmacı Günlüğü

Araştırmacı günlüğü, araştırmanın tüm boyutları ile ilişkili gözlemlerin ve görüşlerin kaydedildiği bir defterdir. Araştırma sürecinin tüm adımlarını betimlemek amacıyla kullanılır. Aynı zamanda araştırmadaki olayların sıralanmasında, parçaların bir araya getirilmesinde kullanılan önemli bir bilgi kaynağıdır. Gözlemler, analizler, diyagramlar, kısa notlar, alıntılar, öğrenci yorumları, çeteleler (puanlar), görüşler ya da izlenimler gibi çeşitli verileri kapsar (Johnson, 2005, s. 63). Araştırmacı günlüğünün diğer basit günlüklerden farkı yoktur. Sadece diğer günlüklere göre araştırmanın gerçekleştirilmesindeki sorunlar üzerine odaklanılır (McNiff, Lomax ve Whitehead, 2004).

Bu araştırmada da, araştırmacı tarafından araştırma sürecinin tüm adımlarında, klinik görüşmeler öncesinde ve sonrasında yaşanılan her bir durumu yansıtan günlükler tutulmuştur. Araştırmacı günlüğü, araştırma sürecini betimlemede ve klinik görüşmelerin analizi aşamasında, destek veri olarak kullanılmıştır.

2.4. Araştırmacının Rolü

Nitel araştırmalarda araştırmacının rolü nicel araştırmadakinden farklıdır. Nitel araştırmada araştırmacı, bizzat alanda zaman harcayan, araştırma kapsamındaki kişilerle doğrudan görüşen ve gerektiğinde bu kişilerin deneyimlerini yaşayan, alanda kazandığı bakış açısını ve deneyimlerini, toplanan verilerin analizinde kullanan kişidir (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 43). Bu araştırmada araştırmacı, araştırma sürecinde tüm adımların planlaması, yürütülmesi aşamalarında tarafsızlığını korumuş, görüşmeci olarak öğrencilerle görüşmüş, görüşmeler sırasında yönlendirme yapmaksızın öğrencilerin düşünme süreçlerini ortaya çıkaracak sorular yöneltmiştir.

2.5. Veri Toplama

Araştırmanın verileri, 20.03.2007-12.04.2007 tarihlerinde arasında toplanmıştır. Öğrencilerle haftada üç gün görüşülmüş ve her görüşmede öğrencilere bir örüntü sorusu sorulmuştur. Görüşmeler 5/A şubesinden seçilen beş öğrenci ile sabah, 5/B şubesinden seçilen üç öğrenci ve 5/C şubesinden seçilen dört öğrenci ile öğleden sonra olmak üzere, sınıf öğretmenlerinin uygun gördükleri saatlerde okulun kütüphanesinde yapılmıştır. Aşağıda klinik görüşmelerle toplanan verilere ilişkin veri toplama takvimi Tablo 3‘te verilmiştir.

Tablo 3 : Araştırma Verilerini Toplama Takvimi

Tarih	Süre Min./Mak.	Etkinlik
12.03.2007		Klinik görüşme yapılacak öğrencilerle görüşme
16.03.2007		Öğrencilerin ailelerinden izin alma
20.03.2007	4:07-11:52	Soru 1:Tekrarlanan şekil örüntüsü
21.03.2007	3:39-7:22	Soru 2: Sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsü
22.03.2007	4:47-11:24	Soru 3: Sayı dizisi biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsü
27.03.2007	7:59-25:33	Soru 4: Sabit değişen şekil örüntüsü
28.03.2007	6:20-30:54	Soru 5: Artarak değişen şekil örüntüsü
29.03.2007	4:59-18:57	Soru 6: Fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsü
03.04.2007	4:08-19:14	Soru 7: Fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsü
04.04.2007	4:06-12:35	Soru 8: Sabit değişen şekil örüntüsü
05.04.2007	3:37-12:55	Soru 9: Artarak değişen şekil örüntüsü

Tablo 3’ te görüldüğü gibi, 12 öğrenci ile yapılan görüşmeler sonucunda, birinci soru için en az 4:07, en fazla 11:52, ikinci soru için en az 3:39, en fazla 7:22, üçüncü soru için en az 4:47, en fazla 11:24, dördüncü soru için en az 7:59, en fazla 25:33, beşinci soru için en az 6:20, en fazla 30:54, altıncı soru için en az 4:59, en fazla 18:57, yedinci soru için en az 4:08, en fazla 19:14, sekizinci soru için en az 4:06, en fazla 12:35, dokuzuncu soru için en az 3:37, en fazla 12:55 süre kullanılmıştır.

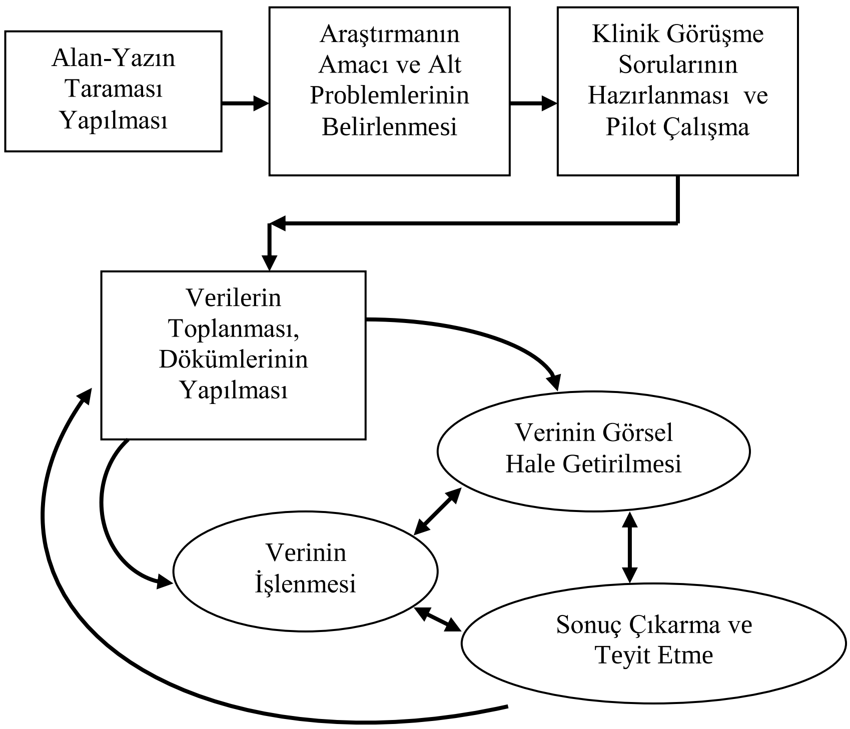
Klinik görüşmelere başlanmadan önce, görüşme yapılacak öğrencilerin velilerinden ve öğrencilerin kendilerinden görüşme izni alınmıştır. Bunun için öğrenci velilerine ve öğrencilere görüşmelerin nasıl yapılacağını içeren görüşme onay formu verilmiş ve imzalamaları istenmiştir. Görüşme onay formları EK-6 ve EK-7’de verilmiştir. Araştırmacı, görüşmeler için izin aldıktan sonra görüşmeye geçmeden, öğrencilerden ayrıca sözlü izin almış ve bunu video kaydı aracılığıyla da kayıt etmiştir. Daha sonra öğrencilere doğru ya da yanlış bir yanıta ulaşmalarının değil, o yanıta nasıl ulaştıklarının daha önemli olduğu açıklanmıştır. Bu açıklama, öğrenciye ve araştırmacıya daha derin bilginin toplanabileceği rahat bir ortam yaratmıştır.

Görüşmeler süresince öğrencilerin kendilerini rahat hissedebilecekleri sessiz bir ortam oluşturulmuştur. Görüşmeler sırasında video kamera ve kamera ayaklığı kullanılarak kayıt yapılmıştır. Daha sonra görüşmelerin kaydedildiği kasetlerin üzerine tarih ve görüşülen kişilerin adları yazılmıştır. Video kamera öğrencilerin dikkatini dağıtmayacak şekilde öğrencileri, öğrencilerin çalışma kağıtlarını ve araştırmacıyı görebilecek şekilde yerleştirilmiş ve kamera sabit tutulmuştur. Görüşmelerin hepsinde, öğrencilere örüntü soruları ayrı kartlar üzerinde yazılı olarak sunulmuş ve aynı zamanda sesli olarak da okunmuştur. Öğrencilere verilen soruları yanıtlarken sesli düşünmeleri söylenmiş ve çözümlerini açıklamaları istenmiştir. Öğrencilere çözümlerini gerçekleştirebilmeleri için yeterince süre tanınmış ve toplam görüşme süresi 35-50 dakikayı geçmeyecek şekilde ayarlanmıştır. Ayrıca araştırmacı görüşmeler sırasında öğrencilerle ilgili küçük notlar almıştır. Her görüşme sonunda ise, öğrencilerin günlüklerine o gün yapılan çalışma ile ilgili düşüncelerini yazmaları için de süre tanınmıştır.

2.6. Veri Analizi

Araştırmada toplanan veriler analiz edilmeden önce, klinik görüşmelerle elde edilen verilerin dökümü ve kontrolü yapılmıştır. Döküm sırasında, her bir konuşma olduğu gibi hiçbir düzeltme yapılmadan, görüşmeci-görüşen sırasıyla, araştırmacı tarafından hazırlanan bir forma yazılmıştır. Bu aşamada, görüşme sürecinde kaydedilen konuşmaların yazıya dökümü sürecindeki güvenirlik çalışması yapılmıştır (Kvale, 1996). Bu amaçla, verilerin tümünün bilgisayara yüklenmesi bittiğinde, görüşme kayıtlarından yansız olarak seçilen kayıtlar, bir alan uzmanına dinlettirilerek dökümlerin doğruluğunun kontrolü yapılmıştır.

Araştırma verilerinin analizinde “verinin işlenmesi” (data reduction), “verinin görsel hale getirilmesi” (data display), “sonuç çıkarma ve teyit etme” (drawing conclusion and verification) şeklinde üç bölümden oluşan sınıflama kullanılmıştır (Miles ve Huberman, 1994, ss. 10-12). Araştırmada veri analizi araştırmacı ve iki alan uzmanı tarafından gerçekleştirilmiştir. Veri analizinde izlenen aşamalar aşağıda Şekil 5‘te gösterilmiştir.



Şekil 5: Veri Analizinde İzlenen Aşamalar

Kaynak: Miles M. ve Huberman, M. (1994). *An expanded sourcebook qualitative data analysis.* Second Edition. California: Sage Publications. s. 10'dan uyarlanmıştır.

Verinin İşlenmesi: Alan notları ya da dökümlerden elde edilen verinin incelendiği ve kodlandığı aşamadır. Veri kodlanırken, araştırma problemine göre önemli olan kavramlar ve temalar kullanılır. Bu şekilde veri özetlenir ve önemli olanlar seçilir. Böylece veri daha sade ve araştırma problemi ile uyumlu hale gelir. Veri işleme aslında veri toplama süreci ile başlar ve araştırma raporu tamamlanana kadar devam eder (Miles ve Huberman, 1994, ss. 10-12).

Araştırmada, öncelikle üç alan uzmanı bağımsız çalışarak verileri kodlamıştır. Veri kodlanırken, araştırmacı tarafından daha önce alan-yazın taraması yapılarak hazırlanmış olan kavramsal çatı dikkate alınmıştır. Verilerin analiz edilmesi aşamasında yapılacak güvenirlilik çalışmalarından biri de kodlama güvenirliğidir. Bu araştırmada kodlama güvenilirlik hesaplaması için, Miles ve Huberman'ın (1994, s. 64) önerdiği aşağıdaki uyuşum yüzdesi kullanılmıştır. Bunun için, araştırmacının ve iki alan uzmanının belirledikleri kodlar için "görüş birliği" ve "görüş ayrılığı" sayıları belirlenmiş ve yapılan hesaplama sonucunda uyuşum yüzdesi %91 olarak bulunmuştur.

Güvenirlik = (Görüş Birliği) / [(Görüş Birliği) + (Görüş Ayrılığı)]

Araştırma verileri üzerinde araştırmacı ve iki alan uzmanı bağımsız çalışarak, temaları ve alt temaları oluşturmuşlardır. Temalar, araştırma verilerinden ortaya çıkartılan kavramlardır (Bogdan ve Biklen, 1998; Meriam, 1998). Temalar, katılımcının görüşme sırasında kullandığı ifadelerden meydana gelebileceği gibi; araştırmacının, alandaki bilgi yeterliliğine dayanarak verilerde varolan bilgilere isimler vermesiyle de oluşturulabilir (Patton, 1990). Bu bağlamda araştırmada veriler bir araya getirilerek incelenmiş ve ortak yönleri bulunmaya çalışılmıştır. Ortak yönleri olan veriler birer alt başlık altında gruplanmıştır. Bu alt başlıklar ise araştırmanın alt temalarını oluşturmuştur. Daha sonra bu alt temalar bir araya getirilerek temalar oluşturulmuştur. Elde edilen tema ve alt temalar birbiriyle ilişkili ve anlamlı bir bütün oluşturacak şekilde düzenlenmiştir. Bu arada üç alan uzmanı birleştirilmesi ya da ayrılması gereken bazı alt temalar belirlemiştir. Bu bağlamda uzmanların görüşleri değerlendirilmiş ve değerlendirme sonucunda araştırmacı tema ve alt temaların yazımına son şeklini vermiştir.

Verinin Görsel Hale Getirilmesi: Veri analizinin ikinci temel aşamasında daha sade ve araştırma problemiyle uyumlu hale gelen veri, çeşitli grafikler, tablolar ve şekiller yoluyla görsel hale getirilir. Verinin görsel hale getirilmesi, ortaya çıkan kavramların ve temaların birbirleriyle ilişkilerinin belirgin hale getirilmesi, aynı zamanda bu kavram, tema ve ilişkilerden yola çıkarak bazı sonuçlara ulaşması yönünden önemlidir (Miles ve Huberman, 1994, ss. 10-12). Bu bağlamda araştırmada, araştırmacı tema, alt temalar ve alt temalar altında yer alan kodlar ve bunlar arası ilişkileri diyagram ve tablo kullanarak görsel hale getirmiştir.

Sonuç Çıkarma ve Teyit Etme: Bu aşamada ortaya çıkan kavramlar, temalar ve ilişkiler yorumlanır, karşılaştırılır ve teyit edilir. Bu şekilde, araştırma sonuçlarının anlamlandırılması ve geçerliliğinin sağlanması mümkün olmaktadır (Miles ve Huberman, 1994, ss. 10-12). Bu bağlamda ortaya çıkan temalar ve temalar arası ilişkiler araştırma soruları altında yorumlanmış ve karşılaştırılmıştır. Bulgular öğrenci günlükleri ve araştırmacı günlüğünden elde edilen verilerle desteklenmiştir. Bu aşamada öğrenci görüşleri ve günlüklerinden, araştırmacı günlüğünden de doğrudan alıntılar yapılmıştır.

2.7. Araştırmanın Geçerlik ve Güvenirliği

Araştırmanın geçerliliği ve güvenirliği, doğru bilgiye ulaşma konusunda gereken önlemlerin alınması ve araştırma sürecinin ve verilerin açık ve ayrıntılı tanımlanmasını gerektirir. Nitel araştırmada geçerlik ve güvenirlik kavramları; inandırıcılık (iç geçerlilik), aktarılabilirlik (dış geçerlilik), tutarlık (iç güvenirlik) ve teyit edilebilirlik (dış güvenirlik) kavramları ile ifade edilmektedir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

İnandırıcılık, bireyin bilişsel yapısı ve süreçlerinin ve gözlemlenen olayların inandırıcı bir şekilde açıklanmasıdır (Clement, 2000; Miles ve Huberman, 1994). Aynı zamanda inandırıcılık araştırmacının, katılımcının ne düşündüğünü, ne hissettiğini, ne yaptığını ve düşünmelerine etki eden süreçlerini, duygularını ve etkinliklerini doğru bir şekilde açıklamasıdır (Lodici, Spaulding ve Voegtle, 2006). Bu nedenle araştırmacının elde ettiği bulguların gerçekliğine, benzer ortamlarda sonuçların geçerliliğine, süreçlerin birbiri ile tutarlı olmasına ve verilerin nesnel bir yaklaşımla toplandığına ve yine nesnel bir yaklaşımla sonuçlar ortaya koyduğuna ilişkin kanıtlar sunması gereklidir. Bu araştırmada da, inandırıcılık kapsamında; araştırmacı katılımcılar ile uzun süreli bir etkileşim içinde olmuş ve ortamda uzun süre kalarak olay, olgu, durum ve yorumları katılımcıların bakış açısıyla ortaya koymuştur. Derinlemesine veri toplayarak elde ettiği sonuçları birbiriyle sürekli karşılaştırarak, yorumlayarak ve kavramsallaştırarak bazı örüntüleri ortaya çıkarmıştır. Araştırmacı farklı özelliklere sahip katılımcıları araştırmaya dahil ederek çoklu gerçekliklere ulaşmış, görüşme, öğrenci günlükleri, araştırmacı günlüğü gibi farklı yöntemlerle de veriler elde etmiştir. Ayrıca elde edilen veriler araştırmacı ve iki alan uzmanı ile birlikte değerlendirilmiştir (Clement, 2000; Yıldırım ve Şimşek, 2005; Miles ve Huberman, 1994).

Aktarılabilirlik; araştırma sonuçlarının genellenebilirliğidir. Ancak nitel araştırmalarda araştırma sonuçları doğrudan benzer ortamlara ve durumlara genellenemez. Ancak, bu tür ortamlara sonuçların uygulanabilirliliğine ilişkin geçici yargılara ulaşılması ve test edilebilecek denenceler oluşturulması mümkündür. Aktarılabilirlik; okuyucular tarafından karar verilecek araştırma alanı ve diğer alanlar arasındaki benzerlilik derecesidir (Lodici, Spaulding ve Voegtle, 2006). Erlandson ve diğerleri (1993; Akt. Yıldırım ve Şimşek, 2005) araştırma sonuçlarının aktarılabilirliğini artırmak için ayrıntılı betimleme ve amaçlı örnekleme yöntemlerini önermektedir. Bu araştırmada da aktarılabilirlik kapsamında; amaçlı örnekleme kullanılmış ve katılımcıları belirleme ölçütleri ve katılımcıların özellikleri ayrıntılı olarak verilmiştir. Ayrıca ham veri, ortaya çıkan kavram ve temalara göre düzenlenerek yorum katmadan ve verinin doğasına sadık kalınarak ayrıntılı olarak aktarılmıştır. Bu amaçla sonuçlar doğrudan alıntılarla desteklenmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Tutarlılık; araştırma yaklaşımının ve araştırmanın çeşitli aşamalarında (veri toplama, analiz gibi) yapılan kontrollerin açık bir biçimde tanımlanmasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005). Diğer bir deyişle veri toplama ve yorumlamada kullanılan süreçlerin ve prosedürlerin açıklanmasıdır. İyi bir nitel çalışma verinin nasıl toplandığı ve analiz edildiğinin detaylı açıklanmasıyla sağlanır (Lodici, Spaulding ve Voegtle, 2006). Bu araştırmada veri toplama ve analizi ile ilgili tüm aşamalar ayrıntılı bir şekilde açıklanmış ve araştırma sürecinde veriler video ile kayıt edilmiştir.

Teyit edilebilirlik; ulaşılan sonuçların toplanan verilerle sürekli olarak teyit edilmesi, araştırmacının önyargıdan uzak nesnel bir yaklaşımla verileri ortaya koymasıdır (Yıldırım ve Şimşek, 2005; Miles ve Huberman, 1994). Bu araştırmada da verilerin tanımlanması ve yorumlanmasında nesnel davranılmaya çalışılmış, verilerin ve sonuçların doğruluğu için farklı araştırmacılar kullanılmıştır. Aynı zamanda araştırma sürecinde, gerektiğinde farklı araştırmacılara inceletilmek üzere elde edilen tüm veriler denetim altına alınmıştır.

3. BULGULAR ve YORUMLAR

Bu bölümde, araştırma sürecinde çeşitli veri toplama araçlarıyla, elde edilen verilerin analizi sonucunda, elde edilen bulgulara ve yorumlarına yer verilmiştir. Bulgular; klinik görüşmelerde öğrencilere yöneltilen sorulara karşılık alınan, öğrenci açıklamaları ile bu açıklamalara paralel bilgilerin yer aldığı öğrenci çalışma yapraklarından ve öğrenci günlüklerinden, araştırmacı günlüğünden seçilen doğrudan alıntılarla desteklenmiştir.

3.1. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Tekrarlanan Şekil Örüntüsünü Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Bulgular

Araştırmanın birinci amaç maddesi ile, ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin tekrarlanan bir şekil örüntüsünde;

- örüntünün kuralını nasıl buldukları
- örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma nasıl devam ettirdikleri
- istenen bir örüntüyü nasıl oluşturdukları
- bir örüntüdeki ilişkileri nasıl ifade (yazılı ya da sözel ifade, sayısal ifade, sembol, şekil, tablo, grafik vb.) ettikleri

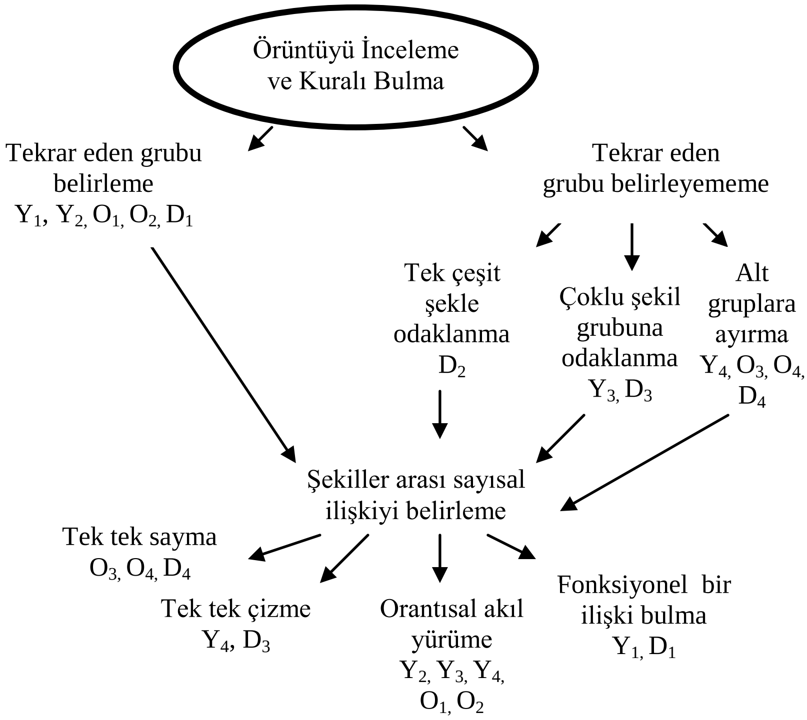
saptanmak istendiğinden, tekrarlanan şekil örüntüsüne ilişkin elde edilen veriler;

- Örüntüyü inceleme ve kuralı bulma
- Örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme
- Örüntü oluşturma
- İlişkilerin ifade biçimleri

şeklinde dört alt tema altında analiz edilmiştir.

3.1.1. Örüntüyü İnceleme ve Kuralı Bulma

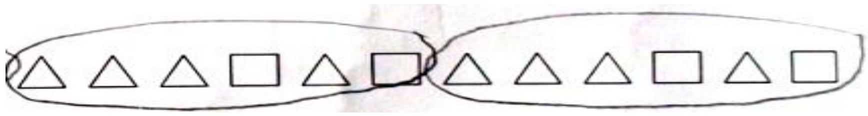
Tekrarlanan şekil örüntüsünü inceleme ve kuralı bulma alt teması altında katılımcı öğrencilerin yaklaşımları ve kullandıkları stratejiler Şekil 6'da verilmiştir. Ayrıca belirtilen yaklaşımları ve stratejileri kullanan öğrencilerin, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 6: Tekrarlanan Şekil Örüntüsünü İnceleme ve Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerden öncelikle verilen tekrarlanan şekil örüntüsünde (EK-4, soru 1) tekrar eden şekil grubunu (tekrar birimi) belirlemeleri istenmiştir. Şekil 6'da görüldüğü gibi, öğrencilerden iki yüksek, iki orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip toplam beş öğrenci (Y_1, Y_2, O_1, O_2, D_1) tekrar eden şekil grubunu belirlerken, iki yüksek, iki orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip toplam yedi öğrenci (Y_3, Y_4, O_3, O_4, D_2, D_3, D_4) tekrar eden şekil grubunu belirleyememiştir.

Öğrencilerden tekrar eden şekil grubunu belirleyebilenler, tekrar grubunu yuvarlak içine alarak, bu grubun tekrar ederek devam ettiğini ifade etmişlerdir. Örneğin tekrar eden şekil grubunu bulan Y_2;



G *: Neden öyle yaptığını neden öyle çizdiğini anlat.*

Y_2 *: Çünkü bu şekil* (bu şekil dediği tekrar grubu) *hep birbirini tekrar ediyor.*

Y_2, ayrıca günlüğünde de *"....tekrarlanan örüntüler üzerinde durduk. Bu da bana kolay geliyor. Çünkü; hep bir grup birbirini tekrar ediyor. Bu tekrarlanan grubu bulduğun sürece sen o örüntüyü buldun demektir" (20.03.2007)* şeklinde bir açıklamada bulunmuştur.

Öğrencilerden O_1 ise, tekrar eden şekil grubunu nasıl belirlediğini;

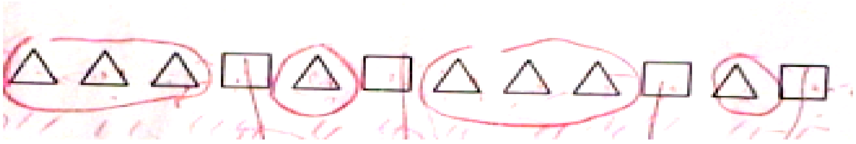
G *: Peki neden öyle yaptın? Onu yuvarlak içine aldın?*

O_1 *: ...Üç üçgen bir kare ... bir üçgen ... bir kare diye gidiyor. Burada da böyle aynıları gidiyor* (belirlediği tekrar grubunun yanındaki diğer tekrar grubunu işaret etti).

şeklinde açıklamıştır. Ayrıca O_1, günlüğünde de tekrar eden şekil grubunu kolayca belirlediğini *"... bugünkü yaptığım örüntüler kolaydı. Önce üçgen ve karelerden oluşan bir örüntü vardı. Oradaki tekrar eden birim üç üçgen, bir kare, bir üçgen, bir kareydi. Bunu bulmak zor olmadı" (20.03.2007)* şeklinde ifade etmiştir.

Tekrar eden şekil grubunu belirleyemeyen öğrenciler tekrar eden şekil grubu olarak değişik biçimlerde gruplamalar yapmışlardır. Örneğin bu öğrencilerden düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_2) **"tek şekle odaklanma"**, yüksek ve düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_3, D_3) **"çoklu şekil grubuna odaklanma"**, bir yüksek, iki orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci ise (Y_4, O_3, O_4, D_4), **"alt gruplara ayırma"** şeklinde gruplamalar yapmışlardır. Tek şekle odaklanan D_2, sadece üç tane üçgen ile tek üçgeni yuvarlak içine almıştır. Bu durumu,

G : *… yuvarlak içine alır mısın? ve nasıl yaptığını da anlat.*



D_2 : *Üçgenler üç tane oluyor. Bir kare ee … üçgen, bir kare, üçgen, bir kare, üçgen, bir kare, üç üçgen bir kare diye gidiyor* (önce ilk üç üçgeni grupladı, sonra bir kareyi atlayarak tek üçgeni grupladı, daha sonra gelen üç üçgeni yine grupladı ve böyle devam etti). *Ay şu bunla bu. Bunla bu. Bunlarla da bu. Bunlarla da bu.* (Bunla bu derken grupladığı ikinci üçlü üçgen grubunu, ilk üçlü üçgen grubu ile, ikinci tekli üçgen grubunu, birinci tekli üçgen grubu ile eşledi).

G : *Nasıl yaptın?*

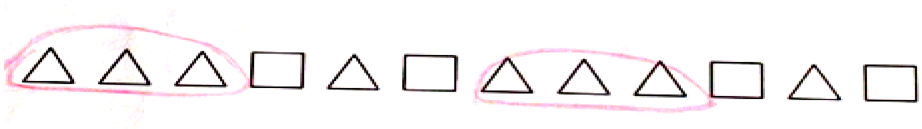
D_2 : *Burda üç tane üçgen var… yine bunun aynısı* (aynısı dediği üç tane üçgenden oluşan grup) *devam ediyor burda. Yine üç üçgen oluyor.*

şeklinde açıklamıştır.

Çoklu şekil grubuna odaklanan Y_3 ve D_3 ise, sadece üç tane üçgeni yuvarlak içine almış ve üçgenlerin ard arda sıralanmasından dolayı sadece bu grubun tekrar ettiğini ifade etmişlerdir. Örneğin;

G : *Tekrar eden şekil grubunu, yuvarlak içine almanı istiyorum.*

Y_3 : *Bu üçü üçgenler* (başta yer alan üç tane üçgenin altını çizdi ve yuvarlak içine aldı) *Üç tane tekrar etmiş ondan sonra bunlar tekrar* (tekrar derken devam eden üç tane üçgeni yine yuvarlak içine aldı) *sonra* (sonra devamında gelen üç tane üçgeni daha yuvarlak içine aldı).

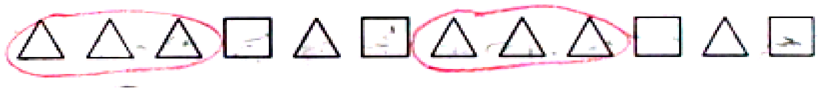


G : *Neden onları yuvarlak içine aldın?*

Y_3 : *Çünkü hepsi arka arkaya olarak ee hepsi arka arkaya olarak tekrar eden şekil grubu bir tek onlar vardı. Diğerleri tek olarak.*

Örneğin;

D_3 : *Üçgenler var* (önce ilk üç tane üçgeni, daha sonra devamında gelen üç tane üçgeni yuvarlak içine aldı).

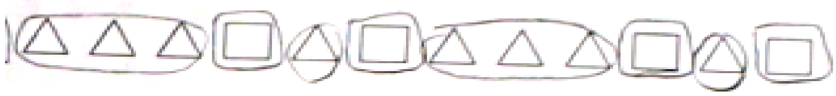


G : *Neden öyle yaptın?*

D_3 : *Çünkü burada ard arda üç tane üçgen verilmiş sonra kare verilmiş karede üçgen olmadığı için yani üçgene benzemediği için üçgen gidiyor. Çünkü burada ardı ardına üç tane üçgen verilmiş.*

Tekrar eden şekil grubunu alt gruplara ayırarak belirleyen öğrencilerden Y_4, O_4, D_4 bir dört alt grup, O_3 ise üç alt grup belirlemiştir. Dört alt grup belirleyen öğrencilerden Y_4, tekrar eden şekil grubunu nasıl belirlediğini aşağıda verildiği şekliyle ifade etmiştir.

Y_4 : (Önce kareyi yuvarlak içine aldı) *Ee… bu var kare. Şöyle yapayım. Üçgenler de var ama onlar farklı sayılarda tekrar ediyor birbirini.*



G : *Nasıl farklı sayılarda?*

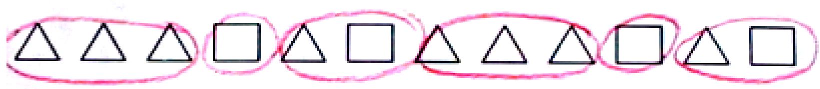
Y_4 : *Hıı… birinci bölümde üç tane üçgen var, ikincisinde bir tane.*

G : *Tekrar ettiğini düşündüğün grupları yuvarlak içine almanı istiyorum.*

Y_4 : *Şu ikisi birbirini tekrar ediyor* (ilk üçlü üçgen grubunu, daha sonra gelen üçlü üçgen grubunu yuvarlak içine aldı) *Bir de tek üçgenler var* (daha sonra tek olan üçgenleri yuvarlak içine aldı).

Tekrar eden şekil grubunu üç alt grup şeklinde belirleyen O_3 ise,

O_3 : *Üç üçgen var. Bir kare, bir üçgen bir kare, üç üçgen* (önce üçlü üçgen grubunu, sonra tek kareyi ve devamında gelen üçgen ve kareyi yuvarlak içine aldı).



G : *Neyi düşünerek yuvarlak içine aldın? Onu anlatmanı istiyorum.*

O_3 : *Üç üçgen bir tane kare var. İki üçgen ay bir üçgen, bir kare, üç üçgen diye gidiyor. Hıı… kareler sabit sayı. Üçgenler önce üç sonra bir diye devam ediyor.*

şeklinde tekrar eden şekil grubunu nasıl belirlediğini açıklamıştır.

Verilen örüntüde üç tane üçgenin ard arda sıralanması, tekrar eden şekil grubunu belirlerken, kimi öğrencilerin farklı biçimlerde gruplamalar yapmalarını sağlamış olabilir. Ayrıca verilen örüntünün tekrar biriminin (6) uzun olması, öğrencilerin tekrar eden şekil grubunu bir bütün olarak görmelerini de engellemiş olabilir. Diğer taraftan katılımcı öğrencilerin tekrarlanan şekil örüntüleri ile ilk kez karşılaşmış ya da bu örüntü çeşidi ile fazla deneyim geçirmemiş olmaları da tekrar eden şekil grubu olarak farklı biçimlerde gruplamalar yapmalarına neden olmuş olabilir.

Katılımcı öğrencilere, verilen bu örüntüde toplam kare sayısı 10 olduğunda üçgen sayısının ne olduğu sorularak, öğrencilerin örüntüde şekil sayıları arasındaki sayısal ilişkiyi nasıl belirledikleri saptanmak istenmiştir. Şekil 6'da görüldüğü gibi, öğrenciler şekiller arası sayısal ilişkiyi belirlerken; "orantısal akıl yürütme", "fonksiyonel ilişkiyi bulma", **"tek tek sayma"** ve **"tek tek çizme"** şeklinde stratejiler kullanmışlardır. Orantısal akıl yürütme stratejisini kullanan öğrencilerden üçü başarı düzeyi yüksek (Y_2, Y_3, Y_4), ikisi başarı düzeyi orta (O_1, O_2) öğrencilerdir. Bu öğrencilerden Y_2, O_1 ve O_2 tekrar eden şekil grubunu belirleyebilen öğrencilerdir. Bu öğrenciler tekrar eden şekil grubuna odaklanarak gruptaki kare ve üçgen sayıları arasındaki ilişkiyi bulmuşlardır. Örneğin Y_2;

G ***:*** *Peki bu örüntüde toplam kare sayısı 10 olduğunda üçgen sayısı ne olur?*

Y_2 ***:*** *20*

G ***:*** *Nasıl buldun?*

Y_2 ***:*** (Tekrar eden şekil grubunu gösterdi) *Çünkü… üçgenler karenin iki katı.*

Benzer şekilde O_1 ise;

O_1 ***:*** *İki tane var orda, o zaman iki katıysa. Kare 10 olduğunda kaç üçgen olur?*

G ***:*** *Evet*

O_1 ***:*** *10'sa, 20 olur, kare olur.*

G ***:*** *Nasıl yaptın?*

O_1 ***:*** **(**Tekrar eden şekil grubundaki üçgen ve kareleri gösterdi) *Şey çünkü üçgenler karelerin iki katı.*

şeklinde tekrar eden şekil grubu içinde yer alan üçgenlerin, karelerin iki katı olduğunu ifade etmişler ve böylece toplam kare sayısı 10 olduğunda, toplam üçgen sayısının 20 olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Tekrar eden şekil grubunu belirleyebilen öğrencilerden O_2'de şekiller arası ilişkiyi belirlerken, tekrar eden şekil grubuna odaklanmıştır. Ancak kare ve üçgen sayıları arasındaki ilişkiyi, işlem hatası yaparak ters belirlemiştir. Örneğin;

G *: Toplam kare sayısı 10 olduğunda toplam üçgen sayısı ne olur?*

O_2 *:* (Düşündü) *Beş*

G *: Nasıl yaptın? Nasıl buldun o beşi?*

O_2 *:* (Düşündü).

G *: Bu beş nedir?*

O_2 *: Şimdi burda toplam, mesela tekrar eden sayıda toplam üç kare var, dört kare var ee… dört üçgen iki kare var, yarısı olduğu için de beş olarak düşündüm.*

G *: Beş dediğin nedir burda?*

O_2 *:Üçgen sayısı… Beş işte ee… mesela ıı… üç üçgen bir yani tekrar eden sayıda dört tane şey üçgen var, iki tane kare var. Yarısı ola olarak düşündüm, onu ikiye böldüm beş dedim.*

Orantısal akıl yürütme stratejisini kullanan öğrencilerden Y_4, bu stratejiden önce araştırmacı tarafından **"tek tek çizme"** adı verilen stratejiyi kullanmıştır. Bu strateji, istenen sonuca ulaşmak için örüntünün çizilerek devam ettirilmesi şeklinde tanımlanmıştır. Y_4'ün her iki stratejiye ilişkin açıklamaları aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

Y_4 *: Bir saniye* (şekilleri saydı) *on ikinci, altı tane kare var.* (Önce verilen örüntüde toplam üçgenlerin sayısını 12 olarak buldu ve üçgen sembolü çizerek yanına 12 yazdı. Sonra kareleri saydı ve kare sembolü çizerek yanına 6 yazdı). *Ee… şuraya* (daha önce çizmiş olduğu üçgenlerin yanını gösterdi) *şekilleri devam ettirebilir miyim.*

G *: İstediğini yapabilirsin.*

Y_4 *:* Örüntüyü kare sayısı 10 olana kadar devam ettirdi. Sonra üçgenleri saydı) *20 olması lazım.*

G *: 20 nasıl yaptın? Nasıl düşündün?*

Y_4 : *Şimdi ya… ben örüntüyü devam ettirdim. Uzun yoldan yaptım. Örüntüyü devam ettirerek kare sayısını 10'a çıkardım. Sonra üçgen sayısını da örüntüyü göre devam ettirdiğim için üçgen sayısı kendiliğinden çıktı.*

G : *Çıktı 20 oldu. Peki uzun yoldan yaptım dedin. Kısa yolu da var mı bunun?*

Y_4 : Ee… var.

G : *Nasıl mesela?*

Y_4 : *Iıı… 12, altıncı mesela üçgen sayısı kare sayısının iki katı. 10 kare olursa 20 tane üçgen olur.*

G : *Neye göre iki katı olduğunu buldun?*

Y_4 : *Ee… şimdi belirlenmiş şekle göre üçgen sayısı 12, kare sayısı 6 olduğu için 12, 6'nın iki katı o yüzden kare sayısı 10 olursa 2 ile çarparsak 20 eder.*

Y_4, aslında yukarıdaki açıklamasından, önce örüntünün verilen bütününde bulunan üçgen ve kareleri saymıştır. Kare sayısının 10 taneden daha az çıkması sonucunda örüntüyü çizerek devam ettirme yoluyla, karelerdeki istenen sayıya ulaşmıştır. Bu noktada üçgenleri sayarak soruyu yanıtlamıştır. Ancak öğrencinin *"bu uzun yol idi"* şeklindeki açıklaması, araştırmacı için merak konusu olmuş ve kısa yolun ne olduğu sorusuna yönelik Y_4, orantısal akıl yürütme stratejisini kullanarak üçgen ve kare sayıları arasındaki sayısal ilişkiyi yukarıdaki şekilde açıklamıştır. Ancak verilen örüntüdeki şekiller, tekrar biriminin bir katı olarak sonlanması Y_4'ün kare ve üçgen sayıları arasındaki ilişkiyi görmesinde etkili olmuş olabilir.

Orantısal akıl yürütme stratejisini kullanan bir diğer öğrenci olan Y_3, tekrar eden şekil grubunu belirleyemeyen öğrencilerden biridir. Y_3 verilen örüntünün ilk beş şekline odaklanarak, diğer bir deyişle baştan altıncı şekil olan kareyi göz ardı ederek, kare sayısı bir iken üçgen sayısının dört olduğunu ifade etmiş ve kare sayısı 10 olduğunda üçgen sayısının 40 olacağını, doğru orantı kurarak belirlemiştir. Ancak tekrar eden şekil grubunu doğru belirleyemediği için, kare ve üçgen sayıları arasındaki ilişkiyi doğru kuramamış ve yanlış bir sonuca ulaşmıştır. Örneğin;

Y_3 : *Toplam kare sayısı 10 olduğunda nasıl olur şimdi? Toplam kare sayısı 10?*

G : *10 olduğunda üçgen sayısı ne olur?*

Y_3 : *Ee… üçgen sayısı. Bir tane şeyde bir tane karede dört tane üçgen ise 10'da 40 tane.*

G : *Nasıl düşündün?*

Y_3 *: Yani burada karenin yanında üç tane üçgen dört tane üçgen var* (burada derken ilk karenin sağında ve solundaki üçgenlerin toplam sayısını vurgulamaktadır) *10 tane ise 10' la da 4'ü çarparız 40.*

Katılımcı öğrencilerden bir yüksek ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_1, D_1) ise, şekiller arası ilişkiyi belirlerken "fonksiyonel bir ilişki" kullanmışlardır. Bu ilişkiyi, girdi ve çıktı değerleri arasında ilişki kurarak yani, tekrar eden şekil grubu sırası ile toplam şekil sayısı arasında ilişki kurarak belirlemişlerdir. Örneğin Y_1, bu stratejiyi nasıl kullandığını aşağıdaki gibi açıklamıştır.

G *: Peki örüntüde toplam kare sayısı 10 olduğunda üçgen sayısı ne olur?*

Y_1 *: Örüntüde kare sayısı 10 olursa ee… bir tekrarlamalıda dört üçgen var, iki kare var* (tekrar grubundaki şekilleri saydı) *böyle devam ederse beş ee… bunu beş ile çarparım beş kere iki, 10 kare, beş kere dört, 20 üçgen olur.*

G *: Burada beşin ne olduğunu bana söyler misin?*

Y_1 *: Beş ee… bir adım, beş adım yani adım sayısı* (tekrar grubunu adım sayısı olarak ele aldı).

G *: Adım sayısı dediğin, adım sayısı dediğin ne oluyor yani.*

Y_1 *: Birinci adım, ikinci adım* (tekrar gruplarını birinci adım, ikinci adım şeklinde isimlendirdi).

G *: Yani tekrar eden şekil gruplarına mı adım dedin sen? O yüzden bundan beş tane mi olmalı?*

Y_1 *: Evet. Yani birinci tekrarlamada iki tane var 10 olması için beş ile ikiyi çarparım. Böyle.*

G *: Beş dediğin?*

Y_1 *: Adım sayısı*

D_1'de toplam kare sayısı 10 olduğunda toplam üçgen sayısını bulurken Y_1 gibi benzer bir yol izlemiştir. Örneğin;

D_1 *: 20* (tekrar gruplardaki üçgen sayılarını hesapladı).

G *: Nasıl buldun?*

D_1 *: Beş grup var. Her grupta dört tane üçgen var. Ee… dört kere beş dedim. Çünkü bunlardan iki tane olunca beş grup olması gerekiyor 10 olabilmesi için toplam…*

Öğrencilerin kullandıkları bu strateji analiz edilerek araştırmacı tarafından aşağıdaki şekilde modellenmiştir.

f: Tekrar eden şekil grubu sırası (adım sayısı) $\rightarrow$Toplam şekil sayısı
g: Tekrar eden şekil grubu sırası (adım sayısı)$\rightarrow$Toplam kare sayısı
h: Tekrar eden şekil grubu sırası (adım sayısı) $\rightarrow$Toplam üçgen sayısı

olmak üzere f bağıntısı, şekil grubu sırası ile toplam şekil sayısı ve farklı şekillerin sayısal dağılımları arasındaki ilişkidir.

n=1 için ilk tekrar eden şekil grubundaki şekillerin sayısal dağılımı;

f(1)=g(1)+h(1)
6= 2+4

$n \in N$ olmak üzere n. tekrar eden şekil grubu (adım sayısı) için toplam şekil sayısı ve şekillerdeki sayısal dağılım ise, f(n)=g(n)+h(n)'dir.

Şekil 6'da görüldüğü gibi, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci olan D_3, şekiller arası ilişkiyi belirlerken **"tek tek çizme"** stratejisini kullanmıştır. D_3, tekrar eden şekil grubunu belirleyemeyip, örüntüde şekillerdeki devamlılığı farklı şekil grupları oluşturarak sıralama şeklinde sürdürebildiği için, şekiller arasındaki sayısal ilişkiyi görememiştir. Bu nedenle D_3 toplam üçgen sayısını bulurken, kare sayısı 10 olana kadar örüntüyü çizerek devam ettirmiştir. Örneğin D_3 toplam üçgen sayısını nasıl bulduğunu aşağıdaki gibi açıklamıştır;

G **:** *Toplam kare sayısı 10 olduğunda toplam üçgen sayısı ne olur?*

D_3 **:** *Şu şekilleri devam ettirelim o zaman. Şu üçgenler kare… Kare üçgen. Kareleri buldum şekil çizerek. Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, dokuz, on, on tane kare olduğunda üçgen demiştik. Üç önce şunları buluruz. Üç altı, dokuz, oniki, onbeş… 20 tane.*

Şekiller arası ilişkiyi belirlemede iki orta (O_3, O_4) ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (D_4) ise, araştırmacı tarafından **"tek tek sayma"** adı verilen stratejiyi kullanmışlardır. Tek tek sayma stratejisi, istenen sonuca ulaşmak için örüntüdeki şekillerin tek tek sayılması şeklinde tanımlanmıştır. Bu stratejiyi kullanan, bu üç öğrenci de, D_3 gibi tekrar eden şekil grubunu belirleyemeyen öğrencilerdendir. Bu öğrenciler de benzer şekilde şekiller arası sayısal ilişkiyi kuramamışlar ve toplam üçgen sayısını bulmak için örüntüde üçgen ve kare sayılarını tek tek saymışlardır. Örneğin O_3;

G : *Örüntüde toplam kare sayısı 10 olduğunda toplam üçgen sayısı ne olur?*

O_3 : (Örüntüye bir süre baktı) *19*

G : *Nasıl yaptın?*

…

O_3 : *Kare, üçgen saydım.*

G :*Nasıl saydığını biraz daha açıklar mısın?*

O_3 : *Önce kareyi saydım. Sonra üçgenleri saydım. Onüç, ondört, onbeş, onaltı, onyedi, onsekiz, ondokuz tane* (verilen şekil örüntüsü üzerinde dönerek sayma işlemi gerçekleştirdi. Ancak üçgenleri sayarken iki kare arasında yer alan 20. üçgeni saymayı unuttu).

şeklinde toplam üçgen sayısına nasıl ulaştığını açıklamıştır. Bu stratejiyi kullanan bir diğer öğrenci ise D_4'tür. D_4 tekrar eden şekil grubunu dört alt gruba ayırarak belirlediği için, verilen örüntüde altı tane kare grubu olduğunu ve kare sayısının 10 olması için dört tane daha kare grubu gerekeceğini söylemiştir. Daha sonra örüntüye dört kare grubu eklendiğinde, iki tane de üçlü üçgen gruplarından eklenmesi gerektiğini ifade ederek, toplam beş tane üçlü üçgen grubu olduğunu ve böylece toplam üçgen sayısının 15 olması gerektiğini açıklamıştır. D_4 öncelikle toplam üçgen sayısı olarak sadece üçlü üçgen gruplarına odaklanmış ve tekli üçgen gruplarını göz ardı etmiştir. Daha sonra tüm üçgenleri sayarak toplam üçgen sayısına ulaşmıştır. Örneğin;

G : *Şimdi örüntüde toplam kare sayısı 10 olduğunda, acaba toplam üçgen sayısı ne olur?*

D_4 : (Düşündü) *15*

G : *15 buldun. Neden 15 dedin. Nasıl buldun?*

D_4 : *Ee… şimdi burada altı tane daha kare var, 10 tane daha olması için dört tane daha gerekiyor. Bu dört tane işte, burada bir iki üç dört tane daha var. Şimdi oraya* *geleseye kadar iki tane grup olması lazım* (iki grup olması lazım derken dört kare eklenince, iki tane üçgen grubu olduğunu anlatmaya çalıştı) *yani burada da iki tane grup var. İki grup daha eklerim.*

G *: Şimdi iki üçgen grubu daha eklerim dedin.*

D_4 *:… üç tane var. Üç tane üçgen grubu, iki tane daha ekledim. Beş üçgen grubu ee 15 oluyor içindekiler* (baştan itibaren üçlü üçgen gruplarının toplam beş tane olduğunu söyledi. Ancak aradaki tekli üçgenleri ise gözardı etti).

G *: Başta da üç grup vardı. Toplam beş grup oda 15 eder diyorsun öyle mi?*

D_4 *: Evet*

G *: Neden bu üçgenleri aldın?*

D_4 *:Ya… bu karelerin yanında bu üçgenler olduğu için.*

G *: Yani bu karelerin yanında, bu üçgen grupları olduğu için bu üçgenleri saydın öyle mi?*

D_4 *: Diziyi tekrar ettirdim yani örüntüyü. Gene bunların yanında üçgen grupları olacağı için.*

G *: Peki sadece bu üçgenler mi var burda, örüntüde.*

D_4 *: Başka üçgenlerde var. Ama biz üçlü üçgen gruplarını alıyoruz.*

G *: Neden o grupları alıyoruz?*

D_4 *: İşte üçerli grup olduğu için, üçerli dizi. Ben bunları grup içine aldım ya o yüzden.*

G *:Üçgenleri onları saydın sadece grup halinde, bunları grupladığın için bu üçgenleri saydın öyle mi?*

D_4 *: Hıı hıı ...*

G *: Bende diyorum ki, toplam kare sayısı 10 olduğunda toplam üçgen sayısı ne olur?*

D_4 *: Ha toplam üçgen sayısı şimdi* (üçgenleri tekrar saydı) *20 olur.*

G *: Nasıl yaptın?*

D_4 *:Yani bunlar bunları tek üçlü grupları ekleyince 15 oluyordu birde bunların aralarında gene üçgenler var onları da ekledim 20 oluyor.*

Tekrarlanan şekil örüntüsünü inceleme ve kuralı bulmaya ilişkin, katılımcı öğrenciler ile yapılan görüşmeler sonunda, araştırmacı düşüncelerini 20.03.2007 tarihli günlüğüne aşağıdaki biçimiyle yansıtmıştır:

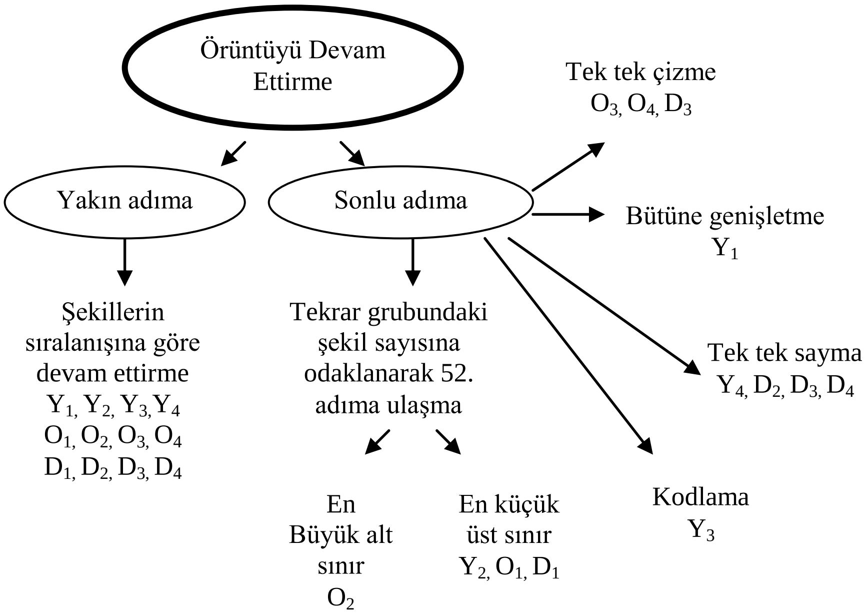
…D_1 düşük seviyeli bir öğrenci. Ancak zorlanmadan tekrar eden şekil grubunu buldu. Daha sonra sırayla görüştüğüm Y_1, Y_2, O_1 ve O_2'de tekrar eden şekil grubunu kolayca belirlediler…Bunun dışında bu öğrenciler örüntüde kare ve üçgen şekilleri arasındaki ilişkiyi de tekrar eden şekil grubunu belirledikleri için kolayca buldular. Öğleden sonra görüştüğüm öğrencilerden hiçbiri tekrar eden şekil grubunu belirleyemedi. Bu öğrenciler tekrar grubu olarak farklı gruplamalar yaptılar. Bu bağlamda da şekiller arası ilişkiyi

> *sayarak ya da çizerek belirlemeye çalıştılar. Sabah görüştüğüm öğrenciler öğleden sonra görüştüğüm öğrencilere nazaran tekrarlanan şekil örüntüsünde daha başarılı oldular. Tekrarlanan bir örüntüde tekrar eden şekil grubunun belirlenmesi önemli olmasına karşın az sayıda öğrencinin bunu yapabilmesi, öğrencilerin tekrar eden şekil grubunu belirlemeye ilişkin etkinliklerle ilk kez karşılaştıkları düşüncesini akla getiriyor (G, 20.03.2007).*

Elde edilen bulgular sonucunda, kimi öğrenciler tekrar eden şekil grubunu (tekrar birimini) belirlerken kimi öğrenciler tekrar eden şekil grubu olarak farklı biçimlerde gruplamalar yaparak tekrar eden şekil gubunu belirleyememişlerdir. Ancak tekrar eden şekil grubunu belirleyemeyen öğrenciler farklı biçimlerde gruplamalar yapsalar da, yaptıkları bu gruplamalar çerçevesinde örüntüdeki şekil akışını sürdürebilmişlerdir. Bunların yanı sıra, tekrar eden şekil grubunu belirleyebilen ve belirleyemeyen öğrenciler arasında yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer alması, tekrarlanan bir şekil örüntüsüne ilişkin strateji seçiminde öğrencilerin sahip oldukları başarı düzeyinin bir etkisi olmadığının bir göstergesi olarak değerlendirilebilir. Tekrarlanan bir örüntüde genelleme yapabilmek için tekrar birimini belirlemek oldukça önemlidir. Nitekim verilen örüntüde tekrar eden şekil grubunu belirleyebilen öğrenciler, şekiller arası sayısal ilişkiyi, "orantısal akıl yürüterek" ve "fonksiyonel bir ilişki" kurarak kolayca belirleyebilmişlerdir. Diğer taraftan tekrar eden şekil grubunu doğru bir şekilde belirleyemeyen öğrenciler ise, şekiller arası sayısal ilişkiyi de belirleyememişlerdir.

3.1.2. Örüntüyü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirme

Tekrarlanan şekil örüntüsünde, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 7'de verilmiştir. Ayrıca belirtilen stratejileri kullanan öğrencilerin başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.

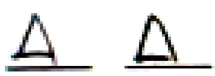


Şekil 7: Tekrarlanan Şekil Örüntüsünü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirmede Kullanılan Stratejiler

Araştırmanın birinci amaç maddesinde yer alan "örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme", verilen tekrarlanan şekil örüntüsünün, devamında yer alan şekilleri ve istenen sonlu bir sayıya karşılık gelen şeklin belirlenmesi, anlamında düşünülmüştür. Bu bağlamda katılımcı öğrencilerden, verilmiş olan tekrarlanan şekil örüntüsünü, önce yakın bir adıma (iki şekil) devam ettirmeleri, daha sonra sonlu bir adım olarak 52. şekli belirlemeleri istenmiştir. Şekil 7'de görüldüğü gibi, öğrencilerin tamamı şekillerin sıralanışını dikkate alarak örüntüyü yakın bir adıma devam ettirebilmişlerdir. Bu öğrencilerden tekrar eden şekil grubunu belirleyebilen iki yüksek, iki orta ve bir düşük (Y_1, Y_2, O_1, O_2, D_1) başarı düzeyine sahip beş öğrenci daha çok tekrar eden şekil grubundaki şekillerin sıralanışına odaklanarak, diğer öğrenciler (Y_3, Y_4, O_3, O_4, D_2, D_3, D_4) ise, örüntünün verilen bütünü içerisinde şekillerin sıralanışına odaklanarak örüntüyü devam ettirmişlerdir. Örneğin Y_1;

G ***: Örüntü devam ettiğinde boşluklara hangi şekiller gelmeli?***

Y_1 ***:*** (Boşluklara üçgenleri çizdi) *Üçgen.*



G ***: Nasıl karar verdin buna?***

Y_1 : *Ee… tekrar elemanlarına baktım öyle.*

G : *Nedenini bir daha söyle bakayım.*

Y_1 : *Şimdi ben bu yuvarlak içine aldıklarımı gözlemledim en son kare var ondan sonra üç üçgen gelecek ondan dolayı aldım.*

şeklinde açıklamada bulunurken Y_3 ise;

G : *Örüntüyü devam ettirdiğinde şu boşluklara hangi şekiller gelmeli sence?*

Y_3 : *Örüntüyü devam ettirdiğimde buraya* (buraya derken boşlukları eliyle gösterdi) *üçgenler gelmeli.*

G : *Nasıl karar verdin?*

Y_3 : *Çünkü üç tane üç tane üçgen sonra bir tane kare ee… bir tane üçgen bir tane kare üç tane üçgen bir tane kare öyle devam ediyor, ve buraya* (buralara derken boşlukları gösterdi) *kare üçgen kare olmuş ve buralara gelmesi gerekiyor.*

şeklinde açıklamada bulunmuştur.

Katılımcı öğrenciler verilen tekrarlanan şekil örüntüsünü sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında, 52. şeklin ne olabileceğini belirlerken Şekil 7'de görüldüğü gibi, bir yüksek, iki orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_2, O_1, O_2, D_1), tekrar grubundaki şekil sayısına odaklanmışlardır. Tekrarlanan şekil örüntüsünde belirtilen 52. şeklin belirlenmesinde, katılımcı öğrencilerden kimilerinin çözüm için izledikleri düşünme biçimi, araştırmacı tarafından **"en büyük alt sınır"** ve **"en küçük üst sınır"** şeklinde isimlendirilerek tanımlanmıştır. En büyük alt sınır stratejisi; istenen şeklin yer alacağı sonlu adımdaki tam sayı kümesinin (tekrar grubundaki şekil sayısı), en büyük alt sınırını bulmadır. En küçük üst sınır stratejisi ise; istenen şeklin yer alacağı tam sayı kümesinin (tekrar grubundaki şekil sayısı), en küçük üst sınırını bulmadır.

En büyük alt sınır ve en küçük üst sınır stratejilerini kullanan öğrenciler tekrar eden şekil grubunu belirleyebilen öğrencilerden dördüdür (Y_2, O_1, O_2, D_1). Bu öğrencilerden O_2, en büyük alt sınır stratejisini kullanmıştır. Şöyleki, öğrenci örüntüde tekrar birimindeki şekil sayısını altı olarak belirledikten sonra, altının tam katı olan 48 sayısına ulaşmış ve böylece 48 sayısının yer alacağı tam sayı kümesinin (bu örüntü için), en büyük alt sınırını bulmuştur. Örneğin O_2'nin yaklaşımı;

G *: Sence baştan 52. şekil ne olabilir? Nasıl bulabilirsin?*

O_2 *: 52. şekil* (bir süre düşündü) *52, kare.*

G *: Nasıl yaptın?*

O_2 *: Şimdi 52 yi altıya böldüm, burda altı tamamlayan, ... tekrar eden ... şekil altı tane olduğu için sekiz çıktı. Yani tam olarak bölünmese de. Bundan sekiz tane, daha sonra ee… altı ile sekizi çarptığımda 48, 52'den dördü çıkardım, dört sonra ee… bir, iki, üç, dört oda kare oluyor.*

En küçük üst sınır stratejisini kullanan Y_2, O_1, D_1 'de benzer şekilde verilen örüntünün tekrar birimindeki şekil sayısını altı olarak belirledikten sonra, altının tam katı olarak 54 sayısına ulaşmış ve böylece 54 sayısının yer aldığı tam sayı kümesinin (bu örüntü için), en küçük üst sınırını bulmuştur. Örneğin;

G *: Baştan 52. şeklin ne olacağını tahmin edebilir misin?*

Y_2 *:* (Kısa bir süre düşündü ve kareyi gösterdi) *Bu olur?*

G *: Nasıl buldun?*

Y_2 *: Bunu* (bunu derken tekrar eden şekil grubunu gösterdi) *aynı şekillerle gittiği için çarptım.*

G *: Neyle çarptın?*

Y_2 *: Mesela bunu bir, iki, üç, dört, beş, altı* (tekrar grubundaki şekilleri saydı) *hangisi 52 yi aşıyor. Dokuz kere altı, 54 ediyor. Onun da iki eksiği 52 ediyor buradan.*

Şekil 7'de görüldüğü gibi, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmede kullanılan stratejilerden biri de "bütüne genişletme" stratejisidir. Örneğin Y_1, bu stratejiyi kullanarak 52. şekli nasıl bulduğunu aşağıdaki şekilde açıklamıştır.

G *: 52. şeklin ne olacağını tahmin edebilir misin?*

Y_1 *: Baştan beşinci şekil üçgense 50. şekil de üçgen. Üçgen.*

G *: Neden üçgen dedin? Nasıl karar verdin buna?*

Y_1 *: Mesela 52 dediniz ya, bu beşinci şekil 5 ile 10'u çarptım 50 oldu. İki şekil daha var bir, iki öyle düşündüm. Matematiksel olarak.*

G *: Bir daha tekrarla bakayım. Bir daha anlat nasıl düşündüğünü.*

Y_1 *: İlk ee… 52. şekil dediniz ya. Beşinci şekli buldum. Beşinci şekil üçgense ee… 50'ye kadar 10 kere olacak bu tekrarlanacak 10'a kadar bir üçgen olur iki şekil daha olacak. 52 olmasına bir, iki de üçgen olur.*

Yukarıdaki ifadelerden de anlaşılacağı gibi, Y_1 52. şekli yanlış belirlemiştir. Y_1, öncelikle örüntüde beşinci şeklin üçgen olduğunu görmüş, daha sonra 5.10=50 olduğundan 50. şeklinde üçgen olabileceğini düşünmüştür. 52. şekle ulaşmak için de baştan beşinci şekilden iki şekil sayarak 52. şeklin üçgen olduğunu ifade etmiştir. Y_1, tekrar eden şekil grubunu belirleyebilen öğrencilerden biri olmasına karşın, beşinci şekle odaklanması onu yanlış bir sonuca ulaştırmıştır.

Şekil 7'de görüldüğü gibi, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmede, alan-yazında yer almayan ancak bu araştırma içerisinde gözlenen ve araştırmacı tarafından **"kodlama"** stratejisi adı verilen bir strateji kullanılmıştır. Kodlama stratejisi; belli sıradaki şekillerin bulunduğu adımların katlarına, aynı şekilleri kodlama ile, hatalı kullanılan bir stratejidir. Örneğin bu stratejiyi kullanan Y_3, 52. şekle nasıl ulaştığını aşağıdaki şekilde açıklamıştır.

G : *Baştan 52. şeklin ne olduğunu bulabilir misin?*

Y_3 : *52. şekil* (bir süre düşündü) *beşinci şekil üçgen. Baştan 52. şekil de üçgen olabilir.*

G : *Neden?*

Y_3 : *Şey beşinci şekil üçgen, 10. şekil kareyse yani hep 5, 10, 15 ... diye düşümdüm. Yani 52. şekil de üçgen olur. Yani öyle.*

G : *Yani burada beşinci şekil üçgen. Daha sonra burada onuncu şekil kare diyorsun değil mi?*

Y_3 : *Hı hı...*

G : *Peki sonra ne dedin? Tekrar anlatır mısın?*

Y_3 : *Yani, ... 5, 10, 15 yani beşinci, 15. yine üçgen olur. 20. kare, 25. üçgen, 30. kare, 35. üçgen, 40., 45. üçgen, 50. ondan sonra herhalde üçgen gelir diye düşündüm. Üç tane üçgen.*

Tekrarlanan şekil örüntüsünde tekrar eden şekil grubunu belirleyemeyen kimi öğrenciler sonlu adımdaki şekli (52. şekil), geliştirdikleri farklı stratejilerle de saptayabilmişlerdir. Burada geliştirilen stratejiler, verilen örüntünün bütününde yer alan şekil sayısının katları ile sonlu sayıya ulaşma ve verilen örüntüde baştan itibaren şekilleri dönerek "tek tek sayma" stratejisidir. Y_4, D_2, D_3, D_4, bu stratejiyi kullanan öğrencilerdir. Bu öğrencilerden D_2 ve D_4, 52. şekle ulaşmak için örüntüdeki şekilleri tek tek saymışlardır. Y_4 ve D_3 ise, önce verilen örüntüde 18 tane şekil olduğunu belirlemişler, daha sonra 18 ile 18'i toplayıp ve toplama tekrar 18 ekleyip 54'e ulaşmışlardır. Daha sonra iki şekil geriye giderek 52. şeklin kare olduğunu ifade etmişlerdir. Örneğin Y_4;

G *: Ben sana deseydim ki baştan 52. şekil ne olabilir?*

Y_4 *: Baştan 52. şekil. Hıı… 11, 12, 13, 14, 15, 16, 17, 18 şekil var* (örüntüde yer alan şekilleri baştan itibaren saydı ve en son kendi çizdiği iki şekli göstererek) *Bunları sayayım mı?*

G *: Nasıl düşünüyorsan. Ben baştan 52. şeklin ne olduğunu soruyorum.*

Y_4 *: 18 ee… bir saniye, 36, 72* (işlemleri zihinden yapmaya çalıştı)

G *: İşlemini de yapabilirsin buraya her türlü işlemi yapabilirsin tamam mı.*

Y_4 *:Yapabilir miyim? Tamam* (önce 18 ile 18 i topladı. Daha sonra bulduğuna 18 ekledi ve 54 elde etti) *Baştan 52. şekil, Iıı… bu olabilir kare* (verilen örüntünün sondan üçüncü şeklini gösterdi)

G *: Neden öyle kare dedin?*

Y_4 *: Ee… çünkü örüntüdeki 18 şekil var benim yaptığımı saymazsak. Ee… 18, 52'ye ulaşmak için ee… bir tane daha 18 gelir. Ee… sonra yeniden 18 gelirse 54 sayı oluyor. Ondan iki öncesi kare olduğu için öyle.*

şeklinde açıklamada bulunmuştur. Şekil 7'de görüldüğü gibi, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmede kullanılan stratejilerden bir diğeri de "tek tek çizme" stratejisidir. Bu stratejiyi kullanan iki orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (O_3, O_4, D_3) 52. şekle, örüntüdeki şekilleri tek tek çizerek ulaşmışlardır. Bu stratejiyi kullanan öğrencilerden O_3 aşağıdaki şekilde açıklamada bulunmuştur.

G *: Peki şimdi ben sana desem ki baştan 52. şekli tahmin edebilir misin?*

O_3 *: Bulabilirim …* (tekrar örüntüde yer alan şekilleri tek tek saydı sonra örüntüyü çizerek devam ettirdi) *Üçgen*

G *: Ne geliyormuş?*

O_3 *: Üçgen. Örüntüyü devam ettirdim.*

G *: Üçgen geliyor diyorsun*

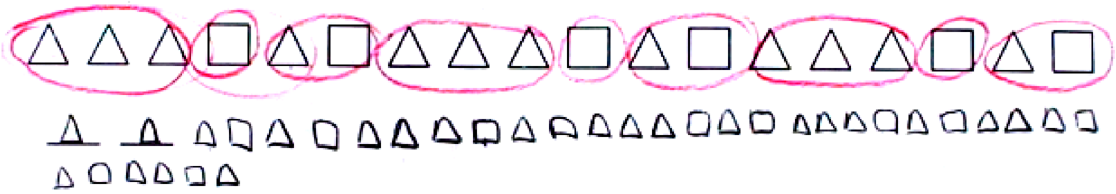
O_3 *: …* (düşündü) *kare olacaktı* (devam ettirdiği örüntünün sonunda üçgenle karenin yerini yanlış çizdiğini fark etti).

G *:Neden kare olacak dedin?*

O_3 *: Örüntüyü devam ettirdim de şurayı yanlış yapmışım* (Şurayı dediği üç üçgen çizip sonra kare çizmesi gerekirken iki üçgen bir kare bir üçgen çizdi. Yani kare ve üçgenin sıralarını yanlış çizdi ve daha sonra bunu fark etti).

G *: Peki çizmeden acaba bulamaz mıydın? Bir düşün bakalım.*

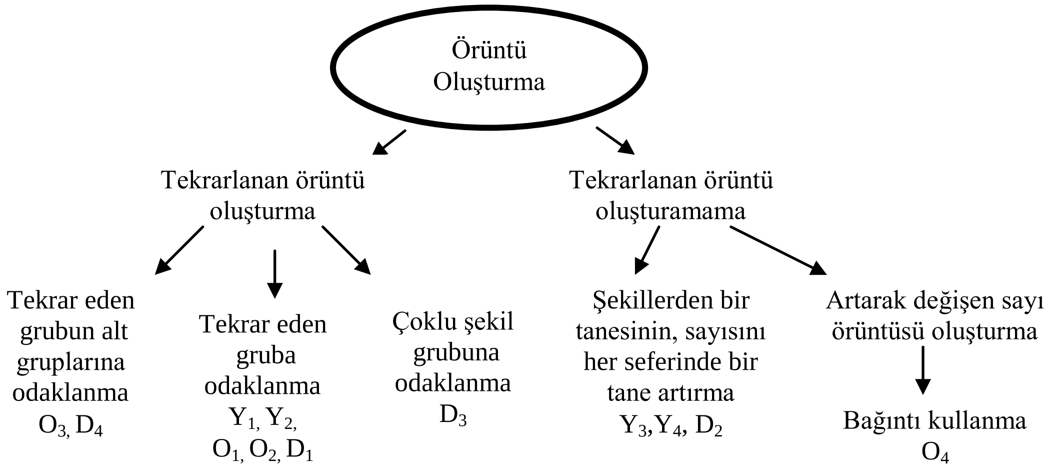
O_3 **:** (Biraz düşündü) *Bulamazdım.*



Elde edilen bulgular sonucunda, öğrencilerin tamamı tekrarlanan şekil örüntüsünü, şekillerin sıralanışını dikkate alarak, yakın bir adıma devam ettirmişlerdir. Diğer taraftan tekrarlanan şekil örüntüsünde, tekrar birimini (6) belirleyebilen öğrencilerden kimileri, örüntüde şekiller arası sayısal ilişkiyi belirlemede de olduğu gibi, 52. adıma (sonlu adım) gelecek şekli, tekrar birimini kullanarak kolayca belirleyebilmişlerdir. Tekrar birimini belirleyemeyen öğrenciler ise, daha büyük sonlu adımlar için kullanılması zor olan ya da doğru sonuç vermeyen, geliştirdikleri değişik stratejiler ile sonuca ulaşmışlardır. Ancak tekrar birimini doğru belirleyen öğrencilerden yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci 52. adımdaki şekli belirlerken, “bütüne genişletme” stratejisini kullanmıştır. Öğrencinin beşinci şekle odaklanması onu yanlış bir sonuca ulaştırmıştır. Sonuç olarak, öğrencilerin değişik stratejiler geliştirebilmesinde de örüntünün veriliş biçiminin etkili olduğu söylenebilir.

3.1.3. Örüntü Oluşturma

Tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 8’de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 8: Tekrarlanan Bir Şekil Örüntüsü Oluşturma Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerden tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturmaları istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 8'de görüldüğü gibi, iki yüksek, üç orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip toplam sekiz öğrenci (Y_1, Y_2, O_1, O_2, O_3, D_1, D_3, D_4) tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluştururken, iki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_3, Y_4, O_4, D_2) tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturamamıştır. Tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturan öğrencilerden iki yüksek, iki orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip beş öğrenci (Y_1, Y_2, O_1, O_2, D_1) oluşturdukları şekil örüntüsünü **"tekrar eden şekil grubuna odaklanarak"** oluşturmasına karşın, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_3) **"çoklu şekil grubuna"**, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci (O_3, D_4) ise, **"tekrar eden grubun alt gruplarına odaklanarak"** tekrarlanan şekil örüntüsü oluşturmuştur. Bunlara ilişkin örnekler aşağıdadır. Örneğin,

G : *Peki bu verilen örüntüde olduğu gibi tekrarlanan bir örüntü oluşturabilir misin? Sen de.*

O_1 :*Kendim?*

G : *Kendin ve nasıl oluşturduğunu da açıklamanı istiyorum.*

O_1 : (çember üçgen kare, çember üçgen kare şeklinde tekrarlayan bir örüntü oluşturdu).

G : *Nasıl yaptın? Anlatır mısın?*

O_1 :*Bunu tekrar eden birimlere göre yaptım. Bunla onu yaptım sonra aynısını yaptım tekrar eden bir grup* (Önce ilk tekrar grubundaki şekilleri gösterdi, sonra bu grubun aynen tekrar ettiğini ifade etti).

Örneğin;

G   *: Verilen örüntüde olduğu gibi tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturabilir misin?*

D_3   *: Oluştururum.*

G   *: Anlat bakalım nasıl yaptın?*

D_3   *: Şimdi buraya bir tane daire çizdim, yanına iki tane yıldız yaptım. Sonra yine daire çizdim üç tane kare yaptım öyle öyle devam ediyor.*

G   *: Peki tekrar eden şekil grubunu yuvarlak içine al desem nasıl yaparsın?*

D_3   *: Kareleri alırım, yıldızları alırım. Şunlar var* (önce yıldızları yuvarlak içine aldı) *Şu kareler var* (Sonra kareleri yuvarlak içine aldı).

G   *: Bunlar tekrar ediyor diyorsun öylemi?*

D_3   *: Evet*

Örneğin;

G   *: Tekrarlanan bir örüntü oluşturmanı istiyorum.*

D_4   *:* (İki daire bir kare iki daire bir kareden oluşan bir tekrarlayan örüntü oluşturdu).

G   *: Tamam nasıl yaptın?*

D_4   *: Yani iki daire bir kare iki daire bir kare.*

G   *: Bu oluşturduğun örüntüde tekrar eden grubu yuvarlak içine al desem.*

D_4   *: Ee… iki tane daireleri alırdım. Bir de kareleri alırdım.*

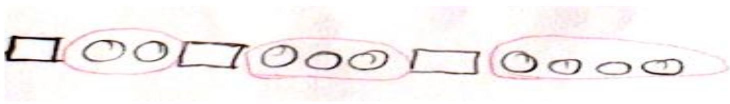
G   *: Alır mısın bir tane gösterir misin?*

D_4   *:* (Daire ve kareleri ayrı ayrı grupladı).

Tekrarlanan şekil örüntüsü oluşturamayan öğrencilerden iki yüksek ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_3, Y_4, D_2) ise, oluşturmak istedikleri şekil örüntüsünde **“şekillerden bir tanesinin, sayısını her seferinde bir tane artırması”** şeklinde bir yol izlemişlerdir. Bu durum, tekrarlanma sözcüğünü, sayısını artırma ile eş anlamlı düşünmüş olabilme olarak yorumlanabilir. Örneğin;

G : *Bu verilen örüntüde olduğu gibi sen de tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturur musun?*

Y_3 : *Oluştururum. Nasıl bir tekrarlanan örüntü oluşturabilirim* (düşündü) *Bu şekilde* (Kare ile başladı ve iki tane daire çizdi. Tekrar kare çizdi ve devamında üç tane daire çizdi. Sonra tekrar kare ve dört tane daire çizdi. Daireleri artırarak devam ettirdi).



G : *Peki nasıl yaptın?*

Y_3 : *Burada bir tane kare arkasından iki tane daire bir tane kare üç tane daire bir tane kare dört tane daire şeklinde gider. Öyle işte bir tane kare yanında kaçıncı ise o kadar şey yaptım daire yaptım.*

G : *Kaçıncı ise o kadar daire ile ne anlatmak istiyorsun?*

Y_3 : *Ben şey demek istedim. Burda kaçıncı derse demek değil de yani burda şey yani iki, üç, dört şeklinde gidiyor demek istedim. Yani ee birer birer fazlalaşıp gidiyor demek istedim şeyleri… Öyle* (Dairelerin 2, 3, 4 şeklinde ardışık devam ettirdiğini anlatmak istedi).

G : *Ee… peki burda tekrar eden şekil grubu görebiliyor musun?*

Y_3 : *Şeyler bu daireler tekrar bu daireler*

G : *Tekrar eden şekil grubunu yuvarlak içine al desem nasıl yaparsın?*

Y_3 : *Şekil grubu* (daireleri yuvarlak içine aldı).

Tekrarlanan şekil örüntüsü oluşturamayan orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_4) ise, şekil örüntüsü ile yakından ilişkili olmayan, bir bağıntı kullanarak bir örnek (artarak değişen sayı örüntüsü) vermeye çalışmıştır. Örneğin;

G : *Verilen bu örüntüde olduğu gibi tekrarlanan bir şekil örüntü oluşturabilir misin?*

O_4 : *Oluştururum.*

O_4 : (2, 5, 11, 23, 47 olacak şekilde bir sayı örüntüsü oluşturdu) *Böyle bir.*

2 - 5 - 11 - 23 - 47

G : *Peki nasıl yaptığını anlat.*

O_4 : *İki katının bir fazlası beş, iki katının bir fazlası, iki katının bir fazlası , iki katının bir fazlası.*

G : *Bu bir tekrarlanan örüntü mü?*

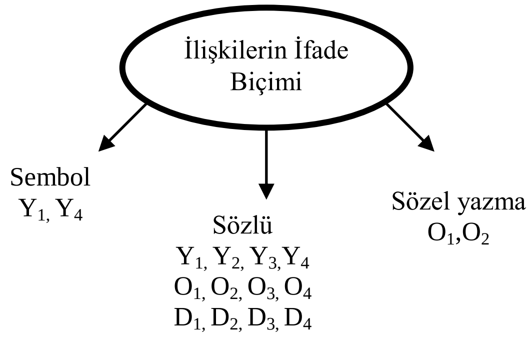
O_4 : *Evet*

Öğrencinin bu davranışı; soruyu tekrarlanan bir kuralla örüntü oluşturma biçiminde algıladığı olarak değerlendirilebilir.

Tekrarlanan şekil örüntüsünü oluşturan öğrencilerden, tekrar eden şekil grubunu belirleyerek oluşturanlar ile tekrarlanan şekil örüntüsünü alt gruplara ya da çoklu gruplara ayırarak oluşturanlar, araştırmacının kendilerine yönelttiği, tekrarlanan şekil örüntüsünde kuralı bulma alt temasında yer alan, tekrar eden şekil grubunu belirlemede de aynı yaklaşımı gösterdikleri görülmüştür. Tekrarlanan şekil örüntüsünü oluşturamayan öğrenciler de, tekrarlanan şekil örüntüsünde kuralı bulma alt temasında yer alan, tekrar eden şekil grubunu belirleyemeyen öğrencilerdir.

3.1.4. İlişkilerin İfade Biçimleri

Tekrarlanan şekil örüntüsünde, ilişkilerin ifade biçimleri alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları ifade biçimleri Şekil 9'da verilmiştir. Belirtilen ifade biçimlerini kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 9: Tekrarlanan Şekil Örüntüsünde Kullanılan İfade Biçimleri

Katılımcı öğrencilerin, tekrarlanan bir şekil örüntüsünü inceleme ve kuralını bulmada, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede ve tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturmada, nasıl bir ifade biçimi kullandıkları belirlenmek istenmiştir. Şekil 9'da görüldüğü gibi, "sözlü" *(örüntüde belirlenen tüm ilişkilerin konuşma diliyle ifade edilmesi),* "sembol" *(örüntüde belirlenen tüm ilişkilerin sayılarla ifade edilmesi)* ve “sözel yazma” *(örüntüde belirlenen tüm ilişkilerin yazılı olarak kelimelerle ifade edilmesi)* şeklinde üç ifade biçimi kullanılmıştır. Bu bağlamda öğrencilerin tamamı her aşamada belirledikleri tüm ilişkileri, öncelikle sözlü olarak ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra, yüksek başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_1, Y_4), tekrar eden şekil grubundaki kare ve üçgen sayıları arasındaki sayısal ilişkiyi sembol kullanarak, orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci (O_1, O_2) ise, tekrarlanan şekil örüntüsünde tekrar birimini sözel yazma ile ifade etmişlerdir. Aşağıda her bir ifade biçimine birer örnek sunulmuştur.

Sözlü-Sembol;

G : *Peki örüntüde toplam kare sayısı 10 olduğunda üçgen sayısı ne olur?*

Y_1 : *Örüntüde kare sayısı 10 olursa ee… bir tekrarlamalıda dört üçgen var, iki kare var* (tekrar grubundaki şekilleri saydı) *böyle devam ederse beş ee… bunu beş ile çarparım beş kere iki, 10 kare, 5 kere 4, 20 üçgen olur.*

4ü 2k

20ü 10k

Sözel yazma;

O_2 :(20.03.2007 tarihli günlük)

Tekror eden şekiller: üç üçgen, bir kare, bir üçgen bir karedir.

Elde edilen bulgular sonucunda, tekrarlanan şekil örüntüsünde; örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ile tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturmada öğrencilerin tamamının “sözlü” ifade, yüksek başarı düzeyine sahip iki öğrencinin “sembol”, orta başarı düzeyine sahip iki öğrencinin ise, “sözel yazma” ifade biçimlerini kullandıkları görülmüştür.

3.2. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Sabit Değişen Sayı ve Şekil Örüntülerini Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Bulgular

Araştırmanın ikinci amaç maddesi ile, ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin sabit değişen sayı ve şekil örüntülerinde;

- örüntünün kuralını nasıl buldukları
- örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma nasıl devam ettirdikleri
- istenen bir örüntüyü nasıl oluşturdukları
- bir örüntüdeki ilişkileri nasıl ifade (yazılı ya da sözel ifade, sayısal ifade, sembol, şekil, tablo, grafik vb.) ettikleri

saptanmak istenmiştir. Bu amaçla, sabit değişen sayı örüntüsü, sayı dizisi ve fonksiyon tablosu kullanılarak iki farklı formda, sabit değişen şekil örüntüsü ise, iki farklı şekil örüntüsü olarak öğrencilere yöneltilmiştir. Sabit değişen sayı ve şekil örüntülerine ilişkin elde edilen veriler;

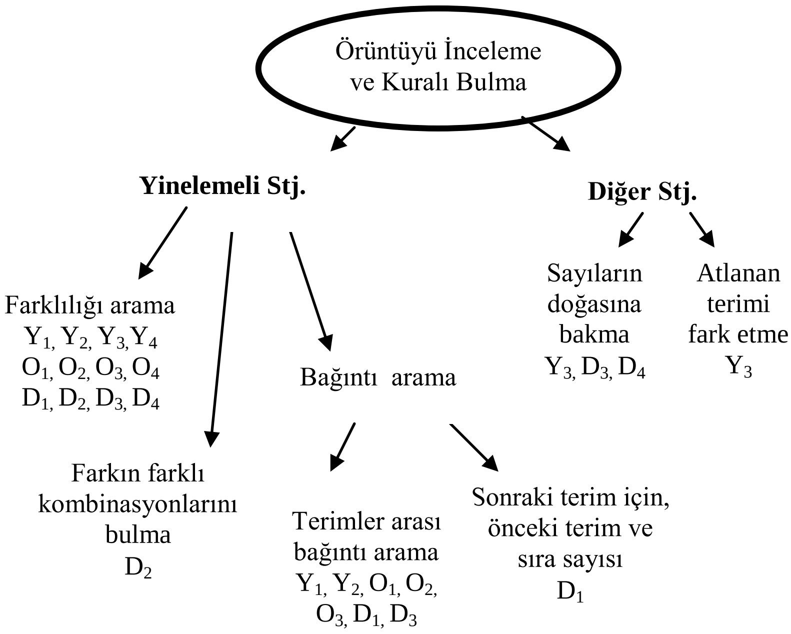
- Örüntüyü inceleme ve kuralı bulma
- Örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme
- Örüntü oluşturma
- İlişkilerin ifade biçimleri

şeklinde dört alt tema altında analiz edilmiştir. Birinci şekil örüntüsünde öğrencilerden sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturmaları istendiğinden, ikinci şekil örüntüsü için de aynı sorunun öğrencilere yöneltilmesine gerek görülmemiş, bu nedenle ikinci şekil örüntüsü, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve ilişkilerin ifade biçimleri şeklinde üç alt tema altında analiz edilmiştir.

3.2.1. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Sayı Dizisi Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsünü Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Bulgular

3.2.1.1. Örüntüyü İnceleme ve Kuralı Bulma

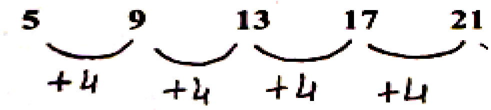
Sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde (EK-4, soru 2), örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 10'da verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 10: Sayı Dizisi Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsünü İnceleme ve Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrenciler **yinelemeli** ve **diğer stratejiler** olmak üzere, iki başlık altında toplanan toplam altı strateji kullanmışlardır. **Yinelemeli stratejiler** olarak; "farklılığı arama", "bağıntı arama" ve "farkın farklı kombinasyonlarını bulma" şeklinde üç strateji kullanılmıştır. Farklılığı arama stratejisi, tüm öğrencilerin öncelikli olarak odaklandığı stratejidir. Örneğin O_2'nin farklılığı arama stratejisine ilişkin açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

G *: Örüntünün oluşumunda sayılarla ilgili neler düşündüğünü ifade eder misin?*



O_2 *:* (Sayılar arasındaki sabit farkı buldu ve +4 şeklinde gösterdi) …

G *: Çok güzel. Bu bulduğun, yani sayılar arasındaki ilişkiyi bir cümleyle ifade eder misin?*

O_2 *: Buradaki sayılar, ee… bu örüntünün kuralı sayılar hep dört dört artarak gitmiş.*

O_2 yukarıda görüldüğü gibi, terimler arası sabit farkı bulmuş ve bunu sözlü olarak da ifade etmiştir. Ayrıca günlüğünde, *"Bugünkü örüntü sayılar arasındaydı. Sayılar hep dörder dörder arttı…Bu örüntüde hiç zorlanmadım. Zaten ilk bakınca aradaki fark hemen görülüyor" (21.03.2007)* şeklinde ilk olarak terimler arası farklılığa odaklandığını açıklamıştır. O_2 burada *"sayılar hep dört dört artarak gitmiş"* ifadesiyle örüntü hakkında bir genellemeye ulaşmıştır.

İki yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrenci (Y_1, Y_2, O_1, O_2, O_3, D_1, D_3) ise, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan ve araştımacı tarafından **"bağıntı arama"** adı verilen bir strateji kullanmıştır. Bu strateji; bir sonraki terim ile bir önceki terim arasında bir bağıntı oluşturma şeklinde açıklanabilir. Örneğin;

G *: … örüntüyü oluşturan sayıların oluşumunda bir kural bulabilir misin acaba?*

O_1 *: Burda şimdi iki katının, iki katının bir eksiği olmuş, burda iki katının beş eksiği olmuş, yani arasındaki farklar dört. Bir dakka şimdi. Şey beş, iki katının bir eksiği, iki katının beş eksiği, iki katının ee… dokuz eksiği, iki katının onüç eksiği, iki katının onyedi eksiği böyle gidiyor.*

O_1'in kullandığı bu yaklaşım araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimde düzenlenmiştir.

f(1)=5

f(2)=2.f(1)-1=2.5-**1**=9

f(3)= 2.f(2)-5=2.9-**5**=13

f(4)= 2.f(3)-9=2.13-**9**=17

f(5)= 2.f(4)-13=2.17-**13**=21

Öğrencinin yaklaşımı dikkate alınarak, örüntünün terimlerinin oluşumunda geçerli olan kuralın, b=(f(n-1)-a) olmak üzere genel formu f(n)=2f(n-1)-(f(n-1)-a) olarak belirlenen bu strateji, yeniden düzenlendiğinde "farklılığı arama" stratejisinin genel formu olan, f(n)=f(n-1)+a biçimini almaktadır. Ancak öğrencinin kullandığı modellemede, örüntünün ardışık terimlerinin oluşumunda yer alan 1, 5, 9 ve 13 terimleri arasında b=(f(n-1)-a)=f(n-1)-4 bağıntısı bulunmaktadır. Öğrenci bu bağıntıyı fark etmiş ve f(n)=2f(n-1)-(f(n-1)-a) genel formundaki, terimler arası kurduğu bağıntıyı, dolaylı olarak b=(f(n-1)-a) bağıntısı ile desteklemiştir. Alan-yazında yer almayan bu strateji çalışmada oldukça dikkat çekmiştir.

Katılımcı öğrencilerden Y_2 ve O_2'de, yukarıda ifade edilen stratejiyi, O_1'in tarzında kullanmışlardır. Ayrıca Y_1, O_3 ve D_1 de "bağıntı arama" stratejisini kullanma çabası göstermiş ancak stratejideki bağıntıyı belirleyememişlerdir. Örneğin Y_1;

Y_1 **:** (Düşündü) *Şu bir ee ... burda da benim bulduğum kural geçerli de burda olmuyor. Yani.*

G **:** *Nedir o? Söyle bakalım.*

Y_1 **:** *İkiyle çarpıp bir eksiltip devam ettirecektim de burda* (Burda derken 13 gösterdi) *olmadı.*

G **:** *Nasıl olmadı?*

Y_1 **:** *Yani iki kere beş on, bir eksiği ... dokuz. Ee... iki kere dokuz onsekiz, bir eksiği onyedi olması lazımdı. O yüzden olmadı.*

şeklinde açıklamada bulunmuştur. Terimler arası "bağıntı arama" stratejisini kullanan bir diğer öğrenci D_3 ise, kendince ikişerli gruppladığı örüntünün terimleri arasında tutarsız farklı bağıntılar yazma çabası göstermiştir.

2.9-1

5 9 13 17 21

2.5+3 2.13-4

D_3'ün yapmış olduğu açıklamalar ise aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

D₃ *:Beşle ikiyi çarpmış on, on ile üçü toplamış, dokuzla ikiyi çarpmış onsekiz, bir çıkartmış, burda da ikiyle çarpıp iki çıkartmış.*

G *: Bir daha tekrar eder misin baştan itibaren.*

D₃ *:Şimdi beşle ikiyi çarpmış on, on ile üçü toplamış onüç çıkmış, sonra da dokuzla ikiyi çarpmış ııı… on sekiz, on sekizden bir çıkartmış, sonra onüç ile ikiyi çarpmış… dört çıkartmış,* (işlem hatası yaptı) *onyediyle ikiyi çarpmış… ee… otuzdört sonra da ...*

Düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_1), **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, araştırmacı tarafından **"sonraki terim için, önceki terim ve sıra sayısı"** adı verilen stratejiyi kullanmıştır. Bu strateji; bir önceki terim ve o terimin sıra sayısından (adım sayısı) yararlanarak bir sonraki terimin bulunması şeklinde tanımlanmıştır. D_1, bir önceki terim ve sıra sayısından yararlanarak terimler arasında bir ilişki kurma çalışması sergilemiştir. Örneğin;

…

D₁ *: Mesela beş artı bir altı, artı üç ee… dokuz. Dokuz artı iki tekrar artı iki onüç. Onüç artı üç artı bir onyedi ediyor. Onyedi ile de dördü toplayınca zaten yirmibir ediyor. Yirmibir, yirmibir ettiği için de hiç eklememe gerek kalmıyor, sıfır oluyor. Buradakilerde hep üç, iki, bir, sıfır diye gidiyor. Bunlarda zaten adım sayıları. Eğer bu olmasaydı* (sıfırı gösterdi) *düzgün bir şekilde gidebilirdi.*

G *: Devamında ne oluyor acaba?*

D₁ *: O zaman adımda beş bir daha altı, yirmi altı oluyor. Bu sefer sanırım eksiltmeye çalışırdım artı yaptıktan sonra. Olabilirse tabi. Mesela bir diye devamında iki, üç diye sonra tekrar artırma gibi. Belki olabilirdi emin değilim. Eminlik yok bende*

G *: Öylemi emin olman için ne yapmalısın?*

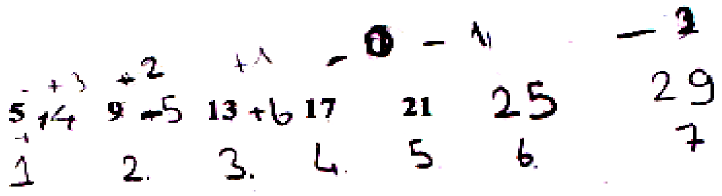
D₁ *:Devam ettirmek için baya bir zamanım. O zaman bu dörder dörder artıyor, burası da yirmidokuz olurdu. Burası da yedinci basamak yirmibeş artı altı daha onbir elde* *var bir otuz bir. Otuzbir eksi* (duraksadı) *iki olması gerekiyor. Üç olabilseydi belki öyle bir kural olabilirdi.*

G *: Eksi kaç olacak oysa?*

D₁ *: Eksi ıı ancak iki yapabilirsem böyle olur. Ama üç olsaydı daha iyi olurdu.*

G *: Niye üç olsaydı? İki olunca ne oluyor?*

D₁ *: Çünkü ıı… düşündüm ki burda artı üç artı iki artı bir ee… sonra tekrar sıfır. Ee…Burdan da başlarken de eksi neyse burasında üç ile başlayıp iki, bir diye eksilmesi.*



Öğrencinin kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

f(1)=5

f(2)=f(1)+1+3

f(3)=f(2)+2+2

f(4)=f(3)+3+1

f(5)=f(4)+4+0

f(6)=f(5)+5-1

f(7)=f(6)+6-2

Öğrencinin bu stratejisi n. adım için düşünüldüğünde,

a=4-(n-1) olmak üzere, f(n)=f(n-1)+(n-1)+a şeklinde modellenebilir. D_1, bulduğu bu kurala göre, örüntünün terimlerini oluşturmada bir önceki terimleri karşılık geldiği sıra sayıları ile topladıktan sonra bu toplama eklediği sayıların +3, +2, +1, 0, -1 ve -2 şeklinde devam ettiğini fark etmiştir.

Yinelemeli stratejiler içinde, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_2), araştırmacı tarafından **"farkın farklı kombinasyonlarını bulma"** adı verilen stratejiyi kullanmıştır. Bu strateji; terimler arası sabit farkın, farklı ifadeleri şeklinde tanımlanmıştır. Bu stratejiyi kullanan D_2, terimler arası sabit fark olan 4 sayısının, 2+2, 3+1 ve 1+3 şeklinde farklı kombinasyonlarını düşünerek örüntünün ikinci terimini elde etmiştir. Bu şekilde öğrenci terimler arası sabit fark sayısını farklı cebirsel ifadeler kullanarak, örüntünün sonraki terimini bulmada bu cebirsel ifadelerden yararlanmıştır.

Sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde örüntüyü inceleme ve kuralı bulmaya ilişkin, **diğer stratejiler** kapsamında ise, toplam iki strateji kullanılmıştır. Şekil 10'da görüldüğü gibi, üç öğrenci (Y_3, D_3, D_4) bu stratejilerden "sayıların doğasına bakma" stratejisini kullanmıştır. Örneğin Y_3 örüntüyü oluşturan sayıların tek sayılardan oluştuğunu ifade ederek, örüntüdeki terimlerin doğasını belirlemiş ve böylece örüntünün terimlerinin bu özelliği ile ilgili bir genelleme yapmıştır. Ancak bu özellik dikkate alınarak örüntü devam ettirilirken tek sayıların ardışıklığının gerekmeyeceğini algılayan Y_3 araştırmacı tarafından **"atlanan terimi fark etme"** adı verilen stratejiyi de kullanmıştır. Bu strateji, örüntüde terimler arasındaki bazı terimlerin atlandığının fark edilmesi şeklinde tanımlanmıştır. Y_3 verilen örüntüde 5, 9, 13, 17, 21 tek sayılardan oluşan terimler arasındaki 7, 11, 15 ve 19 şeklinde tek sayıların çıkarılmış olduğunu açıklayarak, tek sayılardaki ardışıklığı da ifade etmiştir. Örneğin,

G *: Şimdi bu örüntüyü oluşturan sayıların arasında bir kural bulabilir misin acaba?*

$\boldsymbol{Y_3}$ *: Kural* (düşündü) *Bulamıyorum.*

G *: Biraz düşün bakalım…*

$\boldsymbol{Y_3}$ *: Şey hepsi tek sayı. Ama aradaki sayıyı çıkarmışlar. Yani yedinci, yediden sonraki sayıyı yazmışlar. O şekilde*

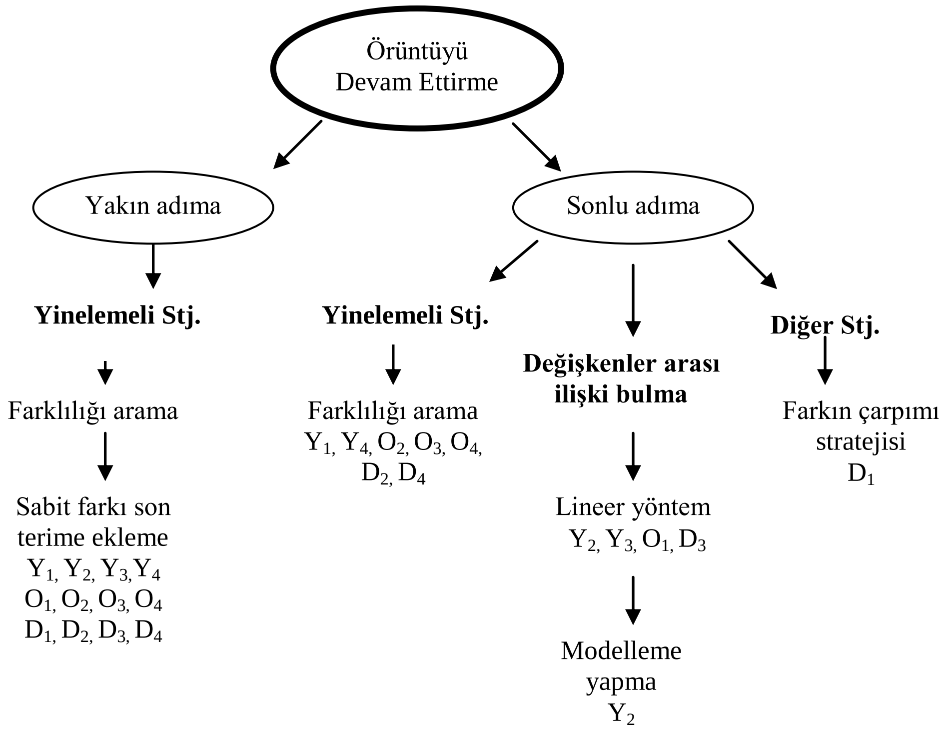
G *: Anladım… devam et bakalım.*

$\boldsymbol{Y_3}$ *: Diğerlerinde de öyle. 9 ile 13 arasında 11 var onu çıkarıp yapmışlar, 13 ile 17 arasında 15 var onu çıkarmışlar, 17 ile 21 arasında 19 var onu çıkarıp, yazmışlar hepsini.*

Elde edilen bulgular sonucunda, katılımcı öğrenciler verilen örüntünün kuralını bulurken, **yinelemeli** ve **diğer stratejiler** başlıkları altında toplanan stratejileri kullanmışlardır. Yinelemeli stratejilerden "farklılığı arama" stratejisi, tüm öğrencilerin öncelikli odaklandığı strateji olmuştur. Bunun dışında iki yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrencinin kullandığı terimler arası “bağıntı arama” stratejisi de en çok kullanılan stratejidir. Bu stratejiyi kullanan öğrencilerden bir yüksek, iki orta başarı düzeyine sahip üç öğrencinin izlediği yol, çalışmada oldukça dikkat çekmiştir. Çünkü öğrenciler kendi kazanımlarının farklı bir organizasyonu yardımıyla, yeni bir yol izleyerek, örüntüdeki her bir terimin tanımlanmasında ek bir bağıntı kullanmışlardır. Öğrencilerin kullandıkları bu stratejinin genel formu sadeleştirildiğinde, alan-yazında yer alan farklılığı arama stratejisinin genel formu ile çakıştığı görülmekte ise de, özde bu strateji, örüntüdeki takip eden iki terim arasında genel bir bağıntı oluşturmadır. Bu bağıntının sabit terimi de yine önceki terimle ilişkilendirilmiş bir bağıntıyı gerektirmektedir. Bir önceki terim ve sıra sayısından yararlanarak terimler arasında bir ilişki bulmaya çalışan, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrencinin kullandığı strateji de, çalışmada dikkat çeken stratejilerden biri olmuştur. Aslında bu strateji de terimler arasında farklılığı arama stratejisinin genel formu ile çakışsa da, öğrencinin örüntüdeki her terimi, terime ait sıra sayısı ile ilişkilendirmesi ve bu sıra sayılarından yararlanarak örüntünün takip eden terimleri arasında ilişki kurması, öğrencinin fonksiyonel ilişkiyi bulmaya yatkın olduğunun bir göstergesidir. Diğer stratejiler kapsamında ise, iki yüksek ve iki düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci tarafından örüntünün terimlerinin bir özelliğine ilişkin stratejiler kullanılmıştır. Buradan yinelemeli stratejilerin daha çok kullanıldığı görülmektedir. Ayrıca kimi öğrencilerin birden fazla strateji kullandığı ve genel olarak kullanılan her stratejide de yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı da elde edilen bulgular arasındadır. Bu durum, sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde kuralı bulurken, strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığının bir göstergesi olabilir. Sonuç olarak, sayı dizisi olarak verilen sabit değişen sayı örüntüsünde kuralı bulurken, terim ve o terimin karşılığı olan adım sayısı arasındaki ilişkiden ziyade, genellikle örüntüdeki terimler arasındaki ilişkiye ve terimlerin oluşturduğu sayı kümesinin bir özelliğine odaklanmışlardır. Bu nedenle öğrenciler verilen bir sayı dizisinde fonksiyonel ilişkiyi bulamamışlar, dolayısıyla sadece örüntüyü genellemişler sayı dizisini genelleyememişlerdir.

3.2.1.2.Örüntüyü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirme

Sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 11'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 11: Sayı Dizisi Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsünü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirmede Kullanılan Stratejiler

Şekil 11'de görüldüğü gibi, katılımcı öğrenciler örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken **yinelemeli**, sonlu bir adıma devam ettirirken ise, **yinelemeli**, **değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** altında yer alan toplam beş strateji kullanmışlardır. Öğrencilerden sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünü yakın bir adım olarak bir adım devam ettirmeleri istenmiştir. Bu bağlamda öğrencilerin tamamı, **yinelemeli stratejiler** kapsamında yer alan, "sayı dizisinin son terimine terimler arası sabit farkı ekleme" stratejisini kullanmışlardır. Burada aslında "farklılığı arama" stratejisinin bir uygulaması gerçekleştirilmiştir. Örneğin D_4 örüntüyü devam ettirirken;

G : *Peki bu bulduğun ilişkiye göre örüntüyü bir adım devam ettirir misin?*
D_4 : (21 den sonra gelen sayıyı 25 olarak yazdı).
G : *Nasıl yaptın?*
D_4 : *Artı dört ekledim.*
G : *Neye ekledin?*
D_4 : *21'e.*

şeklinde açıklamada bulunmuştur.

Katılımcı öğrencilerden sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünü sonlu bir adım olarak 10. adıma kadar devam ettirmeleri istenmiştir. Bu bağlamda iki yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrenci (Y_1, Y_4, O_2, O_3, O_4, D_2, D_4) **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini kullanmıştır. Bu stratejinin kullanımında öğrenciler, sabit farkı son terime ekleyerek 10. sıradaki terime kadar adım adım ilerleme şeklinde bir yol izlemişlerdir. Örneğin;

G : *Peki 10. sıradaki sayıyı bulabilir misin?*
Y_4 : *Bulurum*

5 +4 9 +4 13 +4 17 +4 21 +4 25 +4= 29 +4= 33

33+4= 37 +4= 41

Y_4 : *… Evet 41 ediyor.*
G : *Nasıl yaptın bir de anlat.*
Y_4 : *Hepsine dörder dörder ekleyerek devam ettim ve 10. sayıyı buldum.*

Şekil 11'de görüldüğü gibi, iki yüksek, bir orta bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_2, Y_3, O_1, D_3) ise, **değişkenler arası ilişki bulma stratejileri** içinde yer alan "lineer yöntem" stratejisini kullanmışlar ve bu stratejinin kullanımında**,** örüntünün son teriminden sonra 10. terime kadar gelecek terim sayısının sabit farkla çarpılıp, son terime eklenmesi biçiminde bir yol izlemişlerdir. Örneğin;

G *: Peki 10. sıradaki sayıyı bulabilir misin?*

D_3 ***:***(Önce örüntüdeki sayıları sessiz bir şekilde kalemin ucuyla sayılara dokunarak saydı*) bulurum* (düşündü, sonra 25 ile 16 yı alt alta topladı ve 41 buldu) *41.*

G *: Nasıl yaptın?*

D_3 *: Şimdi burda* (Burda derken örüntüdeki sayıları gösterdi) *altı tane gittik. Ee… geriyede dört tane basamağımız kaldı. Dörtle dört artığı için dört ile de dördü çarptım 16, 25'le de 16'yı topladım 41.*

"Lineer yöntem" stratejisini kullanan öğrencilerden Y_2, sonuca ulaşmak için ayrıca modelleme yapmıştır. Örneğin;

G *: Ee … örüntüde 10. sıradaki sayıyı bulabilir misin?*

Y_2 ***:****Bulabilirim* (dört ile üçü çarptı ve 12'yi 25'e ekledi ve 37 yazdı. Bu işlemleri zihinden yaptı) Üç *tane dört eklenecek 25'e. Ondan da onuncu sayıyı bulabiliriz.*

G *: Yap bakalım.*

Y_2 *: Altı.* (Altıncı terimi gösterdi). *Dört kere üç on iki. On iki daha eklersek oda eşittir 37.*

G *: Peki bu dört tane üç dedin ya. Bu üç dediğin ne oluyor?*

Y_2 ***:****Üç tane dört*

G *: Nedir üç tane dört?*

Y_2 *: Altı tane, dört tane daha olacak böyle* (Böyle dedikten sonra altıncı terimden sonra onuncu terime kadar, sayıları temsil eden dört tane kutu çizdi ve aralarına dört yazdı) *olacağına göre sayı, üç de aralarında hep dört dört dört olacağına göre.*

G *: Yani üç dediğin şu aralıkları mı söyledin sen?*

Y_2 *: Evet üç aralık var. Dört çarpı üç, 12 dedim, 25'e de 12 ekledim.*

Verilen örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken "linner yöntem" stratejisini kullanan öğrencilerin yaklaşımları araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

$f(10)=(10-6).4+25=41$

Öğrencilerin kullandığı bu strateji ile, daha büyük sonlu bir adımdaki terim kolayca bulunabilir. Bu strateji n. adım için düşünüldüğünde, örüntünün en son verilen terim sayısı 6 olmak üzere,

$f(n)=(n-6).4+f(6)$

$=(n-6).4+25$

$=4n-24+25$

$=4n+1$

şeklinde örüntünün genel kuralı elde edilir.

Araştırmacı, bu stratejiye ilişkin düşüncelerini 21.03.2007 tarihli günlüğüne aşağıdaki biçimiyle yansıtmıştır:

> *... Y_2, Y_3, O_1, D_3 örüntüyü devam ettirirken örüntünün son teriminden 10. terime kadar terim sayısını buldular ve dört ile çarpıp son terime eklediler. Hatta Y_2 örüntünün son terimi ile 10. terim arasındaki terim sayısını belirlerken şekil kullandı. Öğrenciler burada aslında örüntünün son terimi ile 10. terimi arasında, farklılığı arama stratejisini kullandılar. Öğrencilerin, 10. terimi bulurken sabit farkı bir önceki terime tek tek eklemek yerine böyle bir yol izlemeleri oldukça iyiydi. Çünkü bu stratejiyi kullanarak daha büyük sonlu adımdaki bir terim kolaylıkla bulunabilir… (G; 21.03.2007).*

Şekil 11'de görüldüğü gibi, D_1 örüntüde 10. sıradaki terimi bulurken **diğer stratejiler** içinde yer alan "farkın çarpımı" stratejisini kullanmıştır. Bu stratejinin kullanımı genel formu y=mx olmayan bu örüntü için uygun olmamıştır. Öğrenci 10. sıradaki terimi bulmak için, terimler arası sabit farkı diğer bir değişle 4 ile 10'u çarpmış ve 40 elde etmiştir. Örneğin;

G : *Örüntüde 10. sıradaki sayıyı bulabilir misin?*

D_1 : *10. sıradaki* (düşündü) *40'da olabilir…*

G : *... Nasıl yaptın?*

D_1 : *... dört ile onu çarptım.*

G : *Dört ile onu çaptın?*

D_1 : *Evet*

G : *... Burda ee… on dediğin nedir?*

D_1 : *10. sıradaki*

G : *... Dört nedir?*

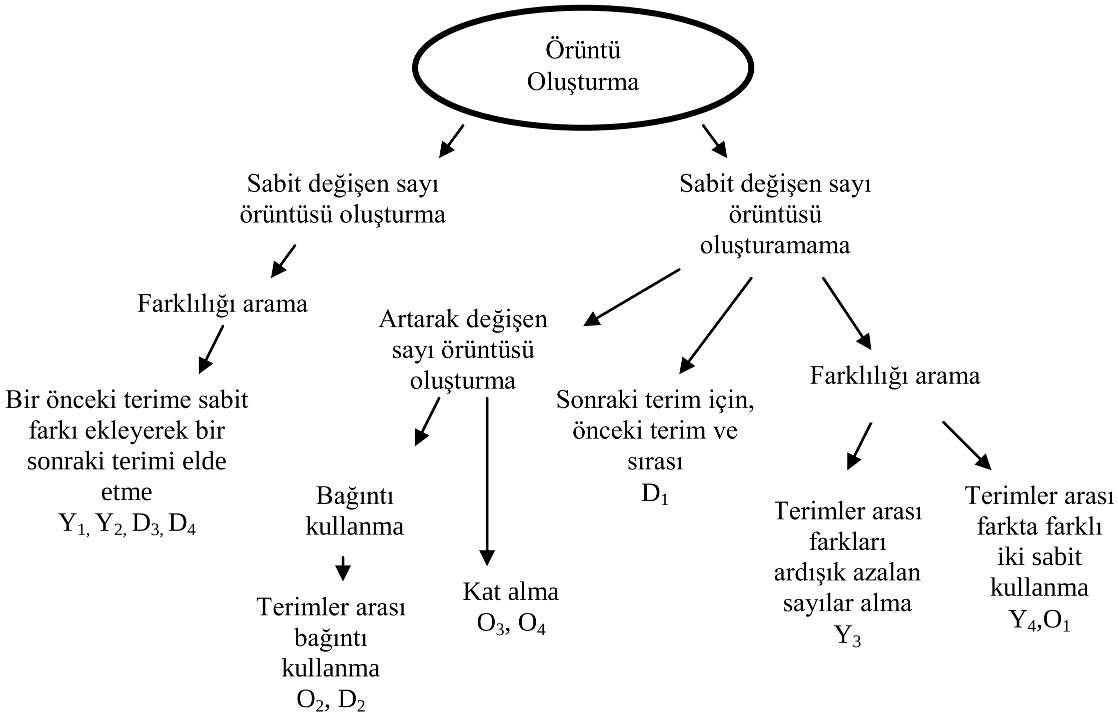
D_1 : *Dört fark*

Elde edilen bulgular sonucunda, sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken, katılımcı öğrencilerin **yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** içinde yer alan stratejileri kullandıkları görülmüştür. Ayrıca öğrencilerin verilen örüntüde kuralı bulurken kullandıkları stratejileri, örüntüyü devam ettirirken de dikkate aldıkları belirlenmiştir. Verilen örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken öğrencilerin tamamı, yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini, sonlu bir adıma devam ettirirken ise, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci dışında kimi öğrencilerin, yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" kimi öğrencilerin ise, değişkenler arası ilişki bulma stratejileri içinde yer alan "lineer yöntem" stratejisini kullandıkları görülmüştür. Linner yöntem stratejisini kullanan öğrencilerin izledikleri yol ile, daha büyük sonlu bir adımda yer alan terim bulunabilir. Düşük başarı düzeyine sahip bir öğrencinin de, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken hatalı bir strateji olan "farkın çarpımı" stratejisini kullandığı elde edilen bulgular arasındadır. Ayrıca kullanılan her stratejide yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı da görülmektedir. Bu durum, sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken, strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığını bir kez daha göstermektedir.

3.2.1.3. Örüntü Oluşturma

Sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde, örüntü oluşturma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 12'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.

Katılımcı öğrencilerinden, sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturmaları istenmiştir. Şekil 12'de görüldüğü gibi, iki yüksek, iki düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_1, Y_2, D_3, D_4) sabit değişen bir sayı örüntüsü oluştururken, iki yüksek, dört orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_3, Y_4, O_1, O_2, O_3, O_4, D_1, D_2) sabit değişen sayı örüntüsü oluşturamamıştır.



Şekil 12: Sayı Dizisi Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsü Oluşturmada Kullanılan Stratejiler

Sabit değişen sayı örüntüsü oluşturabilen öğrenciler “farklılığı arama” stratejisine göre örüntü oluşturmuşlardır. Buna göre “sabit bir farkı bir önceki terime ekleyerek” bir sayı örüntüsü elde etmişlerdir. Örneğin bu öğrencilerden Y_1 terimler arası sabit farkı üç olan, sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturmuştur.

G : *Peki verilen bu örüntüde olduğu gibi sende benzer bir örüntü oluşturabilir misin?*

Y_1 : *Oluşturabilirim.*

G : *Oluştur bakalım. Nasıl yaptığını da anlat.*

Y_1 : (Önce 3 ile başladı ve 2 ekleyerek 5 7 9 sayılarını buldu) *Bu. Iıı… bu örüntü ikişer ikişer gitsin. Beş olur. Aynı bu kural oluyor ve sayılar ee… artıyor. Hepsinin arasında iki fark var. Böyle gidiyor.*

Sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturamayan öğrenciler ise, terimler arası “bağıntı kullanma”, “kat alma”, “sonraki terim için önceki terim ve sıra sayısı”, “terimler arası farkları ardışık azalan sayılar alma” ve “terimler arası iki sabit fark alma” şeklinde stratejiler kullanarak sabit değişen sayı örüntüsü dışında örüntüler oluşturmuşlardır. Örneğin O_2 ve D_2 **"terimler arası bir bağıntı"** kullanarak, artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturmuşlardır. D_2'nin örüntüyü nasıl oluşturduğuna ilişkin açıklamaları aşağıda sunulmuştur.

G : *Peki şimdi bu örüntüde olduğu gibi sen de benzer bir örüntü oluşturabilir misin?*
D_2 : (8 17 35 71 şeklinde bir örüntü oluşturdu) *Böyle.*
G :*Nasıl yaptın?*
D_2 :*Ee… iki ile çarpıp bir ekledim. Öyle.*
G :*Nasıl yani? İki ile çarptın bir ekledin. Açıklar mısın?*
D_2 :*Ee… sekizle ikiyi çarptım 16, bir ekledim 17, 17 ile ikiyi çarptım 34 yine bir ekledim 35, 35 ile ikiyi çarptım 70, bir ekledim 71…*

Sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturamayan öğrencilerden O_3 ve O_4 ise, "kat alma" stratejisini kullanarak artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturmuşlardır. Ancak O_3 ve O_4 örüntü oluştururken bu stratejiyi, tayin ettikleri başlangıç teriminden itibaren bir önceki terimin katlarını alarak kullanmışlardır. Örneğin;

G : *Peki verilen bu örüntüde olduğu gibi sen de benzer bir örüntü oluşturur musun?*
O_3 : *Oluştururum* (3 9 27 71 213 şeklinde bir örüntü oluşturdu).
G : *Nasıl yaptın?*
O_3 :*Üçle üçü çarptım dokuz. Dokuzla üçü çarptım 27, 27 ile üçü çarptım yetmiş bir.*

Sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturamayan öğrencilerden Y_4 ve O_1, "farklılığı arama" stratejisine göre örüntü oluşturmuşlardır. Ancak her iki öğrenci de, **"terimler arası farkta farklı iki sabit"** kullanmışlardır. Örneğin Y_4, bir önceki terime önce +5 daha sonra da elde ettiği terime -1 ekleme, O_1 ise, önce +5 daha sonra da elde ettiği terime +7 ekleme işlemlerini tekrarlatarak örüntü oluşturmuşlardır.

G : *Peki sen de verilen bu örüntüde olduğu gibi benzer bir örüntü oluştura bilir misin?*
O_1 : *Oluşturabilirim.*
G : *Oluştur bakalım.*
O_1 : (1 6 13 18 25 30 37 şeklinde bir örüntü oluşturdu).
G :*Nasıl yaptın?*

O_1 :*Burda beş önce beş artıyor sonra yedi artıyor, beş artıyor, yedi artıyor. Öyle yaptım.*

Sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturamayan öğrencilerden Y_3'de "farklılığı arama" stratejisine göre örüntü oluşturmuştur. Ancak **"terimler arası farkları ardışık azalan sayılar"** dan oluşturmuştur. Örneğin;

G : *Bu örüntüde olduğu gibi sen de benzer bir örüntü oluşturur musun?*

Y_3 : *Oluşturayım.* (Düşündü ve sonra 1 ile başladı ve 1 6 10 13 15 16 şeklinde bir örüntü oluşturdu).

G : *Nasıl yaptın?*

Y_3 :*Şimdi ilk başta bunun* (Bunun derken bir ve altıyı gösterdi) *aralarında beş sayı var gibi düşündüm bir yazdım beş sayı ekledim, altı olur. Sonra beşten bir çıkarıp dört. Altı dört daha on. Sonra üçü ekledim onüç. İki ekledim onbeş, bir ekledim onaltı.*

G :*Burda ne yaptın bir daha tekrar edelim istersen.*

Y_3 : *Beş ekledim.*

G :*Sonra?*

Y_3 :*Sonra dört ekledim on oldu. Üç ekledim onüç , iki ekledim onbeş, bir ekledim onaltı.*

Sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturamayan öğrencilerden D_1 ise, **"sonraki terim için, önceki terim ve sıra sayısı"** stratejisine dayalı olarak örüntü oluşturmuştur. Bunun için D_1, aşağıda gösterildiği gibi, birinci terimi adım sayısı ile çarparak ikinci terimi elde etmiş ve bu şekilde devam ederek örüntüyü oluşturmuştur.

5 5 10 30 120 600

1. 2. 3. 4. 5. 6.

G : *Peki sende bu örüntüde olduğu gibi benzer bir örüntü oluştura bilir misin?*

D_1 : *Oluşturabilirim… Doğrusu böyle yapmak* (Böyle yapmak derken verilen örüntüyü gösterdi) *güzel olurdu. Böyle düşünmek isterdim. Adım sayıları ile çarpıp.*

G : *Nasıl düşünüyorsan yap bakalım.*

D_1 : (5 5 10 30 120 600 şeklinde örüntü oluşturdu) *Böyle bir şey.*

G : *Nasıl yaptın?*

D_1 :*Adım sayıları ile çarptım.*

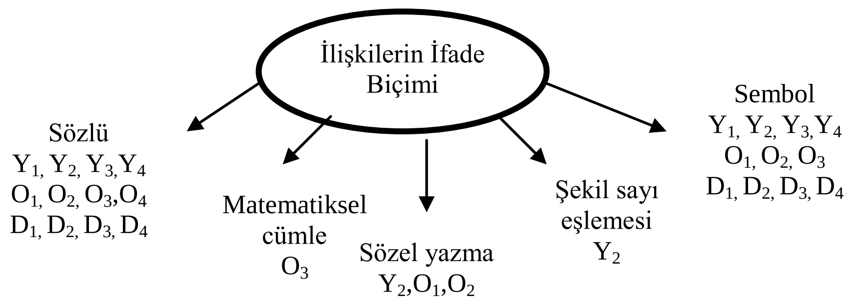
G : *Nasıl yani?*

D$_1$ ***:**Beş kere bir beş. Beş kere iki on. On çarpı üç, otuz. Otuz çarpı dört, yüz yirmi. Yüz yirmi çarpı beş, altı yüz .*

Elde edilen bulgular sonucunda, sabit değişen sayı örüntüsü oluşturamayan öğrencilerin sayısı, sabit değişen sayı örüntüsü oluşturan öğrencilerin sayısının neredeyse iki katı kadardır. Örüntü oluşturamayan öğrenciler, verilen örüntünün belirgin özelliği olan terimler arası sabit farkı, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması kapsamında bulmalarına karşın, örüntü oluştururken dikkate almamışlardır. Bu nedenle örüntü oluşturmada öğrencilerin yaşadığı güçlüklerin kaynağı, öğrencilerin karşılaştığı örüntünün türünü çözümleyememesi olarak görülebilir. Diğer taraftan sabit değişen sayı örüntüsü oluşturan öğrenciler arasında yüksek ve düşük başarılı öğrenciler yer almıştır. Orta başarı düzeyine sahip tüm öğrenciler ise, sabit değişen sayı örüntüsü oluşturamamıştır. Bunun yanı sıra örüntü oluşturamayan öğrenciler arasında yüksek ve düşük başarılı öğrenciler de bulunmaktadır. Dolayısıyla örüntü oluştururken öğrencilerin başarı düzeylerinin strateji seçiminde etkili olmadığı söylenebilir.

3.2.1.4. İlişkilerin İfade Biçimleri

Sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde, ilişkilerin ifade biçimleri alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 13'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 13: Sayı Dizisi Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsünde Kullanılan İfade Biçimleri

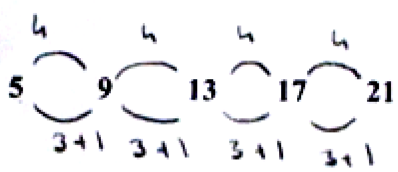
Katılımcı öğrencilerin, sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen bir sayı örüntüsünü inceleme ve kuralını bulmada, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede, sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturmada, nasıl bir ifade biçimi kullandıkları belirlenmek istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 13'de görüldüğü gibi, "sözlü", "matematiksel cümle" *(örüntüde adımlardaki terim sayılarını veren cebirsel işlemin ifade edilmesi)*, "sembol", "şekil sayı eşlemesi" *(örüntünün devamında gelecek sayıları temsil eden şekillerin kullanılması)* ve "sözel yazma" olmak üzere beş ifade biçimi kullanılmıştır. Öğrencilerin tamamı her aşamada belirledikleri tüm ilişkileri öncelikle "sözlü" olarak ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra, orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_4) dışında tüm öğrenciler, verilen örüntüde terimler arası sabit farkı "sembol" kullanarak göstermişlerdir. Orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_3) ise, terimler arası sabit farkı "matematiksel bir cümle" ile ifade etmiştir. Yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci (Y_2) de, örüntüde 10. sıradaki terimi bulmak isterken, örüntünün son teriminden sonra 10. terime kadar gelecek terim sayısını, dört tane kare şekli çizerek göstermiştir. Bir yüksek ve iki orta başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_2, O_1, O_2) ise, terimler arası sabit farkı ve terimler arası buldukları bağıntıları "sözel yazma" ile ifade etmişlerdir. Aşağıda her bir ifade biçimine birer örnek sunulmuştur.

Şekil sayı eşlemesi ve Sembol;

Sözlü-Sembol-Matematiksel cümle;

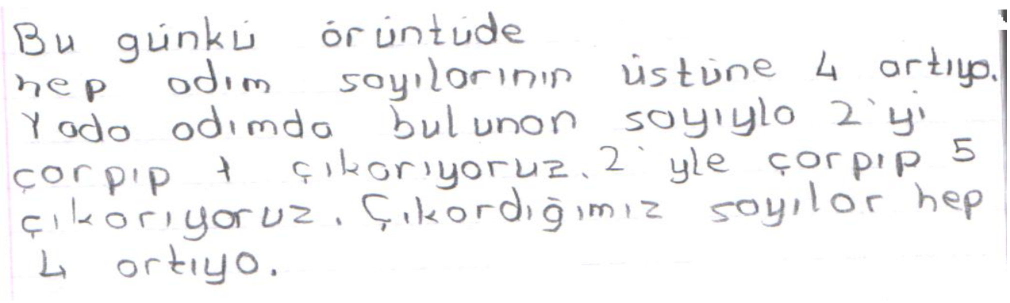
G : *Örüntüyü oluşturan sayıların oluşumunda acaba bir kural bulabilir misin?*

O_3 : *…Üçle toplayıp bir eklemiş.*



Sözel Yazma;

Y_2 : (21.03.2007 tarihli günlük)


Bu günkü örüntüde
hep odım soyılorının üstüne 4 ortıyo.
Yodo odımdo bulunon soyıylo 2`yi
çorpıp 1 çıkorıyoruz. 2`yle çorpıp 5
çıkorıyoruz. Çıkordığımız soyılor hep
4 ortıyo.

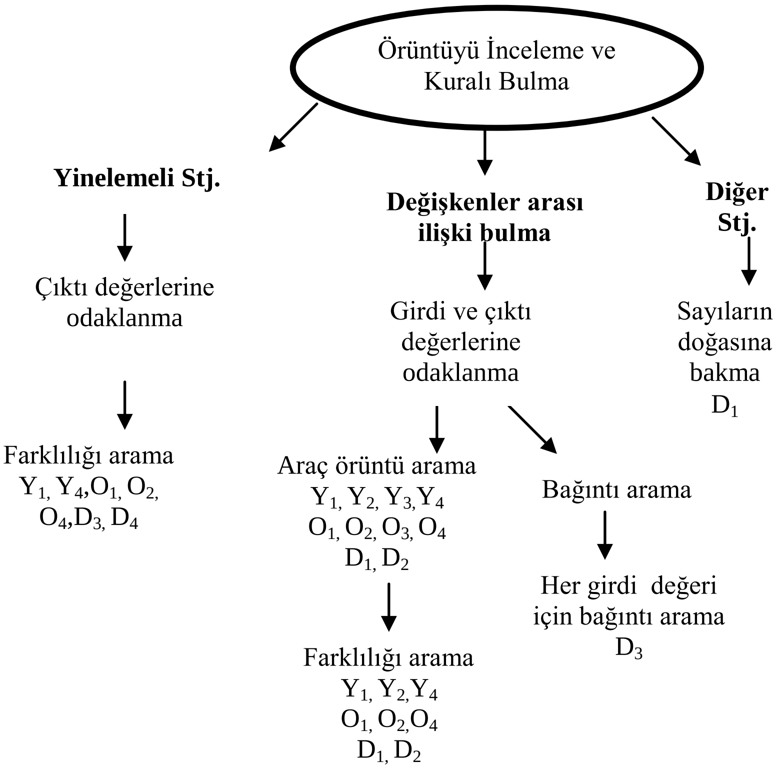
Elde edilen bulgular sonucunda, sabit değişen bir sayı örüntüsünde; örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ile sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturmada en fazla kullanılan ifade biçiminin "sözlü" ifade ile "sembol" olduğu görülmüştür.

3.2.2. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsünü Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Bulgular

3.2.2.1. Örüntüyü İnceleme ve Kuralı Bulma

Fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde (EK-4, soru 6), örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 14'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.

Katılımcı öğrencilerden, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde kuralı bulmaları istenmiştir. Bu bağlamda öğrenciler **yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** olmak üzere, üç başlık altında toplanan toplam beş strateji kullanmışlardır.



Şekil 14: Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsünü İnceleme ve Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Şekil 14'te görüldüğü gibi, iki yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrenci (Y_1, Y_4, O_1, O_2, O_4, D_3, D_4) tabloda çıktı (kare) değerlerine odaklanarak, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, terimler arası "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Bu öğrenciler sadece çıktı değerlerini dikkate alarak, her çıktı değerinin bir önceki çıktı değerinden iki fazla olduğunu belirtmişlerdir. Örneğin,

G **:** *Tabloda her üçgen sayısına karşılık bir kare sayısı verilmiştir. Örneğin 1' e karşılık 7, 2'ye karşılık 9 şeklinde. O halde her üçgen sayısına karşılık bir kare sayısına ulaşmak için bir kural söyleyebilir misin?*

D_4 **:** ...(kare sayılarını gösterdi) *ikişer ikişer artmış.*

Değişkenler arası ilişki bulma stratejisi kapsamında ise, dört yüksek, dört orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip on öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, O_1, O_2, O_3, O_4, D_1, D_2) tabloda girdi ve çıktı değerlerine odaklanarak, araştırmacı tarafından **"araç örüntü arama"** adı verilen stratejiyi kullanmışlardır. Bu strateji, girdi ve çıktı değerleri arasındaki farkların bulunması şeklinde tanımlanmıştır. Örneğin;

G : *Tabloda her üçgen sayısına karşılık bir kare sayısı verilmiştir. Tabloda üçgen sayılarına dayalı olarak bir kare sayısına ulaşmak için bir kural söyleyebilir misin?*

O_3 : *Söyleyebilirim* (örüntüde kare ve üçgen sayıları arasındaki farkları buldu ve tabloya yazdı)

O_3 : *6 artmış, 7 artmış, 8 artmış, 9 artmış, 10 artmış.*

G : *Ne yaptın?*

O_3 : *Ben burda çıkarma işlemi yaptım.*

O_3'ün kullandığı stratejinin genel formu araştırmacı tarafından, aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Üçgen sayısı	Araç örüntü	Kare sayısı
1	6	**7**
2	7	**9**
3	8	**11**
4	9	**13**
5	10	**15**
n	g(n)	**n+g(n)=f(n)**

Tabloda görüldüğü gibi öğrenci, girdi ve çıktı değerleri arasında araştırmacı tarafından f(n)=n+g(n) şeklinde modellenen ilişkiyi bulmuştur. "Araç örüntü arama" stratejisini kullanan öğrencilerden, üç yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_1, Y_2, Y_4, O_1, O_2, O_4, D_1, D_2) araç örüntüde "farklılığı arama" stratejisini de kullanmışlardır. Örneğin;

***D_2*:** *Üçgen ve kare sayıları arasındaki farkları buldum. Birer birer artıyor.*

Şekil 14'te görüldüğü gibi, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_3), araştırmacı tarafından **"bağıntı arama"** adı verilen stratejiyi kullanmıştır. Fonksiyon tablosunda bağıntı arama stratejisi; her girdi değeri için bir bağıntı oluşturma şeklinde açıklanabilir. D_3, örüntüde kare sayısına ulaşmada her üçgen sayısı için birbirinden farklı tutarsız bağıntılar elde etmiştir. Daha önce sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde de benzer bir davranış sergileyen (terimler arası bağıntı arama) D_3, burada da elde ettiği bağıntılar arasında herhangi bir ilişki elde edememiştir. Örneğin;

G *: Tabloda her üçgen sayısına karşılık bir kare sayısı verilmiştir. Şimdi tabloda üçgen sayılarına dayalı olarak bir kare sayısına ulaşmak için bir kural söyleyebilir misin?*

D_3 *: Biri yediyle çarpmış* (1 ile 7 arasına 7x yazdı) *ikiyi dörtle çarpmış bir artırmış* (2 ile 9 arasına 4x1+ yazdı) *üçü ııı...üçü ııı... dörtle çarpmış bir eksiltmiş* (3 ile 11 arasına 4x1- yazdı) *dördü üçle çarpmış, bir artırmış* (4 ile 13 arasına 3x1+ yazdı) *beşi de üçle çarpmış* (5 ile 10 arasına 3x yazdı).

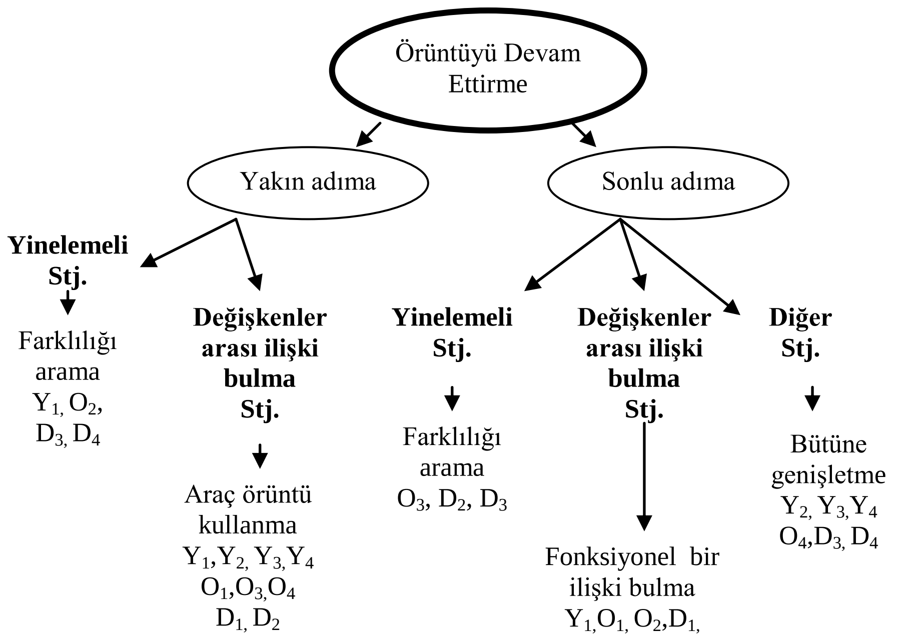
Şekil 14'te görüldüğü gibi, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_1), **diğer stratejiler** grubunda yer alan, "sayıların doğasına bakma" stratejisini kullanmıştır. Örneğin öğrenci bu stratejiyi *"...*(kare sayılarını göstererek) *çünkü bunlar hepsi tek*" şeklinde ifade etmiştir.

Elde edilen bulgular sonucunda, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen bir sayı örüntüsünde katılımcı öğrenciler, tabloda çıktı değerleri ile girdi ve çıktı değerlerine odaklanmışlar ve bu bağlamda **yinelemeli**, **değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** olmak üzere üç başlık altında yer alan stratejiler kullanmışlardır. Yinelemeli stratejiler kapsamında kimi öğrenciler, çıktı değerleri arasında var olan bir ilişkiyi belirlemişler, değişkenler arası ilişki bulma stratejisi kapsamında ise, kimi öğrenciler, çıktı değerlerinden girdi değerlerini çıkararak oluşturdukları araç örüntü ($g(n)$) yardımı ile genel formu $n+g(n)=f(n)$ ilişkisini kurmuşlardır. Bu öğrencilerden kimileri, aynı zamanda bu araç örüntüde terimler arasında "farklılığı arama" stratejisini de kullanmışlardır. Yinelemeli stratejiler ve değişkenler arası ilişki bulma stratejisi kapsamında, öğrencilerin temel olarak kullandığı strateji "farklılığı arama" stratejisidir. Bu stratejilerden biri çıktı değerlerinde farklılığı arama, diğeri ise, girdi-çıktı değerleri arasındaki farklılığı aramadır. Bunların yanı sıra sabit değişen bir sayı dizisinde de benzer bir davranış sergileyen düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci, her girdi değeri için birbirinden farklı tutarsız bağıntılar elde etmiş, düşük başarı düzeyine sahip bir başka öğrenci ise, diğer stratejiler kapsamında "sayıların doğasına bakma" stratejisini kullanarak, çıktı değerlerinin bir özelliğini tanımlamıştır. Diğer taraftan bir öğrenci dışında tüm öğrenciler örüntünün kuralını bulurken birden fazla strateji kullanmışlardır.

Ayrıca yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve diğer stratejiler kapsamında kullanılan tüm stratejilerde genel olarak yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmüştür. Bu durum ise, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde kuralı bulurken, strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığının göstergesidir.

3.2.2.2. Örüntüyü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirme

Fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 15'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 15: Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsünü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirmede Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerinden, önce fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünü bir adım devam ettirmeleri istenmiştir. Bu bağlamda öğrenciler örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken **yinelemeli** ve **değişkenler arası ilişki bulma**, sonlu bir adıma devam ettirirken ise, **yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** başlıkları altında toplanan toplam beş strateji kullanmışlardır.

Şekil 15'te görüldüğü gibi, bir yüksek, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_1, O_2, D_3, D_4) örüntüyü devam ettirirken **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Bu bağlamda tabloda çıktı değerlerinin son terimine, terimler arası sabit farkı ekleyerek bir sonraki terime ulaşmışlardır. Dört yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip dokuz öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, O_1, O_3, O_4, D_1, D_2) ise, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, "araç örüntü kullanma" stratejisini, diğer bir değişle araştırmacı tarafından n+g(n)=f(n) şeklinde modellenen genel formu kullanmışlardır. Bu stratejiye göre öğrenciler, aşağıdaki tabloda görülen işlemleri gerçekleştirmişlerdir.

Üçgen sayısı	**Araç örüntü**	**Kare sayısı**
1	+6	**7**
2	+7	**9**
3	+8	**11**
4	+9	**13**
5	+10	**15**
5+1=6	10+1=11	**6+11=17**

Örneğin;

G **:** *Tabloda yer alan üçgen ve kare sayılarını bir adım devam ettirebilir misin?*

Y_1 **:** *Evet bu* (üçgen sayılarından beşi gösterdi) *birer artığı için altı olacak, bu arasında onbir fark olacak* (kare sayıları ile üçgen sayıları arasındaki farklardan 10 gösterdi ve bir artırdı 11 yazdı) *birer birer artıyor farklarda, bu da onyedi olacak…*

Katılımcı öğrencilerinden, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında 60. üçgen sayısına karşılık gelen kare sayısını bulmaları istenmiştir. Bir yüksek, iki orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_1, O_1, O_2, D_1) **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, fonksiyonel bir ilişki bularak, 60. üçgen sayısına karşılık gelen kare sayısını elde etmişlerdir. Öğrencilerin kullandığı stratejinin genel formu aşağıda gösterilmiştir.

Üçgen sayısı	**Araç örüntü**		**Kare sayısı**
1	5	6	**7**
2	5	7	**9**
3	5	8	**11**
.			
.			
60	5	65	**60+65=125**
.			
n	5	n+5=g(n)	**n+g(n)=f(n)**

Bu strateji; aslında iç içe iki fonksiyonel ilişkinin araştırılması sonucu ulaşılmış bir stratejidir. Şöyleki, girdi değeri ile çıktı değeri arasındaki farkın, girdi değeri ile ilişkilendirilmesi sonucu (araç örüntü), çıktı değeri ile girdi değeri arasındaki fonksiyonel bir ilişkiye ulaşmadır. Bu stratejiyi kullanan O_1'in açıklamaları aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

G : *Tabloya göre üçgen sayısı 60 olduğunda, buna dayalı olarak kare sayısı ne olur?*

O_1 : *Üçgen sayısı altmış…* (sayıları inceledi) *on iki fark olur, sekiz olursa onüç, dokuz ondört* (12, 13, 14 ün yanına sırasıyla 7, 8, 9 yazdı, burada kare ve üçgen sayıları arasındaki farkları devam ettirdi) *onbeş, onaltı ... böyle olmayacak* (aynı şekilde adım sayıları ve karşılarına kare ve üçgen sayıları arasındaki farkları yazdı ve 30. adıma kadar geldi, ancak bu şekilde zor olacağını düşündü).

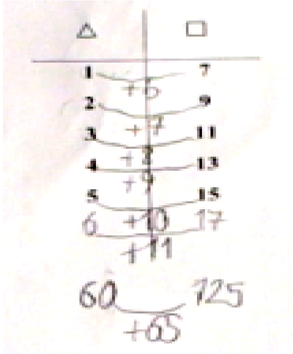
O_1 : (yaptıklarını sildi) *böyle çok uzun olur.*

G : *O zaman başka bir yol bulabilir misin? Bir düşün bakalım.*

O_1 : *…bir dakka 60 olursa* (üçgen sayılarının altına 60 yazdı) *fark beş fazlası olur, o zaman arasındaki fark 65* (kare ve üçgen sayıları arasındaki farkların altına 65 yazdı) *o zaman 125 olur* (kare sayılarının altına 125 yazdı)

G : *Nasıl yaptın anlatır mısın?*

O :*Şimdi bunun* (üçgen sayısı 6 ile kare ve üçgen sayıları arasındaki fark olan 11 i gösterdi) *beş fazlası olduğu için fark bende 60 a beş ekledim 65, 65 ile 60 ı topladım 125.*



Araştırmacı, verilen örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken fonksiyonel bir ilişki bulan öğrencilerin kullandıkları stratejiye ilişkin düşüncelerini 29.03.2007 tarihli günlüğüne aşağıdaki biçimiyle yansıtmıştır:

> *... Bugün bazı öğrencilerin kullandığı bir strateji oldukça ilginçti. Öğrenciler önce kare ve üçgen sayıları arasındaki farkları buldular ve bu farka dayalı olarak 60. adımdaki kare sayısına ulaştılar. Öğrenciler önce üçgen sayıları ile, buldukları kare ve üçgen sayıları arasındaki sabit farkı, fark ettiler. Bundan yararlanarak 60. adımı bulurken 60 ile bu farkı toplayıp, kare ve üçgen sayıları arasındaki farkı buldular. Daha sonra 60 ile bu sayıyı topladılar ve üçgen sayısına ulaştılar. Öğrenciler burada kare ve üçgen sayıları arasındaki fonksiyonel ilişkiyi bulamadılar. Ancak kare sayıları ile kare ve üçgen sayıları arasında elde ettikleri sayı örüntüsünde fonksiyonel ilişkiyi yakalayarak, bu ilişki yardımıyla üçgen sayısına ulaştılar. Öğrenciler daha sonra buldukları bu ilişkiyi sözlü olarak da ifade ettiler (G; 29.03.2007).*

Bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (O_3, D_2, D_3) ise, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Bu öğrencilerden D_2, bu stratejiyi girdi ve çıktı değerleri arasındaki fark sayılarının oluşturduğu "araç örüntüde" uygulamıştır. Bu bağlamda öğrenci, araç örüntünün terimleri arasındaki sabit farkı son terime ekleyerek 60. adımdaki terime kadar, diziyi adım adım ilerletmiştir. Böylece 60. adımdaki girdi ve çıktı değerleri arasındaki farkı 65 olarak bulmuştur. Ancak bundan sonra D_2, daha önce örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt temasında ifade ettiği kuralı uygulayarak, diğer bir deyişle araştırmacı tarafından n+g(n)=f(n) şeklinde modellenen kuralı uygulayarak 60 ile 65'i toplamış ve 125'e ulaşmıştır. Örneğin;

G : *Şimdi tabloya göre üçgen sayısı 60 olduğunda, buna dayalı olarak bir kare sayısı bulabilir misin?*

D_2	*:* ... (…Kare ve üçgen sayıları arsındaki farkları 11 den itibaren birer birer artırarak devam ettirdi) *12, 13, 14, 15, 16, 17 uzun gidiyor ama yapıcam. Şimdik altmışıncı sayıya mı? Off ... saycam bir, iki, üç… 25, 26, 27, 28, 29, ... 32, 33… böyle gidiyor kırk sekiz ... 65… 60' ı 65 ile toplucaz* (60 ile 65 topladı ve 125 buldu) *125.*

"Farklılığı arama" stratejisini kullanan bir düşük, bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci (D_3 ve O_3) ise, bu stratejiyi tabloda çıktı değerleri arasında uygulamışlardır. D_3, çıktı değerlerinin ilk terimi ile 60. terime kadar gelecek terim sayısını sabit farkla çarpıp, son terime ekleyerek 60. adımdaki kare sayısına ulaşmıştır. Örneğin;

G	*: Üçgen sayısının 60 iken kare sayısı ne olmalıdır?*
D_3	*: …*(düşündü) *şöyle de yapabiliriz. 60 ile 2 yi çarparız, burda onuncuyu bulmuştuk* (daha önce 10. üçgen sayısına karşılık, kare sayısını 25 olarak bulmuştu)*, kaç artcağını buluruz, 25 ile 180'i toplarız* (180 ile 25 i topladı ve 205 buldu).
G	*: Ne yaptığını bir daha anlatır mısın?*
D_3	*: Şimdi burda 25'i bulmuştuk, 60. yı bulcaktık hep ikişer ikişer artmıştı, yani burda birinci ile sonuncu arasındaki farkı buldum, 180 çıkıyor.*
G	*: Hı ... hepsinin arasında ikişer fark olduğu için, burda 60 sayı olacak diyorsun öyle mi?*
D_3	*: Evet 60 tane olacak. Burda hep ikişer ikişer artıyor, 180 artmış olcak, 25 ile de 180' i topladım, 205.*

D_3, aslında doğru bir yol izlemiş, ancak uygulaması hatalı olmuştur. Oysaki, birinci terimden itibaren 60. terime kadar 59 aralık olduğundan, toplam fark sayısını bulmak için 59.2=118 işleminin yapılıp, örüntünün birinci terimine eklenmesi gerekirdi.

O_3 ise, girdi değerleri ile çıktı değerlerinin, son terimlerine bu değerlerin kendi aralarındaki sabit farkı ekleyerek, tek tek devam ettirmek istemiştir. Ancak bu işlemleri yaparken girdi ve çıktı değerlerinin birinci ve altıncı terimleri arasındaki farkların sırasıyla 5 ve 10 olduğunu fark etmiştir. Böylece kısa yol olarak da, girdi ve çıktı değerlerini beşerli gruplar oluşturarak devam ettirmeyi amaçlamıştır. Ancak 56. girdi değerine karşılık, çıktı değerini 117 bulduktan sonra hata yapmıştır. Örneğin;

G	*: Şimdi tabloya göre üçgen sayısı 60 olduğunda, buna dayalı olarak bir kare sayısı bulabilir misin?*

O_3 : ...(7'den başlamak üzere sırayla 40 a kadar yazdı) *bu da çok uzun olacak* (sonra 7'nin karşısına geldi ve durdu biraz düşündü ve) *aa… buldum* (yazdıklarını sildi) *boşu boşuna yazdım, ee…bir tanesinde yedi oluyor* (1 ile 7 yazdı)*, altı tanesinde 17 oluyor* (alta geçti ve 6 ile 17 yazdı), *aradaki fark beş, ee… onbirinci karede 27 oluyor,*

G : *Neden 27 dedin, nasıl buldun?*

O_3 : *Altıyla biri çıkarınca beş kalıyor, altıyla da beşi toplayınca onbir.*

G : *Peki üçgen sayısı 11 olduğunda kare sayısı 27 olur diyorsun. 27 yi nasıl buldun?*

O_3 : *Yirmi yediyiiii…on ekledim*

G : *Neden on ekledin?*

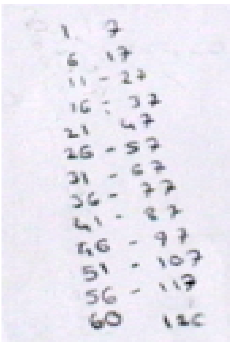
O_3 : *Çünkü ee...7 ile 17 arasındaki fark on.*

G : *Devam et.*

O_3 : *Buna* (11'i gösterdi) *beş ekleyince 16 ediyor, 16 da 37 tane olur, 16 ya beş ekleyince 21 olur, 21 de 47 tane olur, beş ekleyince 26 olur, 26… 57 olur, 31 de 67 tane olur* (36 ve karşısına 77 yazdı) *41 de 87 tane, 46 da 97 tane, 51 de o zaman 107 tane olur, 56 da kaç olur…117 tane olur, burda dörtle toplayacaz o zaman 60, dokuzla toplarsak da* (117 yi 9 ile topladı) *126 tane.*

G : *Dokuzla niye topladın?*

O_3 : *60 bulmak için dörtle topladım, burda da bir eksiği ile toplamam gerekiyordu.*



Şekil 15'te görüldüğü gibi, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünü sonlu bir adıma devam ettirirken, altı öğrenci **diğer stratejiler** içinde yer alan, "bütüne genişletme" stratejisini kullanmıştır. Bu öğrencilerden Y_3, Y_4, O_4 bu stratejiyi, araç örüntüde kullanmışlardır. Bu bağlamda öğrencilerin gerçekleştirdikleri işlemler araştırmacı tarafından aşağıdaki biçimiyle ifade edilmiştir.

n=6 için fark 17-6=11

n=6.10=60 için fark 10.11=110

f(60)=60+110=170 (f(n)=n+g(n))

D_4, Y_2 ve D_3 ise, “bütüne genişletme” stratejisini girdi ve çıktı değerleri arasında uygulamışlardır. Örneğin D_4,

n=6 için f(6)=17
n=6.10=60 için f(60)=10.f(6)=10.17=170

Y_2 ve D_3 ise,

n=10 için f(10)=25
n=6.10=60 için f(60)=6.f(10)=6.25=150

“Bütüne genişletme” stratejisine ilişkin bir örnek aşağıda sunulmuştur.

G : *Şimdi tabloya göre üçgen sayısı 60 olduğunda, buna dayalı olarak bir kare sayısı bulabilir misin?*

Y_2 :(düşündü, üçgen sayılarını 7, 8, 9, 10 şeklinde genişletti, sonra bu sayıların yanına sırasıyla +12, +13, +14, +15 yazdı ve 10 ile 15 topladı ve 25 yazdı) *60 olduğunda 6 tane olur, 25 çarpı altı* (25.6=150 yazdı) *150.*

G : *Evet. Ne yaptın burda?*

Y_2 :*Onuncu yani 10 üçgende kaç kare bulunuyorsa, 60 olacağı için, 6 tane 10 bulunacak, o yüzden de kare sayısını 6 ile çarptım, 25 çarpı 6, 150.*

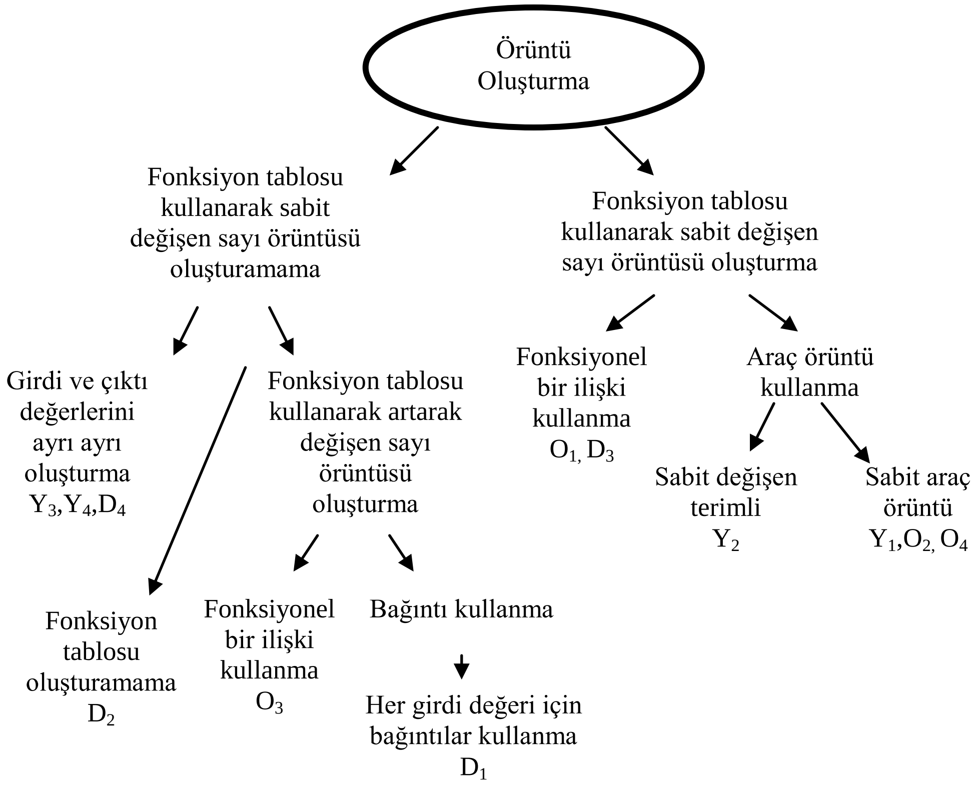
Burada 60 sayısının öğrencileri genel olarak “bütüne genişletme” stratejisini kullanmaya teşvik ettiği söylenebilir. Ancak D_3, kullandığı bu stratejiden emin olamamış ve **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan “farklılığı arama” stratejisine yönelmiştir.

Öğrencilerin çoğunluğu örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken oldukça zorlanmışlar ve bunu günlüklerinde de dile getirmişlerdir. Örneğin O_2, *“Bugünkü örüntü bana kolay geldi. Ancak 60. adımı bulurken biraz zorlandım. Daha sonra kare ve üçgen sayılarının arasındaki farklar sayesinde 60. adımı buldum”* O_3 ise, “*Bugünkü çalışma beni çok düşündürdü. Bana göre çok zordu. Örüntüde 60. sayıyı yazarak buldum” (29.03.2007)* D_3 ise, *“En çok 60. kareyi bulmakta zorlandım” (29.03.2007)* şeklinde açıklamalarda bulunmuşlardır.

Elde edilen bulgular sonucunda, öğrenciler örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken **yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** içinde yer alan stratejileri kullanmışlardır. Kimi öğrenciler örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken, değişkenler arası ilişki bulma stratejisi kapsamında, öğrenci çalışmaları değerlendirilerek "n" girdi değerleri "f(n)" çıktı değerleri ve "g(n)" araç örüntü değerleri olmak üzere araştırmacı tarafından n+g(n)=f(n) şeklinde modellenen stratejiyi kullanmışlardır. Kimi öğrenciler ise, örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken yinelemeli stratejiler içinde yer alan, çıktı değerleri arasında "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken ise, araç örüntü stratejisini kullanan öğrencilerden kimi öğrenciler, fonksiyonel bir ilişki yakalayarak sonlu bir adıma ulaşabilmiştir. Öğrencilerin fonksiyonel bir ilişkiye ulaşmalarında, girdi ve çıktı değerlerinin açıkça görülebildiği, örüntünün fonksiyon tablosu ile verilmesinin de etkili olduğu söylenebilir. Fonksiyonel bir ilişki bulamayan öğrenciler ise, sadece çıktı değerlerine odaklandıkları için, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken oldukça zorlanmışlardır. Bu bağlamda, kimi öğrenciler yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama", kimi öğrenciler ise, diğer stratejiler içinde yer alan ve hatalı uygulanan "bütüne genişletme" stratejisini kullanmışlardır. Bu stratejinin kullanılmasında 60. adımın istenmesi etkili olmuştur. Sonuç olarak, öğrencilerin örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken, genellikle girdi değerlerine, sonlu bir adıma devam ettirirken ise, girdi-çıktı değerlerine odaklandıkları söylenebilir. Ayrıca verilen örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken kullanılan her stratejide yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin olduğu görülmüştür. Bu durum strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığı şeklinde değerlendirilebilir.

3.2.2.3. Örüntü Oluşturma

Fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde, örüntü oluşturma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 16'da verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 16: Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsü Oluşturmada Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerden, fonksiyon tablosu kullanarak sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturmaları istenmiştir. Şekil 16'da görüldüğü gibi, iki yüksek, üç orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip toplam altı öğrenci, fonksiyon tablosu kullanarak sabit değişen bir sayı örüntüsü oluştururken, iki yüksek, üç orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip toplam altı öğrenci fonksiyon tablosu kullanarak sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturamamıştır.

Örüntü oluşturan öğrencilerden Y_1, Y_2, O_2 ve O_4, örüntüyü oluştururken, daha önce örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması kapsamında kullandıkları ve genel formu araştırmacı tarafından n+g(n)=f(n) şeklinde modellenen "araç örüntü kullanma" stratejisini kullanmışlardır. Bu stratejiyi kullanan öğrencilerden Y_2, örüntüyü oluştururken **"sabit değişen terimli araç örüntüsü"** Y_1, O_2 ve O_4 ise, **"sabit araç örüntüsü"** kullanmışlardır. Her iki stratejiye ilişkin birer örnek aşağıda sunulmuştur.

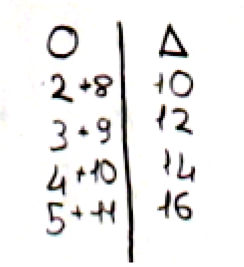
Örneğin;

G : *Verilen örüntüde olduğu gibi, tablo yardımıyla benzer bir örüntü oluşturabilir misin?*

$\boldsymbol{Y_2}$: *Oluşturabilirim.*

G : *Hadi oluştur bakalım.*

$\boldsymbol{Y_2}$: (Fonksiyon tablosu çizdi ve sol üstte çember sembolü, sağ üstte üçgen sembolü çizdi sonra, çember sayılarını 2, 3, 4, 5 aldı, üçgen sayılarını 10, 12, 14, 16 yazdı).



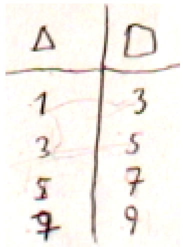
G : *Nasıl yaptın?*

$\boldsymbol{Y_2}$: *İkiye sekiz ekleyince* (2'nin yanına +8 yazdı) *on oluyor, ikiye sekiz ekleyince* (2'nin yanına +8 yazdı) *on oluyor, üçe dokuz ekleyince* (3'ün yanına +9 yazdı) *oniki oluyor, dörde on ekleyince* (4'ün yanına +10 yazdı) *ondört oluyor, beşe onbir ekleyince* (5'in yanına +11 yazdı) *onaltı oluyor,*

Örneğin;

G : *Verilen örüntüde olduğu gibi, tablo yardımıyla benzer bir örüntü oluşturabilir misin?*

$\boldsymbol{O_4}$: *Oluştururum… Böyle.*



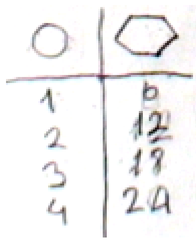
G : *Nasıl yaptın?*

$\boldsymbol{O_4}$: *İki fazlası, iki fazlası, kare üçgenin iki fazlası*

Yukarıda görüldüğü gibi, öğrenciler girdi değeri olarak alınan terimler arasındaki farkı sabit olan bir sayı örüntüsünün terimleri ile, çıktı değerlerinin oluşturulmasında, yine terimler arasındaki farkı sabit olan bir başka sayı örüntüsünün (ya da sabit örüntünün) terimlerini aynı sıradakiler karşılık gelmek üzere aralarında toplama ya da çıkarma işlemleri kullanarak örüntüyü oluşturmuşlardır.

Fonksiyon tablosu kullanarak sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturan öğrencilerden O_1 ve D_3 ise, "fonksiyonel bir ilişki" kullanarak örüntüyü oluşturmuşlardır. Örneğin;

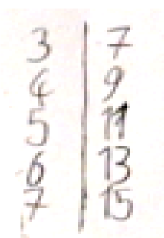
> ***G***   *: Ne yaptın bir daha anlatır mısın?*
>
> ***D_3***   *: ... altı kere iki, oniki, altı kere üç, onsekiz, altı kere dört, yirmidört olacak. Her birini altı ile çarptım.*



D_3, açıkça anlaşıldığı gibi, f(n)=6n genel formunu kullanarak örüntüyü oluşturmuştur.

Örneğin;

> ***G***   *: Nasıl yaptın?*
>
> ***O_1***   *: Şimdi burada sayılar iki katının bir fazlası, iki katının bir fazlası*



O_1 ise, f(n)=2n+1 genel formunu kullanarak örüntüyü oluşturmuştur.

Şekil 16'da görüldüğü gibi, iki yüksek, bir orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip altı öğrenci (Y_3, Y_4, O_3, D_1, D_2, D_4) fonksiyon tablosu kullanarak sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturamamıştır. Bu öğrencilerden Y_3, Y_4 ve D_4 fonksiyon tablosunda girdi ve çıktı değerleri arasında bir ilişki kurmadan, girdi ve çıktı değerleri olarak, **"iki ayrı sabit değişen sayı örüntüsü"** oluşturmuşlardır. Örneğin;

G *: Verilen örüntüde olduğu gibi, tablo yardımıyla benzer bir örüntü oluşturabilir misin?*

□	Δ
5	3
8	5
11	7
14	9
17	11
20	13

G *: Nasıl yaptın?*

D_4 *: Bunlar üçer üçer artıyor* (kare sayılarını gösterdi) *bunlar ikişer artıyor* (üçgen sayılarını gösterdi).

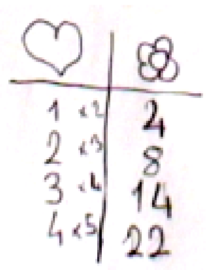
O_3 ve D_1 ise, her girdi değerine karşılık bir çıktı değeri elde etmiş ancak, O_3 "fonksiyonel bir ilişki" kullanarak D_1 ise, **"bağıntı"** kullanarak yani, her girdi değeri için farklı bağıntılar uygulayarak sabit değişen bir sayı örüntüsü yerine, artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturmuşlardır. Örneğin;

○	Δ
3	10
4	17
5	26
6	37

G *: Nasıl yaptın anlatır mısın?*

O_3 *: Ben burda önce daire sayılarını birer birer artırarak buldum yani üç, dört, beş, altı diye, sonra üçle, üçü yani kendisiyle kendisini çarptım, üçle üçü çarpınca dokuz bir* *de bir ekledim, burda dörtle dördü çarpınca onaltı, bir ekleyince onyedi, beşle beşi çarpınca yirmibeş, yirmialtı, altıyla altıyı çarpınca otuzaltı, bir ekledim otuzyedi.*

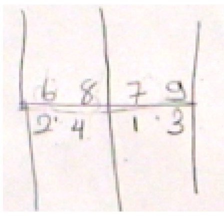
Örneğin;



G *: Nasıl yaptın?*

D_1 *: ee… bunlar* (kalp sayılarını gösterdi) *bir, iki, üç, dört diye yaptım, ... iki çarpı bir, iki daha ekledim dört, üç kere iki, altı, iki daha sekiz, üç kere dört, oniki, iki daha ondört, dört kere beş, yirmi, iki daha yirmi iki. Ayrıcana da hiç tek yok aralarında.*

D_2 ise, fonksiyon tablosu yerine aşağıdaki gibi bir gösterime giderek bir örüntü oluşturmaya çalışmıştır.



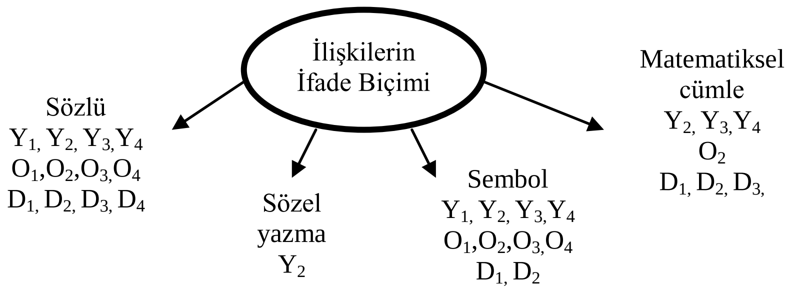
G *: Nasıl yaptın?*

D_2 *: Ben bu sütundakileri* (sol sütunu gösterdi) *şey yaptım burda ikiye ulaşması için dört fark oluyor, burda da dört fark yaptım* (sol sütunda yer alan 6 ile 2 ve 8 ile 4 arasında dört fark olduğunu ifade etti) *ama burda da şey burda altı fark yaptım bunlarda yediden bir çıktı altı, dokuzdan üç çıktı altı* (sağ sütunda yer alan sayılar arasında da 6 fark olduğunu ifade etti).

Elde edilen bulgular sonucunda, öğrencilerin yarısı fonksiyon tablosu kullanarak sabit değişen bir sayı örüntüsü oluştururken yarısı oluşturamamıştır. Örüntü oluşturan öğrencilerden kimi öğrenciler, örüntü oluştururken, daha önce örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması kapsamında kullandıkları ve araştırmacı tarafından n+g(n)=f(n) şeklinde modellenen stratejiyi kullanmışlardır. Diğer taraftan daha önce bu tür örüntüde alt temalardaki arayışlarda girdi ve çıktı değerleri arasında fonksiyonel bir ilişki bulamayan kimi öğrenciler fonksiyon tablosu ile sabit değişen sayı örüntüsü oluşturmada, girdi ve çıktı değerleri arasında fonksiyonel bir ilişki kullanmışlardır. Fonksiyon tablosu kullanarak sabit değişen sayı örüntüsü oluşturamayan kimi öğrenciler, girdi ve çıktı değerleri arasında bir ilişki kurmadan, girdi ve çıktı değerleri olarak, iki ayrı sabit değişen keyfi sayı örüntüleri yazmışlardır. Kimi öğrenciler ise, girdi ve çıktı değerleri arasında bir ilişki kurarak örüntü oluştursalar da bu örüntüler beklenilen türde örüntüler olmamıştır. Ancak bu öğrenciler, verilen örüntünün kuralını belirlerken ya da örüntüyü devam ettirirken genel olarak yinelemeli stratejilere odaklanma eğiliminde olmalarına karşın, fonksiyonel bir ilişki kullanarak örüntü oluşturmaları da şaşırtıcıdır. Düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci ise, fonksiyon tablosu yerine, bir tablo kullanarak örüntü oluşturmaya çalışmıştır. Diğer taraftan öğrencilerin örüntü oluştururken kullandıkları stratejilere bakıldığında, her stratejide yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir. Bu durum, fonksiyon tablosu kullanarak sabit değişen bir örüntü oluştururken, strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığının bir göstergesidir.

3.2.2.4. İlişkilerin İfade Biçimleri

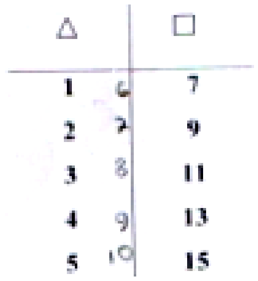
Fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde, ilişkilerin ifade biçimleri alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 17'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 17: Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsünde Kullanılan İfade Biçimleri

Katılımcı öğrencilerin, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen bir sayı örüntüsünü inceleme ve kuralını bulmada, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede, fonksiyon tablosu kullanarak sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturmada, nasıl bir ifade biçimi kullandıkları belirlenmek istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 17'de görüldüğü gibi, katılımcı öğrenciler "sözlü", "matematiksel cümle", "sembol" ve "sözel yazma" olmak üzere dört ifade biçimi kullanmışlardır. Öğrencilerin tamamı her aşamada belirledikleri ilişkileri öncelikle "sözlü" olarak ifade etmişlerdir. Bu öğrenciler arasında fonksiyonel bir ilişkiyi, örneğin örüntü oluştururken *"bu sayılar iki katının bir fazlası"* şeklinde sözlü olarak dile getiren öğrenciler de olmuştur. Bunun yanı sıra, dört yüksek, dört orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip 10 öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, O_1, O_2, O_3, O_4, D_1, D_2), fonksiyon tablosunda oluşturdukları araç örüntüyü sembol kullanarak ifade etmişlerdir. Üç yüksek, bir orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrenci (Y_2, Y_3, Y_4, O_2, D_1, D_2, D_3) ise, fonksiyon tablosunda her girdi değeri için bulduğu bağıntıları ve 60. kare sayısına karşılık bulduğu üçgen sayısını matematiksel cümle ile ifade etmiştir. Yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci (Y_2) ise, tabloda girdi ve çıktı değerleri arasıda bulduğu ve sözlü olarak ifade ettiği ilişkiyi günlüğünde yazılı olarak da dile getirmiştir. Aşağıda ifade biçimlerine birer örnek sunulmuştur.

Sembol;



Aritmetik;

Sözel yazma-Sembol;

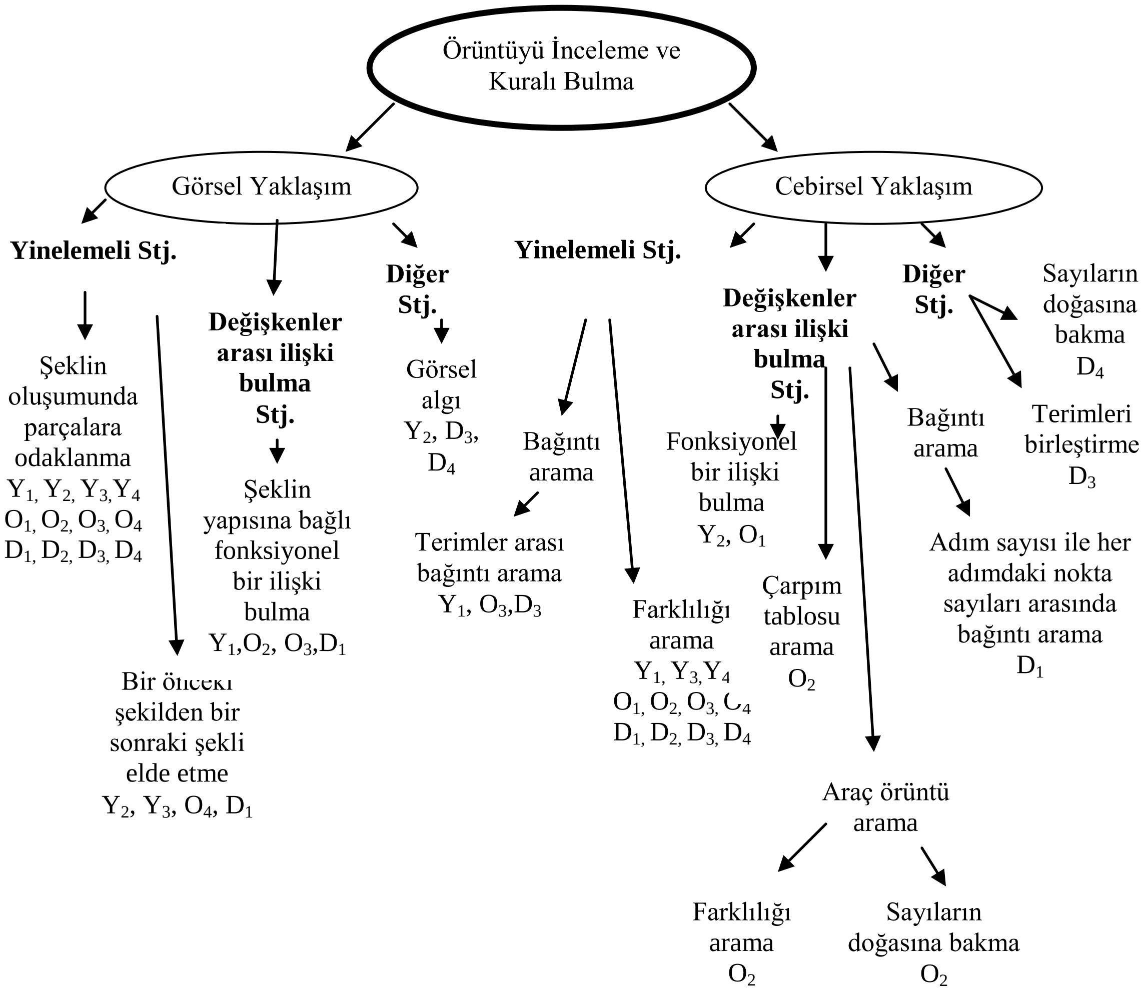
Y_2 ***: (29.03.2007 tarihli günlük)***

Elde edilen bulgular sonucunda, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen bir sayı örüntüsünde; örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ile fonksiyon tablosu kullanarak sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturmada en fazla kullanılan ifade biçiminin "sözlü", "sembol" ve "matematiksel cümle" olduğu görülmüştür.

3.2.3. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü (1) Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Bulgular

3.2.3.1. Örüntüyü İnceleme ve Kuralı Bulma

Sabit değişen şekil örüntüsünde (EK-4, soru 4), örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 18'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 18: Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü İnceleme ve Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerden sabit değişen şekil örüntüsünde kuralı bulmaları istenmiştir. Şekil 18'de görüldüğü gibi, öğrenciler kuralı bulurken "görsel" ve "cebirsel" olmak üzere iki yaklaşım benimsemişlerdir.

Görsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler, **yinelemeli**, **değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** olmak üzere üç başlık altında toplam dört strateji kullanmışlardır. **Yinelemeli stratejiler** içinde yer alan; "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" ve "şeklin oluşumunda parçalara odaklanma" şeklinde iki strateji kullanılmıştır. İki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_2, Y_3, O_4, D_1)

kullandığı, “bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme” stratejisi ile, her yeni şekil için kaç tane nokta gerektiğini ifade etmişlerdir.

Örneğin;

G : *Burda her adımı noktalardan oluşmuş bir şekil örüntüsü verilmektedir. Bu örüntüyü inceler misin?*

Y₂ : (şekilleri inceledi) *Buldum.*

G : *Peki örüntüde yer alan şekillerin oluşumuyla ilgili gözlemlerini anlatır mısın?*

Y₂ : *Örüntüde burda* (birinci şekli gösterdi) *dört tane yuvarlak var.*

G : *Nokta diyelim istersen onlara.*

Y₂ : *Nokta var. Burda* (ikinci şekli gösterdi) *dört yuvarlağın yanına üç tane daha yuvarlak gelmiş.*

G : *İfade ettiğini şekiller üzerinde gösterir misin?*

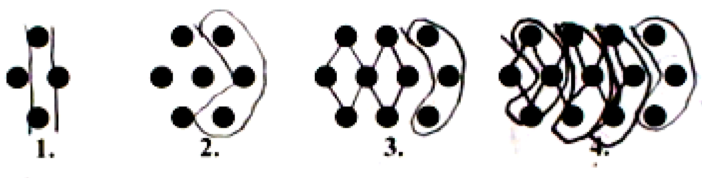
Y₂ : *Böyle* (yukarıdaki gibi üç noktayı kapalı eğri içine aldı) *sonra ondan sonra yine bunun aynısı* (bunun aynısı dediği kapalı eğri içine aldığı noktalar) *buraya* (üçüncü şekilde de üç noktayı kapalı eğri içine aldı) *eklenmiş sonra bi daha buraya* (dördüncü şekilde de üç noktayı kapalı eğri içine aldı) *eklenmiş aynısı.*

G : *Yani aynısı dediğin üçlü nokta grubu mu?*

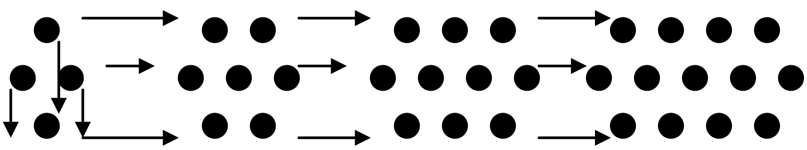
Y₂ : *Evet hep o, üçlü noktalar eklenmiş.*

G : *Hıı hıı…Bunun dışında yine şekillerin oluşumuyla ilgili ne söyleyebilirsin?*

Y₂ : *Bu şekiller hep üçer üçer artmış.*



Öğrencilerin tamamı ise, araştırmacı tarafından **“şeklin oluşumunda parçalara odaklanma”** adı verilen stratejiyi kullanmışlardır. Bu strateji; verilen şekil örüntüsünde her adımda yer alan noktaların, aşağıda görüldüğü gibi, yatay ve dikey olarak nasıl sıralandığının açıklamasıdır.



Aşağıdaki örnekte bir öğrencinin bu stratejiyi kullandığı açık bir şekilde görülmektedir.

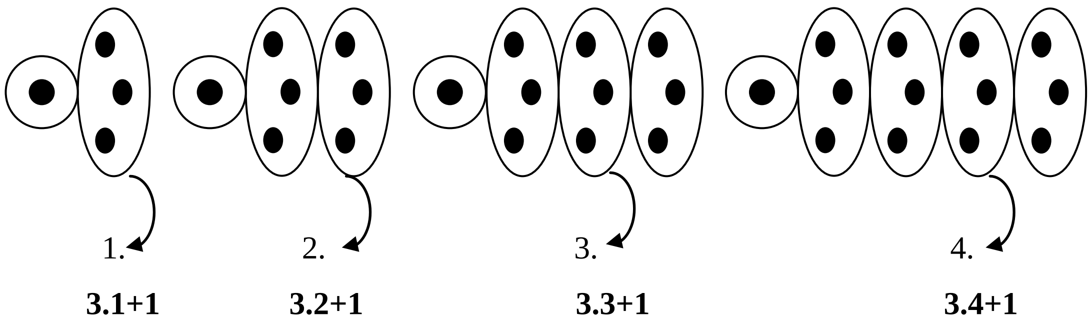
Y_2 **:** *Sıralarda bir, iki, üç, dört olarak artmış* (şekillerin üstten birinci satırlarında yer alan noktaları gösterdi) *burada iki, üç, dört, beş,* (şekillerin ikinci satırlarında yer alan noktaları gösterdi) *burada bir, iki, üç, dört (şekillerin üçüncü satırlarında yer alan noktaları gösterdi) öyle artıyor.*

G **:** *Güzel*

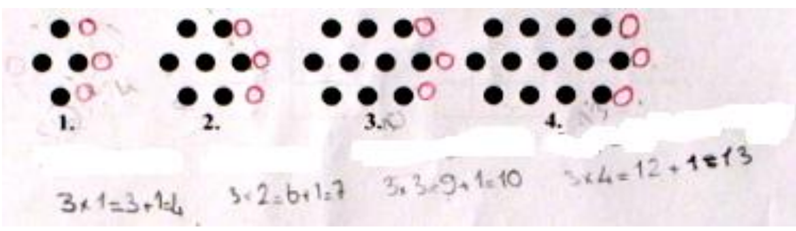
…

Y_2 **:** (düşündü) *ve de burada* (dikey olarak sıralanan noktaları gösterdi) *hep karşılıklı bir, iki, bir, iki olarak gidiyor.*

Şekil 18'de görüldüğü gibi, görsel yaklaşım kapsamında bir yüksek, iki orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_1, O_2, O_3, D_1) **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki" bulmuşlardır. Bu öğrencilerden ikisi (O_3, D_1), aşağıda görüldüğü gibi, her bir terimdeki şekilde seçtiği, üç tane noktadan oluşan şekil grubu sayısını, adım sayısı ile ilişkilendirerek fonksiyonel bir ilişki oluşturmuştur. Örneğin;



Verilen şekil örüntüsü n. adımda düşünüldüğünde, örüntünün genel kuralı da 3n+1 olarak bulunabilir. D_1'in açıklamaları aşağıda örnek olarak sunulmuştur.



D_1 **:** *… evet buldum.*

G **:** *Ne buldun?*

D_1 **:** *Ee… yine üç boncuk ekleyip ikinci şekil olduğu için, üç çarpı bir üç, artı bir dört, ee... üç* (üç derken ikinci şekilde kırmızı kalemle çizdiği üç noktayı ve adım sayısını gösterdi) *çarpı iki altı, artı bir yedi, üç çarpı üç* (üçüncü adım ile üç noktayı gösterdi) *dokuz, artı bir eşittir on, üç çarpı dört on iki, artı bir eşittir onüç. Üç boncukla adım sayısını çarptım ve hep bir ekledim.*

G **:** *Bulduğun bu kuralı ifade edebilir misin?*

D_1 **:** *Adım sayısını fazlalık sayısı ile çarp,*

G **:** *Fazlalık sayısı dediğin ne?*

D_1 **:** *Birinci şekildekine üç boncuk eklenince ikinci. şekil elde ediliyor o.*

G **:** *Kuralı tekrar et bakalım.*

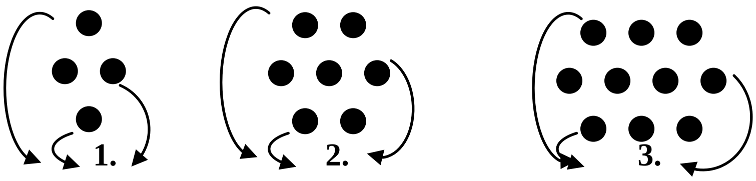
D_1 **:** *Adım sayısı çarpı üç dedim. Artı bir.*

G **:** *Bir daha tekrar et.*

D_1 **:** *Adım sayısı çarpı üç hep üç çünkü, adım sayısı çarpı üç artı bir.*

G **:** *Aferin sana.*

"Şeklin yapısına bağlı fonksiyonel ilişkiyi" bulan öğrencilerden Y_1, O_2, D_1 ise, her terimdeki şekilde ayırdığı, üç sırada yatay olarak sıralanan nokta sayılarını adım sayıları ile ilişkilendirilmişlerdir.



Örneğin;

Y_1 **:** *...yukardakiyle, en üsteki ile en alttaki sayı adım sayıları ile aynı. Mesela bir bir, ikiyle iki, üçle üç, ee burada dörtle dört* (adım sayıları ile birinci ve üçüncü satırdaki noktaları gösterdi). *Ortadakiler farklı.*

G **:** *Ortadakiler nasıl?*

Y_1 **:** *Bu adım sayısı ile yani ee ... adım sayısının bir fazlası* (ikinci satırda yer alan noktaları gösterdi).

Örneğin;

D$_1$ **:** *... Ee ... bir de bu altta üst, üste ve alttaki noktalar eşit oluyor* (birinci ve üçüncü satırdaki nokta sayılarının eşit olduğunu anlatmaya çalıştı) *burası üçse burası da üç* (üçüncü şeklin birinci ve üçüncü satırlarını gösterdi) *ikiyse orası da iki, burası bundan ee… bir fazla oluyor, üçse bu dört oluyor* (ikinci satırı gösterdi).

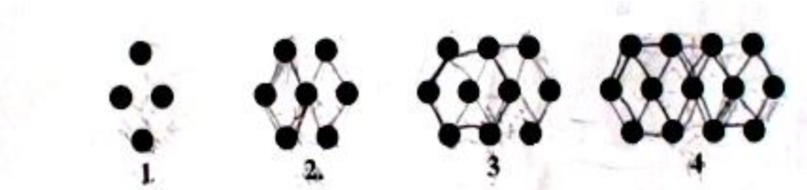
Şekil 18'de görüldüğü gibi, görsel yaklaşım kapsamında bir yüksek, iki düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_2, D_3, D_4) **diğer stratejiler** içinde yer alan, araştırmacı tarafından **"görsel algı"** adı verilen stratejiyi kullanmışlardır. Bu strateji; örüntüde belirlenen bir şeklin diğer şekiller içinde kaç kez yer aldığına, zihinsel algılama ya da çizme ile bakmadır. Örneğin;

G **:***Şekilleri incele bakalım. Şekillerin oluşumuyla ilgili başka neler görebiliyorsun?*

D$_3$ **:** (her adımda yer alan şekilleri tekrar inceledi) *ee… ikinci şekilde, şu birinci şekilden iki tane çıkıyor. Şunlar ve birde şunlar var* (ikinci şekilde ortadaki noktayı ortak almak kaydıyla birinci şeklin ikinci şekil içinde iki kez yer aldığını gösterdi).

G **:** *Çizerek gösterir misin?*

D$_3$ **:** *Şu böyle bir tane, bir de buradan bir tane* (eliyle aşağıdaki gibi gösterdi)



ee... burada da (ikinci şekli gösterdi ve birinci şekli ikinci şeklin içinde iki tane olacak şekilde çizdi) *burada da birinci şekil, üçüncü şekilde üç tane olmuş* (üçüncü şekli gösterdi ve birinci şekli üçüncü şeklin içinde üç tane olacak şekilde çizdi) *burada da (dördüncü şekli gösterdi ve birinci şekli dördüncü şeklin içinde dört tane olacak şekilde çizdi) dört tane şekil olmuş. Başka ...* (şekilleri inceledi) *şu ikinci şekil üçüncü şekilde iki tane oluyor, şöyle, şöyle* (ikinci şeklin üçüncü şekil içinde iki tane olduğunu söyledi) *sonra gene ikinci şekil dördüncü şekil içinde şöyle şöyle* (ikinci şeklin dördüncü şekil içinde üç tane olduğunu söyledi) *iki, üç tane oluyor.*

G **:** *Nasıl üç tane olmuş?*

D$_3$ **:** *Şimdi şu ikinci şekil, şurda o şekil çıkmış şöyle, sonra burada da bu şekil çıkmış, bir de ortada var* (ikinci şeklin dördüncü şekil içinde üç tane olduğunu gösterdi).

G **:** *Başka görebildiklerin var mı?*

D_3 **:** (tekrar şekilleri inceledi) *şu şekilde* (üçüncü şekli gösterdi) *bu şekilde* (dördüncü şekli gösterdi) *iki tane var bu şekilde.*

G ***: Yani üçüncü şekil dördüncü şekil içinde iki kez yer alıyor diyorsun, bir göster bakalım?***

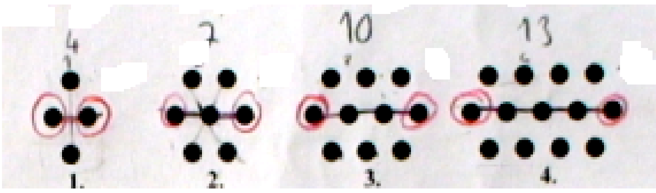
D_3 **:** *Şurası, sonra bir de şurdan şurası* (üçüncü şeklin dördüncü şekil içinde iki kez yer aldığını çizerek gösterdi).

Şekil 18'de görüldüğü gibi, cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler ise, öncelikle verilen şekil örüntüsünde her adımda yer alan noktaları sayarak, şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşlerdir.

Örneğin;

G ***: Bu örüntüyü inceler misin?***

Y_1 ***:*** (şekillere baktı ve hemen) *birinci adımda dört tane daire var* (birinci şeklin üstüne dört yazdı) *ikinci adımda* (ikinci şekildeki noktaları fısıldayarak ve kalemin ucuyla her noktayı göstererek saydı) *yedi tane* (şeklin üstüne yedi yazdı, üçüncü şekildeki noktaları kalemin ucuyla her noktayı göstererek saydı ve şeklin üstüne on yazdı, sonra emin olmak için tekrar saydı. Daha sonra dördüncü şekildeki noktaları benzer şekilde saydı ve şeklin üzerine 13 yazdı).

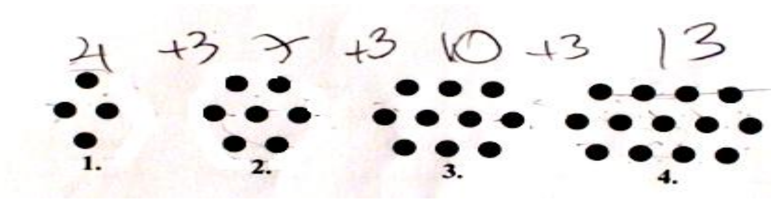


Elde edilen sayı örüntüsünde de öğrenciler **yinelemeli**, **değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** olmak üzere, üç başlık altında yer alan toplam dokuz strateji kullanmışlardır. Bu bağlamda "farklılığı arama" ve "bağıntı arama" stratejileri **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan stratejilerdir. "Farklılığı arama" stratejisi, tüm öğrencilerin öncelikli olarak odaklandığı stratejidir. Örneğin;

D_2 ***: Buradaki noktaların sayısı dört*** (birinci şekli gösterdi) *hepsi buradan üç artmış yedi,*

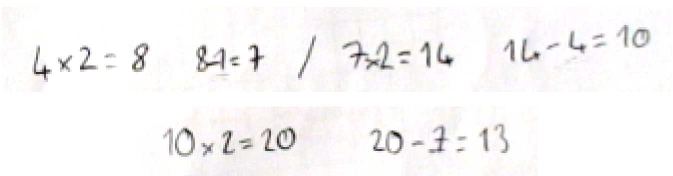
G ***: Gösterebilirsen***

D_2 **:** *Dört, yedi* (birinci şekil ile ikinci şekil arasına 4+3 yazdı, sonra ikinci şekil ile üçüncü şekil arasına 7+3 yazdı) *on oluyor, burası da hepsi üçer üçer artıyor* (10+3 yazdı) *burası da 13 tane nokta var.*



Bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrencinin (Y_1, O_3, D_3) kullandığı "bağıntı arama" stratejisi ise, öğrencilerin elde ettikleri sayı örüntüsünün terimleri arasında kullanılmıştır. Örneğin;

Y_1 **:** *...katlarıyla yapsak, iki katının bir eksiği, ee ... iki katının* (durdu) *dört eksiği aralarında üç fark var, 10'un iki katı 20, yedi eksiği* (durdu) *13… Burda bir çıkarıyoruz, burada dört. Çıkardığımız sayılar arasında üç fark var. Ee... 10'un iki katının eşittir 20* (10.2=20 yazdı) *20'nin de yedi eksiği 13 eder* (20-7=13 yazdı), *öğretmenim şimdi buradan bir çıkardık* (birin altını çizdi), *burada dört çıkardık, burada yedi çıkardık, bir ile dört arasında üç fark var, dört ile yedi arasında da üç fark var.*



Y_1'in kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimde ifade edilmiştir.

f (1)=4
f(2)=2f(1)-(f(1)-3)=2.4-**1**=7
f(3)= 2f(2)-(f(2)-3)=2.7-**4**=10
f(4)= 2f(3)-(f(3)-3)=2.10-**7**=13

Öğrencinin yaklaşımı dikkate alınarak b=(f(n-1)-a) olmak üzere araştırmacı tarafından genel formu f(n)=2f(n-1)-(f(n-1)-a) olarak belirlenen bu strateji, yeniden düzenlendiğinde "farklılığı arama" stratejisinin genel formu olan, f(n)=f(n-1)+a biçimini almaktadır. Ancak öğrencinin kullandığı modellemede, örüntünün ardışık terimlerinin oluşumunda yer alan 1, 4, 7 sayıları arasında b=(f(n-1)-a)=f(n-1)-3 bağıntısı bulunmaktadır. Öğrenci bu bağıntıyı fark etmiş ve f(n)=2f(n-1)-(f(n-1)-a) genel formundaki, terimler arası kurduğu bağıntıyı, dolaylı olarak b=(f(n-1)-a) bağıntı ile desteklemiştir.

Şekil 18'de görüldüğü gibi, katılımcı öğrenciler **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, "fonksiyonel bir ilişki bulma", "çarpım tablosu arama", "bağıntı arama" ve "araç örüntü arama" şeklinde toplam dört yol izlemişlerdir. Bir yüksek ve bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_2, O_1), fonksiyonel bir ilişki bularak, her adımda yer alan nokta sayısının, adım sayısının üç katının bir fazlası olduğunu ifade ederek örüntünün genel kuralını elde etmişlerdir. Örneğin;

Y_2 *:... Bir de bunu üç ile, adım sayısını, üç ile çarpıp bir eklersek dört oluyor. Adım sayısını üç ile çarparsak altı oluyor. Burada zaten 2, 4, 6, 7 var, bir ekliyoruz. Bunu üç ile çarparsak dokuz ediyor, burada zaten 3, 6, 9, 10 tane var, bir ekliyoruz, bunu üç ile çarparsak üç kere dört, 12, 12'ye bir eklersek 13 oluyor...*

Örneğin;

O_1 **:** *... burada* (birinci şekli gösterdi) *adım sayısının üç katının bir fazlası oluyor. Başkaaa..*

G ***:*** *Yani diğerlerinde de mi böyle?*

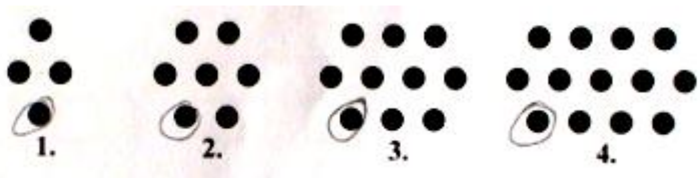
O_1 ***:*** *Hıı hıı... birin üç katı üç, bir fazlası dört oluyor. İkinin üç katı altı, bir fazlası yedi.*

Orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_2) ise, "çarpım tablosu arama" stratejisini kullanmıştır. Öğrencinin kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

4-1=3=(3.1)
7-1=6=(3.2)
10-1=9=(3.3)
13-1=12=(3.4)

Bu strateji ile, üçün katları ilişkisi kurularak örüntü devam ettirilebilir. Örneğin, 10. terim bulunmak istendiğinde (3.10)=30 elde edildikten sonra bu sayıya bir eklenebilir. Yani (3.10)+1=31, böylece n. terim için doğru bir adım atılmış olur.

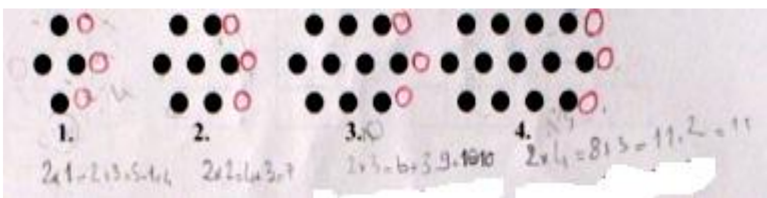
O_2 : *ee… şimdi bu şekillerden bir tane ee … boncuk diyelim, boncuk çıkarttığımızda üç* (birinci şekli gösterdi) *bunda kalıyor altı* (ikinci şekli gösterdi) *hep iki katı yani üçün iki katı, üç katı, üçün dört katı olarak gidiyor. Mesela bir tane bunu çıkarttığımızda* (birinci şeklin üçüncü satırındaki noktayı gösterdi ve yuvarlak içine aldı) *üç, buradan bunu* (ikinci şeklin üçüncü satırındaki birinci noktayı gösterdi ve yuvarlak içine aldı), *buradan bunu* (tekrar birinci şeklin üçüncü satırındaki noktayı gösterdi ve yuvarlak içine aldı), *bunu, bunu,* (diğer şekillerdeki tek noktaları gösterdi) *burası üç kalıyor, üçün iki katı altı, üçün üç katı dokuz, üçün dört katı 12.*



Düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_1) ise, "bağıntı arama" stratejisini kullanmıştır. Öğrenci burada bu stratejiyi, adım sayısı ile örüntünün terimlerindeki nokta sayıları arasında bir ilişki aramak için kullanmıştır. Örneğin;

G : *Şekillerin oluşumuyla ilgili neler söyleyebilirsin?*

D_1 : (birinci şeklin altına 2.1=2+3=5-1=4, ikinci şeklin altına 2.2=4+3=7, üçüncü şeklin altına 2.3=6+3=9+1=10, dördüncü şeklin altına 2.4=8+3=11+2=13 işlemlerini yaptı).



G : *Ne yaptın?*

D_1 : *Ee ... ikiyle biri çarptım. Adım sayısı ile, iki.ee ... hani üç tane boncuk ekleyip* (her satıra eklediği boncukları gösterdi) *ikinci sırası tam oluyor ya. O yüzden de üç ekledim, beşten de bir çıkardım dört.*

G : *Şimdi burayı bir daha tekrarlayalım mı? İki ile adım sayısını çarptın iki dedin. Sonra?*

D_1 **:** *Ee... iki artı üç dedim.*

G : Niye üç ekledin?

D_1 **:** *Belki olabilir diye düşündüm. Çözüm yolları üretmeye.*

G **:** *Yani sen buradaki sayıyı* (dördü gösterdim) *elde edinceye kadar.*

D_1 **:** *Yapmaya çalıştım. Ama düzgün bir kural olmadı.*

D_1, yukarıdaki açıklamalarında da görüldüğü gibi, her adımdaki toplam nokta sayısını elde etmek için, daha önce ifade ettiği, her yeni şekle eklenen üç tane noktaya odaklanmış ve adım sayısının iki katını aldıktan sonra üç ile toplamıştır. Daha sonra her adımdaki toplam nokta sayısına ulaşmak için elde ettiği toplama, adım sayısının iki eksiğini eklemiştir. D_1 kullandığı yaklaşımla aslında örüntünün genel formunu elde etmiştir. Böylece hem görsel yaklaşım, hem de cebirsel yaklaşım kapsamında verilen şekil örüntüsünde fonksiyonel ilişkiyi yakalamıştır. D_1'in kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimde ifade edilmiştir.

((2.1)+3)-1=4

((2.2)+3)-0=7

((2.3)+3)+1=10

((2.4)+3)+2=13

Aslında bu strateji, öğrencinin yaklaşımı dikkate alınarak düzenlendiğinde f(n)=((2.n)+3)+n-2 şeklinde modellenebilir.

Orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_2) ise, "araç örüntü arama" stratejisini kullanmıştır. O_2'nin kullandığı bu stratejinin genel formu, araştırmacı tarafından aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Adım sayısı	**Araç örüntü**	**Nokta sayısı**
1	3	**4**
2	5	**7**
3	7	**10**
4	9	**13**
n	g(n)	**n+g(n)=f(n)**

Tabloda görüldüğü gibi, öğrenci, çıktı değerlerinden girdi değerlerini çıkararak oluşturduğu araç örüntü (g(n)) yardımı ile genel formu n+g(n)=f(n) ilişkisini kurmuştur. Öğrenci daha sonra adım sayısı ile ilişkilendirilen araç örüntüde, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, "farklılığı arama" ve **diğer stratejiler** içinde yer alan, "sayıların doğasına bakma" stratejisini de kullanmıştır. O_2'nin açıklamaları aşağıda örnek olarak sunulmuştur.

G : *Örüntüde yer alan şekillerin oluşumuyla ilgili başka neler söyleyebilirsin?*

O₂ :*Şimdi buna adım mesela, burada dört tane boncuk var, şey adım sayısını çıkardığımızda üç, bundan da ee… mesela burada yedi tane boncuk var, iki çıkardığımızda beş, yedi kalıyor burada* (üçüncü şekli gösterdi) *burada da dokuz kalıyor* (dördüncü şekli gösterdi) *onlarda hep tek sayı, ikişer ikişer artarak devam ediyor.*

Şekil 18'de yer alan, **diğer stratejiler** kapsamında ise, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_4) "sayıların doğasına bakma" stratejisini ve düşük başarı düzeyine sahip başka bir öğrenci (D_3) ise, "terimleri birleştirme" stratejisini kullanmışlardır. Her iki stratejiye birer örnek aşağıda verilmiştir.

Örneğin;

D_4 : *Bunlar çift tek, çift tek diye gidiyor.*

G : *Neler çift, tek?*

D_4 : *(şekiller üzerine yazdığı nokta sayılarını gösterdi).*

Örneğin;

D_3 : *Başka…*(şekilleri inceledi). *Şu birinci şekil ile ikinci şekli topluyoruz on bir.*

G : *Neyi Topladın?*

D_3 : *Ee… burada dört tane daire vardı, burada da dokuz tane var* (durdu)

G : *Kaç tane var burada?* (ikinci şekli gösterdim).

D_3 : *Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, yedi tane var. Yedi dört daha onbir. Bir çıkardık on. Şu şekilde* de (üçüncü şekli gösterdi) *on tane dairemiz var* (üç ve dördüncü şekillerdeki noktaları saydı) *ikinci şekille üçüncü şekli toplamış, üçüncü şekil on tane* *ikinci şekil yedi tane, onla yediyi topladık onyedi, onyediden dörtdü çıkardık, dördüncü şekil oluyor.*

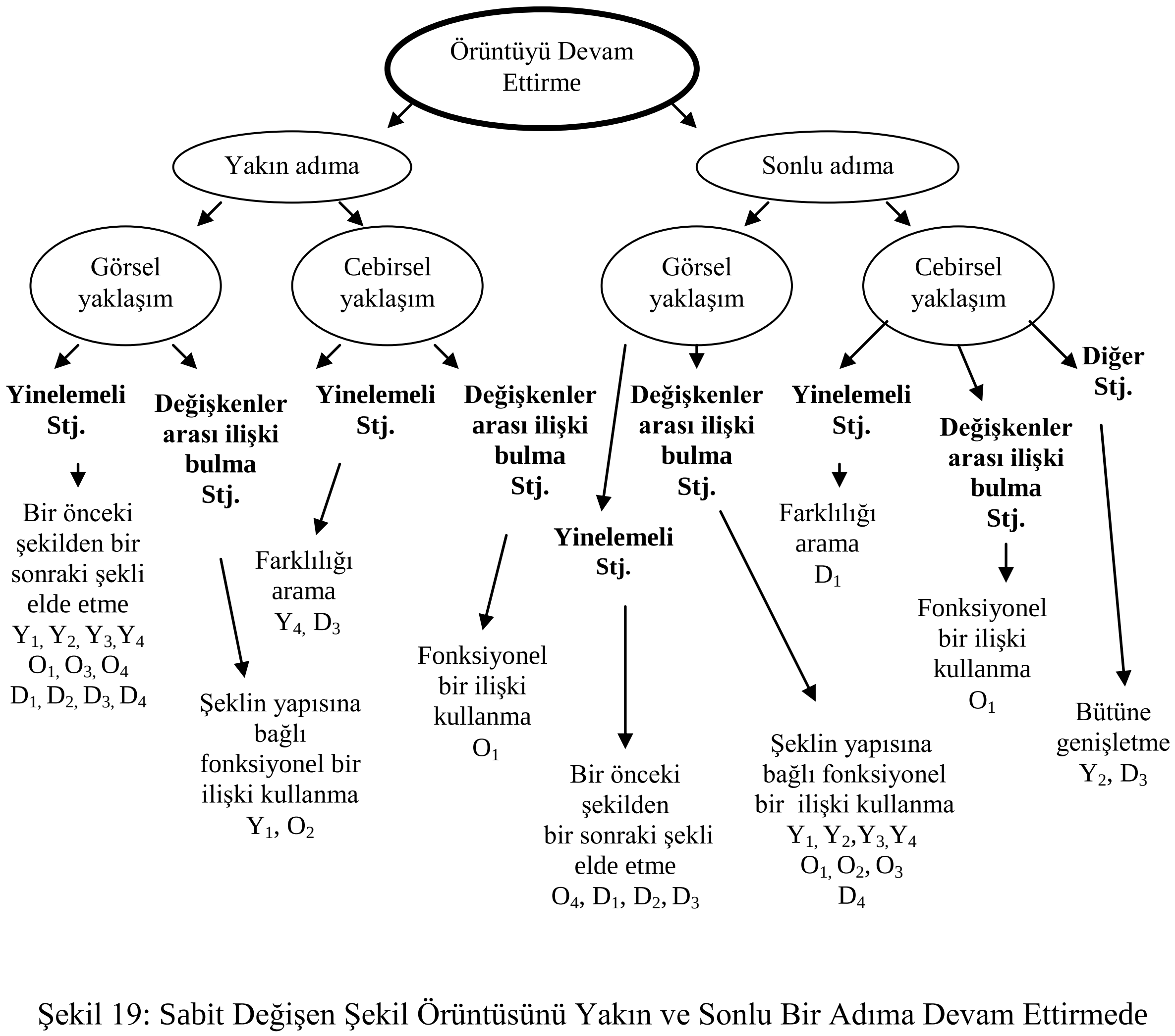
G **:** *Başka var mı gözlemlediğin?*

D_3 **:**(Birinci ve üçüncü şekildeki noktaları saydı) *şu birinci şekille üçüncü şekli toplayınca ondört ediyor, bir tane çıkarınca dördüncü şekli buluyoruz. Başka bu kadar.*

Elde edilen bulgular sonucunda, öğrenciler sabit değişen bir şekil örüntüsünde kuralı bulurken, "görsel" ve "cebirsel" olmak üzere iki yaklaşım benimsemişlerdir. Ayrıca hem görsel ve hem de cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler de olmuştur. Öğrenciler görsel yaklaşımda, şeklin yapısına odaklanmışlar ve bu bağlamda **yinelemeli**, **değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** içinde yer alan stratejileri kullanmışlardır. Öğrencilerden bir yüksek, iki orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci, şeklin yapısına bağlı olarak fonksiyonel bir ilişki bulmuştur. Örneğin bu öğrencilerden O_3, bu durumu günlüğünde *"bugün ben şekil örüntülerini daha çok sevdiğimi anladım. Şekil örüntülerinde sayı örüntülerinden daha iyi olduğumu düşünüyorum. Sayı örüntülerinde genellikle 10. 15. sayıları çizerek bulmuştum. Ama şekil örüntüsünde çizmeme gerek kalmadan buldum" (27.03.2007)* şeklinde açıklama yaparak, kısmen şeklin yapısının fonksiyonel ilişkiyi yakalamaya yardımcı olduğunu ifade etmiştir. Ayrıca görsel algısı gelişmiş olduğu düşünülen üç öğrenci **diğer stratejiler** içinde yer alan, şekillerden birinin diğerini kapsama ilişkisini ortaya koymuştur. Cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler ise, öncelikle verilen şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşlerdir. Bu bağlamda da **yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** içinde yer alan stratejiler kullanmışlardır. Öğrencilerden bazıları, daha önce sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde kullandıkları stratejilere benzer stratejiler de kullanmışlardır. Ayrıca bir yüksek, iki orta başarı düzeyine sahip üç öğrenci, daha önce sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde fonksiyonel bir ilişkiyi bulamamalarına karşın, sabit değişen şekil örüntüsünde cebirsel yaklaşımla fonksiyonel bir ilişki bulabilmiştir. Verilen örüntünün adım sayıları ile verilmesi, öğrencilerin fonksiyonel ilişkiyi bulabilmelerine yardımcı olduğu söylenebilir. Diğer taraftan görsel ya da cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerin en çok yinelemeli stratejiler içinde yer alan stratejileri tercih ettikleri de görülmüştür. Ayrıca görsel ya da cebirsel her iki yaklaşım kapsamında kullanılan stratejilere bakıldığında, hemen hemen her stratejide yüksek, orta ve düşük başarı düzeyinden öğrencilerin yer aldığı da görülmektedir. Dolayısıyla sabit değişen şekil örüntüsünde kuralı bulurken öğrencilerin strateji seçimlerinde başarı düzeylerinin bir etkisi olmadığı söylenebilir.

3.2.3.2. Örüntüyü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirme

Sabit değişen şekil örüntüsünde, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 19'da verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 19: Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirmede Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerinden sabit değişen bir şekil örüntüsünde, önce örüntüyü çizerek bir adım (yakın) devam ettirmeleri istenmiştir. Öğrenciler, örüntüyü bir adım devam ettirirken, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt temasında olduğu gibi, "görsel" ve "cebirsel" yaklaşımı benimsemişler ve bu yaklaşımlar altında **yinelemeli stratejiler** ve **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** olmak üzere iki başlık altında yer alan stratejiler kullanmışlardır. Kimi öğrenciler sadece görsel yaklaşımı kimi öğrenciler ise, önce cebirsel yaklaşımı daha sonra görsel yaklaşımı benimsemişlerdir.

Cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_1), **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan "fonksiyonel bir ilişki" kullanarak bir yüksek ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_4, D_3) ise, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini kullanarak, beşinci adımda yer alan şeklin toplam nokta sayısını belirlemişlerdir.

Her iki stratejiye ilişkin birer örnek aşağıda sunulmuştur.

Örneğin;

G **:** *Peki örüntünün beşinci adımındaki şekli oluşturabilir misin?*

O_1 **:** *Beş, beş çarpı üç onbeş, onaltı. Onaltı tane şey olur nokta olur* (zihinden üç ile beşi çarptı ve bir fazlasını aldı).

Örneğin;

G **:** *Örüntünün beşinci adımındaki şekli oluşturabilir misin?*

Y_4 **:** *…dördüncü şekilde onüç nokta olduğu için beşinci şekilde de onbeş nokta olacak ay… pardon onaltı nokta olması lazım. Onaltı nokta var.*

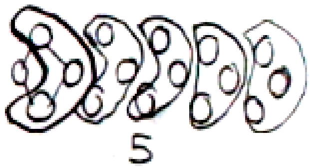
Görsel yaklaşım benimseyen öğrencilerden orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_2) dışında tüm öğrenciler **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini, bir yüksek ve bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_1, O_2) ise, **değişkenler arası ilişki arama stratejisi** içinde yer alan, "şeklin yapısına bağlı "fonksiyonel bir ilişki" kullanılmışlardır. Her iki stratejiye ilişkin örnekler aşağıda verilmiştir.

Örneğin;

G *: Beşinci şekli nasıl oluşturdun?*

D₁ *: Burda* (dördüncü şeklin birinci satırını gösterdi) *dört şekil vardı birinci sırada, bir tane daha ekledim, burda* (ikinci satır) *beş şekil vardı bir tane daha ekledim altı oldu, burada* (üçüncü satır) *dört şekil vardı, bir tane daha ekledim beş oldu.*

"Bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanan öğrencilerden Y_2 ise, aşağıda görüldüğü gibi, farklı bir yaklaşımla birinci şekilden sonra sırayla, bir önceki şekle üç tane noktadan oluşan şekil grubu ekleyerek beşinci adımdaki şekli oluşturmuştur.



"Şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanan orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_2) ise, beşinci şeklin en üst ve en alt sırasına, adım sayısı kadar, orta sıraya ise adım sayısının bir fazlası kadar nokta çizerek beşinci şekli oluşturmuştur. Örneğin;

O₂ *:* (Beş tane daire çizdi, sonra bu dairelerin altına altı tane, bunların altına da tekrar beş tane daire çizdi ve oluşturduğu bu şeklin altına da adım sayısı olarak beş yazdı).

G *: Nasıl yaptın?*

O₂ *: Bunlar* (her şekildeki 1. satırları gösterdi) *hep bir , iki, üç, dört diye artıyor. Adım sayısı ile aynı, adım sayısı ile aynı olduğu için buraya* (oluşturduğu şeklin birinci satırını gösterdi) *beş tane boncuk çizdim, altına bir fazlası, tekrar beş boncuk çizdim.*

G *: Çok güzel.*

Sabit değişen bir şekil örüntüsünde, katılımcı öğrencilerinden, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmede 10. adımdaki (sonlu) şekli çizmeleri istenmiştir. Öğrenciler, 10. adımdaki şekli çizerken yakın adımda olduğu gibi, görsel ve cebirsel yaklaşımı benimsemişlerdir. Cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_1), **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan “fonksiyonel bir ilişki”, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_1), **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan “farklılığı arama” ve bir yüksek (Y_2), bir düşük (D_3) başarı düzeyine sahip iki öğrenci ise, **diğer stratejiler** içinde yer alan “bütüne genişletme” stratejilerini kullanarak 10. adımdaki şeklin toplam nokta sayısını elde etmişlerdir. Örneğin fonksiyonel bir ilişkiyi kullanan öğrenci;

G *: Peki örüntünün onuncu adımındaki şekli oluştur bakalım?*

O₁ *:10 …*(zihinden hesaplamalar yaptı ve) *otuz bir, otuzbir tane nokta olur.*

…

G *: Evet nasıl yaptığını açıklar mısın?*

O₁ *: Şimdi ben onu adım sayısının üç katının bir fazlası olduğu için onu üçle çarptım bir fazlası ekledim otuzbir oldu.*

şeklinde açıklamada bulunurken, farklılığı arama stratejisini kullanan öğrenci ise,

G *: Peki örüntünün onuncu adımındaki şekli oluşturabilir misin?*

D₁ *:* (Beşinci şekilde her sırada yer alan noktaları tekrar saydı, sonra ayrı bir yerde 15 ile 16 yı alt alta yazarak topladı ve 31 buldu).

G *: 31 nedir? Ne yaptın orda?*

D₁ *: 10. sıradaki noktaların sayısı.*

G *: Peki nasıl buldun onu?*

D₁ *: ee… buralarda* (her şekle eklediği üç noktayı gösterdi) *üç artıyor ee… beş tane adım yaptık şimdiye kadar üç kere beş, 15 buradaki sayıda* (beşinci adımdaki nokta sayısı*) 16 toplam nokta, onla onu topladım. İnşallah onuncu 31 dir.*

G *: Tekrar eder misin?*

D₁ *: Her birinde üç artıyor ve beş adım yaptık, üç kere beş, 15, yani ordaki* (eliyle havada beşinci adımı içine alacak şekilde yuvarlak içine aldı) *fazlalıkları da topladım, eklediğim sayıları da ee.. şimdiye kadar beşinci sayıdaki en son yaptığımız beşinci olduğu içinde, bunun toplam sayısını 15 ile topladım.*

şeklinde açıklama yapmıştır. “Bütüne genişletme” stratejisini kullanan Y_2 ve D_3 ise, beşinci adımdaki şekil sayısına odaklanmışlar ve bu bağlamda 10, beşin iki katı olduğu için 10. adımdaki şekil sayısını bulurken beşinci adımdaki şekil sayısının iki katını almışlardır. Öğrencilerin kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıdaki biçimiyle ifade edilmiştir.

n=5 için f(5)=16

10=2.5 olduğundan

n=10 için f(10)=2.f(5)=2.16=32

Örneğin;

G *: Peki 10. adımındaki şekli oluşturabilir misin?*

Y_2 *: 10. adım.*

G *: Hıı hıı…*

Y_2 *: Bu beşinci adımsa onuncu adımda bunun iki katı kadar olur.*

G *: Bu beşinci adımsa* onuncu *adım bunun iki katı kadar diyorsun. Yani?*

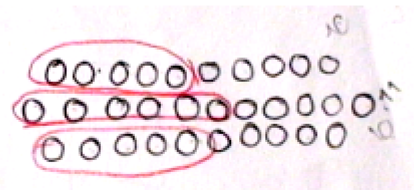
Y_2 *: Noktalar onun iki katı kadar olmalı.*

G *: Hıı…Yap bakalım.*

Y_2 *:Üç, altı, dokuz, oniki, onbeş, onaltı tane var, onaltıyı ikiyle çarparız* (16.2=32 işlemini yaptı) *otuziki. Onuncu adımda.*

Şekil 19'da görüldüğü gibi, 10. adımdaki şekli çizerken görsel yaklaşım kapsamında, bir orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (O_4, D_1, D_2, D_3) **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanmışlardır. Bu öğrenciler örüntüde bir önceki şeklin her satırına birer nokta ekleyerek, bir sonraki şekli elde etmişler ve bu işlemi 10. adıma kadar devam ettirmişlerdir. Ancak bu öğrencilerden D_1 diğerlerinden farklı bir yaklaşım uygulayarak, daha önce cebirsel yaklaşımla elde ettiği, beşinci ile 10. şeklin toplam nokta sayıları arasındaki farkı, beşinci şeklin üç satırına eşit paylaştırarak 10. şekli oluşturmuştur. Örneğin;

G *: …Şeklini oluştur bakalım.*



D_1 *: ….Hesaplayabilir miyim emin olmam için.*

G *: Tabi.*

D_1 : (Çizdiği şekilde birinci sırada yer alan noktaları saydı ve yanına 10 yazdı, ikinci sırayı saydı ve 11 yazdı, üçüncü sırayı saydı 10 yazdı) *Evet.*

G *: Nasıl yaptın?*

D_1 *: İlk baş buradaki şekli* (beşinci şekil) *çizdim. Ee… çizdikten sonra fazlalık demiştim ya 15' i de buraya eşit miktarda.*

G *: Nasıl eşit olmasına dikkat ettin?*

D_1 *: … Buda ikisi 10 olunca burası da bir fazla 11 oluyor.*

Dört yüksek, üç orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, O_1, O_2, O_3, D_4) ise, 10. şekli oluştururken **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel ilişkiyi" kullanmışlardır. Örneğin;

G *: Örüntünün onuncu adımındaki şekli oluşturabilir misin?*

Y_1 *: Onuncu adımı*

G *: Evet. Nasıl yaptığını da açıklamanı istiyorum?*

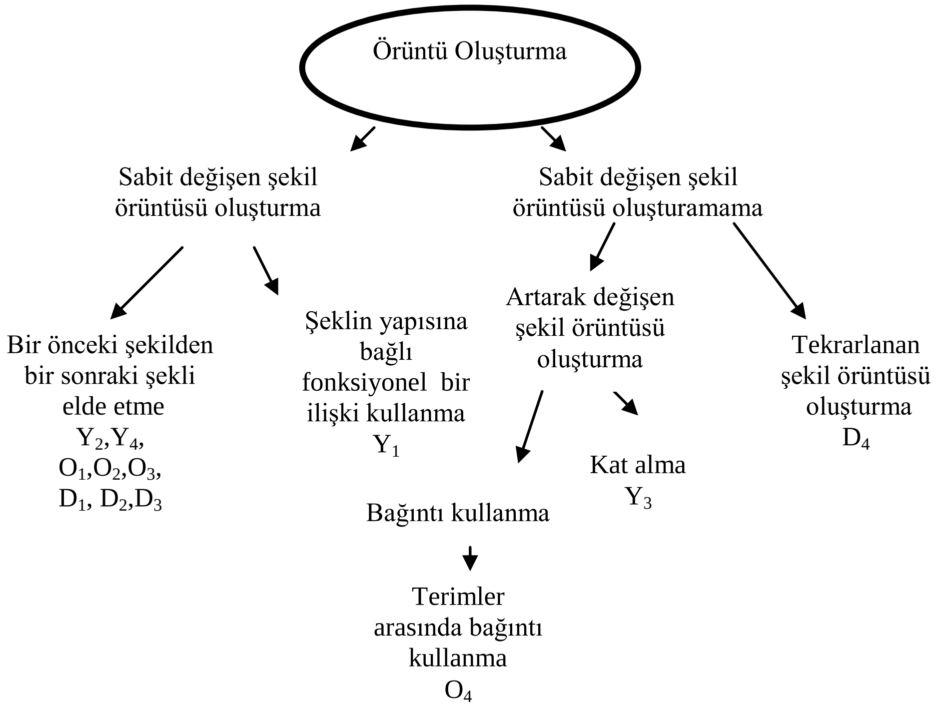
Y_1 *:* (şekillerin üst tarafına 1, 2, 3, 4, 5 yazdı) *onuncu adımda 10 tane üstte olur, adım sayısı ile aynı olduğundan* (10 tane nokta çizdi ve saydı) *ortadaki şekil* (beşinci şekilde ikinci sırayı saydı) *adım sayısından bir fazla* (ikinci sıraya bir nokta çizdi ve durdu, tekrar şekillerin ikinci sıralarını saydı ve kaldığı yerden devam etti 11 nokta çizdi ve alta geçti 10 tane daha nokta çizdi) *öğretmenim şimdi en alttaki şekiller ile en üstteki şekiller adım sayısı ile aynı sayıda, yani 1, 2, 3, 4…10 tane olcak, en alttaki de 10 tane olcak, buralarda da* (diğer şeklileri gösterdi) *inceledik, ortadaki şekiller adım sayısından bir fazla olacak, buna bağlı olarak ta örüntüyü devam ettirdim.*

G *: Çok güzel aferin.*

Elde edilen bulgular sonucunda, katılımcı öğrenciler sabit değişen şekil örüntüsünü yakın ve sonlu bir adıma çizerek devam ettirirken, "görsel" ve "cebirsel" yaklaşımı benimsemişlerdir. Öğrencilerin tamamı, görsel yaklaşım kapsamında, örüntünün beşinci adımındaki şekli çizerek bir adım devam ettirmişlerdir. Bunu yaparken dört yüksek, üç orta ve dört düşük başarı düzeyine sahip onbir öğrenci yinelemeli stratejiler içinde yer alan, "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini, bir yüksek, bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci ise, değişkenler arası ilişki bulma stratejisi içinde yer alan "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanmışlardır. Örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken cebirsel yaklaşımı sadece iki öğrenci benimsemiştir. Bunlardan düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" orta başarılı bir öğrenci ise, değişkenler arası ilişki bulma stratejisi içinde yer alan “fonksiyonel bir ilişkiyi” kullanmışlardır. Ancak cebirsel yaklaşımı öğrenciler sadece yakın adımdaki toplam nokta sayısını belirlemek için kullanmışlar daha sonra görsel yaklaşıma geçmişlerdir. Bu öğrenciler cebirsel yaklaşımı, yakın adımdaki şekilleri doğru çizdiklerinden emin olmak adına kullandıkları söylenebilir. Örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken ise, görsel yaklaşımı benimseyen dört yüksek, üç orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci, değişkenler arası ilişki bulma stratejisi içinde yer alan, “şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi”, bir orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci ise, yinelemeli stratejiler içinde yer alan, “bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme” stratejisini kullanarak 10. adımdaki şekli çizmişlerdir. Görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerin çoğunluğunun, örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken, yinelemeli stratejilere sonlu bir adıma devam ettirirken de, değişkenler arası ilişki bulma stratejisine odaklandığı görülmektedir. Örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci, “farklılığı arama”, orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci “fonksiyonel bir ilişki”, bir yüksek ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci ise, “bütüne genişletme” stratejilerini kullanarak örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmişlerdir. Diğer taraftan, görsel ya da cebirsel yaklaşım kapsamında kullanılan her stratejide çoğunlukla yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir. Bu durum ise, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken, strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığı söylenebilir.

3.2.3.3. Örüntü Oluşturma

Sabit değişen şekil örüntüsünde, örüntü oluşturma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 20’de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 20: Sabit Değişen Şekil Örüntüsü Oluşturmada Kullanılan Stratejiler

Bu etkinlikte katılımcı öğrencilerinden, sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturmaları istenmiştir. Şekil 20'de görüldüğü gibi, üç yüksek, üç orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip toplam dokuz öğrenci, sabit değişen bir şekil örüntüsü oluştururken, bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturamamıştır. Öğrencilerden Y_2, Y_4, O_1, O_2, O_3, D_1, D_2 ve D_3, örüntüyü oluştururken, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanmışlardır. Bu öğrenciler belli sayıdaki şekli, bir önceki şekle ekleyerek bir şekil örüntüsü oluşturmuşlardır.

G : *Verilen örüntüde olduğu gibi, şekillerden oluşan bir örüntü oluşturabilir misin?*

D₃ : *Oluştururum* (Birinci şekli oluştururken birinci ve üçüncü sırada iki tane, ikinci sırada ise, dört tane yıldız çizdi).

D_3 : *Birinci şekilde sekiz tane yıldız çizdim.*

G : *Nasıl çizdin?*

D_3 : *Sayısı sekiz tane dedik, birinci sıradan ikinci sıraya iki artırdık, ikinci sıradan üçüncü sıraya ise iki eksilttik.*

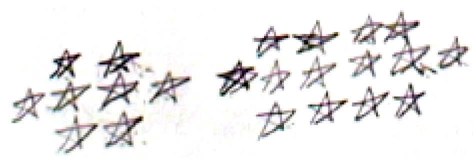
G : *İkinci şekli de çiz bakalım*

D_3 : (İkinci adıma geçtiğinde her sıradaki yıldız sayılarını iki arttırdı).

D_3 : *Burda da gene birinci basamaktan ikinci basamağa, iki eksilttim ay ... iki arttırdım, ikinci sıradan üçüncü sıraya da iki eksilttim.*

G : *Üçüncü şekil nasıl olacak?*

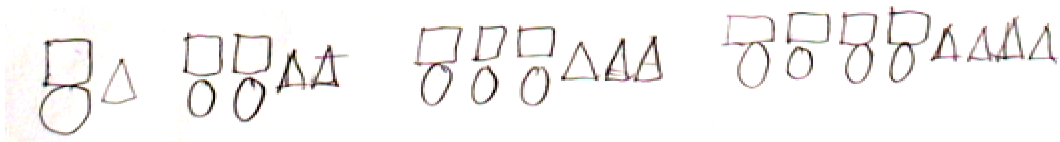
D_3 : *Üçüncü sırada gine burda birinci sıra* (birinci şeklin birinci sırasını gösterdi) *iki dört, altı diye gitcek, ilk sırası altı olacak, burası da* (ikinci sırayı gösterdi) *dört altı sekiz diye, üçüncü sırada sekiz tane olacak, üçüncü sıra altı tane olacak.*



O_1 ise, aşağıda görüldüğü gibi, diğer öğrencilerden farklı bir yaklaşım izlemiş, kare, çember ve üçgenden oluşan üç şekil kullanarak sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturmuştur. Örneğin;

G : *Verilen örüntüde olduğu gibi, şekillerden oluşan bir örüntü oluşturabilir misin?*

O_1 : *Oluşturabilirim* (aşağıdaki gibi bir şekil örüntüsü oluşturdu)



G : *Örüntüyü nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?*

O_1 : *Şimdi ben önce kare çember ve üçgenden oluşan, tekrar eden bir birim çizdim. Hepsinde, hepsinde birer birer artıyor, hepsi bir sonraki şekilde.*

G : *Üç şekil kullandın ve her adımda da üç şekil de birer birer artıyor dedin.*

O_1 : *Evet*

Sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturan öğrencilerden yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrencide (Y_1) "şeklin yapısına bağılı fonksiyonel bir ilişki" kullanarak örüntüyü oluşturmuştur. Örneğin;

G : *Verilen örüntüde olduğu gibi, şekillerden oluşan bir örüntü oluşturabilir misin?*

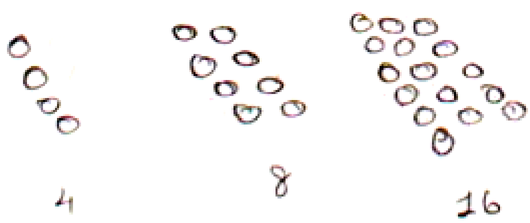
Y_1 : *Oluşturabilirim.*

Y_1 **:** (önce birinci satıra bir nokta , ikinci satıra üç nokta ve üçüncü satıra bir nokta çizdi) *birinci adımda en üstteki ile en alttaki adım sayısı ile aynı bu* (ikinci satır) *iki fazla* (adım sayısından iki fazla), *ikinci adımda* (birinci ve üçüncü satıra iki nokta ikinci satıra dört nokta çizdi) *ee… bu en üstteki ile en alttaki ikinci adım sayısı yani ikiyle aynı, bu* (ikinci satır) *iki fazla, yani ortadakiler hep iki fazla,* (üçüncü şekli çizmeye başladı, önce birinci satıra üç nokta, ikinci satıra beş nokta sonra üçüncü satıra üç nokta çizdi) *ee ... üçüncü adımda ise yine en üstteki ile en alttaki adım sayısı ile eşit yani üç, ortadaki de iki fazla.*

Şekil 20'de görüldüğü gibi, sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturamayan öğrencilerden Y_3 "kat alma" stratejisini O_4 ise, şekil sayıları (terimler) arasında "bağıntı" kullanarak, artarak değişen bir şekil örüntüsü oluşturmuşlardır. Her iki öğrenci de bu stratejileri kullanarak, önce örüntünün her adımında yer alan şekil sayılarını belirlemişler ve buna dayalı olarak şekilleri çizmişlerdir. Ayrıca her adımda benzer bir şekil yapısı da kullanmışlardır. Örneğin;

G **:** *Verilen örüntüde olduğu gibi, şekillerden oluşan bir örüntü oluşturabilir misin?*

Y_3 **:** (Düşündü ve önce dört noktayı alt altta çizdi, sonra ikinci şekle geçti ve ikinci şekli oluştururken yan yana iki nokta çizdi ve bu noktaların altına aynı şekilde üç satır ekledi ve üçüncü şekilde üç noktayı yan yana çizdi ve bu noktaların altına aynı şekilde dört satır ekledi ve en son bir nokta daha ekledi ve en son şekildeki noktaları saydı) *bu şekilde.*



G **:** *Nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?*

Y_3 **:** *ee… bunlar şey, hepsinin, birincisinde dört tane var, ikincisinde sekiz tane, sonra üçüncüsünde onaltı tane, ikiyle çarpımı şeklinde gidiyor. Dört ... dörtle ikiyi* *çarparız, sekiz, sekizle ikiyi çarparız on altı şeklinde, bir de oluşumu da ilk başta birli gidiyor, sonra iki, ikili oluyor, üçlü oluyor sonra da.*

G : *Hıı hıı…şekillerin oluşumunda bundan bir tane, bundan iki tane dedin, burda? (üçüncü şekli gösterdim)*

Y_3 : *ee… şekillerde birinci sıradakiler ikişer ikişer oluyor alttakilerde o şekle göre gidiyor ikişer ikişer.*

G : *Burda* (üçüncü şekli gösterdim)*?*

Y_3 : *Orda üçerli, üçerli oluyor şu şekilde* (kalemiyle üçüncü şekildeki satırları gösterdi) *bu da* (en sondaki tek noktayı gösterdi) *onaltı olduğundan dolayı şey öyle.*

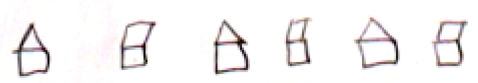
G : *Yani bu noktayı onaltıya tamamlamak için koydum diyorsun.*

Y_3 : *Hıı hıı…*

Şekil 20'de görüldüğü gibi, sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturamayan düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_4) ise, tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturmuştur. Örneğin;

G : *Verilen örüntüde olduğu gibi, şekillerden oluşan bir örüntü oluşturabilir misin?*

D_4 : (Biraz düşündü ve aşağıdaki gibi bir tekrarlayan örüntü oluşturdu).



G : *Nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?*

D_4 :*Birinci şekilde bir tane üçgen, altına bir kare, aralarında bu paralel kenar altında bir kare var ve aynen devam ediyor.*

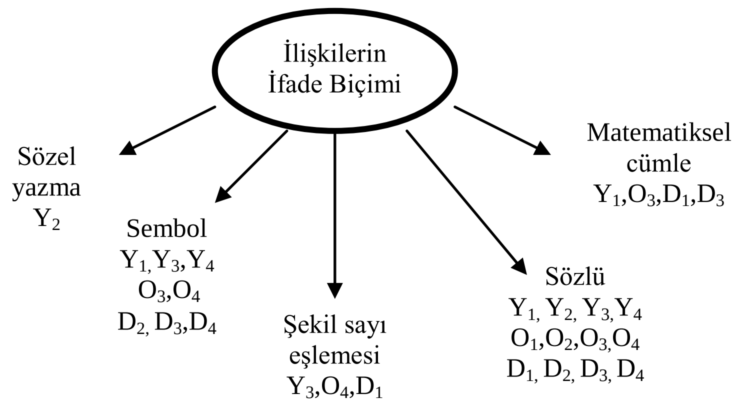
Araştırmacı sabit değişen şekil örüntüsünde öğrencilerin gerçekleştirdikleri eylemlere ilişkin düşüncelerini 27.03.2007 tarihli günlüğüne aşağıdaki biçimiyle yansıtmıştır:

…Öğrenciler şekillerin oluşumuyla ilgili bir çok şey söylediler. Çoğunluğu öncelikle her şekildeki toplam nokta sayısını bulup örüntüyü sayı örüntüsüne dönüştürdüler. Daha sonra şeklin oluşumunu dikkate alarak, noktaların her adımda sıralanışını ifade ettiler. Ayrıca nokta sayıları ve adım sayıları arasında ilişki kuran öğrencilerde oldu. Bunun yanı sıra bazı öğrencilerde adım sayısı ile nokta sayıları arasındaki fonksiyonel ilişkiyi buldular. Özellikle D_1'in bu ilişkiyi bulması çok ilginçti. Çünkü D_1 çok heyecanlı ve kendine güveni olmayan bir çocuk. Öğrenciler daha sonra örüntüyü nokta sayılarının sıralanışına göre devam ettirdiler. 10. adımdaki şekli çizerken ise, çoğunluğu adım sayısı ile nokta sayılarını ilişkilendirdi. Örüntü oluştururken, sabit değişen örüntülerin temel özelliği olan terimler arası sabit fark özelliğini dikkate alan ve almayan öğrenciler oldu (G; 27.03.2007).

Elde edilen bulgular sonucunda, dokuz öğrenci sabit değişen bir şekil örüntüsü oluştururken, üç öğrenci ise sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturamamıştır. Örüntü oluşturan iki yüksek, üç orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, “bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme” stratejisini, yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan “şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki” kullanmışlardır. Sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturamayan bir yüksek, bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci artarak değişen şekil örüntüsü, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci de tekrarlanan şekil örüntüsü oluşturmuştur. Sonuç olarak sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturamayan öğrencilerin, sabit değişen bir örüntünün belirgin bir özelliği olan şekiller arası sabit farkı dikkate almadıkları söylenebilir. Diğer taraftan kullanılan her stratejide çoğunluğunda yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmüştür. Bu durum, sabit değişen bir şekil örüntüsü oluştururken strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığı şeklinde değerlendirilebilir.

3.2.3.4. İlişkilerin İfade Biçimleri

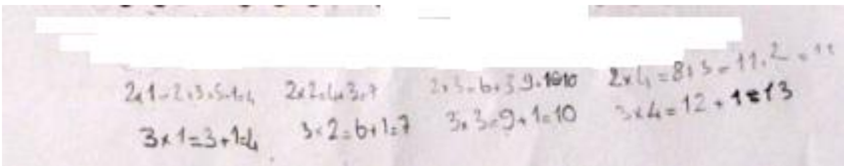
Sabit değişen şekil örüntüsünde, ilişkilerin ifade biçimleri alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 21’de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



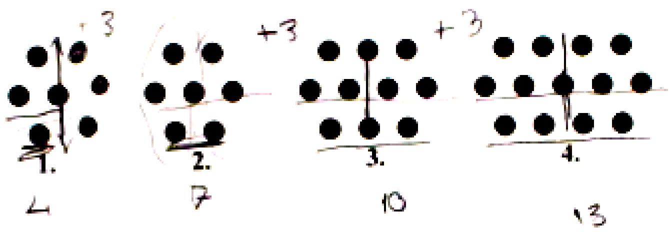
Şekil 21: Sabit Değişen Şekil Örüntüsünde Kullanılan İfade Biçimleri

Katılımcı öğrencilerin, sabit değişen bir şekil örüntüsünü inceleme ve kuralı bulmada, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede, sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturmada, nasıl bir ifade biçimi kullandıkları belirlenmek istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 21'de görüldüğü gibi, "sözlü", "matematiksel cümle", "sembol", "şekil sayı eşlemesi" ve "sözel yazma" olmak üzere beş ifade biçimi kullanılmıştır. Tüm öğrenciler her aşamada belirledikleri tüm ilişkileri öncelikle "sözlü" olarak ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra, üç yüksek, iki orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_1, Y_3, Y_4, O_3, O_4, D_2, D_3, D_4), örüntüde her adımda yer alan toplam şekil sayısını ve bulduğu sayılar arasındaki sabit farkı "sembol" ile ifade etmişlerdir. Bir yüksek, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_1, O_3, D_1, D_3) ise, şekil sayıları arasındaki bağıntıları "matematiksel cümle" ile, bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci de (Y_3, O_4, D_1) şekil sayıları arasındaki sabit farkı "şekil sayı eşlemesi" yaparak ifade etmişlerdir. Yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci (Y_2) de, bir önceki şekilden bir sonraki şeklin elde edilmesi ve şekil sayıları arasındaki sabit farkı günlüğünde yazılı olarak dile getirmiştir. Aşağıda her bir ifade biçimine birer örnek sunulmuştur. Örneğin;

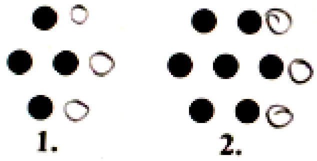
Matematiksel cümle (D_1);



Sembol (Y_4);

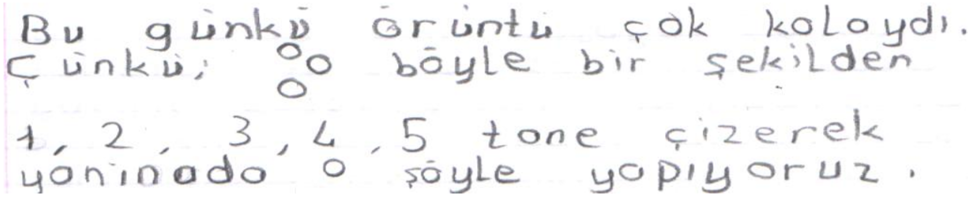


Şekil sayı eşlemesi (Y_3);



Sözel-sembol-resim;

Y_2 ***:*** *(27.03.2007 tarihli günlük)*

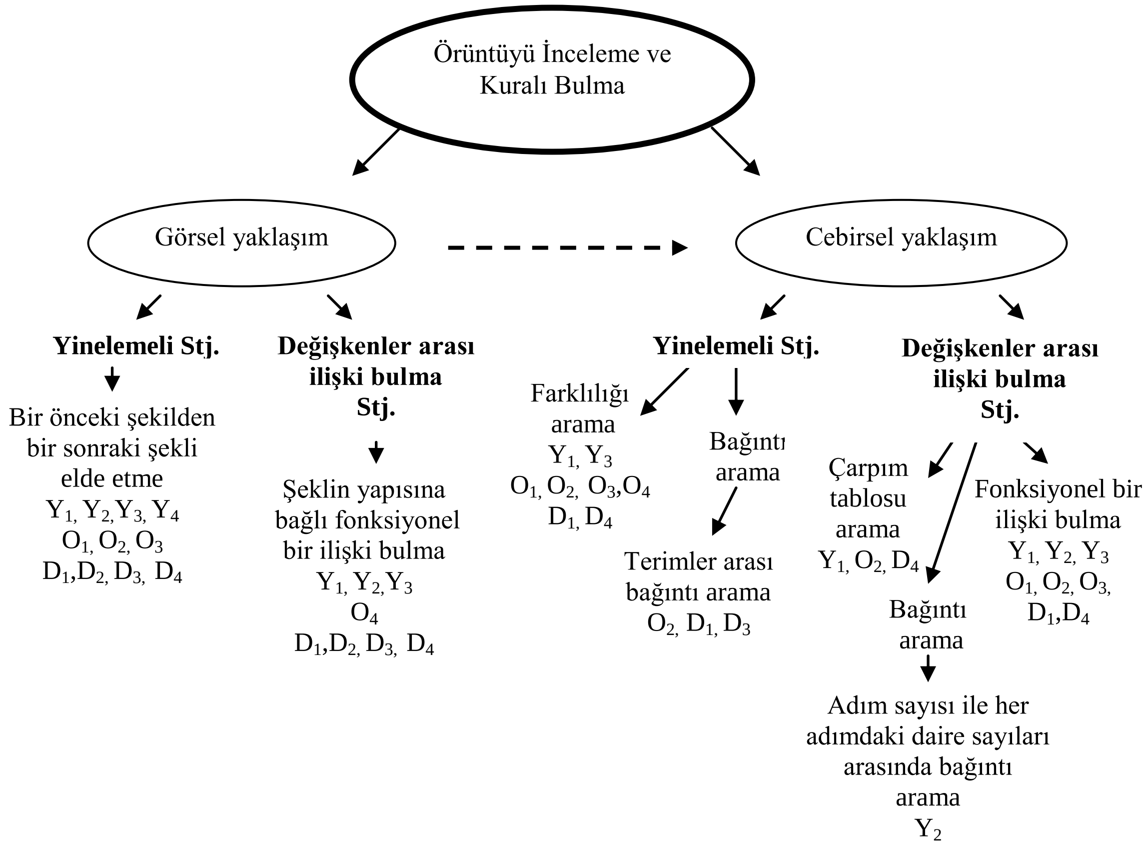

Bu günkü örüntü çok koloydı.
Çünkü; böyle bir şekilden
1, 2, 3, 4, 5 tone çizerek
yonında o şöyle yopıyoruz.

Elde edilen bulgular sonucunda sabit değişen şekil örüntüsünde; örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ile sabit değişen bir şekil örüntüsü oluşturmada en fazla kullanılan ifade biçiminin “sözlü” ifade ve “sembol” olduğu görülmüştür.

3.2.4. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü (2) Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Bulgular

3.2.4.1. Örüntüyü İnceleme ve Kuralı Bulma

Sabit değişen şekil örüntüsünde (EK-4, soru 8), örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 22’de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 22: Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü İnceleme ve Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerden yukarıda gösterilen sabit değişen şekil örüntüsünde kuralı bulmaları istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 22'de görüldüğü gibi, öğrenciler kuralı bulurken "görsel" ve "cebirsel" olmak üzere iki yaklaşım benimsemişlerdir. Görsel ve cebirsel yaklaşım kapsamında ise, **yinelemeli stratejiler** ve **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** olmak üzere iki başlık altında toplam yedi strateji kullanmışlardır.

Görsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanmışlardır. Bu öğrenciler şeklin yapısına bağlı olarak, her şekilde siyah daire sayısının sabit, siyah daire etrafında yer alan beyaz daire sayılarının ise, birer birer arttığını ifade etmişlerdir.

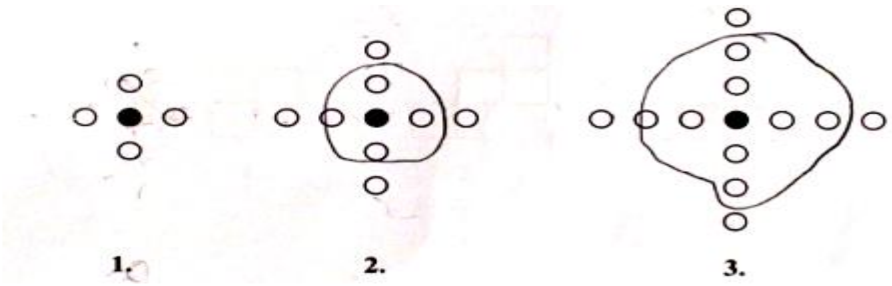
Örneğin;

G **:***Burada her adımı siyah ve beyaz dairelerden oluşmuş bir şekil örüntüsü verilmektedir. Bu örüntüyü inceler misin?*

D_4 ***:*** (Şekilleri inceledi) *Evet*

G ***: İnceledin mi? Peki örüntüde yer alan şekiller arasında bir ilişki gözlemleyebildin mi?***

D_4 ***: Ee… birinci adımda böyleydi*** (birinci adımdaki şekli gösterdi) *birinci adımla, bu adımla bu adım aynı* (birinci adımdaki şekli ikinci adım içinde yuvarlak içine aldı*) yanlarına bir tane daha daire eklemişler, bu bunun adımıyla şöyle adım aynı* (ikinci adımdaki şekli üçüncü adım içinde yuvarlak içine aldı) *birer tane daha yanlarına daire eklemişler.*



Yüksek başarılı bir öğrenci de, beyaz daire sayısının her şekilde dörder artarak devam ettiğini aşağıdaki şekilde açıklamıştır.

G **:***Burada her adımı siyah ve beyaz dairelerden oluşmuş bir şekil örüntüsü verilmektedir. Bu örüntüyü inceler misin?*

Y_3 ***: İnceledim***

G ***: Peki örüntüde yer alan şekiller arasında bir ilişki gözlemleyebildin mi?***

Y_3 ***: Şey burda ilk başta hep ortada bir siyah boncuk var, sonra bunun etrafina, etrafindaki beyaz boncukların hepsine birer tane fazlalaştırıyor her adımda, yani dörder fazlalaşıyor.***

Şekil 22'de görüldüğü gibi, üç yüksek, bir orta ve dört düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, O_4, D_1, D_2, D_3, D_4) ise, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi bulma" stratejisini kullanmışlardır. Öğrenciler şeklin yapısına bağlı olarak, siyah daire etrafında yer alan beyaz dairelerin sayısını, adım sayısı ile ilişkilendirerek, her bir uzantıda adım sayısı kadar olduğunu ifade etmişlerdir. Örneğin;

Y_1 **:***… Bir kural daha geldi, adım sayısıyla bunlar aynı* (her şekildeki adım sayıları ile beyaz daireleri gösterdi ve adım sayıları ile siyah dairelerin her bir yanında olan beyaz daire sayılarının aynı olduğunu gördü).

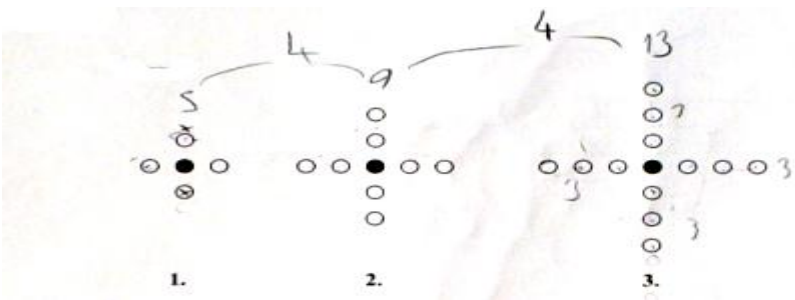
Örneğin düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci ise;

D_1 **:** *… ee…burda birinci adımsa buralarda da bir var* (birinci adımda beyaz dairelerin siyah daire etrafında bir tane olduğunu söyledi) *ikinci adımsa iki, iki, iki, üçüncü adımsa üç, üç diye gidiyor.*

Cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler, öncelikle verilen örüntünün her adımında yer alan daireleri sayarak, şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşlerdir. Elde edilen sayı örüntüsünde de, **yinelemeli** ve **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** olmak üzere iki başlık altında toplam beş strateji kullanmışlardır. Bu bağlamda **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, “farklılığı arama” ve “bağıntı arama” şeklinde iki strateji kullanılmıştır. İki yüksek, dört orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrencinin (Y_1, Y_3, O_1, O_2, O_3, O_4, D_1, D_4) kullandığı “farklılığı arama” stratejisi ilk olarak odaklanılan strateji olmuştur. Örneğin;

G **:** *Örüntünün her bir adımındaki şekillerin oluşumunda yer alan, siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısını veren bir kural ifade edebilir misin?*

O_2 **:** *Şey de olabilir dört, sekiz, on iki diye gidiyor beyaz boncuklar, siyah boncuklarla burda beş oluyor, burda dokuz oluyor, burda da on üç oluyor, burda dörder dörder artıyor* (önce her adımda beyaz daire sayılarını daha sonra siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısını söyledi).



"Bağıntı arama" stratejisini kullanan bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (O_2, D_1, D_3) bu stratejiyi, elde ettikleri sayı örüntüsünün terimleri arasında kullanmışlardır. Örneğin;

G : *Örüntüde yer alan şekiller arasında bir ilişki gözlemleyebildin mi?*

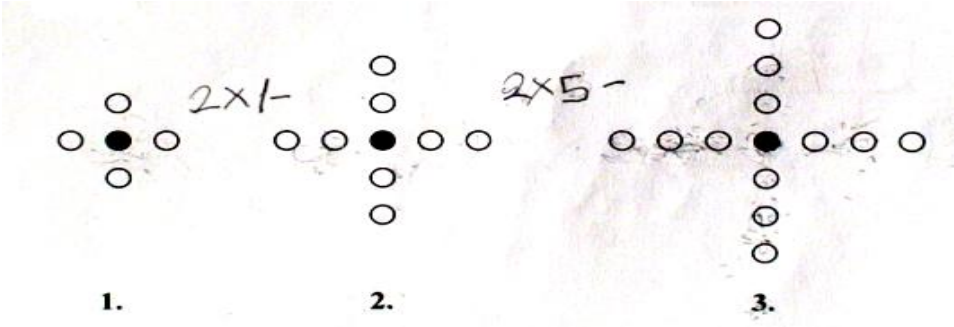
D_3 : *Gözlemleyebildim. Burda birinci şekilde bir tane daire varken en üstte ikide iki tane, üçte üç tane olmuş, burda beş tane varken burda dokuz tane olmuş, yani iki çarpmış* (birinci adımdaki şeklin üstüne 2x yazdı).

G : *Neyi ikiyle çarpmış?*

D_3 : *Birinci şekilde beş tane vardı, ikiyle çarpmış on, buradan da bir tane çıkartmış* (2x nin yanına 2x1- yazdı) *sonra, burda dokuz tane vardı* (ikinci adımı gösterdi) *bu dokuzu ikiyle çarpmış* (durdu, üçüncü adımdaki daireleri saydı) *sonrada üç çıkarmış.*

G : *Burda ne yaptın anlatır mısın?*

D_3 : *Şimdi burda ikinci şekilde toplam iki, dört, altı, sekiz, dokuz tane vardı ikiyle çarptık onsekiz oluyor, onsekizdi burda onbeş tane var, onüç tane var, üç, altı, dokuz, oniki, onüç tane var* (üçüncü adımdaki daireleri saydı) *burda da dokuz tane vardı, ikiyle çarptık dokuzu onsekiz etti, onsekizden onüç çıktı, onüç tane vardı burda üçüncü şekilde 18 den 13 çıkınca da beş çıkartcaz* (2x3- sildi ve 2x5- yazdı) *beş çıkartcaz.*



D_3'ün kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimde ifade edilmiştir.

f(1)=5

f(2)=2.f(1)-1=2.5-**1**=9

f(3)= 2.f(2)-5=2.9-**5**=13

Öğrencinin yaklaşımı dikkate alınarak, araştırmacı tarafından genel formu, f(n)=2f(n-1)-(f(n-1)-a) olarak belirlenen bu strateji yeniden düzenlendiğinde, farklılığı arama stratejisinin genel formu olan, f(n)=f(n-1)+a biçimini almaktadır.

"Bağıntı arama" stratejisini kullanan öğrencilerden O_2 ve D_1'de ifade ettikleri terimler arası bağıntının, örüntünün her bir teriminin oluşturulmasında çalışmadığını görmüşler ve bu kuralın işlemediğini ifade etmişlerdir. Örneğin O_2;

G *: Bu arada düşündüklerini yüksek sesle anlatır mısın?*

O_2 *: Ben ee… şimdi kat olarak düşünüyorum, katlarına bakıyorum uygun bir kural var mı diye.*

G *: Nasıl yani katlarına?*

O_2 *: Mesela beşin iki katı on, bir eksiği dokuz, dokuzun iki katı on sekiz, ama burada olmuyor, bir eksiği olacağı için* (şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürdü ve sayılar arasında bir kural aradı).

Şekil 22'de görüldüğü gibi, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** kapsamında ise, "bağıntı arama", "fonksiyonel bir ilişki bulma" ve "çarpım tablosu arama" şeklinde toplam üç strateji kullanılmıştır. "Bağıntı arama" stratejisini kullanan yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci (Y_2), bu stratejiyi toplam daire sayısını adım sayısı ile ilişkilendirerek kullanmıştır. Bu bağlamda, öğrenci adım sayısının beş katını alarak, her adımda yer alan toplam daire sayısını elde etmek istemiş, ancak birinci adımdan sonra bu kuralın işlemediğini fark etmiştir. Öğrenci bu durumu günlüğüne yazarken, farklı bir kural fark etmiş ve bunu *"....Şimdi başka bir kural daha buldum. Adım sayısını beşle çarpıyoruz. Sonraki adımlarda adım sayısıyla beşi çarpıp sırayla bir, iki, üçü çıkarıyoruz" (22.03.2007)* şeklinde ifade etmiştir. Y_2'nin kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimde ifade edilmiştir.

f(1)= 5.1=5
f(2)=f(1).2-1=5.2-1=9
f(3)=f(1).3-2=5.3-2=13
f(4)=f(1).4-3=5.4-3=17

Öğrencinin bu yaklaşımı, birinci terimin cinsinden, f(n)=n.f(1)-(n-1)=(f(1)-1).n+1 olarak genellenen lineer bir ilişkidir.

Üç yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, O_1, O_2, O_3, D_1, D_4) ise, "fonksiyonel bir ilişki" bulmuşlardır. Bu bağlamda öğrenciler, adım sayısı ile her adımda yer alan toplam daire sayılarını ilişkilendirerek örüntünün genel kuralını, "*adım sayısının dört katının bir fazlası*" olarak ifade etmişlerdir. Ancak bu öğrencilerden bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_2, O_2, D_1), örüntünün genel kuralını örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken bulmuşlardır. Örneğin;

…

Y_2 : *Dörtle çarptım, siyahları gördüm siyahlar her zaman bir olduğu için de her zaman siyahlar içinde bir ekleriz diye düşündüm* (siyahların her adımda bir tane olduğunu düşünerek elde ettiği toplama bir ekledi).

G : *Peki onu hemen nasıl fark ettin dört ile çarpmayı, ne seni dörtle çarpmaya yöneltti?*

Y_2 : *Dört tane bulunduğu için beyazlar* (birinci adımda yer alan dört tane beyaz daireyi gösterdi) *siyahlar hiç artmıyor, ama beyazlar her zaman arttığı için o yüzden. Yani bu beyaz daireler her zaman bir artıyor uçlarında ve de beyaz daireleri bulmak için dörtle çarpıyoruz bunları* (her adım sayısının altına dört yazdı) *dört kere bir dört bir tane de siyah oluyor, dört kere iki sekiz, sekiz tane beyaz var bir de ortada siyah var. dört kere üç oniki, oniki tane beyaz var, bir tane de siyah var.*

G : *Peki*

G : *Örüntünün her bir adımındaki şekillerin oluşumunda yer alan, siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısını veren bir kural ifade edebilir misin?*

Y_2 : (uzun bir süre düşündü)

G : *Peki dördüncü adımda toplam daire sayısını bulmak için ne yaptın?*

Y_2 : *Dört kere dört onaltı bir de ekledim on yedi*

G : *Buradaki dört ne?*

Y_2 : *Adım sayısı*

G : *O zaman kural için ne söyleyebilirsin?*

Y_2 : *Adım sayısı ile dördü çarpıyoruz ve çıkan sonuca bir ekliyoruz.*

4 × 4 = 16 + 1 = 17

"Fonksiyonel bir ilişki" bulan O_2 bu ilişkiye ulaşırken, öncelikle şeklin yapısının daha sonra ise, adım sayısının etkili olduğunu günlüğünde *"...şekillerin oluşumu ve adım sayıları benim kuralı bulmama çok yardımcı oldu. Adım sayılarının dört katının bir fazlası olarak kuralı buldum. Ama şekillerden de yararlanarak kurallar buldum" (22.03.2007)* şeklinde ifade etmiştir.

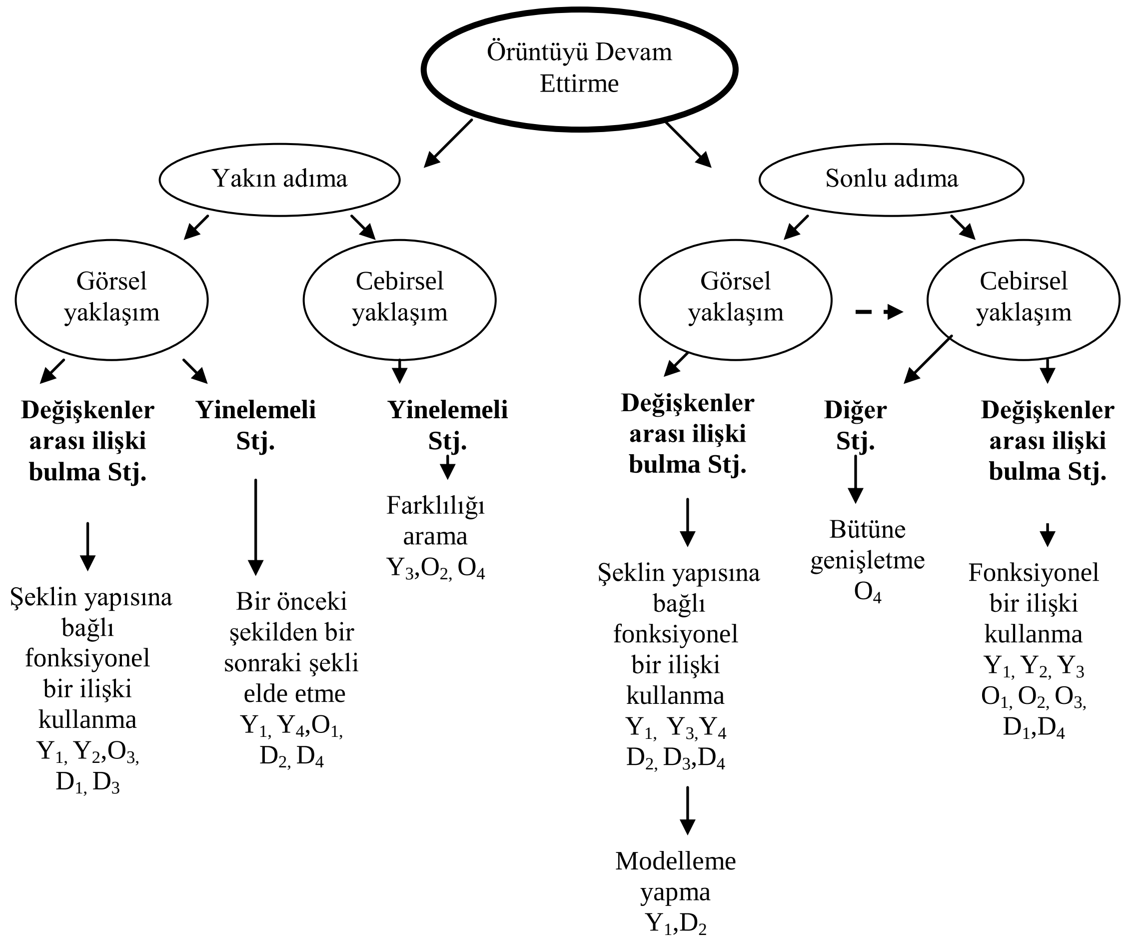
Bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_1, O_2, D_4) ise, "çarpım tablosu arama" stratejisini kullanmışlardır. Öğrenciler burada beyaz daire sayılarını bir terimin katları ile ilişkilendirmişlerdir. Örneğin Y_1, her adımda siyah daireden geçen düşey ve yatay beyaz dairelerin sayısının ikinin katları, O_2 ve D_4 ise, her adımda siyah daire etrafında yer alan toplam beyaz daire sayılarının dördün katları olduğunu ifade etmişlerdir. Örneğin O_2, *"....mesela burda dört burda iki katı sekiz, dördün üç katı on iki yani dördün katları olarak gitmiş..."* şeklinde ifade etmiştir.

Elde edilen bulgular sonucunda, katılımcı öğrenciler sabit değişen bir şekil örüntüsünde kuralı bulurken, "görsel" ve "cebirsel" olmak üzere iki yaklaşım benimsemişlerdir. Öğrencilerin ikisi sadece görsel yaklaşımı benimserken, diğer on öğrenci hem görsel hem de cebirsel yaklaşımı benimsemişler ve bu yaklaşımlar altında da, **yinelemeli stratejiler** ve **değişkenler arası ilişki bulma stratejisine** odaklanmışlardır. Görsel yaklaşımı benimseyen dört yüksek, üç orta ve dört düşük başarı düzeyine sahip on bir öğrenci; şeklin yapısına bağlı olarak, hem her yeni şekil için bir önceki şekle eklenen beyaz daire sayısını ifade ederek **yinelemeli stratejilere**, hem de üç yüksek, bir orta ve dört düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci, her şekilde yer alan beyaz daire sayılarını adım sayıları ile ilişkilendirerek **değişkenler arası ilişki bulma stratejisine** odaklanmışlar ve böylece fonksiyonel ilişkiye ulaşmışlardır. Cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler ise, öncelikle verilen şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşlerdir. Daha sonra görsel yaklaşımda olduğu gibi, iki yüksek, dört orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci, hem "farklılığı arama", bir orta, iki düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci "bağıntı arama" gibi bir sonraki terimi elde etmek için bir önceki terimin kullanılmasını içeren stratejileri kullanarak **yinelemeli stratejilere**, hem de üç yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci "fonksiyonel bir ilişki bulma", bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci “çarpım tablosu arama”, yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci ise “bağıntı arama” gibi adım sayısını terim sayısı ile ilişkilendirerek **değişkenler arası ilişki bulma stratejisine** odaklanmışlardır. Üç yüksek ve iki düşük başarı düzeyine sahip toplam beş öğrenci, hem görsel hem de cebirsel yaklaşımda fonksiyonel ilişkiyi bulabilmiştir. Sonuç olarak, öğrencilere sunulan diğer sabit değişen şekil örüntüsüne nazaran, bu verilen şekil örüntüsünde daha fazla sayıda öğrencinin fonksiyonel ilişkiye ulaşması, şeklin yapısının fonksiyonel ilişkiyi bulmada etkili olduğu söylenebilir. Diğer taraftan kullanılan her stratejide çoğunluğunda yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrenciler yer almaktadır. Bu durum ise, sabit değişen şekil örüntüsünde kuralı bulurken strateji seçiminde başarı düzeyinin etkisi olmadığının bir göstergesi olabilir.

3.2.4.2. Örüntüyü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirme

Sabit değişen şekil örüntüsünde, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 23’de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.

Katılımcı öğrencilerinden, sabit değişen şekil örüntüsünü yakın bir adıma devam ettirme kapsamında, verilen örüntünün dördüncü adımında yer alan toplam beyaz ve siyah daire sayıları istenmiştir. Şekil 23’te görüldüğü gibi öğrenciler, örüntüyü bir adım (yakın) devam ettirirken, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt temasında olduğu gibi, “görsel” ve “cebirsel” yaklaşımı benimsemişler ve bu yaklaşımlar altında **yinelemeli** ve **değişenler arası ilişki bulma stratejisi** olmak üzere, iki başlık altında yer alan stratejiler kullanmışlardır. Ancak kimi öğrenciler sadece görsel yaklaşımı kimi öğrenciler ise, sadece cebirsel yaklaşımı benimsemişlerdir.



Şekil 23: Sabit Değişen Şekil Örüntüsünü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirmede Kullanılan Stratejiler

Cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden bir yüksek ve iki orta başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_3, O_2, O_4) **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini kullanarak, dördüncü adımda yer alan şeklin toplam daire sayısını belirlemişlerdir. Örneğin;

G ***:*** *Peki şekiller böyle devam ederse, dördüncü şekli oluşturmak için siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

O_2 ***:*** (Düşündü) *onyedi*

G ***:*** *Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

O_2 ***:****Toplam boncuk sayıları hep dört dört artığı için on üçün üzerine dört ekledim onyedi.*

G ***:*** *Onyedi buldun, peki.*

Görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden iki yüksek, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip beş öğrenci (Y_1, Y_4, O_1, D_2, D_4) ise, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanmışlardır. Örneğin;

G *: Dördüncü şekli oluşturmak için siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

D_2 *: Çizip mi?*

G *: Çizmeden*

D_2 *: Dört, sekiz, on iki, on altı, on yedi* (üçüncü şekil üzerinden siyah daire etrafında yer alan beyaz daireleri dörder dörder saydı ve bir ekledi*) Birer artırdım buraları* (daha önce her adımda beyaz dairelerin her bir yanda birer birer artığını söylemişti buna göre dördüncü adımda siyah daire etrafında dörder beyaz daire olduğunu söyledi ve dörder dörder saydı ve bir ekledi).

G *: Burda kaç tane oldu?*

D_2 *: Dört, dört, dört, dört on altı bir tane de ortada var on yedi.*

G *: Dörder dörder sayarak buldun beyazları*

D_2 *: Bir tane de artırcaktık*

İki yüksek, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip beş öğrenci (Y_1, Y_2, O_3, D_1, D_3) ise, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanarak adım sayısı ve her adımda yer alan beyaz daire sayılarını ilişkilendirmişler ve dördüncü adımda yer alan toplam daire sayısına ulaşmışlardır. Örneğin;

G *: Şekiller böyle devam ederse, dördüncü şekli oluşturmak için siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

Y_1 *: Dördüncü şekilde dört kere dört onaltıı ... on yedi.*

G *: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

Y_1 *: ... dört kere dört, dört tane olduğu için on altı bir de ekledim on yedi* (dördüncü adımda siyah dairelerin etrafında dörder tane beyaz top olduğundan dört ile dördü çarptı ve bir tane siyah daireyi ekledi toplam 17 daire olduğunu buldu)*...adım sayısıyla bunlar aynı* (her şekildeki adım sayıları ile beyaz daireleri gösterdi ve adım sayıları ile siyah dairelerin her bir yanında olan beyaz daire sayılarının aynı olduğunu söyledi).

G *: Peki çok güzel.*

Katılımcı öğrencilerinden, sabit değişen bir şekil örüntüsünde, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında, 50. (sonlu) adımda yer alan toplam daire sayısının ne olacağını bulmaları istenmiştir. Şekil 23’te görüldüğü gibi öğrenciler, 50. adımdaki toplam daire sayısını belirlerken, yakın adımda olduğu gibi, “görsel” ve “cebirsel” yaklaşımı benimsemişlerdir.

Görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden üç yüksek, üç düşük başarı düzeyine sahip altı öğrenci (Y_1, Y_3, Y_4, D_2, D_3, D_4) **değişkenler arası ilişki bulma** stratejisi içinde yer alan “şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi” ve bunun yanı sıra bu öğrencilerden Y_1 ve D_2 ise, şekil kullanarak “modelleme” aracılığıyla sonuca ulaşmıştır. Örneğin;

G : *Örüntüde 50. adımda yer alacak siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

Y_1 : *50….50. adım beyaz toplar* (50. adım diye yazdı ve bir daire çizdi içine B yazdı beyaz topları temsil edecek şekilde) *50 tane* (beyaz topun yanına 50 yazdı*) siyah toplar bir tane* (bir daire çizdi içine S yazdı ve yanına 1koydu) *beyaz top yine aynı olduğu için* (siyah topun soluna tekrar beyaz top çizdi ve yanına 50 yazdı, siyah topun üstüne beyaz top çizdi yanına 50 yazdı, siyah topun sağına beyaz top çizdi ve yanına 50 yazdı) *böyle bu ellinci.*

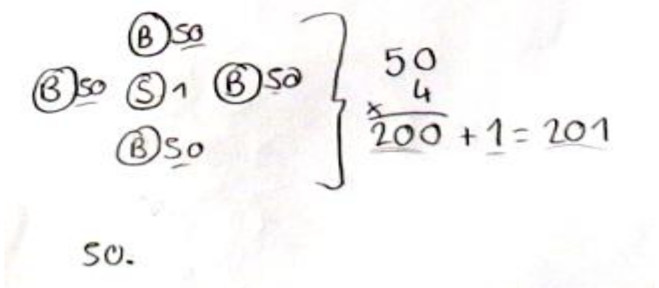
G : *Toplam daire sayısı nedir?*

Y_1 :*Toplam sayı* (50 ile dördü çarptı 200 buldu sonra bir ekledi ve 201 buldu).

G : *Nasıl yaptığını açıklar mısın?*

Y_1 : *Adım sayısı ile beyaz topların sayısı aynı olduğu için yani ee ... 50 oluyor beyaz topların sayısı, hepsine 50 yazdık, beyaz toplar sağda, solda, önde, arkada olmak üzere yani dört tane ee hepsinin sayısı birbirine eşit 50, dört tane olduğu için kısa yoldan 50 ile 4 ü çarptım, 50 ile 50.. toplamak uzun oluyor, yani 50 ile 4 ü çarptım 200 çıktı, bir de siyah topumuz vardı ekledim 201 sonuç.*

G : *Çok güzel*



Şekil 23'te görüldüğü gibi, "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanan öğrencilerden Y_1 ve D_3'ün dışında diğer öğrenciler, dördüncü adımda toplam daire sayısını bulurken yinelemeli stratejiler içinde yer alan stratejileri kullanmışlardır. Buradan öğrencilerin örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken yinelemeli stratejiler içinde yer alan stratejilere, sonlu bir adıma devama ettirirken ise, değişkenler arası ilişki bulma stratejisine odaklandıkları söylenebilir.

Cebirsel yaklaşım kapsamında ise, üç yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, O_1, O_2, O_3, D_1, D_4) 50. adımdaki toplam daire sayısını bulurken "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanmışlardır. Bu öğrenciler örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması kapsamında da, aynı stratejiyi kullanan öğrencilerdir. Örneğin;

G : *Örüntüde 50. adımda yer alacak siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

O_1 : *50. adımdaki…*

G : *Evet*

O_1 : *Bir dakka şimdi 4 ile çarpsam 4 kere 5, 20, 200, 201.*

G : *Nasıl yaptın? Önce neden 50 yi 4 ile çarptın?*

O_1 : *Çünkü adım sayısının 4 katının 1 fazlası ee ... toplam çemberleri oluşturuyor, onun için 50'yi 4 ile çarptım 200, 200 e 1 ekledim 201 oldu.*

G : *Peki teşekkür ederim.*

Verilen bu şekil örüntüsünün yapısı öğrencilerin kuralı bulmalarını ve özellikle örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmelerini kolaylaştırmıştır. Kimi öğrenciler bu durumu günlüklerinde de dile getirmişlerdir. Örneğin D_1 günlüğünde *"Bugün bana örüntü daha basit geldi. Çok kolay bir şekilde buldum. Bulmaya çalışırken ve çözerken çok eğlendim. Bu şekil öbür şekillerden kendisini ortaya koyuyordu. Bu yüzden kolay geldi. Öğretmenimin sorduğu sorular da basit ve eğlenceliydi. Kuralda adım sayısı çarpı dört ve bir eklemekti. Bunu da bence herkes yapabilir" (04.04.2007)* şeklinde açıklamıştır. Y_1 ise günlüğünde, *"Bugünkü örüntü şekillerle ilgiliydi. Kuralı ilk görüşte buldum. Kural siyah topların artmadan ve eksilmede bir tane olup ilerlemesi beyaz topların ise üstten alttan sağdan soldan birer birer artması. Beyaz topların sayısı adım sayısıyla aynıdır. Ben bu örüntüde dördüncü ve 50. adımı buldum. Bu örüntüyü sayılarla ilişkilendirirsek aralarında dört fark olur. Bu örüntüde hiç zorlanmadım. Rahatlıkla* *çözdüm" (04.04.2007)* şeklinde verilen şekil örüntüsünde zorlanmadığını ifade etmiştir. Benzer şekilde D_3'de bu şekil örüntüsünü kolay bulduğunu şu şekilde günlüğüne yazmıştır. *"Bugünkü sorular bana çok kolay geldi. Önceki örüntü sorularında 60. şekli sormuştu. 60. şekli bulurken zorlanmıştım. Ama 60. şekli zor bulmamın sebebi şekillerdi galiba. Şimdi ki örüntüde olan şekiller çok kolaydı. Onun için bugün 50. şekli bulurken hiç zorlanmadım. Zaten 50. şekildeki örüntüde her bir kenarında 50 daire vardı. Ortasında da bir tane siyah daire vardı. Bütün daireleri topladığımda 201 sayısını buldum" (04.04.2007).*

Orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_4), **diğer stratejiler** içinde yer alan "bütüne genişletme" stratejisini kullanarak hatalı bir sonuca ulaşmıştır. Örneğin;

G : *Örüntüde 50. adımda yer alacak siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

O_4 : *Evet.*

G : *Bul bakalım.*

O_4 : *Önce 5 i bulalım. 5, 21 olur* (beşinci adımda 21 tane daire olduğunu söyledi, sonra 21 ile onu çarptı 210 buldu) *210.*

G : *210. Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

O_4 : *5. şekli buldum,*

G : *5. şekilde neyi buldun?*

O_4 : *5. şekildeki daireleri buldum.*

G : *Ne bulmuştun?*

O_4 : *21*

G : *21'i nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

O_4 : *Yine dörder dörder fazlalaştırdım* (dördüncü adımdaki toplam daire sayısına dört eklediğini söyledi, ancak zihinden topladı ve işlem hatası yaptı 22 olması gerekirken 21 buldu).

G : *Sonra?*

O_4 : *10 ile çarptım 210*

G : *Neden 10 ile çarptın?*

O_4 : *5 i 10 ile çarptım 50, 21 i de 10 ile çarparım.*

G : *Peki teşekkür ederim.*

O_4'ün kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıdaki şekilde ifade edilmiştir.

n=5 için f(5)=21 ise,

n=5.10=50 için f(50)=10.f(5)

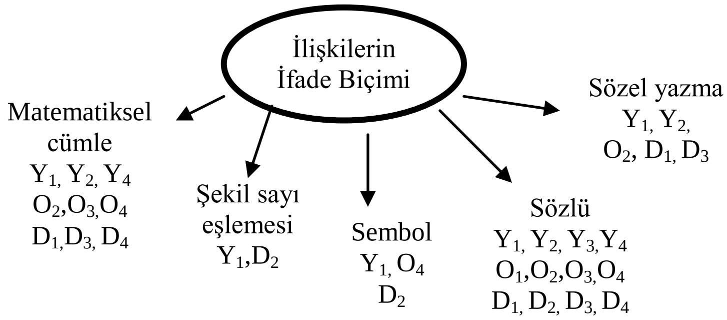
= 10.21

= 210

Elde edilen bulgular sonucunda, katılımcı öğrenciler sabit değişen bir şekil örüntüsünü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt temasında ifade ettikleri stratejileri de dikkate alarak, "görsel" ve "cebirsel" yaklaşımı benimsemişlerdir. Örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken, görsel yaklaşımda öğrenciler **yinelemeli stratejilere** ve **değişkenler arası ilişki bulma stratejisine** cebirsel yaklaşımda ise, sadece **yinelemeli stratejilere** odaklanmışlardır. Ayrıca örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerin sayısı daha fazladır. Görsel yaklaşımda iki yüksek, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip beş öğrenci yinelemeli stratejiler içinde yer alan, "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini ve üç yüksek, iki düşük başarı düzeyine sahip beş öğrenci değişkenler arası ilişki bulma stratejisi içinde yer alan, "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanarak, cebirsel yaklaşımda ise, bir yüksek, iki orta başarı düzeyine sahip üç öğrenci sadece yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini kullanarak dördüncü adımdaki şekil sayısını elde etmişlerdir. Örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında ise, "görsel" yaklaşımda üç yüksek, üç düşük başarı düzeyine sahip altı öğrenci ve "cebirsel" yaklaşımda üç yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci değişkenler arası ilişki bulma stratejisi içinde yer alan "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanarak, 50. adımdaki şekil sayısına ulaşmışlardır. Görüldüğü üzere sonlu adımdaki şekil sayısına, cebirsel yaklaşımı kullanarak, ulaşanların sayısı, görsel yaklaşımı kullananlardan daha fazladır. Ayrıca cebirsel yaklaşımda bir öğrenci tarafından "bütüne genişletme" stratejisi kullanılarak hatalı bir sonuca ulaşılmıştır. Sonuç olarak, öğrencilerin çoğunluğu örüntüyü yakın bir adıma devem ettirirken yinelemeli stratejilere, sonlu bir adıma devam ettirirken ise, değişkenler arası ilişki bulma stratejisine odaklanmışlardır. Diğer taraftan yinelemeli ya da değişkenler arası ilişki bulma stratejileri kapsamında yer alan stratejilere bakıldığında, çoğunlukla her stratejide yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin olması, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken, strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığını bir kez daha göstermiştir.

3.2.4.3. İlişkilerin İfade Biçimleri

Sabit değişen şekil örüntüsünde, ilişkilerin ifade biçimleri alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 24'te verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



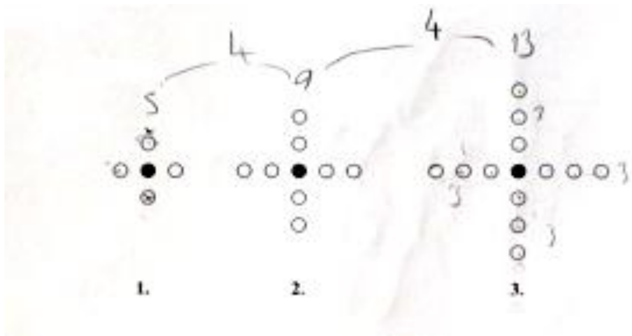
Şekil 24: Sabit Değişen Şekil Örüntüsünde Kullanılan İfade Biçimleri

Katılımcı öğrencilerin, sabit değişen bir şekil örüntüsünü inceleme ve kuralı bulmada, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede, nasıl bir ifade biçimi kullandıkları belirlenmek istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 24'te görüldüğü gibi, "sözlü", "matematiksel cümle", "sembol", "şekil sayı eşlemesi" ve "sözel yazma" olmak üzere beş ifade biçimi kullanılmıştır. Tüm öğrenciler her aşamada belirledikleri tüm ilişkileri öncelikle "sözlü" olarak ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra, üç yüksek, üç orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip dokuz öğrenci (Y_1, Y_2, Y_4, O_2, O_3, O_4, D_1, D_3, D_4), yakın ve sonlu adımdaki toplam daire sayısını "matematiksel cümle" ile ifade etmiştir. Bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_1, O_4, D_2), şekil sayıları arasındaki farkı "sembol" kullanarak, bir yüksek ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_1, D_2) ise, 50. adımdaki toplam daire sayısını belirlerken "şekil sayı eşlemesi" yapmışlardır. İki yüksek, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip beş öğrenci de (Y_1, Y_2, O_2, D_1, D_3), örüntünün genel kuralını, günlüklerinde yazılı olarak dile getirmişlerdir. Aşağıda her bir ifade biçimine birer örnek sunulmuştur. Örneğin;

Matematiksel cümle (D_1);

$$\begin{array}{r} 50 \\ \times \quad 4 \\ \hline 200 \end{array} + 1 = 201$$

Sembol (Y_1);



Şekil sayı eşlemesi (D_2);

Sözel-Sembol;

Y_2 ***: (04.04.2007 tarihli günlük)***

Bu günkü örüntüde kolaydı. Bu sefer şekil örüntüsüydü. Beyaz daire ve siyah daire vardı. Ama siyah dairele hiç armıyordu. Oysaki beyaz daireler hep artıyordu. Ve kural adım sayılarını 4 le çarpıp 1 ekleyince toplam daire sayısını bulurum.

Elde edilen bulgular sonucunda, sabit değişen sayı örüntüsünde; örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ile sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturmada en fazla kullanılan ifade biçiminin “sözlü ifade” ile “matematiksel cümle” olduğu görülmüştür.

3.3. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Artarak Değişen Sayı ve Şekil Örüntülerini Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Bulgular

Araştırmanın üçüncü amaç maddesi ile, ilköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin artarak değişen sayı ve şekil örüntülerinde;

- örüntünün kuralını nasıl buldukları
- örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma nasıl devam ettirdikleri
- istenen bir örüntüyü nasıl oluşturdukları
- bir örüntüdeki ilişkileri nasıl ifade (yazılı ya da sözel ifade, sayısal ifade, sembol, şekil, tablo, grafik vb.) ettikleri

saptanmak istenmiştir. Bu amaçla, artarak değişen sayı örüntüsü, sayı dizisi ve fonksiyon tablosu kullanılarak iki farklı formda, artarak değişen şekil örüntüsü ise, iki farklı şekil örüntüsü olarak öğrencilere yöneltilmiştir. Artarak değişen sayı ve şekil örüntülerine ilişkin elde edilen veriler;

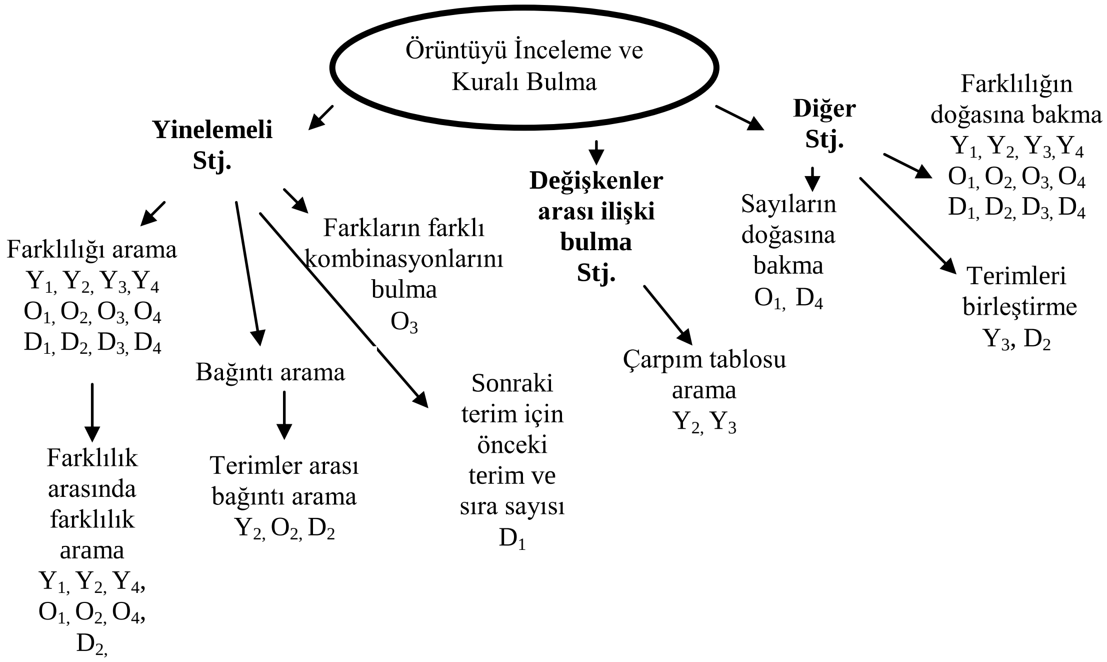
- Örüntüyü inceleme ve kuralı bulma
- Örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme
- Örüntü oluşturma
- İlişkilerin ifade biçimleri

şeklinde dört alt tema altında analiz edilmiştir. Birinci şekil örüntüsünde öğrencilerden artarak değişen bir şekil örüntüsü oluşturmaları istendiğinden, ikinci şekil örüntüsü için de aynı sorunun öğrencilere yöneltilmesine gerek görülmemiş, bu nedenle ikinci şekil örüntüsü, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve ilişkilerin ifade biçimleri şeklinde üç alt tema altında analiz edilmiştir.

3.3.1. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Sayı Dizisi Biçiminde Verilen Artarak Değişen Sayı Örüntüsünü Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Bulgular

3.3.1.1.Örüntüyü İnceleme ve Kuralı Bulma

Sayı dizisi biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde (EK-4, soru 3), örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 25'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 25: Sayı Dizisi Biçiminde Verilen Artarak Değişen Sayı Örüntüsünü İnceleme ve Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

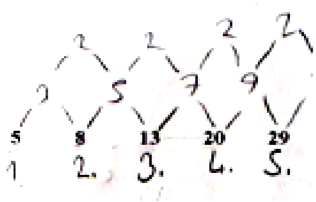
Katılımcı öğrencilerden yukarıda gösterilen sayı dizisi biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde kuralı bulmaları istenmiştir. Şekil 25'te görüldüğü gibi, öğrenciler **yinelemeli stratejiler**, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** ve **diğer stratejiler** olmak üzere, üç başlık altında yer alan toplam dokuz strateji kullanmışlardır.

Yinelemeli stratejiler içinde yer alan; “farklılığı arama”, “farklılık arasında farklılık arama”, “bağıntı arama”, “farkın farklı kombinasyonlarını bulma” ve “bir önceki terim ve adım sayısından bir sonraki terimi elde etme” şeklinde beş strateji kullanılmıştır. Bu stratejilerden “farklılığı arama”, tüm öğrencilerin öncelikli olarak odaklandığı stratejidir. Örneğin O_2, ilk olarak farklılığı arama stratejisine odaklandığını günlüğünde *“...İlk bakışta aradaki farkı buldum” (22.03.2007)* şeklinde ifade etmiştir.

Terimler arası farkları bulan tüm öğrencilerden, üç yüksek, üç orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrenci (Y_1, Y_2, Y_4, O_1, O_2, O_4, D_2) “farklılık arasında farklılık arama” stratejisini de kullanmışlardır. Örneğin;

G *: Örüntünün oluşumunda sayılarla ilgili neler düşündüğünü ifade eder misin?*

Y_1 *: Üç fark var* (Öncelikle sayılar arasındaki farkları buldu)… *Başka bir kuralda buldum aralarındaki farklar ikişer ikişer artıyor. Farklar arasında iki fark var. Yani ikişer ikişer artıyor farklar da.*



Y_1’in kullandığı her iki strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

f(1)=5

f(2)-f(1)=8-5=3=g(1)

f(3)-f(2)=13-8=5=g(2)

f(4)-f(3)= 20-13=7=g(3)

f(5)-f(4)= 29-20=9=g(4)

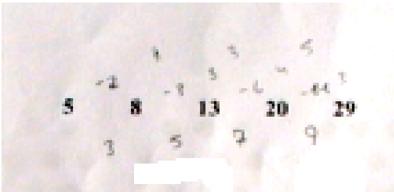
Öğrencinin kullandığı bu stratejisi;

n. adım için, f(n)-f(n-1)=g(n-1) ve (n+1). adım için düşünüldüğünde, g(n)=f(n+1)-f(n) şeklinde modellenebilir. Öğrencinin ayrıca kullandığı farklılık arasında farklılığı arama stratejisinin genel formu da; a terimler arası sabit fark olmak üzere; g(n)-g(n-1)=a şeklinde modellenmiştir.

Bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_2, O_2, D_2) ise, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "bağıntı arama" stratejisini kullanmıştır. Öğrenciler bağıntıyı bir sonraki terim ile bir önceki terim arasında oluşturmuşlardır. Örneğin;

O_2 : *(sayılar arasına -2, -3, -6, -11 şeklinde farklar yazdı).*

G : *Ne yaptığını anlatır mısın?*



O_2 : *Şimdi ben şöyle belki olabilir diye düşündüm. İki katının ne kadar eksiği veya ne kadar fazlası diye düşündüm ama.*

G : *Ne oldu? Neler buldun?*

O_2 : *Ee… şimdi beşin iki katı on ee… ondan sekiz çıkardığımızda iki. Sekizin iki katı onaltı ee… onaltıdan onüçü çıkardığımızda üç. Onüçün iki katı yirmialtı, altı eksiği, yirminin iki katı kırk. Kırktan yirmidokuzu çıkardım onbir. Bu sayılar arasında da (düşündü) bir* (tekrar düşündü) *bir de şimdi bu 2, 3, 6, 11' lerin arasında da hep bir, üç, beş bir de bu şekilde var. Bunlarda (bir, üç, beş) tek sayı.*

O_2'nin kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

f(1)=5

f(2)=2.f(1)-g(1)=2.5-**2**=8

f(3)= 2.f(2)-g(2)=2.8-**3**=13

f(4)= 2.f(3)-g(3)=2.13-**6**=20

f(5)= 2.f(4)-g(4)=2.20-**11**=29

Öğrencinin yaklaşımı dikkate alındığında, örüntünün ardışık terimlerinin oluşumunda yer alan 2, 3, 6 ve 11 terimleri arasında g(n)=n(n-2)+3 şeklinde bir bağıntı bulunmaktadır. Öğrenci terimler arası kurduğu bağıntıyı dolaylı olarak, bu bağıntı ile desteklemiştir. Buradan öğrencinin kullandığı bu stratejinin genel formu araştırmacı tarafından g(n)=n(n-2)+3 olmak üzere, f(n)=2f(n-1)-g(n-1) olarak modellenmiştir.

"Bağıntı arama" stratejisini kullanan öğrencilerden Y_2 ve D_2'de örüntünün ardışık terimlerinin oluşumunda yer alan 2, 3, 6 ve 11 terimlerinin ardışık olarak gitmediğini düşünmüşler ve böylece bu kuralın işlemediğini ifade etmişlerdir.

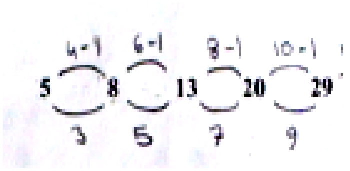
Araştırmacı, bu stratejiye ilişkin düşüncelerini 22.03.2007 tarihli günlüğüne aşağıdaki biçimiyle yansıtmıştır:

> *...öğrenciler, sabit değişen sayı örüntüsünde olduğu gibi, bu örüntüde de, bir önceki terimin iki katını alıp, bir sayı ekleyerek ya da çıkararak ikinci terimi, daha sonra ikinci terimin iki katını alıp, yine bir sayı ekleyerek ya da çıkararak bir sonraki terimi elde etmeye çalıştılar. Öğrenciler daha önce 5, 9, 13, 17, 21 şekilde sabit değişen sayı örüntüsünde bu stratejiyi uygulamışlar ve bir önceki terimin iki katını aldıktan sonra, sırayla çıkardığı sayılar arasında da bir ilişki bulmuşlardı. Bu örüntüde ise, kimi öğrenciler benzer şekilde düşündüler ancak bir önceki terimin iki katını aldıktan sonra çıkardığı sayılar arasında benzer şekilde bir ilişki bulamadılar (G; 22.03.2007).*

Yinelemeli stratejiler içinde orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_3), araştırmacı tarafından **"farkların farklı kombinasyonlarını bulma"** adı verilen stratejiyi kullanmıştır. Sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde de kullanılan bu strateji; artarak değişen sayı örüntüsünde terimler arası farkların parçalanmasıdır. Örneğin bu stratejiyi kullanan O_3, örüntünün birinci terimini önce dört ile topladıktan sonra bir çıkarıp, ikinci terimi, ikinci terimi altı ile topladıktan sonra bir çıkarıp, üçüncü terimi, üçüncü terimi sekiz ile topladıktan sonra bir çıkarıp, dördüncü terimi ve dördüncü terimi on ile topladıktan sonra bir çıkarıp beşinci terimi elde etmiştir. Örneğin;

…

O_3 *:Dört artırmış bir çıkarmış, altı artırmış bir çıkarmış… Burda beşle dördü topladım bir çıkardım, sekizle altıyı topladım bir çıkardım öyle gidiyor.*



Düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_1), **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, **"sonraki terim için, önceki terim ve sıra sayısı"** stratejisini kullanmıştır. Daha önce sabit değişen sayı örüntüsünde de benzer bir yaklaşım sergileyen D_1, bir önceki terim ve sıra (adım) sayısından yararlanarak terimler arasında bir ilişki kurma çalışması sergilemiştir. Örneğin;

...

D_1 : *Beş bir daha altı artı iki daha sekiz, sekiz artı iki artı üç onüç, onüç üç daha onaltı, onaltı artı dört yirmi… yirmi dört beş daha yirmidokuz.*

G : *İşlemleri kağıt üzerinde de yapabilirsin.*

D_1 : (29 ile 5 i topladı) *Otuzdört. Otuzdört altı daha kırk ediyor. Böyle*. (29 ile 4 ü toplamadan evvel 29 un yanına +6 yazdı. Çünkü verilen sayıları adım sayılarıyla topladıktan sonra sırasıyla 2, 3, 4, 5 eklendiğini bu nedenle eklenecek sayının 6 olduğunu düşünüp 6 yazdı. Sonra (29 +4)=34 +6 = 40 buldu).

...

G : *Yani hep böyle gidecek mi sence?*

D_1 : *Gidebilirse belki gider buraya kadar geldiyse böyle. Iıı buradakiler 2, 3, 4, 5, 6 bunlarda zaten basamak sayıları kendileri. Bunlar zaten bir eksik, ikiyse bu bir eksik, üçse bu iki, dörtse bu üç basamak sayılarının bir fazlası. Öyle topluyorum ikisini de* (adım sayıları ile eklenen sayılar arasında da bir ilişki kurdu. Eklenen sayıların adım sayılarının bir fazlası olduğunu ifade etti).

Öğrencinin kullandığı strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

f(1)=5

f(2)=f(1)+1+2

f(3)=f(2)+2+3

f(4)=f(3)+3+4

f(5)=f(4)+4+5

$f(6)=f(5)+5+6$

Öğrencinin bu stratejisi n. adımda düşünüldüğünde, $f(n)=f(n-1)+n-1+n$ şeklinde modellenebilir. D_1, bulduğu bu kurala göre, terimleri karşılık geldiği adım sayıları ile topladıktan sonra bu toplama eklediği sayıların 2, 3, 4, 5 ve 6 şeklinde devam ettiğini fark etmiştir. D_1, ayrıca bir önceki terime eklenen sayıları adım sayıları ile de ilişkilendirmiştir.

Artarak değişen sayı örüntüsünde, örüntüyü inceleme ve kuralı bulmaya ilişkin, **değişkenler arası ilişki bulma strateji** kapsamında ise, Şekil 25'te görüldüğü gibi, iki yüksek başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_2, Y_3), terimler arasındaki farklar arasında "çarpım tablosu arama" stratejisini kullanmışlardır. Öğrenciler verilen örüntünün terimleri arası buldukları farkları, ikinin katları ile ilişkilendirmişlerdir. Örneğin;

…

Y_2 ***:*** *Birde şöyle var. İkiyi ikiyle çarparsak dört ediyor. Bir çıkartırsak üç ediyor. İkiyi üçle çarparsak altı ediyor, bir çıkartırsak beş ediyor* (3, 5, 7, 9 bu farklar arasında (2.2)-1=3, (2.3)-1=5, (2.4)-1=7, (2.5)-1=9 kuralını buldu).

G ***:*** *Sonra?*

Y_2 ***:*** *İkiyi dörtle çarparsak sekiz ediyor bir eksiği yedi yapıyor. İkiyi beşle çarpıp bir çıkartırsak ta dokuz yapıyor. İkiyi altıyla çarparsak bir çıkartırsak onbir yapıyor.*

Sayı dizisi biçiminde verilen artarak değişen bir sayı örüntüsünde, terimler arası farklar, sabit değişen bir sayı örüntüsüdür. Katılımcı öğrenciler, daha önce sabit değişen sayı örüntüsünün genel kuralını elde edemezken, verilen bu örüntüde buldukları terimler arası farkları diğer bir değişle, elde ettikleri sabit değişen sayı örüntüsünün terimlerini, ikinin katları ile ilişkilendirmişler ve böylece örüntünün genel kuralını elde etmeye yaklaşmışlardır. Örneğin; öğrencilerin kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

$f(1)=2.2-1=3$

$f(2)=2.3-1=5$

$f(3)=2.4-1=7$

f(4)=2.5-1=9
f(5)=2.6-1=11

Bu strateji n. adımda düşünüldüğünde, örüntünün genel formu f(n)=2.(n+1)-1=2n+1 şeklinde modellenebilir. Öğrencilerin çarpım tablosunda ikinin katlarına daha aşina olmaları, onların böyle bir yol izlemelerinde etkili olmuş olabilir.

Diğer stratejiler kapsamında ise, "sayıların doğasına bakma", "farklılığın doğasına bakma" ve "terimleri birleştirme" olmak üzere toplam üç strateji kullanılmıştır. Şekil 25'te görüldüğü gibi, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci (O_1, D_4), verilen örüntünün terimlerinin tek, çift, tek, çift şeklinde devam ettiğini ifade ederek "sayıların doğasına bakma" stratejisini kullanmışlardır. Örüntüde terimler arası farkları bulan tüm öğrenciler, bu farkların tek sayılardan oluştuğunu açıklayarak "farklılığın doğasına bakma" stratejisini de kullanmışlardır. Bir yüksek ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_3, D_2) ise, "terimleri birleştirme" stratejisini kullanmışlardır. Bu stratejiyi kullanan öğrencilerden Y_3, aşağıdaki işlemleri gerçekleştirmiştir.

5 8 13 20

5+8=13
8+13=21 ve 21-1=20
13+20=33

Y_3, burada bir önceki terimle bir sonraki terimi topladıktan sonra sırayla toplamdan 1, 3 ve 5 şeklinde tek sayılar çıkarmayı düşünmüş ancak kuralın işlemediğini görmüştür. Örneğin;

…

Y_3 ***: Şey diye düşündüm ama öyle olmaz mı? beşle sekizin toplamı onüç, ee sekizle on üçün toplamı yirmi bir eder, biri çıkarırız. Sonra şey yirmibir eder, bir çıkarırız yirmi. Onüçle yirminin toplamı otuz üç eder, üç çıkarırız, yani tek sayıları çıkarırız teker teker dedim. Ama o zaman kırka ulaşamıyoruz. Kırka ulaşamadım.***

“Terimleri birleştirme” stratejisini kullanan öğrencilerden D_2 ise; 8+13=20, 20+8=28 ve 28+1=29 şeklinde işlemleri gerçekleştirmiş ancak buradan bir sonuca ulaşamamıştır.

Öğrencilerden Y_2 ise, günlüğünde *“Bugünkü örüntü biraz zordu. Her adımda 3 tek sayısından başlayıp tek sayılar olarak artıyordu. Ama bunda başka yol bulmakta zorlandım. Çünkü öbür örüntüler ya tekrarlayandı ya da hep aynı sayı artıyordu” (22.03.2007)* şeklinde artarak değişen bir sayı örüntüsünde, sabit değişen bir sayı örüntüsüne oranla daha zorlandığını dile getirmiştir.

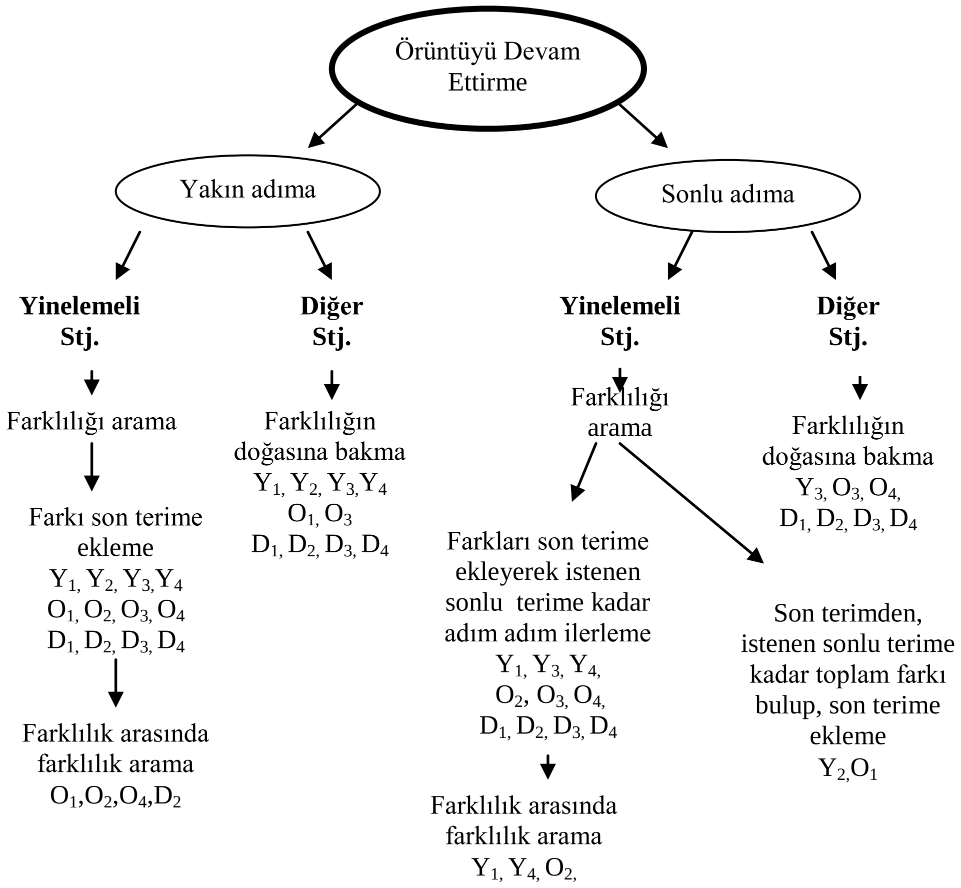
Elde edilen bulgular sonucunda, artarak değişen sayı örüntüsünde öğrenciler **yinelemeli, değişkenler arası ilişki arama** ve **diğer stratejiler** içinde yer alan stratejiler kullanmışlardır. Sabit değişen bir sayı örüntüsünde olduğu gibi, artarak değişen sayı örüntüsünde de, öğrencilerin en çok kullandığı ve ilk olarak odaklandığı strateji “farklılığı arama” stratejisi olmuştur. Bunun dışında en çok kullanılan stratejilerden biri de, üç yüksek, üç orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrencinin kullandığı “farklılık arasında farklılık arama” stratejisidir. Ayrıca bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci, örüntüdeki her bir terimin tanımlanmasında bir bağıntı kullanmışlar ve bu bağıntıyı dolaylı olarak bir başka bağıntı ile desteklemişlerdir. Düşük başarılı bir öğrencinin daha önce sabit değişen sayı örüntüsünde de kullandığı, “sonraki terim için, önceki terim ve sıra sayısı” stratejisi, yine dikkat çeken stratejilerden biri olmuştur. Değişkenler arası ilişki bulma kapsamında ise, örüntünün terimleri arasındaki farklar üzerinde, “çarpım tablosu arama” stratejisi kullanılmıştır. Daha önce verilen sabit değişen sayı örüntüsünde öğrencilerin hiçbiri, genel kuralı elde edememesine karşın, burada yüksek başarı düzeyine sahip iki öğrenci, verilen örüntüde buldukları terimler arası farkları diğer bir değişle, elde ettikleri sabit değişen sayı örüntüsünün terimlerini, ikinin katları ile ilişkilendirerek genel kuralı bulmaya yaklaşmışlardır. Ancak öğrenciler bu stratejide fonksiyonel bir ilişki kurmadan sadece bilinen bir sayının katlarını kullanmışlardır. Bunların yanı sıra diğer stratejiler içinde yer alan, öğrencilerin tamamı “farklılığın doğasına bakma”, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci “sayıların doğasına bakma” ve bir yüksek, bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci “terimleri birleştirme” şeklinde stratejiler de kullanmıştır.

“Farklılığın doğasına bakma” stratejisi de en çok kullanılan strateji olmuştur. Sonuç olarak, öğrenciler sayı dizisi biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde olduğu gibi, terim ve o terimin karşılığı olan adım sayısı arasındaki ilişkiden ziyade örüntüdeki terimler arasındaki ilişkiye odaklanmışlardır. Bu nedenle öğrenciler verilen sayı örüntüsünde fonksiyonel bir ilişki bulamamışlar, dolayısıyla sadece örüntüyü genellemişler sayı dizisini genelleyememişlerdir. Diğer taraftan kullanılan her stratejide çoğunlukla yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir. Bu durumda sayı dizisi biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünün kuralını bulurken, strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığı söylenebilir.

3.3.1.2. Örüntüyü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirme

Sayı dizisi biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 26’da verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.

Katılımcı öğrenciler örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken **yinelemeli** ve **diğer stratejiler** altında yer alan toplam yedi strateji kullanmışlardır.



Şekil 26: Sayı Dizisi Biçiminde Verilen Artarak Değişen Sayı Örüntüsünü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirmede Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerden artarak değişen sayı örüntüsünü önce bir adım devam ettirmeleri istenmiştir. Tüm öğrenciler, Şekil 26’da görüldüğü gibi, **yinelemeli stratejiler** kapsamında yer alan, “farkı son terime ekleme” stratejisini kullanmışlardır. Bu bağlamda öğrenciler, terimler arası farkı bir adım devam ettirerek, örüntünün son terimine eklemişler ve böylece bir sonraki terime ulaşmışlardır. Burada “farklılığı arama” stratejisinin bir uygulaması gerçekleştirilmiştir. Ayrıca bu stratejiyi kullanan öğrencilerden üç orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (O_1, O_2, O_4, D_2), örüntüyü bir adım devam ettirirken, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan “farklılık arasında farklılığı arama” ve dört yüksek, iki orta ve dört düşük başarı düzeyine sahip on öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, O_1, O_3, D_1, D_2, D_3, D_4) ise, **diğer stratejiler** içinde yer alan "farklılığın doğasına bakma" stratejilerini de kullanmışlardır. Örneğin;

G : *Peki bulduğun bu ilişkiye göre örüntüyü bir adım devam ettirir misin?*
O_1 : *Ettirebilirim. Onbir* (29'un altına +11 yazdı sonra 29 un yanına 40 yazdı)
G : *Nasıl yaptın?*
O_1 : *Tek sayı olarak araları şey bunların arasındaki farkların arasında iki iki artıyor burda tek sayı olarak gidiyor dokuzdan sonra tek sayı olarak onbir gelir. Onbir ekledim yirmi dokuza öyle buldum.*

Katılımcı öğrencilerin, verilen artarak değişen sayı örüntüsünde, sonlu bir adıma devam ettirme için, 10. sıradaki terimi bulmaları istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 26'da görüldüğü gibi, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisi kullanılmıştır. Bu stratejinin kullanımında iki yol izlenmiştir. Yollardan birisi, **"farkları son terime ekleyerek istenen sonlu terime kadar adım adım ilerleme",** diğeri ise **"son teriminden, istenen sonlu terime kadar toplam farkı bulup son terime eklenmesi"** biçiminde gerçekleştirilmiştir. Birinci yolu izleyen üç yüksek, üç orta ve dört düşük başarı düzeyine sahip on öğrenci (Y_1, Y_3, Y_4, O_2, O_3, O_4, D_1, D_2, D_3, D_4) arasından, iki yüksek ve bir orta başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_1, Y_4, O_2), "farklılık arasında farklılık arama" ve bir yüksek, iki orta ve dört düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrenci (Y_3, O_3, O_4, D_1, D_2, D_3, D_4) ise, **diğer stratejiler** içinde yer alan "farklılığın doğasına bakma" stratejilerini de kullanmışlardır. Birinci yola ilişkin örnek;

G : *Örüntüde 10. sıradaki sayıyı bulabilir misin?*
D_4 : *Yüz dört.*
G : *Nasıl yaptın bir de anlat?*
D_4 : *Ee… onbir den sonra gelen tek sayılar var. Onu ekleye ekleye gittim.*
G : *Neler onlar?*
D_4 : *Kırka onüç eklenince elliüç. Elliüçe on beş eklenince altmış sekiz, altımış sekize onyedi eklenince seksenbeş, seksenbeşe ondokuz eklenince yüzdört.*

Bir yüksek ve bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrencinin (Y_2, O_1) kullandığı ikinci yola ilişkin örnek;

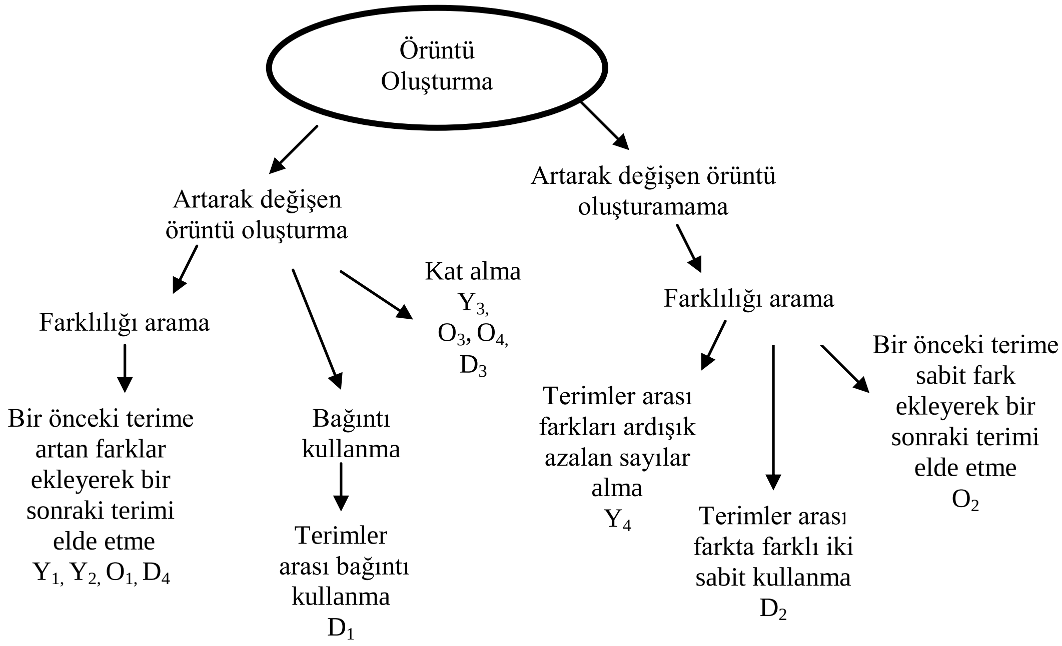
G : *10. sıradaki sayıyı bulabilir misin?*

O_1 : *10. sıradakini. Bir iki, üç, dört, beş, altı* (örüntüdeki sayıları saydı). *Geriye kalıyor dört…onüç, onbeş, onyedi, ondokuz* (13, 15, 17, 19 sayılarını alt alta yazdı)… *altmış dört* (farkları topladı ve 64 buldu) *Kırka, altmış dört eklersek. Altmışdört, kırk daha yüzdört olur.*

Elde edilen bulgular sonucunda, sayı dizisi biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken, tüm öğrencilerin yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini kullandıkları görülmüştür. Örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken, üç yüksek, üç orta ve dört düşük başarı düzeyine sahip 10 öğrenci farkları son terime ekleyerek 10. sıradaki terime kadar adım adım ilerlemişler, bir yüksek, bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci ise, örüntünün son teriminden sonra 10. terime kadar toplam farkı bulup son terime eklemişlerdir. Bu şekilde öğrencilerin tamamı, örüntüyü sonlu bir adıma doğru bir şekilde devam ettirebilmiştir. Sonlu adım olarak 10. adımın istenmesinin bunda büyük bir etkisi olduğu söylenebilir. Ayrıca verilen örüntüde kuralı bulurken kullanılan stratejiler, örüntüyü devam ettirirken de dikkate alınmıştır. Diğer taraftan örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken kullanılan her stratejide çoğunlukla yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir. Bu durumda verilen örüntünün kuralını bulurken, strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığı söylenebilir.

3.3.1.3. Örüntü Oluşturma

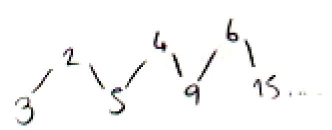
Sayı dizisi biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde, örüntü oluşturma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 27'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 27: Artarak Değişen Bir Sayı Örüntüsü Oluşturmada Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerinden, artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturmaları istenmiştir. Şekil 27'de görüldüğü gibi, katılımcı öğrencilerden dokuz öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, O_1, O_3, O_4, D_1, D_3, D_4), artarak değişen bir sayı örüntüsü oluştururken, üç öğrenci (Y_4, O_2, D_2) artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturamamışlardır. Örüntü oluşturan öğrenciler "farklılığı arama", "bağıntı kullanma" ve "kat alma" stratejilerine göre örüntü oluşturmuşlardır. Buna göre farklılığı arama stratejisini kullanan iki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_1, Y_2, O_1, D_4) "bir önceki terime artan farklar ekleyerek" bir sayı örüntüsü elde etmişlerdir. Örneğin Y_1 terimler arası farkları 2, 4, 6 olan artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturmuştur.

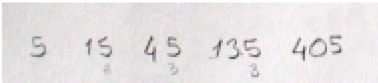
Y_1 : (3 ile başladı) *bu kaç artsın? İki artsın* (3 ile gelecek sayı arasındaki farkı 2 olarak yazdı ve 3 ile topladı 5 buldu) *çift sayılar aynı* (sayılar arasındaki farkları çift sayılar olarak düşündü) *beş dört artsın dokuz* (5 ile 4 farkı topladı 9 yazdı) *altı artsın* (diğer farkı altı olarak yazdı) *bu da ee onbeş* (dokuz ile altıyı topladı).



G : Bunu nasıl yaptığını bir daha anlatır mısın?

Y_1 *: İlk buradaki gibi bende sayılar burda tekti bende çift sayılar yaptım. Çift sayılar iki iki büyüyor ya. Onları iki iki büyüterek baştaki sayıya ekledi* (Buradaki gibi derken verilen örüntüyü gösterdi).

Bir yüksek, iki orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_3, O_3, O_4, D_3) ise, "kat alma" stratejisini kullanarak örüntü oluşturmuşlardır. Bu bağlamda öğrenciler, bir önceki terimin sabit bir katını alarak bir sonraki terimi elde etmişlerdir. Örneğin;



G *: Nasıl yaptın?*

D_3 ***:****Burda hep üçle çarparak gittim, beşle üçü çarptım onbeş, onbeşi üçle çarptım kırkbeş, kırkbeşi üçle çarptım yüzotuzbeş, yüzotuzbeşi üçle çarptım dörtyüzbeş.*

Düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_1) ise, bağıntı aramaya dayalı olacak şekilde, artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturmuştur. Örneğin;

D_1 ***:*** (2 5 11 23 47 şeklinde bir örüntü oluşturdu).

G *: Nasıl yaptın?*

D_1 *: İki kere iki dört, bir fazla beş, beş kere iki on bir fazlası onbir, onbirle ikiyi çarptım yirmiiki, artı bir yirmiüç, yirmiüçle ikiyi çarptım kırkaltı bir fazlası kırkyedi.*

Artarak değişen sayı örüntüsü oluşturamayan öğrenciler "farklılığı arama" stratejisine dayalı olarak, artarak değişen sayı örüntüsü dışında bir örüntü oluşturmuşlardır. Buna göre orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_2), "sabit bir farkı bir önceki terime ekleyerek", yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci (Y_4), "terimler arası farkları ardışık azalan sayılar alarak" ve düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_2) ise, "terimler arası farkta farklı iki sabit fark kullanma" stratejilerini kullanarak örüntü oluşturmuşlardır. Örneğin;

G *: Nasıl yaptın?*

Y_4 *: Ee... başta en küçük birimi verdim, bir olarak değerlendirdim. Sonra ona beş ekledim, sonra beşin bir sayı küçüğü dört olduğu için altıya da dört ekledim, sonra* *onun da bir küçüğü üç olduğu için ona üç ekledim, sonra iki ekledim onbeş, sonra bir ekleyince onaltı. Yani tersten*

G ***:*** *Tersten derken?*

Y_4 ***:*** *Ee... beş, artı dört, artı üç, artı iki, artı bir fark oluyor.*

Örneğin O_2;

4 8 12 16 20 24 28 32

Örneğin D_2;

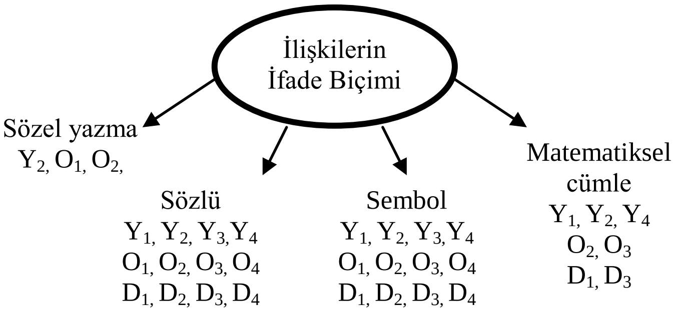
7 11 17 21 27

Elde edilen bulgular sonucunda, dokuz öğrenci artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturabilmiştir. Bu öğrencilerden iki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci örüntü oluştururken "farklılığı arama", iki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci ise "kat alma" stratejilerini kullanmışlardır. Düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci de, terimler arası "bağıntı kullanma" stratejisini kullanarak örüntü oluşturmuştur. Diğer üç öğrenci ise, "farklılığı arama" stratejisini kullanarak, artarak değişen sayı örüntüsü dışında farklı örüntüler oluşturmuşlardır. Yüksek başarı düzeyine sahip bir öğrenci, "terimler arasında sabit bir fark", düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci "terimler arasında değişen sırada iki sabit fark" ve orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci de "terimler arasında ardışık azalan farklar" alarak örüntü oluşturmuşlardır. Sonuç olarak artarak değişen bir örüntü oluşturabilen ya da oluşturamayan öğrencilerin genel olarak "farklılığı arama" stratejisini kullandıkları görülmüştür. Diğer taraftan artarak değişen bir sayı örüntüsü oluştururken, örüntü oluşturabilen ve oluşturamayan öğrenciler arasında yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir. Bu durumda strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığı söylenebilir.

3.3.1.4. İlişkilerin İfade Biçimleri

Sayı dizisi biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde, ilişkilerin ifade biçimleri alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 28'de verilmiştir.

Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.

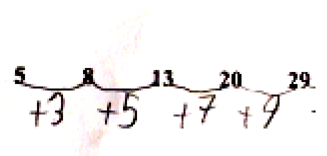


Şekil 28: Artarak Değişen Sayı Örüntüsünde Kullanılan İfade Biçimleri

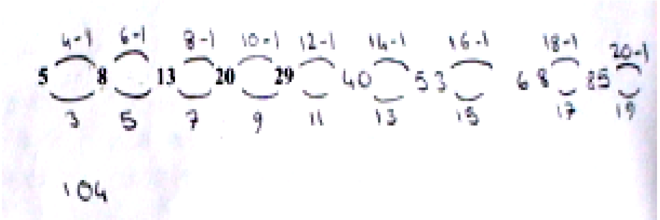
Katılımcı öğrencilerin, artarak değişen bir sayı örüntüsünü inceleme ve kuralı bulmada, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede, artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturmada, nasıl bir ifade biçimi kullandıkları belirlenmek istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 28'de görüldüğü gibi, "sözlü", "matematiksel cümle", "sembol" ve "sözel yazma" olmak üzere dört ifade biçimi kullanılmıştır. Tüm öğrenciler her aşamada belirledikleri tüm ilişkileri "sözlü" olarak, terimler arası farkları ise, "sembol" kullanarak ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra, O_3, D_1 ve D_3 terimler arası farkları, Y_1, Y_2, Y_4 ve O_2 ise, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede belirledikleri ilişkileri "matematiksel bir cümle" ile ifade etmişlerdir. Y_2, O_1, O_2 ise, verilen örüntüdeki terimler arası farkları günlüklerine yazarak ifade etmişlerdir. Aşağıda her bir ifade biçimine birer örnek sunulmuştur.

Sözlü- Sembol;

O_1 ***:*** *Burda üç artmış, beş artmış, yedi artmış, dokuz artmış.*

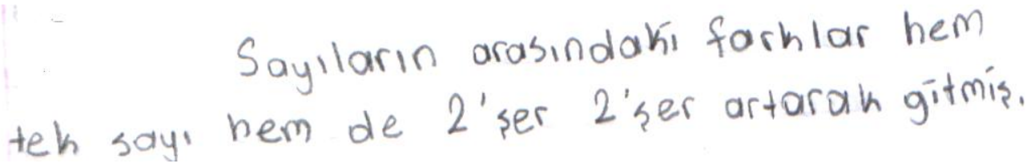


Matematiksel Cümle;



Sözel yazma;

O₂ : (22.03.2007 tarihli günlük)

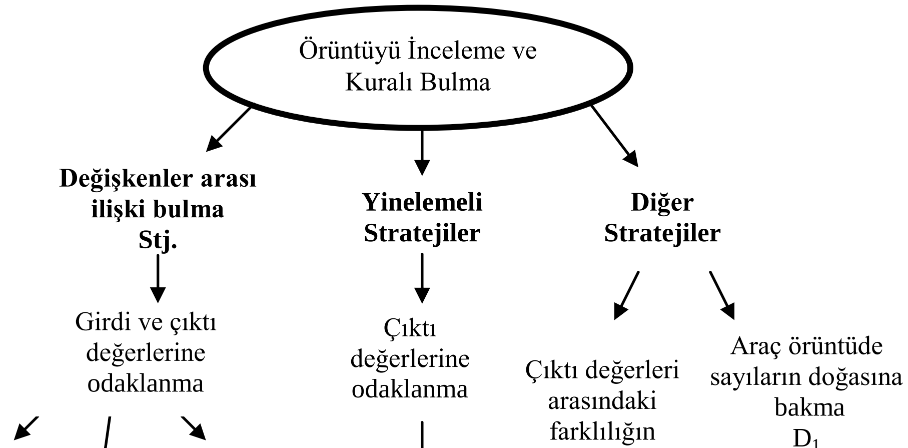


Elde edilen bulgular sonucunda, artarak değişen bir sayı örüntüsünde; örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ile sabit değişen bir sayı örüntüsü oluşturmada en fazla kullanılan ifade biçiminin "sözlü" ifade ile "sembol" olduğu görülmüştür.

3.3.2. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Artarak Değişen Sayı Örüntüsünü Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Bulgular

3.3.2.1. Örüntüyü İnceleme ve Kuralı Bulma

Fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde (EK-4, soru 7), örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 29'da verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 29: Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Artarak Değişen Sayı Örüntüsünü İnceleme ve Kuralı Bulmada kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerden, fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde kuralı bulmaları istenmiştir. Şekil 29'da görüldüğü gibi öğrenciler, **yinelemeli stratejiler, değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** ve **diğer stratejiler** olmak üzere, üç başlık altında toplam yedi strateji kullanmışlardır. İki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_3, Y_4, O_1, D_4), tabloda çıktı (gülenyüz) değerlerine odaklanarak, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, terimler arası "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Örneğin;

O_1 **:** (Örüntüde yer alan gülen yüz sayılarını inceledi) *üç, burda beş, burda yedi, burda dokuz artmış.*

Değişkenler arası ilişki bulma stratejisi kapsamında ise, iki yüksek, dört orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_1, Y_2, O_1, O_2, O_3, O_4, D_1, D_2) tabloda girdi ve çıktı değerlerine odaklanarak, bu değerler arasında "fonksiyonel bir ilişki" bulmuşlardır. Örneğin;

Y_1 **:** *Karesinin yani kendisinin çarpımının, bir kere bir iki fazlası, iki kere iki dört iki fazlası, nasıl yazsam buraya kendisiyle çarpımının şöyle bir kere bir* (girdi sayılarının yanına 1x1, 2x2, 3x3, 4x4, 5x5 yazdı) *artı iki,* (sonra yazdıklarının yanına +2 yazdı). *Böyle yani kendisiyle çarpımı bir kere bir artı iki üç, iki kere iki artı iki altı, üç kere üç artı iki on bir, dört kere dört artı iki onsekiz, beş kere beş artı iki yirmi yedi.*

G **:** *Çok güzel aferin.*

D_2 de, diğer öğrenciler gibi tabloda girdi ve çıktı değerleri arasındaki fonksiyonel ilişkiyi bulmuş, ancak diğerlerinden farklı olarak, her kalp sayısını sırayla birden başlayarak ardışık doğal sayılarla çarptığını düşünmüştür. Örneğin;

D_2 **:***Birincide birle biri çarptım iki ekledim, ikincide ikiyle çarptım iki ekledim, üçüncüde üçle çarptım iki ekledim, yani şuraları birer birer artıyor* (kalp sayılarını çarptığı sayıların birer artığını söyledi, ancak kalp sayılarının karesini aldığını fark etmedi)...

G **:** *Kural olarak ifade etseydin bunu nasıl söylerdin?*

D_2 **:** *ee… bir çarpı bir, iki çarpı iki, üç çarpı üç, çarpılar birer birer artıyor, artma yerleri de hep aynı sabit kalıyor.*

Üç yüksek, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip altı öğrenci (Y_2, Y_3, Y_4, O_2, D_1, D_3) ise, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan **"araç örüntü arama"** stratejisini kullanarak, girdi ve çıktı değerleri arasındaki farkları bulmuşlardır. Örneğin;

D_1 **:** (Girdi ve çıktı sayıları arasına +2, +4, +8, +14, +22 yazdı, sonra sayıları inceledi).

G **:** *Ne yaptın anlatır mısın?*

D_1 **:** *ee… burda aralarındaki farkları bulmaya çalıştım ilk baş ıı…bir artı iki üç, iki artı dört altı, üç artı sekiz onbir on dört artı dört onsekiz, yirmi iki artı beş yirmiyedi.*

D_1'in kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıdaki tabloda gösterilmiştir.

Kalp sayısı	Araç örüntü	Gülenyüz sayısı

1	2	**3**
2	4	**6**
3	8	**11**
4	14	**18**
5	22	**27**
n	g(n)	**n+g(n)=f(n)**

Tabloda görüldüğü gibi öğrenci, girdi ve çıktı değerleri arasında araştırmacı tarafından f(n)=n+g(n) şeklinde modellenen ilişkiyi bulmuştur.

Araştırmacı, bu stratejilere ilişkin düşüncelerini 03. 04. 2007 tarihli günlüğüne aşağıdaki biçimiyle yansıtmıştır:

> *... fonksiyon tablosu ile verilmiş artarak değişen sayı örüntüsünde sekiz öğrenci örüntünün genel kuralını buldu. Diğer taraftan bu öğrencilerden dördünün orta başarı düzeyine, ikisinin yüksek ve ikisinin de düşük başarı düzeyine sahip olması beni şaşırttı. Oysaki benzer şekilde verilmiş sabit değişen sayı örüntüsünde, sadece dört öğrenci örüntünün kuralını, çıktı değerlerinden girdi değerlerini çıkararak elde ettikleri sayı dizisinden yararlanarak bulabilmişti. Kimi öğrenciler bu stratejiyi artarak değişen sayı örüntüsünde de uygulamak istediler ve çıktı değerlerinden girdi değerlerini çıkararak bir sayı dizisi elde ettiler. Ancak sabit değişen sayı örüntüsünde elde ettikleri sayı dizisinde terimler arası fark sabitti. Artarak değişen sayı örüntüsünde ise, öğrenciler elde ettikleri sayı dizisinin terimleri arasında bir düzenlilik yakalayamadılar ve dolayısıyla bu stratejinin işlemediğini düşündüler. Daha sonra örüntünün genel kuralını buldular. Kimi öğrenciler ise, örüntüyü ilk incelemelerinde genel kuralı bulabildiler (G; 03.04.007).*

Şekil 29'da görüldüğü gibi, "araç örüntü arama" stratejisini kullanan öğrencilerden, iki yüksek, bir orta ve bir düşük başarılı dört öğrenci (Y_3, Y_4, O_2, D_1), araç örüntüde "bağıntı arama" stratejisini de kullanmışlardır. Bu öğrenciler araç örüntünün terimleri arasında araştırmacı tarafından aşağıda ifade edildiği gibi bir bağıntı aramışlar, ancak dördüncü terimde bu bağıntının çalışmadığını ifade etmişlerdir.

g(1)=2
g(2)= 2.g(1) =2.2=4

g(3)= 2.g(2) =2.4=8

g(4)=2.g(3)=2.8=16

O_2 bu durumu günlüğünde *“.....İlk olarak kalp ve gülen yüz sayılarının arasındaki farklara baktım. Ama kalp sayısı dört olunca kural bozuldu” (03.04.2007)* şeklinde ifade etmiştir.

Şekil 29’da görüldüğü gibi, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_3), “bağıntı arama” stratejisini kullanmıştır. Öğrenci her girdi değeri için bir bağıntı oluşturmuştur. Ancak örüntüde çıktı sayısına ulaşmada her girdi sayısı için birbirinden farklı tutarsız bağıntılar elde etmiştir. Daha önce de benzer bir davranış sergileyen D_3, burada da elde ettiği bağıntılar arasında herhangi bir ilişki elde edememiştir. Örneğin;

D_3 *: ... beşle dördü çarpmış yirmi ıı... yirmiyle de yediyi toplamış* (kalp sayısı beşin yanına 4x7+yazdı) *sonra dörtle üçü çarpmış altı toplamış* (kalp sayısı dördün yanına 3x6+ yazdı) *burada üçle on biri, üç çarpmış iki toplamış* (kalp sayısı üçün yanına 3x2+ yazdı) *burada da ikiyi üçle çarpmış* (ikinin yanına 3x yazdı) *burada da üçle çarpmış* (birin yanına 3x yazdı).

Şekil 29’da görüldüğü gibi, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_1), **diğer stratejiler** grubunda yer alan, araç örüntüde “sayıların doğasına bakma” stratejisini kullanmış ve bunu “*…İlk baş buralarda ikişer ikişer gidiyor ve çift, zaten çift…”* şeklinde açıklamıştır. İki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_3, Y_4, O_1, D_4) ise, “çıktı değerleri arasındaki farklılığın doğasına bakma” stratejisini kullanmışlardır. Örneğin;

G *: Ne yaptığını bir anlat bakalım.*

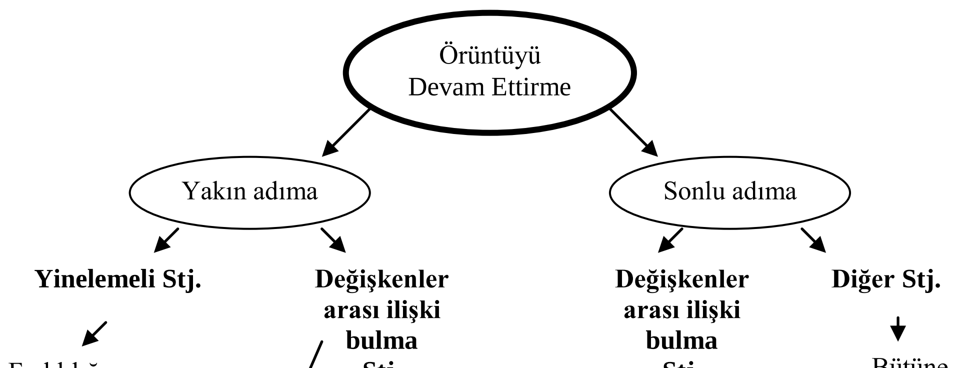
O_1 *: Şimdi bu sayılar* (çıktı sayılarını gösterdi) *arasındaki fark tek sayı olarak gidiyor. Burda üç, burda beş, burda yedi, burda dokuz burda onbir.*

Elde edilen bulgular sonucunda, fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen bir sayı örüntüsünde öğrenciler, tabloda çıktı değerleri ile girdi ve çıktı değerlerine odaklanmışlar ve bu bağlamda **yinelemeli, değişkenler arasında ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** olmak üzere üç başlık altında yer alan stratejiler kullanmışlardır. **Yinelemeli**

stratejiler kapsamında öğrenciler sadece çıktı değerleri arasındaki farkları bulmuşlardır. **Değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** kapsamında ise, öğrencilerin çoğunluğu girdi ve çıktı değerleri arasında fonksiyonel bir ilişki bularak genel kurala ulaşmışlardır. Fonksiyonel ilişkiye öğrencilerin bir kısmı, örüntüyü ilk incelemelerinde bir kısmı ise, girdi ve çıktı değerleri arasındaki farklara (araç örüntü) odaklandıktan sonra ulaşmışlardır. Girdi ve çıktı değerleri arasındaki farkları alarak araç örüntüyü oluşturan öğrencilerin bir kısmı, örüntünün terimleri arasında bir bağıntı aramışlar ancak bu bağıntıya ulaşamayınca farklı stratejilere yönelmişlerdir. **Diğer stratejiler** kapsamında ise, çıktı değerleri arasındaki fark sayılarının ve araç örüntünün oluşturduğu sayı kümesinin bir özelliğini tanımlamışlardır. Sonuç olarak, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde dört öğrencinin fonksiyonel bir ilişkiye ulaşmasına karşın, fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde öğrencilerin çoğunluğunun fonksiyonel bir ilişkiye ulaşması dikkat çekicidir. Ayrıca bu ilişkiyi yakalayan öğrencilerden yarısının orta başarı düzeyine sahip olması da şaşırtıcı bir durumdur. Genel olarak buradan, fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen bir sayı örüntüsünde kuralı bulurken strateji seçiminde öğrencilerin sahip olduğu başarı düzeyinin etkili olmadığı söylenebilir.

3.3.2.2. Örüntüyü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirme

Fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 30'da verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 30: Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Artarak Değişen Sayı Örüntüsünü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirmede Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrenciler örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken **yinelemeli** ve **değişkenler arası ilişki bulma**, sonlu bir adıma devam ettirirken ise, **yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** başlıkları altında toplanan toplam altı strateji kullanmışlardır.

Öğrencilerinden, önce fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünü bir adım (yakın) devam ettirmeleri istenmiştir. Şekil 30'da görüldüğü gibi, iki yüksek, bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_3, Y_4, D_4) örüntüyü devam ettirirken **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Bu bağlamda öğrenciler tabloda çıktı değerlerinin son terimine, terimler arası farkı ekleyerek bir sonraki terime ulaşmışlardır.

Örneğin;

G **:** *Tabloda yer alan kalp ve gülen yüz sayılarını bir adım devam ettirebilir misin?*

D_4 **:** (Kalp sayılarının altına 6 yazdı, gülen yüz sayıları arasında en son yazmış olduğu farkı bir adım devam ettirdi ve +11 yazdı sonra gülen yüz sayısı olarak 38 yazdı).

G **:** *Nasıl yaptın?*

D_4 **:** *Bunlar* (gülen yüz sayıları arasındaki farkları gösterdi) *tek sayı olarak gidiyor, bundan sonra gelen tek sayı 11, 27 ye 11 ekledim.*

İki yüksek, dört orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_1, Y_2, O_1, O_2, O_3, O_4, D_1, D_2) ise, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt temasında ifade edildiği gibi, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanarak, altıncı girdi değerine karşılık çıktı değerini elde etmişlerdir. Öğrencilerin kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından n=6 için f(6)=6.6+2=38 şeklinde ifade edilmiştir. Örneğin;

G **:** *Peki bulduğun bu kural yardımıyla tabloda yer alan kalp ve gülen yüz sayılarını bir adım devam ettirebilir misin?*

O_3 **:** *Tamam* (kalp sayılarının altına 6, gülen yüz sayılarının altına 38 yazdı).

G **:** *Nasıl yaptın?*

O_3 **:** *Beşten sonra altı gelir, altıyla altıyı çarptım otuzaltı iki ekledim otuzsekiz.*

G **:** *Güzel.*

Bu stratejiyi kullanan öğrencilerden D_2 ise, tabloda her girdi değerini sırayla birden başlayarak ardışık doğal sayılarla çarptığını düşündüğü için, örüntüyü bir adım devam ettirirken de, girdi değerlerini çarptığı doğal sayıları bir adım devam ettirmiştir. Örneğin;

D_2 **:** ...(Kalp sayılarının altına 6 yazdı ve 6 ile 6 yı çarptı 2 ekledi ve 38 buldu).

G **:** *Nasıl yaptın?*

D_2 **:** *Temin ki dediğim gibi buraları birer birer artırmam lazımdı çarpma olduğu için, burası zaten altı olması gerekiyordu, burada çarpma yerine altı geliyor beşten sonra altı geldiği için, altıyla çarptım otuzaltı, hepsine iki eklediğimiz için buna da iki eklememiz lazım.*

Şekil 30'da görüldüğü gibi, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_3), daha önce örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması kapsamında kullandığı "bağıntı arama" stratejisini, örüntüyü bir adım devam ettirirken de kullanmıştır. Ancak öğrenci her girdi değeri için birbirinden farklı tutarsız bağıntılar elde ettiği için, altıncı adımda da çıktı değerine ulaşmak için tutarsız bir bağıntı kullanmıştır. Örneğin;

…

G *: Nasıl yaptın?*

D_3 *: Burada kalpler bir, iki, üç, dört diye gitmiş, beşten sonra altı geliyor, bu gülen yüzü bulmak içinde bu beşi dörtle çarpıp, yedi toplamıştım. Bende burada altıyla dördü çarpıp sekiz topladım.*

G *: Hı….*

D_3 *: Yirmi dört sekiz daha otuz iki* (beşinci adımda beşi dörtle çarptıktan sonra yedi ile toplamıştı, altıncı adımda da dörtle çarpıp sekiz ile toplanacağını düşündü).

G *: Neden öyle yaptın?*

D_3 *: Çünkü burada dörtle çarpmıştım sonra burada altıyla, yedi sekiz diye gelceni düşündüm* (n=5 için 4.5+7 işlemini yaptığı için altıncı adımda yediden sonra sekiz geleceğini düşünüp 4.6+8 işlemini yaptı).

Katılımcı öğrencilerinden, fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde, 60. (sonlu) kalp sayısına karşılık gelen gülenyüz sayısını bulmaları istenmiştir. Şekil 30'da görüldüğü gibi, iki yüksek, dört orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_1, Y_2, O_1, O_2, O_3, O_4, D_1, D_2) örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt temasında ifade edildiği gibi, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanarak, 60. kalp sayısına karşılık gelen gülenyüz sayısını elde etmişlerdir. Örneğin;

G *: Peki. Şimdi tabloya göre kalp sayısı 60 olduğunda, buna dayalı olarak bir gülenyüz sayısı bulabilir misin?*

Y_2 *:* (60 ile 60 yı çarptı 3600 buldu ve iki ekledi 3602 yazdı).

G *: Ne yaptın?*

Y_2 *: 60'ı kendisiyle çarptım sonra iki ekledim.*

G *: Aferin.*

Y_1 ise, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken *" Bugünkü örüntü tabloda beş adım ilerleterek verilmişti. Bu örüntüde kalp ve gülen yüz karşılaştırılmıştı. Öğretmenim bu örüntüyü incelememi istedi. Ben de inceledim. Kuralı buldum. Kural kendisiyle çarpımının iki fazlasıydı. Ben de bu kurala göre örüntüyü 6. adımı ve 60. adımı buldum.*

... Bu örüntüyü rahatlıkla çözdüm. Hiç zorlanmadım" (03.04.2007) şeklinde örüntünün kuralını kolayca bulduğunu ve örüntüyü devam ettirirken bu kuralı kullandığını günlüğünde dile getirmiştir.

Örüntüyü sonlu bir adıma devam ettiren D_2 ise, girdi değerlerini birden başlayarak ardışık doğal sayılarla çarptığını düşündüğü için, 60. adımda oldukça zorlanmıştır. Örneğin;

…

D₂ **:** (Düşündü) *burası 60 olcak* (kalp sayılarının altına 60 yazdı) *aralarında 54 fark var* (altı ile 60 arasına 54 yazdı) …

...

G **:** *54, 6 ile 60 arasındaki fark dedin öyle mi?*

D₂ **:** *Hıı hıı... yani burada* (altıdan sonra 54 sayı geldiğini işaret etti) *54 sayı var. ...burası 54 tane olduğu için karşılarında da 54 tane olcak bulduk işte 54 artı iki olcak o zaman* (54 ile 54 ü çarptı 2926 buldu artı iki ekledi).

G **:** *Ne yaptığını anlat bana?*

D₂ **:** *Şey burada 54 sayı vardı ya bunun karşılığında da 54 sayı olması gerekir dedim o zaman 54 sayı olması için 54 ile 54'ü çarptım iki eklerim* (2926'yı iki ile topladı ve 2928 buldu) *2928 olcak.*

G **:** *Bu bulduğun nedir?*

D₂ **:** *Gülen yüz sayısı.*

G **:***60. kalp sayısına karşılık gelen gülen yüz sayısını sormuştum ben sana, bu bulduğun 60. sayı mı?*

…

G **:** *Peki 54. sayıyı bulduğun gibi direk 60. sayıyı da bulamaz mıydın?*

D₂ **:** *Ya işte bulamıyorum onu.*

D₂ **:** *Kaçıncı sayıydı?*

G **:** *60. sayı*

D₂ **:** *6 sayı olduğu için* (kalp sayılarının altına 55, 56, 57, 58, 59, 60 yazdı) *60 yazdım tamam mı.54 ile çarptım, 55 ile çarpmam lazım, 56, 57, 58, 59, 60 ile çarpmam lazım* (55. adımdan sonra yazdığı diğer adım sayılarının üzerinden sırayla 55, 56, 57, 58, 59 ve 60 ile çarpması gerektiğini düşündü) *çarpayım mı?*

G **:** *Yap bakalım*

D₂ **:** (60 ile 60 ı çarptı ve 3600 buldu ve 60'ın karşısına 3600 yazdı).

G **:** *Bu bulduğun nedir şimdi?*

D_2 **:** *Gülen yüz sayısı aaa…aa iki ekliyecektik* (3600 ün yanına iki ekledi ve 3602 buldu) *3602.*

D_2, genelde örüntüleri sonlu bir adıma devam ettirirken oldukça zorlanan bir öğrenci olduğu için, bu durumu da günlüğünde *"bugünkü örüntü kolaydı. Ama ben bir yerde hep zorlanıyorum. "neden acaba?" diyorum kendi kendime. Sizden bir ricam olacak. Lütfen böyle 60. filan sayıları bana sormayın! Çünkü öyle sayıları ben bir türlü bulamıyorum ya da sayarak buluyorum" (03.04.2007)* şeklinde dile getirmiştir.

Şekil 30'da görüldüğü gibi, D_3 diğer aşamalarda da kullandığı **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan "bağıntı arama" stratejisini kullanarak, 60. kalp sayısına karşılık gülenyüz sayısına ulaşmaya çalışmıştır. Ancak her girdi değerine karşılık tutarsız bağıntılar kullandığı için, 60. girdi değerini yanlış elde etmiştir. Örneğin;

…

D_3 **:** *Şimdi ilk önce altmışı dörtle çarptım, dörtle çarpıyordu çünkü burada* (beşinci adımı gösterdi) *bende dörtle çarptım burada da altıyla dördü çarpmıştık sekizle toplamıştık 32 bulmuştuk, bende 60'la altıncı arasındaki farkı bulmak istedim 60'dan sekizi çıkardım 52, 52 ile de 240 ı topladım* (altıncı adımda 4x6+8 olduğundan 60. adımda 4x60+? , yani "?" ni bulmak için 60 dan sekizi çıkardığını anlatmaya çalıştı)

G **:** *Yani 60. adımda şurdaki* (60 ile 6 yı gösterdim) *fazlalık sayısını bulmak için 60 dan sekizi çıkardın. Yani 60 ile şurdaki sekiz arasındaki farkı buldun.*

D_3 **:** *Hıı hıı…*

Şekil 30'da görüldüğü gibi, iki yüksek, bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_3, Y_4, D_4) 60. kalp sayısına karşılık gülenyüz sayısına ulaşmak için **diğer stratejiler** içinde yer alan "bütüne genişletme" stratejisini kullanmışlardır. Bu öğrenciler örüntünün genel kuralını bulamayan öğrencilerdir. Bu nedenle örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken kullanarak yanlış bir sonuca ulaşmışlardır. Öğrencilerin kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

n=6 için f(6)=38

60=10.6 olduğundan f(60)=10. f(6)=10.38=380

"Bütüne genişletme" stratejisine ilişkin bir örnek aşağıda sunulmuştur.

G: Peki. Şimdi tabloya göre kalp sayısı 60 olduğunda, buna dayalı olarak bir gülen yüz sayısı bulabilir misin?

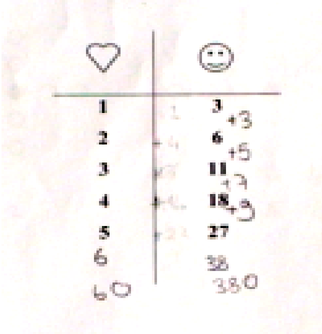
Y_4: Evet (kalp sayılarının altına 60, gülen yüz sayılarının altına 380 yazdı).

G: Yani

Y_4: 380

G: Nasıl buldun 380 i?

Y_4: Yine 60'ı altıya böldüm 10 çıktı, 38'i 10 ile çarptım 380.



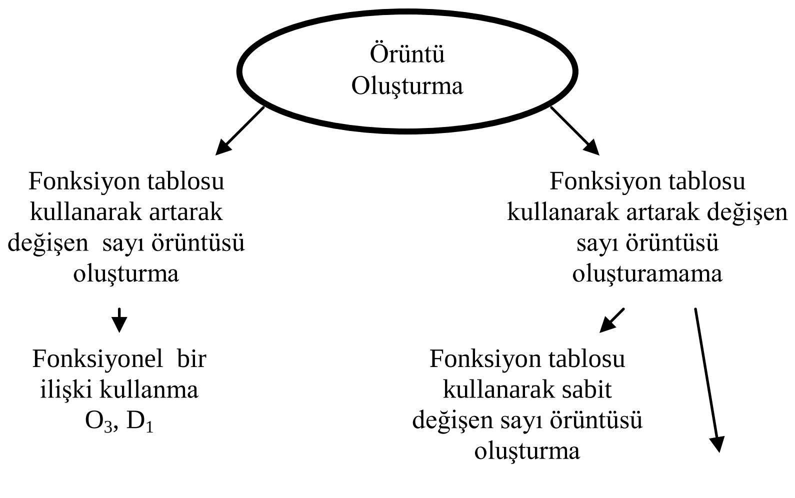
Bu stratejiyi kullanan öğrencilerden Y_3 ise, 60. kalp sayısına karşılık gülenyüz sayısını bulurken zorlandığını ve uyguladığı stratejinin yanlış olabileceğini günlüğünde *"Aslında ilk başta kolay gibi geldi, ama 60. adımı bulmak zor oldu (sanırım yanlış)"(03.04.2007)* şeklinde ifade etmiştir.

Elde edilen bulgular sonucunda, fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünü iki yüksek, dört orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip öğrenci **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanarak, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmişlerdir. Fonksiyonel bir ilişkiyi bulan öğrenciler arasında ise, iki yüksek, dört orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip öğrenci yer almıştır. İki yüksek ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci ise, örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Öğrenciler bu stratejiyi kullanarak örüntüyü sonlu bir adıma devam ettiremedikleri için, **diğer stratejiler** içinde yer alan ve hatalı bir strateji olan "bütüne genişletme" stratejisine yönelmişler ve yanlış sonuca ulaşmışlardır. Düşük başarılı bir öğrenci ise, her girdi değerine karşılık tutarsız "bağıntılar" kullandığı için, diğerleri gibi, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken yanlış sonuçlar elde etmiştir. Sonuç olarak, örüntüde sadece çıktı değerlerine odaklanan öğrencilerin örüntüyü sonlu bir adıma devam ettiremediği görülmüştür. Diğer taraftan örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken kullanılan stratejilere bakıldığında, yüksek ve düşük başarılı öğrenciler ile orta başarı düzeyine sahip öğrencilerin tamamının fonksiyonel bir ilişkiyi kullandığı, farklılığı arama ve bütüne genişletme stratejisini kullanan öğrencilerin ise, yüksek ve düşük başarı düzeyine sahip olduğu görülmektedir. Bu durum ise, strateji seçiminde başarı düzeyinin etkisi olmadığının bir göstergesidir.

3.3.2.3. Örüntü Oluşturma

Fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde, örüntü oluşturma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 31'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.

Katılımcı öğrencilerinden, fonksiyon tablosu kullanarak artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturmaları istenmiştir. Şekil 31'de görüldüğü gibi, iki öğrenci fonksiyon tablosu kullanarak artarak değişen bir sayı örüntüsü oluştururken, dokuz öğrenci oluşturamamıştır.



Fonksiyonel bir ilişki kullanma
Y_1, Y_2, O_1, O_2, O_4
D_2, D_3

Girdi ve çıktı değerlerini ayrı ayrı oluşturma
Y_3, Y_4, D_4

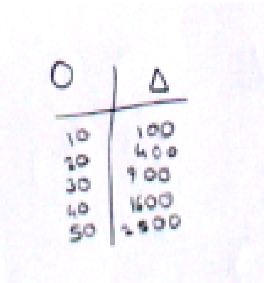
Şekil 31: Fonksiyon Tablosu Kullanarak Artarak Değişen Sayı Örüntüsü Oluşturmada Kullanılan Stratejiler

Artarak değişen sayı örüntüsü oluşturabilen bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci (O_3, D_1), örüntüyü oluştururken “fonksiyonel bir ilişki” kullanmışlardır.

Örneğin;

G : *Verilen örüntüde olduğu gibi, tablo yardımıyla benzer bir örüntü oluşturabilir misin?*

...



G : *Nasıl yaptın?*

O_3 : *Ben burda onla onu çarptım 100, yirmiyle yirmiyi çarptım 400, otuzla otuzu çarptım 900 diye gidiyor.*

G : *Peki bunu kural olarak ifade etseydin nasıl söylerdin?*

O_3 : *Kendisiyle çarptım*

G : *Neyi kendisiyle çarptın?*

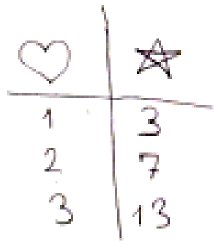
O_3 : *Daire sayısıyla daire sayısı çarptım*

O_3, açıkça anlaşıldığı gibi, araştırmacı tarafından f(n)=n.n şeklinde ifade edilen genel formunu kullanarak örüntüyü oluşturmuştur.

Örneğin;

G : *Verilen örüntüde olduğu gibi, tablo yardımıyla benzer bir örüntü oluşturabilir misin?*

…



G : *Nasıl yaptın?*

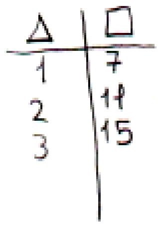
D_1 : Ee*… buradaki* (kalp sayılarını gösterdi) *gibi bir, iki, üç diye gitti adım sayısı gibi, Ee… yıldızları da aynı buradaki gibi bir kere bir bir, bu alttaki sayısı kaçsa* (kalp sayısında ikiyi gösterdi) *hep onu ekledim mesela bir kere bir bir artı iki, iki kere iki dört üç daha yedi, öbür gelen sayıda muhakkak dört olacağından üç kere üç dokuz artı dört daha onüç* (adım sayılarının karelerini aldıktan sonra bir sonraki adım sayısını ekleyerek yıldız sayılarını elde etti).

D_1'in örüntü oluştururken kullandığı strateji, araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

n=1 için f(1)=1.1+2=3
n=2 için f(2)=2.2+3=7
n=3 için f(3)=3.3+4=13

n=k için $f(k)=k.k+(k+1)=k^2+k+1$ genel formunu kullanarak örüntüyü oluşturmuştur.

Şekil 31'de görüldüğü gibi, fonksiyon tablosu kullanarak artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturamayan öğrencilerden iki yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrenci (Y_1, Y_2, O_1, O_2, O_4, D_2, D_3) "fonksiyonel bir ilişki" kullanarak, fonksiyon tablosunda sabit değişen sayı örüntüsü oluşturmuşlardır. İki yüksek ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_3, Y_4, D_4) ise, fonksiyon tablosunda girdi ve çıktı değerleri arasında bir ilişki kurmadan, girdi ve çıktı değerleri olarak "iki ayrı sabit değişen sayı örüntüsü" oluşturmuşlardır. Her iki stratejiye ilişkin birer örnek aşağıda sunulmuştur.



…

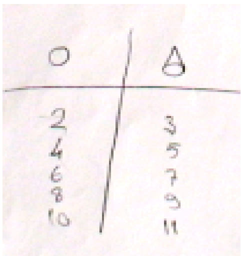
G *: Tamam mı? Peki ne yaptın?*

Y_2 *: Burada üçgen sayısını dört çarpıp, üç ekliyoruz.*

G *: Hı… yani,*

Y_2 *: Dört kere bir dört üç ekleyince yedi ediyor, dört kere iki sekiz üç ekleyince onbir ediyor, dört kere üç oniki üç ekleyince onbeş ediyor.*

Örneğin;



…

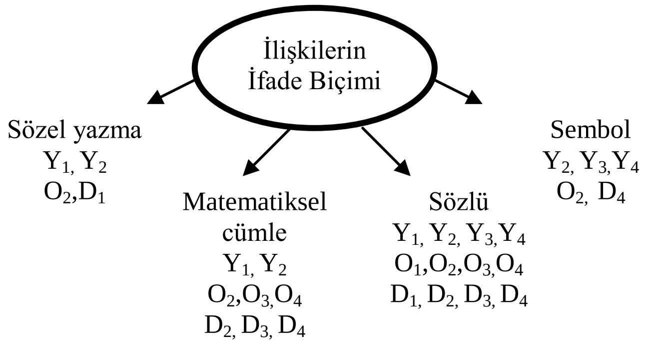
G *: Nasıl yaptın?*

D_4 *: Bunlar* (daire sayılarını gösterdi) *çift sayı, bunlar tek sayı* (koni sayılarını gösterdi) *ve ikişer ikişer artıyor.*

Elde edilen bulgular sonucunda sadece orta ve düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci "fonksiyonel bir ilişki" kullanarak fonksiyon tablosunda artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturabilmiştir. Örüntü oluşturabilen öğrencilerin orta ve düşük başarılı öğrenciler olması da dikkat çekicidir. Örüntü oluşturamayan öğrencilerden, iki yüksek, bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci ise, girdi ve çıktı değerleri arasında bir ilişki kurmadan, girdi ve çıktı değerleri olarak, iki ayrı sabit değişen keyfi sayı örüntüleri yazmışlardır. İki yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrenci ise, fonksiyonel bir ilişki kullanarak sabit değişen sayı örüntüsü oluşturmuşlardır. Fonksiyon tablosu kullanarak artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturamayan öğrencilerin, örnek alacakları örüntünün özelliklerini gözlemleyemedikleri söylenebilir. Diğer taraftan kullanılan tüm stratejilerde genel olarak yüksek, orta ve düşük başarılı öğrencilerin yer aldığı görülmektedir. Bu durum, fonksiyon tablosu kullanarak artarak değişen bir sayı örüntüsü oluştururken strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığının bir göstergesidir.

3.3.2.4. İlişkilerin İfade Biçimleri

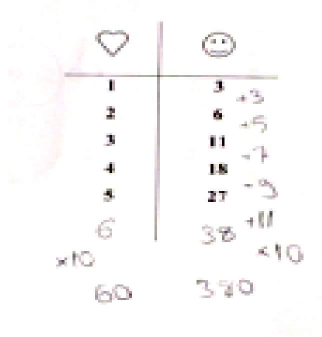
Fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde, ilişkilerin ifade biçimleri alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 32'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 32: Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Artarak Değişen Sayı Örüntüsünde Kullanılan İfade Biçimleri

Katılımcı öğrencilerin, fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen bir sayı örüntüsünü inceleme ve kuralı bulmada, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede, fonksiyon tablosu ile verilen artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturmada, nasıl bir ifade biçimi kullandıkları belirlenmek istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 32'de görüldüğü gibi, "sözlü", "matematiksel cümle", "sembol" ve "sözel yazma" olmak üzere dört ifade biçimi kullanılmıştır. Tüm öğrenciler her aşamada belirledikleri tüm ilişkileri öncelikle "sözlü" olarak ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra, iki yüksek, üç orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_1, Y_2, O_2, O_3, O_4, D_2, D_3, D_4) tabloda girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişkiyi belirlerken, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken ve örüntü oluştururken “matematiksel bir cümle” kullanmışlardır. Ayrıca üç yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip beş öğrenci (Y_2 Y_3, Y_4, O_2, D_4) , tabloda girdi ve çıktı değerleri arasındaki farkları ve 60. kalp sayısına karşılık buldukları gülenyüz sayısını “sembol” kullanarak ifade etmişlerdir. İki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_1, Y_2, O_2, D_1) ise, verilen örüntüde belirledikleri ilişkileri günlüklerinde yazılı olarak dile getirmişlerdir. Aşağıda her bir ifade biçimine birer örnek sunulmuştur.

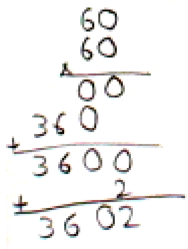
Sembol;



Sözlü-Matematiksel cümle;

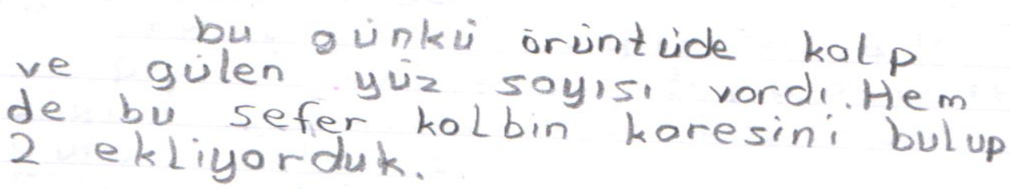
G : *Ne yaptın?*

Y_2 : *60’ı kendisiyle çarptım sonra iki ekledim.*



Sözel yazma;

Y_2 : *(03. 04. 2007 tarihli günlük)*



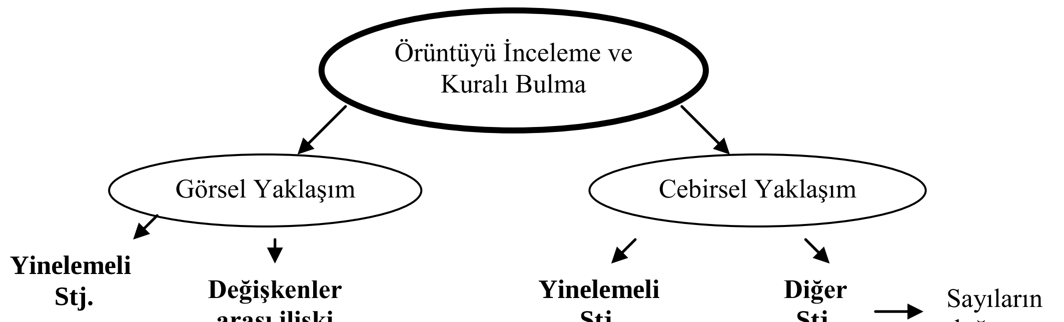
Elde edilen bulgular sonucunda, fonksiyon tablosu biçiminde verilen artarak değişen bir sayı örüntüsünde; örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ile fonksiyon tablosu kullanarak artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturmada en fazla kullanılan ifade biçiminin “sözlü” ve “matematiksel cümle” olduğu görülmüştür.

3.3.3. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Artarak Değişen Şekil Örüntüsünü (1) Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Bulgular

3.3.3.1. Örüntüyü İnceleme ve Kuralı Bulma

Artarak değişen şekil örüntüsünde (EK-4, soru 5), örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 33’de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.

Katılımcı öğrencilerden yukarıda gösterilen artarak değişen bir şekil örüntüsünde kuralı bulmaları istenmiştir. Şekil 33’de görüldüğü gibi, öğrenciler kuralı belirlerken “görsel” ve “cebirsel” olmak üzere iki yaklaşım benimsemişlerdir. Ayrıca hem görsel hem de cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler olduğu gibi sadece görsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler de olmuştur.



Şekil 33: Artarak Değişen Şekil Örüntüsünü İnceleme ve Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Görsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler, **yinelemeli** ve **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** olmak üzere iki başlık altında toplam iki strateji kullanmışlardır. Bu bağlamda, dört yüksek, dört orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip on bir öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, O_1, O_2, O_3, O_4, D_1, D_2, D_3) **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan; "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanılmıştır. Bu öğrenciler her yeni şekil için kaç tane kare gerektiğini ifade etmişlerdir. Örneğin;

G ***: Peki örüntüde yer alan şekillerin oluşumuyla ilgili neler gözlemledin anlatır mısın?***

O_1 ***:*** *... Şimdi burda mesela bu* (birinci şekli gösterdi) *tekrar eden bir birim olsa, burda* (ikinci şekli gösterdi) *en alta dört tane eklenmiş, burda* (üçüncü şekli gösterdi) *altı tane eklenmiş öyle*.

Şekil 33'te görüldüğü gibi, bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_1, O_1, D_4), **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan ve "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanmışlardır. Örneğin Y_1, " *Şu aradaki boşluklarda* (en üst karenin altındaki boşluklar) *bir iki, adım sayısına göre gidiyor" şeklinde* O_1 ise, *"Bir de buradaki, burda boş yerler var* ya (en üstte yer alan karenin altındaki boşlukları gösterdi) *burda mesela adım sayısı kadar boş yer var bir, iki, üç* (her adımda yer alan boşlukları saydı)" şeklinde açıklama yapmıştır.

Şekil 33'te görüldüğü gibi, cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler ise, öncelikle verilen şekil örüntüsünde, her adımda yer alan kareleri sayarak, şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşlerdir. Örneğin;

D₂ **:** (düşündü şekillerdeki kareleri saydı)*…ee…artan bir şey burda üç tane, burda yedi tane…kaç tane kare vardı* (üçüncü şekildeki kareleri tekrar saydı) *onüç tane ıı…*

G **:** *Ne yaptın orda?*

D₂ **:** *Topladım*

G **:** *Neleri topladın?*

D₂ **:** *Hepsini, bunların kare sayılarını*

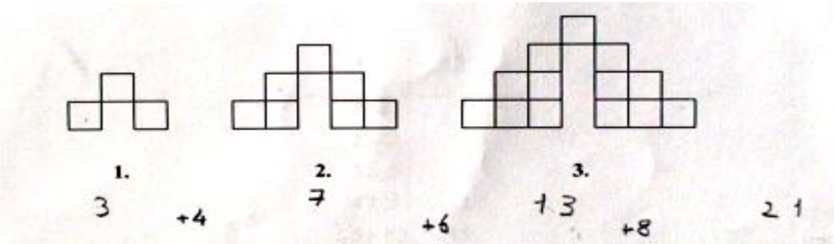
G **:** *Ne buldun söyler misin?*

D₂ **:** *Burda üç, yazayım, yedi, onüç* (şekillerin altına kare sayılarını yazdı).

Elde edilen sayı örüntüsünde de **yinelemeli** ve **diğer stratejiler** olmak üzere, iki başlık altında yer alan toplam altı strateji kullanılmıştır. Bu bağlamda **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, "farklılığı arama", "farklılık arasında farklılık arama" ve "bağıntı arama" stratejileri kullanılmıştır. Dört yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip dokuz öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, O_1, O_2, O_4, D_2, D_3) "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Örneğin;

G **:** *Nedir bunlar?*

Y₂ **:** *Bunlar gruplardaki karelerin sayısı* (kare sayıları arasındaki farkları buldu ve +4, +6 şeklinde yazdı).



İki yüksek, bir orta başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_2, Y_3, O_2) ise, "farklılık arasında farklılık arama" stratejisini kullanarak, örneğin O_2; *"dörtle altı arasındaki fark iki"* şeklinde açıklamada bulunmuştur.

Bir yüksek, iki orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip beş öğrenci (Y_1, O_2, O_4, D_2, D_3) ise, elde ettikleri sayı örüntüsünün terimler arasında "bağıntı arama" stratejisini kullanmışlardır. Örneğin;

...

Y_1 ***: İki katıyla ilişkilendirsek, iki kere üç altı bir fazlası*** (yediyi gösterdi) *bunda da iki kere yedi on dört bir eksiği olabilir ama onun devamını görmedim o yüzden.*

Şekil 33'te görüldüğü gibi, **diğer stratejiler** içinde yer alan "sayıların doğasına bakma", "farklılığın doğasına bakma" ve "çarpım tablosu arama" stratejileri kullanılmıştır. Düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_3), sayıların doğasına bakma stratejisini kullanarak *"burda da hep çift artmış yani, çift çift artmış"* şeklinde açıklamada bulunmuştur. İki yüksek, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip beş öğrenci (Y_2, Y_3, O_1, D_2, D_3) ise, "farklılığın doğasına bakma" stratejisini kullanmışlardır. Örneğin;

…

G ***:*** *Neler düşündüğünü bir anlat istersen?*

O_1 ***:*** *Burda arasındaki farklar çift sayı olarak gidiyor.*

G ***:*** *Göster istersen.*

O_1 ***:*** *Artı dört, artı altı* (birinci ve ikinci şekil arasına +4 yazdı, ikinci ve üçüncü şekil arasına +6 yazdı) *arasındaki farklar çift sayı olarak gidiyor.*

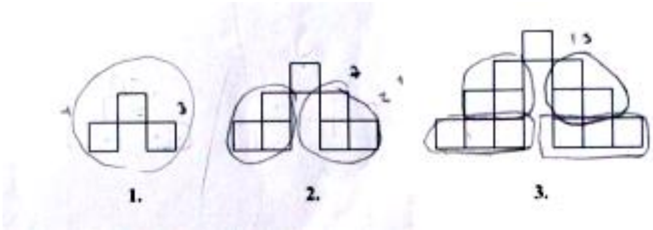
Düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci de (O_3), "çarpım tablosu arama" stratejisini kullanmıştır. Burada öğrenci, birinci şekil üç tane kareden oluştuğu için diğer şekiller içinde üçün katlarını aramıştır. Örneğin;

G ***:*** *Peki bu şekillerin oluşumuyla ilgili başka neler söyleyebilirsin?*

O_3 ***:*** *Başka..*(düşündü, şekilleri tekrar inceledi) *hıı… şey olabilir şu bir tane üçlü grup var, burda iki tane üçlü grup var bir artmış, burda ee… dört tane üçlü grup var, bir artmış.*

G : *Nasıl üçlü grup anlayamadım?*

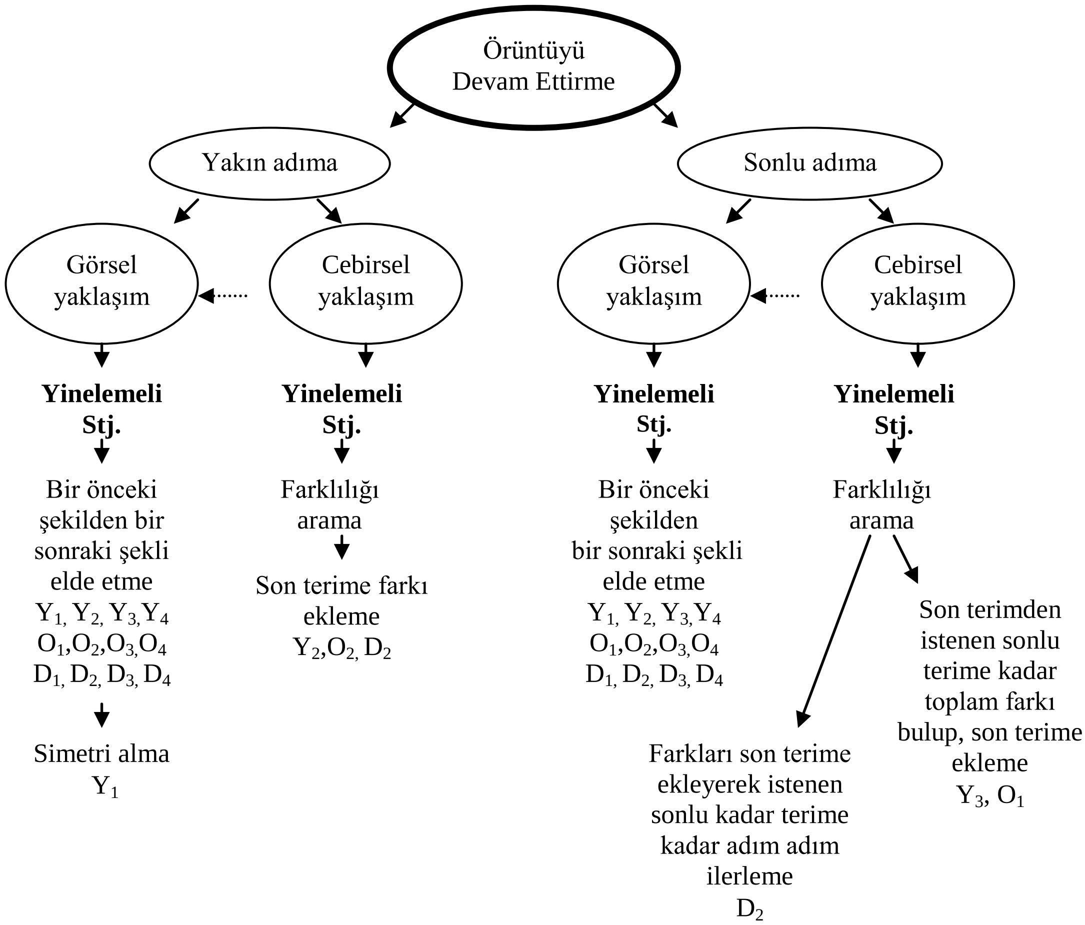
O_3 : *Burda bir tane var, burda iki tane var bir tane artmış, burda dört tane var bir tane artmış*



Elde edilen bulgular sonucunda, öğrenciler artarak değişen şekil örüntüsünde kuralı bulurken, "görsel" ve "cebirsel" olmak üzere iki yaklaşım benimsemişlerdir. Ayrıca görsel ve cebirsel yaklaşımın her ikisini benimseyen öğrenciler olduğu gibi sadece görsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler de olmuştur. Öğrenciler görsel yaklaşımda, şeklin yapısına odaklanmışlar ve bu bağlamda dört yüksek, dört orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip on bir öğrenci **yinelemeli stratejiler** ve bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan stratejiler kullanmışlardır. Ancak öğrencilerden hiçbiri görsel yaklaşım altında "fonksiyonel bir ilişki" bulamamıştır. Bunda da verilen örüntünün şekil yapısının etkisi olduğu söylenebilir. Cebirsel yaklaşımı kullanan öğrenciler ise, öncelikle verilen örüntüyü sayı örüntüsüne dönüştürmüşlerdir. Bu bağlamda da **yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** içinde yer alan stratejiler kullanmışlardır. Bu öğrencilerden bazıları, çalışmanın bir alt amaç maddesi için, sayı dizisi biçiminde verilen artarak değişen sayı örüntüsünde kullanmış oldukları stratejilere benzer stratejiler kullanmışlardır. Cebirsel yaklaşım altında da öğrencilerin hiçbiri "fonksiyonel bir ilişki" bulamamıştır. Ayrıca öğrencilerin günlüklerine yazdıkları ifadelerinden, bir çoğunun bu örüntüde zorlandıkları ve kuralı bulmada çok fazla strateji geliştiremedikleri de elde edilmiştir. Örneğin; O_2 günlüğünde, *"bugünkü örüntü şekiller arasındaydı. Bana kolay geldi. Zorlanmadım" (28.03.2007)* ifadesini kullanırken, D_1, *"bugün heyecanlıydım. Bugün ilk defa çok zorlandım. Birinci ilişkiyi ancak kolay bir biçimde yaptım. 2. ilişkide zorlandım" (28.03.2007)* ifadesini kullanmıştır. Yüksek başarılı öğrencilerden Y_1 ise, *"bugün şekil örüntüsüyle ilgili soru çözdük. İlk şekli inceledim. Biraz zorlandım"* şeklinde zorlandığını O_3 ise, "*ben bu örüntüde biraz zorlandım. İki tane kural bulabildim. Ama eminim ki ikiden fazladır" (28.03.2007)* şeklinde örüntüde kuralı bulmada zorlandığını açıklamıştır. Diğer taraftan artarak değişen şekil örüntüsünde örüntünün kuralını bulurken, kullanılan her stratejide çoğunlukla yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir. Bu durumda strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığı söylenebilir.

3.3.3.2. Örüntüyü Yakın ve Sonlu bir Adıma Devam Ettirme

Artarak değişen şekil örüntüsünde, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 34'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 34: Artarak Değişen Şekil Örüntüsünü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirmede Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerinden artarak değişen şekil örüntüsünde, önce örüntüyü çizerek bir adım (yakın) devam ettirmeleri istenmiştir. Şekil 34'te görüldüğü gibi öğrenciler, örüntüyü bir adım devam ettirirken, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt temasında olduğu gibi, "görsel" ve "cebirsel" yaklaşımları benimsemişler ve bu yaklaşımlar altında **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan stratejiler kullanmışlardır.

Cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler (Y_2, O_2, D_2), "farklılığı arama" stratejisini kullanarak, dördüncü adımda yer alan şeklin toplam kare sayısını belirlemişlerdir. Örneğin;

G **:** *Peki örüntünün dördüncü adımındaki şekli oluşturabilir misin?*

O_2 **:** *Onüç sekiz daha yirmibir.*

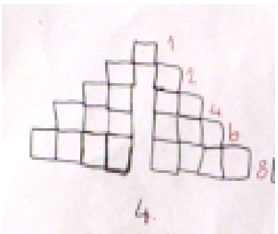
Şekil 34'te görüldüğü gibi, yakın adımda görsel yaklaşım kapsamında öğrencilerin tamamı, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanmışlardır. Bu stratejiyi kullanan öğrenciler şeklin yapısını dikkate alarak devam eden şekli oluşturmuşlardır. Örneğin;

G **:** *Peki örüntünün dördüncü adımındaki şekli oluştur bakalım?*

D_1 **:** (dördüncü şekli oluştururken önce üçüncü şekli oluşturdu ve üçüncü şekle bakıp kontrol etti daha sonra en altta dörder kare ekledi).

G **:** *Bu 4. adımdaki şekli nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?*

D_1 **:** *ee… bunun* (3. şekli gösterdi) *altta üç kare varken, burda onun altında da dört kare olması gerekiyor bunlar çünkü üstekinin bir fazlası oluyor alttaki öyle yaptım.*



Görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden Y_1 "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanarak dördüncü şekli oluştururken aynı zamanda simetriden de yararlanmıştır. Buna göre dördüncü şeklin sol yanını oluşturduktan sonra simetrisini alarak sağ yanını da oluşturmuştur. Örneğin;

G : *Peki örüntünün 4. adımındaki şekli oluşturabilir misin?*

Y_1 : (şekilleri tek tek inceledi, en üstte bir kare çizdi ve bu karenin hemen sol altına aşağıdaki gibi dört tane kareyi alt alta çizdi, sonra dört karenin sol yanına üç tane, iki tane ve bir tane kare çizdi, sonra şeklin diğer yanına geçti ve aynı çizimleri orada yaptı).

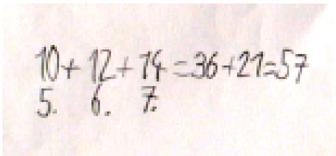
G : *Peki nasıl yaptın?*

Y_1 : *İlk ee… Mesela burda* (3. şekilde en üst karenin sol yanında olan 1. sütunu gösterdi) *ikiyken üçe çıkmış ben de burda bunu dört yaptım, dört kare, burda* (3. şekilde sol tarafta 2. sütunu gösterdi) *ikiyken bir artcak yine üç yaptım, bu da* (3. şekilde 3. sütunu gösterdi) *bir artacak yine iki olacak, en son hepsinde yine bir kare ekleniyor. Bunun da karşısına simetrisini çizdim.*

Katılımcı öğrencilerinden, artarak değişen şekil örüntüsünde, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında yedinci adımdaki şekli çizmeleri istenmiştir. Şekil 34'te görüldüğü gibi öğrenciler, yedinci adımdaki şekli çizerken yakın adımda olduğu gibi, "görsel" ve "cebirsel" yaklaşımları benimsemişlerdir. Öğrencilerin tamamı görsel yaklaşımı, bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_3, O_1, D_2) ise, önce cebirsel yaklaşımı daha sonra görsel yaklaşımı benimsemişlerdir. Cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini kullanmıştır. Bu stratejinin kullanımında iki yol izlenmiştir. Yollardan birisi, bir yüksek, bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_3, O_1) tarafından kullanılan **"son teriminden, istenen sonlu terime kadar toplam farkı bulup, son terime ekleme"**, diğeri ise düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci (D_2) tarafından kullanılan **"farkları son terime ekleyerek istenen sonlu terime kadar adım adım ilerleme"** biçiminde gerçekleştirilmiştir. Birinci yola ilişkin örnek;

G : *Örüntünün yedinci adımındaki şekli oluşturabilir misin?*

O_1 :*Beşinci, altıncı, yedinci* (kare sayıları arasındaki farkları topladı ve şaşırmamak için adım sayılarını aşağıdaki gibi fark sayılarının altına yazdı).



O_1 : *Otuzaltı* (farkları topladı ve 36 buldu) *otuzaltı olursa, yirmibire oyuzaltı eklersem …elliyedi, elliyedi oluyo. 36+21=57 oluyor. 57 kare olur.*

İkinci yola ilişkin örnek;

G : *Örüntünün 7. adımındaki şekli oluşturabilir misin?*

…

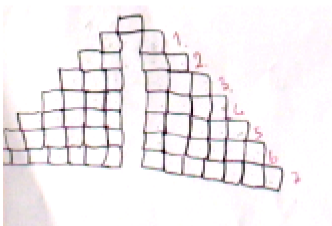
D_2 : *Otuzbir oluyor* (4. adımdaki kare sayısına 10 ekledi)…

G : *Şuraya da yapabilirsin*

D_2 : *Şimdi yirmibir dördüncü şekil, otuzbir beşinci şekil, kırküç,* (31 ile 12 yi topladı) *şu dörüncü şekil, beşinci şekil, altıncı şekil, şimdik ondört daha artırmamız gerekiyor* (43 ile 14 ü topladı) *elliyedi olması gerekiyor, o zaman.*

Şekil 33'te görüldüğü gibi, görsel yaklaşım kapsamında ise, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken öğrencilerin tamamı, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanmışlardır. Bu stratejiye göre, öğrencilerin bir kısmı, örüntüde bir önceki şeklin en alt basamağına kareler ekleyerek, bir sonraki şekli elde etmişler ve bu işlemi yedinci adıma kadar devam ettirmişlerdir. Örneğin;

G : *Örüntünün 7. adımındaki şekli oluşturabilir misin?*



…

G : *Nasıl yaptın anlatır mısın?*

D_1 : *İlk baş birinci adım böyle olduğu için buna birinci adım, ikinci adım, üçüncü adım, dördüncü adım, beşinci adım, altıncı adım, yedinci adım* (yedinci şekilde en üstte yer alan karenin altındaki birinci basamağı birinci adım, ikinci basamağı ikinci adım, üçüncü basamağı üçüncü adım, dördüncü basamağı dördüncü adım, beşinci basamağı beşinci adım, altıncı basamağı altıncı adım, yedinci basamağı yedinci adım olarak isimlendirdi) *diye yaptım.*

G : *birinci adım dediğin şu oluyor herhalde* (yedinci şekil içinde yer alan birinci adımdaki şekli gösterdim).

D_1 : *Evet. İlk bundan sonra da hep bir kare bir kare artırdım, aynı bu kısımda da öyle yaptım* (şeklin diğer simetrik olan kısmını gösterdi) *böyle buldum.*

Kimi öğrenciler ise yedinci şekli oluştururken, "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisi kapsamında, her şekilde en alt basamakta yer alan kare sayısına ve en üst karenin altında yer alan boşluk sayısına odaklanmışlardır. Örneğin;

G *: Peki örüntünün 7. adımındaki şekli oluştur deseydim?*

O_4 *: ... yedi tane boşluk olurdu ve yanlarda yedi tane kareler olurdu.*

G *: Nerede yedi tane kare olurdu?*

O_4 *: En alt karelerde.*

G *: Neden en altta yedi tane kare olur?*

O_4 *: Çünkü dörtte dört tane, üçte üç tane, ikide iki tane, bir de de birer tane kareler var*

G *: Yedide de yedi olmalı diyorsun*

O_4 *: Evet.*

G *: Yap bakalım buraya, çiz bakalım.*

...

O_4 *: Yedinci şekil*

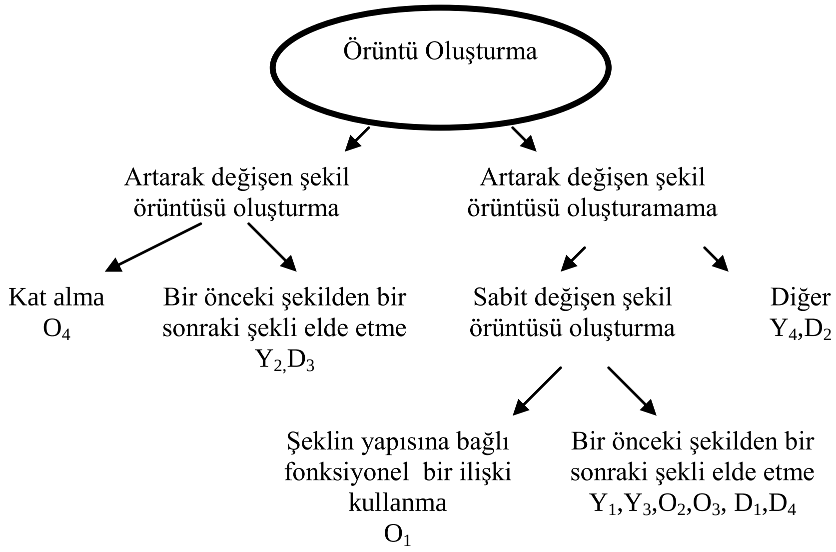
G *: hıı…bir de nasıl yaptığını bir daha anlat bakalım*

O_4 *:Yanlarda yedi tane şekil, birer tane eksilerek merdiven şeklinde oluşturdum, aralarda yedi tane boşluk var.*

Elde edilen bulgular sonucunda, katılımcı öğrenciler artarak değişen şekil örüntüsünü yakın ve sonlu bir adıma çizerek devam ettirirken, "görsel" ve "cebirsel" yaklaşımı benimsemişlerdir. Görsel yaklaşım kapsamında, öğrenciler örüntünün dördüncü adımındaki şekli çizerek bir adım devam ettirmişlerdir. Bunu yaparken öğrencilerin tamamı yinelemeli stratejiler içinde yer alan, şeklin yapısı gereği ya en üst karenin altında kalan boşluk sayısına ya da en alt basamaktaki kare sayısına odaklanmışlar ve "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanmışlardır. Araştırmacı öğrencilerin örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken kullandıkları yaklaşımlara ilişkin günlüğünde *"...Dördüncü şekli oluştururken çok zorlanan olmadı. Örüntüyü üçüncü şeklin en alt basamağına dört kare ekleneceğini söyleyerek devam ettirenler oldu. Bazıları önce dördüncü adımdaki toplam kare sayısını buldular, sonra da şeklin oluşumuna dikkat ederek örüntüyü devam ettirdiler. Öğrencilerden yedinci adımdaki şekli oluşturmalarını istediğimde ise, zorlananlar oldu" (22.03.2007*) şeklinde açılamada bulunmuştur. Örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken cebirsel yaklaşımı sadece üç öğrenci benimsemiştir. Bu yaklaşımla bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken ise, görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerin tamamı yinelemeli stratejiler içinde yer alan, "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanarak yedinci adımdaki şekli çizmişlerdir. Bunu yaparken şeklin yapısı gereği ya en üst karenin altında kalan boşluk sayısına ya da en alt basamaktaki kare sayısına odaklanmışlar ve bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etmişlerdir. Örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken cebirsel yaklaşımı benimseyen bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Ancak öğrenciler cebirsel yaklaşımı sadece yakın ve sonlu adımdaki toplam nokta sayısını belirlemek için kullanmışlar, daha sonra görsel yaklaşıma geçmişlerdir. Bu öğrencilerin cebirsel yaklaşımı, yakın ve sonlu adımdaki şekilleri doğru çizdiklerinden emin olmak adına kullandıkları söylenebilir. Diğer taraftan verilen örüntüyü görsel ya da cebirsel yaklaşımı benimseyerek yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken, kullanılan her stratejide genel olarak yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir. Dolayısıyla bu örüntü çeşidinde de, strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığı söylenebilir.

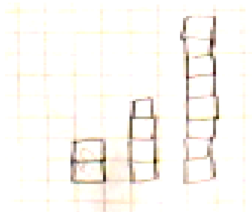
3.3.3.3. Örüntü Oluşturma

Artarak değişen şekil örüntüsünde, örüntü oluşturma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 35'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 35: Artarak Değişen Şekil Örüntüsü Oluşturmada Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerinden, artarak değişen bir şekil örüntüsü oluşturmaları istenmiştir. Şekil 35'te görüldüğü gibi, bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (Y_2, O_4, D_3) artarak değişen bir şekil örüntüsü oluştururken, diğer dokuz öğrenci (Y_1, Y_3, Y_4, O_1, O_2, O_3, D_1, D_2, D_4) artarak değişen şekil örüntüsü oluşturamamıştır. Artarak değişen şekil örüntüsü oluşturabilen öğrencilerden O_4, örüntüyü oluştururken, "kat alma" stratejisini kullanmıştır. Öğrenci önce örüntünün her adımında yer alan şekil sayılarını belirlemiş ve buna dayalı olarak şekilleri çizmiştir. Örneğin;

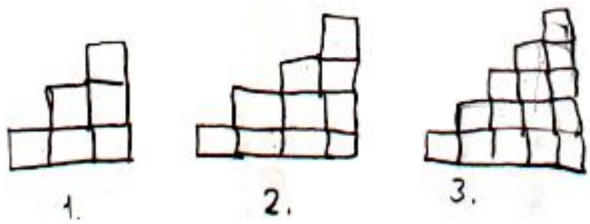


G *: Örüntüyü oluştururken ne düşündün?*

O_4 *: İki katı, iki tane, iki katı dört tane, iki katı sekiz tane*

Y_2 ve D_3 ise, örüntüyü oluştururken "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme stratejisini" kullanmışlardır. Örneğin;

G : *Verilen örüntüde olduğu gibi, şekillerden oluşan bir örüntü oluşturabilir misin?*



…

G : *Peki nasıl yaptın?*

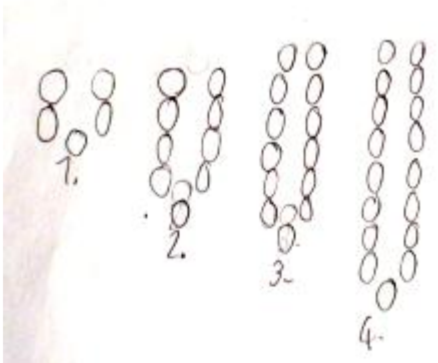
Y_2 : *Burda üç kare var, burda iki, burda bir, bunları artırıyoruz ve de üstüne bir tane daha kare ekliyoruz bu birken iki oluyor, ikiyken üç oluyor, üçken dört oluyor, bu da hiç olmadığından bir* oluyor (ikinci adımdaki şekilde her sütunun üstüne bir kare eklediğini açıkladı).

G : *Peki üçüncü adım nasıl olmalı?*

Y_2 : *üçüncü adım da da beş tane altta kare olur, sonra dört…*

Şekil 35'te görüldüğü gibi, artarak değişen şekil örüntüsü oluşturamayan öğrenciler, sabit değişen bir şekil örüntüsü ya da daha farklı şekil örüntüleri oluşturmuşlardır. Orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_1), "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi kullanarak sabit değişen şekil örüntüsü oluşturmuştur. Örneğin;

G : *Verilen örüntüde olduğu gibi, şekillerden oluşan bir örüntü oluşturabilir misin?*



G : *Nasıl yaptın?*

O_1 : *Ben şimdi burada çember çizdim buraya* (birinci şekilde en altta yer alan çemberi gösterdi) *sonra arada boşluk kalacak şekilde yanlarına yuvarlak çizdim, çember çizdim, aradaki yani buralara* (birinci şekilde boşlukları gösterdi) *sığacak kadar adım sayısının iki katı kadar boşluk bıraktım.*

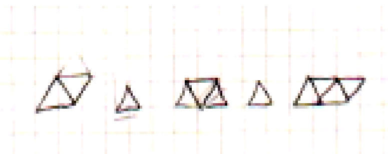
G : *İkinci adımda ne kadar boşluk var?*

O_1 : *Dört tane, üçüncü adımda bir, iki, üç, dört, beş, altı, altı tane*

G ***: Diğerinde?***

$\boldsymbol{O_1}$ ***: Bir, iki, üç, dört, beş, altı, yedi, sekiz, sekiz tane.***

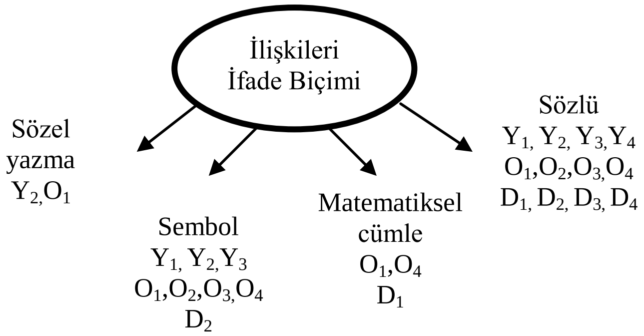
Y_4 ve D_2 ise, farklı yapıda bir şekil örüntü oluşturmuşlardır. Örneğin Y_4 aşağıda görüldüğü gibi örüntü oluştururken, üçgen kullanmış ancak üçgenleri birleştirerek birinci adımda iki üçgenden bir paralelkenar, ikinci adımda üçgen, üçüncü adımda üç tane üçgenden yamuk, dördüncü adımda tekrar üçgen ve beşinci adımda dört tane üçgenden bir paralelkenar oluşturmuştur.



Elde edilen bulgular sonucunda bir yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" ve "kat alma" stratejilerini kullanarak artarak değişen bir şekil örüntüsü oluşturabilmiştir. İki yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip dokuz öğrenci sabit değişen bir şekil örüntüsü, bir yüksek, bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci ise, sabit değişen ve artarak değişen örüntü dışında farklı örüntüler oluşturmuşlardır. Dolayısıyla bu bulgulardan, öğrencilerin örüntü oluştururken, istenilen örüntünün çeşidini dikkate almadıkları söylenebilir. Diğer taraftan artarak değişen şekil örüntüsü oluşturan ya da oluşturamayan öğrenciler arasında yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir. Dolayısıyla örüntü oluştururken strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığı söylenebilir.

3.3.3.4. İlişkilerin İfade Biçimleri

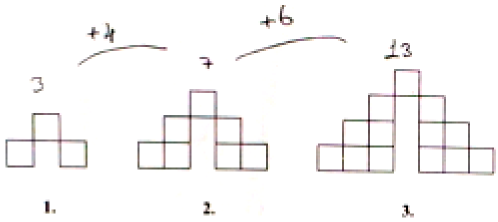
Artarak değişen şekil örüntüsünde, ilişkilerin ifade biçimleri alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 36'da verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 36: Artarak Değişen Şekil Örüntüsünde Kullanılan İfade Biçimleri

Katılımcı öğrencilerin, artarak değişen bir şekil örüntüsünü inceleme ve kuralı bulmada, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede, artarak değişen bir şekil örüntüsü oluşturmada, nasıl bir ifade biçimi kullandıkları belirlenmek istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 36'da görüldüğü gibi, "sözlü", "matematiksel cümle", "sembol" ve "sözel yazma" olmak üzere dört ifade biçimi kullanılmıştır. Öğrencilerin tamamı her aşamada belirledikleri tüm ilişkileri öncelikle "sözlü" olarak ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra, üç yüksek, dört orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip sekiz öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, O_1, O_2, O_3, O_4, D_2), örüntüde her adımda yer alan toplam şekil sayısını ve bulduğu sayılar arasındaki sabit farkı "sembol" ile ifade etmişlerdir. İki orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (O_1, O_4, D_1) ise, sonlu adımdaki terim sayısını ve şekil sayıları arasındaki bağıntıları, "matematiksel cümle" ile, bir yüksek ve bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci de (Y_2, O_1) şekil sayıları arasındaki farkları günlüklerinde yazılı olarak dile getirmişlerdir. Aşağıda her bir ifade biçimine birer örnek sunulmuştur.

Sembol (Y_3);



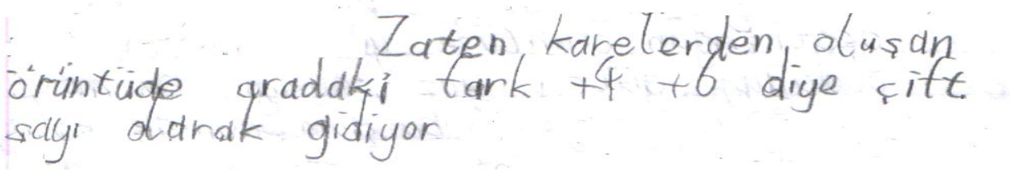
Matematiksel cümle-Sözlü;

Y_2 : *Evet en son artı altıydı, artı sekiz oldu, sonra beşinci adımda, şurda toplayım*


4+6+8+10+12=40

Sözel yazma;

O_1 : *(22.03.2007 tarihli günlük)*


Zaten karelerden oluşan örüntüde aradaki fark +4 +6 diye çift sayı olarak gidiyor

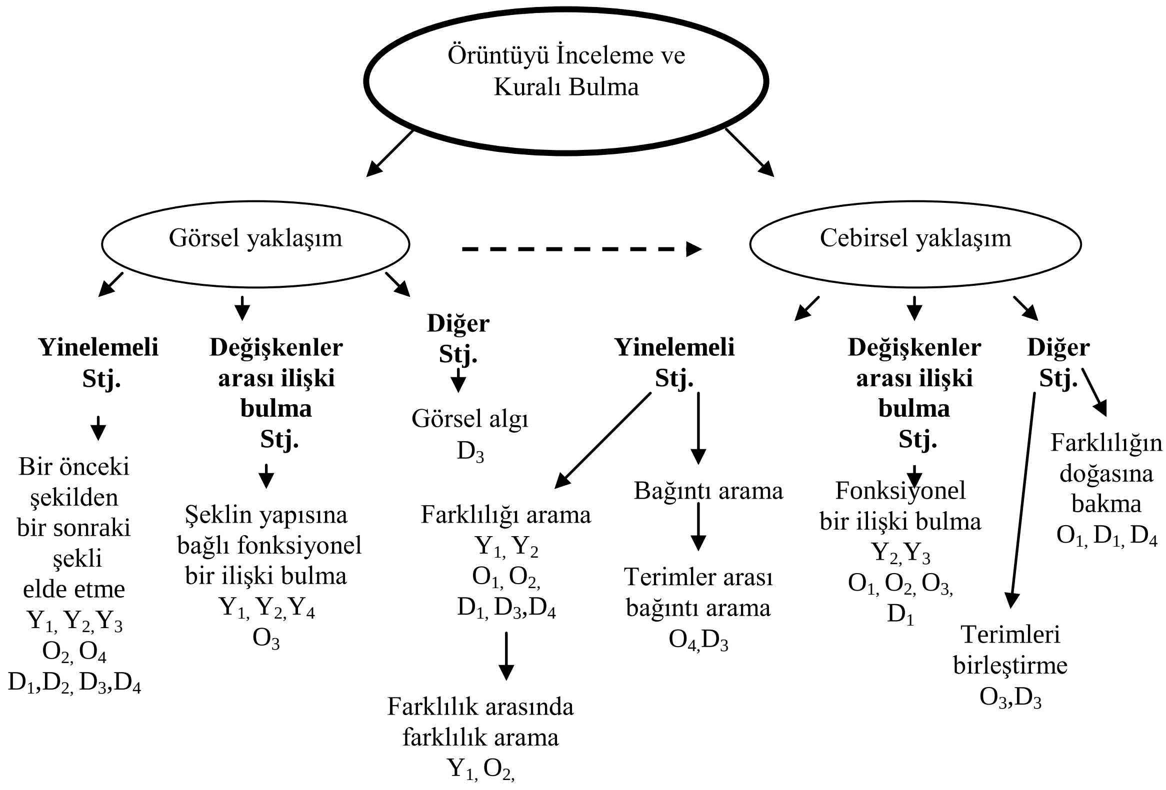
Elde edilen bulgular sonucunda artarak değişen şekil örüntüsünde; örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ile artarak değişen bir şekil örüntüsü oluşturmada en fazla kullanılan ifade biçiminin “sözlü” ve “sembol” olduğu görülmüştür.

3.3.4. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Artarak Değişen Şekil Örüntüsünü (2) Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Bulgular

3.3.4.1. Örüntüyü İnceleme ve Kuralı Bulma

Artarak değişen şekil örüntüsünde (EK-4, soru 9), örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 37’de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.

Katılımcı öğrencilerden artarak değişen şekil örüntüsünde kuralı bulmaları istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 37’de görüldüğü gibi, öğrenciler kuralı bulurken “görsel” ve “cebirsel” olmak üzere iki yaklaşım benimsemişlerdir. Görsel ve cebirsel yaklaşım kapsamında ise, **yinelemeli**, **değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** olmak üzere üç başlık altında toplam dokuz strateji kullanılmıştır.



Şekil 37: Artarak Değişen Şekil Örüntüsünü İnceleme ve Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejiler

Görsel yaklaşımı benimseyen üç yüksek, iki orta ve dört düşük başarı düzeyine sahip dokuz öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, O_2, O_4, D_1, D_2, D_3, D_4) **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanmışlardır. Bu öğrenciler şeklin yapısına bağlı olarak, her yeni şekle kaç tane kare eklendiğini ifade etmişlerdir. Örneğin;

G ***: Burada her adımı karelerden oluşmuş bir şekil örüntüsü verilmektedir. Bu örüntüyü inceler misin?***

D_1 ***:*** (İkinci şekil içinde yer alan birinci şekli kırmızı kalemle üzerinden çizerek gösterdi, benzer şekilde üçüncü şekil içinde yer alan ikinci şekli kırmızı kalemle çizerek gösterdi).

G *: Ne yaptın?*

D_1 *: Ee… şimdi burada bir, iki* (birinci şekildeki kareleri saydı) *bunları aldım, birinci şekilden nasılsa, sonra ikinci şekilde nerelere kaç tane kare koyulduğunu öğrenmeye çalıştım. Ee… bunun* (birinci şekilde en altta birinci. satırda yer alan kareyi gösterdi) *yanına böyle bir tane koyuluyor iki* (birinci şekilde birinci satırda yer alan karenin yanına bir tane kare eklendiğini gösterdi) *buraya bir tane* (ikinci satırda yer alan karenin yanına da bir tane kare eklendiğini gösterdi) *bir de yukarı* (sonra en üstte bir tane kare eklendiğini ve ikinci şeklin oluştuğunu söyledi). *Aynı burada da öyle* (üçüncü şekli gösterdi) *bir tane yana dolduruyor, ama burada bir tane doldururken buraya da bir fazla oluyor eşit olmuyor ikisi de, üsttün bu sefer burasını doldurmuş burası değilde, sonra bir üst.*

Şekil 37' de görüldüğü gibi, iki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_1, Y_2, Y_4, O_3) ise, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanmışlardır.

Örneğin;

Y_4 *: Birinci adımda örneğin birer basamaklar var, ee… her basamakta birer kare, ikinci adımda üç basamak var her basamakta ikişer kare ama en üst basamakta bir tane, üçüncü şekilde de dört basamak var, üç basamakta üçer kare, dördüncü basamağında da bir tane kare var.*

…

G *: her adımda toplam kare sayısını veren kuralı ifade etmeni istiyorum.*

Y_4 *: Mesela üçüncü şekli örnek vereyim ben, üç basamak, her basamakta üçer kare var, üçle üçü çarpcaz bir de en üstteki basamak olduğu için kare orda da on.*

Şekil 37'de görüldüğü gibi, düşük başarılı bir öğrenci (D_3) **diğer stratejiler** içinde yer alan "görsel algı" stratejisini kullanmıştır. Öğrenci birinci ve ikinci şeklin diğer şekiller içinde kaç tane yer aldığını bulmuştur. Örneğin;

G *: Peki şekillerin oluşumuyla ilgili bir şeyler gözlemledin mi?*

D_3 *: Burda şu şekil* (birinci şekli gösterdi) *şurda iki tane var, bir tane de fazladan koymuşlar* (birinci şeklin ikinci şekil içinde iki tane olduğunu ve üstte bir tane daha kare olduğunu söyledi) *burda (üçüncü şekli gösterdi) bir, iki … burda beş tane var o* *şekilden iki tane fazla koymuşlar* (birinci şeklin üçüncü şekil içinde beş tane olduğunu ve iki tane de fazla kare olduğunu söyledi).

G *: Söylediklerini gösterir misin?*

D_3 *: Şu şekil şurda var* (birinci şekli gösterdi)

G *: Çiz istersen*

D_3 *:* (ikinci şekilde en üstteki kare dışında kalan dört kareyi birinci şekil gibi iki tane olacak şekilde kırmızı kalemle çizdi) *bir de şurdan şöyle var bir de* (daha sonra en üstte kalan kareyi altta köşede kalan kare ile eşleyerek birinci şekli elde etti) *burda da* (üçüncü şekil içinde birinci şekli görebildiği kadar çizdi) *bu var, bu var, bir de şöyle, başkaaa şunla şu var o şekle benzeyen, bu var, bununla da bu var, bu da bununla.*

G *: Yani sen birinci şeklin diğer şekiller içinde kaç tane olduğunu bulmaya çalıştın…*

D_3 *: Evet… Burda da bir, iki, üç, dört, …yedi tane var* (üçüncü şekil içinde birinci şekli görebildiği kadar saydı ve 7 tane olduğunu söyledi*). Başkaaa şu şekil, ikinci şekil, şu şekilde* (durdu ikinci şekli, üçüncü şekil içinde kaç tane olduğunu bulmaya çalıştı) *ikinci şekil, üçüncü şekil içinde bir tane var şöyle* (kalemle tarayarak gösterdi).

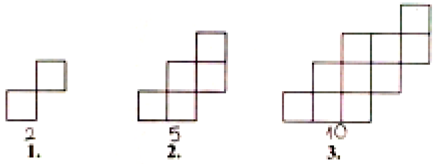
Şekil 37'de görüldüğü gibi, cebirsel yaklaşım kapsamında, Y_4 ve D_2 dışında diğer öğrenciler, öncelikle verilen örüntünün her adımında yer alan kareleri sayarak, şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşlerdir. Elde edilen sayı örüntüsünde de, **yinelemeli**, **değişkenler arası ilişki bulma** ve **diğer stratejiler** olmak üzere üçü başlık altında toplam altı strateji kullanılmıştır. Bu bağlamda **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan, "farklılığı arama", "farklılık arasında farklılık arama" ve "bağıntı arama" şeklinde stratejiler kullanılmıştır. İki yüksek, iki orta ve üç düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrencinin (Y_1, Y_2, O_1, O_2, D_1, D_3, D_4) kullandığı "farklılığı arama" stratejisi öncelikli olarak odaklanılan stratejidir. Örneğin;

G *: Burada her adımı karelerden oluşmuş bir şekil örüntüsü verilmektedir. Bu örüntüyü inceler misin?*

O_2 *:* (her adımdaki kare sayılarını 2, 5, 10 olarak yazdı)

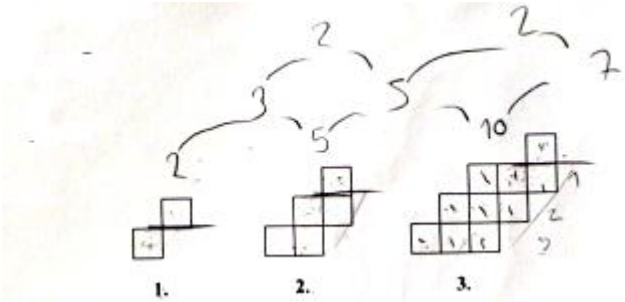
G *: Ne yaptın?*

O_2 *: Kare sayılarını buldum.*



“Farklılığı arama” stratejisini kullanan öğrencilerden bir yüksek ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci (Y_1, O_2) ise, “farklılık arasında farklılık arama” stratejisini de kullanmışlardır. Örneğin;

Y_1 : *... mesela üçken beş olmuş* (kare sayıları arasındaki farkları buldu ve 2 ile 5 arasına 3, 5 ile 10 arasına 5 yazdı) *iki fark var* (farkların farkını buldu ve 3 ile 5 arasına 2 yazdı).



Şekil 37’de görüldüğü gibi, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci (O_4, D_3) elde ettikleri sayı örüntüsünün terimleri arasında “bağıntı arama” stratejisini kullanmışlardır. Örneğin;

G *: Peki örüntüde yer alan şekiller arasında neler gözlemledin?*

O_4 *: Ee… sayıları yazdım, kaç kare sayısı olduğunu, iki katının bir fazlası, burda da iki katı, iki katının bir fazlası olarak, iki, bir, iki, bir.*

G *: Yani iki katının bir fazlası beş, bu da iki katı, sonra gelecek olan iki katının bir fazlası mı olacak diyorsun?*

O_4 *: Evet öyle. Başkaaa yok ama.*

O_4’ün kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

f(1)=2

f(2)=2.f(1)+1=2.2+1=5

f(3)= 2.f(2)=2.5=10

Öğrenci, birinci terimin iki katının bir fazlasını alarak ikinci terimi, ikinci terimin iki katını alarak üçüncü terimi elde ettiği için bu bağıntıların örüntünün devamında da, benzer şekilde kullanılabileceğini düşünmüştür.

Şekil 37'de görüldüğü gibi, üç yüksek, üç orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip altı öğrenci (Y_2, Y_3, O_1, O_2, O_3, D_1) ise, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanmışlardır. Öğrenciler adım sayısının karesinin bir fazlasını alarak her adımdaki kare sayılarını elde etmişlerdir. Örneğin;

G *:Örüntünün her bir adımındaki şekillerin oluşumunda yer alan, karelerin toplam sayısını veren bir kural ifade edebilir misin?*

O₁ *:Toplam sayısı bir dakka, iki katı, üç katı, burda dört katı, üç katının bir fazlası oluyor, olmuyor ee ... bir dakka başkaaa ... haa buldum. Şimdi bu sayıların* (adım sayılarını gösterdi) *karesinin bir fazlası oluyor. Evet birin karesi, bir kere bir, bir olur bir fazlası iki, ikinin karesi dört bir fazlası beş, üçün karesi dokuz bir fazlası on.*

Fonksiyonel bir ilişkiyi bulan D_1 ise, bu ilişkiyi günlüğünde de *"bugünkü örüntünün ilişkisi adım sayısı çarpı kendisi artı bir ekleyip öbür toplam kare sayısını elde ediyorum" (05.04.2007)* şeklinde dile getirmiştir.

Cebirsel yaklaşımı benimseyerek "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanan Y_2 ve O_3 ise, aynı zamanda görsel yaklaşım kapsamında da şeklin yapısından yararlanarak fonksiyonel bir ilişki bulan öğrencilerdir. Örneğin;

Y_2 *: Şimdi birinci adımda burası bir oluyor, hem de bir sıra oluyor* (birinci şekilde en altta bir kare ve bir basamak olduğunu söyledi) *sonra bir oluyor* (birinci şekilde en üstteki kareyi gösterdi) *ikinci adımda iki tane oluyor, hem de iki oluyor* (ikinci şekilde iki basamak ve her basamakta iki kare olduğunu söyledi) *üçüncü adımda üç tane oluyor, hem de üç oluyor* (üçüncü şekilde üç basamak ve her basamakta üç kare olduğunu söyledi) *ve de her zaman başında bir oluyor* (her şekilde en üstte bir kare olduğunu söyledi).

…

G *: Karelerin toplam sayısını veren bir kural ifade edebilir misin?*

...

Y_2 *: Adım sayısının karesini bulup bir ekliyorum.*

Örneğin;

G *: Ne düşündüğünü söyler misin?*

O_3 *: Hepsinin yanlarına birer tane daha kare konulup, en üstte de bir tane daha kare konuyor. Sonra şey ee ... adımın kendi sayısı ile çarpımının bir fazlası. Birle biri çarpıyor bir ekliyorlar iki, ikiyle ikinin çarpımı dört bir daha beş, üçle üçün çarpımı dokuz bir daha on. Bu şekilde..*

Şekil 37'de görüldüğü gibi, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (O_1, D_1, D_4) **diğer stratejiler** içinde yer alan, "farklılığın doğasına bakma" ve bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci (O_3, D_3) ise, "terimleri birleştirme" stratejilerini kullanmışlardır. Aşağıda her iki stratejiye ilişkin birer örnek sunulmuştur. Örneğin;

G *: Peki örüntüde yer alan şekiller arasında neler gözlemledin?*

O_1 *: Şimdi bu kareler... tek sayı olarak artıyor, üç, beş diye artıyor, yedi, dokuz diye artar ... Burda üç artmış, burda beş artmış, tek sayı olarak artar.*

Örneğin;

G *: Bulduğun ilişkiyi ifade eder misin?*

O_3 *: Burda iki tane var, burda beş tane var, burda da on tane var* (her adımdaki toplam kare sayılarını buldu) *ikisini çarpmışlar on bulmuşlar.*

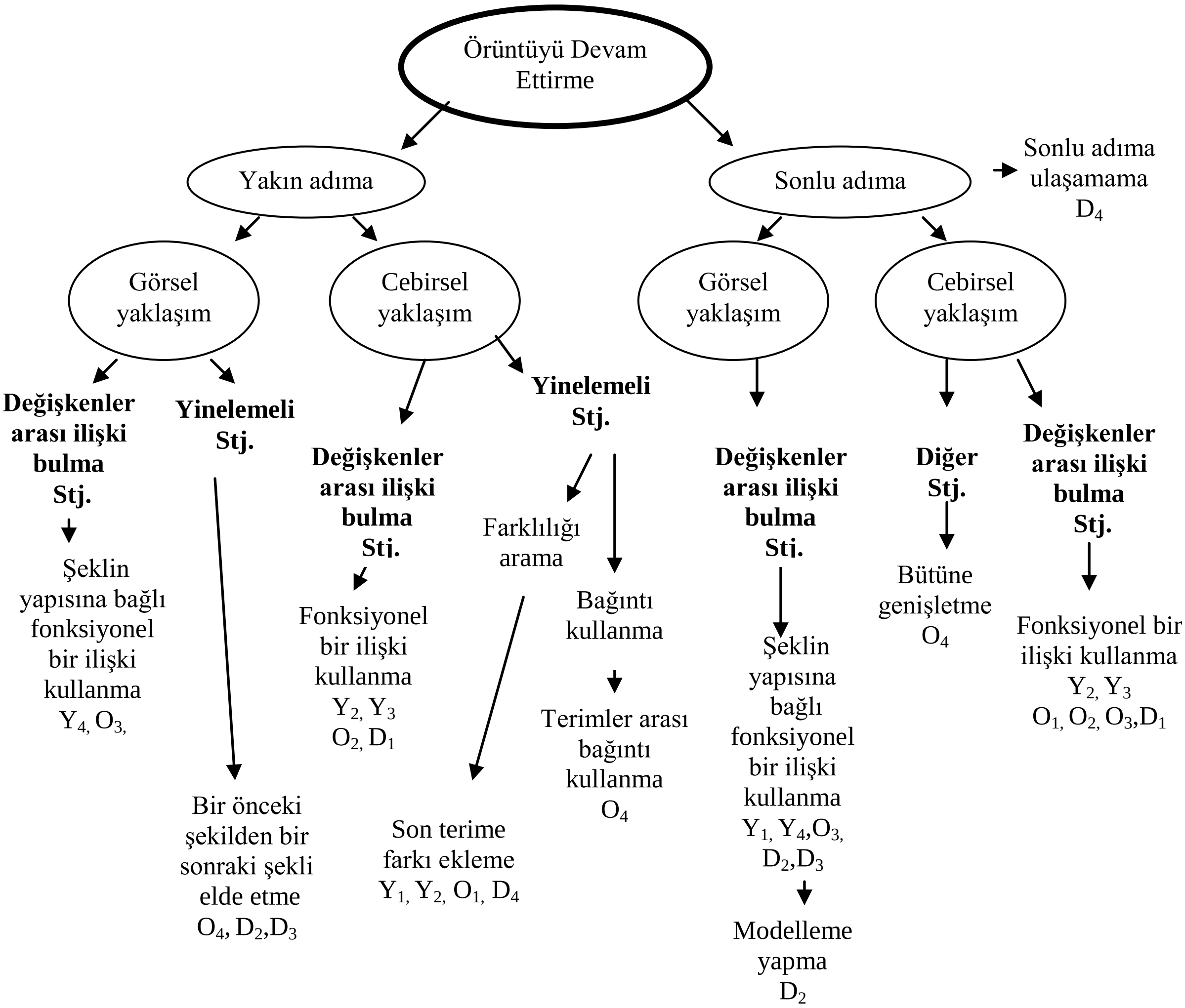
D_3 ise terimleri birleştirme stratejisini, birinci ve ikinci terim toplamının üç fazlasının üçüncü terimi verdiğini *"başkaaa ... şu şekille şu şekli toplamış, birinci şekille, ikinci şekli toplamış yani ikiyle beşi toplamış üç artırmış, üçüncü şekli bulmuş"* şeklinde ifade etmiştir.

Elde edilen bulgular sonucunda, katılımcı öğrenciler artarak değişen şekil örüntüsünde kuralı bulurken, diğer artarak değişen şekil örüntüsünde de olduğu gibi, "görsel" ve "cebirsel" olmak üzere iki yaklaşım benimsemişlerdir. Ancak orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci sadece cebirsel yaklaşımı, bir yüksek, bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci de sadece görsel yaklaşımı benimsemiştir. Öğrenciler bu yaklaşımlar altında da,

yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve **diğer stratejiler** içinde yer alan stratejileri kullanmışlardır. Görsel yaklaşımı benimseyen üç yüksek, iki orta ve dört düşük başarı düzeyine sahip dokuz öğrenci şeklin yapısına bağlı olarak, her yeni şekil için bir önceki şekle eklenen kare sayısını ifade ederek **yinelemeli stratejilere**, üç yüksek, bir orta başarı düzeyine sahip üç öğrenci ise, her şekli adım sayıları ile ilişkilendirerek, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisine** odaklanmışlar ve böylece şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiye ulaşmışlardır. Cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler ise, öncelikle verilen şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşlerdir. Daha sonra **yinelemeli stratejiler kapsamında** iki yüksek, iki orta, üç düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrenci, "farklılığı arama", bir yüksek, bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci "farklılık arasında farklılık arama" bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci "bağıntı arama" stratejilerini, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi kapsamında** ise**,** iki yüksek, üç orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip altı öğrenci "fonksiyonel bir ilişki bulma" stratejilerini kullanmışlardır. Bu stratejiyi kullanan öğrenciler, fonksiyonel bir ilişkiye terimleri adım sayısı ile ilişkilendirerek ulaşmışlar ve örüntünün genel kuralını ifade etmişlerdir. Örneğin D_1, genel kuralı günlüğünde de *"bugün sorular çok basitti. Örüntünün ilişkisini yine bulabildim…Bugünkü örüntünün ilişkisi adım sayısı çarpı kendisi artı bir ekleyip öbür toplam kare sayısını elde ediyorum"* şeklinde Y_2 ise, *"bugünkü örüntü de kolaydı. Çünkü adım sayısının karesini bulup bir ekliyoruz" (05.04.2007)* şeklinde dile getirmiştir. Bir yüksek ve bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci ise, hem görsel hem de cebirsel yaklaşımda fonksiyonel ilişkiyi bulabilmiştir. Diğer stratejiler kapsamında ise, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci "farklılığın doğasına bakma" ve bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip iki öğrenci terimleri birleştirme stratejilerini kullanmışlardır. Sonuç olarak, öğrencilere sunulan diğer artarak değişen şekil örüntüsünde hiçbir öğrenci fonksiyonel bir ilişkiye ulaşmazken, verilen bu şekil örüntüsünde öğrencilerin çoğunluğunun fonksiyonel ilişkiye ulaşması, fonksiyonel ilişkiyi bulmada şeklin yapısının etkili olduğunu göstermektedir. Diğer taraftan artarak değişen şekil örüntüsünde kuralı bulurken, kullanılan her stratejide genel olarak yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir. Bu durumda strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığı söylenebilir.

3.3.4.2. Örüntüyü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirme

Artarak değişen şekil örüntüsünde, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 38'de verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.



Şekil 38: Artarak Değişen Şekil Örüntüsünü Yakın ve Sonlu Bir Adıma Devam Ettirmede Kullanılan Stratejiler

Katılımcı öğrencilerinden, artarak değişen şekil örüntüsünü yakın bir adıma devam ettirme kapsamında, verilen örüntünün dördüncü adımında yer alan toplam kare sayısı istenmiştir. Şekil 38'de görüldüğü gibi öğrenciler, örüntüyü bir adım devam ettirirken, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt temasında olduğu gibi, "görsel" ve "cebirsel" yaklaşımı benimsemişler ve bu yaklaşımlar altında **yinelemeli** ve **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** olmak üzere, iki başlık altında yer alan stratejileri kullanmışlardır. Ancak bir yüksek, iki düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci sadece görsel yaklaşımı iki yüksek, iki orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip altı öğrenci ise, sadece cebirsel yaklaşımı benimsemişlerdir.

Cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrenciler **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "farklılığı arama" ve "bağıntı kullanma" stratejisini kullanmışlardır. "Farklılığı arama" stratejisini kullanan iki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_1, Y_2, O_1, D_4) son terime farkı ekleyerek dördüncü adımda yer alan şeklin toplam kare sayısını belirlemişlerdir.

Örneğin;

G *: Üçüncü şekilde toplam on kare var dedin. Peki şekiller böyle devam ederse, dördüncü şekli oluşturmak için karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

O_1 *: On, dördüncü adımda o zaman beş mi bir dakka dur, üç, beş, yedi artar onyedi olur.*

Orta başarı düzeyine sahip bir öğrencide (O_4), dördüncü adımdaki şekil sayısını belirlerken, daha önce örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması kapsamında kullandığı, terimler arası "bağıntı arama" stratejisini kullanmıştır. Örneğin;

G *: Üçüncü şekilde toplam on tane kare olduğunu buldun peki daha sonra şekiller böyle devam ederse, dördüncü şekli oluşturmak için karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

O_4 *: Yirmi, şuralara bir kare* (üçüncü şeklin üç satırına ve en üst karenin üstüne bir kare ekledi) *ya da ama ondört*

G *: Nasıl düşündüğünü açıklar mısın?*

O_4 *: Şimdi iki katı ama, burda iki katının bir fazlası, iki katı, iki katının bir fazlası yirmibir de olabilir…*

O_4'ün kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıda gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

f(1)=2

f(2)=2f(1)+1=5

f(3)=2f(2)=10

f(4)=2f(3)+1=21

İki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci (Y_2, Y_3, O_2, D_1) ise, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan, "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanarak adım sayısı ve her adımda yer alan kare sayılarını ilişkilendirmişler ve dördüncü adımda yer alan toplam kare sayısına ulaşmışlardır. Örneğin;

G *: üçüncü şekilde toplam kare sayısını buldun kaç kare vardı?*

D_1 *:Üçüncü şeklide on kare var.*

G *: Daha sonra şekiller böyle devam ederse, dördüncü şekli oluşturmak için karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

D_1 *: On yedi.*

G *: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

D_1 *: Dört kere dört onaltı, on altı artı bir onyedi.*

G *: Neden dört ile dördü çarptın?*

D_1 *: Çünkü kuralda adım sayısı ile adım sayısı çarpılıyor ve bir ekleniyor o yüzden.*

Görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci (O_4, D_2, D_3) ise, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanmışlardır. Üç öğrenci de bu stratejiyi kullanarak dördüncü adımdaki şekil sayısını belirlerken hata yapmıştır. Örneğin;

G *: Şekiller böyle devam ederse, dördüncü şekli oluşturmak için karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

D_2 *: Onüç.*

G *: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

D_2 *: Şey üçüncü şekilde üç tane olduğu için, altta dördüncü şekilde altta dört tane olcak, onun çaprazında da dört tane sekiz, onun çaprazında da dört tane oniki, bir de yukarda olcak.*

O_4 ve D_3 ise, dördüncü adımdaki şekil sayısını, şekli çizerek belirlemek istemişlerdir. Örneğin;

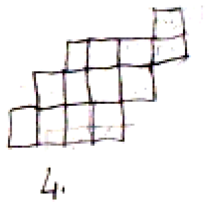
D_3 ***: Burda da*** (durdu) *ee… basamaklarında, yani şu alt katta bir, iki, üç burda dört tane olur* (her adımda en alt basamakta yer alan karelerin ardışık sıralandığını ve dördüncü adımda dört tane olması gerektiğini söyledi) *yine burda bir, iki, üç diye gitmiş dörtte burda olur* (yine her adımda alttan ikinci basamağı gösterdi ve ardışık sıralandığı için dördüncü adımda dört tane kare olması gerektiğini söyledi) *üçten sonra dört geliyor, burda da bir, üç, bir demiş, üç demiş, ee… şurası şöyle olacaktı, şöyle oluyor* (ikinci şekilde ikinci basamaktan sonra en üstte kalan tek kareyi gösterdi sonra üçüncü şekilde üçüncü basamakta üç kareyi gösterdi ancak ardışık sıralanmadığı için durdu ve üçüncü şeklin 3 basamağına da birer kare ekledi).

G ***: Neden öyle çizdin?***

D_3 ***: Çünkü bu o şekli bulabilmek için.***

G ***: Hangi şekli?***

D_3 ***:Dördüncü şekil, bu şöyle oluyor*** (üçüncü şeklin üç basamağına da birer kare eklemişti daha sonra en üstteki karenin yanına iki kare, onun üstüne iki kare ve en üstte bir kare ekledi ve aşağıdaki şekli oluşturdu).



G ***: Toplam kaç tane kare oldu?***

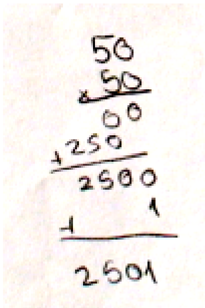
D_3 ***: Toplam 13 tane oldu.***

Katılımcı öğrencilerden, artarak değişen şekil örüntüsünde, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirme kapsamında, 50. adımda yer alan toplam kare sayısının ne olacağını bulmaları istenmiştir. Şekil 38'de görüldüğü gibi öğrenciler, 50. adımdaki toplam kare sayısını belirlerken, yakın adımda olduğu gibi, "görsel" ve "cebirsel" yaklaşımı benimsemişlerdir.

Görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden iki yüksek, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip beş öğrenci (Y_1, Y_4, O_3, D_2, D_3) **değişkenler arası ilişki bulma**

stratejisi içinde yer alan "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" ve bunun yanı sıra bu öğrencilerden D_2 ise, şekil kullanarak "modelleme" aracılığıyla sonuca ulaşmıştır. Her iki stratejiye ilişkin birer örnek aşağıda sunulmuştur.

Örneğin;



G *: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

Y_4 *: Ee… şimdi şöyle değerlendirdim. Her basamak birer birer artığı için 50. adımda 50 basamak oluyor, elli basamak ve her basamakta da 50 tane kare olacağı için elliyle elliyi çarptım 2500 buldum, ee … bir de üstüne tek bir kare koyduğumuz için 2501.*

Örneğin;

G *: Örüntüde 50. adımda yer alacak karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

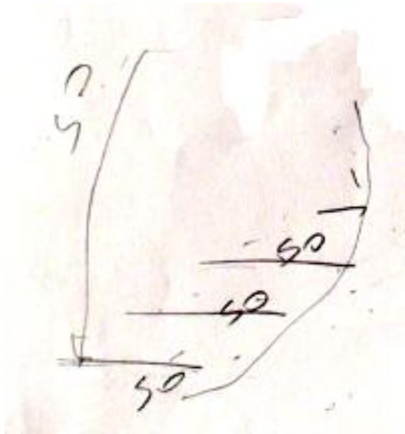
D_2 *: Buldum. Şurda elli tane olacak* (50. adımda en altta elli tane kare olacağını söyledi ve düz bir çizgi çizdi) *burda da elli* (çizdiği çizginin üstüne basamak olacak şekilde bir çizgi daha çizdi) *burda da elli* (üstte bir çizgi daha çizdi) *burda da bir tane galiba* (durdu) *öyle olcak gibi geliyor. Elli, yüz, yüz elli bir galiba* (şekildeki satır sayısı ve adım sayısı arasındaki ilişkiyi kuramadığı için 50. adımda 50 basamak olduğunu ifade edemedi).

G *: Bunlara basamak diyelim, üç basamak 50 tane kareden oluşacak, bir tane de en üstte bir kare olacak diyorsun.*

D_2 *: Üç olmaz.*

G *: Neden üç olmaz dedin?*

D_2 *:Çünkü burda üç* (üçüncü şekli gösterdi) *50. sayıda da üç olur mu? 50 tane olcak. 50 tane olcak. Burası şimdik 50 kareden oluşuyor, elli, elli, hep bu sütunda 50 olcak …*



G *: Nasıl yaptın şimdi? Burda 50 var dedin nedir bu?*

***D*$_2$** *: Sütundaki toplam kare sayısı. 50 tane kare sayısı var, burda da elli tane var, elli, elli, burda bir tane var. yani burda tam elli tane 50'nin boyutunda mesela burda da bir tane var.*

...

***D*$_2$** *: Hıı ... burda da elli olcak sonra bir olcak, işte o zaman 50 kere 50 ... 2501 ... 50 ile 50'yi çarptım ... bir eklicem.*

Cebirsel yaklaşım kapsamında ise, iki yüksek, üç orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip altı öğrenci (Y_2, Y_3, O_1, O_2, O_3, D_1) 50. adımdaki toplam kare sayısını bulurken "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanmışlardır. Bu öğrenciler örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt teması kapsamında da, aynı stratejiyi kullanan öğrencilerdir. Örneğin;

G *: Peki örüntüde 50. adımda yer alacak karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

***Y*$_3$** *: Ellinci adımda* (zihinden hesaplamaya çalıştı).

50×50=2500   2501

G *: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?*

Y$_3$ *: Ee ... 50. adımda adım sayısı ile kendisinin çarpımı 2500 yapıyor, artı bir var 2501 oluyor*

G *: Peki çok teşekkür ederim.*

Şekil 38'de görüldüğü gibi, orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci (O_4), cebirsel yaklaşım kapsamında 50. adımdaki toplam kare sayısını bulurken, "bütüne genişletme" stratejisini kullanmıştır. Öğrencilerin kullandığı bu strateji araştırmacı tarafından aşağıdaki gösterildiği biçimiyle ifade edilmiştir.

n=5 için f(5)=21

5.10=50 olduğundan

f(50)=10.f(5)=10.21=210

Örneğin;

G *: Örüntüde 50. adımda yer alacak karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

O_4 *: 200 tane derdim ama.*

G *: 200 dedin*

O_4 *: yüzlerle, ikiyüzler arasında*

G *: Peki nasıl düşündün yüzlerle, ikiyüzler arasında olacağını açıklar mısın?*

O_4 *: Beşinci şekli oluşturdum kafamda, sonra da ona çarptım*

G *: Peki beşinci şekli kafanda nasıl oluşturdun?*

O_4 *: Yine kareler ekledim.*

G *: Göster bakalım*

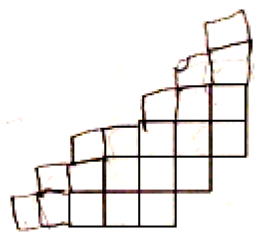
O_4 *: Onbeş olmuştu bu* (dördüncü şekilde on beş kare olduğunu söyledi) *o da yirmi.*

G *: Beş kare mi eklenecek dördüncü şekle, nasıl 20 buldun?*

O_4 *: Kareler koyarak.*

G *: Bir göster burda*

O_4 *:* (Dördüncü şeklin her satırına birer kare ekledi ve aşağıdaki şekli oluşturdu)



G *: Beşinci şekilde kaç kare oldu?*

O_4 *:* (kareleri tek tek saydı) *21, 10 ile çarpıyoruz 210.*

G *: 21'i 10 ile çarptın 210 buldun. Peki neden 10 ile çarptın?*

O_4 *: Çünkü 10 katı 50.*

G *: Hıı ... beş, 50' nin 10 katı olduğundan 21'i de 10 ile çarptın.*

O_4 *: Evet*

G : Bu kadar mı

O$_4$ ***:*** *Bu kadar*

G ***:*** *Peki teşekkür ederim.*

Şekil 38'de görüldüğü gibi, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci, 50. adımdaki toplam kare sayısına ulaşmada bir strateji geliştirememiştir. Bu öğrenci yinelemeli stratejilere odaklandığı için, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmede zorlanmıştır. Örneğin;

G ***:*** *Örüntüde 50. adımda yer alacak karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?*

D$_4$ ***:*** (Düşündü) *onu da bulamadım.*

G ***:*** *Tekrar şekilleri incele istersen. Bir kural bulabilir sin?*

D$_4$ ***:*** (Tekrar düşündü).

G ***:*** *Her adımda şekiller nasıl oluşmuş dikkatle incele bakalım.*

D$_4$ ***:*** (Tekrar düşündü).

G ***:*** *Bulamadın mı?*

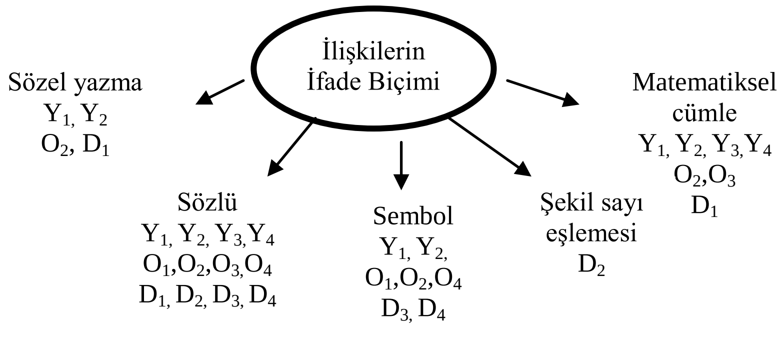
D$_4$ ***:*** (Bulamadığını başıyla işaret etti) *peki.*

Elde edilen bulgular sonucunda, katılımcı öğrenciler artarak değişen şekil örüntüsünü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma alt temasında ifade ettikleri stratejileri de dikkate alarak, "görsel" ve "cebirsel" yaklaşımı benimsemişlerdir. Örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken, görsel yaklaşımda yinelemeli stratejiler içinde yer alan, bir orta iki düşük başarı düzeyine sahip üç öğrenci "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme stratejisini" kullanarak **yinelemeli**, bir yüksek, bir orta başarı düzeyine sahip iki öğrenci "şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanarak, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisine** odaklanmışlardır. Cebirsel yaklaşımda ise, iki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci sadece yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini kullanarak dördüncü adımdaki şekil sayısını elde etmişlerdir. Örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken ise, iki yüksek, bir orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip beş öğrenci "görsel" ve iki yüksek, üç orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip altı öğrenci "cebirsel" olmak üzere her iki yaklaşımda **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanarak 50. adımdaki şekil sayısına ulaşmışlardır.

Örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken orta başarılı bir öğrenci hatalı bir sonuca ulaşmış, düşük başarılı bir öğrenci ise, örüntüyü hiç devam ettirememiştir. Bu bulguya ilişkin araştırmacı günlüğünde *"...50. adımdaki şekil sayısını on öğrenci, fonksiyonel bir ilişki kullanarak buldular. Diğer iki öğrenciden orta başarı düzeyine sahip bir öğrenci, örüntünün 50. adımındaki şekil sayısını bulurken, "bütüne genişletme" stratejisini kullanarak hatalı bir sonuca ulaştı. Düşük başarılı bir öğrenci ise, örüntünün 50. adımındaki şekil sayısını bulamayacağını ifade etti" (05.04.2007).* Sonuç olarak, öğrencilerin örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken **yinelemeli ve değişkenler arası ilişki bulma stratejilerine**, sonlu bir adıma devam ettirirken ise, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisine** odaklandıkları görülmüştür. Diğer taraftan artarak değişen şekil örüntüsünü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken, kullanılan her stratejide genel olarak yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir. Bu durumda strateji seçiminde başarı düzeyinin bir etkisi olmadığı söylenebilir.

3.3.4.3. İlişkilerin İfade Biçimleri

Artarak değişen şekil örüntüsünde, ilişkilerin ifade biçimleri alt teması altında katılımcı öğrencilerin kullandıkları stratejiler Şekil 36'da verilmiştir. Belirtilen stratejileri kullanan öğrenciler, başarı düzeyleri sembolleştirilerek ifade edilmiştir.

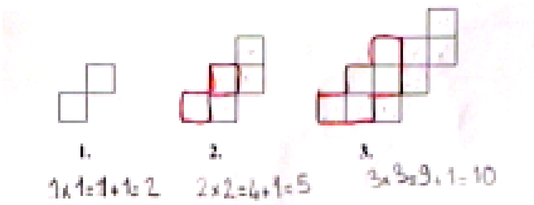


Şekil 39: Artarak Değişen Şekil Örüntüsünde Kullanılan İfade Biçimleri

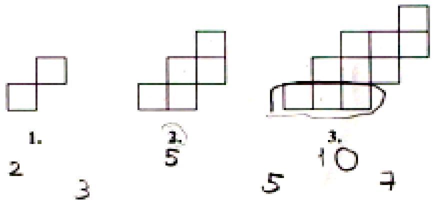
Katılımcı öğrencilerin, artarak değişen şekil örüntüsünü inceleme ve kuralı bulmada, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede, nasıl bir ifade biçimi kullandıkları belirlenmek istenmiştir. Bu bağlamda Şekil 39'da görüldüğü gibi, "sözlü", "matematiksel cümle", "sembol", "şekil sayı eşlemesi" ve "sözel yazma" olmak üzere beş ifade biçimi kullanılmıştır.

Öğrencilerin tamamı her aşamada belirledikleri tüm ilişkileri öncelikle "sözlü" olarak ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra, dört yüksek, iki orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrenci (Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, O_2, O_3, D_1), yakın ve sonlu adımdaki toplam kare sayısını, düşük başarı düzeyine sahip bir öğrenci aynı zamanda, örüntünün genel kuralını "matematiksel cümle" ile ifade etmiştir. İki yüksek, üç orta ve iki düşük başarı düzeyine sahip yedi öğrenci (Y_1, Y_2, O_1, O_2, O_4, D_3, D_4) her adımdaki şekil sayısını, şekil sayıları arasındaki farkı "sembol" kullanarak, düşük başarı düzeyine sahip öğrenci (D_2) ise, 50. adımdaki toplam kare sayısını belirlerken "şekil sayı eşlemesi" yapmışlardır. İki yüksek, bir orta ve bir düşük başarı düzeyine sahip dört öğrenci de (Y_1, Y_2, O_2, D_1), örüntünün genel kuralını, günlüklerinde yazılı olarak dile getirmişlerdir. Aşağıda her bir ifade biçimine birer örnek sunulmuştur. Örneğin;

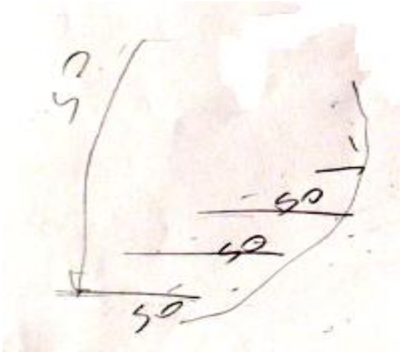
Matematiksel cümle (D_1);



Sembol (Y_2);



Şekil sayı eşlemesi (D_2);



Sözel-Sembol;

O_2 **:** *(05.04.2007 tarihli günlük)*

Bugünkü örüntü bana kolay geldi. Zorlan-
madım. Bu bir şekil örüntüsüydü. İlk baktığım-
da kuralı fark ettim zaten. Daha sonra
50. adımı buldum. Kuralımı (adım sayısı x
karesi)+1 idi.

Elde edilen bulgular sonucunda, artarak değişen şekil örüntüsünde; örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, ve örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede en fazla kullanılan ifade biçiminin "sözlü" ifade, "sembol" ve "matematiksel cümle" olduğu görülmüştür.

3.4. İlköğretim Beşinci Sınıf Öğrencilerinin Kullandıkları Stratejilerin Örüntü Çeşitlerine Göre Karşılaştırılması Sonucu Elde Edilen Bulgular

Araştırmanın dördüncü amaç maddesi ile "İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntünün kuralını bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve istenen bir örüntü oluşturmada kullandıkları stratejilerin örüntü çeşidine göre farklılık gösterip göstermediği" saptanmak istenmiştir. Bunun için araştırmada kullanılan tekrarlanan, sabit değişen ve artarak değişen olmak üzere üç örüntü çeşidinde, öğrencilerin örüntüyü inceleme ve kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve örüntü oluşturmada kullandıkları stratejiler karşılaştırılmıştır.

3.4.1. Tekrarlanan, Sabit Değişen ve Artarak Değişen Örüntülerde Kuralı Bulurken Kullanılan Stratejilerin Karşılaştırılması Sonucu Elde Edilen Bulgular

Katılımcı öğrencilerin tekrarlanan, sabit ve artarak değişen olmak üzere üç örüntü çeşidinde, kuralı bulurken kullandıkları stratejiler Tablo 4'te verilmiştir. Tekrarlanan örüntüler yapısal olarak diğer örüntü çeşitlerinden farklı olduğu için, öğrencilerin kullandıkları stratejiler de farklılık göstermiştir. Sabit ve artarak değişen örüntülerde ise, çoğunlukla benzer stratejiler kullanılmıştır. Örneğin; sayı, şekil ve fonksiyon tablosu ile verilen sabit ve artarak değişen örüntülerde, **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisi, sayı dizisi biçiminde ve şekil olarak verilen sabit ve artarak değişen örüntülerde "bağıntı arama" stratejisi öğrenciler tarafından kullanılan ortak stratejilerdir. **Değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** kapsamında ise, sayı dizisi biçiminde verilen sabit ve artarak değişen örüntüler dışında "fonksiyonel bir ilişkiyi" bulma ve **diğer stratejiler** içinde yer alan "sayıların doğasına bakma" stratejileri öğrenciler tarafından kullanılan ortak stratejilerdir. Bunların dışında verilen örüntü çeşitlerinin kendilerine has belirgin özellikleri ve örüntülerin sayı dizisi, şekil ve fonksiyon tablosu ile verilmesi, öğrencilerin kullandıkları stratejilerde değişiklik göstermiştir. Örneğin; öğrenciler tarafından kullanılan "farklılık arasında farklılık arama" stratejisi sadece artarak değişen örüntülerde kullanılabilen bir stratejidir. Bunun yanı sıra tekrarlanan, sabit ve artarak değişen şekil örüntülerinde şeklin yapısına bağlı olarak öğrenciler tarafından kullanılan stratejiler de söz konusu olmuştur. Örneğin; tekrarlanan şekil örüntüsünde "tek çeşit şekle odaklanma", sabit değişen şekil örüntüsünde "şeklin oluşumunda parçalara odaklanma" stratejisi gibi.

Tablo 4: Tekrarlanan, Sabit Değişen ve Artarak Değişen Örüntülerde Kuralı Bulmada Kullanılan Stratejilerin Karşılaştırılması

	Tekrarlanan	**Sabit Değişen**			**Artarak Değişen**		
	Şekil	Sayı		Şekil	Sayı		Şekil
		Sayı dizisi	Fonksiyon Tablosu		Sayı dizisi	Fonksiyon Tablosu	
Kuralı Bulma	1.Tek çeşit şekle odaklanma 2.Çoklu şekil grubuna odaklanma 3.Alt gruplara ayırma 4. Tek tek sayma 5. Tek tek çizme 6. Orantısal akıl yürütme 7. Fonksiyonel bir ilişki bulma	*Yinelemeli Stj.* 1. Farklılığı arama 2. Farkın farklı kombinasyonlarını bulma 3. Bağıntı arama 4. Sonraki terim için önceki terim ve sıra sayısı *Diğer Stj.* 1. Sayıların doğasına bakma 2. Atlanan terimi fark etme	*Yinelemeli Stj.* 1.Farklılığı arama *Değişkenler Arası İlişki Bulma Stj.* 1. Araç örüntü arama 2. Fonksiyonel bir ilişki bulma 3. Bağıntı arama *Diğer Stj.* 1. Sayıların doğasına bakma	*Yinelemeli Stj.* 1. Bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme 2. Şeklin oluşumunda parçalara odaklanma 3. Bağıntı arama 4. Farklılığı arama *Değişkenler Arası İlişki Bulma Stj.* 1. Şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki bulma 2. Fonksiyonel bir ilişki bulma 3. Çarpım tablosu arama 4. Araç örüntü arama 5. Bağıntı arama *Diğer Stj.* 1. Görsel algı 2. Sayıların doğasına bakma 3. Terimleri birleştirme	*Yinelemeli Stj.* 1.Farklılığı arama 2.Farklılık arasında farklılık arama 3. Farkların farklı kombinasyonlarını bulma 4.Bağıntı arama 5. Sonraki terim için önceki terim ve sıra sayısı *Değişkenler Arası İlişki Bulma Stj.* 1.Çarpım tablosu arama *Diğer Stj.* 1. Sayıların doğasına bakma 2. Farklılığın doğasına bakma 3. Terimleri birleştirme	*Yinelemeli Stj.* 1.Farklılığı arama *Değişkenler Arası İlişki Bulma Stj.* 1. Araç örüntü arama 2. Bağıntı arama 3. Fonksiyonel bir ilişki bulma *Diğer Stj.* 1. Sayıların doğasına bakma 2. Farklılığın doğasına bakma	*Yinelemeli Stj.* 1. Bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme 2. Bağıntı arama 3. Farklılığı arama 4. Farklılık arasında farklılık arama *Değişkenler Arası İlişki Bulma Stj.* 1. Şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki bulma 2. Fonksiyonel bir ilişki bulma *Diğer Stj.* 1. Sayıların doğasına bakma 2. Farklılığın doğasına bakma 3. Çarpım tablosu arama 4. Terimleri birleştirme 5. Görsel algı

3.4.2. Tekrarlanan, Sabit Değişen ve Artarak Değişen Örüntüleri Devam Ettirmede Kullanılan Stratejilerin Karşılaştırılması Sonucu Elde Edilen Bulgular

Katılımcı öğrencilerin tekrarlanan, sabit değişen ve artarak değişen örüntüleri devam ettirmede kullandıkları stratejiler Tablo 5'te verilmiştir. Öğrencilerin üç örüntü çeşidini devam ettirirken kullandıkları stratejiler, genel olarak örüntünün kuralını belirlerken kullandıkları stratejilerdir. Benzer şekilde bir örüntünün kuralını bulmada olduğu gibi, tekrarlanan örüntüyü devam ettirmede de kullanılan stratejiler, diğer örüntülere göre farklılık göstermiştir. Sabit ve artarak değişen örüntüleri devam ettirmede ise, benzer stratejiler kullanılmıştır. Örneğin; **yinelemeli stratejiler** içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisi, **değişkenler arası ilişki bulma stratejisi** içinde yer alan "fonksiyonel bir ilişki" öğrenciler tarafından kullanılan ortak stratejilerdir. Diğer taraftan sabit ve artarak değişen sayı dizileri dışında, **diğer stratejiler** içinde yer alan "bütüne genişletme" stratejisi tekrarlanan, sabit değişen ve artarak değişen örüntüleri devam ettirmede, öğrenciler tarafından kullanılan ortak bir stratejidir. Ancak Tablo 5'te görüldüğü gibi, örüntü çeşidinin yapısal özelliği, sayı dizisi, şekil ve fonksiyon tablosu ile verilmesi, örüntülerin kuralını bulmada olduğu gibi, örüntüleri devam ettirmede de öğrencilerin farklı stratejiler kullanmasına yol açmıştır.

Tablo 5: Tekrarlanan, Sabit Değişen ve Artarak Değişen Örüntüleri Devam Ettirmede Kullanılan Stratejilerin Karşılaştırılması

	Tekrarlanan	**Sabit Değişen**			**Artarak Değişen**		
	Şekil	Sayı		Şekil	Sayı		Şekil
		Sayı dizisi	Fonksiyon Tablosu		Sayı dizisi	Fonksiyon Tablosu	
Devam Ettirme	1. Şekillerin sıralanışına göre devam ettirme 2. En üyük alt sınır 3. En küçük üst sınır 4. Belli adımdaki şekillerin katlarına göre kodlama 5. Tek tek sayma 6. Bütüne genişletme 7. Tek tek çizme	*Yinelemeli Stj.* 1. Farklılığı arama *Değişkenler Arası İlişki Bulma Stj.* 1. Lineer yöntem 2. Modelleme yapma *Diğer Stj.* 1. Farkın çarpımı stratejisi	*Yinelemeli Stj.* 1. Farklılığı arama *Değişkenler Arası İlişki Bulma Stj.* 1. Araç örüntü kullanma 2. Fonksiyonel bir ilişki bulma *Diğer Stj.* 1. Bütüne genişletme	*Yinelemeli Stj.* 1.Bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme 2. Farklılığı arama 3. Bağıntı arama *Değişkenler Arası İlişki Bulma Stj.* 1. Şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki bulma 2. Fonksiyonel bir ilişki bulma 3. Bağıntı arama 4. Çarpım tablosu arama *Diğer Stj.* 1. Bütüne genişletme	*Yinelemeli Stj.* 1. Farklılığı arama 2.Farklılık arasında farklılık arama *Diğer Stj.* 1. Farklılığın doğasına bakma	*Yinelemeli Stj.* 1. Farklılığı arama *Değişkenler Arası İlişki Bulma Stj.* 1. Bağıntı kullanma 2. Fonksiyonel bir ilişki kullanma *Diğer Stj.* 1. Bütüne genişletme	*Yinelemeli Stj.* 1. Bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme 2. Farklılığı arama 3. Bağıntı kullanma *Değişkenler Arası İlişki Bulma Stj.* 1. Şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki bulma 2. Modelleme yapma 3. Fonksiyonel bir ilişki bulma *Diğer Stj.* 1. Bütüne genişletme

3.4.3. Tekrarlanan, Sabit Değişen ve Artarak Değişen Örüntüler Oluşturmada Kullanılan Stratejilerin Karşılaştırılması Sonucu Elde Edilen Bulgular

Katılımcı öğrencilerin tekrarlanan, sabit değişen ve artarak değişen örüntüleri oluşturmada kullandıkları stratejiler Tablo 6'da verilmiştir. Buna göre, sayı, şekil ve fonksiyon tablosu kullanarak örüntü oluştururken öğrencilerin kullandıkları stratejiler üç örüntü çeşidinde farklılık göstermiştir. Diğer taraftan sabit değişen ve artarak değişen sayı dizisi, şekil ya da fonksiyon tablosu kullanılarak örüntü oluştururken benzer stratejiler de kullanılmıştır. Örneğin; sabit ve artarak değişen sayı dizisi oluştururken "farklılığı arama", sabit ve artarak değişen şekil örüntüsü oluştururken "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" ve fonksiyon tablosu kullanarak sabit ve artarak değişen örüntü oluştururken "fonksiyonel bir ilişki kullanma" öğrenciler tarafından kullanılan ortak stratejilerdir.

Tablo 6: Tekrarlanan, Sabit Değişen ve Artarak Değişen Örüntü Oluşturmada Kullanılan Stratejilerin Karşılaştırılması

	Tekrarlanan	**Sabit Değişen**			**Artarak Değişen**		
	Şekil	Sayı		Şekil	Sayı		Şekil
		Sayı dizisi	Fonksiyon Tablosu		Sayı dizisi	Fonksiyon Tablosu	
Örüntü Oluşturma	1. Tekrar eden grubun alt gruplarına odaklanma 2. Tekrar eden gruba odaklanma 3. Çoklu şekil grubuna odaklanma	1. Farklılığı arama	1. Fonksiyonel bir ilişki kullanma 2. Araç örüntü kullanma	1. Bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme 2. Şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki kullanma	1. Farklılığı arama 2. Bağıntı kullanma 3. Kat alma	1. Fonksiyonel bir ilişki kullanma	1. Kat alma 2. Bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme

4. TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde; araştırma kapsamında elde edilen bulguların alan-yazındaki örüntülerle ilgili araştırma bulgularıyla karşılaştırılarak tartışılmasına, çıkarılan sonuçlara ve ayrıca gerçekleştirilen araştırmaya ve ileride yapılabilecek benzer nitelikteki araştırmalara yönelik önerilere yer verilmiştir.

4.1. TARTIŞMA

Araştırmada, tekrarlanan şekil örüntüsüne yönelik ulaşılan bulgular ele alındığında, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma aşamasında, örüntünün tekrar birimini belirleyen ve belirleyemeyen öğrenciler olmuştur. Tekrar birimini belirleyemeyen öğrenciler, tekrar birimi yerine tekrarlayan şekil grupları oluşturmuşlardır. Bu gruplamalarda örüntünün veriliş biçiminin etkili olduğu, bunun yanı sıra tekrar biriminde yer alan şekil sayısının çokluğunun öğrencilerin tekrar birimini bir bütün olarak görebilmelerini engellediği düşünülmüştür. Çünkü tekrar birimini belirleyemeyen öğrenciler, farklı biçimlerde gruplamalar yaparak örüntüdeki şekil akışını sürdürebilmişlerdir. Diğer taraftan tekrar birimini belirleyebilen öğrencilerin sayısı, belirleyemeyen öğrencilerin sayısından daha azdır. Oysa ki NAEP'nin (1992; Akt. Kenney ve Silver, 1997; Blair, 2001) dördüncü, altıncı ve sekizinci sınıf öğrencilerin matematik performanslarını değerlendirmek amacıyla yapmış olduğu araştırmada, öğrencilerin çoğunluğunun tekrarlanan örüntülerde başarılı olduğu ve özellikle dördüncü sınıf öğrencilerinin tekrarlanan bir örüntüde, tekrar birimini belirleyebildiği rapor edilmiştir. Tüm bu sonuçlar göz önüne alındığında, yenilenen ilköğretim matematik dersi programıyla birlikte, öğrencilerin örüntülerle dördüncü sınıfta ilk kez karşılaşmaları, öğrencilerin bu örüntü çeşidi ile fazla deneyim geçirmemiş ya da ilk kez karşılaşmış olmaları olasılığını da düşündürmektedir. Bunların yanı sıra, tekrar birimini belirleyebilen ve belirleyemeyen öğrenciler arasında yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı da görülmüştür.

Verilen örüntüde tekrar birimini belirleyebilen öğrenciler, örüntünün tekrar birimindeki şekiller arası sayısal ilişkiyi de kurabilmişlerdir. Öğrenciler bu ilişkiyi, "orantısal akıl yürüterek" ve "fonksiyonel bir ilişki" kullanarak gerçekleştirmişlerdir. Warren (2005) araştırmasında, benzer şekilde ilköğretim birinci basamak öğrencilerinin tekrarlanan bir şekil örüntüsünde, örüntünün tekrar birimindeki şekiller arası sayısal ilişkiyi, fonksiyonel bir ilişki kullanarak elde ettiklerini ortaya koymuştur. Tekrar birimini belirleyemeyen öğrenciler örüntünün sonlu adımına kadar olan toplam şekil sayısına ulaşmak için "tek tek sayma" ve "çizme" şeklinde yollar tercih etmişlerdir. Ancak tercih edilen bu yollar ulaşılabilen sonlu adım için bir çözüm getirmişsede, daha büyük sonlu adımlar için geçerli olmayacaktır.

Tekrarlanan örüntüde tekrar birimini belirleyen ya da belirleyemeyen öğrenciler, şekillerin sıralanışını dikkate alarak örüntüyü yakın bir adıma devam ettirmişlerdir. Ancak örüntünün sonlu bir adımında yer alan şekli belirlerken, tekrar birimini belirleyemeyen öğrenciler sayarak, çizerek ya da geliştirdikleri değişik stratejiler ile doğru ya da yanlış sonuçlara ulaşmışlardır. Tekrar birimini belirleyebilenler öğrencilerin hemen hemen tamamı ise, Liljedahl (2004) tarafından "kalanlı bölme" ve "çarpımdan sayma", bu araştırma kapsamında ise, stratejinin kullanımındaki yaklaşım dikkate alınarak, matematiksel olarak anlamlandırılıp "en büyük alt sınır" ve "en küçük üst sınır" şeklinde tanımlanan stratejilerle sonlu bir adımda yer alan şekli belirlemişlerdir. Ancak tekrar birimini doğru belirleyen yüksek başarı düzeyine sahip öğrencilerden biri, sonlu adımda yer alan şekli belirlerken kestirme bir yol olarak, "bütüne genişletme" stratejisini kullanmıştır. Öğrenci bu stratejide, Samsan, Linchevski ve Olivier (1999) tarafından "çekici sayılar" olarak tanımlanan sayıdan yararlanmıştır.

Warren'in (2005) araştırmasında da olduğu gibi, öğrencilerin çoğunluğu tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturabilmiştir. Ancak bu öğrencilerin bir kısmı, tekrar birimini dikkate alarak, bir kısmı ise tekrar birimine ait gruplamalar yaparak örüntü oluşturmuşlardır. Örüntü oluşturan öğrenciler, daha önce kendilerine sunulan tekrarlanan örüntüdeki tekrar birimini belirlerken gösterdikleri aynı yaklaşımı göstermişlerdir. Örüntü oluşturamayan öğrenciler ise, daha önce verilen tekrarlanan örüntüde tekrar birimini belirleyemeyen öğrencilerdir.

Tekrarlanan şekil örüntüsünde öğrencilerin tamamı; kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve örüntü oluşturma amaçlarına yönelik belirledikleri tüm ilişkileri, öncelikle "sözlü" olarak ifade etmişlerdir. Bunun yanı sıra kimi öğrenciler, tekrar birimindeki şekiller arasındaki sayısal ilişkiyi "sembol" kullanarak ve tekrar birimindeki şekil adlarını "yazarak" ifade etmişlerdir. Warren (2005) gerçekleştirdiği araştırmasında, tekrarlanan bir örüntüde küçük yaştaki çocuklara öğretim yapıldığı taktirde, çocukların buldukları fonksiyonel bir ilişkiyi sözel ve sembolik (harfli ifade) olarak ifade edebildiklerini göstermiştir. Buna karşın, bu araştırmada fonksiyonel bir ilişki bulan öğrenciler, bu ilişkiyi sadece sözlü olarak ifade etmişlerdir.

Sayı dizisi biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerine bakıldığında ise, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma aşamasında öğrenciler, genel olarak yinelemeli ve diğer stratejiler başlıkları altında yer alan stratejileri kullanmışlardır (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1999; Looney, 2004; Ley, 2005, Stacey, 1989). Bu bağlamda her iki örüntü çeşidinde de, yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisi bir çok araştırma bulgularında da görüldüğü gibi, öğrencilerin en çok kullandığı ve öncelikle odaklandığı strateji olmuştur (Stacey, 1989; Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1999; Orton ve Orton, 1999; Warren, 1996; 2000; 2005; Akt. Ley 2005, Lan Ma, 2007). Bunun dışında Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall (1999), Orton ve Orton'nun (1994) araştırma bulgularında da görüldüğü gibi, sadece artarak değişen sayı örüntülerinde kullanılan "farklılık arasında farklılık arama" stratejisi de en çok kullanılan stratejidir. Ayrıca bu araştırma kapsamında tanımlanan "bağıntı arama" stratejisi de her iki örüntüde de çok kullanılan bir strateji olmuştur. Bu stratejiyi kullanan kimi öğrencilerin izledikleri yol, çalışmada oldukça dikkat çekmiştir. Her iki örüntüde de kullanılan ve bu araştırma kapsamında tanımlanan, "sonraki terim için, önceki terim ve sıra sayısı" stratejisi de, çalışmada dikkat çeken stratejilerden biri olmuştur. Yinelemeli stratejiler kapsamında olmasına karşın, bu stratejide örüntüdeki her terimin bir adım sayısı ile eşlenmesi ve bu adım sayılarından yararlanarak terimler arasında bir ilişki kurulması, bu stratejiyi kullanan öğrencinin fonksiyonel ilişkiyi bulmaya yatkın olduğunun bir göstergesidir. Diğer stratejiler kapsamında ise, öğrenciler sabit ya da artarak değişen örüntülerin terimlerine ait özellikleri içeren stratejiler kullanmışlardır. Benzer bir bulguya Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall (1999) tarafından gerçekleştirilen araştırmada da rastlanmıştır. Diğer taraftan her iki örüntü çeşidinde de kullanılan stratejilere bakıldığında, genel olarak her stratejide yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir.

Tüm bu sonuçlar göz önüne alındığında öğrenciler sayı dizisi olarak verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde kuralı bulurken, Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall'un (1999) araştırma bulgularında da olduğu gibi, terim ve o terimin karşılığı olan adım sayısı arasındaki ilişkiden ziyade, örüntüdeki terimler arasındaki ilişkiye ve terimlerin oluşturduğu sayı kümesinin bir özelliğine odaklanmışlardır. Bu nedenle öğrenciler verilen bir sayı dizisinde fonksiyonel bir ilişkiyi bulamamışlar, dolayısıyla sadece verilen sayı kümesini genelleyebilmişlerdir.

Sayı dizisi biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerini yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken, Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall (1998) ve Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da olduğu gibi, öğrenciler genel olarak yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini kullanmışlardır. Buna ilaveten sabit değişen sayı örüntüsünde kimi öğrenciler Lannin'in araştırmalarında da (2003; 2005) görüldüğü gibi, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken "modelleme yapma", kimi öğrenciler ise ele alınan örüntü için hatalı bir strateji olan "farkın çarpımı" ve "lineer yöntem" stratejilerini kullanmışlardır. Benzer bulgulara Stacey (1989), Orton ve Orton (1994), Zazkis ve Liljedahl'in (2002) araştırmalarında da rastlanmıştır. "Lineer yöntem" stratejisi çalışmada dikkat çeken bir strateji olmuştur. Öğrencilerin kullandığı bu strateji ile, sabit değişen sayı örüntülerinde daha büyük sonlu bir adımda yer alan terim bulunabilir. Stacey (1989) tarafından gerçekleştirilen araştırmada, kimi öğrenciler bu stratejiyi kullanarak, sabit değişen sayı örüntüsünün 100. ve 1000. adımında yer alan terimleri bulmuşlardır. Ayrıca bu stratejiyi kullanan öğrenciler arasında üç başarı düzeyine sahip öğrencilerin bulunduğu da görülmüştür.

Sayı dizisi biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntüsü oluşturabilmeye bakıldığında ise, artarak değişen sayı örüntüsü oluşturan öğrencilerin sayısı, sabit değişen sayı örüntüsü oluşturan öğrencilerin sayısından fazladır. Sabit ve artarak değişen sayı örüntüsü oluşturan öğrenciler genel olarak Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall'un (1998) araştırma bulgularında da görüldüğü gibi "farklılığı arama" stratejisini, buna ilaveten artarak değişen sayı örüntüsü oluşturan öğrenciler, "kat alma" ve terimler arası "bağıntı kullanma" stratejilerini de kullanmışlardır. Sabit değişen sayı örüntüsü oluşturamayan öğrenciler arasında da, kat alma stratejisini kullanarak artarak değişen sayı örüntüsü oluşturan öğrenciler olmuştur. Yapılan araştırmalara bakıldığında da, örüntü oluştururken kat alma ve terimler arası farklılığı arama stratejilerinin çok kullanıldığı görülmektedir (Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, 1998). Sonuç olarak, sabit ya da artarak değişen sayı örüntüsü oluşturamayan öğrencilerin, örüntülerin belirgin özelliklerini örüntünün kuralını araştırırken bulmalarına karşın, örüntü oluştururken dikkate almadıkları görülmektedir.

Sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde, öğrencilerin tamamı, kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve örüntü oluşturma amaçlarına yönelik belirledikleri tüm ilişkileri, öncelikle "sözlü" olarak ifade etmişlerdir. Benzer bir sonuca Lonney (2004), Orton ve Orton'nun (1994) araştırmalarında da rastlanmıştır. Bunun dışında kimi öğrenciler, terimler arası farkları "sembol", "matematiksel cümle" ve "sözel yazma" ile ayrıca kimi öğrenciler, sabit değişen sayı örüntüsünde "şekil sayı eşlemesi" yaparak ifade etmişlerdir.

Fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerine bakıldığında, Ley (2005) tarafından gerçekleştirilen araştırmada da olduğu gibi, öğrencilerin yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve diğer stratejiler olmak üzere üç başlık altında yer alan stratejileri kullandığı görülmüştür. Bu bağlamda yinelemeli stratejiler kapsamında öğrencilerin bir kısmı, bir çok araştırma bulgularında da görüldüğü gibi sadece çıktı değerleri arasında var olan bir ilişkiyi belirlemişlerdir (MacGregor ve Stacey, 1993; Looney, 2004; Ley, 2005; Lannin, Barker ve Townsend, 2006). Değişkenler arası ilişki bulma stratejileri kapsamında ise, artarak değişen sayı örüntüsünde öğrencilerin çoğunluğu, girdi ve çıktı değerleri arasındaki fonksiyonel bir ilişki bulmuşlardır. Benzer bir bulguya Sasman, Olivier ve Linchevski (1999), Looney (2004) trafından gerçekleştirilen araştırmalarda da rastlanmıştır. Sabit değişen sayı örüntüsünde ise, kimi öğrenciler çıktı değerlerinden girdi değerlerini çıkararak, bu araştırma kapsamında "araç örüntü" olarak tanımlanan bir örüntü elde etmişlerdir. Benzer şekilde Martinez ve Brizuela'nın (2006) araştırmalarında da, bir öğrenci, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntüsünde araç örüntüyü elde etmiştir. Diğer stratejiler kapsamında ise, her iki örüntü çeşidinde de öğrenciler, çıktı değerlerinin ve araç örüntünün oluşturduğu sayı kümesinin bir özelliğini tanımlamışlardır. Ayrıca yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve diğer stratejiler kapsamında kullanılan tüm stratejilerde genel olarak yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmüştür.

Fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerini devam ettirmeye bakıldığında, sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerini yakın bir adıma devam ettirirken yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma, sonlu bir adıma devam ettirirken ise, yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve diğer stratejiler içinde yer alan stratejiler kullanılmıştır. Bu bağlamda, kimi öğrenciler sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerini yakın bir adıma devam ettirirken yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisini, öğrencilerin çoğunluğu ise, değişkenler arası ilişki bulma stratejileri kapsamında, sabit değişen sayı örüntülerinde "araç örüntüyü", artarak değişen sayı örüntülerinde ise, "fonksiyonel bir ilişkiyi" kullanmışlardır.

Fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerini sonlu bir adıma devam ettirirken ise, sabit değişen sayı örüntülerinde kimi öğrenciler, araç örüntü yardımıyla araştırmada oldukça dikkat çeken fonksiyonel bir ilişki yakalayarak örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirebilmişlerdir. Benzer şekilde Becker ve Rivera (2006) araştırmalarında da, kimi öğrenciler örüntünün genel kuralını, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken elde etmişlerdir. Artarak değişen sayı örüntüsünde ise, öğrencilerin çoğunluğu, örüntüyü inceleme ve kuralı bulma aşamasında buldukları fonksiyonel bir ilişkiyi kullanılarak örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirmişlerdir. Diğer taraftan sabit değişen sayı örüntüsünde az sayıda öğrencinin fonksiyonel bir ilişkiye ulaşması bazı araştırma bulgularıyla da benzerlik göstermektedir. Örneğin MacGregor ve Stacey (1993) tarafından gerçekleştirilen araştırmada, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit değişen sayı örüntülerinde öğrencilerin çoğunluğunun fonksiyonel bir ilişkiyi algılayamadıkları, Looney (2004) tarafından gerçekleştirilen bir araştırmada da, öğrencilerin fonksiyonel bir ilişki bulmada yeterince başarılı olamadıkları belirlenmiştir. Bunlara karşın, Blanton ve Kaput (2004) tarafından gerçekleştirilen araştırmada ise, ilköğretim birinci basamak öğrencilerinin fonksiyonel bir ilişkiyi tanımlayabildikleri de görülmüştür. Bunların yanısıra her iki örüntü çeşidinde de, fonksiyonel bir ilişkiyi bulamayan öğrencilerden kimileri, MacGregor ve Stacey'nin (1993) araştırmalarında da olduğu gibi, çıktı değerlerine odaklandıklarından, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirirken oldukça zorlanmışlardır. Bu bağlamda, diğer stratejiler içinde yer alan "bütüne genişletme" stratejisine yönelmişler ve yanlış sonuca ulaşmışlardır. Bütüne genişletme stratejisinin kullanımında 60. adımın istenmesi de (60 sayısının asal bir sayı olmaması) etkili olmuştur (Samsan, Linchevski ve Olivier, 1999). Kimi öğrenciler ise, sabit değişen sayı örüntüsünü "farklılığı arama" stratejisini kullanarak sonlu bir adıma devam ettirmeye çalışmışlardır. Benzer bulgular Samsan, Olivier ve Linchevski'nin (1999) gerçekleştirdikleri araştırmada da elde edilmiştir. Sonuç olarak öğrenciler örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken, özellikle çıktı değerlerine, sonlu bir adıma devam ettirirken ise, girdi ve çıktı değerlerine odaklanmışlardır (Samsan, Linchevski ve Olivier, 1999; Ley, 2005; Warren, 2005).

Tüm bu sonuçlar göz önüne alındığında fonksiyon tablosu ile verilen sabit değişen sayı örüntüsünde çok az öğrencinin artarak değişen sayı örüntüsünde ise, öğrencilerin çoğunluğunun fonksiyonel bir ilişkiye ulaşması dikkat çekicidir. Samsan, Olivier ve Linchevski'nin (1999) araştırmalarında da benzer bir bulgu elde edilmiştir. Öte yandan sayı dizisi olarak verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde, öğrencilerin hiçbiri fonksiyonel bir ilişkiye ulaşamazken, fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde, öğrencilerin fonksiyonel bir ilişkiye ulaşması, girdi ve çıktı değerlerinin açıkça görülebildiği fonksiyon tablolarının, bu ilişkiyi bulmayı kolaylaştırdığını göstermektedir. Fonksiyon tablolarının öğrencileri fonksiyonel ilişkiye teşvik ettiği çeşitli araştırmalarla da ortaya konmuştur (Martinez ve Brizuela, 2006).

Fonksiyon tablosu kullanarak sabit ya da artarak değişen bir sayı örüntüsü oluşturabilmeye bakıldığında ise, öğrencilerin çoğunluğu fonksiyon tablosu kullanarak sabit değişen sayı örüntüsü oluştururken, buna karşın daha az sayıda öğrenci artarak değişen sayı örüntüsü oluşturabilmiştir. Sabit değişen sayı örüntüsü oluşturan öğrencilerin çoğunluğu, araç örüntü ve daha az sayıda öğrenci ise, fonksiyonel bir ilişki kullanmışlardır. Ancak fonksiyonel bir ilişki kullanan öğrencilerin, verilen örüntünün kuralını araştırırken, yinelemeli stratejileri kullandığı göz önüne alınırsa, bu öğrencilerin fonksiyonel bir ilişki kullanarak örüntü oluşturması şaşırtıcı bir durumdur. Artarak değişen sayı örüntüsü oluşturan öğrenciler ise, sadece fonksiyonel bir ilişki kullanmışlardır. Fonksiyon tablosu kullanarak sabit ya da artarak değişen sayı örüntüsü oluşturamayan kimi öğrenciler, girdi ve çıktı değerleri olarak, iki ayrı keyfi sayı örüntüleri yazmışlardır. Kimi öğrenciler ise, girdi ve çıktı değerleri arasında bir ilişki kurmuşlar, ancak sabit değişen sayı örüntüsü yerine artarak değişen ya da artarak değişen sayı örüntüsü yerine sabit değişen sayı örüntüsü oluşturmuşlardır. Bu durum öğrencilerin fonksiyon tablosu biçiminde verilen iki örüntü çeşidine ilişkin özellikleri dikkate almadıkları şeklinde değerlendirilebilir. Diğer taraftan öğrencilerin örüntü oluştururken kullandıkları stratejilere bakıldığında, her stratejiyi kullanan yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin olduğu görülmektedir.

Fonksiyon tablosu biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde öğrencilerin tamamı, belirledikleri tüm ilişkileri öncelikle “sözlü” olarak ifade etmişlerdir. Kimi öğrenciler, örneğin örüntü oluştururken fonksiyonel bir ilişkiyi, “bu sayılar iki katının bir fazlası” ya da “kalbin karesini alıp iki eklemek” şeklinde sözlü olarak dile getirmişlerdir. Benzer bir bulguya Samsan, Linchevski ve Olivier (1999) tarafından gerçekleştirirlen araştırmada da rastlanmıştır. Blaton ve Kaput’un (2004) araştırma bulgularında da, öğrencilerin fonksiyonel ilişkileri bulurken sözel ifade ve sembol kullandıkları buna karşın, MacGregor ve Stacey (1993) tarafından gerçekleştirilen araştırmada, fonksiyonel ilişkiyi algılayan öğrencilerin bu ilişkiyi sözel ve sembol kullanarak tanımlamada zorlandıkları belirlenmiştir. Bu araştırmada ise, kimi öğrenciler sembol ifade biçimini, sabit değişen sayı örüntüsünde fonksiyon tablosunda oluşturdukları araç örüntüyü gösterirken, artarak değişen sayı örüntüsünde ise, tabloda girdi ve çıktı değerleri arasındaki farkları ve sonlu adımı belirlerken kullanmışlardır. Ayrıca kimi öğrenciler her iki örüntü çeşidinde de, tabloda girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişkiyi belirlerken, örüntüyü devam ettirirken ve örüntü oluştururken Blaton ve Kaput (2004)’un araştırmalarında da olduğu gibi, “matematiksel bir cümle” kullanmışlardır. Bunlara ilaveten kimi öğrenciler verilen örüntüde belirledikleri ilişkileri "yazılı" olarak dile getirmişlerdir.

Sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerine bakıldığında ise, örüntünün kuralını bulurken, öğrenciler bir çok araştırma bulgularında da görüldüğü gibi, görsel ve cebirsel olmak üzere iki yaklaşım benimsemişlerdir (Stacey, 1989; Orton ve Orton,1999; Samsan, Linchevski ve Olivier, 1999; Krebs, 2005; Becker ve Rivera, 2006, Lan Ma, 2007).

Görsel yaklaşımda, öğrenciler şeklin yapısına odaklanmışlar ve bu bağlamda yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve diğer stratejiler içinde yer alan stratejileri kullanmışlardır. Yinelemeli stratejiler kapsamında, her iki örüntü çeşidinde de öğrencilerin çoğunluğu Sasman, Olivier ve Linchevski (1999), Orton ve Orton (1999), Becker ve Rivera (2006) ve Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da olduğu gibi, her yeni şekil için kaç tane şekil gerekeceğini ifade ederek, "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini kullanmışlardır. Değişkenler arası ilişki bulma stratejisi kapsamında ise, kimi öğrenciler "şeklin yapısına bağlı olarak fonksiyonel bir ilişki" bulmuşlardır. Ancak her iki örüntü çeşidinde de sunulan şekil örüntülerine bakıldığında, şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi bulan öğrenci sayılarının değiştiği görülmektedir. Ayrıca artarak değişen bir şekil örüntüsünde şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki bulan öğrenci de yoktur. Dolayısıyla bu durum, verilen şekil örüntüsünün yapısının fonksiyonel bir ilişki bulmada etkili olduğunu göstermektedir. Benzer bulgulara, Samsan, Olivier ve Linchevski (1999), Becker ve Rivera, (2006) ve Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da rastlanmıştır. Diğer stratejiler kapsamında ise, sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerinde kimi öğrenciler Becker ve Rivera (2006) ve Sasman, Olivier ve Linchevski'nin (1999) araştırmalarında da olduğu gibi, araştırma kapsamında "görsel algı" olarak tanımlanan stratejiyi kullanarak, bir önceki şeklin bir sonraki şekil içinde kaç kez yer aldığını da belirlemişlerdir.

Cebirsel yaklaşımı kullanan öğrenciler ise, bir çok araştırma sonuçlarında da görüldüğü gibi öncelikle verilen şekil örüntüsünü sayı örüntüsüne dönüştürmüşlerdir (Stacey, 1989; Orton ve Orton,1999, Krebs, 2005; Becker ve Rivera, 2006; Lan Ma, 2007). Bu bağlamda da Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmada da görüldüğü gibi öğrenciler yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve diğer stratejiler içinde yer alan stratejileri kullanmışlardır. Yinelemeli stratejiler içinde yer alan "farklılığı arama" stratejisi yine öğrencilerin çoğunluğunun öncelikle odakladığı strateji olmuştur. Bunun dışında "bağıntı arama" stratejisi de kimi öğrenciler tarafından kullanılmıştır. Daha önce sayı dizisi biçiminde verilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde, fonksiyonel bir ilişki bulan öğrenci olmamasına karşın, verilen şekil örüntüsünden elde edilen sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde, Orton ve Orton, (1994), Sasman, Olivier ve Linchevski (1999) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da olduğu gibi, fonksiyonel bir ilişki bulan öğrenciler olmuştur. Öğrencilerin bu ilişkiyi bulabilmelerinde örüntünün adım sayıları ile verilmesinin etkisinin büyük olduğu düşünülmüştür. Ancak öğrencilere sunulan artarak değişen şekil örüntülerinden birinde, cebirsel yaklaşım altında öğrencilerin hiçbiri fonksiyonel bir ilişki bulamamıştır. Benzer bir bulguya Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmada da rastlanmıştır. Cebirsel yaklaşım altında öğrencilerin fonksiyonel bir ilişkiye ulaşamamalarında, verilen örüntünün genel kuralının katılımcı öğrenciler için karmaşık olmasının etkisi de büyüktür. Sabit değişen şekil örüntülerinde, artarak değişen şekil örüntülerine nazaran daha fazla sayıda öğrenci fonksiyonel bir ilişkiye ulaşmıştır. Sasman, Olivier ve Linchevski'nin (1999) araştırmalarında ise, tam tersi bir sonuç elde edilmiştir. Cebirsel yaklaşım altında diğer stratejiler kapsamında ise, öğrenciler elde ettikleri sabit ya da artarak değişen sayı örüntülerinde sayı kümesinin elemanlarının bir özelliğine ilişkin stratejiler kullanmışlardır. Diğer taraftan görsel ya da cebirsel her iki yaklaşım kapsamında kullanılan stratejilere bakıldığında, hemen hemen her stratejide yüksek, orta ve düşük başarı düzeyinden öğrencilerin yer aldığı da görülmektedir.

Sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerini yakın ve sonlu bir adıma devam ettirirken, örüntünün kuralını bulma aşamasında olduğu gibi, görsel ve cebirsel yaklaşım benimsenmiştir. Sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerini yakın bir adıma devam ettirirken, görsel yaklaşım kapsamında, yinelemeli ve değişenler arası ilişki bulma stratejileri içinde yer alan stratejiler kullanılmıştır. Bu bağlamda her iki örüntü çeşidinde de öğrencilerin çoğunluğu "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejisini, kimi öğrenciler ise, “şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişkiyi” kullanmışlardır. Örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken cebirsel yaklaşımı, daha az sayıda öğrenci benimsemiştir. Bu yaklaşım kapsamında ise, öğrenciler ağırlıklı olarak farklılığı arama stratejisini, kimi öğrenciler ise, fonksiyonel bir ilişkiyi kullanmışlardır. Orton ve Orton (1994), Sasman, Olivier ve Linchevski (1999), Becker ve Rivera, (2006) ve Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da benzer bulgular elde edilmiştir.

Sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerini sonlu bir adıma devam ettirirken ise, görsel yaklaşım kapsamında, yinelemeli stratejiler sadece sabit ve artarak değişen iki şekil örüntüsünde kullanılmıştır. Bunun dışında “şeklin yapısına bağlı fonksiyonel bir ilişki bulma” stratejisi öğrencilerin çoğunluğu tarafından kullanılmıştır. Dolayısıyla görsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerin çoğunluğu, örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken, yinelemeli stratejilere sonlu bir adıma devam ettirirken de, değişkenler arası ilişki bulma stratejisine odaklanmışlardır. Sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerini sonlu bir adıma devam ettirirken, cebirsel yaklaşım kapsamında ise, yinelemeli, değişkenler arası ilişki bulma ve diğer stratejiler içinde yer alan stratejiler kullanılmıştır. Ancak yinelemeli stratejiler sadece sabit ve artarak değişen iki şekil örüntüsünde kullanılmıştır. Çünkü bu örüntü sorularında sonlu bir adım olarak 7. ve 10. adım istendiğinden öğrenciler Hangreaves, Shorrocks ve Threlfall, (1998), Becker ve Rivera, (2006), Lan Ma, (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da olduğu gibi, farklılığı arama stratejisini kullanarak, bu adımlardaki şekil sayısına ulaşmışlardır. Diğer taraftan sabit ve artarak değişen diğer iki şekil örüntüsünde değişkenler arası ilişki bulma stratejileri öğrencilerin çoğunluğu tarafından kullanılmıştır. Bu örüntülerde sonlu adım olarak 50. adımda yer alan şekil sayısı istendiğinden, öğrenciler fonksiyonel bir ilişki kullanarak, bu adımda yer alan şekil sayısını elde etmişlerdir. Ancak fonksiyonel bir ilişki bulamayan kimi öğrenciler ise, diğer stratejiler içinde yer alan “bütüne genişletme” stratejisine yönelmişler ve hatalı bir sonuca ulaşmışlardır. Lan Ma (2007) tarafından gerçekleştirilen araştırmada da, görsel yaklaşımı benimseyen kimi öğrencilerin değişkenler arası ilişki bulma stratejisine odaklanarak, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirdiği, görsel ya da cebirsel yaklaşımı benimseyen öğrencilerden yinelemeli stratejilere odaklanan öğrencilerin ise, örüntüyü sonlu bir adıma devam ettiremediği ve cebirsel yaklaşım altında “bütüne genişletme” stratejisini kullandıkları belirlenmiştir. Benzer bir bulguya Orton ve Orton, (1994), Stacey, (1989), Sasman, Olivier ve Linchevski, (1999) araştırmalarında da ulaşılmıştır. Ayrıca her iki örüntü çeşidini de örüntüyü sonlu bir adıma devam ettirebilen öğrenci sayıları birbirine çok yakındır. Diğer taraftan Lin Yang (2004) tarafından gerçekleştirilen bir araştırmada ise, artarak değişen şekil örüntülerini, sonlu bir adıma devam ettirebilen öğrenci sayılarının sabit değişen şekil örüntülerine göre daha fazla olduğu görülmüştür. Sonuç olarak, görsel ya da cebirsel yaklaşımda öğrenciler örüntüyü yakın bir adıma devam ettirirken daha çok yinelemeli, sonlu bir adıma devam ettirirken ise, daha çok değişkenler arası ilişki bulma stratejilerine odaklanmışlardır.

Sabit ya da artarak değişen şekil örüntüsü oluşturmada ise, öğrencilerin çoğunluğu sabit değişen bir şekil örüntüsü oluştururken çok az öğrenci artarak değişen şekil örüntüsü oluşturabilmiştir. Sabit ya da artarak değişen şekil örüntüleri oluşturan öğrencilerin çoğunluğu, yinelemeli stratejiler içinde yer alan, "bir önceki şekilden bir sonraki şekli elde etme" stratejilerini kullanarak örüntü oluşturmuşlardır. Buna ilaveten sabit değişen şekil örüntüsünde "fonksiyonel bir ilişki" kullanarak, artarak değişen şekil örüntüsünde ise, "kat alma" stratejisini kullanarak örüntü oluşturabilen öğrenciler olmuştur. Sabit değişen şekil örüntüsü oluşturamayan öğrencilerden kimileri artarak değişen, artarak değişen şekil örüntüsü oluşturamayan öğrencilerden çoğunluğu sabit değişen şekil örüntüsü oluşturmuşlardır. Diğer taraftan iki örüntü çeşidi dışında farklı örüntü oluşturan öğrenciler de olmuştur. Dolayısıyla öğrencilerin örüntü oluştururken, istenilen örüntü çeşidinin özelliklerini dikkate almadıkları görülmektedir. Ayrıca sabit ya da artarak değişen şekil örüntüsü oluşturan ya da oluşturamayan öğrenciler arasında yüksek, orta ve düşük başarı düzeyine sahip öğrencilerin yer aldığı görülmektedir.

Sabit ya da artarak değişen şekil örüntülerinde öğrencilerin tamamı, her aşamada belirledikleri tüm ilişkileri öncelikle "sözlü" olarak ifade etmişlerdir. Benzer bulgulara Orton ve Orton, (1994) ve Looney, (2004) tarafından gerçekleştirilen araştırmalarda da rastlanmıştır. Bunun dışında kimi öğrenciler Samsan, Linchevski ve Olivier (1999) trafından gerçekleştirirlen araştırma bulgularında da görüldüğü gibi, her iki örüntü çeşidinde de buldukları fonksiyonel bir ilişkiyi örneğin "adım sayısı çarpı kendisi artı bir ekleme" şeklinde sözlü ifade ederek bir genellemeye ulaşmışlardır. Ayrıca öğrenciler örüntüde her adımda yer alan toplam şekil sayısı ve bu sayılar arasındaki farkı ya da farkları "sembol", şekil sayıları arasında elde ettikleri bağıntıları ve örüntünün yakın ve sonlu adımındaki toplam şekil sayılarını "matematiksel bir cümle" ile ifade etmişlerdir. Bunların yanı sıra şekil sayıları arasındaki sabit farkı ve 50. adımdaki şekil sayısını belirlerken "şekil sayı eşlemesi" yaparak ve örüntüde belirledikleri kimi ilişkileri "yazılı" ifade eden öğrenciler de olmuştur.

Sonuç olarak tüm örüntülerde öğrenci başarı düzeyleri, kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve örüntü oluşturmadaki strateji seçimlerinde etkili rol oynamamıştır.

Tekrarlanan, sabit ve artarak değişen olmak üzere üç örüntü çeşidinde, kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve örüntü oluşturmada öğrencilerin kullandıkları stratejiler karşılaştırıldığında, tekrarlanan örüntülerin yapısal olarak diğer örüntü çeşitlerinden farklı olması, öğrencilerin kullandıkları stratejilerde farklılığa yol açmıştır. Sabit ve artarak değişen örüntülerde ise, çoğunlukla benzer stratejiler kullanılmıştır. Bunların dışında verilen örüntü çeşitlerinin kendilerine has belirgin özellikleri ve örüntülerin sayı dizisi, şekil ve fonksiyon tablosu ile verilmesi, öğrencilerin kullandıkları stratejilerde değişiklik göstermiştir.

4.2. SONUÇ

İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntüleri anlama ve kavrama biçimlerine ilişkin sonuçlar; örüntü çeşitleri, örüntülerin algılanmasında bir araç olarak kullanılan öğrencilerin kullandıkları stratejilerin örüntü çeşitlerine göre karşılaştırılması ve kullanılan strateji seçimini etkileyen etmenler dikkate alınarak bütünleştirilmiştir.

4.2.1. Örüntü Çeşitlerine İlişkin Sonuçlar

4.2.1.1. İlköğretim Beşinci sınıf Öğrencilerinin Tekrarlanan Şekil Örüntüsünü Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Sonuçlar

- Örüntünün kuralının bulunmasında, kimi öğrencilerin tekrar birimini belirleyebildiği, kimi öğrencilerin tekrar birimi yerine tekrarlayan şekil grupları belirledikleri saptanmıştır. Tekrar birimini belirleyebilen öğrencilerin örüntünün tekrar birimindeki farklı şekiller arasında sayısal ilişkiyi kurabildiği ve bu bilgiyi örüntüyü sonlu adıma devam ettirmede kullanalabildiği, belirleyemeyen öğrencilerin ise, daha büyük sonlu adımlar için geçerli olmayan yollarla arayışta bulundukları görülmüştür.
- Örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede, öğrencilerin tamamının tekrarlanan örüntüyü şekillerin sıralanışını dikkate alarak yakın bir adıma devam ettirebildikleri belirlenmiştir. Sonlu adımda yer alan şekli; tekrar birimini belirleyen öğrencilerin hemen hemen tamamının sonlu adım sayısını içeren ve eleman sayısı olarak tekrar birimindeki şekil sayısının tam katı olan sayı kümesini belirlemede, en küçük üst sınır ya da en büyük alt sınır yaklaşımlarını etkili biçimde kullandıkları görülmüştür. Tekrar birimini belirleyemeyen öğrencilerin ise, daha büyük sonlu adımlar için kullanılması zor ya da kendilerince geliştirdikleri doğru sonuçlar vermeyen çabalar içinde oldukları belirlenmiştir.
- Örüntü oluşturmada, öğrencilerin çoğunun tekrarlanan bir şekil örüntüsü oluşturabildiği, örüntü oluştururken de belirledikleri tekrar birimini dikkate aldıkları görülmüştür. Örüntü oluşturamayan öğrencilerin ise, daha önce kendilerine sunulan tekrarlanan örüntüde, tekrar birimini belirleyemeyen öğrenciler olduğu saptanmıştır.
- Örüntüye ilişkin (kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve örüntü oluşturma) etkinliklerde öğrencilerin kullandıkları ifade biçimlerinin; “sözlü”, “sembol” ve “sözel yazma” olduğu görülmüştür.

4.2.1.2. İlköğretim Beşinci sınıf Öğrencilerinin Sayı Örüntülerini (Sabit ve Artarak Değişen) Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Sonuçlar

- Örüntünün kuralını bulmada genel olarak öğrencilerin örüntüye ilişkin bir terimi bir önceki terimle ilişkilendirdikleri ya da örüntüdeki terimlerin doğasına odaklandıkları belirlenmiştir. Ancak sayı örüntüsü fonksiyon tablosu biçiminde verilmişse, bunlara ilaveten öğrencilerin terim ve terim sırası ilişkisini kurabildikleri görülmüştür.
- Örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede; genel olarak öğrencilerin yakın adımda örüntüye ilişkin bir terimi bir önceki terimle ilişkilendirme, sonlu adımda ise hem bir önceki terime ilişkin ellerindeki verileri hem de verilen örüntüdeki terimlerin doğası ile ilgili bilgileri kullandıkları saptanmıştır. Ancak sayı örüntüsü fonksiyon tablosu biçiminde verilmişse, bunlara ilaveten öğrencilerin terim ve terim sırası ilişkisini kurabildikleri görülmüştür.
- Verilen örüntüye yapısal olarak benzer bir örüntü oluşturmada, öğrencilerin daha çok sayı örüntüleri arasında artarak değişen sayı dizisi ile fonksiyon tablosu kullanarak oluşturulan sabit değişen sayı örüntüsünde amaca ulaşabildikleri gözlenmiştir.
- Örüntüye ilişkin (kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve örüntü oluşturma) etkinliklerde öğrencilerin kullandıkları ifade biçimlerinin “sözlü”, “sembol”, “matematiksel cümle” ve “sözel yazma” olduğu belirlenmiştir.

4.2.1.3. İlköğretim Beşinci sınıf Öğrencilerinin Şekil Örüntülerini (Sabit ve Artarak Değişen) Anlama ve Kavrama Biçimlerine İlişkin Sonuçlar

- Örüntünün kuralını bulmada, öğrencilerin örüntüdeki her adımda yer alan şekillerin yapısal özelliklerini inceleyerek, örüntüdeki şekillerin oluşumunu tayin ettikleri (görsel yaklaşım) ya da her bir adımdaki şekillere ilişkin sayısal bir karşılık bularak (cebirsel yaklaşım) örüntüyü değerlendirdikleri belirlenmiştir.

- Örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede; öğrencilerin yakın adımda görsel yaklaşımı benimsemesi durumunda bir şekli bir önceki şekille ve şeklin yapısını terim sırası ile ilişkilendirdikleri, cebirsel yaklaşımı benimsemeleri durumunda ise, bir önceki terimi bir sonraki terimle ilişkilendirdikleri görülmüştür. Öğrencilerin sonlu adımda görsel yaklaşımı benimsemesi durumunda yakın adımdaki davranış biçimlerinden farklı bir durum görülmemiştir. Ancak öğrencilerin cebirsel yaklaşımı benimsemeleri durumunda terimleri kendi aralarında ilişkilendirmenin dışında, terim sırası ile terimler arasındaki ilişki, terimlerin doğası gibi farklı boyutlarda da araştırma yoluna gittikleri gözlenmiştir.
- Verilen örüntüye yapısal olarak benzer bir örüntü oluşturmada, öğrencilerin artarak değişen şekil örüntüsünden ziyade sabit değişen şekil örüntüsü oluşturmada amaca ulaştıkları görülmüştür.
- Örüntüye ilişkin (kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve örüntü oluşturma) etkinliklerde öğrencilerin kullandıkları ifade biçimlerinin; “sözlü”, “sembol”, “matematiksel cümle”, “şekil sayı eşlemesi” ve “sözel yazma” olduğu belirlenmiştir.

4.2.2. İlköğretim Beşinci sınıf Öğrencilerinin Kullandığı Stratejilerin Örüntü Çeşitlerine Göre Karşılaştırıldığında Ortaya Çıkan Sonuçlar

- Sayı ve şekil örüntülerinde (tekrarlanan, sabit ve artarak değişen) kuralı bulma, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirme ve örüntü oluşturmada öğrencilerin çoğunlukla benzer stratejiler kullandığı sadece örüntünün yapısına bağlı bazı farklılaşmaların olduğu saptanmıştır.

4.2.3. Strateji Seçimini Etkileyen Etmenlere İlişkin Sonuçlar

- Örüntünün kuralını bulmada, örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede ve örüntü oluşturmadaki strateji seçimlerinde öğrenci başarı düzeylerinin etkili olmadığı belirlenmiştir.

- Örüntülerin sunuluş biçiminin (sayı dizisi, fonksiyon tablosu, şekil) strateji seçimlerinde etkili olduğu belirlenmiştir.
- Örüntüyü yakın ve sonlu bir adıma devam ettirmede, genel olarak yakın adımda örüntüdeki bir terimin bir önceki terimle ilişkilendirildiği, sonlu adımda ise terim ve terim sırası ilişkisinin kurulabildiği, terimlerin doğasının dikkate alındığı saptanmıştır.

4.3. ÖNERİLER

Araştırma sonuçlarına dayalı olarak geliştirilen öneriler; "Uygulamaya Yönelik Öneriler" ve "Yapılacak Araştırmalara Yönelik Öneriler" olmak üzere iki başlık altında toplanmıştır.

4.3.1. Uygulamaya Yönelik Öneriler

- Tekrarlanan örüntülerde tekrar biriminin algılanmasının genelleme yapabilmede önemli olduğu göz önüne alınırsa, öğretmenler tekrarlanan örüntülerle ilgili etkinliklerde tekrar birimini dikkate almaya yönelik çalışmalar yapabilirler.
- Tekrarlanan, sabit ya da artarak değişen örüntülerin sayı dizisi, fonksiyon tablosu, şekil gibi farklı biçimlerde temsil edilmesinin strateji seçiminde etkili olduğu göz önüne alındığında, öğretmenler örüntülerle ilgili etkinliklerde çeşitli sunuluş biçimlerini kullanmaya yönelik çalışmalar yapabilirler.
- Girdi ve çıktı değerlerinin açıkça görülebildiği fonksiyon tablolarının, fonksiyonel bir ilişkiyi bulmayı kolaylaştırdığı göz önüne alındığında, ilköğretimde öğretmenler, fonksiyon tablosu biçiminde verilen örüntülerle ilgili etkinliklere ağırlık verebilir ve bu etkinliklerde girdi ve çıktı değerleri arasındaki ilişki hakkında öğrencilerin düşünebilmelerini diğer bir değişle fonksiyonel olarak düşünebilmelerini sağlayabilirler. Böylece öğretmenler, öğrencilerin ileride karşılaşabilecekleri fonksiyon kavramını anlamalarını hızlandırılabilirler.
- Şekil örüntülerinin de fonksiyonel bir ilişkiyi bulmada etkili olduğu göz önüne alındığında, ilköğretimde öğretmenler şekil örüntüleriyle ilgili etkinliklere

ağırlık verebilir ve bu etkinlikleri öğrencilerin fonksiyonel ilişkiyi görebilmelerine olanak sağlayacak şekilde düzenleyebilirler.

- Örüntülerde genelleme (fonksiyonel ilişki) becerisinin gelişimi, daha çok örüntünün sonlu bir adıma devamı gereksiniminde ortaya çıktığı göz önüne alındığında, öğretmenler bu becerinin gelişimine katkı sağlayacak öğretim etkinlikleri planlayabilirler.
- Örüntüleri sonlu bir adıma devam ettirmede öğrencilerin doğru stratejilere yönelmelerini sağlamak amacıyla, verilen örneklerde sonlu adım seçimlerindeki sayı, asal sayı olabilecek örneklemeleri de içerebilir.

4.3.2. Yapılacak Araştırmalara Yönelik Öneriler

- İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin algılarının belirlendiği bu araştırma, diğer eğitim basamaklarında da yapılabilir.
- Bir örüntünün farklı sunuluş biçimlerinin kullanıldığı bir araştırmayla öğrencilerin anlama ve kavrama biçimleri belirlenebilir.
- İlköğretim beşinci sınıf öğrencileri üzerinde örüntülerin öğretimine ilişkin araştırmalar desenlenebilir.

EKLER

EK **<u>Sayfa</u>**

EK-1

T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
Milli Eğitim Müdürlüğü

SAYI : B.08.4MEM.4.26.00.02.310 ( ) / 25.01.2007 02288
KONU : Araştırma izni.

ANADOLU ÜNİVERSİTESİ REKTÖRLÜĞÜNE

İLGİ: a-05.10.2006 tarih ve 670/7716 sayılı yazınız.
b-Prof.Dr.Aynur ÖZDAŞ'a ait 20.12.2006 tarihli dilekçe.
c-MEB. Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Dairesi Başkanlığı'nın 15.01.2007 tarih ve 163 sayılı emri.

Üniversiteniz Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Ana Bilim Dalı Sınıf Öğretmenliği doktora öğrencisi Dilek TANIŞLI'nın, Cumhuriyet İlköğretim Okulu'nda "İlköğretim 5.sınıf Öğrencilerinin Örüntü Konusuna İlişkin Algılarının Belirlenmesi" konulu araştırma yapma isteği Bakanlığımızın ilgi (c) emri ile uygun görülmüştür.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

Ertuğrul DİNDAR
Milli Eğitim Müdürü

Sn. g. gündemler

EKLER
EK-1 İlgi (c) emir (1 adet)

GELEN EVRAK
Kayıt Tarihi : 31.1.2007
Kayıt No.su : 141

- Eğt. Bil. Ens.
- Yazı İşl. Md.

Tel : 239 72 00
Faks : 239 39 22
E-Posta Adresi : eskisehirmem@ meb.gov.tr
İnternet Adresi : http://eskisehir.meb.gov.tr

EĞİTİME %100 DESTEK
DANIŞMA 444 0 632 HATTI

Anadolu Üniversitesi Rektörlüğü
Evrak Kayıt Servisi
K. TARİHİ: 31 Ocak 2007
K. NOSU: 1216

EK-1 Devam

T.C.
MİLLÎ EĞİTİM BAKANLIĞI
Eğitimi Araştırma ve Geliştirme Dairesi Başkanlığı

Sayı : B.08.0.EGD.0.33.05.311-40 / 163 15./01 2007
Konu : Araştırma İzni

ESKİŞEHİR VALİLİĞİNE
(İl Millî Eğitim Müdürlüğü)

İlgi : a) 21.12.2006 tarih ve B.08.4.MEM.4.26.00.02.000/35133 sayılı yazı.
b) 03.11.2006 tarih ve B.08.0.EGD.0.33.05.311-1243/4611 sayılı yazı.

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü İlköğretim Ana Bilim Dalı Sınıf Öğretmenliği doktora öğrencisi Dilek TANIŞLI'nın "İlköğretim 5. Sınıf Öğrencilerinin Örüntü Konusuna İlişkin Algılarının Belirlenmesi" konulu araştırması ile ilgili ilgi (a) yazınız incelenmiştir.

Söz konusu araştırma ilgi (b) yazımızla uygun görülmüş olup, adı geçenin bu çalışmasını İliniz Cumhuriyet İlköğretim Okulunda uygulamasında Bakanlığımızca bir sakınca görülmemektedir.

Bilgilerinizi ve gereğini rica ederim.

İbrahim DEMİRER
Bakan a.
Daire Başkanı

T.C.
ESKİŞEHİR VALİLİĞİ
İL YAZI İŞLERİ MÜDÜRLÜĞÜ
Evrak Şefliği
EVRAKIN
Gideceği Yer :
Tarihi
Numarası :
İl Milli Eğt. Md.
22 Ocak 2007
VALİ S.

B- 776

EĞİTİME %100 DESTEK
DANIŞMA 444 0 632 HATTI
G.M.K. Bulvarı No: 109
06570 Maltepe / ANKARA
e-posta: earged@meb.gov.tr
Tel : (0312) 230 36 44
Faks : (0312) 231 62 05

EK-2

ÖRÜNTÜ TESTİ

Adı:

Soyadı:

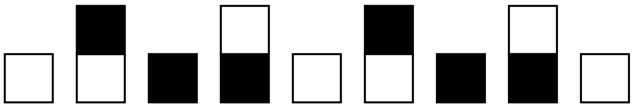
Değerli Öğrenci;

Size verilen bu test "örüntüler" konusuna aittir. Testte **10 tane soru bulunmaktadır.** Testi yanıtlama süreniz **30+30=60 dakikadır.** Her soruyu dikkatlice okuduktan sonra yanıtlarınızı şıkların altındaki boşluklara yazınız. Her soruda ne isteniyorsa açıkça ifade ediniz.

Başarılar dilerim.

Öğr. Grv. Dilek TANIŞLI
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Fakültesi İlköğretim Bölümü
Eskişehir

EK-2 Devam

1.  ....

Yukarıda belli bir düzende yerleştirilmiş şekillerle tanımlanan bir örüntü verilmektedir, örüntüyü inceleyiniz.

a) Örüntüde yer alan şekiller arasında nasıl bir ilişki vardır? Bulduğunuz ilişkiyi ifade ediniz.

b) Bulduğunuz ilişkiye göre yukarıda verilen boşluklara gelmesi gereken şekilleri yerleştiriniz.

2.

1. Adım :	**1**	**2**	**3**	**4**	**5**
2. Adım :	**2**	**3**	**4**	**5**	**6**
3. Adım :	**3**	**4**	**5**	**6**	**7**
4. Adım :					

8. Adım :

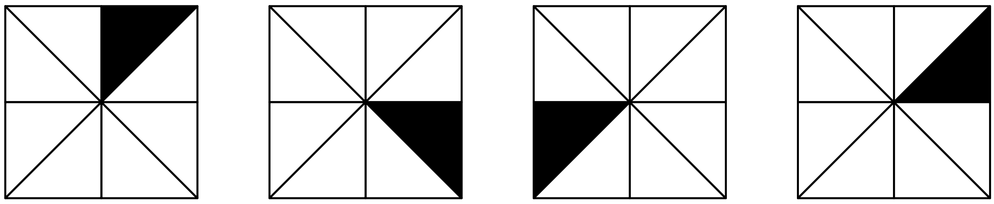
Yukarıda her bir adımı sayı grubu ile tanımlanmış örüntüyü inceleyiniz.

a) Örüntünün adımlarındaki sayılar arasında bulduğunuz ilişkiyi ifade ediniz.

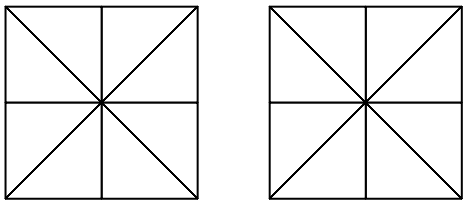
b) Bulduğunuz ilişkiye göre örüntüde 4. ve 8. adımları oluşturunuz.

EK-2 Devam

3.



1. **2.** **3.** **4.**



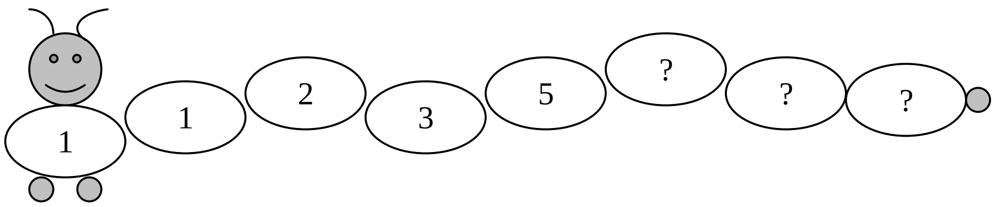
5. **6.**

Yukarıdaki şekillerde siyah bölgeler, aynı şeklin farklı kısımlarında yer alarak değişmektedir.

a) Şekillerdeki siyah bölgenin değişimini veren ilişkiyi ifade ediniz.

b) Bulduğunuz ilişkiye göre 5. ve 6. adımı devam ettiriniz.

4.



Yukarıdaki örüntüde yer alan sayılar bir kuralla oluşturulmuştur.

a) Örüntüdeki sayıların oluşum kuralını bulunuz ve bu kuralı ifade diniz.

b) Bulduğunuz bu kurala göre örüntüyü üç adım daha devam ettiriniz.

EK-2 Devam

5. ○ ● ○ ● ● ○ ● ● ● ○ ● ● ● ●

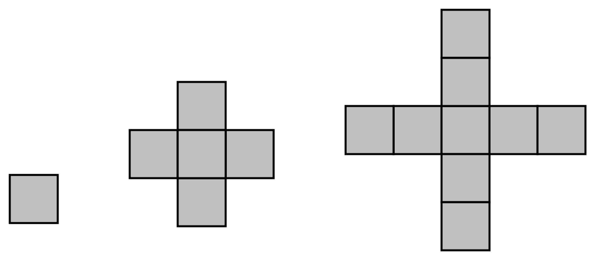
Yukarıda, siyah ve beyaz daireler belli bir düzende devam ettirilerek bir örüntü oluşturulmuştur.

a) Örüntünün oluşumunu ifade ediniz.

b) Örüntü, siyah dairelerin sayısı 10 taneye ulaşana kadar devam ettiğinde, şekil çizmeden baştan itibaren;

- Siyah dairelerin toplam sayılarını bulunuz?
- Beyaz dairelerin toplam sayılarını bulunuz?

6.



1. **2.** **3.**

Şekil	**Kare Sayısı**
1	1
2	5
3	9
4	?
5	?
7	?

4. **5.**

Yukarıda şekillerle ifade edilen örüntüyü inceleyiniz ve yukarıdaki tabloda verilen bilgilerle karşılaştırınız.

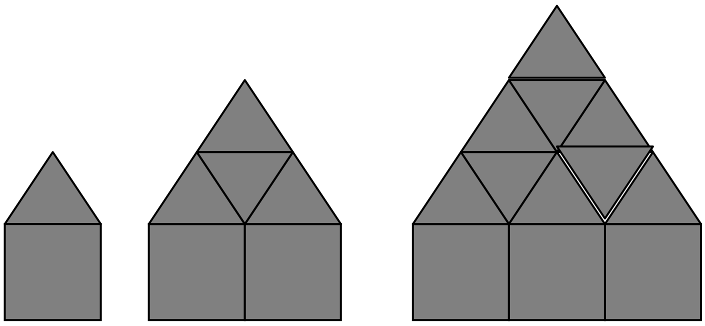
a) Örüntünün 4. ve 5. adımlarındaki şekilleri oluşturunuz.

b) Örüntünün her adımındaki kare sayıları arasında nasıl bir ilişki vardır? İfade ediniz.

EK-2 Devam

c) Yukarıdaki tabloda (?) işaretleri yerine hangi sayılar gelmelidir? Bulunuz.

7.



1. **2.** **3.**

Yukarıda her bir adımı, farklı iki şekil içeren bir örüntü verilmektedir.

a) Örüntünün her bir adımındaki kare sayılarını sırayla yazınız.

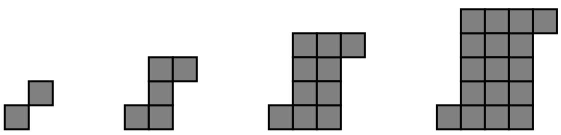
b) Örüntünün her bir adımındaki üçgen sayılarını sırayla yazınız.

c) Örüntünün her adımındaki kare ve üçgen sayıları arasında nasıl bir ilişki vardır? İfade ediniz.

d) Örüntü 5. adıma kadar devam ederse 5. adımda kaç tane kare vardır? Bulunuz.

e) Örüntü 5. adıma kadar devam ederse 5. adımda kaç tane üçgen vardır? Bulunuz

8.



1. **2.** **3.** **4.** **5.**

Yukarıda verilen örüntüde her adım, küçük kareler yardımıyla oluşturulmuş şekillerle oluşturulmuştur.

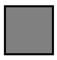
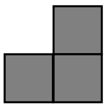
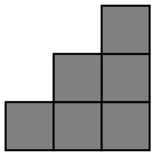
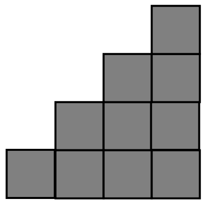
EK-2 Devam

a) Örüntünün her adımında kaç tane küçük kare vardır? Sırayla yazınız.

b) Örüntünün adımlarındaki küçük kare sayıları arasında nasıl bir ilişki vardır? İfade ediniz.

c) Örüntünün 5. adımındaki şekli oluşturunuz.

9.

Adım Sayısı	 **1.**	 **2.**	 **3.**	 **4.**	**7.**
Kare Sayısı	1	3	6	10	?
Kural	1	1+2	1+2+3	?	?

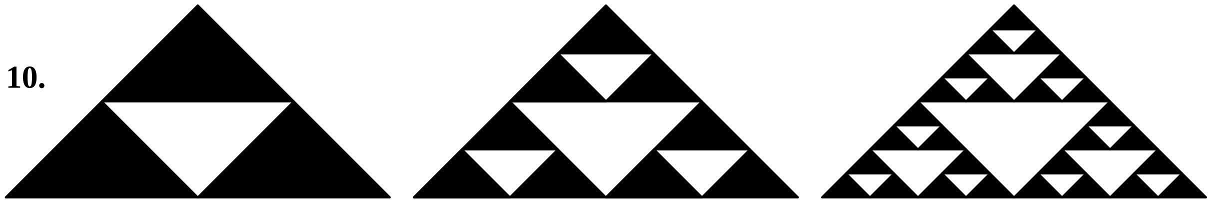
Yukarıdaki tabloda, adımları kareler kullanılarak oluşturulmuş şekillerle, tanımlı bir örüntü bulunmaktadır.

a) Tabloda her bir adımda verilen kare sayılarını inceleyerek 7. adımda kaç tane kare olmalıdır? Bulunuz.

b) Tabloda her bir adımda verilen kare sayılarına ilişkin kuralı inceleyerek örüntünün 4. ve 7. adımdaki kuralı yazınız.

EK-2 Devam

10.



1. 2. 3.

Yukarıdaki örüntüyü inceleyiniz.

a) Örüntünün ilk üç adımındaki beyaz üçgen sayılarını sırayla yazınız.

b) Örüntünün ilk üç adımındaki siyah üçgen sayılarını sırayla yazınız.

c) Örüntünün adımlarındaki beyaz ve siyah üçgenlerin sayıları arasındaki ilişkiyi ifade ediniz.

EK-3

ÖRÜNTÜ TESTİ DEĞERLENDİRME ÖLÇÜTLERİ VE PUANLAR

Soru	Ölçütler	Puan	
1	**a)** • Örüntünün temel adımını ifade etme. **b)** • Şekil çizerek örüntüyü devam ettirme.	**5** **1**	**6**
2	**a)** • Örüntünün adımlarını oluşturan sayıları tanımlama. • Her adımdaki ilk sayıyı tayin etme. **b)** • Örüntünün 4. adımını oluşturma. • Örüntünün 8. adımını oluşturma.	**2** **2** **1** **1**	**6**
3	**a)** • Örüntüde bir adımdan onu takip eden adıma geçişte arada kalan üçgensel bölgelerin sayıları arasındaki ilişkiyi açıklama. **b)** • Örüntünün 5. adımını oluşturma • Örüntünün 6. adımını oluşturma	**6** **2** **2**	**10**
4	**a)** • Örüntüde her sayının elde ediliş kuralını açıklama. **b)** • Örüntüyü 3 adım devam ettirme.	**4** **3(1+1+1)**	**7**
5	**a)** • Örüntünün oluşumunda yer alan siyah daireleri ifade etme. • Örüntünün oluşumunda yer alan beyaz daireleri ifade etme. **b)** • 10. adıma kadar toplam beyaz daire sayısını belirleme. • 10. adıma kadar toplam siyah daire sayısını belirleme.	**3** **2** **2** **3**	**10**

EK-3 Devam

Soru	Ölçütler	Puan	
6	**a)** • Örüntünün 4. adımındaki şekli çizme. • Örüntünün 5. adımındaki şekli çizme. **b)** • Örüntünün her bir adımındaki kare sayıları arasındaki ilişkiyi açıklama. (ya da örüntünün her bir adımındaki şekillerin oluşumunu açıklama.) **c)** • Örüntünün 4. adımında verilmeyen sayısı bulma. • Örüntünün 5. adımında verilmeyen sayısı bulma. • Örüntünün 7. adımında verilmeyen sayısı bulma.	**3** **3** **5** **1** **1** **2**	**15**
7	**a)** • Örüntünün her adımında yer alan kare sayılarını bulma **b)** • Örüntünün her adımında yer alan üçgen sayılarını bulma **c)** • Örüntünün her adımındaki üçgen ve kare sayıları arasındaki ilişkiyi açıklama. **d)** • Örüntünün 5. adımındaki kare sayısını bulma. **e)** • Örüntünün 5. adımındaki üçgen sayısını bulma.	**1** **1** **7** **1** **2**	**12**
8	**a)** • Örüntünün her adımındaki kare sayılarını bulma **b)** • Örüntünün her adımındaki kare sayıları arasındaki ilişkiyi açıklama (şeklin oluşumunu açıklama). **c)** • Örüntünün 5. adımındaki şekli çizme	**1** **6** **5**	**12**

EK-3 Devam

Soru	Ölçütler	Puan	
9	**a)** • Örüntünün her adımındaki kare sayıları arasındaki ilişkiyi açıklama • Örüntünün 7. adımındaki kare sayısını bulma **b)** • Örüntünün 4. adımındaki kuralı bulma • Örüntünün 7. adımındaki kuralı bulma	**5** **2** **1** **2**	**10**
10	**a)** • Örüntünün her bir adımındaki beyaz üçgen sayılarını bulma **b)** • Örüntünün her bir adımındaki kırmızı üçgen sayılarını bulma **c)** • Örüntüde kırmızı ve beyaz üçgen sayıları arasındaki ilişkiyi açıklama (ya da örüntüde sayılar arasındaki ilişkiyi farklı bir yolla belirleme ve açıklama)	**1** **1** **10**	**12**
Toplam			**100**

EK-4

KLİNİK GÖRÜŞME SORULARI

- **SORU 1: Tekrarlanan Şekil Örüntüsü**

△ △ △ □ △ □ △ △ △ □ △ □

△ △ △ □ △ □ ___ ___

Görüşmeci: Yukarıda şekillerin sıralanışı ile ifade edilen bir örüntü örneği yer almaktadır. Örüntüde yer alan şekillerin sıralanışını inceler misin?

Görüşmeci: Şekillerin sıralanışında, tekrar eden bir şekil grubu gözlemleyebildin mi?

> **Görüşmeci: (Yanıt evet ise)** gözlemlediğin bu grubu yuvarlak içine alır mısın? Nedenini de açıklamanı istiyorum.
>
> > ***Sonda sorusu: (Öğrenci tekrar eden şekil grubunu bulamıyorsa)*** *Örneğin; ABABAB şeklinde sıralanmış bir örüntüde, tekrar eden harf grubu AB dir. Bunu daha belirgin bir şekilde aşağıda gösterelim.*
> >
> > *AB AB AB*
> >
> > *Bizim örneğimizde buna benzer tekrar eden bir şekil grubu bulabilir misin? Açıkla?*

Görüşmeci: Örüntüyü devam ettirdiğinde, boşluklara hangi şekiller gelmeli?

> **Görüşmeci:** Nasıl karar verdin açıklar mısın?

Görüşmeci: Bu örüntüde baştan 5. şekil nedir?

EK-4 Devam

Görüşmeci: Baştan 52. şeklin ne olacağını tahmin edebilir misin?

Görüşmeci: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Görüşmeci: Örüntüde toplam kare sayısı 10 olduğunda üçgen sayısı ne olur?

Görüşmeci: Bu soruyu çözerken izlediğin yola ilişkin düşünceni açıklar mısın?

Görüşmeci: Verilen örüntüde olduğu gibi tekrarlayan bir örüntü oluşturabilir misin?

Görüşmeci: Örüntüyü nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?

- **SORU 2: Sayı Dizisi Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsü**

5 9 13 17 21

Görüşmeci: Bu örüntüyü inceler misin? Örüntünün oluşumunda sayılarla ilgili neler düşündüğünü ifade eder misin?

Görüşmeci: Örüntüde sayılar arasında bir ilişki görebiliyor musun?

Görüşmeci: Bu ilişkiyi bir cümleyle ifade eder misin?

Görüşmeci: Bulduğun ilişkiye göre örüntüyü bir adım devam ettirebilir misin?

Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

Görüşmeci: Örüntüde 10. sıradaki sayıyı bulabilir misin?

Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

EK-4 Devam

Görüşmeci: Örüntüyü oluşturan sayıların oluşumunda bir kural bulabilir misin?

Görüşmeci: Kuralı nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Görüşmeci: Verilen örüntüde olduğu gibi, benzer bir örüntü oluşturabilir misin?

Görüşmeci: Örüntüyü nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?

- **SORU 3: Sayı Dizisi Biçiminde Verilen Artarak Değişen Sayı Örüntüsü**

5 8 13 20 29

Görüşmeci: Bu örüntüyü inceler misin? Örüntünün oluşumunda sayılarla ilgili neler düşündüğünü ifade eder misin?

Görüşmeci: Örüntüde sayılar arasında bir ilişki görebiliyor musun?

Görüşmeci: Bu ilişkiyi bir cümleyle ifade eder misin?

Görüşmeci: Bulduğun ilişkiye göre örüntüyü bir adım devam ettirebilir misin?

Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

Görüşmeci: Örüntüde 10. sıradaki sayıyı bulabilir misin?

Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

Görüşmeci: Örüntüyü oluşturan sayıların oluşumunda bir kural bulabilir misin?

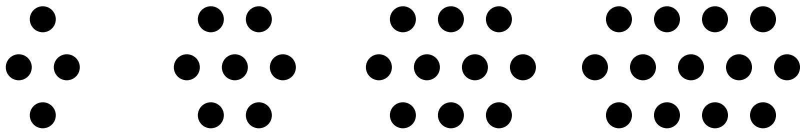
Görüşmeci: Kuralı nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Görüşmeci: Verilen örüntüde olduğu gibi, benzer bir örüntü oluşturabilir misin?

EK-4 Devam

Görüşmeci: Örüntüyü nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?

- **SORU 4: Sabit Değişen Şekil Örüntüsü**



1. **2.** **3.** **4.**

Görüşmeci: Yukarıda her adımı noktalardan oluşmuş bir şekil örüntüsü verilmektedir. Bu örüntüyü inceler misin?

Görüşmeci: Örüntüde yer alan şekillerin oluşumuyla ilgili gözlemlerini yüksek sesle ifade eder misin?

Görüşmeci: Örüntüde yer alan şekillerin oluşumuyla ilgili başka neler söyleyebilirsin?

Görüşmeci: Örüntünün 5. adımındaki şekli oluşturabilir misin?

Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

Görüşmeci: Örüntünün 10. adımındaki şekli oluşturabilir misin?

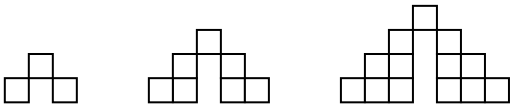
Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

Görüşmeci: Verilen örüntüde olduğu gibi, şekillerden oluşan bir örüntü oluşturabilir misin?

Görüşmeci: Örüntüyü nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?

EK-4 Devam

- **SORU 5: Artarak Değişen Şekil Örüntüsü**



1. **2.** **3.**

Görüşmeci: Yukarıda her adımı noktalardan oluşmuş bir şekil örüntüsü verilmektedir. Bu örüntüyü inceler misin?

Görüşmeci: Örüntüde yer alan şekillerin oluşumuyla ilgili gözlemlerini yüksek sesle ifade eder misin?

Görüşmeci: Örüntüde yer alan şekillerin oluşumuyla ilgili başka neler söyleyebilirsin?

Görüşmeci: Örüntünün 4. adımındaki şekli oluşturabilir misin?

Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

Görüşmeci: Örüntünün 7. adımındaki şekli oluşturabilir misin?

Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

Görüşmeci: Verilen örüntüde olduğu gibi, şekillerden oluşan bir örüntü oluşturabilir misin?

Görüşmeci: Örüntüyü nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?

EK-4 Devam

- **SORU 6: Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Sabit Değişen Sayı Örüntüsü**

△	□
1	**7**
2	**9**
3	**11**
4	**13**
5	**15**

Görüşmeci: Yukarıdaki tabloda her üçgen sayısına karşılık bir kare sayısı verilmiştir. Tabloda üçgen sayılarına dayalı olarak bir kare sayısına ulaşmak için bir kural söyleyebilir misin?

Görüşmeci: Kuralı nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Görüşmeci: Tabloda yer alan üçgen ve kare sayılarını bir adım devam ettirebilir misin?

Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

Görüşmeci: Tabloya göre üçgen sayısı 60 olduğunda, buna dayalı olarak bir kare sayısı bulabilir misin?

Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

Görüşmeci: Verilen örüntüde olduğu gibi, tablo yardımıyla benzer bir örüntü oluşturabilir misin?

Görüşmeci: Örüntüyü nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?

EK-4 Devam

- **SORU 7: Fonksiyon Tablosu Biçiminde Verilen Artarak Değişen Sayı Örüntüsü**

♡	☺
1	**3**
2	**6**
3	**11**
4	**18**
5	**27**

Görüşmeci: Yukarıdaki tabloda her kalp sayısına karşılık bir gülen yüz sayısı verilmiştir. Tabloda kalp sayılarına dayalı olarak bir gülen yüz sayısına ulaşmak için bir kural söyleyebilir misin?

Görüşmeci: Kuralı nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Görüşmeci: Tabloda yer alan kalp ve gülen yüz sayılarını bir adım devam ettirebilir misin?

Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

Görüşmeci: Tabloya göre kalp sayısı 60 olduğunda, buna dayalı olarak bir gülen yüz sayısı bulabilir misin?

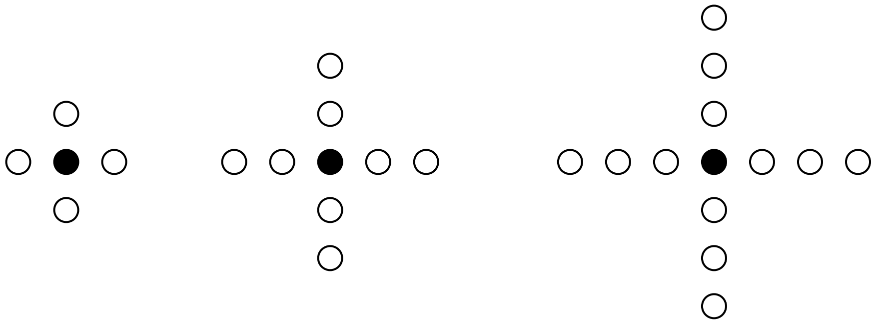
Görüşmeci: Bunu nasıl yaptığını açıklar mısın?

Görüşmeci: Verilen örüntüde olduğu gibi, tablo yardımıyla benzer bir örüntü oluşturabilir misin?

Görüşmeci: Örüntüyü nasıl oluşturduğunu açıklar mısın?

EK-4 Devam

- **SORU 8: Sabit Değişen Şekil Örüntüsü**



1. **2.** **3.**

Görüşmeci: Yukarıda her adımı siyah ve beyaz dairelerden oluşmuş bir şekil örüntüsü verilmektedir. Bu örüntüyü inceler misin?

Görüşmeci: Örüntüde yer alan şekiller arasında bir ilişki gözlemleyebildin mi?

Görüşmeci: Bulduğun ilişkiyi ifade eder misin?

Görüşmeci: 3. şekilde siyah ve beyaz toplam kaç tane daire var? Daha sonra şekiller böyle devam ederse, 4. şekli oluşturmak için siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?

Görüşmeci: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Görüşmeci: Örüntünün her bir adımındaki şekillerin oluşumunda yer alan, siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısını veren bir kural ifade edebilir misin?

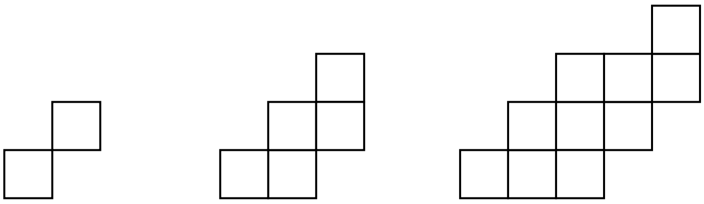
Görüşmeci: Kuralı nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Görüşmeci: Örüntüde 50. adımda yer alacak siyah ve beyaz dairelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?

EK-4 Devam

Görüşmeci: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

- **SORU 9: Artarak Değişen Şekil Örüntüsü**



1. **2.** **3.**

Görüşmeci: Yukarıda her adımı karelerden oluşmuş bir şekil örüntüsü verilmektedir. Bu örüntüyü inceler misin?

Görüşmeci: Örüntüde yer alan şekiller arasında bir ilişki gözlemleyebildin mi?

Görüşmeci: Bulduğun ilişkiyi ifade eder misin?

Görüşmeci: 3. şekilde toplam kaç tane kare var? Daha sonra şekiller böyle devam ederse, 4. şekli oluşturmak için karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?

Görüşmeci: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Görüşmeci: Örüntünün her bir adımındaki şekillerin oluşumunda yer alan, karelerin toplam sayısını veren bir kural ifade edebilir misin?

Görüşmeci: Kuralı nasıl bulduğunu açıklar mısın?

Görüşmeci: Örüntüde 50. adımda yer alacak karelerin toplam sayısının ne olacağını bulabilir misin?

Görüşmeci: Nasıl bulduğunu açıklar mısın?

EK-5

ÖĞRENCİ KİŞİSEL BİLGİ FORMU

1. Cinsiyetiniz:
   - ( ) Kız
   - ( ) Erkek

2. Kardeş Sayısı:
   - ( ) Yok
   - ( ) 1
   - ( ) 2
   - ( ) 3
   - ( ) Diğer

3. Aylık Geliriniz:
   - ( ) 501-1000 YTL
   - ( ) 1001-1500 YTL
   - ( ) 1501 YTL’den fazla

4. Babanızın Eğitim Durumu:
   - ( ) İlkokul
   - ( ) Ortaokul
   - ( ) Lise
   - ( ) Üniversite

5. Annenizin Eğitim Durumu:
   - ( ) İlkokul
   - ( ) Ortaokul
   - ( ) Lise
   - ( ) Üniversite

EK-5 Devam

6. Babanızın Mesleği:

( ) Devlet Memuru

( ) İşçi

( ) Diğer

7. Annenizin Mesleği:

( ) Devlet Memuru

( ) İşçi

( ) Diğer

EK-6

09. 04.2007

ÖĞRENCİ VELİSİ BİLGİLENDİRME ve GÖRÜŞME ONAY FORMU

Sayın Veli,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğiniz ilgi ve bana ayırdığınız zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve öğrencinizin bir katılımcı olarak haklarını tanımlamayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmanın amacı, "İlköğretim 5. Sınıf Öğrencilerinin Örüntü Konusuna İlişkin Algılarının Belirlenmesi" adlı doktora tez çalışması için belirlenen hedef öğrencilerin Matematik dersinde örüntü konusuna yönelik görüşlerini almaktır.

Velisi bulunduğunuz öğrencinin araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceği görüşlerin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum. Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca görüşme sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmeleri video kamera ile kaydetmek istiyorum. Kayda alınacak bu görüşme, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Öğrencinizin yada sizin isteğiniz doğrultusunda video kayıtları, veriler yazıldıktan sonra silinebilecek ya da size teslim edilecektir.

İzniniz olmadığı takdirde, öğrencinizin ismi bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılabilecektir. Öğrenci istediği zaman görüşmeyi kesebilir ve çalışmadan ayrılabilir. Bu durumda yaptığımız kayıtları ve yazılan raporları size teslim edeceğim.

EK-6 Devam

Bu sözleşmeyi okuyup, bu araştırmaya velisi bulunduğunuz öğrencinin gönüllü olarak katıldığına ve araştırma kapsamında benim size verdiğim güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanızı rica ediyorum.

Bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığınız için teşekkür ederim.

Öğr. Gör. Dilek TANIŞLI
Anadolu. Üniversitesi
Eğitim Fakültesi
İlköğretim Bölümü
26470 Eskişehir
E-posta: dtanisli@anadolu.edu.tr
Tel: 0222.3350580/3550

Tarih: İsim ve İmza

EK-7

ÖĞRENCİ BİLGİLENDİRME ve GÖRÜŞME ONAY FORMU

Merhaba,

Öncelikle yapacağım bu çalışmaya gösterdiğin ilgi ve bana ayırdığın zaman için teşekkür ederim. Bu form, araştırmanın amacını ve senin bir katılımcı olarak haklarını tanımlamayı amaçlamaktadır.

Bu araştırmanın amacı, "İlköğretim 5. Sınıf Öğrencilerinin Örüntü Konusuna İlişkin Algılarının Belirlenmesi" adlı doktora tez çalışması için belirlenen hedef öğrencilerin Matematik dersinde örüntü konusuna yönelik görüşlerini almaktır.

Araştırmama gönüllü olarak katılımının ve dile getireceğin görüşlerinin, bu çalışmaya ışık tutacağına inanıyorum. Araştırmamın geçerlik ve güvenirliğini sağlamak, ayrıca görüşme sırasında ortaya çıkabilecek olası kesintileri önleyebilmek amacıyla görüşmemizi video kamera ile kaydetmek istiyorum. Kayda alınacak bu görüşme, yalnızca bilimsel bir veri olarak bu araştırma için kullanılacak ve bunun dışında hiçbir amaçla kullanılmayacaktır. Senin isteğin doğrultusunda video kayıtları, veriler yazıldıktan sonra silinebilecek ya da sana teslim edilecektir.

İznin olmadığı takdirde, ismin bu araştırmada kullanılmayacak, yerine takma bir isim kullanılabilecektir. İstediğin zaman görüşmeyi kesebilir ve çalışmadan ayrılabilirsin. Bu durumda yaptığımız kayıtları ve yazılan raporları sana teslim edeceğim.

Bu sözleşmeyi okuyup, bu araştırmaya gönüllü olarak katıldığına ve araştırma kapsamında benim sana verdiğim güvenceye ilişkin olarak bu formu imzalamanı rica ediyorum.

EK-7 Devam

Araştırmama katıldığın ve bu sözleşmeyi okuyarak imzaladığın için teşekkür ederim.

Öğr. Gör. Dilek TANIŞLI
Anadolu. Üniversitesi
Eğitim Fakültesi
İlköğretim Bölümü
26470 Eskişehir
E-posta: dtanisli@anadolu.edu.tr
Tel: 0222.3350580/3550

Tarih: İsim ve İmza

KAYNAKÇA

Altun, M. (2008). *Matematik öğretimi.* Bursa: Erkam Matbaası.

Akkuş Çıkla, O. ve Duatepe A. (2002). İlköğretim matematik öğretmen adaylarının orantısal akıl yürütme becerileri üzerine niteliksel bir çalışma. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi.* 23, 32-40.

Aksu, M. (1991). Matematik öğretiminin amaç ve ilkeleri. Özer, B. (Ed.), *Matematik öğretimi* (1-15). Eskişehir: Anadolu Üniversitesi Açık Öğretim Fakültesi Yayınları.

Becker, J. R. ve Rivera, F. (2006). Sixth graders' figural and numerical strategies for generalizing patterns in algebra (1). Alatorre, S., Cortina, J. L., Saiz, M. Ve Mendez, A. (Ed.), *Proceeding of The 28th Annual Meeting of The North American Chapter of The international Group for the Psychology of Mathematics Education.* 2, 95-101. Merida, Mexico: Universidad Pedagogica Nacional.

Blair, S. L. (2001). The importance of basic facts in mathematics. Dissertation Abstracts International, 62 (08), 2705A. (UMI No: 3022967).

Blanton, M. L. ve Kaput, J. (*2004*). Elementary grades students' capacity for functional thinking. In M. J. Hoines ve A. Fuglestad (Ed.), *Proceeding of The 28th Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education,* 2, 135-142. Bergen Norway: International Group For The Psychology of Mathematics Education.

Billstein, R., Libeskind S. ve Lott J. W. (2004). *A problrem solving approach to mathematics for elementary school teachers.* 8th ed-Reading, Mass.: Addison- Wesley.

Bishop, J. W., Otto, A. D. ve. Lubunski, C. A. (2001). Promoting algebraic reasoning using students' thinking. *Mathematics Teaching in The Middle School.* 6(9), 508-514.

Bogdan, R. C. ve Biklen, S. K. (1998). *Qualitative research for education: An ıntroduction to theory and methods.* 3rd ed-Boston: Allyn and Bacon.

Burke, C. S. ve Orton, A. (1999). Children's understanding of graphic relations. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (137-148). London and New York: Cassell.

Burns, M. (2000). *About teaching mathematics. A-K 8 research.* 2nd ed-Sausaluto, California: Math Solutions Publication.

Cathcart, W. G., Pothier, V. M., Vance, T. H. ve Bezuk, N. S. (2003). *Learning mathematics in elementary and middle schools.* 3rd ed-Upper Saddle River, N.J: Merrill/Prentice Hall.

Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. Kelly, A. E. ve Lesh, R. A. (Ed), *Handbook of research design in mathematics and science education* (547-589). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Çakmak, Z. (1998). Aşamalı matematik ve etkili analiz öğretimi. *Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi.* 8(1-2), 82-92.

Edwards, M. E. (1999). Journal writing in an elementary math classroom and its effect on students' understanding of decimals. Masters Abstracts International, 38 (04), 836. (UMI No: AAT MQ 45957).

Ellis, A. B. (2004). Relationships between generalizing and justifying: Students' reasoning with linear functions. Dissertation Abstracts International, 65 (06), 2127A. (UMI No: 3137248).

Ginsburg, H.P. ve Pappas, S. (2004). SES, ethnic, and gender differences in young children's ınformal addition and subtraction: a clinical ınterview ınvestigation. *Applied Developmental Psychology* . 25, 171-192.

Ginsburg, H.P. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For The Learning of Mathematics.* 1(3), 4-11.

Goldin, G. A. (1998). Observing mathematical problem solving through task-based interviews. Teppo, A. R. (Ed.), *Qualitative Research Methods in Mathematics Education.* NCTM: Reston.

Goldin, G. A. (2000). A scientific perspective on structured, task-based interviews in mathematics education research. Kelly, A. E. ve Lesh, R. A. (Ed), *Handbook of research design in mathematics and science education* (517-545). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

Guerrero, L. ve Rivera A. (2002). Exploration of patterns and recursive functions. *Proceedings of the Annual Meeting of the North American Chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (24th, Athens, Georgia, October 26-29).* 1-4. 262-272.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. ve Threlfall, J. (1998). Children's strategies with number patterns. *Educational Studies.* 24(3), 315-331.

Hargreaves, M., Shorrocks-Taylor, D. ve Threlfall, J. (1999). Children's strategies with number patterns. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (67-83). London and New York: Cassell.

Herbert, K. ve Brown, R. H. (1997). Patterns as tools for algebraic reasoning. *Teaching Children Mathematics.* 3, 123-128.

Hunting, R. P. (1997). Clinical interview methods in mathematics education research and practice. *Journal of Mathematical Behavior.* 16(2), 145-165.

Johnson, A. P. (2005). *A short guide to action research.* Boston: Pearson Education.

Karasar, N. (1999). *Bilimsel araştırma yöntemi.* Ankara: Bilim Yayınları.

Kenney, P. A. ve Silver, E. A. (1997). Probing the foundations of algebra: Grade-4 pattern items in NAEP. *Teaching Childeren Mathematics.* 3, 268-274.

Krebs, A. S. (2005). Studying students' rea. Mathematics Teaching In The Middle School. 10(6), 284-287.

Kvale, S. (1996). *Interviews: An ıntroduction to qualitative research ınterviewing.* California: Sage Pub.

Lan Ma H. (2007). The potential of patterning activities to generalization. In Woo, J. H., Lew, H. C., Park, K. S., ve Seo, D. Y. (Ed.), *Proceeding of The 31st Conference of the international Group for the Psychology of Mathematics Education,* 3, 225-232. Seoul: PME.

Lannin, J. K., Barker, D. D. ve Townsend, B. E. (2006). Recurcive and expicit rules: How can we build student algebraic understanding?. *Journal of Mathematical Behavior.* 25, 299-317.

Lannin, J. K. (2005). Generalization and justification: The chalenge of introducing algebraic reasoning through patterning activities. *Mathematical Thinking and Learning.* 7(3), 231-258.

Lannin, J. K. (2003). Developing algebraic reasoning through generalization. *Mathematics Teaching In The Middle School.* 8 (7), 342-348.

Ley, A. F. (2005). A cross-sectional investigation of elementary school student's ability to work with linear generalizing patterns: The impact of format and age on accuracy and strategy choice. Masters Abstract International, 44 (02), 124. (UMI No: AAT MR07303).

Liljedahl, P. (2004). Repeating pattern or number pattern: The distinction is blurred. *Focus on Learning Problems in Mathematics,* 26(3), 24-42.

Lin, F. L. ve Yang, K. L. (2004). Differentiation of students' reasoning on linear and quadratic geometric number patterns. In M. J. Hoines ve A. Fuglestad (Ed.), *Proceedings of The 28th Conference of The International Group for The Psychology of Mathematics Education.* 4, 457-464. Bergen Norway: International Group For The Psychology of Mathematics Education.

Lodico, M. G., Spaulding, D. T. ve Voegtle K. H. (2006). Methods in educational research from theory to practice. San Francisco: Published by Jossey- Bass.

Looney, S. C. (2004). A study of students' understanding of patterns and functions in grades 3-5. Dissretation Abstract International, 65 (03), 868. (UMI No: AAT 3124854).

MacGregor, M. ve Kaye S. (1993). Seeing a pattern and writing a rule. In I. Hirabayashi, N. Nohda, K. Shigematsu and F. Lin (Ed.), *Proceeding of The 17th Conference for Psychology of Mathematics Education,* 1, 181-188.

Maeers, M. ve Seaman, R. Pattern. http://www.Pattern.htm adresinden 28.11.2006 tarihinde alınmıştır.

Martinez, M. ve Brizuela, B. M. (2006). A third grader's way of thinking about linear function tables. *Journal of Mathematical Behavior.* 25, 285-298.

McMillan, J. H. (2004). *Educational research.* Boston: Pearson Education.

McNiff, J., Lomax P. ve Whitehead J. (2004). *You and your action research project.* New York: Routledge Falmer.

MEB. (2005). İlköğretim matematik dersi öğretim programı ve kılavuzu (1-5. Sınıflar için)**.** Ankara: Devlet Kitapları Müdürlüğü.

Merriam, S. B. (1998). *Qualitative research and case study applications in education.* 1st ed-San Francisso: Jossey-Bass.

Miles M. ve Huberman, M. (1994). .*An expanded sourcebook qualitative data analysis.* Second Edition. California: Sage Publications.

Mor, Y., Noss, R., Hoyles, C., Kahn, K. ve Simpson, G. (2006). Designing to see and share structure in number sequences. *International Journal for Technology in Mathematics Education.* 13(2), 65-78.

(NCTM). (2000). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. http://www.nctm.org/standards.htm adresinden 14.09.2005 tarihinde alınmıştır.

Olkun, S. ve Toluk-Uçar, Z. (2006). *İlköğretimde matematik öğretimine çağdaş yaklaşımlar.* Ankara: Ekinoks Yayınları.

Olkun, S. ve Yeşildere, S. (2007). *"Sınıf öğretmeni adayları için" temel matematik 1.* Ankara: Maya Akademi.

Orton, A. (1999). Preface. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics.* (vii-viii). London and New York: Cassell.

Orton, A. ve Orton, J. (1999). Pattern and the approach to algebra. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (104-120). London and New York: Cassell.

Orton, J., Orton A. ve Roper T. (1999). Pictorial and practical contexts and the perception of pattern. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (121- 136). London and New York: Cassell.

Orton, A. ve Orton, J. (1994). Student's perception and use of pattern and generalization. In J.P. da Ponte and J.F. Matos (Ed.), *Proceedings of The 18th Conference of the Psychology of Mathematics Education.* 3**,** 407-414. Lisbon, Portugal.

Özdamar, K. (1997). *Paket programlar ile istatistiksel veri analizi.* Eskişehir: Kaan Kitavevi.

Özdaş, A. (1996). Ülkemizdeki genel eğitim sorunları içerisinde matematik eğitimi ve sorunları. *Anadolu Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi.* 6(2), 55-69.

Papic, M. ve Mulligan J. (2005). Preschoolers' mathematical patterning. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce et al. (Ed.), *Building Connections: Research, Theory and Practice- MERGA28* (*Mathematics Education Research Group of Australasia Conference Proceedings 28).* http://www.merga.net.au/publication/conf_display.php?year=2005 adresinden 12.11.2006 tarihinde alınmıştır.

Patton, M. Q. (1990). *Qualitative evaluation and research methods.* İkinci basım**.** London: Sage Publications.

Reys, R. E., Suydam, M. N., Lindquist M. M. ve Smith. N. L. (1998). *Helping children learn mathematics.* 5th ed-Boston: Allyn and Bacon.

Rivera, F. D. ve Becker, J. R. (2005). Figural and numerical modes of generalizing in algebra. *Mathematics Teaching in The Middle School*. 11(4), 198-203.

Samsan, M. C., Linchevski, L. ve Olivier, A. (1999). The influence of different representations on children's generalisation thinking processes. *Proceedings of the*

Seventh Annual Conference of the Southern African Association for research in Mathematics and Science Education. Harare, Zimbabwe. 406-415.

Souviney, R. J. (1994). *Learning to teach mathematics.* 2nd ed-New York: Merrill.

Stacey, K. (1989). Finding and using patterns in linear generalising problems. *Educational Studies in Mathematics.* 20, 147-164.

Steele, D. (2005). Using writing to access students' schemata knowledge for algebraic thinking. *School Science and Mathematics.* 103(3), 142-154.

Tekin, H. (2003). *Eğitimde ölçme ve değerlendirme.* Onbeşinci Basım. Ankara: Yargı Yayınevi.

Threlfall, J. (1999). Repeating patterns in the early primary years. In A. Orton (Ed.), *Pattern in the teaching and learning of mathematics* (18-30). London and New York: Cassell.

Toluk, Z. (2003). Üçüncü uluslararası matematik ve fen araştırması (TIMSS): Matematik nedir? [Elektronik Dergi]. *İlköğretim-Online*, 2(1), 36-41.

Umay, A., Okkuş, O. ve Duatepe Paksu, A. (2006). Matematik dersi 1.-5. sınıf öğretim programının NCTM prensip ve standartlarına göre incelenmesi. *Hacettepe Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi.* 31, 198-211.

Van De Walle, J. A. (2004). *Elementary and Middle School Mathematics.* 5th ed-Boston: Allyn and Bacon.

Vollrath, H. J. (1986). Search strategies as indicators of functional thinking. *Educational Studies in Mathematics.* 17, 387-400.

Yıldırım, A. ve Şimşek, H. (2005). *Sosyal bilimlerde nitel araştırma yöntemleri.* Beşinci Basım. Ankara: Seçkin Yayıncılık.

Warren, E. ve Cooper, T. (2006). Using repeating patterns to explore functional thinking. APMC. 11(1), 9-14.

Warren, E. (2005). Patterns supporting the development of early alcebraic thinking. In P. Clarkson, A. Downton, D. Gronn, M. Horne, A. McDonough, R. Pierce et al. (Ed.), *Building Connections: Research, Theory and Practice- MERGA28* (*Mathematics Education Research Group of Australasia Conference Proceedings 28).* http://www.merga.net.au/publication/conf_display.php?year=2005 adresinden 12.11.2006 tarihinde alınmıştır.

Waters, J. (2004). Mathematical patterning in early childhood settings. In I. Putt, R. Faragher ve M. McLean (Ed.), *Mathematics Education For The Third Millennium, Towards 2010, MERGA* (*Mathematics Education Research Group of Australasia Conference Proceedings).*http://www.merga.net.au/publication/conf-_display.php?year=2005 adresinden 12.11.2006 tarihinde alınmıştır.

Zaskis, R. ve Liljedahil, P. (2002). Generalization of patterns: The tension between algebraic thinking and algebraic notation. *Educational Studies in Mathematics.* 49, 379-402.

Zaskis, R. ve Liljedahil, P. (2006). On the path to number theory: Repeating patterns as a gateway. In R. Zaskis ve S. R. Campbell (Ed.), *Number theory in mathematics education* (99-114). London: Lawrence Erlbaum Assocıates, Publishers.