8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GERÇEKÇİ MATEMATİK EĞİTİMİ YAKLAŞIMI ALTINDA EĞİM KAVRAMINI OLUŞTURMA SÜREÇLERİNİN APOS TEORİK ÇERÇEVESİNDE İNCELENMESİ

Ömer DENİZ

Yüksek Lisans Tezi

Ağustos 2014

8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GERÇEKÇİ MATEMATİK EĞİTİMİ YAKLAŞIMI ALTINDA EĞİM KAVRAMINI OLUŞTURMA SÜREÇLERİNİN APOS TEORİK ÇERÇEVESİNDE İNCELENMESİ

Ömer DENİZ

Yüksek Lisans Tezi

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Danışman: Doç. Dr. Tangül KABAEL

Eskişehir

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Ağustos 2014

Bu Tez Çalışması Anadolu Üniversitesi Bilimsel Araştırma Projeleri Komisyonu Başkanlığı Tarafından Desteklenmiştir. Proje No: 1401E005

JÜRİ VE ENSTİTÜ ONAYI

Ömer DENİZ'e "8. Sınıf Öğrencilerinin Gerçekçi Matematik Eğitimi Yaklaşımı Altında Eğim Kavramını Oluşturma Süreçlerinin Apos Teorik Çerçevesinde İncelenmesi" başlıklı tezi 04.08.2014 tarihinde, aşağıda belirtilen jüri üyeleri tarafından Anadolu Üniversitesi Lisansüstü Eğitim-Öğretim ve Sınav Yönetmeliğinin ilgili maddeleri uyarınca Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi programı yüksek lisans tezi olarak değerlendirilerek kabul edilmiştir.

	Adı-Soyadı	**İmza**
Üye (Tez Danışmanı)	: Doç.Dr. Tangül KABAEL	....
Üye	: Doç.Dr. Dilek TANIŞLI	....
Üye	: Doç.Dr. Kürşat YENİLMEZ	....

Prof.Dr. Esra CEYHAN
Anadolu Üniversitesi
Eğitim Bilimleri Enstitü Müdürü

ÖZET

8. SINIF ÖĞRENCİLERİNİN GERÇEKÇİ MATEMATİK EĞİTİMİ YAKLAŞIMI ALTINDA EĞİM KAVRAMINI OLUŞTURMA SÜREÇLERİNİN APOS TEORİK ÇERÇEVESİNDE İNCELENMESİ

Ömer DENİZ

Matematik Eğitimi Anabilim Dalı

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü

Ağustos, 2014

Danışman: Doç. Dr. Tangül KABAEL

Günlük yaşamda "diklik", "yokuş", "bayır" gibi yansımaları sıkça görülen eğim, matematikte türev gibi kavramlara temel oluşturan önemli bir kavramdır. Bu araştırmada, günlük yaşamlarında eğim ile etkileşime girerek yoğun bir şekilde informal bilgi edindikleri düşünülen ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin eğim kavramını matematikleştirme ve oluşturma süreçlerinin incelenmesi amaçlanmıştır. Eğimin oluşturulması süreci APOS (Asiala vd., 1996) teorik çerçevesinde incelenmiştir Türk Eğitim sisteminde formal anlamda ilk kez bu seviyede karşılaşılan eğim kavramının öğretim süreci ise onların günlük yaşamdan gelen bir bağlam durumunda informal bilgilerini kullanabilmelerine fırsat veren RME yaklaşımına dayalı olarak planlanmış ve yürütülmüştür.

Öğretim deneyi(teaching experiment) yöntemine göre desenlenen bu nitel araştırmanın verileri, araştırma öncesinde uygulanan açık uçlu test, araştırmacı günlükleri, çalışma kağıtları ve öğretim süreci boyunca gerçekleştirilen klinik görüşmelerden elde edilmiştir. Öğretim öncesinde eğim için önkoşul olduğu sonucuna varılan oran-orantı, doğru denklemi ve bağımlı-bağımsız değişken kavramlarının öğrencilerdeki varlığına yönelik geliştirilen açık-uçlu test 16 öğrenciye uygulanmış ve elde edilen veriler doğrultusunda bilgi, güçlük ve yanılgılarına göre ayrılan gruplardan her grubu temsilen birer öğrenci amaçlı örnekleme yoluyla katılımcı olarak seçilmiştir. Açık uçlu testten elde edilen veriler temelinde RME yaklaşımına dayalı olarak desenlenen öğretim sürecinde heterojen gruplar oluşturulmuş ve her katılımcının farklı bir grupta yer alması sağlanmıştır. Seçilen bu katılımcılarla öğretim süreci boyunca üçer klinik görüşme gerçekleştirilerek eğim kavramını matematikleştime ve oluşturma süreçleri incelenmiştir.

Elde edilen sonuçlarda APOS öğrenme teorisine göre eğim kavramının genetik ayrışması ortaya konmuş ve eylem düzeyinde olduğu düşünülen katılımcıların eğimi yüksekliğin yatay mesafeye bölüneceği bir algoritma şeklinde ezberledikleri ve eğim hesabında, bu algoritmayı kullandıkları görülmüştür. Süreç düzeyine geçmiş olduğu düşünülen katılımcıların ise eğimi bir oran olarak yapılandırabilmiş ve eğimin aynı doğru ya da doğrusal bir görsel üzerinde alınan farklı noktalara göre değişmeyeceğini anlamlandırmıştır. Kavramın süreç düzeyinde oluşumunu tamamladığı ya da nesne(object) düzeyine geçme aşamasında olabileceği düşünülen öğrencinin ise eğimi, onunla doğrudan ilişkili olmayan bir problem durumunda yansıtabildiği görülürken, başka kavramlarla da ilişkilendirebildiği sonucuna varılmıştır. Ayrıca matematikleştirme sürecine ilişkin elde edilen sonuçlarda, kendiliğinden gelişen dik üçgensel modelin önce duruma özgü olarak ortaya çıktığı ardından durumdan bağımsızlaşarak fiziksel olarak ortaya konulma ihtiyacı hissedilen bir bilişsel araç olduğu ve en son olarak fiziksel olarak ortaya konulma gereği duyulmayan bilişsel bir araç, bir varlık olarak zihinde yer aldığı görülmüştür. Bunun yanında aynı doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmediği informal bilgisi ile matematikleştirme etkinliklerinde keşfedilmesi beklenen yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın sabit kalışı arasında ilişki kurularak eğimin bir oran olarak yapılandırılmasının, en az süreç düzeyinde kavram oluşturulması açısından kritik olduğu sonucuna varılmıştır.

Anahtar Kelimeler: Eğim, APOS, Gerçekçi Matematik Eğitimi, Matematikleştirme

ABSTRACT

EXAMINATION OF 8^{th} GRADE STUDENTS' CONSTRUCTION OF THE CONCEPT OF SLOPE BASED ON REALISTIC MATHEMATICS EDUCATION IN APOS FRAMEWORK

Ömer DENİZ

DEPARTMENT OF MATHEMATİCS EDUCATION

Anadolu University Graduate School Of Educational Sciences

August, 2014

Advisor: Doç. Dr. Tangül KABAEL

The concept of slope, which is frequently encountered in daily lives through terms such as 'steepness', 'inclined', 'ramp' and 'acclivity', plays a significant role in mathematics education because it provides the basis for other mathematical concepts, such as, derivative. This thesis explores the way middle school students, who have already acquired informal knowledge about slope in their daily lives, construct and mathematize the concept of slope. The construction of slope is analyzed according to APOS theoretical framework (Asiala et al.,1996). In Turkish educational system, the students encounter the mathematical concept of slope at 8th grade for the first time. The present study uses the instructional design perspective of RME and aims to enable students to appeal to their prior informal knowledge about slope.

Data of this qualitative study, which is designed by using to the teaching experiment method, is collected by appealing to an open-ended test results, information in researcher's journal, work-sheets and clinical interviews with participating students. Before explaining the mathematical concept of slope, an open-ended test, which assesses students' prior knowledge of certain prerequisite concepts, such as the concepts of dependent-independent variable, proportion and equation of a line, was conducted. Having analyzed the results, students were divided into groups according to the difficulties they encounter and mistakes they make. Then, by using purposive sampling one student from each group was selected as a participant of that group. The results of the open-ended test were used to form heterogeneous groups and to ensure that each participant is a member of a different group. In order to monitor the construction and mathematization process of the concept of slope participants were interviewed three times throughout the teaching process.

The genetic composition of the concept of slope is described according to these results. It has been observed that some students, who are considered to be at the first level, namely the 'action level' described by APOS teaching theory, memorize the formulation for finding the slope of a straight line as rise over run and use this formulation in their calculations. Students at the process level, on the other hand, were able to construct the concept of slope as a proportion, and they were able to grasp the fact that the slope of a straight line does not change based on the point that was taken on the line. One of the participants was able to attain the object level and complete the process level. She could use concept of slope to solve a problem which was not directly connected with it and relate the concept of slope to other mathematical concepts. Moreover, the results that have been acquired in relation to the mathematization process, shows that the self-developed right triangle model first appears to be domain specific. Then, it becomes a context independent cognitive tool which needs to be seen in physical form. Finally, it has been observed that the model becomes a cognitive tool and a mental entity that does not have to be seen in physical world. It has also been observed that discovering the relationship between the informal knowledge of the fact that slope of the same linear visual does not change and the knowledge of the fact that the proportion between rise and run remains constant, which is expected to be discovered in mathematization activities, is crucial for process conception of slope.

Key Words: Slope, APOS, Realistic Mathematics Education, Mathematization

ÖNSÖZ

Bu tezin hazırlanması sürecinde bana çalışma azmi kazandıran, teşvikleriyle daima beni ileriye götüren, bilim insanı olma yolunda bana umut aşılayıp yol gösteren, hoşgörülü kişiliğiyle bana güven veren hocam ve tez danışmanım Sayın Doç. Dr. Tangül KABAEL' e teşekkürlerimi sunarım.

Tez çalışmam boyunca sıkıntıya düştüğüm her anda yanımda olup bana güç veren, maddi ve manevi desteğini benden hiç esirgemeyen, sabrıyla ve pozitif enerjisiyle gücümü ve umudumu yenilememde daima başrol oynayan, güler yüzlü ve hoşgörülü kişiliğiyle huzurlu bir ortam yaratan sevgili eşim Sibel DENİZ' e teşekkür ederim.

Ömer DENİZ

Eskişehir, 2014

İÇİNDEKİLER

TABLO LİSTESİ

ŞEKİL LİSTESİ

BİRİNCİ BÖLÜM

GİRİŞ

Matematik günümüzde, öğrenilmesi gereken bir takım soyut kavramlar ve beceriler olarak değil, gerçekliğin modellenmesini temel alan, problemi anlamlandırma ve çözme süreci ile oluşturulan bilgi ve beceriler olarak algılanmaktadır (Altun, 2006). Buna rağmen öğretmenlerin matematik öğretiminde “biz bunları nerede kullanacağız?”, “neden matematik öğreniyoruz?”, “bu işlemler, semboller, kurallar nereden gelmiş?” hatta “matematiği kim bulmuş?” gibi sorularla sürekli karşılaştığı görülmektedir. Bu sorulara cevap olarak her ne kadar matematiğin gerekliliği ve geniş kullanım alanları açıklanarak aslında matematiğin yaşamın kendisi olduğu vurgulansa bile birçok öğrencinin tatmin olmadığı ve matematiğe karşı olumsuz tutumunun devam ettiği dikkat çekmektedir. Birçok nedene dayandırılarak açıklanabilecek bu sorunun nedenlerinden birisi öğrencilerin matematiği kendilerinin keşfetmelerine fırsat verilmemesi, bilginin hazır yapılmış halde sunulması ya da belirli yönergeler temelinde bilgiye ulaştırılmaya çalışılmasıdır (Freudenthal, 1973; 1991). Bunun yanında gerçekliğin modellenmesi temelindeki matematik anlayışı birçok kişi tarafından sadece pür matematiğin gerçek yaşamdaki uygulamaları olarak anlaşılmaktadır. Halbuki matematiğin gerçek yaşamdan gelen problem durumlarına çözüm bulma amacıyla keşfedilmesi gerektiğini belirten Freudenthal (1968)’ e göre önce pür matematiğin verilerek ardından uygulamasının yaptırılması formal matematiğin bireye anlamlı gelmesinde yetersiz kalmaktadır. Bireyin matematiği anlamlandıramamasının en önemli nedenlerinden birisi gerçek yaşam ile matematiğin sembolik dünyası arasında ilişki kuramamasıdır. Gerçek yaşamdan edinilen informal bilgilerin öğrenme sürecine yansıtılması, var olan önceki bilgiler de kullanarak kavramın birey tarafından keşfedilerek formalleştirilmesi matematiği anlamlı kılacaktır.

Öğrencilerin birçok matematiksel kavram ile günlük yaşamlarında sıklıkla karşılaştıkları ve buna bağlı olarak formal anlamda etkileşime girmeden önce o kavrama ait informal bilgilere sahip oldukları bilinen bir gerçektir. Matematiğin cebir, geometri, trigonometri ve analitik geometri gibi farklı dallarında var olan, başta türev olmak üzere birçok kavramın öğrenilmesinde yansıtılması beklenen " eğim" de öğrencilerin çok küçük yaşlardan itibaren deneyime girdiği bir kavramdır. Bununla beraber eğim kavramının okuldaki öğretiminden önce öğrencilerin informal bilgilere dayalı da olsa bu kavrama ilişkin bir imaja sahip oldukları (Crawfort ve Scott, 2000) bilinmektedir. Günlük yaşamda "dik", "bayır", "yokuş", "meyilli" gibi farklı sözcükler aracılığıyla yansımaları sıklıkla görülen eğimin kavramsal öğrenmeden ziyade işlemsel öğrenildiği (Crawfort ve Scott, 2000; Barr, 1981) ve buna bağlı olarak da ilerleyen yıllarda ilişkili kavramların öğrenilmesinde çeşitli güçlüklerle karşılaşıldığı alan yazında vurgulanmaktadır (Barr, 1981; Clement, 1985; Tabaghi Mamolo ve Sinclair, 2009; Cheng, 2010). Günlük yaşamda bu kadar sık karşılaşılan, okul yaşamında ilk olarak sekizinci sınıfta görülen eğim kavramının, bu seviyede matematiksel bir kavram olarak anlamlı ve kalıcı bir şekilde yapılandırılabilmesi, lise ve üniversite yıllarında matematikte istenilen başarının yakalanması ve matematik, mühendislik, mimarlık, fizik gibi matematiğin ön plana çıktığı fakültelerde türev başta olmak üzere birçok matematiksel kavramın anlamlandırılması ve günlük yaşama aktarılması açısından önemlidir.

Eğim

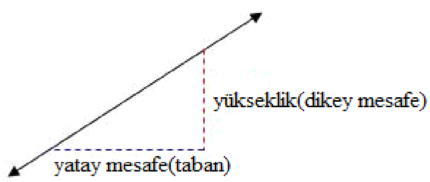
Eğim, lise matematik öğretimi programı için temel bir kavram olarak görülmektedir (Stump, 1999). Ayrıca türev kavramının oluşturulmasında önkoşul bilgi olduğu (Zandieh, 2000; Asiala, Cottrill, Dubinsky ve Schwingendorf, 1997) sonucuna varılan bu kavramın erken yıllarda kavramsal öğrenilmesinin sağlanamaması lise ve üniversite yıllarında başta türev olmak üzere birçok kavramın öğrenilmesinde çeşitli sıkıntılar yaratmaktadır (Barr, 1981). Ülkemizde eğim kavramı ile öğrenciler formal anlamda ilk olarak 8. sınıfta karşılaşmakta ve daha sonra lise yıllarında eğim kavramını farklı formlarda görmeye devam etmektedirler. Ancak öğrencilerin eğim kavramını okulda öğrenmeden önce de, ona ilişkin informal deneyimlerden elde etmiş oldukları bir kavram imajına sahip oldukları bilinmektedir (Crawfort ve Scott, 2000). Mitchelmore ve White (2000) dokuz yaşından itibaren birçok çocuğun eğimi bağlamsal açıdan tanıyabildiğini ortaya koymuştur. Öğrencilerin gerçek dünyada son derece aşina oldukları bu kavramı matematiksel anlamda yapılandırmakta zorluk çektikleri (Barr, 1981; Clement, 1985; Tabaghi Mamolo ve Sinclair, 2009), eğim kavramını anlamlandırmaksızın onu işlemsel olarak hesapladıkları (Crawfort ve Scott, 2000; Barr, 1981) görülmektedir. Barr (1981)' a göre eğim ile ilgili karşılaşılan genel güçlükler şu şekildedir;

- Eğimin bir oran olmasında yaşanan karışıklık. Örneğin, y=3x+2 doğrusunun eğimi 3' tür fakat 3, bir oran mıdır?
- Bir doğrunun iki noktası, koordinatları ile verildiğinde, "x değerlerindeki değişimi y değerlerindeki değişime mi bölüyorduk yoksa tam tersini mi yapıyorduk?" karışıklığı.
- y=mx+ c formundaki genel doğru denkleminde "m" ile "c" arasında hangisinin eğim olacağına dair yaşanılan karışıklık.
- İki noktası verilen bir doğrunun eğimini bulamama.
- İki nokta ve bir eğrinin denklemi olan bir fonksiyon verildiğinde eğimi bulamama.

Barr (1981) ayrıca bu güçlüklerin eğimi değişim oranı (rate of change) olarak kavrayamamaktan ve diğer bir deyişle değişim oranı kavramı ile eğim arasında ilişki kurmadan kuralların ezberlenmesinden kaynaklanabileceğini öne sürmektedir. Crawfort ve Scott (2000) eğimin değişim oranı olarak anlamlandırılması için gerçek yaşam probleminin tablolaştırılması, tablodan elde edilen sıralı ikililerle grafik üzerinde doğru denkleminin elde edilmesini ve bu şekilde öğrencilerin eğim ile değişim arasındaki ilişkiyi dinamik olarak görmesini önermektedir.

Günlük yaşantımızdan başlayarak matematiğin birçok alanında farklı formlarda karşılaşılan eğim kavramına ait yorumlar Stump (1999) tarafından 7 başlık altında toplanmıştır;

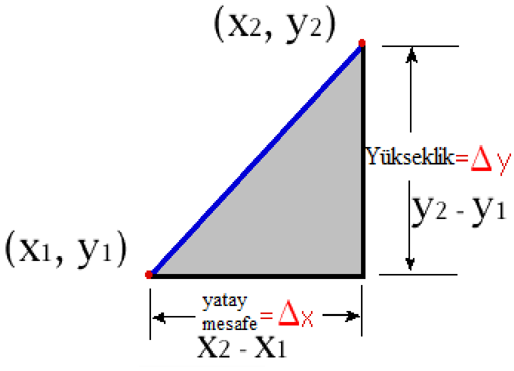
- Geometrik oran: Eğim, yüksekliğin yatay mesafeye oranına eşittir (Şekil 1).



$$\text{Eğim} = \frac{\text{Yükseklik}}{\text{Yatay mesafe}}$$

Şekil 1: Eğimin geometrik yorumu(yükseklik/yatay mesafe)

- Cebirsel oran: Bir doğru üzerinde alınan herhangi iki noktanın y koordinatları arasındaki değişimin x koordinatları arasındaki değişime oranı: eğim=y_2-y_1/x_2-x_1 (Şekil 2).



Şekil 2: Eğimin cebirsel yorumu (y_2-y_1/x_2-x_1)

- Fiziksel özellik: Diklik, meyil, yokuş, bayır gibi birçok farklı kelime eğimin fiziksel özelliğini ifade eder.
- Fonksiyonel özellik: İki değişken arasındaki değişim oranı ise eğimin fonksiyonel özelliğini ortaya koyar.
- Parametrik katsayı: Bir doğrunun genel denklemi olan y=mx+b denkleminde "m" parametresi onun eğimini verir. Bu sebeple eğim bir parametrik katsayı olarak da yorumlanabilir.
- Trigonometrik kavram: Bir doğrunun eğiklik açısının tanjantı o doğrunun eğimidir.
- Kalkülus kavramı: Türev kavramı ile ilişkisinden dolayı eğim aynı zamanda bir kalkülus kavramı olarak görülür.

Stump (1999) hizmet içi öğretmenlerin eğimden pedagojik olarak bahsederlerken daha çok fiziksel özelliğe başvurduğunu, hizmet öncesi öğretmenlerin ise fonksiyonel özelliğe başvurduğunu fakat tüm öğretmenlerin verdikleri eğim tanımlarından daha çok eğimi geometrik oran olarak düşündüklerini ortaya koymaktadır. Azcarate (1992) de lise öğrencilerinin eğim tanımlarını araştırmış ve bu çalışmada öğrencilerin fonksiyonel özellikten çok uzak olduklarını daha çok geometrik oran olarak eğimi ortaya koydukları sonucuna ulaşmıştır (Azcarate' den aktaran Stump, 1999). Yine Stump (2001)' ın üniversite öğrencilerinin eğim konusunda pedagojik alan bilgilerini ortaya koymak amacıyla yapmış olduğu çalışmasında öğretmenlerin eğimi kavramsal öğrenmesini sağlamaya yönelik öğretim desenlenmesine rağmen, fiziksel temsillerle başlayıp fonksiyonel temsillerle genişleyen süreçte öğrencilerin değişim oranı ilişkisini kuramadıkları ve işlemsel tartışmalar üzerine odaklandıkları görülmektedir. Eğimi sadece işlemsel olarak öğrenen öğrencilerin kavramsal olarak bu işlemleri anlayamadığını belirten Cheng (2010), bu öğrencilerin bir doğrunun eğimini yorumlamakta ve tanımlamakta başarısız olabileceğini belirtmektedir. Eğimin farklı temsilleri arasında ilişkilendirmenin yapılmasıyla beraber eğim kavramsallaştırmasının daha yüksek seviyelerde gerçekleşebileceği düşünülmektedir (Stump, 1999).

Eğim ile günlük yaşamlarında sıklıkla deneyime giren ve bununla birlikte fiziksel yorumuna küçük yaşlardan itibaren sahip olduğu görülen öğrenciler, ülkemizde sekizinci sınıfta eğimin geometrik yorumu ve cebirsel yorumunu öğrenerek eğime formal bir anlam kazandırırlar. Bu seviyede kısmen de olsa parametrik ve trigonometrik yorum ile de karşılaşan öğrencilerin tüm yorumlar için lise yıllarında tekrar öğrenme sürecine girdikleri bilinmektedir. Ancak hem öğrencilerin hem de öğretmenlerin eğim kavramının farklı temsilleri arasında ilişki kurmakta zorlandığı (Barr, 1981; Stump, 2001); ve eğimi daha çok işlemsel olarak öğrendikleri (Crawfort ve Scott, 2000), bunun yanında eğimin informal ile formal anlamları arasında ilişki kurmakta zorlandıkları dikkat çekmektedir. Yaşanan bu güçlüklerin en başında öğrencilerin eğimi bir oran olarak yapılandıramamasının geldiği görülmektedir (Lobato ve Thanheiser, 2002; Cheng, 2010; Duncan ve Chick, 2013).

Lobato ve Thanheiser (2002) eğimin bir oran olarak oluşturulması için dört bileşen ortaya koymuş ve öğretimde bu bileşenlerin göz önünde bulundurulması gereğini belirtmiştir. Bu bileşenler sırasıyla *ölçülecek özelliği belirlemek, hangi niceliklerin bu özelliğe etki edeceğini belirlemek, bu ölçümün karakteristiğini anlamak ve son olarak bir oran olarak yapılandırmak.* Bu bileşenlerin temel alındığı süreci kısaca açıklamak gerekirse, öncelikle öğrencilerin ölçülecek olan özelliği, yani eğimi fark edebilmesi gerekmektedir. Ardından eğime etki eden niceliklerin (yükseklik, yatay mesafe, açı, uzunluk vb.) belirlenmesi gerekir. Birçok öğrencinin genellikle eğimi yorumlarken sadece yüksekliğe odaklandığı, yatay mesafeyi ise göz ardı ettiği görülmektedir (Clement, 1985; Duncan ve Chick, 2013). Eğime etki eden özellikleri de kullanarak hangi ölçüm çeşidinin eğim için uygun olduğunun keşfedilmesinin ardından son olarak yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın eğim için uygun ölçüm olduğu sonucuna varılır. Lobato ve Thanheiser (2002)' in eğimin bir oran olarak yapılandırılması için ortaya koyduğu bu dört bileşen, ileride görülecek ilgili araştırmalar başlığı altında daha ayrıntılı olarak verilmiştir. Eğimin bir oran olarak oluşturulması, "bir dikliğin ölçümü" kavramının birey için anlamlı olmasını sağlayacaktır. Bireyin diklik ölçmeyi tam olarak anlayabilmesi, onun eğimi bir oran olarak algılaması ve lineer cebirdeki başarısı ile doğrudan ilişkilidir (Duncan ve Chick, 2013).

Bazı araştırmacıların (Asiala ve diğerleri, 1997; Barr, 1981; Huang, 2011) çalışmalarında ise eğimin, bir fonksiyonun türevi kavramının soyutlanması için bir öncül olduğu sonucuna varılmıştır. Zandieh (2000), türevin soyutlanması sürecinde, ilk önce değişim oranı kavramının nesne düzeyinde soyutlanması ve limit süreci ile koordine edilerek var olan bilişsel şemanın genişlemesi gerektiğini belirtmekte ve eğimin, türevin grafiksel temsili için soyutlama sürecinde var olması gereken ilk matematiksel nesnelerden biri olduğunu ileri sürmektedir. Barr (1981), kalkülüs' e giriş yapılırken "grafiğin eğimi" kavramının öğretime dahil edilmesi gerektiğini vurgularken türev kavramının öğretiminde, değişim oranı fikrini ileriye taşıyabilmesi açısından eğrinin eğiminin sürece dahil edilmesini gerekli görmektedir.

Eğim kavramının araştırmalarla da desteklenen öneminin yanı sıra, bu kavramın birey zihninde nasıl oluşturulduğuna ilişkin çalışmaların azlığı ve var olan çalışmaların çoğunluğunun lise ve üniversite öğrencileri üzerinde olması, eğimin neden tam olarak anlamlı bir şekilde öğrenilemediğini ortaya koymada yetersiz kalmaktadır. Eğim hakkında informal bilgilere sahip oldukları bilinen öğrencilerin, eğim kavramı ile ilk olarak 8. sınıfta karşılaştıkları düşünülürse, eğimin kavramsallaştırılması sürecinin ilk olarak bu seviyede incelenmesi gerekliliği ortaya çıkmaktadır. Yapılan alan yazın taramasında, 8. Sınıf öğrencileri ile yapılan iki çalışmaya rastlanmıştır. Bu çalışmalardan birisi Önür (2008)' ün eğim kavramından ziyade grafiksel hesap makinelerinin etkiliğine odaklandığı doktora tezi çalışması, diğeri ise Olive ve Çağlayan (2007)' nın öğrencilerin geçmişlerine dayalı olarak eğim yorumlarını ortaya koymaya yönelik çalışmasıdır. Öğrencilerin eğim kavramını oluşturmasına ilişkin çalışmalar ise lise ve üniversite düzeyindeki katılımcılarla yapılmış olup eğimin sadece geometrik yorumuna yöneliktir. Eğim kavramının özellikle 8. sınıf öğrencileri tarafından nasıl soyutlandığı, öğrencilerin sahip oldukları informal bilgilerini bu soyutlama sürecinde nasıl kullandıkları, matematikleştirme yaparak hangi düzeyde kavramsallaşma sağlayabilecekleri sorularına yanıt verebilecek bir çalışmaya ihtiyaç duyulmaktadır.

Öğrencilerin eğim ile ilgili yeterince sahip oldukları informal bilgilerini grup ve sınıf içi tartışmalarda ortaya koyabileceği ve adım adım matematikleştirme yaparak kavramı kendilerinin keşfedeceği bir süreç olmasından dolayı Gerçekçi Matematik Eğitimi (RME) yaklaşımına dayalı bir öğrenim sürecinde eğimi kavramsallaştıracakları düşünülmektedir. Eğimin matematikleştirilmesi sürecinin incelenmesine fırsat verecek olan RME yaklaşımına dayalı desenlenen öğrenim sürecinde, eğimi kavramsallaştırmanın nasıl ve ne düzeyde olacağının araştırılmasının, en etkili öğrenme teorilerinden birisi olan APOS teorik çerçevesinde (Dubinsky ve McDonald, 2001; Asiala ve diğerleri, 2004) yapılması, eğim kavramının oluşturulması sırasında zihinde oluşan bilişsel yapıları ortaya çıkaracaktır.

Alanyazın tarandığında Chang ve Tsai (2005)' nin $(a+b)^2=a^2+ 2ab+ b^2$ özdeşliğinin öğretiminde APOS ve RME çerçevesinde alternatif bir yaklaşım geliştirme amaçlı yaptığı çalışma görülmektedir. Fakat bu çalışmadaki amaç RME' ye göre desenlenmiş bir derste öğrenmenin nasıl gerçekleştirildiğinin ortaya çıkarılmasından ziyade öğretimde alternatif bir etkinlik geliştirmektir. Alanyazında, RME yaklaşımına göre desenlenen bir öğretim sürecinde APOS çerçevesinde kavramsal öğrenme düzeylerinin araştırıldığı bir çalışmaya rastlanmamıştır. Hizmet içi ve hizmet öncesi öğretmenlerin eğim kavramına ait oluşturdukları şemanın yeterli bilişsel seviyede olmadığı Stump (1999 ve 2001)' ın çalışmalarında görülmüştür. Öğrencilerin eğimi kavramsallaştırmada güçlük yaşadıkları da bazı araştırmalarla ortaya konmuştur (Barr, 1981; Crawford ve Scoot, 2000; Clement,1985). Öğrencilerin eğim kavramını nasıl öğrendiklerinin APOS çerçevesinde ortaya konması, öğretmenlerin öğretim sürecini daha etkili ve verimli planlamasına, yürütmesine ve değerlendirmesine olumlu katkı sağlayacaktır. Eğim kavramının genetik ayrışmasının ortaya çıkarılmasının, matematik öğretmenlerine eğim kavramının oluşturulması süreci hakkında rehberlik edeceği düşünülmektedir. Böylece bu çalışmanın, öğrencilerin eğimin farklı temsilleri arasında ve eğim ile diğer kavramlar arasında ilişki kurabilecekleri, kavramsal öğrenmeyi gerçekleştirebilecekleri öğrenme ortamları sağlama konusunda öğretmenlere ışık tutacağı düşünülmektedir. Bunun yanında informal bilgilerin sürece yansıtılması ve informalden formale doğru gelişen matematikleştirme sürecinin betimlenmesiyle, hem eğim için hem de başka kavramlar için matematikleştirme sürecinin gelişimi hakkında bilgi sahibi olunacaktır.

İlgili Araştırmalar

Ulusal kaynaklar tarandığında eğim kavramına yönelik yapılan sadece Önür (2008)' ün bir tez çalışması bulunmuş ancak bu tez çalışmasında eğimden ziyade grafiksel hesap makinelerinin etkililiğine odaklanıldığı, diğer bir deyişle eğim ve doğru denklemi konusunun öğretiminde grafiksel hesap makinelerinin etkiliğinin araştırılması amacıyla ele alındığı görülmüştür. Uluslararası kaynaklar tarandığında ise sekizinci sınıf öğrencilerine yönelik eğim kavramını inceleyen sadece Olive ve Çağlayan (2007)' nin yaptığı bir çalışmaya rastlanmıştır. Bunun dışındaki çalışmaların lise, üniversite ve üniversiteyi bitirmiş öğretmen adayları ile yapıldığı görülmüştür. Bu bölümde eğim ile ilgili alan yazın taraması sonucu ulaşılan ulusal ve uluslar arası tüm araştırmaların özeti kısaca verilmiştir.

Cheng (2010), ortaokul öğrencilerinin diklik hakkındaki akıl yürütme becerilerinden yola çıkarak eğim ile orantısallık arasındaki ilişkinin varlığını araştırmıştır. Altı, yedi ve sekizinci sınıflardan toplam 453 öğrenciyi katılımcı olarak belirlemiş ve onlara oran-orantı ve diklik ölçümüne yönelik iki farklı test içeren geniş ölçekli bir anket uygulamıştır. Bunun yanında altıncı ve sekizinci sınıf seviyesindeki 16 öğrenci ile birebir görüşmeler gerçekleştirerek veri toplamıştır. Sonuç olarak katılımcıların diklik problemlerini çözebilme becerileri ile orantısal muhakeme becerileri arasında pozitif korelasyon olduğu sonucunu elde etmiş ve diğer bir deyişle katılımcıların diklik problemlerini çözebilme becerilerinin orantısal muhakeme becerileriyle ilişkili olduğu sonucuna varmıştır. Bunun yanında katılımcıların diklik hakkındaki muhakeme becerilerinin ise problemin bağlamına göre farklılaştığı sonucuna varmış ve doğrunun eğimi problemlerinde %80, çatı problemlerinde %66 ve basamak problemlerinde ise %56 oranında başarı sağlandığını tespit etmiştir.

Simon ve Blume (1994) oranın bir ölçüm olarak anlaşılması amacıyla öğretmenlerin alan bilgilerini geliştirmeye yönelik bir çalışma yapmıştır. Bu çalışmasında toplam 26 sınıf öğretmeni adayını katılımcı olarak belirlemiş ve toplam 20 hafta süren bir öğretim deneyi gerçekleştirmiştir. Eğimin temel alındığı bu çalışmada katılımcıların yaşadıkları üç güçlük dikkat çekmiştir;

- Negatif sonuç elde edildiğinde eğimin olmadığı yanılgısı,
- Bulunan sonucun eğimi gerçekten temsil edip etmediği zorluğu,
- İki farklı doğru ya da doğrusal görselin eğimini karşılaştırırken yükseklik ile yatay mesafe arasındaki orandan ziyade farka odaklanma yanılgısı.

Simon ve Blume (1994)' un bu öğretim deneyi çalışmasında katılımcıların matematikleştirme süreci üzerinde durulmuş ve onlara öncelikle bir rampa gösterilerek eğim sorulmuştur. Öncelikle yükseklik ile yatay mesafe arasındaki fark ile eğimi belirlemeye çalışan katılımcılar, bu ölçümün eğim için uygun olmadığını tespit ettikten sonra oransal ilişkiye odaklanarak eğim için yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın doğru bir ölçüm olduğu sonucuna ulaşmışlardır. Bu çalışmada aynı eğimlere sahip farklı birçok rampa üretilebileceği fakat hepsinin birbirinden büyüklük olarak farklı olabileceğinin içselleştirilmesinin oran olarak eğimin anlaşılmasında önemli rol oynayabileceği belirtilmektedir.

Lobato ve Thanheiser (2002), iki farklı öğretim deneyi uyguladıkları araştırmada eğim temelinde, oranın bir ölçüm olarak anlaşılmasını ele aldıkları bir çalışma yapmışlardır. İlk olarak yapılan öğretim, dokuz lise öğrencisiyle bir yaz boyunca toplam 30 saat sürmüş, ikinci olarak yapılan öğretim deneyi ise altı lise öğrencisiyle okuldan sonra buluşularak bir hafta sürmüştür. Öğretim Geometer's Sketchpad (GSP) ve MathWorld programlarından yararlanılan bilgisayar ortamında yürütülmüştür. Nitel olarak desenlenen bu araştırmada, okuldaki derslerde en yüksek performansı koyan öğrencilerin bile bir doğru görselleştirilerek eğimi sorulduğunda, sonuca dikey mesafe/ yatay mesafe ile ulaşabildikleri ancak eğimi sadece bir sayı olarak gördükleri, bir ölçüm olarak algılamadıklarını görülmüştür. Eğimin bir oran olarak anlaşılması üzerine yürütülen çalışma sonucunda oranın bir ölçüm olarak anlaşılması için araştırmacılar dört bileşen ortaya atmışlardır:

- Ölçülecek özelliği ayırabilmek. Bazı öğrencilere bir rampa verilerek dikliğini ölçmeleri istendiğinde, önceden okulda eğim konusunu öğrenmiş olmalarına rağmen otomatik olarak rampanın yüksekliğini ve tabanını ölçmeleri gerektiğini bilemedikleri ve oranlamaya gidemedikleri görülmüştür. Öğrencilerin önce verilen soruda hangi özelliğin (eğimin) ölçüleceğini belirlemeleri beklenmektedir.

- Hangi niceliklerin ölçülecek özelliğe (eğime) etki ettiğini belirleme ve bu niceliklerle ölçülecek özellik arasındaki ilişkiyi kurma. Bazı öğrenciler yüksekliğin eğim ile doğru orantılı olduğu genellemesini yatay mesafeyi hiç dikkate almaksızın içselleştirdikleri ve bununla birlikte eğimi sadece yüksekliğe bağlı olarak yorumladıkları görülmüştür. Yatay mesafe ile eğim arasındaki ilişkinin kurulmasında ise daha çok zorlanılmıştır. Rampanın kendi uzunluğunun eğimi etkileyip etkilemeyeceği ise birçoğu tarafından açıklanmamıştır.

- Bir ölçümün karakteristiğinin anlaşılması. Öğrenciler dikliği ölçmek için onun (doğrunun kendisinin) uzunluğunu ölçmenin iyi bir gösterge olmadığını fark etmişlerdir. Yükseklik, yatay mesafe, doğrunun uzunluğu ve açı ölçümleri yapılarak, açının işe yarar olduğu görüldü.

- Bir oran oluşturma. Öğrenciler DGS yardımıyla yapılan etkinliklerle, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki bölüm değeri ile eğim değeri arasındaki ilişkiyi dinamik olarak gözlemlemiş ve sonuç olarak dikliğin ölçümü için yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın da işe yarar olduğu sonucuna varmışlardır. Bu sırada öğrencilerin, önceden okul derslerinde gördükleri yükseklik/yatay mesafe' yi hatırlayarak eğim için kullanmaya başladıkları dikkat çekmiştir.

Duncan ve Chick (2013), 25 öğretmen adayını katılımcı olarak belirlediği araştırmasında, eğimin algılanması, analiz edilmesi ve ölçülmesinin nasıl gerçekleştiği üzerine odaklanmıştır. Katılımcılara dikliğin ölçümünü matematikleştirmeye yönelik bir test uygulamış ve ardından 10 öğrenci seçerek yarı yapılandırılmış görüşmeler gerçekleştirmiştir. Nitel olarak desenlenen bu araştırmada elde edilen bulgular doğrultusunda, dikliğin ölçümünün doğru anlaşılabilmesinin lineer cebirdeki başarıyla ve eğimin bir oran olarak algılanmasıyla ilişkili olduğu sonucuna varılmıştır.

Stump (1999) ise araştırmasında ortaöğretim öğretmenlerinin eğim ile ilgili kavram tanımlarını, matematiksel anlayışlarını ve pedagojik alan bilgilerini araştırmıştır. 18 hizmet öncesi ve 21 aktif öğretmen ile, onların eğim tanımlarını, çeşitli eğim temsillerini içeren matematik problemlerindeki performanslarını ve pedagojik alan bilgilerini incelemeye yönelik anket ve görüşme gerçekleştirmiştir. Bu çalışmanın sonunda öğretmenlerin eğim tanımlarının geometrik oran, fiziksel oran, fonksiyonel özellik, cebirsel özellik, trigonometrik kavram, parametrik ilişki ve kalkülus kavramı olmak üzere 7 gruba dağıldığı görülmüştür. Ayrıca aktif öğretmenlerin hizmet öncesi öğretmenlere göre fiziksel tanımdan daha çok bahsettikleri, hizmet öncesi öğretmenlerin ise cebirsel ve fonksiyonel tanımlara daha çok başvurduğu görülmüştür. Öğretmenlere sorulan eğitsel temsillerin verildiği ankette ise onlardan gerçek yaşam örnekleri vermeleri ve bu örnekleri pedagojik olarak yorumlamaları istendiğinde daha çok fiziksel ve fonksiyonel durumlara başvurmuşlardır. Katılımcıların dörtte biri ise gerçek yaşam probleminden bahsedememiştir. Hem hizmet öncesi hem aktif öğretmenler, eğim içeren fiziksel durumların eğitim için en yararlısı olduğunu düşünürken, hiç birisinin eğim kavramının anlaşılması için fiziksel temsillerin ön koşul olduğundan bahsetmemesi dikkat çekici bir diğer sonuç olarak görülmüştür. Bu çalışmanın sonuçlarından ortaokul matematik öğretmenlerinin eğitiminde eğimin farklı temsillerinin ele alınması ihtiyacı olduğu ortaya çıkmıştır.

Stump (2001), hizmet öncesi öğretmenlerin eğim hakkındaki pedagojik alan bilgisinin gelişimine yönelik bir araştırma yapmıştır. Öncelikle hizmet öncesi altı öğretmen üniversitedeki ortaokul matematik kursuna alınmış ve bir dönem boyunca bu kursa devam etmeleri sağlanmıştır. Ardından bu kişiler arasından seçilen beş katılımcı üniversitedeki temel cebir dersinde bazen ikili bazen bireysel olarak eğitim vermiştir. Bu araştırma öğrencilerin eğim kavramını oluşturmakta yaşayabileceği olası güçlüklerin neler olabileceği ve bu zorlukları neden yaşadıkları konusunda öğretmenlerin bilgi sahibi olmalarını sağlamıştır. Katılımcıların eğimin farklı temsillerinden ikisi olan fonksiyonel ve fiziksel yorumu kursta öğrenmelerine rağmen öğretim sürecinde bu iki yoruma yeterince odaklanmadıkları dikkat çekmiştir. Katılımcılardan üçünün eğimi hem kavramsal hem de işlemsel öğrenmeye yönelik ders işledikleri ve farklı temsillerden yararlanmaya çalıştıkları görülürken, bir katılımcının sadece fiziksel, diğerinin ise sadece fonksiyonel temsil üzerine odaklandığı sonucuna varılmıştır.

Tabaghi, Mamolo ve Sinclair (2009) DGS kullanımına dayalı olarak desenlenen bir öğretim sürecinin eğimin kavramsallaştılmasına etkisini incelemek amacıyla bir araştırma yapmıştır. Bunun için nicel muhakemenin temelleri dersini alan liberal sanatlar ve sosyal bilimler üniversite öğrencileri katılımcı olarak seçilmiş olup, bu öğrenciler A sınıfı ve B sınıfı olarak ikiye ayrılmış, A sınıfında DGS temelli ders yürütülürken diğer sınıfta ise geleneksel yaklaşıma göre desenlenen bir ders yürütülmüştür. Bu öğretim sürecindeki dersler ortaokul matematiği seviyesinde tasarlanmış ve yüzdeler, bir bilinmeyenli denklemler, grafik doğruları ve problem çözme konuları temel alınmıştır. Öğretimin bitiminden bir hafta sonra yapılan son testte dinamik grafiklerle etkileşim kuran A sınıfı öğrencilerinin pozitif ve negatif eğimi ayırt etmede betimleyici öykülemeler kullanabildiği, bir doğrunun dikliğini hesaplayabildiği, sözel problemleri (story-based problems) çözebildiği görülmüştür. A sınıfı öğrencilerinin nesne düzeyinde eğim oluşumu gerçekleştirdiğini düşünen araştırmacı, süreç temelli eğim kavramı oluşturan B sınıfına göre A sınıfının problem çözmede daha başarılı olduğu sonucuna erişmiştir. Sadece cebirsel manipülasyonlar gerektiren ön ve son test ise B sınıfının daha başarılı olduğunu göstermiştir. Bu çalışmada ayrıca, DGS' nin doğruyu kaydırma özelliği ile doğrunun hareketine göre eğim değerindeki değişimi gözlemleyebilme fırsatı sağladığı ve bu sayede nesne düzeyinde soyutlama gerçekleştirilebildiği, geleneksel yaklaşımla ise ancak süreç düzeyinde kavramsallaştırma yapılabildiği ileri sürülmektedir.

Crawfort ve Scott (2000) ise eğimin anlamlandırılması bağlamında teorik bir makale yayınlamıştır. Eğimin anlaşılmasının önemini vurgulamanın yanında öğrencilerin eğim ile ilgili genel olarak yaşadıkları zorluklara değinmiştir. Bunun yanında değişim oranı olarak eğimin anlamlandırılmasının gereği üzerinde durmakla birlikte eğimin daha çok işlemsel olarak oluşturulan bir kavram olduğunu dile getirmiştir. Son olarak eğimin değişim oranı olarak anlamlandırılması için gerçek yaşam probleminin tablolaştırılması, tablodan elde edilen sıralı ikililerle grafik üzerinde doğru denkleminin elde edilmesi ve bu şekilde öğrencilerin eğim ile değişim arasındaki ilişkiyi dinamik olarak görmesini önermiştir.

Barr (1981) ortalama 19 yaşlarındaki (üniversite birinci sınıf) 252 öğrenci üzerinde yaptığı araştırmasında kalkulüste yaşanan güçlüklerin temelinde içsel oluşumların yattığını, işlemsel ya da mekanik olarak ortaya konan performansların üzerinde durularak var olan zorlukların üstesinden gelinemeyeceğini belirtmiştir. Bununla birlikte öğrencilerin, türev için temel oluşturduğunu vurguladığı eğim kavramını yapılandırmasının önemine değinen araştırmacı, öğrencilerin eğime ilişkin yaşadığı aşağıdaki güçlükleri ortaya koymuştur;

- Eğimin bir oran olduğu konusunda yaşanan karışıklık. Örneğin, y=3x+2 doğrusunun eğimi 3' tür fakat 3, bir oran mıdır?
- Bir doğrunun iki noktası, koordinatları ile verildiğinde, "x değerlerindeki değişimi y değerlerindeki değişime mi bölüyorduk yoksa tam tersi mi?" karışıklığı.
- y=mx+ c formundaki genel doğru denkleminde "m" ile "c" arasında hangisinin eğim olacağına dair yaşanılan karışıklık.
- İki noktası verilen bir doğrunun eğimini bulamama.
- İki nokta ve eğri denklemi olan fonksiyon verildiğinde eğimi bulamama.

Önür (2008) grafiksel hesap makinelerinin doğrunun denklemi ve eğim konusunda matematik başarısına etkisine ilişkin bir araştırma yapmıştır. 27' şer kişilik kontrol ve deney grubu oluşturularak yapılan çalışmanın katılımcıları sekizinci sınıf öğrencilerinden seçilmiştir. Deney grubundaki öğrencilere grafiksel hesap makinelerinin kullanımına dayalı yapılan bir öğretim desenlenirken kontrol grubu için ise araştırmacının geleneksel olarak adlandırdığı öğretim desenlenmiştir. Ayrıca altı öğrenci ile de görüşme gerçekleştirilmiştir. Sonuç olarak grafiksel hesap makinelerinin ilköğretim düzeyinde kullanıldığı zaman öğrenci başarısına ve bazı yönlerden de öğrencilerin geliştireceği tutuma olumlu etkisinin olduğu görülmüştür. Yapılan bu araştırma grafiksel hesap makinelerini temele almış ve eğimi sadece onları uygulayacağı bir konu olarak ele almıştır.

Olive ve Çağlayan (2007) 24 sekizinci sınıf öğrencisi ile yaptığı çalışmasında eğimin anlaşılması ve nicel muhakemeye dayalı bir öğrenme durumunda öğrenci geçmişlerinin eğimin anlaşılmasına etkisini incelemiştir. Denklemi verilen bir doğrunun, o denklemi sağlayan sıralı ikililerden oluşan bir küme olduğunu ve bu sıralı ikililerin koordinat düzleminde bir doğru oluşturduğunu lise ve üniversite öğrencilerin anlamlandırabileceğini fakat sekizinci sınıf seviyesi için bu tanımın çok soyut kaldığını ileri sürmüştür. Bununla birlikte öğrencilerin eğime ait geçmişlerinin, onu anlamlandırmada önemli rol oynayacağına dikkat çekmiş ve çalışma sonunda öğrencilerin eğimi birçok farklı açıdan yorumlayabileceği sonucunu elde etmiştir. Öğretim deneyi yöntemine göre desenlenen çalışmada öğretim boyunca elde edilen verilerin analizi ile elde edilen eğimin farklı yorumları şunlardır; yön olarak eğim, pozitif ya da negatif artış olarak eğim, koordinat düzlemindeki bölgeler temelinde eğim, birim farkların birleştirilmesi olarak eğim, ortogonal vektörler birleşimi olarak eğimin değiştirilebilir yönü, sıralı ikililer arasındaki eşlik olarak eğim, doğru oluşturan bir vektör olarak eğim. Araştırmacı, ortaya konan eğimin bu farklı yorumlarının, aslında birey için eğim kavramının tarihsel gelişimi gibi düşünülebileceğini ileri sürmüştür.

Clement (1985) grafiklerde kavram yanılgılarını ortaya koymaya yönelik yaptığı araştırmasında iki kavram yanılgısına rastlamıştır. Birincisi yükseklik ile eğimin karıştırılmasıdır. Öğrenciler yüksekliği fazla olan doğrunun eğiminin de fazla olacağını düşünmektedir. İkincisi ise grafiğin bir resim gibi görülmesi yanılgısıdır. Örneğin, bir dağa tırmanan bisikletlinin hızını gösteren bir grafik verildiğinde, birçok öğrenci grafiği o dağın resmedilmiş hali gibi düşünmektedir.

Eğim kavramına yönelik olarak yapılan bu çalışmaların yanında Zandieh (2000) öğrencilerin türev kavramını oluşturmasına yönelik bir teorik çerçeve ortaya koymuş ve bu çalışmasında türevin farklı temsillerinin öğrenilmesi ve bu temsiller arası ilişkilerin içselleştirilmesine vurgu yapmıştır. Türevin anlaşılması için değişim oranı ve eğim kavramlarının önkoşul bilgi olduğunu ileri sürmüştür. Türev kavramının oluşturulması sürecinde, değişim oranı ve eğim kavramlarının yansıtılmasının ve üzerine hareket edilebilecek nesneler ya da koordine edilecek süreçler olarak kullanılmasının gerekliliğini vurgulamıştır. Asiala ve diğerleri (1997) ise APOS teorik çerçevesinde türevin grafiksel olarak anlaşılmasını incelemişler ve o kavramın oluşturulması sırasında oluşan bilişsel yapıların ortaya çıkarılması anlamına gelen genetik ayrışmasını yapmışlardır. Ortaya konan genetik ayrışmada da görüldüğü gibi, türevin grafiksel olarak anlaşılması için ön koşul bilgilerden birisinin "doğru grafiğinin eğimi" olduğu sonucuna varılmıştır.

Teorik Çerçeve

Bu araştırmada eğim kavramına yönelik olarak gerçekleştirilen öğretim RME kuramına dayalı olarak yürütülmüştür. Eğim kavramının oluşturulma süreci ise APOS teorik çerçevesinde incelenmiştir. Bu sebeple bu bölümde sırasıyla RME kuramına ve APOS teorik çerçevesine ait bilgiler verilecektir.

Gerçekçi Matematik Eğitimi (Realistic Mathematics Education-RME)

Hollanda'da 1968 yılında başlayan Wiskobas (ilköğretimde matematik) projesi ile eğitimde reform yapmayı amaçlayan Freudenthal Enstitüsü 1970'li yıllarda, öğrenciyi pasif alıcı ve matematiği ezbere kurallar bütünü olarak gören mekanistik eğitim anlayışına karşı çıkmış, öğrencinin gerçek bir yaşam durumundan yola çıktığı ve öğretmenin rehberliğinde kavramı matematikleştirmeyle yeniden keşfettiği, matematikleştirme sürecinde soyutlamayı kendisinin geliştirdiği modeller yardımıyla gerçekleştirdiği bir öğrenme kuramı olan Gerçekçi Matematik Eğitimini (Realistic Mathematics Education-RME) öne sürmüştür. Zamanla Hollanda' da önce ilkokullardaki ders kitapları, okulların kendilerinin verdikleri kararlarla "realistic(gerçekçi)" olarak adlandırılan ders kitaplarıyla değiştirilmiş ve daha sonra hükümetin, var olan öğretim programını RME felsefesine uygun olarak değiştirilmesi için Freudenthal Enstitüsü' ne verdiği destek ile ülkedeki tüm öğretim programı RME' ye uygun olarak değiştirilmiştir (Gravemeijer ve Terwel, 2000). Yaklaşık olarak 40 yıldır başarıyla uygulanan RME kuramı Hollanda dışında İngiltere Almanya, ABD, Japonya, Malezya, Vietnam, Endonezya gibi birçok ülkede de benimsenmiştir (Özdemir, 2008; Yağcı ve Arseven, 2010). Hollanda Milli Eğitim Değerlendirme çalışmaları gerçekçi ders kitapları ile öğrenen öğrencilerin geleneksel yaklaşımla öğrenenlere göre, algoritma yazma ve ölçme konuları dışında, daha başarılı olduklarını göstermiştir (Gravemaijer ve Terwel, 2000). Kuramın ortaya atılmasının üzerinden 40 yıl geçmesine rağmen hala geliştirme çalışmaları devam etmektedir (Heuvel-Panhuizen,1998). RME' nin etkililiğini araştırma amaçlı birçok çalışma yapılmış ve artık RME' nin etkili bir öğretim kuramı olduğu ortak savunu haline gelmiştir (Heuwel-Panhuizen, 2003; Gravemeijer ve Doorman, 1999; Treffers, 1993; Rasmussen ve King, 2000; Gravemeijer, 1994; Fauzan, 2002; Verner ve Maor, 2005; Bonotto, 2010;Ralston ve Willoughby, 1997; Ünal ve İpek, 2010; Verschaffel ve Corte, 1997; Özdemir, 2008;

Üzel, 2007; Demirdöğen, 2007; Gelibolu, 2008; Akyüz, 2010; Altun, 2002; Altun, Bintaş ve Arslan, 2003).

Türkiye, *3. Uluslararası Matematik ve Bilim Çalışmalarında (The Third International Mathematics and Science Study- TIMMS)* 1999, 2007, 2011 yıllarında genel değerlendirmeden sırasıyla 429, 432 ve 452 puan alarak genel ortalamanın epey altında kalmıştır. Bunun dışında *Uluslararası Öğrenci Değerlendirme Programına (Programme for İntenational Students Assessment-PISA)* ilk kez 2003 yılında katılan Türkiye, matematik değerlendirmesinde 423 puan alarak 29 ülke arasında 28. olmuştur. 2006 yılında ise matematik okuryazarlığında 424 puan alınarak 30 OECD ülkesi arasında 29. ve toplam 57 ülke arasından 43. olunmuştur. 2009 yılındaki PISA sonuçlarına göre ise 445 puan alan Türkiye, 75 ülke arasından 43. sırada yer almıştır. PISA yeterlilik düzeylerine göre Türk öğrencilerin %76,6' sı altı düzey içinde ya ikinci düzeyde ya da daha aşağısında yer almaktadır. 2006 PISA Ulusal Nihai Raporuna göre ikinci düzeydeki öğrenciler aşağıdaki yeterliliklere sahiptir;

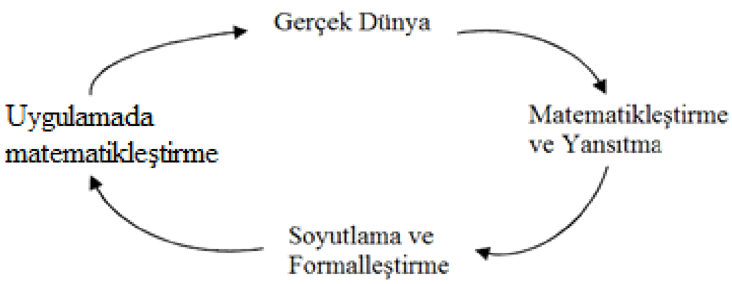
> *İkinci düzeyde yer alan öğrenciler, doğrudan çıkarım yapmaktan başka bir beceriye gerek olmayan bir bağlamda ifade edilmiş durumları tanıyabilir ve yorumlayabilirler. Bu öğrenciler tek bir kaynaktan gerekli bilgiyi elde edebilir ve sadece bir gösterişi biçimini kullanabilirler. Bu düzeydeki öğrenciler temel algoritmaları, işlem yollarını veya da alışıları kullanabilirler. Doğrudan bir biçimde akıl yürütebilirler ve sonuçlar üzerinde görülenin ötesine geçemeyen yorumlar yapabilirler (PISA 2006 ulusal nihai sonuç raporu, 2010, s.61).*

RME' yi benimseyen ülkelerin ise sıralamada Türkiye' nin çok üzerinde olduğu TIMMS ve PISA raporlarından açıkça gözlemlenmektedir. TIMMS ve PISA' da alınan sonuçlardan elde edilen yeterlilikler, öğrencilerimizin edindikleri bilgileri kavramsallaştıramadıklarını göstermektedir. Stump (1999), kavramsal bilgiyi, önceden var olan bilgilerle yeni edinilen bilgiyi birbirine bağlayabilen ilişkilerin zengin olduğu bilgiler olarak tanımlarken, işlemsel bilgiyi ise algoritma ve kurallar gibi sembolik sistemleri ve formal dili içeren bilgi olarak tanımlamıştır. RME' de öğretimin başlangıcından itibaren temel rol oynayan gerçek yaşamdan gelen bağlam problemleri, öğrencilerin kavramı kendilerinin keşfetmesi sürecindeki işlevinden dolayı kavramsallaştırmanın gerçekleşmesi ve sonuç olarak kavramsal bilgi kazanılması için farklı bir bakış açısı sağlayabilmektedir (Gravemeijer ve Doorman, 1999). 21. yüzyılda matematik eğitiminin önemli bir amacı, öğrencilerin, onlara deneysel olarak gerçek gelen ve bu yüzden gerçeklikle başlayıp gerçeklik içinde kalan problem durumlarını matematikleştirmesidir (Cheung ve Huang, 2005). Bu açıdan bakıldığında RME bu amacı gerçekleştirme yolunda önemli bir yer edinmektedir.

RME' nin kurucu ilkelerinin sahibi olan Freudenthal (1991) matematiğin bir insan aktivitesi olduğunu ve mutlaka gerçek ile ilişkilendirilmesi gerektiğini savunmaktadır. Freudenthal (1968), matematik eğitiminde önce pür matematiği öğretmenin ve daha sonra onun uygulamasının nasıl yapılacağını göstermenin yanlış olduğunu, diğer bir deyişle anti-didaktik olduğunu öne sürerken, bunun yerine matematiğin matematikleştirme ile öğretilmesi gerektiğini vurgulamaktadır. Gerçek yaşamdan gelen ve bireyde çözme, anlama, tanımlama gibi genellikle içsel gereksinim doğuran bağlam problemleri ile başlayan bir öğrenme sürecinde problem çözme, problem durumu oluşturma, keşfedilecek konuyu organize etme gibi etkinlikler matematikleştirme olarak adlandırılmaktadır (Gravemeijer, 1994). Matematiğin sadece matematiksel bilgiler bütünü olmadığını vurgulayan Freudenthal (1968), matematiğin problem çözme, problem arama ve daha genel olarak matematiksel bir sorun olarak gelen ya da gerçekliğin kendisinden gelen bir problem durumunu organize etme aktivitesi olarak görmektedir (Freudenthal' den aktaran Heuvel-Panhuızen, 2003). Freudenthal (1973)' e göre ise matematikleştirmenin olmadığı bir matematik yoktur.

RME kuramında matematikleştirme matematik öğrenmenin merkezinde yer almaktadır ve bunun iki temel nedeni vardır. Bunlardan birincisi matematiğin sadece matematikçilerin değil, tüm insanların işi olduğu görüşüdür (Altun, 2006). Dolayısıyla tüm öğrenciler öğrenme sürecinde matematik yaparak öğrenmelidir. Örneğin, bağlam problemlerinin çözülmesini gerektiren bir matematiksel aktivitede öğrencinin, kullanacağı matematiksel yaklaşımın sınırlılıklarını ve olası durumlarını, çözüme uygun olup olmadığını bilmesi ve bununla beraber matematiksel tutum geliştirmesi gerekir (Fauzan, 2002). Böylece öğrenci bir problem durumunda sadece işlemler dizisi ortaya koymak yerine, günlük yaşamdan gelen problemi matematiksel bir açıdan ele alır ve zihninde var olan bilişsel yapılar arasında ilişkiler kurarak uygun bir çözüm üretir. Hazır verilen bir çözüm stratejisi için içsel bir yapı oluşturmaya çalışmaktan ziyade çözüm stratejisine kendisinin ulaşmış olması, onu farklı problem durumlarında yansıtması ve diğer kavramlara ait bilişsel yapılarıyla bağ kurmasını sağlaması açısından daha ileri düzeyde kavramsal öğrenme sağlamaktadır. Matematikleştirmenin matematik öğrenmenin merkezine konulmasının ikinci nedeni ise, bilginin formalleştirilmesinin yeniden keşfetme süreci ile öğrenci tarafından yapılmasıdır (Fauzan, 2002). Günlük yaşamdan gelen bağlam problemleri ile karşı karşıya kalan birey, bilişsel dengesinin bozulmasına sebep olan bu probleme çözüm aramak amacıyla matematikleştirme aktivitelerinde bulunur. Eğer bireye ulaşılması hedeflenen formal bilgi doğrudan verilirse dengesinin bozulmasına sebep olan herhangi bir durum olmayacağı için öğrenme sürecine girmeyecektir. Dolayısıyla bireye formal bilgi hazır bir şekilde doğrudan verilmemeli, bilgiyi kendisinin ulaşıp formalleştireceği bir matematik yapma ortamı sağlanmalıdır. Sürekli keşifler yapmasına fırsat verecek şekilde öğrenme sürecinin desenlenmesi ve öğretmenin diğer bir deyişle rehberin bu süreçte yönlendirici sorular sorması, ipuçları sağlaması, tartışmaları hedeflenen keşfe doğru yönlendirmek amacıyla verimli bir şekilde yönetmesi, etkileşimi üst düzeyde tutabilmesi gerekmektedir.

Gravemeijer (1994)' e göre zaten matematik öğrenmek, gerçek yaşam problemlerine çözüm üretmenin esas parçası olan matematik yapmaktır. De Lange (1996) gerçek dünya ile başlayan, matematiksel kavram ve fikirlerin gelişmesi sürecini kavramsal matematikleştirme olarak adlandırmıştır. Kavramsal matematikleştirme süreci bağlam problemi eksenli matematiksel aktivitelerle başlar, problem matematikleştirilir veyansıtılır (soyutlama ve formalleştirme), uygulamada matematikleştirme yapılır ve en sonunda gerçek dünyaya geri getirilir (Fauzan, 2002; Cahyono, 2012). De Lange (1996) kavramsal matematikleştirme (conceptual mathematization) olarak adlandırdığı süreci şekil 3' deki gibi modellemiştir.



Şekil 3: Kavramsal Matematikleştirme (De Lange, 1996)

Matematikçiler gerçek yaşam problemlerini çözmek için ya da matematiğin kendi içindeki ilginç örüntüleri, ilişkileri ya da yap-boz parçalarını açıklamak veya kanıtlamak için matematik yaparlar ve bu anlamda matematiksel aktiviteleri bile matematikleştirirler (Gravemeijer, 1999). Benzer şekilde matematik öğrenme sürecinin de matematikleştirmeler üzerine kurulması gereğinden yola çıkarak, öğrenme sürecinin her anında, öğrenen bireylerin matematikleştirme yapmalarına fırsat veren etkinlikler düzenlenerek onların adım adım hedeflenen keşfe doğru yol almalarına olanak sağlanmalıdır. Treffers (1987), gelişimsel matematikleştirme (progressive mathematization) olarak adlandırdığı bu süreci *yatay* ve *dikey matematikleştirme* olarak ikiye ayırmıştır. Bu iki matematikleştirme türü ayrı başlıklar altında ayrıntılı olarak anlatılacaktır. Katman katman yatay ve dikey matematikleştirme aktiviteleri içerebileceği bilinen gelişimsel matematikleştirme süreci, en basit anlamda yatay aktivitelerden dikey aktivitelere doğru bir kayış ya da hareket olarak görülür (Rasmussen, Zandieh, King ve Teppo, 2005). Ancak birçok zaman bu hareket doğrusal bir şekilde ortaya çıkmaz ve dikey aktiviteler yatay aktiviteler sırasında ya da yatay aktiviteler dikey aktiviteler sırasında ortaya konur. Daha karışık durumlarda ise, öğrencilerin önceki matematikleştirmelerinde oluşturdukları matematiksel gerçeklikler daha sonra yapacakları yatay ve dikey matematikleştirmelerde bağlam olarak ortaya çıkabilir (Rasmussen ve diğerleri, 2005). Freudenthal (1991)' e göre düşük seviyedeki bir matematikleştirme aktivitesi daha yüksek seviyedeki aktivitelerde sorgulanan bir konu olabilir. Kısaca bunu açıklamak gerekirse, gelişimsel matematikleştirme sürecinin başlangıcında informal yollarla üstesinden gelinebilecek aktiviteler düzenlenir ve daha sonra düzenlenen bu aktiviteler yansıtılır ve bunun sonucunda daha formal bir forma doğru gelişim sağlanır (Heuvel ve Panhuizen, 2003; Nkambule, 2009).

Yatay matematikleştirme

RME' de bağlam problemleri, öğrencilere deneyimsel olarak gerçek gelen problem durumlarında bağlama özgü informal çözüm stratejileri geliştirmelerine fırsat vermesi açısından gelişimsel matematikleştirme için temel olarak görülmektedir (Gravemeijer ve Doorman, 1999). Genellikle gerçek yaşamdan gelen bir bağlam durumunda problemi anlama, düzenleme, yorumlama kısaca çözme isteği duyan birey, informal ve formal deneyimlerinden yola çıkarak duruma özgü stratejiler ortaya koyar ve gerçek yaşamdaki bir problem durumuna matematiksel bir anlam kazandırır. Bu süreç yatay matematikleştirme olarak isimlendirilmektedir. Diğer bir deyişle bağlamları matematiksel işleme uygulanabilir olacak şekilde düzenlerken, formal ya da informal var olan araçları kullanmaya yatay matematikleştirme denir (Menon, 2012). Treffers (1987)' ın bir problem alanını matematiksel bir probleme dönüştürme olarak tanımladığı yatay matematikleştirmede birey, bir bağlamdan başlayarak, var olan ilişkileri bulup görevi modeller ve ona matematiksel bir yapı kazandıran tablo, grafik, formül gibi düzenleyiciler kullanarak durumu anlamlandırır (Nkambule, 2009). Freudenthal, her ne kadar kendisi bu matematikleştirme türünü o zaman yatay olarak adlandırmasa da, öğrenme sürecinde problemin bir bağlam durumundan gelişmesi gerektiğini ve bireyin durumdaki problemi tanıyabilmeyi (ayırt edebilmeyi) öğrenmesi gerektiğini vurgulamaktadır ki problem oluşumunun da zaten matematik olduğunu ileri sürmektedir (Menon, 2012). Problem alanını ya da problem durumunun ne olacağı ise bireyin deneyimlerine ve geçmişine bağlıdır (Rasmussen ve diğerleri, 2005). Örneğin, küçük yaşlarda bir çocuk için yaptığı bir alışveriş sonucunda alacağı para üstü onun için bir problem yaratırken, bir yetişkin için böyle bir durum problem yaratmaz. Dolayısıyla bireyin yatay matematikleştirme yapmasına fırsat verecek bağlam problemlerinin düzenlenmesi ve bu bağlam probleminden başlayan sürecin her anında sorulan soruların, verilen ipuçlarının, yapılması için teşvik edilen görevlerin ne amaçla yapıldığının bilinmesi önemlidir.

Freudenthal (1991) matematikleştirme aktivitelerinin kesin bir çizgi ile bir birinden ayrılamayacağını da vurgulayarak yatay matematikleştirmeyi kısaca gerçek dünyadan semboller dünyasına geçiş olarak tanımlamıştır. Zulkardi (1999) ve Fauzan (2002)'e göre;

> Yatay matematikleştirme sürecinde birey, daha genel bir bağlam içerisinde spesifik matematiği belirleyebilir; şematize edebilir; formüle edebilir; farklı yollar kullanarak problemi görselleştirebilir; ilişkileri ve düzenleyicileri keşfedebilir; farklı problemlerin isomorfik yönlerini tanıyabilir; gerçek dünya problemini matematik problemine dönüştürebilir; ve gerçek dünya problemini bildiği bir matematiksel modelle temsil ederek anlamlandırabilir.

Menon (2012)' a göre ise, yatay matematikleştirmede, daha çok fark etme, şematize etme, gerçekliğin bir modelinin yapılmasına odaklanılır ki böylece öğrenciler için gerçeklik, matematiksel bir anlam kazanır.

Freudenthal (1991) okullarda dikey matematikleştirme aktivitelerine yatay matematikleştirmeye göre daha çok önem verilmesinin matematik öğrenme için istenmeyen bir durum olduğunu vurgulamaktadır. Yatay matematikleştirme aktiviteleri, öğrencilerin sahip oldukları informal bilgi ve stratejilerini öğrenme sürecine çağırmaları ve bu sayede problem durumunu anlamlandırarak aktif bir şekilde bilgiye kendilerinin ulaşmalarını sağlama açısından matematik öğretiminde önemli bir yere sahiptir. Yatay matematikleştirme sürecinde aktif rol alan öğrencilerin genellikle çok sık karşılaşılan “biz bu matematiği nerede kullanacağız?”, “neden bunları öğreniyoruz?” gibi soruların cevaplarını kendilerinin verebileceği ve diğer bir deyişle matematiğin onlar için anlam kazanacağı düşünülmektedir. Çünkü matematiksel bir notasyon, önceden edinilmiş informal bilginin matematikleştirilmesi sürecinde kullanıldığı zaman anlamlı olabilir (Herscovics, 1996).

Dikey matematikleştirme

Yatay matematikleştirme aktiviteleri üzerine inşa edilen soyut yapılar hakkında akıl yürütme, genelleme ve formalleştirme içeren etkinlikler ise dikey matematikleştirme olarak adlandırılmaktadır (Rasmussen ve diğerleri, 2005). Dikey matematikleştirme, öğrenen bireylerin, ortaya koydukları informal stratejilerinden yola çıkıp, verilen bir görevi matematiksel bir dil kullanarak ya da uygun algoritma bularak yerine getirmeye başladığı zaman ortaya çıkar (Gravemeijer, 1994). Freudenthal (1991)’ e göre dikey matematikleştirme sembolleri düzenleme, manipüle etme, dönüştürme gibi aktiviteleri içeren, matematiğin sembolik dünyası içindeki harekettir ve daha üst düzeydeki kavram oluşumları için gereklidir. Ancak matematiğin sembolik dünyası içinde yapılan her aktivitenin dikey matematikleştirme olduğu genellemesinin yanlışlığını Gravemeijer ve Terwel (2000) şöyle açıklamaktadır;

> Bir sembolleştirme aktivitesi öğrenci için rutin bir aktivite olabilir. Bu durumda bu aktivite yatay matematikleştirmedir. Ancak aynı sembolleştirme durumu eğer başka bir öğrenci için yeni bir keşif ise o halde bu aktivite dikey matematikleştirme anlamına gelir. Eğer bir öğrenci kendi çözüm metodunu açıkça daha yüksek seviyedeki bir başkasıyla değiştirirse, yani daha yüksek seviyeli bir metot onun yerini alırsa, dikey matematikleştirme açık şekilde görülmüş olur.

Yatay matematikleştirmede birey gerçek yaşamdan gelen bir durumu matematikleştirirken, dikey matematikleştirmede ise kendi matematiksel aktivitesini matematikleştirmektedir (Gravemeijer ve Doorman, 1999). Bu açıdan bakıldığında

Freudenthal' in matematikleştirme kavramı hem uygulamalı matematiği hem de pür matematiği içermektedir (Gravemeijer ve Terwel, 2000). Daha üst düzey bilişsel beceriler gerektiren dikey matematikleştirme süreci (Hamdan, 2011) , bir formül içinde bir ilişkiyi temsil etme, var olan bir düzeni kanıtlama, modeller uyarlama, farklı modeller kullanma, modelleri bütünleme ve kombine etme, matematiksel bir modeli formüle etmek ve genelleme gibi aktiviteler gerektirir (Zulkardi, 1999). Heuvel-Panhuizen (1996; 2003) ise dikey matematikleştirmenin matematik sisteminin kendi içerisinde yeniden düzenleme süreci oluşuna vurgu yapmakla birlikte, bu süreci kısa yollar bulma, farklı kavramlar ya da stratejiler arasında ilişkileri keşfetme ve daha sonra bu keşifleri uygulama olarak açıklamaktadır.

Bağlam problemlerinin matematik öğrenme sürecinin her anında olması gerektiğini belirten Nelissen ve Tomic (1993), yatay matematikleştirmeden dikey matematikleştirmeye doğru bağlamların da formalleştiğini vurgulamaktadır. Örneğin, 11 yaşındaki bir çocuk için 6 m uzunluğundaki bir avluya 75 cm (3/4 m) aralıklarla dikilecek kazıkların adeti problemi, yatay matematikleştirme sürecinde verilebilecek bir bağlam olarak görülürken, öğrenme sürecinin ilerleyen zamanlarında 18/7 m uzunluğundaki bir avluya 3/4 m aralıklarla dikilecek kazıkların adeti problemi ise daha çok dikey matematikleştirme gerektirmektedir.

RME' nin Temel İlkeleri

Van Hiele düşünmeyi sezgisel fenomenolojik seviye (intuitive phenomenological level), local betimleyici seviye (locally descriptive level) ve mevzunun sadece sistematik olduğu formal seviye (subject-matter systematic level) olmak üzere üç seviyeye ayırmıştır (Gravemeijer, 1994). Treffers (1987)' nin de desteklediği, aynı zamanda matematik öğrenme seviyesi olarak ileri sürülen bu düzeylerde bireylerin ortaya koyacakları düşünülen performanslar De Lange (1996) tarafından şu şekilde açıklanmaktadır:

- Birey, aşina olduğu örüntülerin bilindik özelliklerini manipüle eder etmez düşünmenin ilk seviyesine gelmiş olur. Diğer bir deyişle bir örneğin bilinen bir özelliğini benzer durumlarda kullandığı zaman bu seviyeye gelmiş olur (Üzel, 2007).

- Özelliklerin birbiriyle ilişkilerini manipüle etmeyi öğrenir öğrenmez ise ikinci seviyeye geçmiş olduğu düşünülür. Bu seviyedeki birey, ancak spesifik olarak bir kavrama ya da stratejiye ait bir çok özelliği ilişkilendirir ve ilişkiler arasında bağlar kurar.
- Son olarak birey ilişkilerin asıl özelliklerini manipüle etmeye başladığı zaman ise artık üçüncü seviyeye geçmiş olur. Artık bu düzeydeki öğrenciler sadece bir kavrama ait özelliklerin birbiriyle ilişkisini kurmak yerine bu kavrama ait özellikleri başka kavramlarla ilişkilendirip, dönüşümler yapabilir.

Geleneksel olarak isimlendirdiği eğitimin ikinci veya üçüncü seviyeden başlayarak tırmanıldığını fakat gerçekçi yaklaşıma dayalı eğitimde ise birinci seviyeden başlandığını ileri süren Zulkardi (2002)' ye göre;

> RME sürecinde, öğrencilerin daha önceden bildikleri bir olguyla başa çıktığı birinci seviyeden başlanabilmesini sağlayan, sürecin bağlam problemleri ile başlaması gerektiğini ileri süren Freudenthal' in didaktik fenomenolojisidir. Bunun yanında yönlendirilmiş yeniden keşif ilkesi ve gelişimsel matematikleştirme ile öğrenciler didaktik açıdan yönlendirilir ve matematikleştirme sayesinde düşünmenin bir seviyesinden başka seviyesine yükselir.

Gravemeijer (1994), RME' ye dayalı bir öğretim sürecinde üç temel ilke öne sürmektedir; *yönlendirilmiş yeniden keşif (guided reinvention), didaktik fenomenoloji (didactical phenomenology)* ve *kendiliğinden ortaya çıkan modeller (emergent models).* Bu üç temel ilke aşağıda ayrı başlıklar altında açıklanmıştır.

Yönlendirilmiş yeniden keşif

Öğrenciler hazır olarak verilen matematiğin pasif alıcısı olarak değil, tüm matematiksel araçları kendilerinin geliştirdikleri ve sezgilerini kullanabildikleri bir eğitim sürecinin aktif katılımcısı olarak ele alınmalıdır (Heuvel-Panhuizen, 1996). Öğrencilerin, başlangıçta günlük yaşamdan gelen, ardından gittikçe formalleşen bağlam problemlerinde gelişimsel matematikleştirme yapmalarına ve bu sayede kavramı kendilerinin keşfetmelerine fırsat veren öğretim süreci RME' nin yönlendirilmiş yeniden keşif ilkesi olarak adlandırılmaktadır. Öğretmen ya da başka bir rehber rolü üstlenen kişi öğrencilerin matematikleştirme yaparak kavramı keşfetmelerini sağlayacak şekilde öğretimi desenlemeli ve onların düşünmelerine, tartışmalarına, birbirileriyle de etkileşime girmelerine fırsat vermeli ve onlarda matematik yapma ihtiyacı doğurmaya yönelik sorular sorarak, ipuçları vererek hedeflenen keşfe doğru onları yönlendirmelidir. Treffers (1987) öğrencilerin matematikleştirme aktivitelerini kendi başlarına yeterince ortaya koyamayacaklarını, bu sebeple öğrenme sürecinde yönlendirilme ve özel didaktik metotlarla desteklenme ihtiyacı duyduklarını vurgulamaktadır. Öğrenciler, öğrenme sürecinde kendi buluşlarını ortaya koyarak ilerledikleri için, ulaştıkları formal matematik onlara anlamlı gelecek ve böylece matematiği sadece formüller aracılığıyla yürütülen semboller bütünü olarak görmekten ziyade kendi deneyimlerini yansıttıkları, hayatın farklı bir şekilde ele alınışı olarak algılayabileceklerdir. Öğrencilerin kavramı kendilerinin keşfetmelerine yönelik desenlenen bir öğretim süreci, onların başarılı stratejiler geliştireceklerini garanti etmez fakat onlara matematikçiler gibi düşünme ve problem çözme süreçlerinde pratik sonuçlara ulaşma fırsatları sağlar (Nelissen ve Tomic, 1993). Matematikçiler gibi düşünerek matematiği yeniden keşfetme fırsatı sağlamak amacıyla matematik tarihinin esin kaynağı olarak kullanılabileceği önerilmektedir (Zulkardi, 1999; Bintaş, Altun ve Arslan, 2003; Üzel, 2007). Kısaca yönlendirilmiş yeniden keşif ilkesi, verilen bir problem durumundan, matematiksel bir kavramın doğal bir yolla (kavramın tarihteki gelişimine benzer bir şekilde) yeniden oluşturulmasını içermektedir (Kizito, 2012). Diğer bir deyişle matematikleştirme olarak adlandırılan bu süreç, öğrencilerin matematiği yeniden keşfetmesini sağlamaktadır (Gravemeijer, 1994).

Didaktik fenomenoloji

Didaktik fenomenoloji bir kavramın analizini yapmak suretiyle onun nasıl oluştuğunu açıklayabilmektir (Altun, 2006). Freudenthal (1983) didaktik fenomenolojiyi, aynı zamanda birçok kavramın didaktik fenomenolojisini ortaya koyduğu *Didactical Phenomenology of Mathematical Structures* adlı kitabında şöyle açıklamıştır:

> Bizim matematiksel kavramlarımız, yapılarımız ve fikirlerimiz fiziksel, sosyal ve bilişsel dünya olgularını düzenleyebilmemiz için birer araç olarak icat edilmiştir. Bir matematiksel kavram, yapı ya da fikrin fenomenolojisi, o olgunun ne için yaratıldığı ile kendisi arasındaki ilişkiyi tanımlamaktır. Bahsedilen olgunun insanoğlunun öğrenme sürecinde nasıl genişleyeceğini ve genç nesillerin öğrenme süreci ile olgu arasındaki ilişkinin açıklanması ise didaktik fenomenolojidir. Didaktik fenomenoloji öğretmene öğrenen bireyin öğrenme sürecinde bulunduğu adımın, nerede olduğunu gösterecektir.

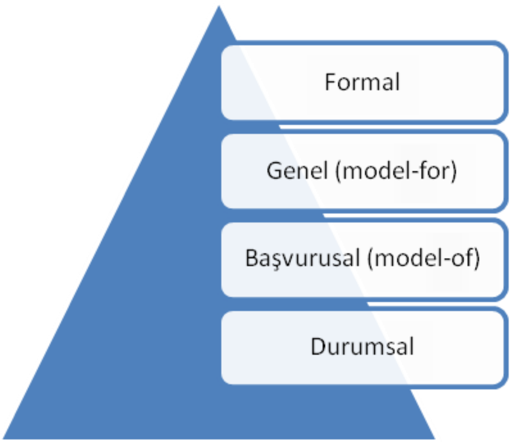
Fenomenolojik analizin eğitsel açıdan ne anlama geldiği tartışmalarını içeren didaktik fenomenoloji, bir kavramı matematiksel bir nesne olarak oluşturma sürecinde olan birey için, bu süreçte o kavram ile ilişkili başka olguların bulunduğu durumlarla karşılaşabileceğini anlatır (Gravemeijer ve Terwel, 2000). Didaktik fenomenoloji, öğrencilerin matematiği keşfedecekleri öğretim sürecinin desenlenmesi için temel oluşturur çünkü bir kavramın başka kavramlarla, stratejilerle, düşüncelerle ilişkisini ortaya koymakla birlikte o kavramın öğrenilme sürecinde beklenen olası performanslar hakkında da önceden bilgi sahibi olunmasını sağlar. Gravemeijer ve Terwel (2000)' e göre fenomenolojik araştırmanın amacı genelleştirilebilecek, duruma özgü yaklaşımlar içeren problem durumları bulmak ve dikey matematikleştirme için temel olan paradigmatik çözüm yollarına ulaşabilmelerine fırsat verebilecek durumlar yaratmaktır.

Freudenthal (1983) matematik öğretiminde kavramların somutlaştırılması amacıyla somut materyaller ya da örnekler kullanmak yerine fenomenolojik açıdan zengin olan durumlar kullanılmasını ve bireyin bu sayede kavramı kendisinin soyutlamasının matematik öğrenmedeki önemini vurgulamaktadır. Eğer öğrenme sürecinde matematiksel bir kavram için somut bir materyal sunulursa bireye, zihninde sadece o somut yapı temelinde bir kavram imajı gelişecektir ve belki de o somut yapı onun için anlamlı olmayacak ve anlamlı bir soyutlama yapamayacaktır. Ancak fenomenolojik açıdan zengin olan durumlar içerisinde, kavrama kendisinin oluşturduğu modeller yardımıyla ulaşan ve onu kendisinin sahip olduğu deneyimler temelinde soyutlayan birey anlamlı bir öğrenme sağlayacak, diğer bir deyişle kalıcı ve sağlam bir kavram imajına sahip olacaktır.

Kendiliğinden ortaya çıkan modeller

RME kuramında, matematiğin anlaşılması amacıyla genellikle öğretmen tarafından ortaya konan fiziksel modellerden ziyade öğrencilerin bağlam problemleri ile etkileşimleri sırasında yeniden keşfetme sürecinde ilerlerken kendilerinin oluşturdukları genellikle bilişsel olan modeller ön plana çıkmaktadır. İnformal bilgi ile formal bilgi arasındaki boşluğu doldurup birbirine bağlaması açısından kritik bir role sahip olan bu ilke gereğince, öğrencilere problem çözümü sırasında kendi modellerini geliştirmeleri ve kullanmaları için fırsat verilmelidir (Fauzan, 2002). RME' de modeller, problem durumlarını temsil eden bağlamlar, problem durumu ile ilişkili matematiksel kavramların veyapıların temel yönlerini yansıtan araçlar olarak görülür (Grigoraş ve Hoede, 2008). "Kendiliğinden ortaya çıkan" olarak nitelendirmesi ise hem RME içindeki modellerin ortaya çıkış sürecini açıklaması hem de bu modellerin formal matematiğin biliş yollarının ortaya çıkmasını desteklemesinden dolayıdır (Gravemeijer, 2007). RME' ye dayalı bir öğrenme sürecinde öncelikle bağlam durumu ile ilişkili olarak duruma özgü modeller ortaya koyan öğrenciler, sonrasında o bağlam durumunu model ile özdeşleştirir ve bağlam, az ya da çok modelin karakterini taşır (Heuvel-Panhuizen, 1998). Bağlam durumuna özgü olarak ilk geliştirilen modeller öğrencilerin önceden bildiği modeller iken, bu modeller genelleştirme ve formalleştirme süreci ile zihinde yavaş yavaş kendi başına bir varlık olarak yer alır (Fauzan, 2002). Modellerin bilişsel bir varlık ya da bir bütün olarak yer almaları dikey matematikleştirme sürecinde olur ve bu modeller artık matematiksel muhakeme için bir model olarak kullanılabilir (Gravemeijer ve Doorman, 1999). Streefland (1985) bağlama özgü gelişen modelleme için “model-of”, sonradan problem durumundan bağımsızlaşarak genelleşen modelleme için ise “model-for” terimlerini kullanmıştır (Streefland’ tan aktaran Gravemeijer, 1999). Öğrenme sürecinde kendiliğinden gelişen modellerde “model of” ‘tan “model-for” ‘a doğru bir gelişim olması beklenir. Bu gelişim bağlam durumunun modellenmesi ile anlam kazanan modellerden, matematiksel ilişkiler hakkında düşünmeyi sağlayan modellere doğru bir sıçrama ile olur (Gravemeijer ve Doorman, 1999). “Model-of” ‘tan “model-for” ‘a doğru bu sıçrama, informal matematikten, yeni matematiksel gerçekliklerin yaratılması anlamına gelen daha formal matematiksel muhakemeye doğru gelişim anlamına gelmektedir (Gravemeijer, 2004).

Freudenthal’ in anlamanın dört düzeyinden bahsettiği seviye teorisi modelleme için yeniden düzenlenmiştir (Gravemeijer, 1999). Bu seviyeler aktivite türleri olarak da ele alınmakta ve informalden formale doğru sırasıyla, *durumsal (situational), başvurusal (referential), genel (general) ve formal seviye* olarak adlandırılır (Şekil 4).



Şekil 4: RME’ de Aktivite Düzeyleri

Bağlam problemleriyle başlayan öğretim sürecinde öncelikle öğrencilerin matematiksel amaca (problemi çözme, anlama, yorumlama vb.) yönelik genellikle deneyimlerinden gelen informal bilgilerinden türettikleri modeller ortaya koyarlar. Bağlamı nasıl anladıklarına bağlı olarak ortaya çıkan yorumların ve çözümlerin olduğu bu seviye durumsal seviye olarak adlandırılmaktadır (Kizito, 2012). Problemde tanımlanan durumu anlamlandırmak amacıyla bu model ve stratejilerin kullanımına gerek duyulduğu zaman ise başvurusal seviyedeki aktiviteye geçilmiş olur (Wijaya, Doorman ve Keijze, 2011). Artık bu seviyede birey o duruma özel bir model geliştirmiş olur ve bu model o durumun anlamlandırılmasında önemli rol oynar. Durumdan bağımsız olmamasından dolayı bu düzeydeki model "model-of" olarak adlandırılmaktadır. Model, bireyde oluşan duruma özgü imajından ayrılarak, diğer bir deyişle durumdan bağımsız olarak, çözüm ve yorumlarda kullanıldığı zaman genel seviyeye geçmiş olur ve bu düzeydeki model ise "model-for" olarak adlandırılır (Gravemeijer, 1999). "Model-for" olarak adlandırılması, artık spesifik bir duruma özgü olmaktan çıkarak o kavram için bilişsel bir araç haline gelmesinden dolayıdır. Son olarak ise model bireyin zihninde, reification süreci (Sfard, 1991)' nin ardından bir varlık olarak yer alır (Fauzan, 2002). Modelin formal bir anlam kazanarak soyutlanması anlamına gelen bu düzeydeki modeller ileri düzeyde matematiksel muhakeme için temel olarak görülür (Gravemeijer, 1999). Heuvel-Panhuizen (2000) öğrenme sürecindeki model gelişimini şöyle anlatmaktadır:

> Öğrenciler önce dikkatle bağlamla ilişkili stratejiler geliştirir. Daha sonra bağlam durumlarının kesin yönleri daha genel hale gelmeye başlar. Bu da demektir ki; artık bağlam az ya da çok geliştirilen bir modelin karakterini kazanır ve ilişkili diğer problemlerle karşı karşıya kalan öğrenciye çözüm için destek verir. En sonunda ise modeller öğrencinin daha formal matematiksel bilgiye erişmesini sağlar.

RME' de Öğretim Süreci

RME' de doğrudan gerçek yaşamdan gelen ya da öğrenciler için gerçekçi bir anlam taşıyan bağlam problemleri ile başlayan, her anında matematikleştirme yapılmasına ve böylece kavramın yeniden keşfedilmesine olanak veren bir öğretim süreci vardır. Bağlam durumlarında kendi informal bilgi ve stratejilerini öğrenme sürecine çağırarak, kendisi için problemi anlamlı hale getiren bireyin ardından formal bilgiye, kendisinin ortaya koyduğu stratejileri kullanarak ve var olan bilişsel yapılarıyla ilişkilendirerek ulaşması onun ileri düzeyli bir kavram oluşturmasını sağlayacaktır. Ayrıca bireyin kendisinin geliştirdiği modellerin desteklenmesinin yanında, "model-of" 'tan "model-for” ‘ a doğru geçişlerini sağlayacak biçimde öğretimin desenlenmesi ve yürütülmesi gerekmektedir (Heuvel-Panhuizen, 2000). Bağlam problemlerinin matematikleştirerek yeniden keşfetme sürecinde kilit bir role sahip olduğunu belirten Gravemeijer ve Doorman (1999)’ a göre, iyi seçilmiş bağlamlar öğrencilerin duruma özgü informal çözüm stratejilerini istenilen düzeyde ortaya koymalarına fırsat vermekte, ve bu informal çözüm stratejileri ise özelleştirme, formalleştirme ve genelleme için sağlam dayanaklar olarak işlev görmektedir. Bununla birlikte bağlam problemlerinin kesinlikle gerçek dünyadan olması gerekmediği, öğrencilerin hayal edebileceği onlara deneyimsel olarak gerçek gelebilecek tüm durumların olabileceği de bilinmektedir (Heuvel-Panhuizen, 2000).

Heuvel-panhuizen (1996, 2000) RME’ nin altı ilkesini ileri sürerek bu altı ilkenin öğretimi desenlemede ve yürütmede esas alınması gerektiğini ileri sürmüştür. *Etkinlik (activity), gerçeklik (reality), seviye (level), birbirine geçmişlik (inter-twinement), etkileşim (interaction) ve rehberlik (guidance)* başlıkları altında ele alınan bu ilkeler ayrı ayrı kısaca açıklanmıştır:

- Etkinlik İlkesi: Öğrenciler, yapılmış hazır matematiğin alıcıları değil, eğitsel süreçteki tüm matematiksel araçları ve anlayışları kendileri geliştiren aktif katılımcılardır (Heuvel-Panhuizen, 2000). Bu sebeple öğrenciler bağlam problemleri ile desenlenen öğretim sürecinde daima matematikleştirme yapıp kendileri keşfederek aktif bir şekilde rol almalı ve bilgiyi kendileri oluşturmalıdır.
- Gerçeklik İlkesi: RME' deki gerçeklik ilkesi, sadece öğrenilen bir matematiksel kavramın yaşamımızın herhangi bir anında kullanılmasını ifade etmez, aynı zamanda matematik öğrenmenin de bir kaynağıdır (Heuvel ve Panhuzen, 2000). Öğrencilerin formal matematik anlayışları, günlük yaşam (deneyimsel olarak gerçek) olgularına yönelik anlayışları ile ilişki olmalı ya da Freudenthal' in deyimiyle gerçeklik temelinde köklendirilmelidir (Gravemeijer ve Doorman, 1999). Bu sebeple bağlam problemlerinin öğretimin her anında olması ve öğrencilerin, bağlam durumlarında matematikleştirme yapmalarına fırsat verilmesi onların matematiği gerçek ile ilişkilendirmelerini, diğer bir deyişle matematiğin onlar için anlamlı olmasını sağlayacaktır.

- Seviye ilkesi: Gravemeijer (1994) ve Heuvel-Pahuizen (2000)' e göre bireyin daha yüksek seviyeye çıkabilmesi yansıtma yapabilmesini gerektirir. Bu yüzden öğrencilerin kendi oluşumlarına ve ürünlerine fırsat veren bir öğretim önemli bir rol oynamaktadır (Fauzan, 2002). Bu ilke gereğince öğrencilerin karşılaşacakları bağlam problemleri ve süreç içerisinde öğretmenin keşfe doğru yönlendirme sırasında soracağı sorular onların bilişsel dengesini bozarak öğrenme sürecine girmelerini sağlamalı ve çatışma yaratarak onlarda matematik yapma isteği doğurmalıdır. Ayrıca informal bilgiden formal bilgiye doğru gelişim sürecinde kendiliğinden gelişen modellerin önemini vurgulayan Heuvel-Panhuizen (2000), "model-of" 'tan "model-for"' a doğru sıçramanın seviye yükselmesinde kritik öneme sahip olduğunu belirtmektedir.
- Birbirine Geçmişlik İlkesi: Matematik birbirinden kopuk konulara ayrılmadığı ve matematikte birbiriyle ilişkili olan birçok konunun iç içe girmesi ile ilgili olan birbirine geçmişlik ilkesine göre matematik programının tutarlılığı çok önemlidir. Bu ilke, sadece matematikteki farklı üniteler arasındaki karşılıklı ilişkiyi içermez, aynı zamanda bir ünitedeki farklı konular arasındaki karşılıklı ilişkiyi de içerir (Heuvel-Panhuizen, 2000). Öğrencilerin matematik yapabilmelerini sağlayan bağlam durumları pek çok zaman farklı konular, kavramlar içerir. Matematik öğretiminde, öğrenilecek her bir konu bir iplik gibi düşünülürse, bu ipliklerin birbiri ile iç içe girmiş bir yapıda ele alınması gereklidir.
- Etkileşim ilkesi: Öğrenme sürecinde her öğrencinin istenilen keşfi yapabilmesi, yapılan keşifleri anlamlandırabilmesi, informal bilgi ve stratejilerini sürece aynı oranda yansıtabilmesi ve daha yüksek seviyelerde matematikleştirme yapabilmesi beklenmemelidir. Öğrenme bu ilke ile sosyal bağlamda ele alınmakta ve bu bağlamda grup içi çalışmalar ve gruplar arası ve tüm sınıf tartışmalarının önemi ve gerekliliği ortaya konmaktadır. Farklı seviyelerdeki öğrencilerin aynı problem durumu ile karşı karşıya kalabileceklerini vurgulayan Putten, Brom-Snijder ve Beishuizen (2005), bu noktada RME' nin önemli didaktik ilkelerinden aynı problem için farklı çözümlerin tartışıldığı tüm sınıf etkileşiminin devreye gireceğini ve bu etkileşimin öğrencilerin stratejilerini geliştirmelerini destekleyeceğini vurgulamaktadır. Tüm sınıf tartışmalarının

öğrencilerin birbirilerini eğitsel açıdan desteklemelerine, birbirilerinin bilgi ve stratejilerinden yararlanmalarına, farklı yorumlar ve çözümler hakkında fikir sahibi olmalarına fırsat sağladığı düşünülürken, öğrencilerin rutin bir algoritma geliştirmesini de engelleyebileceği düşünülmektedir. Ancak etkileşim ilkesinin yoğunlaştığı bir öğretimde, bazı öğrencilerin başkalarının stratejilerinden yararlanacak olmanın verdiği rahatlıkla matematikleştirme yapmadıkları, bağlam problemini çözme veya yorumlama ihtiyacı duymadığı, keşfetme yolunda kendi başına hiç adım atmadığı, formalleştirme ve genelleme aktivitelerinde diğer arkadaşlarını taklit ettiği gibi pasif kalabileceği göz önünde bulundurulmalıdır. Bu soruna karşı öğretmenin tartışmaların, bilgi alışverişlerinin, soruların ne yöne gideceğini bilmesi ve ona göre deyim yerindeyse, bir orkestra şefi gibi süreci yönetebilmesi gereklidir. Tüm sınıf tartışmaların tüm öğrencilerin aynı düzeyde gelişim sağlayacağı anlamına gelmediğini belirten Heuvel-Panhuizen (2000) etkileşimin, anlamanın daha yüksek seviyesine ulaşılmasını sağlayan yansıtmayı sağladığını ileri sürmektedir.

- Rehberlik İlkesi: Öğrencilerin yeniden keşfetmelerine fırsat vermek amacıyla bu keşfe doğru yönlenmelerini sağlayacak şekilde onlara rehberlik edilmesi gerekir. Ancak bu yönlendirme ilkesi, öğrencilere yönergeler vererek onları bir etkinlik içerisinde sonuca ulaştırma gibi anlaşılmamalıdır. Öğrencilerin bilgiyi nasıl edinecekleri ve kavramı nasıl oluşturacaklarının bilinmesi öğretimde rehberliğin, diğer bir deyişle yönlendirmenin nasıl yapılacağı konusunda kritik bir role sahiptir ki bu konuda Freudenthal' in didaktik fenomenoloji ilkesi devreye girmektedir. Didaktik fenomenoloji ilkesi öğretim sürecini yönlendirecektir ancak bu, öğrencilerin standart yollarla öğrenmesini sağlayacak biçimde bir öğretim desenlemesi anlamına gelmemelidir. Heuvel-Panhuizen (2000), böyle bir öğretimin başlangıçta verilen etkinlik ilkesi ile çelişeceğini ve öğrencilerin sözde-anlama (pseudo-understanding) sağlamalarına neden olacağını vurgulamaktadır. RME' ye göre öğretim süreci, öğrencilerin informal bilgi ve stratejilerinden yola çıkıp, sürecin her anında matematikleştirme yaparak yeniden keşfetmelerini sağlayacak biçimde desenlenmelidir. Freudenthal bir kavramın öğrenilme sürecinde olası tepkileri tahmin edebilen ve öğrencilerle etkileşim halinde olan, öğrencilere öğretmeyi hayal eden öğretmenlerin ve ders kitabı yazarlarının *düşünce deneyleri (thought experiment)*' nin öneminden bahsetmekte ve öğretimin, düşünce deneyleri temelinde desenlenmesine vurgu yapmaktadır (Gravemeijer ve Terwel, 2000).

Gerçek yaşamda çok sık karşılaşılan, bununla birlikte bireye yabancı olmayan ve matematikleştirme için çok uygun bir yapıya sahip olduğu düşünülen eğim kavramının RME çerçevesinde ele alındığı hem ulusal hem uluslararası alan yazında herhangi bir çalışma bulunamamıştır. Öğrencilerin eğim kavramını matematikleştirme süreçlerinin betimlenerek ortaya konulması ile onun kavramsal öğrenilmesi yolunda önemli bir boşluk doldurulacaktır. Ayrıca bu kavramın matematikleştirilme sürecinin gelişiminin ayrıntılı bir şekilde betimlenmesi, başka kavramların matematikleştirilme süreci için yol gösterici olması açısından önemlidir. Öğrenme sürecinde bireyin zihninde oluşturacağı bilişsel yapılar ise, bir kavramın oluşum sürecini ortaya koymaya yönelik bir teorik çerçeve olan APOS çerçevesinde incelenmiştir.

APOS (Action-Process-Object-Schema)

APOS, Piaget' nin yansıtıcı soyutlama (reflective abstraction) hakkında fikirlerini anlama ve bu fikirleri üniversite düzeyindeki matematik bağlamında tekrardan yapılandırma düşüncesiyle geliştirilen, bir kavramın öğrenilme sürecinde zihindeki bilişsel oluşumları ortaya koyan bir teorik çerçevedir (Asiala, ve diğerleri, 1996; Dubinsky, 1991). Piaget, bireyin bilişsel yapıları, çevresindeki bilişsel besinlerle (cognitive aliments) etkileşimi sayesinde oluşturduğunu ve daha sonra karşılaştığı yeni bilişsel besinlerle tekrardan etkileşime girerek gelişimsel olarak bu yapıların tekrardan yapılandırıldığını ileri sürmüş ve bu süreci yansıtıcı soyutlama olarak isimlendirmiştir (Dubinsky ve Lewin, 1986). Dubinsky (1991), çocuklarda mantıksal düşünmenin gelişimini ve buna bağlı olarak öğrenmeyi tanımlayan yansıtıcı soyutlama' nın, soyut matematiksel kavramların gelişimi için esas olarak düşündüğü dört farklı çeşidi olan *genelleme (generalization), içselleştirme (İnteriorization), kapsülleme (encapsulation)* ve *koordinasyon (coordination)* 'u ileri sürmüş ve kendisi bunlara ek olarak yüksek matematiğin öğrenilmesinde çok önemli olarak gördüğü *geri çevirme (reversal)'* yi ortaya atmıştır. Yansıtıcı soyutlamanın farklı formları aşağıda kısaca açıklanmaya çalışılmıştır.

Genelleme. Birey yeni bir bilişsel besin ile karşılaştığında var olan bilişsel dengesi bozulur (disequilibrating) ve uyumsama yapmaya (accommodation) çalışır. Bu durumda zihninde var olan yapıları tanıma önemlidir çünkü yeni besin, ne kadar farklı görünürse görünsün, mutlak özelliklere sahiptir ve bu özelliklerden yola çıkılarak zihindeki tanınan yapı ona da uygulanır (Dubinsky ve Lewin, 1986). Diğer bir deyişle, birey var olan şemasını daha geniş bir olgu topluluğuna uyguladığı zaman, şema genellenmiş olur (Dubinsky, 1991). Yansıtıcı soyutlamanın genelleme denilen bu formuna örnek vermek gerekirse birey toplama işleminin değişme özelliğine sahipse bu özelliği kolayca çarpma işlemi için de uyarlayarak genişletebilir. Eğer bu form, işlemler yerine fiziksel nesneler olan besinler için uygulanıyorsa o halde bu süreç emprik soyutlama (empirical abstraction) olarak adlandırılır.

İçselleştirme. Bireyin algıladığı bir olguyu anlamlandırma amacıyla içsel süreçler oluşturması anlamına gelen içselleştirme, maddi eylemlerin içsel işlemlere çevrilmesi olarak da ileri sürülebilir (Dubinsky, 1991). Örneğin, saymayı yeni öğrenen bir çocuk her nesneye bir sayı eşleştirerek sayma eylemini gerçekleştirir. Ardından başka nesneleri sıralar ve sayar, ardından başka nesneler için bunu yapar ve en sonunda bu eylemlerin her biri içselleştirilir, diğer bir deyişle içsel olarak temsil edilir ki bu, eylemleri yansıtma, onları karşılaştırma ve hepsinin aynı sonucu verdiğini fark etme ile olur (Dubinsky, 1991).

Koordinasyon. Bireyin yeni bir yapının oluşturulması için, iki ya da daha fazla yapıyı koordine etmesi ya da birleştirmesi şeklinde ortaya çıkan yansıtıcı soyutlama çeşididir. Örneğin, sınıflama ve sıralamanın koordinasyonu ile sayı kavramının oluşturulması gibi (Dubinsky ve lewin, 1986)

Kapsülleme. Dinamik olan süreçlerin statik nesnelere dönüştürülmesidir. Bireyin zihninde kalıcı nesne, onun üzerine süreç uygulanması, diğer bir deyişle fiziksel ya da algısal eylemler uygulanması ile elde edilir (Tall, 1999). Bu sebeple süreçlerin, daha ileri düzeyde kavramların oluşumu sırasında, üzerine eylem ve süreçler uygulanacak nesneler olarak kapsüllenmesi önemlidir. Örneğin, oran kavramının oluşturulması sırasında sayı kavramı üzerine bölme eyleminin hareket ettirilmesi gerekir ki bunun için sayma sürecinin kapsüllenerek nesne olarak ortaya konması beklenir.

Geri Çevirme. İçselleştirilen bir sürecin feshedilerek yeni bir sürecin oluşturulması anlamına gelen bu mekanizma, orijinal süreci kapsayan dönüşümler dizisinin çözülerek, bireyin onu yeni bir süreç olarak düşünebilmesine izin verir (Dubinsky, 1991; Meel, 2003). Örneğin, bir fonksiyon süreç olarak ortaya konup tersine çevrilmesi ile ters fonksiyon kavramı elde edilmesi sırasında geri çevirme mekanizması gerekli olan yansıtıcı soyutlama türüdür.

Yansıtıcı soyutlamanın farklı formları temelinde geliştirilen APOS teorisi başka bir açıdan bakıldığında ise, bir matematiksel kavramın nasıl öğrenilebileceğini inceleyen, matematiksel bilginin doğasını ortaya koymayı amaçlayan ve bu bilginin nasıl geliştiğine yönelik hipotezler temelinde ilerleyen yapılandırmacı anlayışa dayalı bir teoridir (Dubinsky, 2001). Bu teoriye göre, birey matematiksel bir durumla, ancak, o durumda başvurabilecekleri bilişsel yapılar oluşturmalarını sağlayan zihinsel mekanizmalar kullanarak başa çıkabilir ki bu bahsedilen zihinsel mekanizmalar *içselleştirme (interiorization*) ve *kapsülleme (encapsulation)* iken, bilişsel yapılar ise *eylem (action), süreç (process), nesne (object) ve şema (schema)'dır* (Dubinsky, Weller, McDonald ve Brown, 2005). APOS ismi de bahsedilen bu bilişsel yapıların İngilizcelerinin baş harflerinden oluşturulmuştur. APOS teorisine göre kavramın oluşturulması eylemlerle başlar, daha sonra eylemlerin içselleştirilmesiyle dinamik süreçlere ve dinamik süreçlerden kapsüllenen nesnelere doğru gelişir (Tall, 1999). Bu teoride bahsi geçen bilişsel yapılar aynı zamanda kavramsal öğrenme düzeyleri olarak da ele alınmaktadır.

Eylem. Var olan objeleri yeni objeler elde etmek için dönüştürebilen, tekrarlanabilir fiziksel ya da zihinsel manipülasyonlardır (Breidenbach, Dubinsky, Hawks ve Nichols, 1992). Asiala ve diğerleri (1996) eylemi, birey tarafından bir dereceye kadar da olsa dışsal algılanan nesnelerin dönüşümü olarak açıklamıştır. Dubinsky ve McDonald (2001)' a göre eylem düzeyinde, nesnelerin dönüşümü dışsal olarak düşünülür ve bu düzeydeki öğrenci sadece verilen bir uygulamada açık olarak ya da ezberden nasıl bir işlem uygulayacağını bilir. Kavramı eylem olarak soyutlayabilen birey belirli bir algoritmayı takip ederek adım adım işlemleri açıkça ortaya koyarak düşünebilir. Örneğin, fonksiyon kavramını, cebirsel bir ifadede sayısal değerleri yerine koyup buna bağlı olarak sonuç elde edeceği şeklinde düşünen bir birey eylem kavramsallaştırmasına sahiptir. Eylem düzeyindeki kavramlar durağandır ve bu düzeydeki kavramlar üzerine başka oluşumlar hareket ettirilemez. Statik kavramsallaştırma olarak görülen bu düzeyde birey, bir işlem sırasında sadece bir adım hakkında düşünebilir (Reed, 2007). Eylem kavramsallaştırması soyutlama sürecinin en alt basamağı olarak düşünülmesine rağmen oluşturulması hedeflenen kavramın anlaşılmasının başlangıcı için gerekli görülmektedir. Çünkü kavram oluşumu süreci eylemlerle başlamakta ve bu eylemlerin sürece içselleştirilmesiyle gelişmektedir. Asiala ve diğerleri (1997) parçalı fonksiyonlar, bileşke fonksiyon, ters fonksiyon kavramlarını oluşturma sürecinde öğrencilerin zorluklarla karşılaştıklarını belirlemişler ve bunun sebebi olarak da fonksiyonların eylem düzeyinden öte kavramsallaştırılamamasını ortaya atmışlardır. Breidenbach ve diğerleri (1992) ise üniversite öğrencileri üzerinde yaptıkları araştırmalarında fonksiyon kavramına eylem öncesi (pre-action) düzeyde sahip olanlar olduğunu belirlemişlerdir. Bu öğrenciler verilen matematiksel problem durumlarında fonksiyon kullanımına dair ortaya herhangi bir performans koyamamışlar ve fonksiyon için “bilmiyorum”, “değişkenler içeren cebirsel bir ifade bu” gibi söylemlerde bulunmuşlardır.

Birey, eylemi yansıttığında ve içsel bir işlem oluşturduğunda, eylemi sürece içselleştirmiş olur (Kabael, 2011). İçselleştirme eylemin tekrarlanması sayesinde olur ve içselleştirilen eylem artık dışsal desteklerle yürütülmez ki bu yüzden süreç denilen içsel bir yapı halini alır (Meel, 2003). Tüm eylem, bireyin zihninde, algoritmanın özel adımlarını takip etmeye gerek kalmaksızın yer aldığı zaman artık eylem içselleştirilerek süreç düzeyinde oluşturulmuş olur (Breidenbach ve diğerleri, 1992; Dubinsky ve diğerleri, 2005).

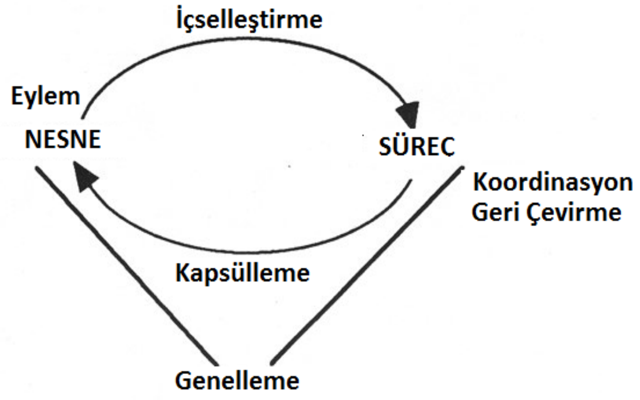
Süreç. Asiala ve diğerleri (1996)’ na göre *süreç*, aynı eylemin dışsal uyaranlara gerek kalmaksızın ortaya konulduğu içsel bir yapıdır. Süreç düzeyinde kavrama sahip olan bir birey, gerçekten süreci ortaya koymadan, onu uyguluyormuş gibi düşünebilir (Dubinsky ve McDonald, 2001). Bir süreç, eylemin aksine, bireyin herhangi bir dışsal uyarana tepki vererek onu yapmasından ziyade, onu kontrolü altında tutup içsel olarak algılamasını gerektirir (Asiala ve diğerleri, 1996). Süreç oluşumunu tamamlayan birey süreci yansıtabilir ve tanımlayabilir (Asiala, Cotrill, Dubinsky ve Schwingendorf, 1997). Bunun yanında herhangi bir dışsal uyarana gerek duymaksızın dönüşümün tüm adımlarını geri çevirebilir (Asiala ve diğerleri, 1996). Bir kavram için süreç oluşumuna sahip birey formüle bağlı kalmaksızın o kavramı kullanabilir (Asiala ve diğerleri, 2004). Ayrıca kavram oluşumunda bu düzeydeki birey, onu, başka bir süreç elde etmek için tersine çevirebilir (reversal) ya da iki veya daha fazla süreci koordine ederek (coordination) diğer bir deyişle birleştirerek yeni bir süreç elde edebilir (Dubinsky, 1991; Dubinsky ve Moses, 2011). Örneğin, fonksiyon kavramında birey iki ya da daha fazla süreci birbirine bağlayarak bileşke fonksiyon elde edebilir ki burada gerçekleşen birkaç sürecin bir süreç içerisine koordine edilmesidir. Fonksiyon kavramının süreç olarak ortaya konması ve bu sürecin geriye doğru işletilmesi ile ters fonksiyon kavramının elde edilmesi ise tersine çevirme mekanizmasına verilebilecek örneklerdendir. Ayrıca fonksiyonlarda süreç kavramlaştırmasının güçlü oluşu fonksiyonların bire-bir ve örtenliğinin anlaşılmasına izin vermesi açısından önemli görülürken (Breidenbach ve diğerleri, 1992; Meel, 2003) matematikte birçok başka oluşumların gerçekleştirilmesi için kavramın en az süreç düzeyinde oluşturulması gerekli görülmektedir.

Nesne. Eğer birey sürecin bütünüyle farkında olursa, bu bütünlüğün üzerine dönüşümler gerçekleştirebiliyorsa ve gerçekten böyle dönüşümleri yapılandırabiliyorsa o zaman süreci bilişsel *nesne* içerisine kapsüllemiştir (encapsulation) (Breidenbach ve diğerleri, 1992; Dubinsky ve diğerleri, 2005; Asiala ve diğerleri, 1996). Kapsülleme, matematiksel düşünmede soyutlama ve seviye atlama için, kavramın daha yüksek seviyeli yapılar içinde organize edilebilmesine izin vermesi açısından kritik bir öneme sahiptir (Drijvers, 2003). Kavramın nesne oluşumu tamamlandığında artık değişmez özellikler kazandığı düşünülür ve bireyden nesneyi, yeni kavram oluşumlarında çağırıp, üzerine eylemler gerçekleştirilebilmesi beklenir (Tziritas, 2011). Bir nesne üzerine bir eylem ya da süreç ortaya konacağı zaman, sık sık nesneyi, onun özelliklerini kullanmak üzere süreç formunda geriye açmak (de-encapsulation) gereklidir (Asiala ve diğerleri, 1996). Geri açılma (de-encapsulation), bireye, oluşturduğu nesnenin üzerine manipulasyonlar yapması için nesnenin doğasında var olan özellikleri kullanabilmesini sağlar (Meel, 2003). Birçok matematiksel aktivitede öğrenenin, sahip olduğu matematiksel varlığın süreç ve nesne oluşumları arasında ileri geri hareket edebilmesi gereklidir (Dubinsky ve Harel, 1992; Dubinsky, 2001). Kavramın nesne düzeyinde bilişsel yapı olabilmesi için onun üzerine başka bir eylem ya da sürecin uygulanabilmesi gerekir. Asiala ve diğerleri (2004)' e göre bireyin, süreci kapsülleyerek nesne oluşturması, muhtemelen dinamik bir sürece bir eylem uygulama gereksinimi duyduğu bir durumda onu yansıttığı zaman olur ki bu oluşum karmaşık bir şekilde belirli bir sırayla ortaya çıkıp çıkmadığı belirsiz olmakla birlikte şu şekilde olabilir:

1.) Bir sürece bir eylem uygulamak için nesne yaratma ihtiyacı,
2.) Nesne olarak sürecin kapsüllenmesi, ve
3.) Eylemin bu nesneye uygulanması.

Ayrıca süreci nesneleştiren bir öğrenci onu bütün olarak görür ve bu bütün üzerine yapılan dönüşümleri anlayabilir (Dubinsky ve McDonald, 2001).Bunun yanında bu düzeydeki birey kavramı başka matematiksel durumlarda kullanmak üzere dönüştürebilir (Tziritas, 2011). Örneğin, türev kavramının oluşturulması sırasında fonksiyon kavramının oluşturma sürecine yansıtılması ve gerektiğinde eylem, süreç ya da nesne olarak ortaya konması beklenir.

Şema. Son olarak şema, yeni bir matematiksel problem durumu ile başa çıkmak için çağırılan eylemler, süreçler, nesneler ve diğer şemaların uyumlu bir topluluğudur (Clark ve diğerleri, 1997). Bir bireyin tek bir dönüşümü nasıl yapılandırabildiğini tanımlamaya bilişsel yapılarından bir ya da bir kaçı yetebilirken, bir matematik konusu çoğu zaman uyumlu bir çerçeve içinde birbirine bağlanma ve organize edilme ihtiyacı doğuran bir çok eylem, süreç ve nesne içerir ki bu yapıya da şema denir (Dubinsk ve diğerleri, 2005). Dubinsky ve McDonald (2001)' a göre bir matematiksel kavram için oluşturulan kesin şema, bireyin eylemlerinin, süreçlerinin, nesnelerinin ve birbirine bazı genel ilkelerle bağlı diğer şemalarının bir araya gelmesi ile oluşmuş bir yapıdır. Şema düzeyindeki bir öğrenci eylem, süreç, nesne ve şema düzeyleri arasında ileri veya geri sıçrayabilir (Weyer, 2010). Şemalar, eylem ve süreçlerin üzerine uygulanabildiği çeşitli bilişsel nesneler olabilirler (Clark ve diğerleri, 1997). Bu olduğu zaman, şema bir nesne olarak *tematize (thematize)* edilmiş olur ve daha yüksek seviyedeki matematiksel yapılar içinde yer alabilir (Asiala ve diğerleri, 1996). Dubinsky şemanın statik bir varlık olmadığını ileri sürerek, kendi dinamikliğinden ve sürekli gelişim ve değişim içinde oluşundan ayrılamadığını vurgulamaktadır (Meel, 2003). Dubinsky (2001)' e göre var olan şema, bir problem durumu ile başa çıkmak için içerisindeki süreç ve nesneleri çağırmak suretiyle kullanılabilir ve üzerine eylem ya da süreçler uygulanan bir nesne gibi davranabilir ki bu, daha önce de söylendiği gibi tematizasyon olarak adlandırılmaktadır. Ayrıca var olan şemanın, yapısı değiştirilmeksizin, uygulanabilirlik alanın genişletilmesi sağlandığı zaman genelleme olarak adlandırılan bilişsel mekanizma gerçekleşir (Meel, 2003). Piaget' nin genellenmiş özümseme olarak ileri sürdüğü bu oluşum genişletilmiş genelleme (extensional generalization) olarak da adlandırılmaktadır (Dubinsky, 1991). Dubinsky, bilişsel bir şemayı ve şemanın oluşumu sürecini görsel olarak da açıklamak için şekil 5' i ortaya atmıştır.



Şekil 5: Şemalar ve Şemaların Oluşumu (Dubinsky, 1991).

Daha çok lisans düzeyinde kullanılan ve bir kavramın öğrenilmesi sürecinde geliştirilecek özel zihinsel oluşumları (genetik ayrışma – genetic decomposition) belirlemeye yönelik bir program geliştirme ve araştırma çerçevesi olan APOS teorik çerçevesi, teorik analiz, öğretimin desenlenmesi ve uygulanması, veri toplama ve analiz olmak üzere üç bileşene sahiptir.

Teorik Analiz

Teorik çerçevenin ilk aşaması olan teorik analizde öncelikle araştırılan kavramın epistemolojisi, o kavram ile ilgili yapılan geçmiş araştırma sonuçları, alan yazın taraması ve araştırmacının matematiksel bilgi ve deneyimleri ile belirlenir (Kabael, 2011). Teorik analizin amacı, bireyin bir kavramı anlaması ya da geliştirmesi için yapabileceği zihinsel oluşumların tanımlanmasını içeren, genetik ayrışma ya da diğer bir deyişle bir biliş modelinin ileri sürülmesidir (Aiala ve diğerleri, 2004). Dubinsky (2001), genetik ayrışmayı, kısaca bir öğrencinin kavramı öğrenebilmesi sırasında oluşturduğu özel bilişsel yapılar olarak tanımlamaktadır. Bahsedilen bilişsel yapılar daha önceden ayrıntılı bir şekilde açıklanmaya çalışılan eylem, süreç, nesne ve şema' dır. Bu bilişsel yapılar her ne kadar hiyerarşik bir sıra ile verilse de aslında bireyde doğrusal bir sıra ile görülmeyebilir. Birey çok kısıtlı formül çeşitleriyle kavram oluşumuna başlayabilir, ardından hesaplamaları yansıtarak süreç hakkında düşünmeye geçiş yapabilir, daha sonra belki çok karmaşık formüller ortaya koyarak eylem yorumuna geri dönerek bilişsel gelişimi devam ettirebilir ya da süreç kavramsallaştırmasının çok ileri düzeylerine gidebilir (Dubinsky ve McDonald, 2001). Bu sebeple bir kavramın genetik ayrışması çok karmaşık bir formda ortaya çıkabilir.

Kavramın teorik analizi sürecinde araştırmacılar, verilen bir kavramın nasıl anlaşıldığının formüle edilmesi amacıyla olası oluşumları açıkça tanımlayan ilk genetik ayrışmayı ileri sürmeye yönelik çalışma yapar (Weller ve diğerleri, 2000). İleri sürülen bu ilk genetik ayrışma, öğretimin desenlenmesi ve uygulanması için temel oluşturur çünkü öğrencinin oluşturacağı bilişsel yapılara yönelik bir öğretim ile kavramı oluşturacağı öngörüsü APOS' a dayalı araştırmaların önemli bir karakteristiğidir.

Öğretimin Desenlenmesi ve Uygulanması

Öğretimin desenlenmesi için matematiksel kavramların genetik ayrışması temeldir (Asiala ve diğerleri, 1997). Genetik ayrışma temelindeki öğretim uygulamalarının rolü ise öğrencilerin ilk genetik ayrışmada ileri sürülen zihinsel yapıları oluşturmalarını ve kavramı, matematiksel olan ya da olmayan durumlarda kullanabilmelerine fırsat veren bu zihinsel yapıları kullanabilmelerini sağlamaktır (Dubinsky, 2001). Öğretim, öğrencilerin genetik ayrışma ile öne sürülen zihinsel yapıları oluşturmalarını sağlayabilecek, *ACE öğretim döngüsü* (*ACE teaching cycle)* adı verilen uygulamaları içerir. ACE öğretim döngüsü, *etkinlikler* (**A**ctivities), *sınıf görevleri* (**C**lass tasks) ve *alıştırmalar* (**E**xercises) olmak üzere adını İngilizce karşılıklarının baş harflerinden aldığı üç bileşene sahiptir. Piaget' e göre öğrenme, zihinde önceden geliştirilen yapıların, karşılaşılan bilişsel çatışma yaratan durumlarda yeniden dengelenmesi ile olmaktadır. Bilişsel çatışmaların öğrenenin, başkalarının karşıt düşünceleri ile karşılaştığı ve bu sırada kendi düşüncelerini dile getirdiği ortamlarda ortaya çıkmakta oluşu, APOS teorisine dayalı araştırmalarda öğrencilerin birbirinin düşüncelerini tartışıp kendi performanslarını yansıtabilecekleri işbirlikçi grupların düzenlemesi fikrini doğurmuştur (Tziritas, 2011). Genellikle üç ya da dört kişiden oluşan bu gruplar, ilk genetik ayrışmada ileri sürülen bilişsel yapıların oluşumunu destekleyen bilgisayar etkinlikleri ile öğrenme sürecine başlar (Reed, 2007, Çetin, 2009). Bu bilgisayar etkinlikleri, standart matematiksel notasyonlara benzer bir söz dizimi (syntax) içinde birçok matematiksel oluşumu destekleyen programlama diline sahip bir bilgisayar ortamında matematiksel kavramların uygulanmasını içerir (Dubinsky ve McDonald, 2001). Bilgisayar ortamında gerçekleştirilen etkinliklerde öğrencilerin soruları doğru cevaplamalarından ziyade matematiksel konu ile deneyime girmeleri sağlanır ve kazandıkları bu deneyimleri sınıf içi tartışmalarda yansıtmaları beklenir (Asiala ve diğerleri, 2004). İşbirlikçi öğrenmeyi destekleyen grup çalışması ACE öğretim döngüsünün her anında devam ederken, sınıf içi tartışmalar ile öğrencilerin kağıt-kalem kullandıkları sınıf görevlerinde, bilgisayar laboratuarında oluşturmaya başladıkları yapıları yansıtmaları ve bununla beraber pekiştirmeleri sağlanır. Bu süreçte öğretmen, öğrencilerin bilgisayar laboratuarında yaptıkları çalışmaları ve sınıf içinde yapacakları hesaplamaları yansıtmaları için fırsat veren gruplar arası tartışmaları yönetirken bunun yanında ara sıra da olsa tanımlar, açıklamalar ve öğrencilerin ne hakkında düşündüklerini gözden geçirmeleri için hatırlatmalar yapabilir (Asiala ve diğerleri, 2004). Kavramın öğrenci zihninde yer edinmesi ile birlikte, tüm gruplara o kavram ile ilişkili problem çözme ve birçok standart alıştırma yapma fırsatı sağlanır (Dubinsky ve McDonald, 2001). Bu alıştırmalar, genellikle sınıf ve laboratuar dışında tamamlanması beklenen geleneksel ev ödevleri olarak sunulur ki bu ödevlerin amacı, öğrencilerin oluşturdukları bilişsel yapıların güçlendirilmesi, öğrendiklerini kullanması ve bazı durumlarda, ileride üzerine çalışılacak durumlar hakkında düşünmeye başlamalarını sağlamaktır (Asiala ve diğerleri,1996; Weller ve diğerleri, 2000) Desenlenen bu öğretim uygulaması, araştırmacıların teori bağlamında toplayıp analiz edebileceği veriler doğurması açısından önemlidir.

Veri Toplama ve Analiz

Gözlem ve değerlendirme (Observation and assessment) olarak da adlandırılan bu süreç öğretim uygulamaları sırasında ve sonrasında yapılabilecek veri toplama ve toplanan verileri analiz etme sürecidir. Toplanan verilerin analizi sonucu elde edilen bulgular doğrultusunda ilk genetik ayrışmada ileri sürülen bilişsel oluşumlar destekleniyorsa ileri sürülen genetik ayrışma olduğu gibi bırakılırken, desteklenmiyorsa bilişsel oluşumlar elde edilen bulgular doğrultusunda revize edilir ve revize edilmiş genetik ayrışma ileri sürülür ki bu genetik ayrışma yeni bir çalışmanın teorik analizi için esas alınır (Clark ve diğerleri, 1997). Veri analizinin, ilk genetik ayrışmanın yanı sıra öğretimin desenlemesini, hatta esas alınan teoriyi bile arındırma ve revize etmeyi gerektirebileceğini ileri süren Weller ve diğerleri (2000), araştırmacıların, genetik ayrışma ve öğretim uygulamalarının son revizyonlarını, çerçevenin bileşenlerini döngüsel olarak tekrarlayarak test etmeleri gerektiğini vurgulamıştır. Dubinsky ve McDonald (2001) ise bu döngünün kavramın epistemolojisinin anlaşılana ve öğrencilerin öğrenmelerine yardımcı olacak etkili pedagojik uygulamaların elde edilmesine kadar sıklıkla tekrar edilmesi gerektiğini belirtmiştir.

APOS çerçevesindeki araştırma verileri, ileri sürülen bilişsel oluşumları ortaya çıkarmaya yönelik olarak hazırlanan açık uçlu teste verilen yazılı cevaplar ile elde edilmeye çalışılırken, öğrencilerle yapılan derinlemesine görüşmeler (in-depth interview) ise, bilişsel oluşumların daha açık ortaya konulabilmesi amacıyla çok sık başvurulan bir veri toplama tekniği olarak görülmektedir. Öğrencilerin yazılı araca verdikleri cevapları açıklamalarına ve tekrar gözden geçirmelerine fırsat vererek, onların bilişsel süreçlerini ortaya çıkarmayı sağlayan derinlemesine görüşmeler, verilen her farklı cevabın ayrıntılı araştırılması amacıyla katılımcı tüm öğrencilerin sadece küçük bir kısmı ile gerçekleştirilmektedir (Asiala ve diğerleri, 2004). Elde edilen verilerin nitel tekniklerle yapılan analizi, öğrenci performansları arasındaki farklılıkların, ileri sürülen bilişsel yapıları oluşturmakta başarılı olup olmadıkları yönünde açıklamalar sağlar (Weller ve diğerleri, 2000). Ancak veriler, öğrencilerin öğrenme süreçleri hakkındaki teorik analiz varsayımlarına (ilk genetik ayrışma) cevap olarak açık bir şekilde evet ya da hayır gibi kesin cevaplar vermez (Tziritas, 2011). Elde edilen veriler ışığında, öğrencilerin oluşturdukları bilişsel yapıların, teorik analizde tahmin edilenlere yakın ya da uzak oluşuna göre analiz edilip yorumlanmasıyla ilk genetik ayrışmanın aynı kalması ya da revize edilmesi sonucuna varılır.

Asiala ve diğerleri (1997), kalkülus öğrencilerinin türevi grafiksel anlayışları gelişimini araştırmak, bir diğer deyişle kalkülus öğrencilerinde bir fonksiyon ve onun türevinin grafiksel anlayışını ortaya çıkarmak amacıyla APOS teorik çerçevesinde bir çalışma yapmışlar ve "eğim" kavramının türev için önkoşul bilgilerden biri olduğunu öne sürmüşlerdir. Zandieh (2000) öğrencilerin türev kavramını anlayışlarını analiz etmek için bir teorik çerçeve ortaya koymuş ve türevin grafiksel temsilinin kavramsallaştırılmasında ilk olarak eğim kavramının nesneleştirilmesini gereğini ileri sürmüş ve soyutlama sürecini bunun üzerine kurmuştur. Alanyazın tarandığında öğrencilerin eğim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelendiği bir çalışmaya rastlanmamıştır. Türev için önkoşul bilgisi olduğu Barr (1981), Asiala ve diğerleri (1997), Huang (2011) ve Zandieh (2000) tarafından vurgulanmış olan eğim kavramını öğrencilerin nasıl yapılandırdığının APOS teorik çerçevesinde incelenmesiyle alanyazında önemli bir boşluk doldurulmuş olacaktır.

Amaç

Bu araştırmanın temel amacı sekizinci sınıf öğrencilerinin RME yaklaşımına dayalı desenlenen bir öğretim sürecinde eğim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesidir. Bu genel amaç doğrultusunda aşağıdaki sorulara yanıt aranmıştır:

- Ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin "eğim" kavramını matematikleştirme süreci nasıldır?
- Ortaokul sekizinci sınıf öğrencilerinin "eğim" kavramını oluşturma süreci nasıl gelişmektedir?

Araştırmanın Önemi

Eğim; cebir, geometri, trigonometri ve kalkülüste farklı temsiller ve yorumlarla yer alan, türev başta olmak üzere birçok matematiksel kavramın öğrenilebilmesi için oluşumu gerekli görülen önemli bir kavramdır. Aynı zamanda gerçek yaşamda sıklıkla etkileşime girilen bir kavram olması, hemen hemen herkesin onun hakkında informal bilgilere sahip olmasını sağlamıştır. Günlük yaşamdan edinilen informal bilgi ve stratejiler temelinde eğime ait bir kavram imajına sahip olunmasına (Crawfort ve Scott, 2000) rağmen, formal bir kavram olarak yapılandırmakta zorlanılmakta ve daha çok işlemsel olarak öğrenilmektedir (Barr, 1981; Clement, 1985; Lobato ve Thanheiser, 2002; Tabaghi ve diğerleri, 2009; Cheng, 2010). Eğimin işlemsel olarak öğrenilmesi kavramsallaştırmayı ve farklı temsiller arasında ilişki kurmayı engellemektedir (Stump, 2001). Hemen hemen herkesin bu kavram hakkında informal bilgi ve stratejilere sahip olması, kavramın gerçek yaşamdan matematiksel bir kavrama doğru gelişen bir süreçte öğrenilmesini, diğer bir deyişle matematikleştirilmesini kaçınılmaz hale getirmektedir. Bireye eğim kavramını, sahip olduğu informal ve formal bilgiler ile ilişkilendirerek öğrenmesine fırsat verilmesinin kavramsal öğrenmeyi sağlama açısından kritik bir öneme sahip olduğu düşünülmüştür. Bireyin gerçekçi yaşam durumlarında informal bilgi ve stratejilerini yansıtabildiği, sürecin her anında matematikleştirme yaparak ve modeller geliştirerek kavramı kendisinin yapılandırdığı bir matematik öğrenme kuramı olan RME, eğim kavramının anlamlı ve kalıcı olarak öğrenilmesinde en uygun yaklaşımlardan biri olarak düşünülmüştür. Alan yazın tarandığında eğim kavramının RME yaklaşımında ele alındığı herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bunun yanında eğimin matematikleştirilmesine dayalı olarak bir oran yapılandırılmasına yönelik birkaç çalışmaya (Simon ve Blume, 1994; Lobato ve Thanheiser, 2002; Duncan ve Chick, 2013) erişilmiş ancak bu çalışmaların eğimin sadece geometrik yorumuna odaklandığı ve lise ve üniversite düzeyindeki katılımcılarla yürütüldüğü görülmüştür. Eğimin formal anlamda ilk olarak oluşturulduğu seviye olan sekizinci sınıf düzeyindeki öğrencilerle yapılan eğimin matematikleştirilmesine ve oluşturulma süreçlerine yönelik herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu tez çalışmasında sekizinci sınıf öğrencilerinin eğimi matematikleştirme ve oluşturma süreçlerine yönelik araştırma yapılmıştır.

Lise ve üniversite yıllarında eğim kavramında ve eğimin önkoşul kabul edildiği türev kavramında yaşanan güçlükler, eğimin formal anlamda ilk olarak karşılaşıldığı sekizinci sınıf düzeyindeki öğrenilme sürecinin incelenmesi gereğini ortaya koymaktadır. Sekizinci sınıf öğrencilerinin RME yaklaşımına dayalı olarak desenlenen bir öğretim sürecinde eğimi matematikleştirme süreçlerinin ortaya konması ile alan yazında önemli bir boşluğun doldurulduğu düşünülmektedir. Bunun yanında RME'de informal bilgilerin öğrenme sürecine yansıtılması, matematikleştirme becerilerinin ortaya konması, matematikleştirme sırasında öğrenciler tarafından geliştirilen modellerin gelişimi ve bu modellerin kavram oluşumuna etkisi gibi birçok konuda bilgi sahibi olunması açısından da bu araştırma önemli görülmektedir.

Asiala ve diğerleri (1997)' nın türev kavramının oluşturulmasının incelenmesine yönelik APOS teorik çerçevesinde yaptıkları araştırmalarında eğimin, türevin oluşturulması için önkoşul bilgilerden biri olduğu sonucuna varmıştır. Zandieh (2000) de türev kavramının oluşturulmasına yönelik ortaya koyduğu teorik çerçevesinde hem eğim hem de eğimin farklı bir yorumu olan değişim oranı kavramlarının türevin anlaşılabilmesi için bireyin zihninde var olması gerektiğini ileri sürmüştür. Eğim' in kavramsallaştırılması sırasında zihinde oluşan bilişsel yapıların ortaya konması eğimin öğrenilmesinin nasıl gerçekleştiği hakkında derinlemesine bilgi sağlayacaktır. Alan yazında eğimin oluşturulma sürecinin APOS teorik çerçevesinde ele alındığı bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bu tez çalışması eğim kavramının oluşturulma sürecinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi açısından ilk olmuştur. Öğrencilerin eğim kavramını öğrenme sürecinin APOS çerçevesinde ortaya konması, öğretmenlerin, kavramsal öğrenmenin gerçekleşmesi amacına dayalı olarak desenleyecekleri öğretim sürecini daha etkili ve verimli planlamasına, yürütmesine ve değerlendirmesine olumlu katkı sağlaması açısından da önemli görülmüştür.

RME yaklaşımına dayalı olarak yürütülen bir öğretim sürecinde farklı hazırbulunuşluklara sahip öğrencilerin APOS teorik çerçevesinde kavramsal öğrenme düzeylerinin belirlenmesi temelinde bir araştırmaya rastlanmamıştır. Bu araştırma RME ve APOS' un birlikte ele alınması açısından da özgün bir değer taşımaktadır.

Sınırlılıklar

Bu araştırma;

- Matematik dersi cebir öğrenme alanı denklemler alt öğrenme alanında bulunan “eğim” ile,

- 2013-2014 öğretim yılı, İnegöl Fenerbahçeliler Derneği Hamamlı Ortaokulu 8-A sınıfında öğrenim gören 16 öğrenci ve bu öğrencilerden klinik görüşmeler için seçilen 5 öğrenci ile sınırlıdır.

Sayıltılar

- Öğretim sürecinde tüm öğrenciler, sahip oldukları bilgi ve becerileri gerçekten ortaya koymuşlardır.

- Öğrenme süreci ve klinik görüşmelerde ortaya çıkan gürültü, dikkat dağınıklığı, can sıkılması gibi beklenmeyen durumlar araştırmanın amacını olumsuz bir şekilde etkileyecek boyutta olmamıştır.

- Klinik görüşmelerde katılımcılar kendilerini rahat hissetmişler veyabancılık çekmeden tüm bildiklerini ortaya koymuşlardır.

İKİNCİ BÖLÜM

YÖNTEM

Bu bölümde araştırma modeli, araştırmanın örneklemini oluşturan katılımcılar, araştırmada kullanılan veri toplama araçları, öğretim sürecinin ayrıntılı anlatımı ve elde edilen verilerin toplanması ve analizine yönelik açıklamalar yer almaktadır.

Araştırmanın Modeli

Sekizinci sınıf öğrencilerinin RME yaklaşımına dayalı olarak desenlenen bir öğretim sürecinde eğim kavramını oluşturma süreçlerinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi amaçlanan bu araştırmada öğrencilerin bu çerçevede öğrenme düzeylerini belirlemenin yanı sıra matematikleştirme becerilerinin de araştırılması amaçlanmıştır. Nitel araştırmaların süreci anlama, açıklama ve yorumlama açısından etkili bir yöntem (Strauss ve Corbin, 1998) oluşundan dolayı bu araştırma da nitel olarak desenlenmiştir. Güven (2004)' e göre nitel araştırma, çalışmanın çeşitli boyutları arasındaki içsel bağıntılarının araştırmacı tarafından yönetilmesi ile ortaya çıkan verilerin analizini kapsayan diyalektik bir süreçtir. Nitel olarak desenlenen araştırmalarda doğal ortam önemlidir. Nitel araştırma, gerçekçi ve bütüncül bir şekilde doğal ortamda ortaya konulan algıların ve olayların izlendiği bir süreci temel alan araştırma yöntemi olarak tanımlanmaktadır (Yıldırım ve Şimşek, 2005).

Nitel olarak desenlenen bu araştırmanın verileri, aynı zamanda dersin öğretmeni olan araştırmacı tarafından toplanıp analiz edildiğinden ve katılımcıların bir matematiksel kavrama ilişkin bilişsel yapıları araştırıldığından çalışmanın yöntemi, bir nitel araştırma yöntemi olan öğretim deneyi (teaching experiment) (Cobb ve Steffe, 1983) olarak belirlenmiştir. Öğretim deneyi betimleme ve yorumlamalar doğrultusunda bir model oluşturulması için fırsat sağlayan etkili bir tekniktir (Wood, Cobb, ve Yackel, 1990). Kelly ve Lesh (2000)' in belirttiği gibi öğretim deneyi, matematik ve fen eğitiminde araştırmanın karakteristiğini açıkça ortaya koymaya en elverişli araştırma tipi olarak kabul edilmektedir. Cobb ve Steffe (1983) ise öğretim deneyinin, aynı zamanda öğretici olan araştırmacı ve katılımcı grubu arasındaki bir karşılıklı etkileşim olduğunu öne sürer. Öğretim deneyi bir bireyin ya da bir kavramın bir süreç boyunca gelişiminin incelenmesine fırsat verir (Steffe, Thompson ve Glasersfeld, 2000). Cobb ve Steffe (1983), katılımcıların matematiksel bilgilerini açığa çıkarmayı amaçlayan çalışmaların öğretim süreci içermesi gerektiğini belirtir. Bu araştırmada da öğrencilerin eğimi matematikleştirme ve bilişsel bir yapı olarak oluşturma süreçlerinin ayrıntılı incelenmesi amacıyla bir öğretim deneyi desenlenmiştir.

Katılımcılar

Araştırmanın katılımcıları, araştırmacının matematik öğretmeni olarak çalıştığı Bursa ilinin İnegöl ilçesi Hamamlı köyündeki İnegöl Fenerbahçeliler Derneği Hamamlı Ortaokulu sekizinci sınıf öğrencileri arasından amaçlı örnekleme (Karasar, 2008) yoluyla seçilmiştir. Amaçlı örnekleme, zengin veri sağlayacağı düşünülen durumların, olayların açıklanması, yorumlanması ve detaylı incelenmesi amacıyla seçilmiştir (Yıldırım ve Şimşek, 2005, s. 107).

Öğretim başlamadan önce, alanyazın taramasından ve araştırmacının deneyimlerinden eğim kavramı için başlıca önkoşul bilgilerin doğru denklemi, oran-orantı, bağımlı-bağımsız değişken olduğu sonucuna varılmış ve bu önkoşul bilgilere yönelik bir açık uçlu test geliştirilmiştir. İnegöl Fenerbahçeliler Derneği Hamamlı Ortaokulunda sekizinci sınıfta öğrenim gören 16 öğrenciye uygulanan bu test EK 1'de verilmiş ve detaylı açıklaması veri toplama araçları başlığı altında yapılmıştır. Açık uçlu testten elde edilen sonuçlar amaçlı örneklemde ölçüt olarak kullanılmış ve bu ölçütler doğrultusunda öğrenciler bilgi düzeyleri, güçlük veyanılgılarına göre beş gruba ayrılmıştır. Bu ölçütlerin öğrenci performanslarının da ortaya konduğu ayrıntılı açıklaması bulgular başlığı altında verilmiştir. Elde edilen her bir gruptan, aynı zamanda öğretmen olan araştırmacının iletişim becerilerinde sıkıntı yaşamadığını düşündüğü birer öğrenci katılımcı olarak seçilmiştir. Öğretim sürecinde matematikleştirme süreçlerinin incelenmesi amacıyla farklı hazırbulunuşluklara sahip bu beş öğrenciye odaklanılmış ve eğim kavramını oluşturma sürecindeki bilişsel gelişimlerine yönelik derinlemesine veri toplamak amacıyla klinik görüşmeler bu öğrencilerle gerçekleştirilmiştir.

Veri Toplama Araçları

Nitel araştırmalarda araştırmacı küçük bir grup insanla konuşarak ifadelerini derler, çeşitli belgeler toplar ve davranışları gözlemler (Glesse, 2012). Nitel olarak desenlenen bu araştırmada veri toplama araçları öğrencilerin önkoşul bilgilerini ortaya koymaya yönelik geliştirilmiş olan açık uçlu test, klinik görüşme, araştırmacı günlükleri ve öğrencilerin ders içerisinde kullandıkları bireysel ve grup çalışma kâğıtları olarak belirlenmiştir. Araştırmanın başında geliştirilmiş olan açık uçlu test öğrencilerin önkoşul bilgilerini ölçmek ve katılımcıları seçmek amacıyla uygulanmış, öğretim süreci boyunca öğrencilerin bilişsel gelişimlerini izleyebilmek amacıyla katılımcılarla klinik görüşmeler yapılmış, ayrıca araştırmacı günlükleri ve öğrencilerin ders içerisinde kullandıkları bireysel ve grup çalışma kağıtları da veri toplama araçları olarak kullanılmıştır. Araştırmada derinlemesine bilgi veren temel verilerin toplanmasında ise özel bir görüşme yöntemi olan ve matematiksel düşünme üzerine psikolojik araştırmalarda sıkça kullanılan klinik görüşme tekniği (Ginsburg, 1981) kullanılmıştır. Bu veri toplama araçlarına ait açıklamalar aşağıda ayrı başlıklar altında verilmiştir.

Açık-Uçlu Test

Açık-uçlu sorular içeren bir test, bireyin sahip olduğu anlamlı bilgileri herhangi bir sınırlama olmaksızın ortaya koymasına olanak verir. Bu araştırmada öğretimden önce, alanyazın taraması ve aynı zamanda öğretmen olan araştırmacının deneyimleri doğrultusunda eğim için önkoşul olduğu sonucuna varılan aşağıdaki kavramlara yönelik bir açık-uçlu test geliştirilmiştir.

- Oran-orantı
- Bağımlı-bağımsız değişken
- Doğru denklemi

Geliştirilen açık uçlu testin kapsam geçerliliğinin sağlanması için iki uzmanın görüşüne başvurulmuş ve henüz test uygulanmadan önce bağımlı-bağımsız değişkene yönelik sorulardan biri, oran orantıya yönelik sorulardan ikisi kaldırılmış, doğru denklemine yönelik sorulardan üçü ise revize edilmiştir. Daha sonra açık uçlu testin pilot uygulaması Edirne ilinin Havsa ilçesinde yer alan bir devlet okulunda sekizinci sınıf öğrencileri üzerinde gerçekleştirilmiştir. Pilot uygulamanın ardından elde edilen veriler birinin araştırmacı olduğu iki alan uzmanı tarafından kodlama yoluyla nitel olarak analiz edilmiştir. Uzmanların kodlamalarının %94 oranında tutarlı oluşu ile testin güvenirliği sağlanmıştır (Miles ve Huberman, 1994).

Araştırmacı Günlükleri ve Çalışma Kağıtları

Öğrenme sürecinin betimlenmesinde kullanılan araştırmacı günlüğü, araştırmacının hem ders sırasında hem de derslerden sonra tuttuğu notlardan oluşmaktadır. Araştırmacı bizzat öğretmen olarak kendisinin yürüttüğü öğretim sürecinde, ders akışını bozmamak amacıyla gerekli ve önemli gördüğü tüm notları karalama şeklinde hızlıca not almış ve daha sonra bu notları günlük olarak dijital ortamda kayıt altına almıştır. Katılımcıların diğer arkadaşlarıyla etkileşimi hakkında derinlemesine bilgi alınabilmesi amacıyla diğer öğrencilere ait davranış, bilgi ve hareketler de günlükte not edilmiştir. Bunun yanında sınıf düzeni, grup içi ve gruplar arası tartışma süreçleri gibi genel sınıf ortamı da günlüklerde yerini almıştır.

RME' nin etkileşim ilkesine uygun olarak oluşturulan heterojen gruplarda, grup içi ve gruplar arası tartışmaların, bireysel performansların, varılan genellemelerin veyapılan sembolleştirmelerin kısaca bağlam problemleriyle başlayan matematikleştirme aktivitelerinin öğretim süresi boyunca not edildiği bireysel ve grup çalışma kağıtları her iki derslik periyodun ardından araştırmacı tarafından toplanmıştır. Öğrencilere bireysel çalışma kağıtlarına kendilerinin görüşleri ve erişilerini; grup çalışma kağıdına ise grubun ve gruplar arası tartışmalar sonucu ulaşılan erişilerin yazılabileceği açıklanmış ve bildikleri, düşündükleri, her şeyi yazıp tartışabilecekleri bir ortam yaratılarak matematikleştirme için fırsat sağlayan bir öğretim süreci yürütülmeye çalışılmıştır. Bireysel aktiviteler, grup çalışmaları, gruplar arası tartışmalar ve yorumlar "RME yaklaşımına göre desenlenmiş öğretim süreci" başlığı altında ve bulgularda ayrıntılı bir şekilde verilmiştir. Bireysel ve grup çalışma kağıtları ile araştırmacı günlükleri özellikle eğimi matematikleştirme sürecinin betimlenmesinde önemli rol oynamıştır.

Klinik Görüşme

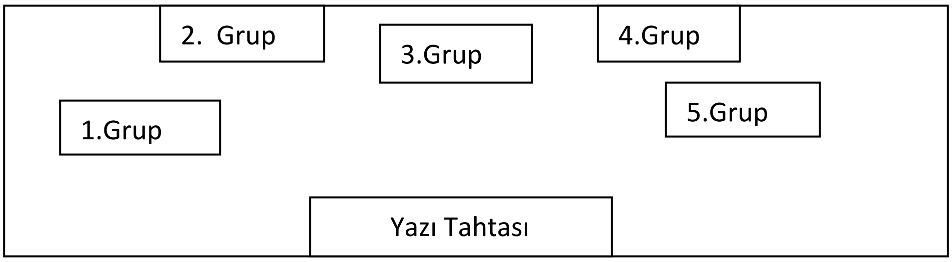
Matematiksel düşünme üzerine yapılan araştırmaların bilişsel süreçlerin keşfi, bilişsel süreçlerin tanımlanması ve yeterliliğin değerlendirilmesi olmak üzere üç temel amacı olduğunu ileri süren Ginsburg (1981), yapmış olduğu teorik analize göre bu amaçlara en uygun veri toplama aracının klinik görüşme olduğunu belirtmektedir. İlk olarak Piaget tarafından geliştirilip uygulanan klinik görüşme metodu, öğrencilerin zihinlerindeki zenginliği keşfetmek, zihindeki temel aktiviteleri yakalamak ve bilişsel becerileri değerlendirmek amacıyla matematik eğitimindeki birçok araştırmada sıklıkla kullanılmaktadır (Clement, 2000; Baki, Karataş ve Güven, 2002). Karmaşık bilişsel yapının tanımlanması ve betimlenmesi için standart testler ya da doğal gözlemlerin yetersiz kaldığını belirten Ginsburg (1981), Piaget' nin de matematiksel düşünmeye yönelik araştırmalarında klinik görüşmeyi tercih ettiğini belirterek, bu tekniğin etkililiğini vurgulamaktadır. Bu araştırmada da öğrencilerin matematikleştirme süreci sırasında akıl yürütme, yansıtma, ifade etme, açıklama, modelleme gibi bilişsel süreçleri hakkında derinlemesine bilgi verebilmesi amacıyla öğretim süresi boyunca birebir klinik görüşmeler gerçekleştirilmiştir. Klinik görüşme sorularının işlerliğinden emin olunması amacıyla öncelikle farklı hazırbulunuşluklara sahip üç kişilik bir grup öğrenciyle pilot uygulama yapılmıştır. Görüşmeden örnekler iki uzman tarafından incelenmiş ve asıl uygulamanın bu görüşme sorularıyla yapılabileceğine karar verilmiştir. Klinik görüşme soruları EK 2' de verilmiştir.

Klinik görüşmelerde öğrencinin bilişsel yapılarının ortaya çıkması amacıyla öğrenci bir problem durumuyla karşılaştırılabilir ve bu sırada derinlemesine bilgi verebilecek açık uçlu sorular sorularak düşüncelerini rahatça ifade edebileceği bir ortam yaratılır. Verilerin ses kayıt cihazı, kamera, gözlemci ya da görüşmeci notu ve öğrenci çalışmaları ile toplandığı klinik görüşmelerde birbiriyle ilişkili problem durumlarında görüşmeci tarafından sağlanan ipuçları ve yöneltilen keşfedici ve düşündürücü sorularla derinlemesine bilgi sağlayan veriler elde edilebilir. Öğrencinin vereceği cevapların doğru ya da yanlışlığından ziyade matematiksel olarak ortaya koyduğu performans, diğer bir deyişle süreç önemlidir. Klinik görüşmelerin rutin olmayan, öğrencilerin bilişsel süreçlerini ortaya çıkarma olanağı veren problemlerle donatılmış ve sesli düşünme protokollerine göre düzenlenerek yürütülmüş olması onun etkililiğini hedeflenen amaç doğrultusunda arttırmaktadır (Clement, 2000). Bu araştırma boyunca gerçekleştirilen klinik görüşmelerde de bağlam problemlerinden yola çıkılarak açık uçlu sorular sorulmuş, akıl yürütme ve yorumlamaya yönelik ipuçları ve uyaranlarla süreç desteklenmiş ve sesli düşünme için uygun bir ortam yaratılmıştır. Bunun yanında katılımcılara tükenmez kalem ve çizgisiz kağıt verilerek düşündükleri veyardımcı olarak gördükleri her türlü çizim, yazı, karalamayı yapabilmelerine fırsat verilmiştir. Tükenmez kalem ile, yanlış da olsa, ortaya koydukları performansları silmeleri engellenmiş ve böylece bilişsel süreçlerine yönelik daha derin bilgi edinilmesi sağlanmıştır.

RME Yaklaşımına Göre Desenlenmiş Olan Öğretim Süreci

Matematik öğrenmenin bir sosyal aktivite olarak düşünüldüğü RME yaklaşımının temel karakteristiklerden biri olan *etkileşim ilkesi (interactiviy principle)*' ne uygun bir öğretim sayesinde öğrenciler gerek grup gerekse bireysel informal strateji ve keşiflerini paylaşma fırsatı bulur (Heuvel-Panhuizen, 1998). Bu araştırmada da RME' ye göre desenlenen öğretim sürecinde öğrencilerin bilgi, güçlük veyanılgılarına göre heterojen gruplar oluşturulmuş ve böylece onlara hem grup içi hem de gruplar arası tartışmalarla sahip oldukları informal bilgi, strateji ve keşiflerini paylaşma, savunma ve tartışma fırsatı sağlanması amaçlanmıştır. Araştırma öncesinde geliştirilen açık uçlu testten elde edilen veriler doğrultusunda doğru denklemi, oran-orantı ve bağımlı-bağımsız değişken ile ilgili bilgi, güçlük veyanılgılarına göre beş gruba ayrılan 16 öğrenci, aynı zamanda sınıfın öğretmeni olan araştırmacının deneyimlerine göre yine beş heterojen grup olarak düzenlenmiştir. Araştırmanın katılımcıları olarak belirlenen beş öğrencinin farklı gruplarda yer almasına dikkat edilmiştir. Ayrıca katılımcıların kendi gruplarında, kullandıkları stratejileri, yaptıkları yorumları, vardıkları sonuçları ve ulaştıkları keşifleri not eden yazman olmaları sağlanmıştır. Bunun yanında gruplar arası tartışmalar şeklinde geçen tüm sınıf (whole-class) tartışmalarında grubun sözcülüğünü yine araştırmanın katılımcılarının yapmasına karar verilmiştir. Katılımcıların, kendi gruplarında hem yazman hem sözcü olarak yer almalarının, onların eğimi matematikleştirme ve oluşturma süreçlerinin izlenmesi açısından olumlu katkı sağlayacağı düşünülmüştür.

Matematik, günlük yaşam durumlarıyla ve öğrencilerin yaşamıyla ilişkili olmalıdır (Zulkardi, 1999). Bu sebeple RME' ye dayalı öğretim sürecinde öğrenciler için gerçek olan ya da gerçek olabilecek bir bağlam ile derse başlanması onların informal bilgi ve çözüm stratejilerini öğrenme sürecine çağırmaları açısından önemli görülmektedir. Bu araştırmada planlanan öğretim sürecinde de eğim ile ilgili toplam yedi ana gerçek yaşam bağlamı hazırlanmıştır (EK 3). Bu bağlamlar, ikişer saatlik periyotlar halindeki üç aşamadan oluşan ve toplam altı saat olarak planlanan öğretim sürecinde, ilk iki saatte dördü, sonraki iki saatte ikisi ve son iki saatte ise biri kullanılacak şekilde dağıtılmıştır. Bağlamlar sırası geldiğinde beyaz tahtaya projeksiyonla yansıtılmış ve tahtadaki görselin de kullanılmasıyla öğrenciler için tartışmaların daha anlaşılır olması sağlanmıştır. Öğretim süresi boyunca bağlam durumlarının yer aldığı kâğıtlar çoğaltılarak zamanı geldiğinde her öğrenciye verilmiş ve bunun yanında her gruba yeterli beyaz kâğıt verilerek onları da kullanabilecekleri belirtilmiştir. Ayrıca grup içi tartışma ile varılan genellemelerin, kullanılan stratejilerin, geliştirilen modellerin ve bunun gibi düşündükleri ve savundukları herşeyin, grup çalışma kâğıdı olarak kullanacakları beyaz kâğıda yazman tarafından not edilmesi istenmiştir. Öğretimin her anında düşünme ve tartışma ortamı sağlanmış, tartışmalar önce grup içi ve daha sonra gruplar arası olmak üzere yürütülmüştür. Öğretim süreci boyunca öğrencilere hiç bir şekilde belirli bir stratejinin, genellemenin kullanılması dayatılmamış, uzunluklara istedikleri etiket kelimeyi verebilecekleri söylenerek, kendi informal ya da formal bilgi ve stratejilerini kullanmaları teşvik edilmiştir. Onlar için anlamlı gelen etiketlerin kullanılmasının, oluşturmaları hedeflenen kavramsal bilgiyi destekleyeceği düşünülmüştür. Öğrencilerin öğretim sürecinde kullandıkları gerek bireysel gerekse grup çalışma kağıtları her dersin sonunda araştırmacı tarafından toplanmıştır. Öğretim süreci boyunca grupların tahtayı görebilecekleri şekilde bir sınıf düzeni oluşturulmuş ve bu düzen şekil 6' da verilmiştir.



Şekil 6: Öğretim Sürecindeki Sınıf Düzeni

Öğretimin ilk iki saatlik periyodunda öğrencilerin günlük yaşamda sıklıkla karşılaştığı bir bisikletlinin çıktığı bir yokuş bağlamı ele alınmış ve bu bağlam durumunda bireyde eğimi çağırma ve yorumlama ihtiyacı doğması sağlanmıştır.

Eğim ile ilgili günlük yaşamdan edinilen informal bilgi ve stratejilerin öğretim sürecine yoğun bir şekilde çağırılabilmesi için araştırmacı, herkesin önce bireysel olarak düşündüğü herşeyi kağıdına yazabileceğini vurgulamış ve daha sonra da grup olarak yazdıklarını tartışarak çıkış ve varış noktalarını nedenleriyle birlikte grup çalışma kağıdına not etmelerini istemiştir. Dersin başında araştırmacı tarafından hiç kimsenin yazdıklarından dolayı eleştirilmeyeceği, gruplar arasında herhangi bir yarışmanın olmadığı vurgulanmış, grup içinde işbirliğinin ve sınıf tartışmalarıyla herkesin farklı görüşlerini ortaya koyarak birbirileri ile fikir alışverişlerinin önemi anlatılmıştır. Gerçek yaşamdan bir bağlam durumunda eğim hakkındaki informal bilgilerini sürece çağıran öğrenciler, eğimi kendi kullandıkları ona eşdeğer diklik, yokuş, bayır gibi kelimeler doğrultusunda yorumlayarak fazla veya az olarak değerlendirmişlerdir. Eğimi ölçülebilecek bir özellik olarak görmeye başlaması beklenen öğrencilerden eğimin bağlı olduğu değişkenleri keşfetmeleri için arka arkaya dağ eteğinde yürüyerek tepe noktasına çıkma temalı iki bağlam durumu daha verilmiş ve yine grup içi ve gruplar arası sınıf tartışmalarıyla yatay matematikleştirme yapmaları için fırsat verilmiştir.

İlk iki derste öğrencilerin doğrusal bir görselin eğimi ile yükseklik (dikey mesafe), yatay mesafe (taban), açı, uzunluk (eğimi yorumlanan yolun, dağ eteğinin vb. uzunluğu) gibi değişkenler arasındaki ilişkiyi keşfetmeleri amaçlanmıştır. Daha sonraki iki derste aynı doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmediğini fark etmelerine ya da informal deneyimlerinden bu bilgiyi çağırmalarına fırsat veren bağlam durumunda yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişkinin eğimi verdiğini keşfetmelerini sağlayabilecek tartışma ortamı için yönlendirici sorular hazırlanmıştır.

Öğretim sürecinde eğimin yüksekliğin yatay mesafeye oranı ile elde edildiğinin öğrenciler tarafından keşfedilmesi en kritik noktalardan birisi olarak düşünülmüştür. Bu oran hiçbir şekilde doğrudan formül olarak verilmemiş ve bu oransal ilişkinin eğimi verdiğinin keşfedilmesine kadar sabırla beklenilerek yönlendirici sorularla tartışmalar yönetilmiştir. Daha sonra grup içi ve gruplar arası tartışmalarla günlük bir yaşam durumunu matematikleştirerek eğimi bir oran olarak yapılandırmaları beklenen öğrencilerle eğim hesaplaması gerektiren sorular çözülmüş ve böylece onların dikey matematikleştirme sürecine girmelerine olanak sağlanmıştır. Ayrıca eğim kavramını oluşturma süreçlerinde kopukluk olmasını önlemek amacıyla öğrencilere eğimin fiziksel ve geometrik yorumu ile ilgili sorular içeren ders ve çalışma kitaplarından (Can Yayınları, 2013, DK. s.199 ve ÇK. s.131) ödev verilmiştir. Son iki derste ise doğrusal ilişkinin grafikleştirilerek gösterilmesini sağlayan bir yaylaya çıkma bağlamı ile derse giriş yapılmış ve bu bağlamda koordinat düzleminde verilen bir doğrunun eğimini nasıl hesaplayacaklarını keşfetmeleri amaçlanmıştır.

Öğrencilerde başlangıçta yatay matematikleştirme yapma ihtiyacı doğuran bu bağlam daha sonra koordinat düzlemindeki bir doğrunun eğimi, üzerindeki iki noktasının koordinatları verilen bir doğrunun eğimini hesaplama ve bu doğru için y_2-y_1/x_2-x_1 gibi bir genellemeyi keşfetme gibi onlara dikey matematikleştirme yapma fırsatı veren etkinliklerle (EK 3) devam etmiştir. Öğrencilere öğretim süreci boyunca araştırmacı tarafından doğrudan bilgi kesinlikle verilmemiş, onlardan gelen dönütlere göre gruplar arası tartışma ile keşifleri onların yapmaları sağlanmıştır. Son iki dersin sonunda önceden hazırlanan koordinat düzlemindeki doğrunun eğimi ile ilgili sorular içeren ev ödevi verilmiştir (EK 3). Verilen ödevlerin kontrolünün araştırmacı tarafından yapılması öğrencilerin bu ödevleri ciddiyetle yapmalarında motive edici bir güç olmuştur.

Verilerin Toplanması ve Analiz

Araştırmanın verileri, öncelikle öğretim süreci öncesindeki açık uçlu test ile ve daha sonra öğretim sürecindeki araştırmacı günlükleri, çalışma kağıtları ve klinik görüşmeler ile toplanmıştır. Bu sebeple araştırmadaki verilerin toplanması ve analiz edilmesi süreci, öğretim öncesi ve öğretim süreci olmak üzere iki başlıkta anlatılacaktır.

Öğretim Öncesi Veri Toplama ve Analiz

Geliştirilen açık-uçlu testin sırasıyla bağımlı-bağımsız değişken, oran-orantı ve doğru denklemi ile ilgili olan kısımları 13.01.2014-15.01.2014 tarihleri arasında 3 güne yayılarak uygulanmıştır. Birer ders saati (40 dk) süre verilerek uygulanan testlerden önce öğrencilere kağıt üzerinde bildikleri her şeyi yazabilecekleri ve bu sorularda doğru sonuca ulaşmaktan ziyade önemli olanın ne bildiklerini göstermek olduğu vurgulandı. Bu vurgulamanın yanı sıra araştırmacının bizzat kendisinin bu testleri uygulaması onların soruların çözümü için güdülenmesini arttırmış ve bununla beraber herhangi bir problem yaşadıklarında birinci elden yardım isteyebileceklerini bildiklerinden daha rahat bir ortam oluşması sağlanmıştır. Açık uçlu test ile toplanan veriler içerik analizi tekniği (Yıldırım ve Şimşek, 2005) ile yaklaşık bir aylık bir sürede analiz edilmiştir. İçerik analizinde Yıldırım ve Şimşek (2005) ‘ e göre dört aşama bulunmaktadır:

- Elde edilen nitel verilerin işlenmesi ve verilerin kodlanması
- Temaların bulunması
- Kodların ve temaların düzenlenmesi
- Bulguların tanımlanması ve yorumlanması

Açık uçlu test ile elde edilen verilerin analizi de benzer bir süreç izlenerek yapılmıştır.

Öğretim Sürecinde Veri Toplama ve Analiz

Açık-uçlu testin analizinden elde edilen sonuçlar doğrultusunda ve aynı zamanda sınıfın öğretmeni olan araştırmacının deneyimleri temelinde oluşturulan grupların sınıfta oturma planı herkesin tahtayı görebileceği şekilde düzenlenmiş ve dersin işlenişi ile ilgili grup içi ve gruplar arası tartışma, bireysel ve çalışma kağıtlarına not tutma, özgürce tüm düşünce, yorum ve stratejilerini kullanabilme, herkesin görüşüne saygı duyma gibi konularda gerekli uyarılar yapıldıktan sonra öğretim sürecine geçilmiştir. Öğretim sürecinin her anında öğrencilerin bireysel çalışma kağıtları ve grup çalışma kağıtları önlerinde bulunmuş ve her dersin sonunda bu kağıtlar araştırmacı tarafından toplanmıştır. Ödev olarak verilen görevler ise öğrencilerde kalmıştır. Ders sürecinde daha çok, gruplarında sözcü veyazman olan beş katılımcı üzerine odaklanılmış ve varılan genellemeler, kullanılan stratejiler, grup içindeki tartışmalar ve yorumlar, gruplar arası tartışmalarda düşüncelerin savunulması sırasında ileri sürülen görüşler, gruplar arası tartışmalardan sonra yorumlarda, genellemelerde, keşiflerde yapılan değişiklikler hem ders içerisinde hem de dersten sonra araştırmacı tarafından tutulan günlüğe kaydedilmiştir. Araştırmada derinlemesine bilginin en verimli alınabileceği düşünülen klinik görüşmeler ise öğretim sürecine yayılmış olarak, her iki derslik periyodun ardından her katılımcı ile birebir gerçekleştirilmiştir. İlk iki görüşme hemen derslerin bitimini takip eden 2-3 gün içinde yapılırken, son görüşme ise derslerin bitiminden 10 gün sonra yapılmıştır. Öğretim süreci ve klinik görüşmelerin takvimi Tablo 1’ de sunulmuştur.

Tablo 1: Öğretim Sürecinde Veri Toplama Takvimi

Etkinlik	Tarih	Süre (dk)
İlk iki derslik öğretimin gerçekleştirilmesi	01.04.2014	80 (40+40)
Klinik Görüşmeler	03.04.2014	min. 05.55 - max. 12.45
İkinci iki derslik öğretimin gerçekleştirilmesi	04.04.2014	80 dk (40+40)
Klinik Görüşmeler	07.04.2014	min. 09.49 - max. 24.08
Son İki Saatlik Öğretimin Gerçekleştirilmesi	08.04.2014	80dk (40+40)
Klinik Görüşmeler	18.04.2014	min. 21.20 - max. 42.42

Klinik görüşmelerin tamamı okul müdür yardımcısı odasında sessiz bir ortamda gerçekleştirilmiş ve tüm görüşme ses kayıt cihazı ile kayıt edilmiştir. Ayrıca araştırmacı, ses kaydında daha sonradan anlaşılamayabilecek ‘burası, buradan, şu’ gibi kelimeler kullanıldığında, belirtilmek ve anlatılmak isteneni hemen görüşme formu üzerine ya da araştırmacı günlüğüne kısa kısa not alarak oluşabilecek veri kaybını en aza indirmeye çalışmıştır. Ayrıca görüşme öncesinde öğrencilerden hem sözlü hem yazılı izin (EK 5) velilerden de yazılı izin (EK 4) alınmış ve ses kayıt cihazı ile görüşmelerin kaydedileceği belirtilerek daha önceden de söylendiği üzere verilerin araştırmacının yüksek lisans tezinde kullanılacağı belirtilmiştir. Yapılan her görüşmeden önce katılımcılardan bildiği her şeyi, kullandığı görsel destekleri, yaptıkları karalamaları kağıt üzerinde göstermelerinin ya da sözel olarak dile getirmelerinin önemli olduğu anlatılmış ve akıllarına takılan ya da anlamadıkları her şeyi sorabilecekleri vurgulanarak eleştirilme, sonuca ulaşamama, yanlış yapma gibi kaygıların önlenmesi ile görüşme için rahat ve samimi bir ortam oluşturulmuştur.

Ayrıca görüşme sırasında sesli düşünmenin, yaptıkları çözümleri ve kullandıkları stratejileri sesli bir şekilde anlatmalarının önemli olduğu vurgulanmıştır. Görüşmelerden elde edilen veriler tematik analiz (Glesse, 2012, s. 255; Green ve diğerleri, 2007) tekniği ile nitel olarak analiz edilmiştir. Tematik analizde araştırmacı veriler içinde tema ve örüntüler aramak amacıyla verileri kodlar ve daha sonra aynı biçimde kodlanmış tüm verileri okur ve özünde ne olduğunu bulmaya çalışır (Glesse, 2012, s.255). Green ve diğerleri (2007) ise tematik analiz sürecini dört aşamaya ayırarak anlatmıştır:

- Veriler içerisine dalış (İmmerson in the data): Görüşmelerin dökümü yapıldıktan sonra bu dökümler tekrar tekrar okunur ve gözden geçirilir. Böylece görüşme sanki tekrar yapılıyormuş gibi hayal edilir ve neler söylendiği ne amaçla söylendiği üzerine detaylı inceleme yapılması sağlanır.

- Kodlama Süreci (process of coding): Her bir görüşmeyi içeren bilgilerin ve tüm veri setinin incelenerek düzenlenmesi sürecidir. Dökümdeki her bir bölümü tanımlayan birer etiket olarak düşünülen kodların ortaya konması sürecinde araştırmacının her bir verinin ne anlam ifade ettiğini anlayabilmesi çok önemlidir. Kodlama süreci genellikle revize edilen çok sık geriye dönülebilen bir süreçtir.

- Kategoriler oluşturma (Creation of categories): Kodların birbirine bağlanabilme yollarını incelemek amacıyla veriler derinlemesine incelenir. Katılımcıların konuşmalarını araştırmadaki olaylar bağlamında kategorize etme yolları sağlayan ayrıntılı veri incelemesi sonunda kodların birbirine bağlanarak yerleştirildiği uygun kategoriler ortaya çıkar.

- Temaların belirlenmesi (İdentication of themes): Temaların oluşumu, bir dizi kategorinin betimlenmesinden öte artık araştırmanın amacına hizmet eden durumların bir yorumu ya da açıklamasına kayışı ifade eder. Temalar, hem teoriyle hem verilerle ilişkilendirilen açıklamaları, araştırma ile ilişkili teorik kavramlar temelinde genişletmeyi gerektirir.

ÜÇÜNCÜ BÖLÜM

BULGULAR ve YORUMLAR

Araştırmanın bu bölümünde öğretim süreci öncesinde uygulanan açık-uçlu test ile öğretim sürecindeki çalışma kağıtları, araştırmacı günlüğü ve bu süreçte gerçekleştirilen klinik görüşmeden elde edilen verilerin analizi ile ortaya çıkan bulgulara yer verilmiştir.

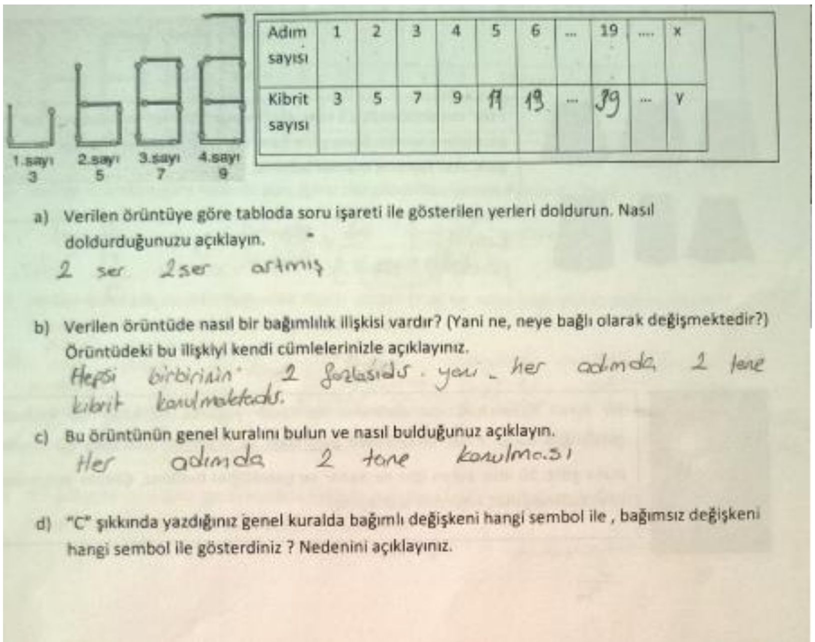
Açık Uçlu Testin Bulguları ve Oluşan Gruplar

Ortaya çıkan bulgular eğim kavramının oluşturulması için önkoşul olabileceği düşünülen bağımlı-bağımsız değişken, oran-orantı ve doğru denklemi olmak üzere üç başlık altında ele alınmış ve daha sonra bu bulgular doğrultusunda oluşan gruplara yer verilmiştir.

Bağımlı-Bağımsız Değişken

Uygulanan açık-uçlu testte tüm öğrencilerin, aynı zamanda şekil olarak da verilen bir sayı örüntüsünün (aritmetik dizi) adımlarını devam ettirerek yakın adımları bulabildikleri ve sözel olarak örüntünün nasıl devam ettiğini dile getirebildikleri görülmüştür. Ancak verilen örüntüde istenilen yakın veya uzak adımdaki terimleri bulma sürecinde öğrenciler yinelemeli (recursive) stratejiyi kullananlar ya da fonksiyonel düşünebilenler olmak üzere ikiye ayrılmışlardır. Yinelemeli düşünen öğrenciler, biri diğerine bağlı olarak değişen iki nicelik arasında ilişki kurmak yerine, yalnızca örüntüdeki sabit artıştan ya da azalıştan yola çıkarak genel bir kural bulma yolundadır (Warren, 2005). Buna karşılık fonksiyonel düşünebilen öğrenciler ise bağımlı ve bağımsız değişken (örüntülerde terim ile adım sayısı) arasında ilişki kurarak örüntünün istenilen adımındaki terimi bulabilir ve genel kurala ulaşabilir.

Yinelemeli stratejiyi kullanan öğrencinin çözüm sürecine ait bir görüntü



Adım sayısı	1	2	3	4	5	6	...	19	....	x
Kibrit sayısı	3	5	7	9	11	13	...	39	...	y

a) Verilen örüntüye göre tabloda soru işareti ile gösterilen yerleri doldurun. Nasıl doldurduğunuzu açıklayın.

2 ser 2ser artmış

b) Verilen örüntüde nasıl bir bağımlılık ilişkisi vardır? (Yani ne, neye bağlı olarak değişmektedir?) Örüntüdeki bu ilişkiyi kendi cümlelerinizle açıklayınız.

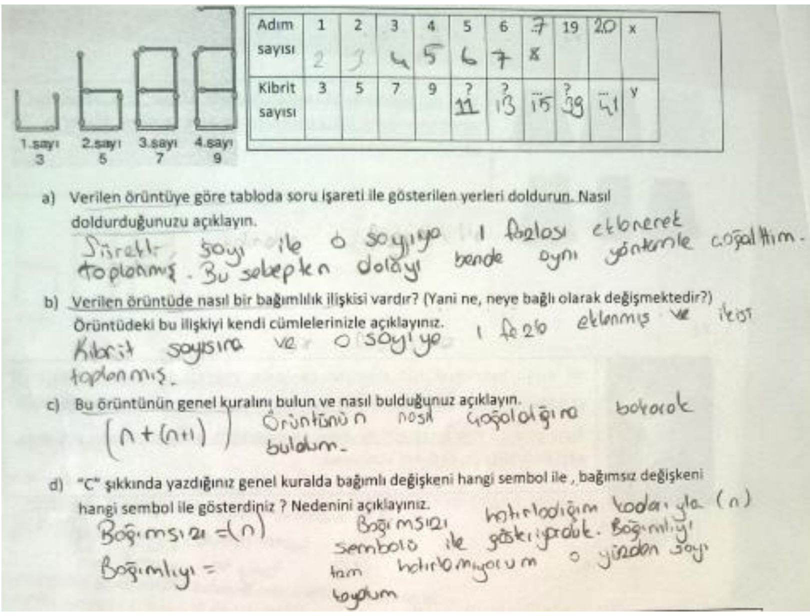
Hepsi birbirinin 2 fazlasıdır. yani her adımda 2 tane kibrit konulmaktadır.

c) Bu örüntünün genel kuralını bulun ve nasıl bulduğunuz açıklayın.

Her adımda 2 tane konulması

d) "C" şıkkında yazdığınız genel kuralda bağımlı değişkeni hangi sembol ile , bağımsız değişkeni hangi sembol ile gösterdiniz ? Nedenini açıklayınız.

Fonksiyonel düşünebildiği görülen bir öğrencinin çözüm sürecine ait bir görüntü



Adım sayısı	1	2	3	4	5	6	7	19	20	x
	2	3	4	5	6	7	8			
Kibrit sayısı	3	5	7	9	? 11	? 13	... 15	? 39	... 41	y

a) Verilen örüntüye göre tabloda soru işareti ile gösterilen yerleri doldurun. Nasıl doldurduğunuzu açıklayın.

Sürekli sayı ile o sayıya 1 fazlası eklenerek toplanmış. Bu sebepten dolayı bende aynı yöntemle çoğalttım.

b) Verilen örüntüde nasıl bir bağımlılık ilişkisi vardır? (Yani ne, neye bağlı olarak değişmektedir?) Örüntüdeki bu ilişkiyi kendi cümlelerinizle açıklayınız.

Kibrit sayısına ve o sayıya 1 fazla eklenmiş ve ikisi toplanmış.

c) Bu örüntünün genel kuralını bulun ve nasıl bulduğunuz açıklayın.

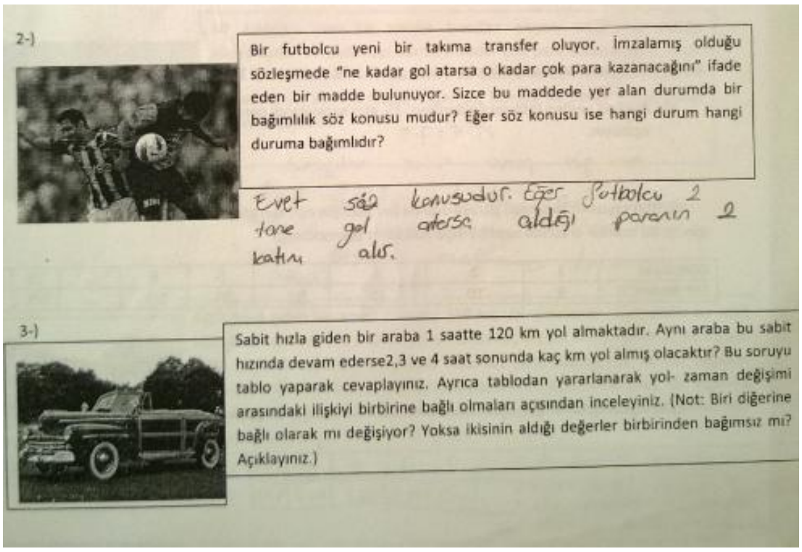
(n+(n+1)) Örüntünün nasıl çoğaldığına bakarak buldum.

d) "C" şıkkında yazdığınız genel kuralda bağımlı değişkeni hangi sembol ile , bağımsız değişkeni hangi sembol ile gösterdiniz ? Nedenini açıklayınız.

Bağımsızı =(n)
Bağımlıyı =

Bağımsızı hatırladığım kadarıyla (n) sembolü ile gösteriyorduk. Bağımlıyı tam hatırlamıyorum o yüzden sayı koydum.

Bu araştırmada bahsi geçen örüntüde yinelemeli stratejiyi kullanan öğrencilerin genel kurala ulaşamadıkları görülürken fonksiyonel düşünebilenlerin ise genel kurala ulaşmakta genel olarak başarılı oldukları görülmüştür. Bunun dışında yinelemeli strateji kullanan sekiz öğrenci kendi içinde, değişkenler arasında bağımlılığı hiçbir şekilde göremeyenler, sadece günlük yaşamdaki bir durumda bağımlılık ilişkisini görebilenler ve günlük yaşamın yanında sayısal verilere sahip iki değişken arasında da bağımlılık ilişkisini görebilenler olmak üzere üç gruba ayrılmıştır. Örneğin günlük yaşam durumundaki bağımlılık ilişkisini görebilen ancak sayısal verilere sahip iki değişken arasındaki bağımlılık ilişkisi hakkında herhangi bir yorum yapamayan bir öğrencinin cevap kağıdından bir görüntü aşağıda verilmiştir:



2-)

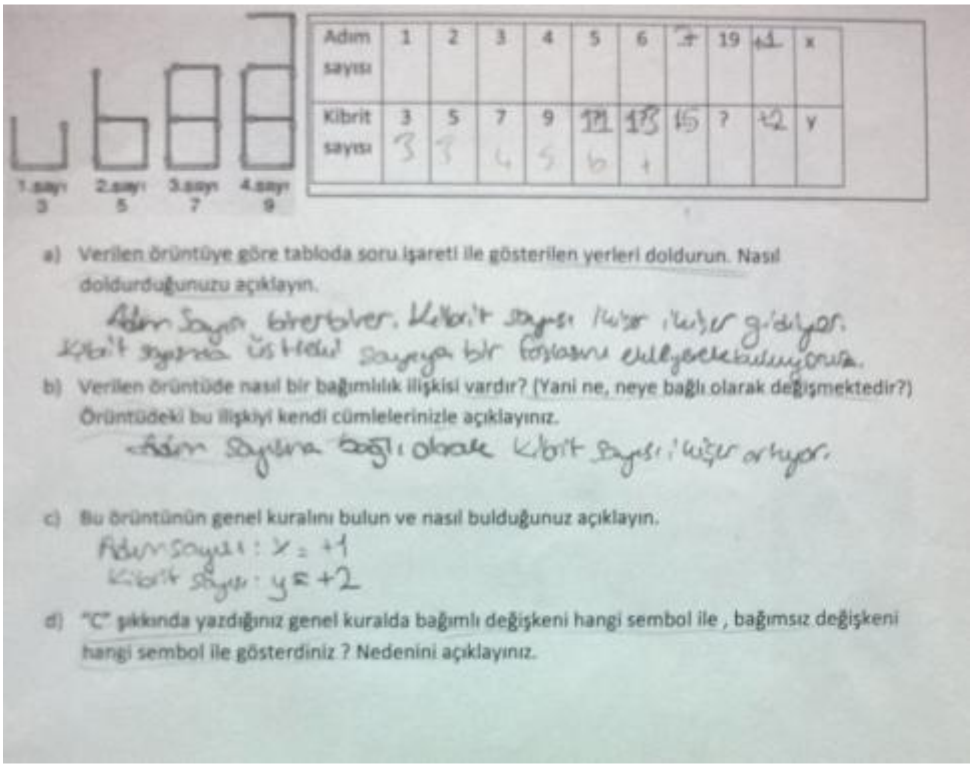
Bir futbolcu yeni bir takıma transfer oluyor. İmzalamış olduğu sözleşmede "ne kadar gol atarsa o kadar çok para kazanacağını" ifade eden bir madde bulunuyor. Sizce bu maddede yer alan durumda bir bağımlılık söz konusu mudur? Eğer söz konusu ise hangi durum hangi duruma bağımlıdır?

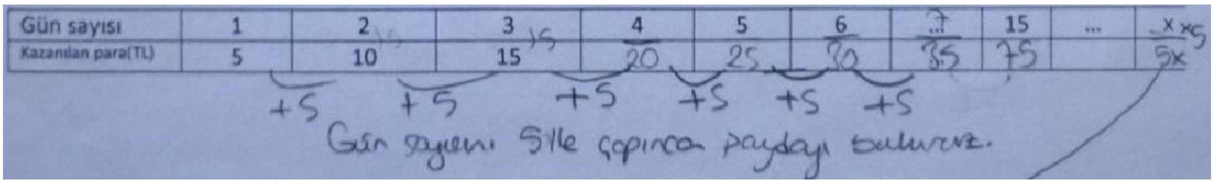
Evet söz konusudur. Eğer futbolcu 2 tane gol atarsa aldığı paranın 2 katını alır.

3-)

Sabit hızla giden bir araba 1 saatte 120 km yol almaktadır. Aynı araba bu sabit hızında devam ederse2,3 ve 4 saat sonunda kaç km yol almış olacaktır? Bu soruyu tablo yaparak cevaplayınız. Ayrıca tablodan yararlanarak yol- zaman değişimi arasındaki ilişkiyi birbirine bağlı olmaları açısından inceleyiniz. (Not: Biri diğerine bağlı olarak mı değişiyor? Yoksa ikisinin aldığı değerler birbirinden bağımsız mı? Açıklayınız.)

Fonksiyonel düşünebildiği görülen sekiz öğrenci ise sembolleştirmede sıkıntı yaşayanlar, sembolik olarak da genellemeye ulaşabilenler ve sembolik genellemeye ulaşmanın yanı sıra bağımlı-bağımsız değişken terimlerinin de farkında olanlar olmak üzere üç gruba ayrılmıştır. Örneğin; fonksiyonel düşünebildiği ancak sembolleştirmede sıkıntı yaşayabildiği görülen bir öğrencinin cevap kağıdından ilgili bölümler aşağıda verilmiştir:





Açık uçlu testten bağımlı-bağımsız değişkene yönelik sorulardan elde edilen verilerin analizi ile öğrencilerin bilgi, güçlük veyanılgılarına göre ayrılışları Tablo 2' de verilmiştir.

Tablo 2: Bağımlı-Bağımsız Değişkene Yönelik Açık Uçlu Testten Elde Edilen Verilerin Analizi Sonucu Ortaya Çıkan Ayrışma

Yinelemeli(recursive) stratejiyi kullananlar

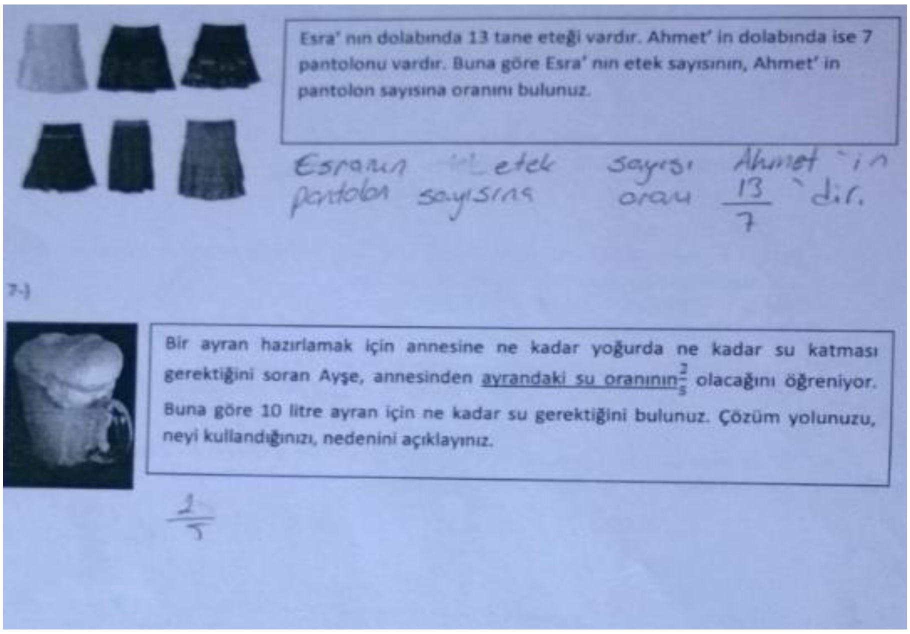
- Bağımlılık ilişkisini hiçbir zaman göremeyenler
- Sadece günlük yaşamdaki bir durumda bağımlılık ilişkisini görebilenler
- Günlük yaşamdaki bir durumun yanı sıra sayısal verilere sahip değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkisini de görebilenler

Fonksiyonel düşünebilenler

- Genellemede sembolleştirme sıkıntısı yaşayanlar
- Sembolik olarak genellemeye ulaşırken sıkıntı yaşamayanlar
- Sembolleştirmede sıkıntı yaşamamanın yanında bağımlı-bağımsız değişken terimlerinin de farkında olanlar

Oran-Orantı

Açık-uçlu testin oran-orantı ile ilgili kısmından elde edilen veriler analiz edildiğinde öğrencilerin oran kavramına tam olarak sahip olanlar ve kısmen sahip olanlar olmak üzere ikiye ayrıldığı görülmüştür. Oran kavramına kısmen sahip olduğu düşünülen altı öğrencinin verilen iki niceliği oranlarken her zaman doğru yapamadığı, ya da iki niceliğin oranı verildiğinde fikir yürütmekte zorlandığı sonucuna varılmıştır. Örneğin, verilen iki niceliği oranlayabildiği ancak oran verilen soruda istenilen niceliğe ulaşamadığı görülen bir öğrencinin ve bu performansın tam tersini ortaya koyan bir diğer öğrencinin cevap kağıtlarından birer görüntü arka arkaya verilmiştir.

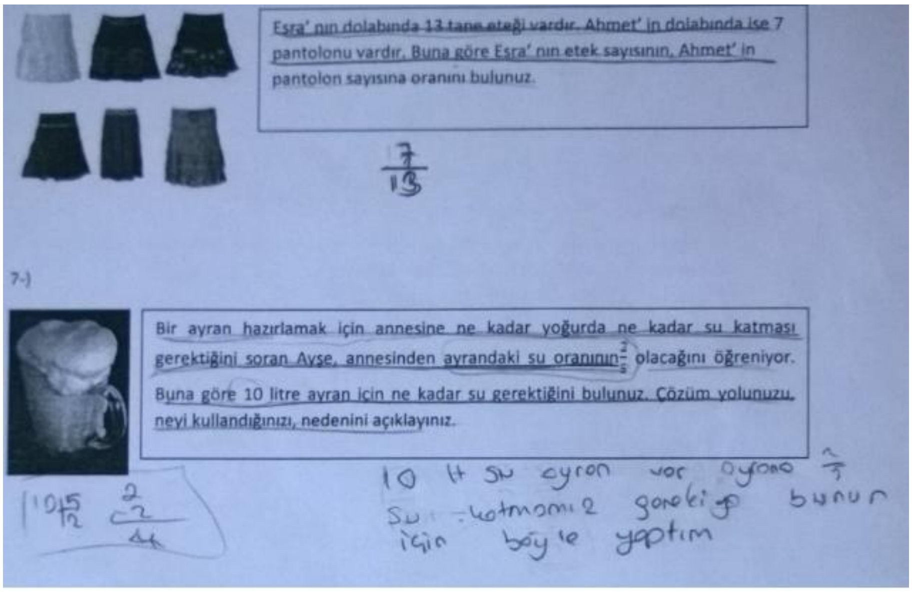

Esra' nın dolabında 13 tane eteği vardır. Ahmet' in dolabında ise 7 pantolonu vardır. Buna göre Esra' nın etek sayısının, Ahmet' in pantolon sayısına oranını bulunuz.

Esranın etek sayısı Ahmet'in pantolon sayısına oranı $\frac{13}{7}$'dir.

7-)

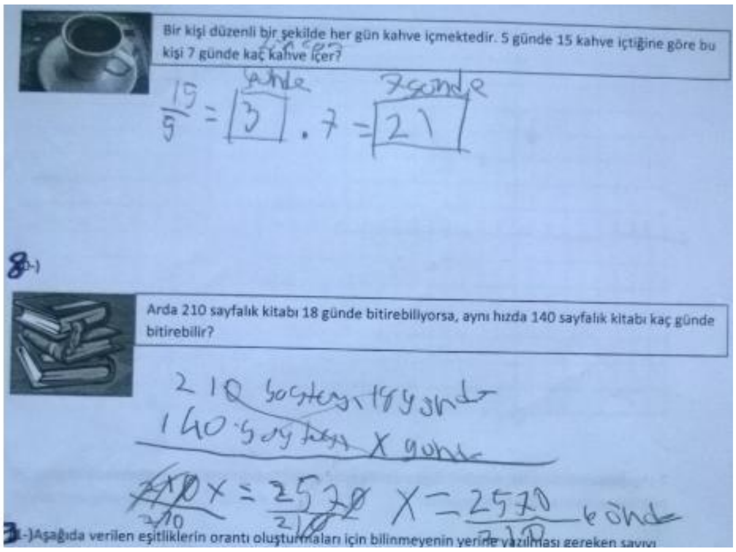
Bir ayran hazırlamak için annesine ne kadar yoğurda ne kadar su katması gerektiğini soran Ayşe, annesinden ayrandaki su oranının $\frac{2}{5}$ olacağını öğreniyor. Buna göre 10 litre ayran için ne kadar su gerektiğini bulunuz. Çözüm yolunuzu, neyi kullandığınızı, nedenini açıklayınız.

$\frac{2}{5}$

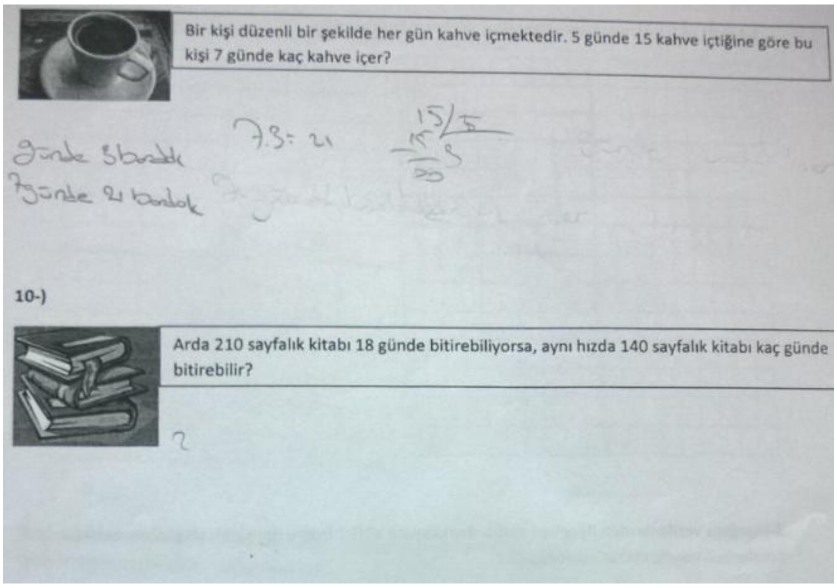


Bu gruptaki öğrenciler doğru orantılı ilişki içeren problemlerde orantı kurabilenler ve orantı kuramayıp birime indirgeyerek problemi çözenler olmak üzere iki gruba ayrılmıştır. Orantı kuramayan sadece birime indirgeyerek orantı problemlerini çözmeye çalışanların her problemde başarılı olamaması bu ayrımın yapılmasında önemli etken olmuştur.

Orantı kurarak problemi çözebilen bir öğrencinin cevap kağıdından bir görüntü



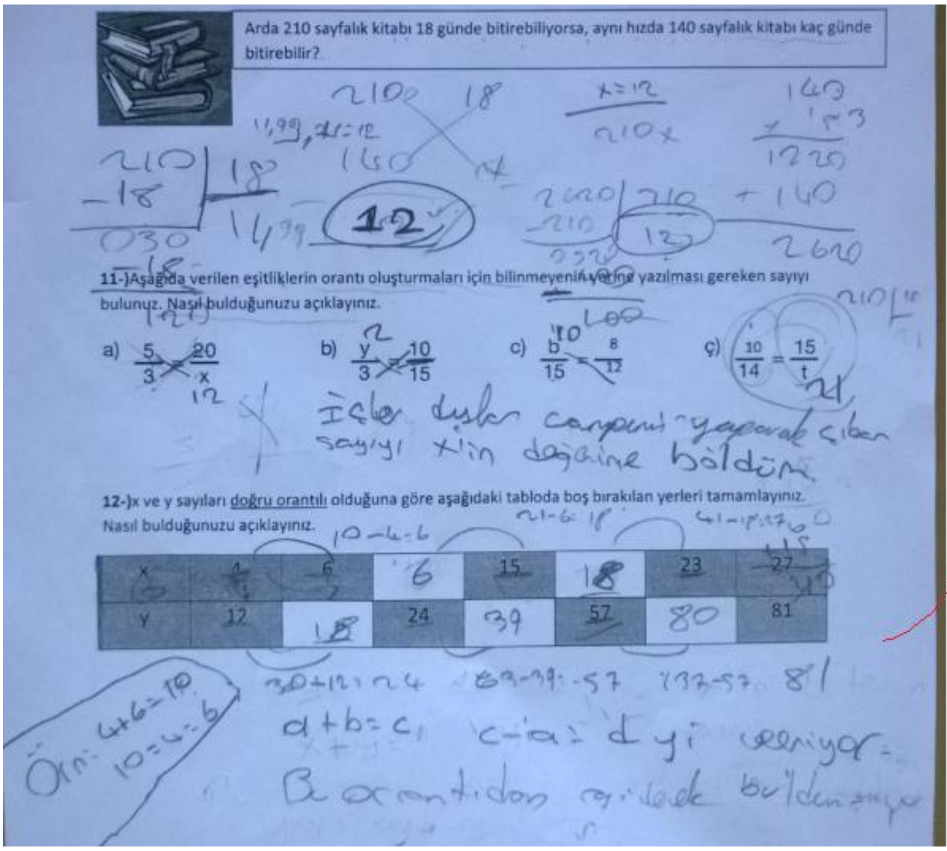
Orantı kuramayıp birime indirgeyerek problemi çözebilen öğrencinin cevap kağıdından bir görüntü



Oran kavramına sahip olduğu sonucuna varılan 10 öğrencinin ise

- Orantı kurmadan birime indirgeyerek problemi çözenler,
- Orantı kurabilenler fakat doğru orantılı nicelikler arasındaki ilişkiyi fark edemeyenler,
- Her zaman orantı kurabilenler

olmak üzere üç gruba ayrıldığı görülmüştür. Örneğin, oran kavramına sahip olup da orantı kurabilen fakat doğru orantılı iki niceliğin birbirine göre alacağı değerleri bulma sırasında orantı kuramadığı görülen bir öğrencinin cevap kağıdından bir görüntü aşağıda verilmiştir:


Arda 210 sayfalık kitabı 18 günde bitirebiliyorsa, aynı hızda 140 sayfalık kitabı kaç günde bitirebilir?

11-)Aşağıda verilen eşitliklerin orantı oluşturmaları için bilinmeyenin yerine yazılması gereken sayıyı bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

a) $\frac{5}{3} = \frac{20}{x}$ b) $\frac{y}{3} = \frac{10}{15}$ c) $\frac{b}{15} = \frac{8}{12}$ ç) $\frac{10}{14} = \frac{15}{t}$

12-)x ve y sayıları doğru orantılı olduğuna göre aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri tamamlayınız. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

x	4	6		15		23	27
y	12		24		57		81

iki nicelik arasında doğru orantılı ilişki olmasına rağmen bu ilişkiyi kullanamamıştır.

Açık uçlu testin oran-orantıya yönelik sorularından elde edilen verilerin analizi sonucu öğrencilerin bilgi, güçlük veyanılgılarına göre ayrılışları Tablo 3' de verilmiştir.

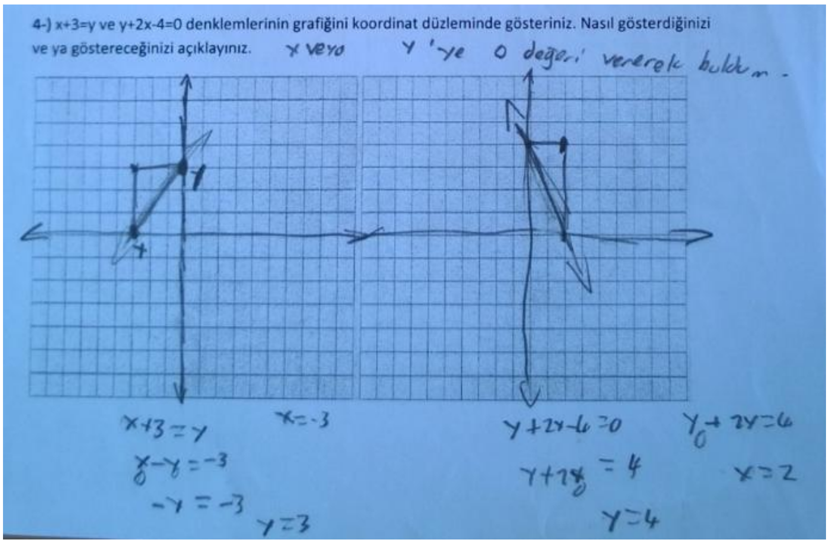
Tablo 3: Oran-orantıya Yönelik Açık Uçlu Testten Elde Edilen Verilerin Analizi Sonucu Ortaya Çıkan Ayrışma

Oran kavramına tam olarak sahip olanlar	Oran kavramına kısmen sahip olanlar
Doğru orantılı ilişki içeren problemlerde orantı kurabilenler	Orantı kurmadan birime indirgeyerek sonuca ulaşanlar
Doğru orantılı ilişki içeren problemlerde birime indirgeyerek sonuca ulaşabilenler	Orantı kurabilenler fakat doğru orantılı nicelikler arasında ilişkiyi fark edemeyenler
	Her zaman orantı kurup doğru orantılı nicelikler arasındaki ilişkiyi de kurabilenler

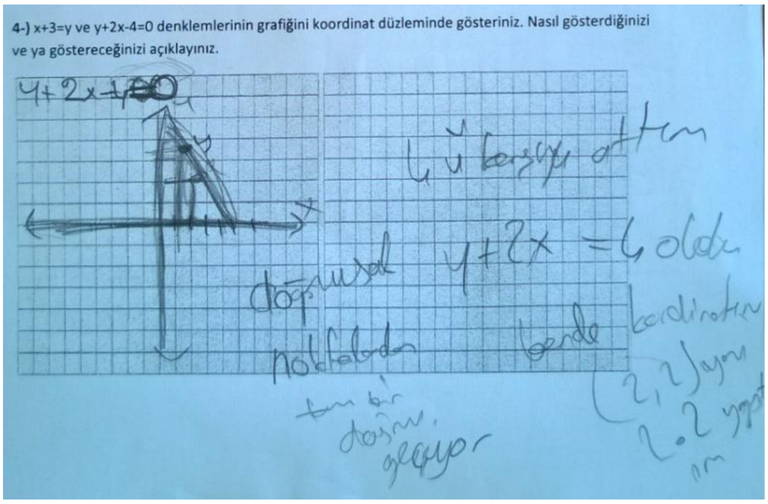
Doğru Denklemi

Doğru denklemi ana teması altında koordinat düzleminde noktaları tanıyıp koordinatlarını belirleyebilme, doğrusal ilişkiyi gösteren grafiği çizebilme ve yorumlayabilme, denklemi verilen bir doğruyu tanıyabilme ve koordinat düzleminde doğrunun grafiğini çizebilme, doğrusal ilişkiyi tanıyıp yorumlayabilmeye yönelik sorular sorulmuştur. Öğrencilerden verilen bir denkleme ait doğrunun grafiğini çizebilen sadece üç öğrenci çıkarken, iki öğrencinin ise çizmeye yakın olduğu görülmüştür.

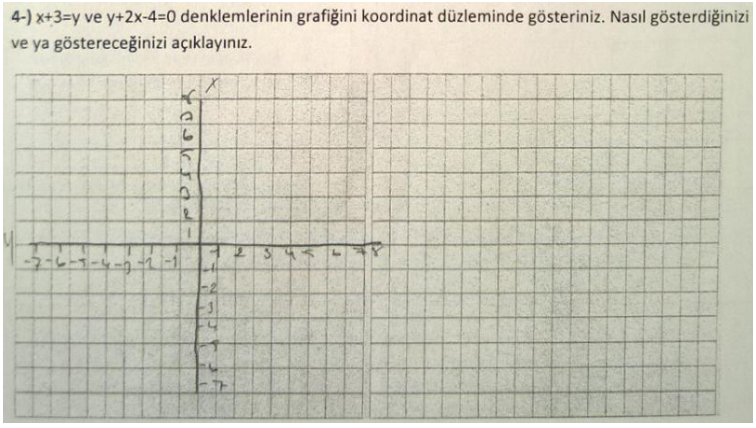
Denklemi verilen bir doğrunun grafiğini çizebilen bir öğrencinin cevap kağıdından bir görüntü



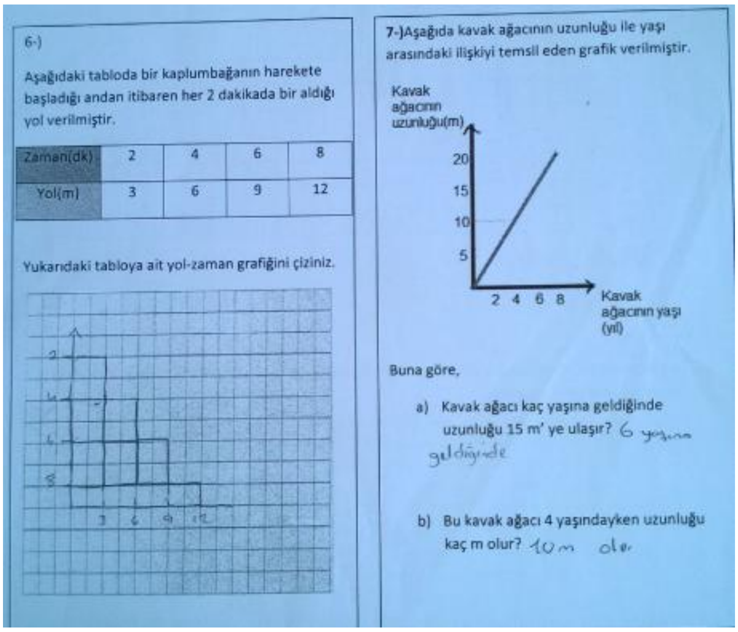
Denklemi verilen bir doğrunun grafiğini çizmeye yakın olduğu görülen bir öğrencinin cevap kağıdından bir görüntü



Denklemi verilen bir doğruyu çizemeyen bir öğrencinin cevap kağıdından bir görüntü

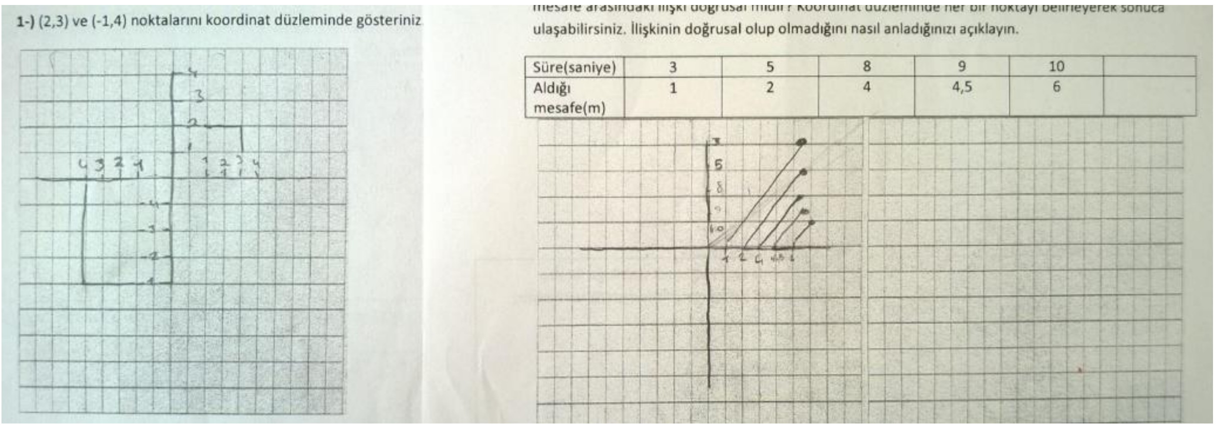


Geriye kalan 11 kişinin denklemi verilen bir doğruyu çizemediği görülürken, bu öğrencilerden ikisinin en basit anlamda doğrusal bir ilişkiyi gösteren çizgi grafiğini oluşturmakta ya da yorumlamakta zorlanması dikkat çekmiştir. Örneğin;

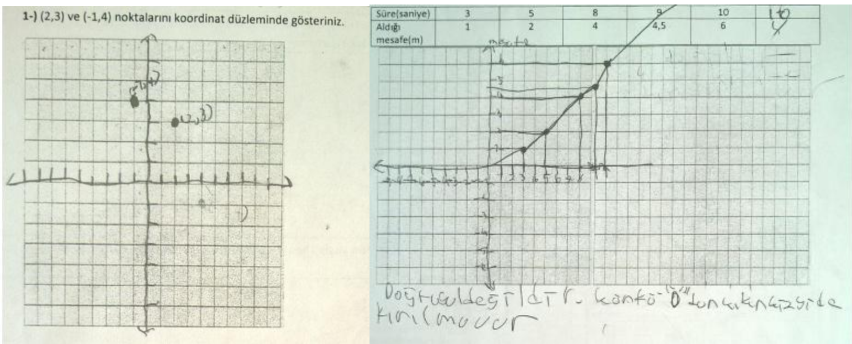


Geriye kalan öğrenciler ise koordinat düzleminde noktaları belirlerken bazı hatalar yapan ve koordinat düzleminde noktaları belirleyip iki nicelik arasındaki doğrusal ilişkiyi de görüp ifade edebilen olmak üzere iki gruba ayrıldığı sonucuna varılmıştır.

Koordinat düzleminde noktaları belirlerken hata yapan öğrencinin cevap kâğıdından bir görüntü



Koordinat düzleminde noktaları belirlemenin yanında doğrusal ilişkiyi de yorumlayabilen bir öğrencinin cevap kâğıdından bir görüntü



Açık uçlu testin doğru denklemine yönelik sorularından elde edilen verilerin analizi sonucu öğrencilerin bilgi, güçlük veyanılgılarına göre birbirinden ayrılışları Tablo 4’ te verilmiştir.

Tablo 4: Doğru Denklemine Yönelik Açık Uçlu Testten Elde Edilen Verilerin Analizi Sonucu Ortaya Çıkan Ayrışma

Denklemi verilen bir doğrunun grafiği hakkında bir fikre sahip olanlar(Ayrıca doğrusal ilişkinin farkında, koordinat düzlemine sahip, doğru üzerindeki noktalar hakkında akıl yürütüyor, grafik çizip yorumlayabiliyor).

Denklemi verilen bir doğrunun grafiğini çizebilenler

Denklemi verilen bir doğrunun grafiğini çizmeye yakın görünenler

Denklemi verilen bir doğrunun grafiği hakkında herhangi bir fikre sahip olmayanlar

En basit anlamdaki çizgi grafiğini çizmekte ya da yorumlamakta zorlananlar ve koordinat düzleminde noktaları belirlemeye yönelik varlık gösteremeyenler

Çizgi grafiğini çizip yorumlayabilen ve koordinat düzleminde koordinatları verilen noktaları belirlemede hata yapanlar

Koordinatları verilen noktaları belirleyebilmelerinin yanında aralarında doğrusal ilişki bulunan iki niceliğin grafiğini çizerek yorumda bulunabilenler

Oluşan Gruplar

İlk olarak doğru denklemi, oran-orantı ve bağımlı-bağımsız değişken olarak üç kısma ayrılarak analiz edilen açık uçlu testten elde edilen bulgular doğrultusunda öğrenciler bilgileri, yanılgıları ve güçlüklerine göre beş gruba ayrılmışlardır. Oluşan bu gruplardaki öğrencilerin ortaya koydukları performanslar aşağıda verilmiştir.

1. **Grup** (3 öğrenci)

- Örüntüleri yinelemeli (recursive) stratejiyi kullanarak devam ettirip genel kuralı basit anlamda sözel olarak ifade edebiliyor ancak iki değişken arasında bağımlılık ilişkisini göremiyor.
- Nicelikleri oranlarken ya hiç yapamıyor ya da hatalar yapıyor ve orantı kuramıyor fakat günlük yaşamdan orantı problemlerini birime indirgeyerek çözebiliyor.
- En basit çizgi grafiğini çizip yorumlayabiliyor. Koordinat düzleminde noktaları belirlerken ufak da olsa hatalar yapıyor. Doğrusallık ile ilgili bir farkındalıkları yok ve doğru denklemini işlemsel ya da kavramsal olarak yapılandıramadığı düşünülüyor.

2. **Grup** (4 öğrenci)

- Örüntüleri yinelemeli stratejiyi kullanarak devam ettirip genel kuralı basit anlamda sözel olarak ifade edebiliyor. Bağımlılık ilişkisini görebiliyor fakat değişken kavramının farkında değil!
- Nicelikleri oranlarken hatalar yapıyor ve orantıyı kısmen kuruyor, günlük yaşamdan orantı problemlerini birime indirgeyerek çözebiliyor.
- En basit çizgi grafiğini çizip yorumlayabiliyor. Koordinat düzleminde noktaları belirlerken ufak da olsa hatalar yapıyor. Doğrusallık ile ilgili bir farkındalıkları yok ve doğru denklemini işlemsel ya da kavramsal olarak yapılandıramadığı düşünülüyor.

3. **Grup** (3 öğrenci)

- Örüntüleri fonksiyonel düşünerek genelleyebiliyor ama sembolleştirmede sıkıntı yaşıyor. Değişkenler arasındaki bağımlılık ilişkisini görebiliyor ve değişken kavramının da farkında.
- Oran kavramına sahip olup, orantıyı işlemsel düzeyde yeterince biliyor fakat kavramsal düzeyde tam anlamıyla yeterli olmadığını düşündürüyor. Ne zaman orantı kurması gerektiği konusunda sıkıntı yaşayabiliyor.
- En basit çizgi grafiğini çizip yorumlayabiliyor. Koordinat düzleminde noktaları belirlerken ufak da olsa hatalar yapıyor. Doğrusallık kavramı hakkında fikir

yürütüyor ama doğru denklemi için sadece işlemsel olarak edindikleri bazı bilgileri hatırlamaya yakın olduğu görülüyor.

4. **Grup** (3 öğrenci)

- Örüntüleri fonksiyonel düşünerek genelleyebiliyor ve sembolleştirmede de sıkıntı yaşamıyor. Ayrıca değişkenler arasında bağımlılık ilişkisini görebiliyor ve değişken kavramının da farkında.
- Oran kavramına sahip olup, sorulan sorularda orantı kavramında işlemsel olarak ve kavramsal olarak varlık gösterebiliyor. Fakat doğru orantılı niceliklerin arasındaki oranın sabit olduğunu görmede sıkıntı yaşayabiliyor.
- En basit çizgi grafiğini çizip yorumlayabiliyor. Koordinat düzleminde noktaları belirlerken ufak da olsa hatalar yapıyor. Doğrusallık kavramı hakkında fikir yürütüyor ama doğru denklemi için sadece işlemsel olarak edindikleri bazı bilgileri hatırlamaya yakın olduğu görülüyor.

5. **Grup** (3 öğrenci)

- Örüntüleri fonksiyonel düşünerek genelleyebiliyor ve sembolleştirmede sıkıntısı yok. Ayrıca değişkenler arasında bağımlılık ilişkisini görebiliyor ve değişken kavramının da farkında.
- Oran kavramına sahip olup, orantı kavramına işlemsel ve kavramsal olarak sahip olduğunu açıkça ve rahatça gösterebiliyor.
- Grafik çizip, koordinat düzleminde noktaları hatasız gösterebiliyor. Doğrusallık kavramına sahip olduğu görülürken, doğru denklemini işlemsel ve kavramsal olarak yapılandırmaya yakın olduğunu düşündürüyor.

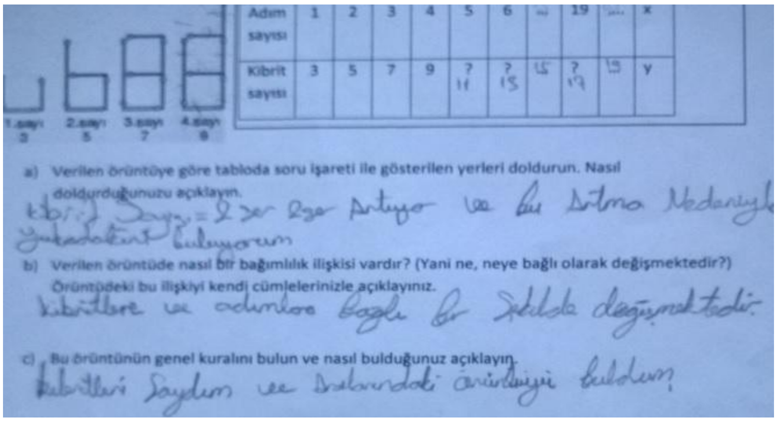
Açık uçlu testten elde edilen verilerin analizi ile ortaya çıkan bulgular doğrultusunda oluşan bu gruplardan her grubu temsilen, aynı zamanda onların öğretmeni olan araştırmacı tarafından iletişim becerilerinin nispeten daha iyi olduğunu düşündüğü birer öğrenci katılımcı olarak seçilmiştir. Bu öğrenciler seçildikleri grupların yukarıda verilen numaralarına göre kodlanmış olup öğretim sürecinde ve klinik görüşmelerde sırasıyla Ö1, Ö2, Ö3, Ö4 ve Ö5 olarak verilmiştir.

Öğretim Sürecinde Katılımcılardan Elde Edilen Bulgular

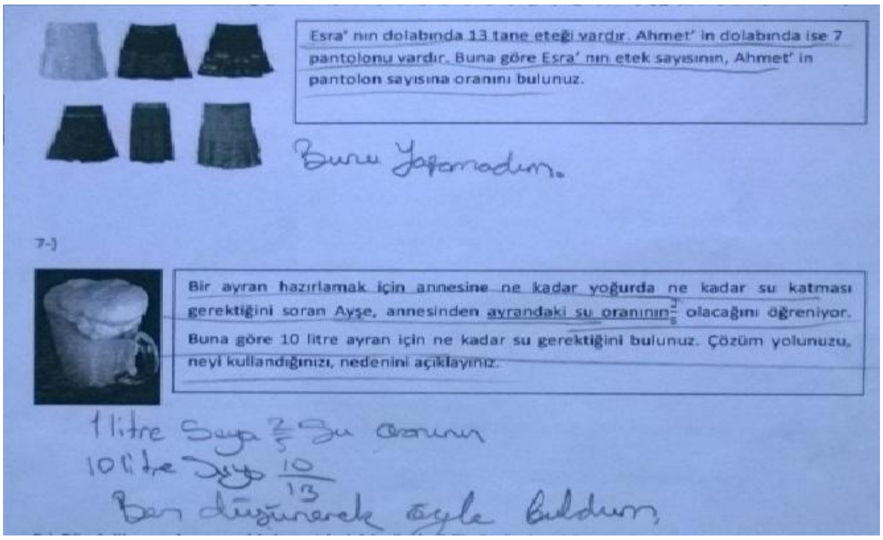
Bu bölümde önce katılımcıya ait açık uçlu testteki performansına ilişkin bulgular cevap kağıdından doğrudan alıntılarla desteklenerek sunulmuş olup, sonrasında öğretim sürecine ilişkin araştırmacı günlüğü ile bireysel-grup çalışma kağıtlarından ve klinik görüşmelerden elde edilen verilerin analizi ile ortaya çıkan bulgular yine doğrudan alıntılarla desteklenerek verilmiştir.

Ö1' in Eğim Kavramını Oluşturma Sürecine İlişkin Bulgular

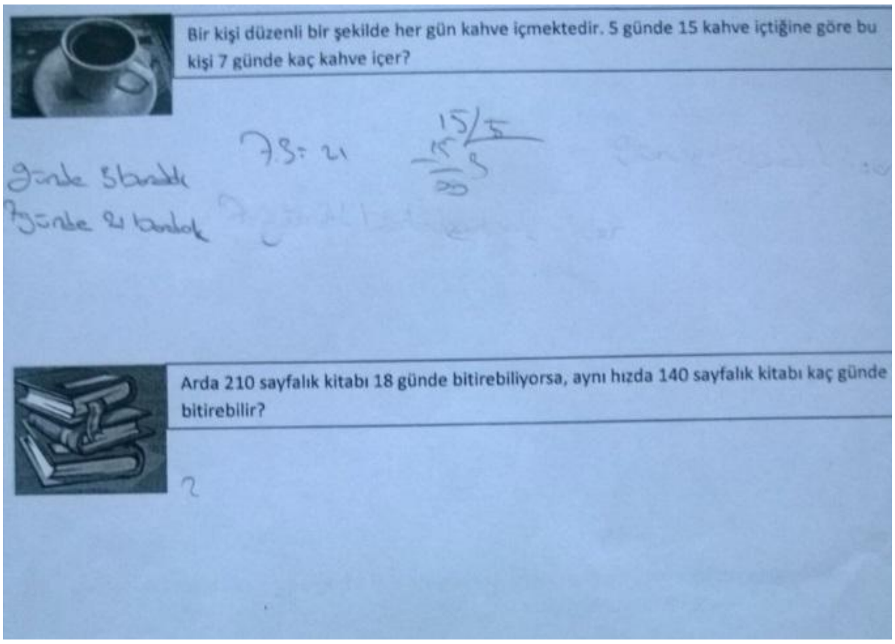
Açık uçlu testten elde edilen verilerin analizi sonucunda ulaşılan bulgular doğrultusunda birinci gruptan katılımcı olarak seçilen Ö1'in, sabit artan bir örüntüyü yinelemeli stratejiyi kullanarak devam ettirdiği ve bunun yanında örüntünün kuralını sadece sözel olarak ifade edebildiği görülmüştür.



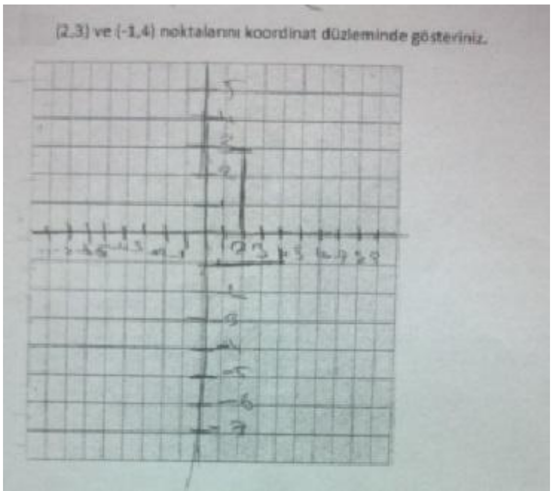
Verilen iki niceliği oranlayamadığı ya da bir oran verilerek çözüme ulaşması gereken bir problemde varlık gösteremediği ve dolayısıyla bu süreçte orantısal düşünemediği görülmüştür.

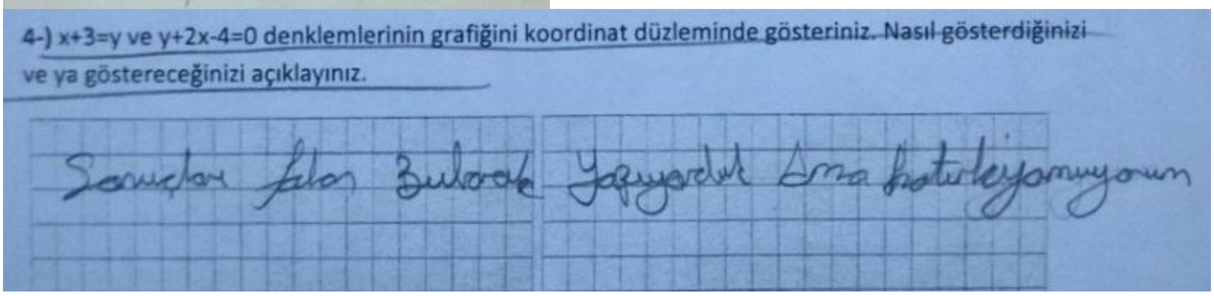


Ayrıca bu öğrencinin doğru orantı gerektiren problemlerde ancak birime indirgeyerek sonuca ulaşabildiği, orantı kuramadığı sonucuna varılmıştır.

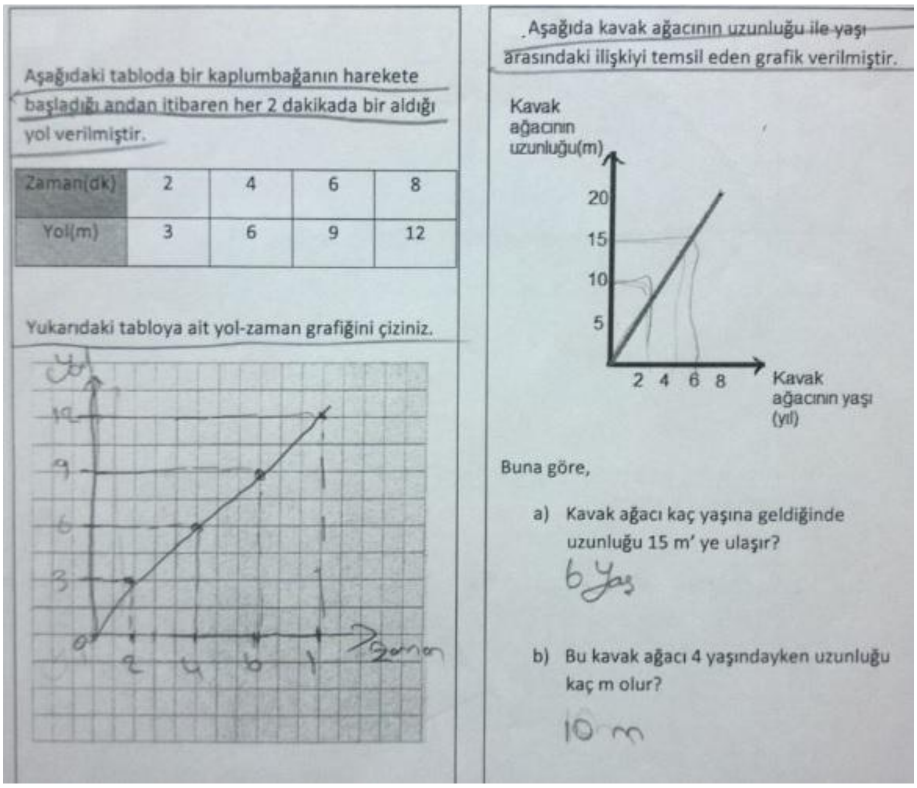


Koordinat düzleminde koordinatları verilen bir noktanın yerini belirlerken koordinatların yerlerini şaşırdığı görülen Ö1' in, doğru denklemi ile ilgili sorularda hiçbir varlık gösteremediği dikkat çekmiştir.





Çizgi grafiği ile ilgili sorularda ise yorumlama ve çizme konusunda bu öğrencinin sıkıntı yaşamadığı sonucuna varılmıştır.


Aşağıdaki tabloda bir kaplumbağanın harekete başladığı andan itibaren her 2 dakikada bir aldığı yol verilmiştir.

Zaman(dk)	2	4	6	8
Yol(m)	3	6	9	12

Yukarıdaki tabloya ait yol-zaman grafiğini çiziniz.

Aşağıda kavak ağacının uzunluğu ile yaşı arasındaki ilişkiyi temsil eden grafik verilmiştir.

Buna göre,

a) Kavak ağacı kaç yaşına geldiğinde uzunluğu 15 m' ye ulaşır?

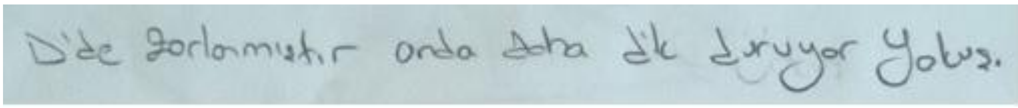
6 yaş

b) Bu kavak ağacı 4 yaşındayken uzunluğu kaç m olur?

10 m

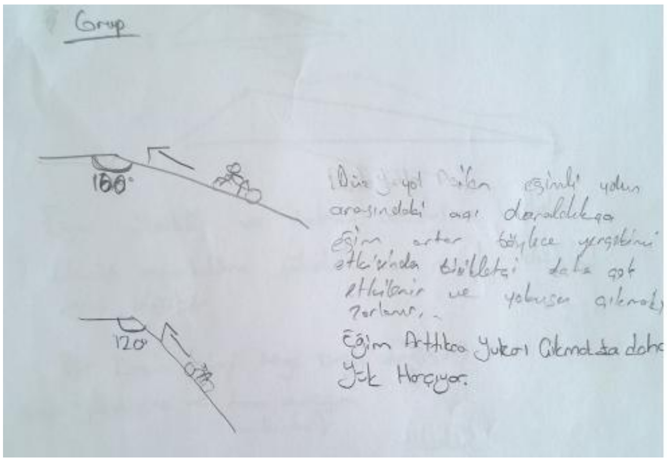
Öğretimin İlk İki Derslik Süreci

Öğretim sürecinin ilk iki dersinde öğrencilerin öncelikle informal bilgi ve stratejilerini ortaya koymaları amaçlanmıştır. Bu sebeple tüm gruplar farklı eğimlere sahip yollarda bisiklet süren bir kişinin zorlanması bağlamı ile karşı karşıya bırakılmışlardır. Tüm öğrenciler gibi Ö1 de bisikletlinin hangi yolda daha çok zorlanacağını ifade etmiş ve neden olarak da "daha dik" olmasını dile getirmiştir. Böylece bu öğrenci eğim kelimesini kullanmasa da onun günlük yaşamdaki yansımalarından biri olan diklik ifadesi ile, yapılandırılması planlanan kavramı keşfetme ihtiyacı duymaya başlamıştır.

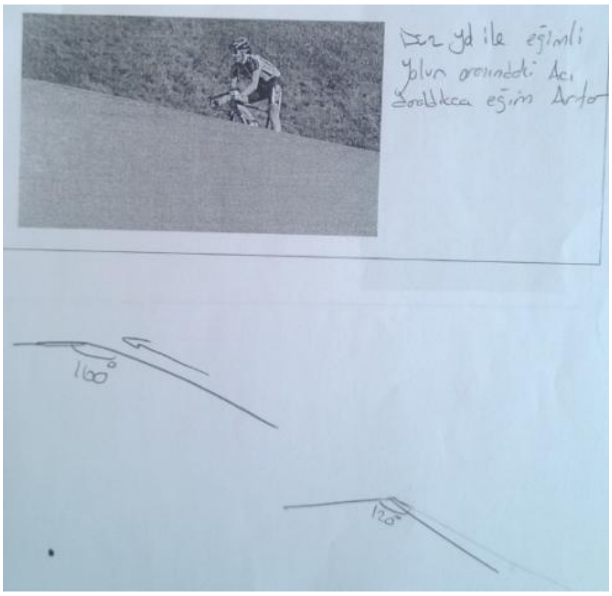


Bisikletlinin zorlanması hakkındaki düşünme ve tartışma sürecinde diklik, yokuş, bayır ve hatta eğim gibi aynı anlama gelen farklı ifadelerin ortaya koyulduğu gruplar arası tartışmaların ardından, sınıfa "neden o yolun daha dik olduğu, bunu nasıl anladıkları" soruları yöneltilerek öğrencilere günlük yaşamda sıkça karşılaştıkları bu kavram hakkında derinlemesine düşünmeleri fırsatı verilmiştir. Aynı zamanda grup yazmanı ve sözcüsü olan Ö1' in dikliğin nedeni hakkında fikir yürütemediği ancak açık-uçlu test analizinde oluşan gruplardan dördüncü grupta yer alan grup arkadaşının açı ile eğim arasında ilişki kurmasını kabul edilebilir bularak bireysel ve grup kâğıdına bu ilişkiyi not ettiği dikkat çekmiştir.

Ö1' in grup kâğıdından bir görüntü;

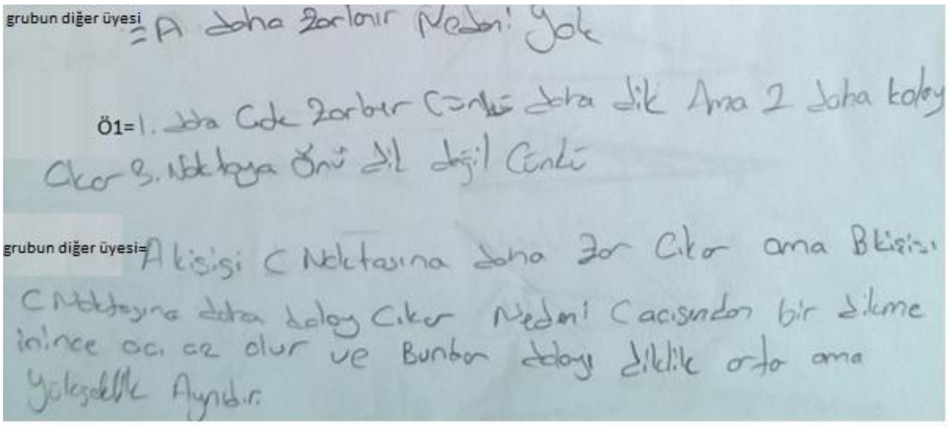


Ö1' in bireysel kağıdından bir görüntü;

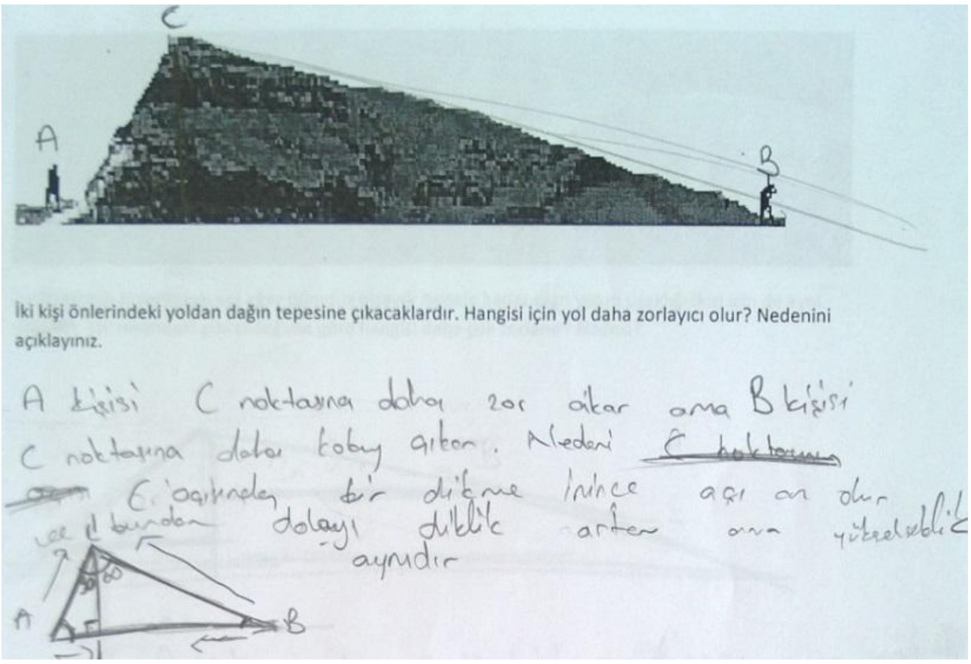


Bu bağlamın hemen ardından verilen aynı dağın zirvesine, dağın doğrusal görsellenmiş eteğinin farklı taraflarından çıkan iki kişiden hangisinin daha çok zorlanacağı bağlam durumunda Ö1, yine eğimi fazla olan yolu doğru tespit etmiş fakat neden olarak yine *"daha dik"* diye açıklama yaparak, ilk bağlam durumunda grup arkadaşının yardımıyla ulaştığı eğim-açı ilişkilendirmesini veya yükseklik veyatay mesafe ile ilişkilendirmeyi bireysel olarak yapamamıştır. Grup arkadaşı ise yükseklik ile açıyı kullanarak gerekli açıklamayı yapmış eğim ile yatay mesafeyi ilişkilendirmeyi ise kısmen kurmuştur.

Ö1' in grup kâğıdındaki diğer üyelere ait bireysel görüşler

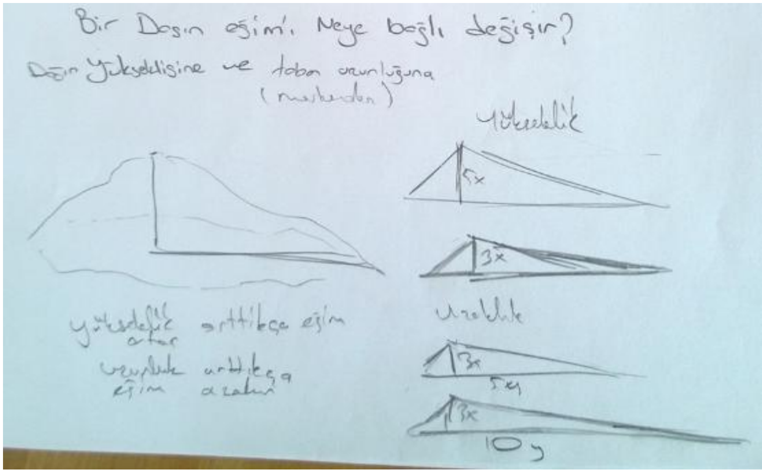


Ö1' in grup arkadaşının çalışma kağıdından bir görüntü

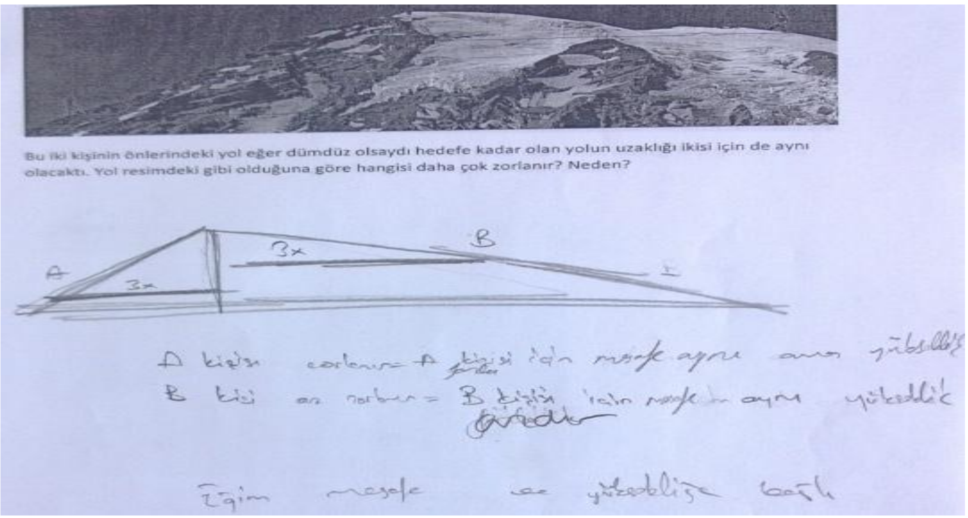


Yüksekliğin yanında eğimli bir yolun yatay mesafesini ifade etmek için öğrencilerin önceki deneyimlerinden çağırdıkları yatay, yatay mesafe, mesafe, taban, uzunluk kelimelerini kullandıkları görülmüştür. Gruplar arası tartışma sırasında bazı grupların eğimi yatay mesafe ile ilişkilendirmesi sonucu tüm grupların dikkati yüksekliğin yanı sıra yatay mesafeye çekilmiş ve eğimin bu iki uzunluğa göre nasıl değiştiğini açıklamaları için önce düşünme sonra da tartışma sürecine bırakılmışlardır. Ö1' in bulunduğu grubun elemanlarının yatay mesafeyi "taban uzunluğu, mesafe, uzunluk ya da uzaklık" olarak isimlendirdiği dikkat çekerken grup çalışma kağıdında üçgensel modeller oluştururak eğimin bu iki uzunluğa göre nasıl değiştiğini doğru yorumladıkları ve eğim ile bu uzunluklar arasındaki orantısal ilişkiyi keşfetmeye başladıkları görülmüştür. Ancak daha önceden açısal ilişkiyi keşfeden grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdında benzer yorum ve modellemelerin olması onun bu keşfetme sürecinde gruba önderlik ettiğini düşündürmektedir. Eğimin bağlı olduğu uzunluk değişkenlerinin yükseklik veyatay mesafe olduğunu fark ettikleri ve dahası bu uzunlukları anlamlandırma sürecinde oldukları görülen bu grupta, Ö1' in grup çalışma kağıdına yazdığı yorumu bahsi geçen grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından not ettiğinin görülmesi ise onun bu süreçte pasifliğini koyması açısından önemlidir ki bu sırada arkadaşının yanlışını da düzeltemediği dikkat çekmiştir. Halbuki arkadaşı yaptığı yanlışlığı kendi bireysel çalışma kağıdında düzeltmiştir.

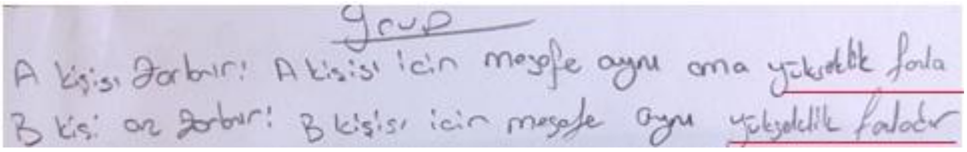
Ö1' in grup kağıdından bir görüntü



Ö1' in grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Ö1' in grup kağıdından bir görüntü



Grup

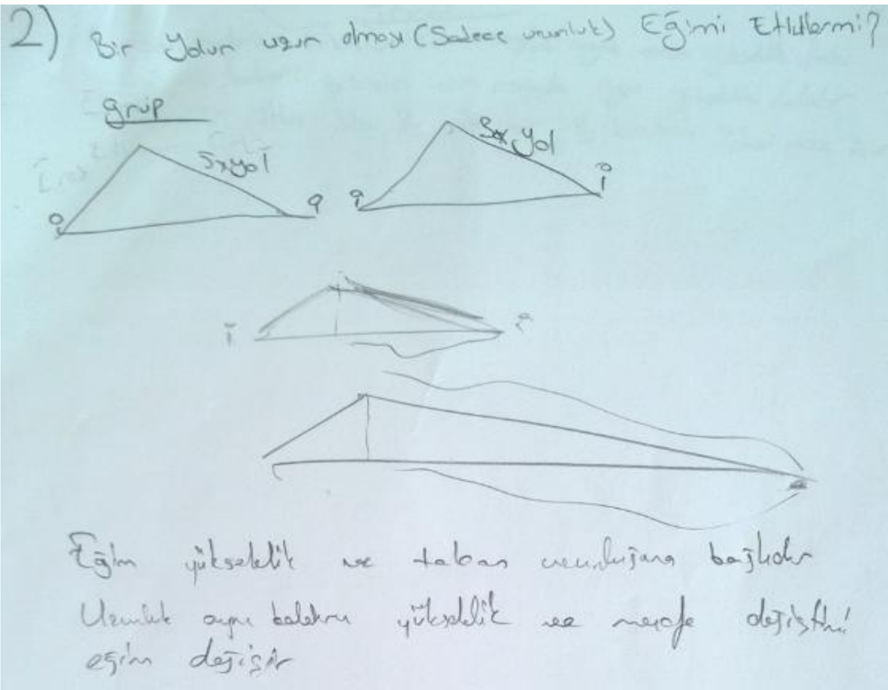
A kişisi zorlanır! A kişisi icin mesafe aynı ama yükseklik fazla

B kişi az zorlanır! B kişisi icin mesafe aynı yükseklik fazladır

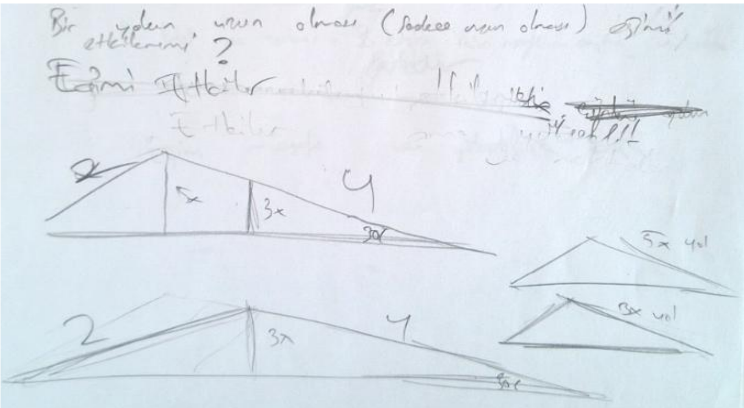
Ö1' in eğim ile onun bağlı olduğu değişkenler arasındaki ilişkiyi fark etme ve yorumlama sürecinde doğrudan kendi düşüncelerini ortaya koymakta zorlandığı ancak grup arkadaşları ile birlikte dersten hiç kopmadığı ve onlardan fikir alışında bulunduğu, bazen de fikirlerini grup içinde dile getirdiği araştırmacı tarafından tutulan günlüğe not edilmiştir. Öğretim süresi boyunca grubun sözcüsü olmasının onu, grubun fikirlerini ilk önce o dile getireceği için, dikkatli olması konusunda motive ettiği de düşünülmektedir. Nitekim kendisinin ilk iki ders sürecinde grubun vardığı genellemeleri ve ortaya attığı fikirleri gruplar arası tartışmalarda ara ara grup arkadaşlarının desteği ile de olsa savunabildiği görülmüştür.

Eğim için bağlamlardaki görsellerden esinlenerek dik üçgensel modeller geliştirdikleri görülen öğrencilerin bu dik üçgensel modellerden "yükseklik" diye etiketledikleri dikey uzunluk ve "yatay, taban, mesafe, yatay mesafe, uzunluk" gibi etiketlemeler yaptıkları yatay uzunluk ile eğimi ilişkilendirdikleri görülmüştür. Ancak bu ilişkilerin keşfedildiği gruplar arası tartışmalar sırasında sadece yatay mesafe ve yükseklik değil aynı zamanda dik üçgensel modelin hipotenüs uzunluğunu da eğim ile ilişkilendiren öğrenciler ortaya çıkmıştır. Bu bağlamda dik üçgensel modeldeki hipotenüs uzunluğunu yani eğimi bulunan doğrunun uzunluğunu da eğimin bağlı olduğu bir değişken olarak hissedebilecekleri bir durumla karşılaşılmıştır. Bu sırada eğimin yatay mesafe ve yüksekliğe bağlı olarak değiştiğini dile getiren bazı öğrenciler, diğer gruplardan gelen yol uzunluğunun eğimi etkilediği görüşünün doğru olup olmadığını öğretmene yöneltmiş ve bunun üzerine bu gelen soru öğretmen tarafından tüm sınıfa yöneltilerek yeni bir düşünme ve tartışma süreci başlamıştır. Yol uzunluğunun eğime etkisinin tartışılması sürecinde Ö1' in kendi bireysel kâğıdına not ettiği herhangi bir yorum görülmemiştir. Zaten bu öğrencinin ders boyunca bireysel görüşü de olsa bu görüşünü bireysel çalışma kâğıdından ziyade grup çalışma kâğıdına yazdığı dikkat çekmiştir. Grup içerisinde daha önceden açı ile ilişkilendirme kurmuş olan öğrencinin bireysel çalışma kağıdında açının aynı kaldığını gösterdiği fakat uzunlukları da işin içine katınca kararsız kaldığı dikkat çekmesine rağmen en sonunda yolun uzunluğunun eğimi etkileyeceği yorumunda bulunduğu görülmüştür.

Ö1' in grup kağıdından bir görüntü



Ö1' in grubundan açı ile ilişkilendirme yapan öğrencinin bireysel kağıdından bir görüntü



Ancak bu grubun sözcüsü Ö1'in gruplar arası tartışmalarda "açı aynı kaldığı için eğimin değişmeyeceği" yorumunda bulunarak, uzunluklar için vardıkları, eğimin yol uzunluğuna göre değişeceği genellemesini dile getirmediği yine araştırmacı günlüğüne not edilmiştir. Ayrıca yukarıda verilen alıntıdaki eğim modelleri bu grupta "yol uzadıkça veya kısaldıkça yükseklik veyatay mesafe değişeceği için eğimin de değişeceğini" düşündükleri yorumunu beraberinde getirmektedir. Bu durumda aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın sabit kalmasını henüz keşfedemedikleri ancak açının aynı kalmasından dolayı eğimin değişmeyeceğini sezdikleri sonucuna varılabilir. Ayrıca bu tartışma sürecinde Ö2 ve Ö3' ün bulunduğu iki grubun bir kalemi duvara dayayıp, kalemin duvara dayandığı yerin (dolayısıyla zemin ile yaptığı açının) değişmesiyle eğiminin de değiştiğini fakat kalemin uzunluğunun değişmediğini gösterdikleri görülmüş ve bu tartışmanın tüm sınıfa genişletilmesi ile oluşan tartışma ve keşfetme süreci araştırmacı günlüğüne not edilmiştir. Tartışma sonunda ulaşılan eğimin yol uzunluğuna (doğrunun uzunluğuna) bağlı olmadığı yükseklik veyatay mesafeye bağlı olarak değiştiği genellemesi öğrenciler tarafından grup ve çalışma kağıtlarına not edilmiştir.

Ö1 ile gerçekleştirilen 1. Klinik Görüşme

Öğretimin ilk iki derslik aşamasından sonra gerçekleştirilen 1. Görüşmede Ö1' in eğim için kendisine daha anlaşılır geldiği tahmin edilen dik, yokuş gibi kelimeler kullandığı ve araştırmacının eğim kelimesini kullandığında "yani yokuş" gibi kendisine daha anlamlı gelen kelimeye dönüştürdüğü dikkat çekmektedir. Eğimin yükseklik veyatay mesafeye bağlı olarak değiştiğini ezberden söylemediği, aksine bu uzunlukları göstererek ve gerektiğinde geliştirdiği dik üçgen modeliyle görselleştirerek savunduğu görüşmelerde açık bir şekilde ortaya konmaktadır.

G: *Peki diklik derken, resim 2' de yolun daha dik olduğunu, daha yokuş olduğunu nereden anlıyorsun? Nelere bakarak buna karar veriyorsun?*

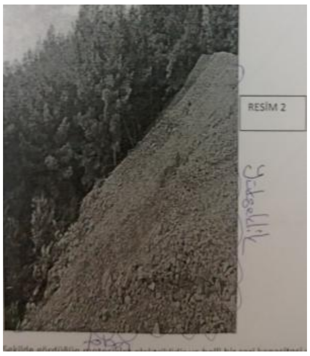
Ö1: *Şu tabana bakarak. Tabanı şey de… Şu yüksekliğe bakarak.*

G: *Peki yükseklik olarak neresini gösterdiğini çizebilir misin bana?*

Ö1: *Burası(doğru yeri gösterdi).*

G: *Peki taban dediğin yer neresi?*

Ö1: *Burası işte aşağı taraf(doğru gösterdi).*



...

__G:__ Sonuç olarak şöyle diyorum: bir yolun dikliği ya da yokuşluğu yani eğimi sence nelere bağlı?

__Ö1:__ Bir yolun eğimi.. yani yokuşu…yükseklik ve tabana bağlı.

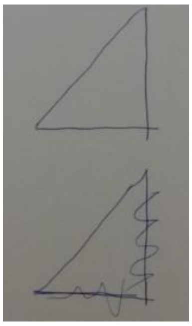
Bu öğrenciye eğimi, bağlı olduğu değişkenlere göre yorumlama fırsatı verilmesi amacıyla kendisinden yükseklikleri aynı olan iki yol çizmesi istendiğinde doğrudan iki dik üçgensel model çizmesi ve görüşme boyunca dik üçgensel modeller üzerinden yorumlama yapması, modeli bir araç olarak kullanabildiğini ortaya koymaktadır. Yükseklikleri aynı tutarken eğimleri de aynı olan iki yol çizmesi "yükseklik aynı ise eğim de aynı olur" yanılgısına sahip olabileceğini düşündürmüştür.

__G:__ Peki buraya yüksekliği aynı olan iki yol çizebilir misin sen bana?

__Ö1:__ Çizerim.

__G:__ Öyle bir yol var yüksekliği aynı ikisinin de. Çiz bakalım.

__Ö1:__ …(yükseklikleri aynı çizerken neredeyse eş iki dik üçgen çiziyor). Bu şekilde.



__G:__ Bu ikisinin yüksekliği aynı diyorsun.

__Ö1:__ Evet.

__G:__ Peki eğimleri aynı mı? Hangisi daha yokuş?

__Ö1:__ İkisi de aynı.

…

Yüksekliği aynı bırakarak eğimi farklılaştırması istendiğinde ise kendisinin taban olarak etiketlediği yatay mesafeyi değiştirmesi gerektiğini ifade etmiştir. Ancak yatay mesafeyi kısaltırken yüksekliği ve yol uzunluğunu da kısalttığını fark edememiştir.

Sözel olarak yatay mesafe kısaldığında eğimin de kısalacağını ifade etmesine rağmen görsel olarak ortaya koyduğu dik üçgensel modelde bu yorumunu yansıtamamıştır.

G: *Peki senin şimdi aynı dediğin yerleri "den den" işareti koyabilir misin? Matematikte gösterdiğimiz şekilde. Tamam güzel o şekilde de yapabilirsin. Buraları aynı diyorsun bana. Sen şu anda diklik aynı diyorsun. Peki ben sana " -den den koyduğun yerler aynı kalsın ama birisi daha dik olsun" desem ne yaparsın?*

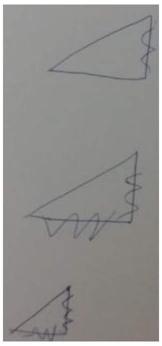
Ö1: *Kısaltırım.*

G: *Neresini kısaltırsın?*

Ö1: *Alt tarafını.*

G: *Kısalt bakalım. Öyle bir şey çiz bize.*

Ö1:*…(çizdi).*



G: *Peki nereler aynı gösterebilir misin yukarıdaki gibi yine?*

Ö1: *Burası aynı (yükseklikler).*

G: *Diğer tarafı?*

Ö1: *Daha kısa(yatay mesafe).*

G: *Şimdi bu yol daha mı dik oldu yoksa daha mı…*

Ö1: *Daha dik oldu.*

G: *Peki sen bu alt kısmına ne demiştin?*

Ö1: *Taban demiştim.*

Öğrenciden son çizdiği modeldeki taban uzunluğunu aynı tutarak yol uzunluğunu değiştirmesi istendiğinde ise yol uzunluğunu arttırırken yüksekliği aynı tutarak tabanı uzatmıştır. Ancak dik üçgensel modellenen iki yolun eğimi ile ilgili yorum yaparken, araştırmacı tarafından sorulmamasına rağmen, çizdiği iki modele bakarak "yol uzunluğu kısa olanın eğiminin fazla olacağını" dile getirmiştir. Bu sırada Ö1' in hipotenüs olarak veya yol uzunluğu olarak etiketleyemediği yere "burası" demesinden dolayı araştırmacı da görüşmeye "burası" diyerek devam etmiştir.

G: *Tabanı aynı bırakıp da burası dediğimiz şeyi değiştirsek…Öyle bir yol çizebilir misin?*

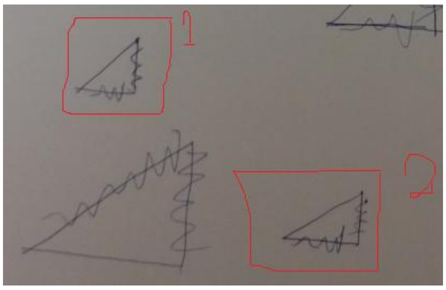
Ö1: *Çizerim.*

G: *Çiz bakalım.*

***Ö1:** Uzun mu yapayım kısa mı yapayım?*

***G:** Sen bilirsin hiç fark etmez.*

***Ö1:** ...Evet burası taban.*



***G:** Tabanları neresi şimdi biz bu ikisini karşılaştırıyoruz şu anda değil mi? Tabanları aynı ve burası dediğimiz şey(hipotenüs)?*

***Ö1:** Daha kısa olur o zaman dik oluşu azalır.*

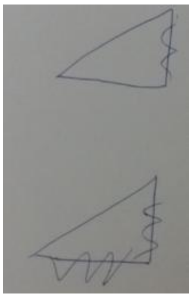
Ayrıca yol uzunluğu aynı olduğunda eğimin aynı olması gerektiğini düşünmesi dersteki grup içi ve gruplar arası tartışmada eğimin yol uzunluğuna bağlı olmadığını tam olarak anlamlandırmadığını düşündürmektedir. Oluşturduğu dik üçgensel modelde yol uzunluğunun aynı olması durumunda yükseklik veyatay mesafelerin de aynı kalacağını düşündüğü görülmektedir.

***G:** Sen bir yolun burasına(dik üçgensel modeldeki hipotenüs) bakarak o yolun dik veya yokuş olduğunu söylüyorum diyorsun. O zaman madem bir isim vermek istemiyorsun şu anda bir isim vermeyelim buraya. Şimdi mesela önünde iki tane yol var. Bu iki yolun "burası" dediğin kısımları aynı olursa diklikleri de aynı mı olur?*

***Ö1:** İki yolda buraları ölçüleri aynı olursa diklik aynı olur.*

***G:** Çizebilir misin peki bana? İki tane yol çiz ve ikisinde de burası dediğimiz şey aynı olsun.*

***Ö1:** ...(iki eş dik üçgen çizmeye çalıştı). Bu daha kısa oldu ama...*

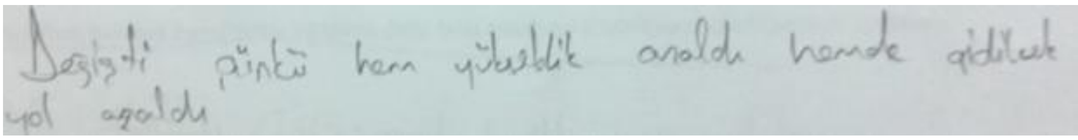


Ö1' in eğimin bağlı olduğu değişkenlerden olan yükseklik veyatay mesafeyi dile getirebildiği, ancak eğimi bu değişkenlere göre yorumlarken yer yer hatalar yaptığı, görsel olarak sunduğu dik üçgensel modellerde savunduklarını tam olarak yansıtmadığı dikkat çekmiştir. Ayrıca görüşme boyunca grup arkadaşının çok kullandığı eğim-açı ilişkilendirmesini yapmadığı da görülmüştür. Bu öğrencinin dik üçgensel model üzerinde değişkenlerden bazılarını sabit tutarak diğerine göre yorumlar yapamaması onun dinamik olarak düşünmekte zorlandığını ve bu sebeple eğimi bu bağlı değişkenlere göre yorumlamakta zorlandığını düşündürmektedir.

Öğretimin İkinci İki Derslik Süreci

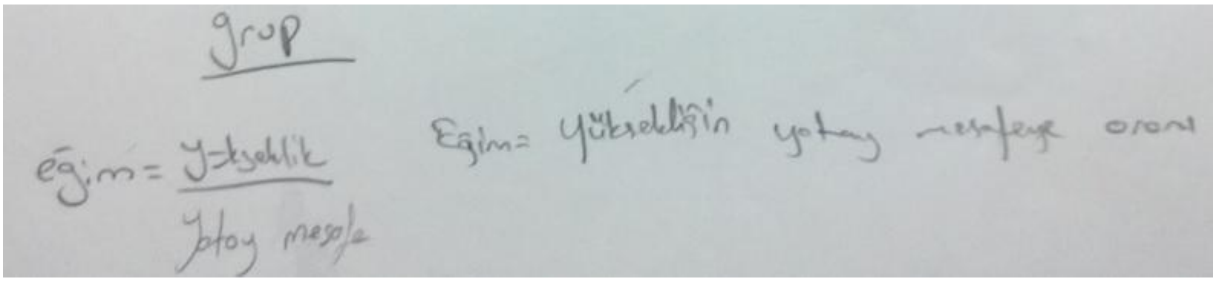
Eğimin bağlı olduğu değişkenleri geliştirdikleri dik üçgensel model üzerinden keşfederek anlamlandırma sürecine giren öğrencilerden, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişkinin eğim ölçüsünü verdiğini keşfetmeleri beklenmekteydi. Bu keşfi yapmaları için bir dağın doğrusal olarak görsellenen eteğinin farklı noktalarında yer alan kişilerin önlerindeki yolun eğimi hakkında düşünmeleri için fırsat verilmiştir.

Öğrencilerin informal yollardan edindikleri deneyimleri doğrultusunda eğimin değişmemesi gerektiğini düşünen veya “aynı yol işte” gibi sezgisel olduğu düşünülebilecek savunmalar yapan bazı öğrenciler görüldüğü araştırmacı tarafından günlüğe not edilmiştir. Gruplar arası tartışmalara geçildiğinde Ö1’ in ve grubunun eğimin farklı olacağını ileri sürerek, yüksekliğin ve gidilecek yolun değişmesi ile savunma yaptıkları grup çalışma kağıdında dikkat çekmiştir.

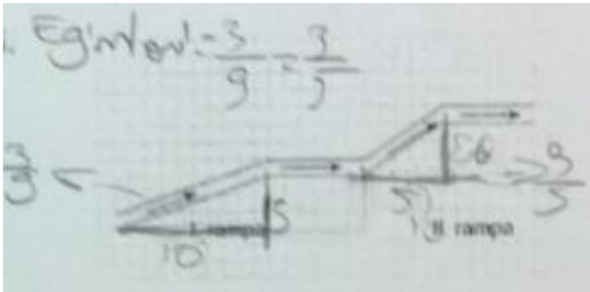


Değişti çünkü hem yükseklik azaldı hemde gidilcek yol azaldı

Gruplar arası tartışmada bir grubun eğimin değişmeyeceğini iddia ederek bu iddiasını “yükseklik azaldı ancak aynı oranda yatay mesafe de azaldı” şeklinde yapması ve iki grubun ise “eğim yol uzunluğuna bağlı değildir dolayısıyla değişmez” sonucuna ulaşması ile tüm sınıf bu sefer eğimin değişmemesine neden olan ilişkiyi aramaya yönlendirilerek yeni bir düşünme ve tartışma süreci başlamıştır. Yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişkiyi sezen öğrencilere söz hakkı verildiğinde, “bu yol üzerinde yükseklik ile yatay mesafenin arasındaki oranın daima sabit kaldığı ve bundan dolayı eğimin değişmediği” sonucuna ulaştıkları görülmüştür. Eğimin yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran olduğunun keşfedilmesi sürecinde Ö1’ in ve grubunun daha çok dinleyici pozisyonunda olduğu araştırmacı günlüğüne not edilmiştir. Nitekim Ö1’ in bireysel çalışma kağıdında bu keşif süreci ile ilgili herhangi bir yazı bulunamamış, grup çalışma kağıdında ise sadece en son ulaşılan genellemenin gerekçesiz bir şekilde yer aldığı dikkat çekmiştir.



Günlük yaşamın adım adım matematikleştirmesi ile matematiğin kendi sembolik dünyasına doğru geçiş yapılmış ve dersin devamında eğimi yorumlamalarının yanı sıra hesaplamalarını da gerektiren soruların olduğu etkinlik yapılmış ve Ö1’ in eğimi hesaplayabildiği görülmüştür. Örneğin;



Bu öğrencinin eğimi sadece bir formül olarak mı hesapladığı yoksa oran olarak mı yapılandırdığı ancak kendisiyle gerçekleştirilen 2. Klinik görüşmede derinlemesine incelenebilmiştir.

Ö1 ile Gerçekleştirilen 2. Klinik Görüşme

Ö1 ile gerçekleştirilen 2. Görüşmede eğimin bağlı olduğu değişkenleri ezbere söylemediği, dik üçgensel modeli bir araç olarak kullanarak bu değişkenleri belirlediği görülmüştür.

G: *Bir şeyin eğiminin değişmesi nelere bağlı?*

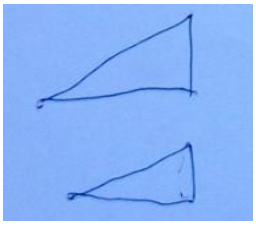
Ö1: *Yani yokuş olarak değil mi?*

G: *Hı hı.*

Ö1: *Yüksekliğe bağlı.*

G: *Sadece yüksekliğe mi bağlı? Başka etkileyen bir şey var mı?*

Ö1: *Bir dakika! Böyle yaparsak böyle olur(eğimleri farklı olan iki üçgen çizdi ve onlara bakarak düşündü).*



Ö1: *İkisine de bağlıdır.*

G: *İkisine de derken?*

Ö1: *Yükseklik veyatay tabana.*

Ancak eğimi, sadece "yükseklik ile yatay mesafeyi bulup, yüksekliği yatay mesafeye böleceği" bir algoritmanın adımlarını uygulayarak hesaplayabildiği görülmüştür. Hesaplama yaparken "önce yüksekliği buluyorduk" diye mırıldanması bir algoritma ile hesaplama yaptığı düşüncesini güçlendirmektedir.

Resimde görülen bayıra, köye ulaşımı sağlamak için yol yapılacaktır. Her yolun girişinde yolun eğimini gösteren, 

şeklinde bir tabela bulunmaktadır. Bu yolun girişine konulacak tabelayı siz hazırlasanız, nelere ihtiyaç duyardınız?

Ö1: *Nasıl yani?*

G: *Yani nelere ihtiyaç duyarsın derken demek istenen, bu tabelanın üzerine yazacağın şey ne? Yolun…?*

Ö1: *Ölçümü.*

G: *Ölçümü! Bu yolun ölçümünü bulmak için sana lazım olan neler var? Ne yaparsın yani o ölçümü bulurken? Benden istediğin bir şey var mı burasının uzunluğu falan gibi?*

Ö1: *Var.*

G: *Neresi mesela?*

Ö1: *Yükseklik ile yatay mesafe.*

G: *Yüksekliğin neresi olduğunu kalemle çizerek sen bana göster. Ben sana orasının ölçümünü vereceğim.*

Ö1: *…*

G: *Orası 140 m. Evet başka?*

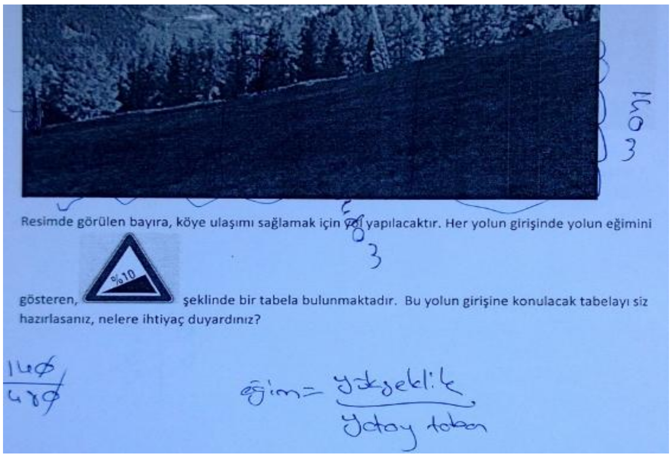
Ö1: *Bir de burası(yatay mesafeyi gösterdi).*

G: *Bir de orası. Orası 480 m. Peki bunları benden aldığına göre tabelaya yazacak olduğun yazıyı hesaplayabilir misin?*

Ö1: *Onu biraz zor yaparım. Onda kafam çok karışıyor çünkü.*

G: *Boşluğa hesaplamaya başlayabilirsin. Yolun eğimini hesaplıyorsun.*

Ö1: *İlk önce yüksekliği yapıyorduk, 140. 480 bu da(yüksekliği yatay mesafeye böldü ve en sade halini bulmadan bıraktı).*



Kendisi için eğim etiketlemesinden ziyade dikliğin anlamlı geldiği ve genellikle araştırma boyunca "diklik ve yokuş" etiketini kullandığı dikkat çekmiştir. Ancak eğim denildiğinde de artık bu kelimeyi anladığı görülmüştür. Oysa bu öğrenci birinci görüşmede kendisine eğim denildiğinde, "eğim yani yokuş" gibi kendisine daha anlamlı gelen kelimelere dönüştürme ihtiyacı duymuştu.

G: *Yokuşu daha fazla dediğin? Matematiksel bir kavram olarak söylersen?*

Ö1: *…*

G: *Biz yokuşa ne diyoruz matematikte?*

Ö1: *Dik. Diklik.*

G: *Başka ne diyoruz?*

Ö1: *Başka gelmiyor aklıma.*

G: *Tamam o zaman diklik diyelim.*

Ö1' in verilen doğrusal görsel üzerinde eğimin alınan noktaya göre değişmeyeceğini içselleştiremediği aksine yükseklik veyatay mesafe değiştiği için eğimin de değişeceğini düşündüğünü vurgulamıştır. Yükseklik ile yatay mesafe arasında oransal ilişkiyi kuramayan Ö1' in grup içerisindeki diğer arkadaşlarının da ders sırasında bu ilişkiyi anlamlandıramamasından dolayı gerekli etkileşime giremediği ve grup içinde ilk vardıkları sonuç olan doğru ya da doğrusal bir görselin üzerindeki noktaya göre yükseklik veyatay mesafenin değişmesinden dolayı eğimin de değişeceği genellemesini benimsediği düşünülmektedir.

G: *Diklik yol değiştikçe değişiyor mu?*

Ö1: *Yukarı çıktıkça daha da yokuş olabiliyor.*

G: *Peki bu yol için yukarıya çıktıkça yolun dikliği değişiyor mu?*

Ö1: *Evet.*

G: *Yolun dikliğinin değişmesinin sebebi ne? Ne değişiyor da diklik de değişiyor?*

Ö1: *Burasındaki yükseklikler.*

G: *Yükseklikler. Yükseklikler değişirken başka değişen veya değişmeyen bir şeyler var mı? Varsa neler var?*

Ö1: *Yolun dikliği değişiyor.*

***G**:* *Yolun dikliği değişiyor. Yükseklik değişiyor. Başka?*

Ö1: *Yatay taban…(onu düşünüyor)*

G: *Yatay taban değişiyor mu değişmiyor mu?*

Ö1: *Onda takıldım işte…(bir süre düşündükten sonra) Değişiyor.*

G: *Yatay taban da değişiyor. Peki değişmeyen bir şey var mı?*

Ö1: *…Şu anda bulamadım.*

G: *Şu anda bulamadın.*

Ö1: *Evet bakıyorum da.*

G: *Yolun uzunluğu hakkında ne düşünüyorsun? Yani gittiğin mesafe. Mesela sen bu dağ yolunun en başındasın.*

Ö1: *Nasıl yani?*

G: *Yolun uzunluğu neresi, gösterebilir misin bana?*

Ö1: *Burası.*

G: *Yukarıya doğru çıktıkça bu yolun uzunluğu değişiyor mu, değişmiyor mu? Tabi senin için yolun uzunluğu, senin gideceğin yolun uzunluğu mesafesi.*

Ö1: *Değişiyor. Gittikçe kısalıyor.*

G: *Bununla birlikte diklik değişiyor mu?*

Ö1: *Evet değişiyor.*

G: *Dikliğin değişmesinin nedeni ne?*

Ö1: *…*

G: *Hani diklik değişiyor dedin ya sen. Dikliği etkileyen şeyler neler ki onun değişmesine sebep oluyor?*

Ö1: *Yükseklik değişiyor.*

G: *Yükseklik.*

Ö1: *Evet yükseklik değişince o da değişiyor.*

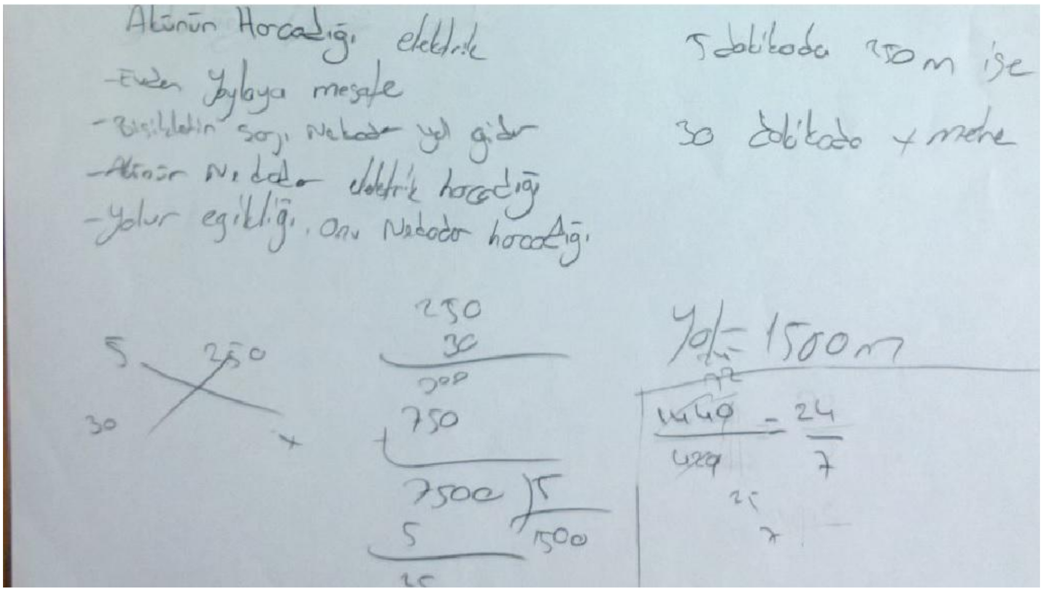
Aynı doğrusal görsel üzerindeki herhangi bir noktada yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın değişmediğini keşfedemeyen ve gruplar arası tartışmalarda ulaşılan bu keşfi de anlamlandırmadığı yukarıdaki görüşme sırasında görülen Ö1'in bağlam durumundan zorlanma ile dikliğin doğru orantılı olduğu çıkarımını yaptığı görülmektedir.

> ***G:*** *Neyi bulman lazım eğimi hesaplayabilmek için?*
> ***Ö1:*** *Yükseklik ve tabanı.*
> ***G:*** *Pekâlâ sen bu tabelayı buraya değil de, başa değil de şuraya koyacak olsan tabelaya yazacak olduğun sayısal değer değişecek mi, değişmeyecek mi?*
> ***Ö1:*** *Değişir.*
> ***G:*** *Neden değişir?*
> ***Ö1:*** *Çünkü yokuşu daha fazla oluyor. Buradayken zorlanmayabilir belki ama buradayken daha çok zorlanır(aşağıdan başlayınca daha çok zorlanacağını ve eğimin zorlanmayla doğru orantılı olduğu yorumunu yaptı).*
> ***G:*** *Buradan buraya daha fazla zorlanabilir diyorsun.*
> ***Ö1:*** *Evet. Daha dik olduğu için.*

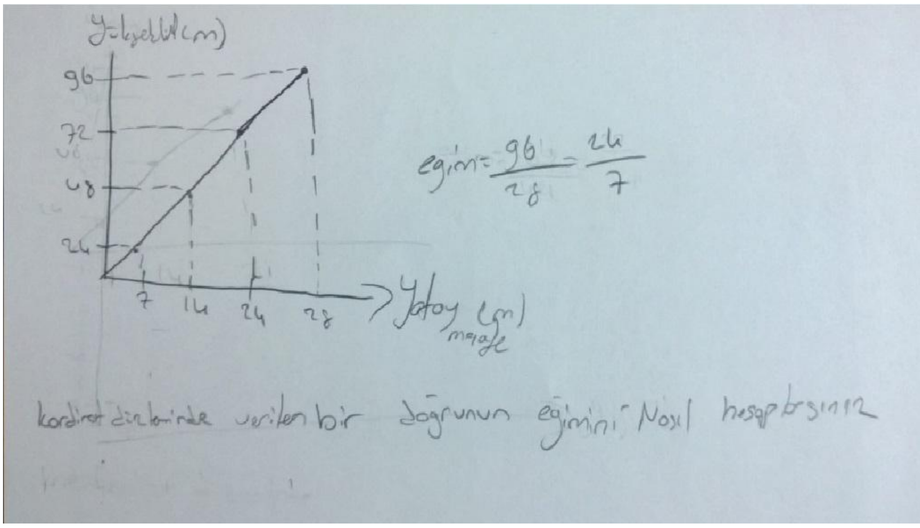
Eğimi hesaplarken bir algoritmanın adımlarını uyguladığı ve bir oran olarak eğimi anlamlandırmadığı görülen Ö1' den öğretim sürecinin son iki dersinde dikey matematikleştirme yapması beklenerek koordinat düzleminde bir doğru için eğimi yeniden düzenlemesi beklenmiştir.

Öğretimin Son İki Derslik Süreci

Bu derste öğrenciler EK 3' te verilen bağlam problemiyle karşı karşıya bırakılmış ve yine günlük yaşamdan bir durumu matematikleştirmelerine fırsat verilerek öğrenme sürecinin onlar için anlamlı olması hedeflenmiştir. Bu bağlam durumunda Ö1 eğimin hesaplanmasının bir gereklilik olduğunu hissederek yüksekliği yatay mesafeye bölerek sonuca ulaşmıştır.

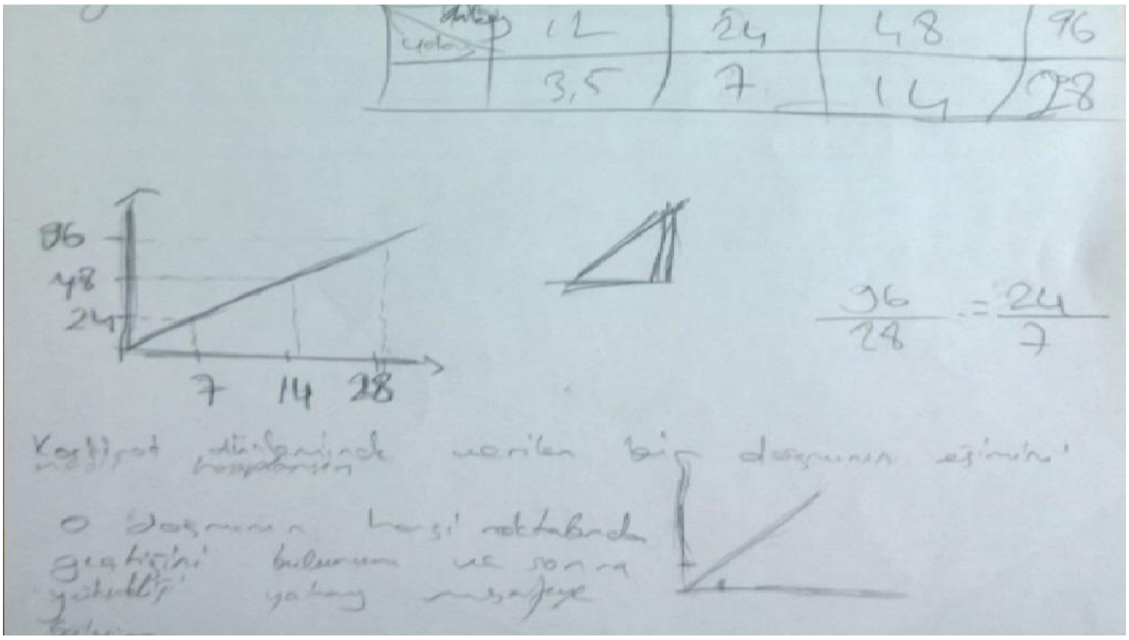


Yükseklik ile yatay mesafe arasındaki doğrusal ilişkiyi gösteren grafiği çizmesi gerektiğinde ise grup arkadaşından yardım alarak çizime başlayabildiği araştırmacı günlüğünde not edilmiştir. Çizmiş olduğu grafikten yüksekliği yatay mesafeye bölerek eğimi bulan Ö1' in artık yüksekliği yatay mesafeye böleceği algoritmayı kolayca eğim hesaplamasında kullanabildiği dikkat çekmiştir. Ayrıca bu öğrencinin koordinat düzleminde verilen bir doğrunun eğimini sorgulaması için verilen grup içi tartışma süresinde, bireysel çalışma kağıdına herhangi bir şekilde yansıtma yapamadığı dikkat çekmiştir.

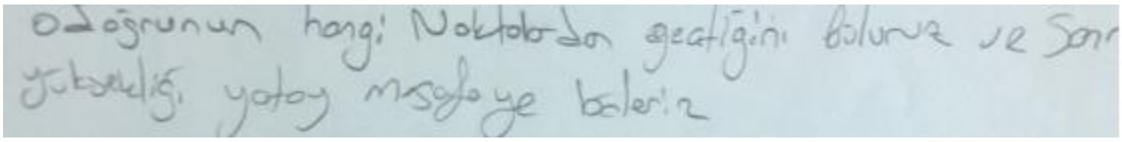


Ancak öğretim öncesinde bilgi, güçlük veyanılgılara göre oluşan gruplardan 4. Grupta yer alan grup arkadaşının "hangi noktadan geçtiğini bulup yüksekliği yatay mesafeye böleceği" şeklindeki genellemesinin Ö1' in grup kağıdına aynen geçirildiği görülmektedir.

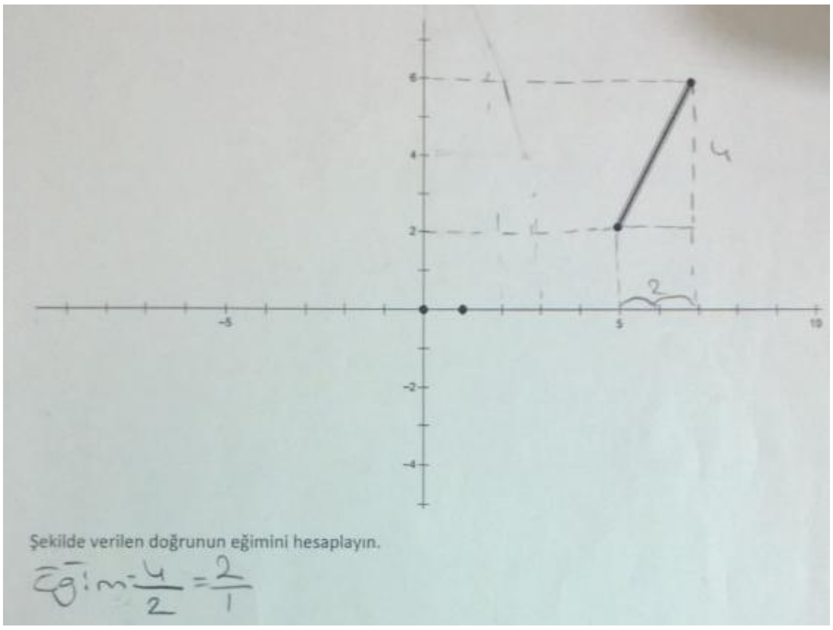
Ö1' in grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



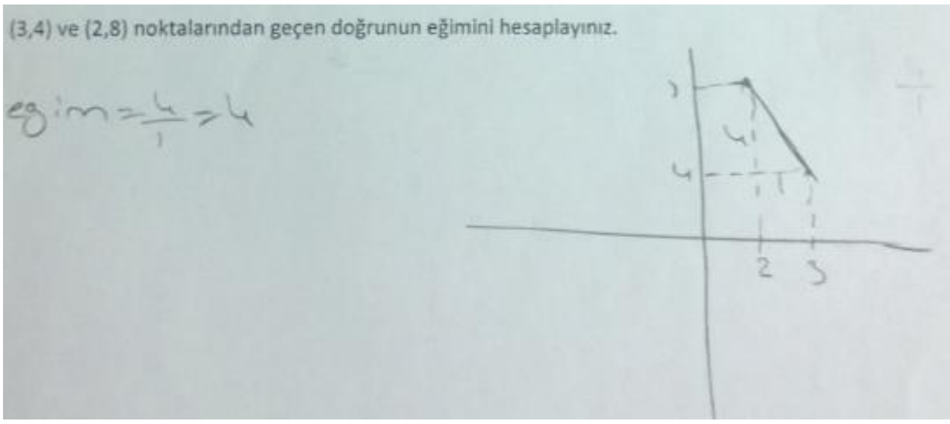
Grup çalışma kağıdından bir görüntü



Daha sonra öğrencilere koordinat düzlemindeki bir doğrunun eğimini hesaplayabilmeleri için fırsat verilmiştir. Ö1, koordinat düzleminde verilen bir doğrunun eğimini bulurken yüksekliği veyatay mesafeyi eksenler yardımıyla bulmuş ve daha sonra gerekli oranlamayı yaparak sonuca ulaşmıştır.

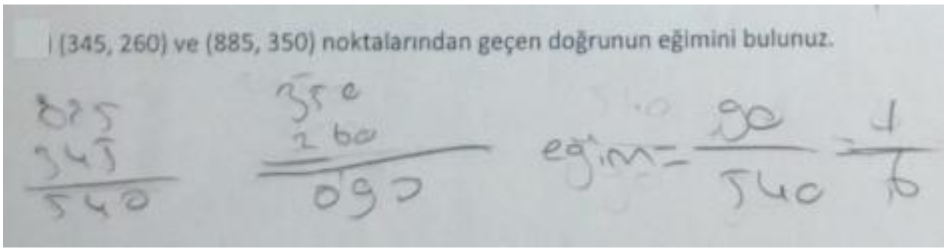


Koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini bulma sorusunda ise istenilen doğruyu yine koordinat düzleminde görselleştirmiş ve bu şekilde yükseklik veyatay mesafeyi bulup oranlayarak eğimi hesaplamıştır.

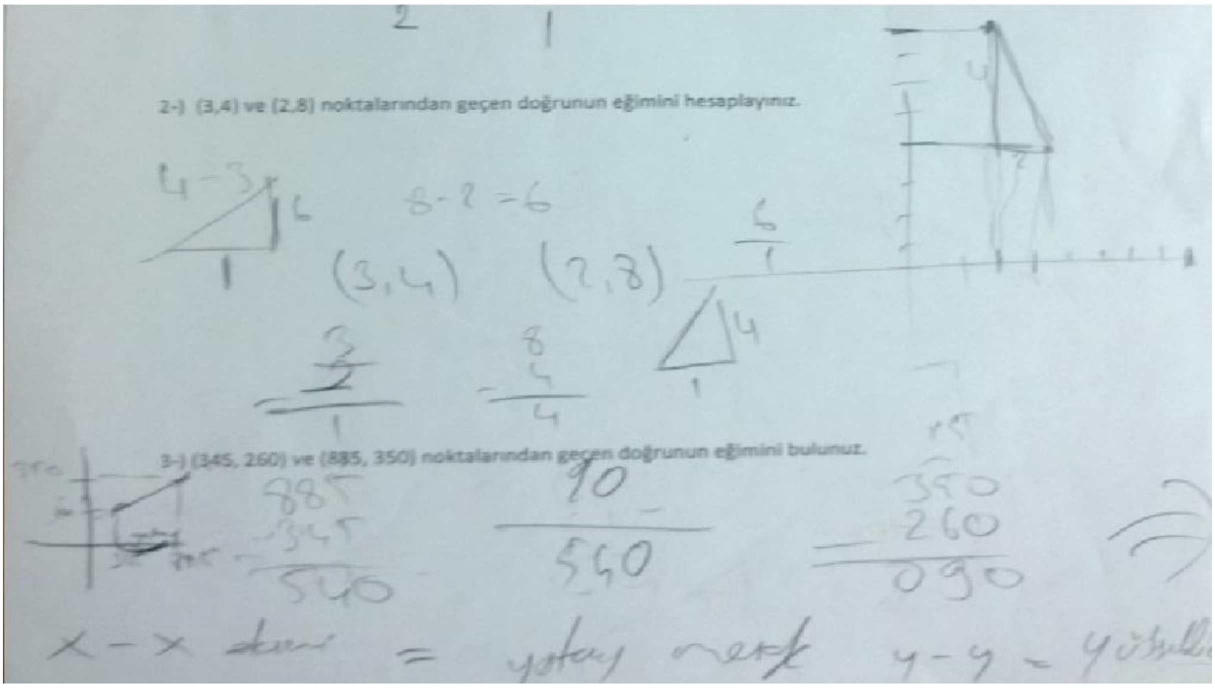


Ancak daha sonradan öğrencilere koordinatları büyük değerler olan iki nokta verilerek, bu noktalardan geçen doğruyu koordinat düzleminde görselleştirmenin mümkün olmadığı hissettirilmiş ve yükseklik ile yatay mesafeyi doğrudan bulmaları gereksinimi yaratılmıştır. Ö1’ in grup içi tartışmalarda grup arkadaşının yardımıyla yüksekliği veyatay mesafeyi koordinatlar arası farklardan bulabileceğini fark ettiği ve öyle sonuca ulaştığı görülmüştür. Grup arkadaşının ise bireysel çalışma kağıdında, bir önceki sorudan yararlanarak koordinat arası farkın yükseklik veyatay mesafeyi vereceğini keşfetmesi dikkat çemiştir.

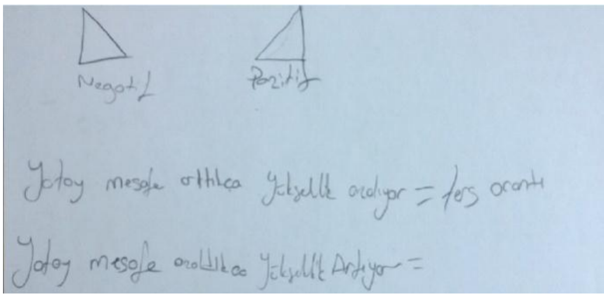
Ö1'in bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



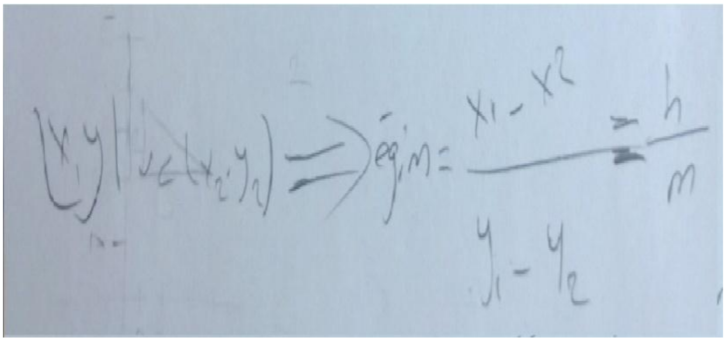
Ö1' in grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Bu sırada bazı öğrencilerin negatif eğimi fark etmesi ile tüm gruplar negatif ve pozitif eğim üzerine düşünme sürecine bırakılmıştır. Ö1' in bu tartışmalarda grup çalışma kağıdında sadece varılan sonucu yazması ve ayrıca gruplar arası sınıf tartışmalarında pasifliği dikkat çekmiştir.

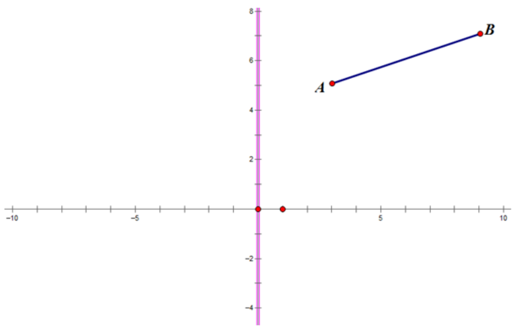


Daha sonra koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğiminin hesaplanması için cebirsel bir genelleme bulmaları istendiğinde Ö1' in grup kağıdında kendisinin ulaştığı bir genelleme olmadığı ancak gruplar arası tartışmalar sonunda ulaşılan (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) noktalarına ait genellemeyi not ettiği görülmüştür. Bu sırada yüksekliği "h", yatay mesafe için "m" etiketini kullandığı görülmüştür.



Ö1 ile Gerçekleştirilen 3. Klinik Görüşme

Katılımcılarla yapılan bu son klinik görüşmede Ö1' in koordinat düzleminde verilen bir doğrunun eğimini yükseklik veyatay mesafeyi bulup oranlayarak sonuca ulaştığı görülmüştür. Bu öğrencinin ikinci görüşme boyunca eğimi "yüksekliği veyatay mesafeyi bul ve yüksekliği yatay mesafey böl" şeklinde bir algoritmayı adım adım uyguladığı görülmüştü. İçselleştirdiği görülen bu algoritmayı koordinat düzleminde bir doğru için yansıtabildiği düşünülmektedir.



Görmüş olduğun AB doğrusunun eğimini hesaplayabilir misin?

Ö1: *Evet.*

G: *Kalem vereyim.*

Ö1: *3. burası da 5(A noktasının koordinatlarını buluyor, sayarak). 9. Böyle olacak(B noktasının koordinatlarını buluyor). 1,2,3,4,5,6(x ekseninde 3 ile 9 arasındaki mesafeyi sayarak buldu).*

G: *Evet. Yani şu anda…tamam devam edelim. Sonra?*

Ö1: *1,2(y ekseninde 5 ile 7 arasındaki farkı buldu sayarak).*

G: *Neleri buldun sen şu anda?*

Ö1: *Yükseklikle yatay mesafeyi.*

G: *Bunları bulurken ne yaptın? Nelerden yararlandın?*

Ö1: *Bunları bulurken…neyden yararlandım?*

G: *Yaptığın şeyi anlatmanı istiyorum senden. Ne yaptın sen burada?*

Ö1: *Buraları falan buldum eğimini bulmak için(koordinatlar,yükseklik veyatay mesafeyi gösteriyor). Sonra burayı buldum(yüksekliği gösteriyor). 2 bölü 6.*

G: *Tamam eğim nedir burada? Sonucunu da yazabilir misin bize?*

Ö1: *(2/6 yazdı) yükseklik bölü yatay.*

Kendisine doğrudan iki noktanın koordinatları verilerek o doğrunun eğiminin bulması istendiğinde ise koordinatlar arası farklardan yükseklik veyatay mesafeyi, koordinat düzleminde görselleştirmeksizin bulabilmiştir. Ancak noktaların y koordinatlarına yükseklik demesi dikkat çeken Ö1' in koordinatlar arası farklarla aslında yükseklik ile yatay mesafeyi bulduğunun farkında olduğu görülmüş olmasına rağmen "derste böyle yapıyorduk" şeklinde savunma yapması henüz tam içselleştirmeyi başaramadığını düşündürtmektedir.

G: *Ben sana sadece iki nokta verseydim, mesela…Yaz istersen ben sana noktaların koordinatlarını vereyim: 3' e 5 ve 7' ye 9(öğrenci yazıyor bu arada). Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplayabilir misin?*

Ö1: *…(biraz düşündü)Evet.*

G: *Nasıl bulursun? İstersen hem anlat hem yap ya da istersen…*

Ö1: *(7' den 3' ü çıkarttı 4 buldu). 5 çıkartacağız(9' dan 5' i çıkarttı ve 4 buldu).*

G: *Kaç eğim?*

Ö1: *4/4. Yani 1.*

G: *Peki, neden bu yolu kullandın?*

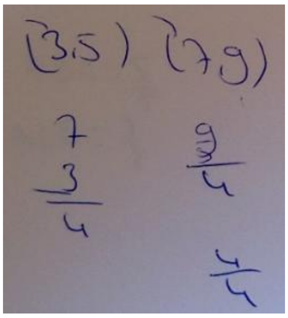
Ö1: *Nedenini valla ben de bilmiyorum. Derste öyle yapıyorduk oradan aklıma geldi.*

G: *Yani yaptığın şey ne burada? Anlatabilir misin?*

Ö1: *Yükseklik ile yüksekliği çıkarttım.*

G: *Hangileri yükseklik?*

Ö1: *3 ile 7(yanlış söyledi bunlar x koordinatları olduğu için yatay mesafede kullanılır). Ondan sonra yatay mesafe 5 ile 9' u çıkarttım(bunda da tam tersini söylemiş oldu. aslında yüksekliği bulmuş oldu).*



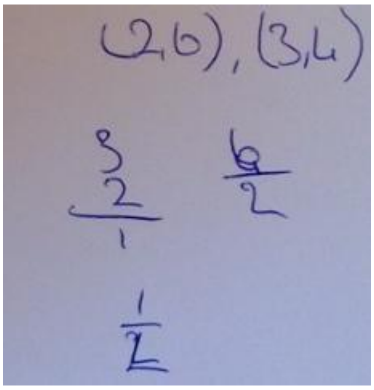
Öğrencinin koordinatlar arası farkı alırken aslında yatay mesafe ve yüksekliği bulduğunun farkında olması, onun kendisi için hiç anlamı olmayan bir formül ya da algoritma geliştirmediğini ortaya koymuştur. Ö1 için yüksekliği yatay mesafeye bölerek eğimi hesaplayacağını içselleştirdiği ve koordinat düzleminde bir doğru için de bunu uyarladığı düşünülebilir. Ancak bu görüşmenin devamında bu öğrencinin daima büyük sayıdan küçük sayıyı çıkarak yüksekliği veyatay mesafeyi hesaplaması(ve buna bağlı olarak hiç negatif eğim sonucu bulamaması), daha önceden yaptığının nedeni sorulduğunda "*bilmiyorum, derste de böyle yapıyorduk*" cevabını vermesi koordinat düzleminde bir doğrunun eğimi için geliştirdiği stratejiyi tam olarak anlamlı bir şekilde soyutlayamadığını düşündürmüştür.

G: *Hımm. Peki şöyle bir şey versem sana, yaz istersen: 2' ye 6. Diğer noktanın koordinatları 3' e 4. Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini istiyorum ben senden?*

Ö1: *Hesaplarız. Yine aynısını yaparız.*

G: *Peki yap bakalım.*

Ö1: *Niye öyle bir bakış attınız hocam ya(gülüşmeler). (3' ten 2' yi çıkardı 1 ve 6' dan 4' ü çıkardı 2). ½.*



G: *Şimdi sen ben bunları derste yaptığımızdan hatırlıyorum dedin. Peki bu ne?*

Ö1: *Formül. Eğimi bulmak için.*

G: *Eğimi bulmak için kullanılan bir formül. Ne zaman kullanıyorsun bu formülü?*

Ö1: *Yüksek rakamlarda. Yani 100'lerde falan olursa.*

G: *Daha yüksek sayılarda mı diyorsun yani?*

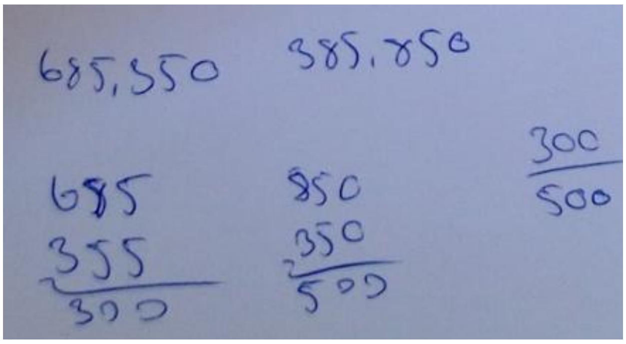
Ö1: *Evet.*

G: *Niye daha yüksek sayılarda kullanıyorsun bunu?*

Ö1: *Öğretmenim çünkü çizerken zorlanacağız.*

G: *Peki ben sana nokta versem yine: (685,350) ve (385,850). Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini nasıl hesaplarsın?*

Ö1: *...(koordinatların farklarını aldı ve onları böldü) 300/500.*



Öğretim sürecinde koordinat düzleminde iki noktası verilen doğrunun eğimini nasıl hesaplayacağını gösteren cebirsel bir genelleme yapmaları istendiğinde pasif görünen ve en son varılan genellemelerden biri olan y_2-y_1/x_2-x_1 ‘ i grup çalışma kağıdına yazan Ö1’ in bu görüşmede kendisinden genelleme yapması istendiğinde bu genellemeyi hatırlamadığı ortaya çıkmıştır ki bu da öğrencinin kendisi için anlamsız gelen, doğrudan grup çalışma kağıdına geçirdiği bu cebirsel formu ezberleme gereği de duymadığını göstermiştir. Ancak başka iki harf kullanarak iki nokta belirlemiş ve genellemesini sanki zihnindeki bir algoritmayı uyguluyormuş gibi ortaya koymuştur. Bu süreçte ortaya koyduğu cebirsel form, onun zihninde eğimi, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişkiden ziyade bu ikisi arasındaki sadece bölme ilişkisi ile oluşturduğunu göstermektedir.

G*: Peki ben sana cebirsel bir ifade ile eğimi yazabilir misin desem?*

Ö1: *Nasıl yani?*

G: *Yani harf kullanarak, harfli ifadelerle iki noktası bilinen doğrunun eğimini nasıl hesaplayacağımızı formüle edebilir misin?*

Ö1: *Hatırlamıyorum. Normalde derste yapmıştık.*

G: *O zaman ben sana iki nokta vereyim. Mesela, harfleri kullanarak iki nokta yaz hadi.*

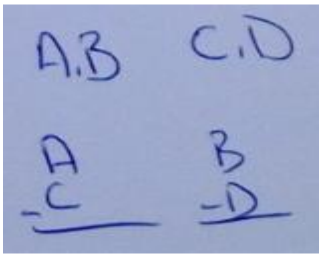
Ö1: *(A,B ve C,D yazdı)*

G: *Koordinatları (A,B) ve (C,D) diyorsun. Bu doğrunun eğimini nasıl hesaplarsın?*

Ö1: *A ile C’ yi çıkartırım B ile de D’ yi.*

G: *Yaz bakalım onu.*

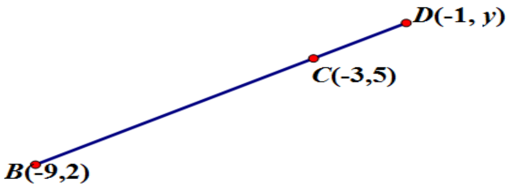
Ö1: *...(yazıyor).*



G: Ondan sonra da sonucu bulurum diyorsun.

Ö1'e bu görüşmede aynı doğru üzerindeki üç nokta verilerek, bu noktalardan bir tanesinin y koordinatını bulması istendiğinde eğimi çözüm sürecine çağıramamıştır. Aynı doğru üzerinde eğimin alınan iki noktaya göre değişmeyeceğini fark edememiştir.

***G:** Ondan sonra da sonucu bulurum diyorsun. O zaman ikinci kağıda bakalım . Sana şöyle bir soru sorsam ben. Bu doğru üzerinde 3 nokta verilmiştir. D noktasının y koordinatını bulabilir misin?*



Bu doğru üzerinde 3 nokta verilmiştir. D noktasının y koordinatını bulabilir misin?

***G:** Hadi bakalım düşünmeni istiyorum.*

***Ö1:**..(düşündükten sonra)Nasıl bulacağımızı bilemiyorum.*

***G:** Düşün. Neler yapabilirsin? Bu 3 noktanın aynı doğru üzerinde olması sana ne gibi bir fayda sağlayabilir gibi şeyler düşün.*

***Ö1:** ...*

***G:** Bu 3 noktanın ortak özelliği ne?*

***Ö1:** Aynı çizgide olmaları.*

***G:** Güzel. Peki aynı çizgide olduklarını kullanabileceğin bir durum var mı? Diğer bir deyişle aynı çizgide olmaları bu 3 nokta için başka bir ortak özellik sağlar mı? Nasıl hesaplayabilirsin yani y koordinatını nasıl bulabilirsin?(öğrenci düşünürken ona ipuçları veriliyor).*

***Ö1:** ...(soruya bakarak düşünüyor)*

***G:** Her şeyi yapabilirsin.*

***Ö1:** ...*

***G:** Farklı bir şeyler de kullanabilirsin. Mesela bak burada koordinatı bulabilir misin diyor. Koordinatlardan bahsediyor. O zaman neden yararlanabilirsin?*

***Ö1:** Aklıma hiçbir şey gelmiyor valla kafam durdu.*

G: *Sayı doğrusundan yararlanabilir misin mesela koordinat diyorsa?*

Ö1: *Yararlanırız.*

G: *Nasıl yararlanırsın sayı doğrusundan?*

Ö1: *Koordinat çizerek.*

Araştırmacının desteği ile koordinat düzleminden yararlanabileceğini gören Ö1' in bu doğruya uygun koordinat düzlemini çizmekte çok zorlandığı, noktaların koordinatları tam olarak kullanmaktan ziyade eksenleri kendisinin eşit aralıklar çizerek uzunluk belirlemeye çalıştığı görülürken önceden iki nokta verildiğinde bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplayabildiği görülen bu öğrencinin bu sefer doğru üzerindeki noktaları ele alarak eğimi doğrudan hesaplayamadığı aksine yükseklik veyatay mesafeyi bulma gayretinde olduğu görülmüştür. Bu durum onun, doğru üzerindeki iki noktanın koordinatlarından yararlanarak eğimi çizim yapmaksızın bulacağı genellemeyi içselleştiremediğini göstermektedir.

G: *Düşün düşün. Sadece düşünmeni istiyorum ben. Zorlanacaksın tabi ki normal bu. Farklı farklı şeyler olabilir. Sesli düşünmen, kağıt üzerine çizmen benim için önemli. Ben onları görmek istiyorum.*

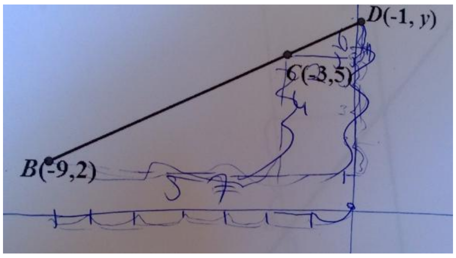
Ö1: *Bunu tam olarak çizersek üçgen oluşacak(bu doğruyu hipotenüs kabul eden dik üçgenden bahsediyor). Böyle çizersek.*

G: *Güzel yap bakalım.*

Ö1: *Koordinat çizersek de burası ile burasını(oluşan üçgendeki yatay mesafe ile yüksekliği gösteriyor).*

G: *Evet. Ne yapacaksın şimdi?*

Ö1: *Burası 1 olsa(halbuki 2 demeliydi oraya) 2,3,4,5,6. O zaman burası 5 olur.(C noktasının y koordinatını doğru işaretlemiş oldu). (koordinat düzlemini çizdi ve üçgen oluşturdu. Daha sonra y ekseninde koordinatlara uygun aralıklar çizmeye çalıştı. Ama (2,-9) olan noktanın y koordinatının 2 olmasına dikkat edemedi. Daha sonradan yatayı da çizdi ama bunun gibi koordinat düzlemine yerleştirme ile ilgili hatalar yaptı).*



G: *Buradan devam edebilir misin? Güzel bir şey yakaladın aslında.*

Ö1: *Sonra burasını yaparız(yatay mesafeyi gösteriyor). (eşit aralıklarla çizdikten sonra) Burası 7 olur. (halbuki 8 olmalı orası 1 eksik çizdi aralıkları. Direkt koordinatlardan yararlanamıyor). Sonra da eğimini buluruz.*

G: *Orasının 7 olduğunu nasıl buldun?*

Ö1: *Buradaki mesafeyle(yatay mesafeyi gösteriyor).*

G: *Kendin eşit aralık vererek mi buldun yani?*

Ö1: *Evet.*

G: *Peki ne yaptın sen şu anda?*

Ö1: *Eğimi buldum(aslında yatay mesafe ve yüksekliği yanlışlıklar olsa da bulmasına rağmen eğimleri hesaplamamıştı).*

G: *Eğimi bulman sana ne gibi bir fayda sağlayacak? Neden eğimi buldun?*

Ö1: *…(yarım dakika düşündü) Devamı gelmiyor ki kafam durdu.*

G: *Sen şu anda bir şeyi hiç kullanmadın bu soruda. Yani burada verilenlerden bir şeyi kullanmadın sen. O kullanmadığın şey ne?*

Ö1: *Bir şeyi kullanmadım…(düşünürken mırıldandı)*

G: *Neyi kullanmadın?*

Ö1: *Yani koordinat değil de normal bir şekilde bakarsak, buradan da üçgen oluşturabilirim buradan da böyle(BC ve DC' yi hipotenüs kabul eden dik üçgenlerden bahsediyor).*

G: *Tamam. Oluştur o zaman ne güzel. İstediğin gibi yapıp anlatabilirsin bana.*

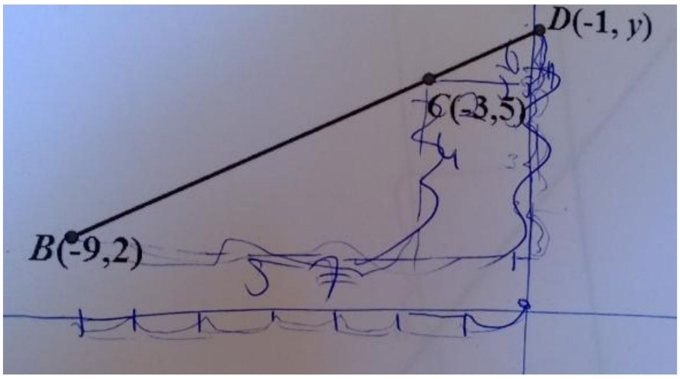
Ö1: *(çizimi yaptı ve kenar uzunluklarını yine x ve y eksenlerinden yararlanarak buluyor) burası 5 burası da 4(BC' yi hipotenüs kabul eden dik üçgenin yatay mesafesi ve yüksekliği). Burası 2 olur burası 1 olur(CD' yi hipotenüs kabul eden dik üçgenin yatay mesafesi ve yüksekliği).*

G: *Neresi 2 olur dedin? Ha şurası evet. Orasının 1 olduğunu nereden biliyorsun?*

Ö1: *Kendi şeyime göre 1,2,3 diye sıraladım. Buraya 5 geldi. 5 olduğu için böyle yaptığım için 1 oldu(5' ten sonra göz kararı 1 yukarısı olur diyor yüksekliği göz kararı buluyor). 6.*

G: *6. Neresi 6 diyorsun?*

Ö1: *Burası(y koordinatını veren tüm yüksekliği gösterdi).*



Araştırmacı tarafından eğim hesaplaması için teşvik edilmemesine rağmen eğim hesapladığı görülen öğrencinin eğim kullanmasının nedenini sezgisel olduğunu ve "üçgen çizince eğim aklıma geldi" diye açıklaması onun belki de görüşmenin eğim ile ilgili olmasından dolayı eğim hesaplamaya çalıştığını düşündürmüştür. Bu doğru üzerinde eğimin aynı olması gerektiğini sürece çağıramamış olması, koordinat düzlemi ve doğru denklemi ile ilgili önbilgilerinin eksikliğinin, onun sonuca ulaşmasını engellediği açıktır.

G: *Bize daha çok yardımcı olabilecek bir şey bulabilir miyiz burada? Bu üç noktanın ne gibi özelliği olabilir?*

Ö1: *...*

G: *Şimdi sen tamam güzel koordinat düzleminde belirledin ama aralıkları kendin belirledin... Mesela burada oluşturduğun üçgenler güzel. Onların sana faydası olabilir mi?*

Ö1: *Bilmiyorum ya kafam durdu yemin ediyorum. Devamı gelmiyor ya.*

G: *Bu 3 nokta hepsi aynı doğru aynı çizgi üzerinde dedin sen.*

Ö1: *Evet.*

G: *Peki o zaman budan faydalanarak bir şeyler söyleyebilir misin? "Aynı çizgi üzerinde olması şunu sağlıyor bize" gibi.*

Ö1: *(hayır anlamında bir ses çıkardı) diyemeyeceğim. Resmen kafam durdu.*

G: *Peki sen burada eğimleri hesaplarım demiştin. Neden eğimleri hesaplıyorsun acaba? Eğimlerin sana ne katkısı var ki? Eğim nereden aklına geldi?*

Ö1: *Şöyle baktığımda üçgen oluşturacağımız aklıma geldi. Üçgen oluşturursak eğim lazım. O yüzden…ayy terledim. Hocam geçin bu soruyu ya(gülüyor)*

G: *O zaman bak sen eğimi kullanıyorsun ya eğimden faydalanarak bir yere varabilir misin?*

Ö1: *Normalde varırdık da ben varamıyorum. Kafam durdu…Hiçbir yere varamadım ya.*

Görüşme boyunca eskiden kullandığı "diklik, bayır, yokuş" kelimelerinin yerine artık eğimi kullanması dikkat çekerken doğru üzerinde herhangi bir noktada yüksekliğin yatay mesafeye oranının sabit kalacağını ve bu sebeple eğimin değişmeyeceğini anlamlandıramadığı tekrar ortaya çıkmıştır.

G: *Bu doğrunun üzerinde yürüsen. Bu 3 noktadan geçeceksin. Bu noktalardan geçtikçe bir şeyler değişecek ya da değişmeyecek.*

Ö1: *Eğim değişecek. Yükseklik falan değişecek.*

G: *Eğim değişecek. Yükseklik değiştiği için.*

Ö1: *Yükseklik değiştiği için eğim de değişecek.*

G: *Peki eğim sadece yüksekliğe mi bağlı?*

Ö1: *Bir de yatay mesafeye tabana.*

G: *Ama yine de eğim değişecek mi diyorsun?*

Ö1: *Evet.*

G: *Neden değişecek?*

Ö1: *Hocam, burasıyla burası bir değil. Daha yüksek oluyor çünkü buraya gelirse.*

G: *Peki yatay mesafeler bir mi?*

Ö1: *(hayır anlamında başını salladı).*

G: *Onlar da değil.*

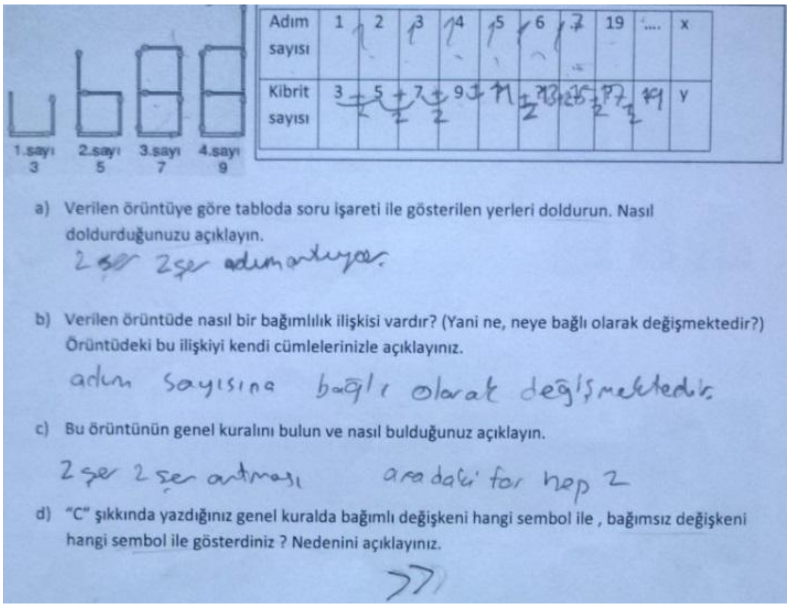
Ö1: *Burada kısalıyor mesela. Burada 5 oluyor burada 7.*

Ö1’ in herhangi bir doğru ya da doğrusal görselin eğimini “yüksekliği veyatay mesafeyi bul ve yüksekliği yatay mesafeye böl” şeklinde geliştirdiği bir algoritma ile hesapladığı ve eğimi yükseklik ile yatay mesafe arasındaki bir oran olarak yapılandıramadığı görülmüştür. Yatay matematikleştirme sürecinde farklı eğimlere sahip doğrusal görselleri anlamlandırarak yorumlayabildiği görülen bu öğrencinin oransal ilişkiyi keşfedemediği ve bu keşfe kendisinin ulaşamamasının yanı sıra grup içi ve gruplar arası tartışmalarda da anlamlandırmadığı görülmektedir. Dikey matematikleştirme yapma fırsatı sağlayan soru ve bağlamlarda yükseklik/ yatay mesafeyi bir formül gibi kullanmayı başardığı ve eğim bulmak için kullandığı bu formülü içselleştirdiği açıkça görülmüştür. Koordinat düzleminde bir doğru için, zihninde oluşan eğim şemasını uyarlaması beklenen bağlamda ise yükseklik veyatay mesafeyi bulma ihtiyacından doğan koordinatlar arası fark keşfini anlamlandırmış fakat eğimi bir oran olarak yapılandırmadığı için herhangi bir noktada aldığı yükseklik veyatay mesafeden eğimi hesaplayabileceğini keşfedememiş ve anlamlandıramamıştır. Ayrıca iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplamayı başarabildiği görülmesine rağmen doğru üzerinde üç nokta verildiğinde herhangi ikisinden yararlanarak eğime ulaşamaması dikkat çekmiştir. Dahası aynı soruda koordinatları verilen iki noktadan geçen doğru için zihninde geliştirdiği “ordinatlar arası farkı bul(yükseklik), apsisler arası farkı bul(yatay mesafe) sonra yüksekliği yatay mesafeye böl” algoritmasını çağırmaması onun koordinatları verilen iki noktadan geçen bir doğru için uyguladığı bu algoritmayı içselleştiremediğini düşündürmektedir.

Ö2’ nin Eğim Kavramını Oluşturma Sürecine İlişkin Bulgular

Öğrenim öncesinde uygulanan açık-uçlu testten elde edilen verilerin analizi sonucunda oluşan gruplardan ikinci grupta yer alan Ö2’ nin, sabit artan bir örüntüyü yinelemeli stratejiyi kullanarak devam ettirebilirken örüntünün kuralını ise sadece sözel olarak ifade edebildiği görülmüştür. Ayrıca bağımlılık ilişkisini kısmen de olsa görebildiği dikkat çeken bu öğrencinin değişken kavramının ise terim olarak farkında olmadığı sonucuna varılmıştır.

Ö2' nin bağımlılık ilişkisini görebildiğini gösteren diğer iki görüntü



1.sayı 3 | 2.sayı 5 | 3.sayı 7 | 4.sayı 9

Adım sayısı	1	2	3	4	5	6	7	19	....	x
Kibrit sayısı	3	5	7	9	11	13	15	17	19	y

a) Verilen örüntüye göre tabloda soru işareti ile gösterilen yerleri doldurun. Nasıl doldurduğunuzu açıklayın.

2 şer 2 şer adım artıyor.

b) Verilen örüntüde nasıl bir bağımlılık ilişkisi vardır? (Yani ne, neye bağlı olarak değişmektedir?) Örüntüdeki bu ilişkiyi kendi cümlelerinizle açıklayınız.

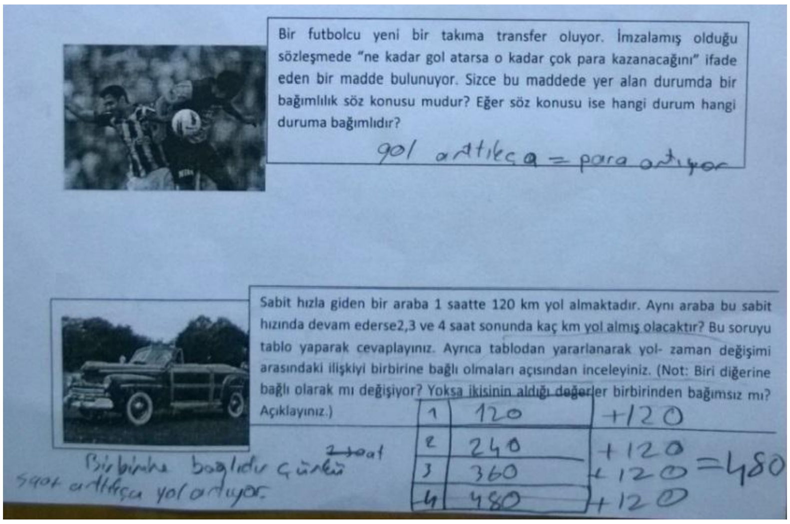
adım sayısına bağlı olarak değişmektedir.

c) Bu örüntünün genel kuralını bulun ve nasıl bulduğunuz açıklayın.

2 şer 2 şer artması arадaki fark hep 2

d) "C" şıkkında yazdığınız genel kuralda bağımlı değişkeni hangi sembol ile, bağımsız değişkeni hangi sembol ile gösterdiniz ? Nedenini açıklayınız.

??



Bir futbolcu yeni bir takıma transfer oluyor. İmzalamış olduğu sözleşmede "ne kadar gol atarsa o kadar çok para kazanacağını" ifade eden bir madde bulunuyor. Sizce bu maddede yer alan durumda bir bağımlılık söz konusu mudur? Eğer söz konusu ise hangi durum hangi duruma bağımlıdır?

gol artıkça = para artıyor

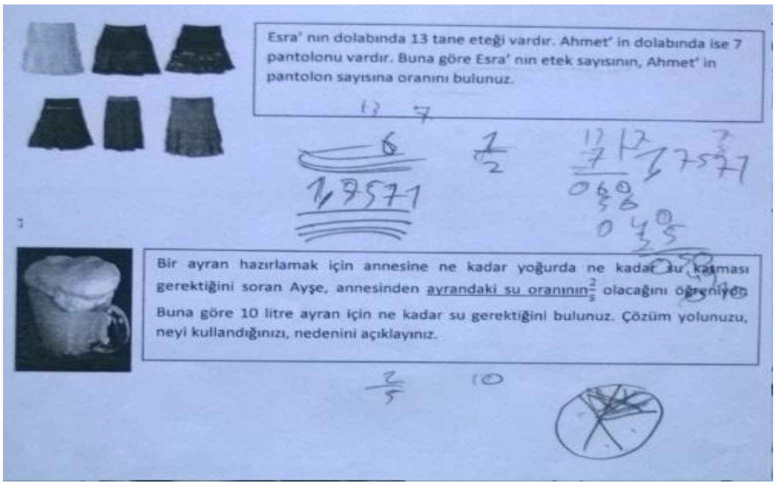
Sabit hızla giden bir araba 1 saatte 120 km yol almaktadır. Aynı araba bu sabit hızında devam ederse2,3 ve 4 saat sonunda kaç km yol almış olacaktır? Bu soruyu tablo yaparak cevaplayınız. Ayrıca tablodan yararlanarak yol- zaman değişimi arasındaki ilişkiyi birbirine bağlı olmaları açısından inceleyiniz. (Not: Biri diğerine bağlı olarak mı değişiyor? Yoksa ikisinin aldığı değerler birbirinden bağımsız mı? Açıklayınız.)

1	120
2	240
3	360
4	480

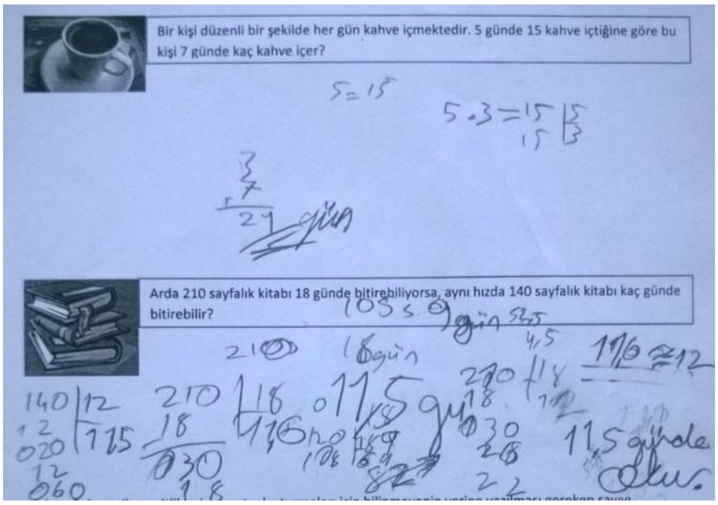
+120 +120 +120 +120 = 480

Birbirine bağlıdır çünkü saat arttıkça yol artıyor.

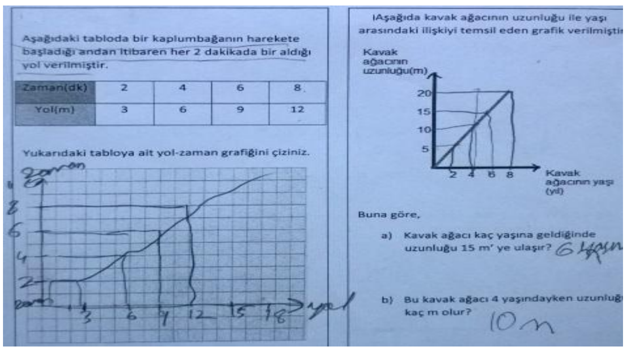
Oran-orantı bilgisine yönelik olan sorulardan toplanan veriler doğrultusunda ise Ö2' nin iki niceliği en basit anlamda oranlayabildiği ancak verilen bir oranı yorumlaması gereken günlük bir problemde başarısız olduğu görülmüştür.



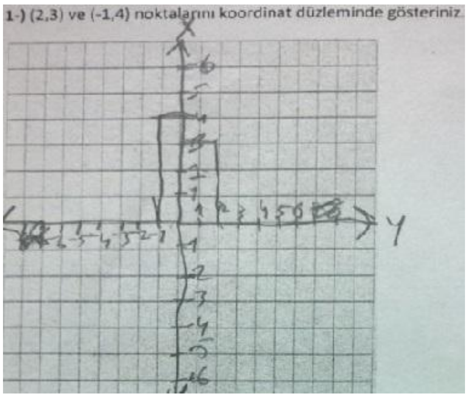
Bu öğrencinin doğru orantı gereken günlük yaşamdan problemlerde orantı kurmaksızın birime indirgeyerek sonuca ulaşabildiği görülmüştür. Ancak birime indirgeyemediği(kalanlı bölme gerektirdiği için) problemlerde, orantı da kuramadığı için başarısız olduğu sonucuna varılmıştır.



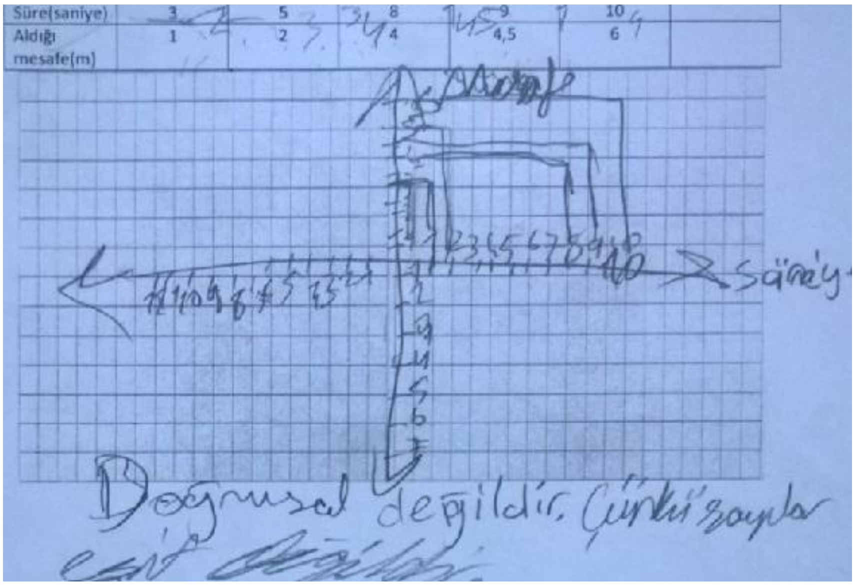
Aralarında doğrusal ilişki olan iki değişkene ait çizgi grafiğini oluşturabildiği ve yorumlayabildiği görülen Ö2, koordinatları verilen noktaların koordinat düzleminde yerlerini belirleyebilmiş ancak eksenlerin isimlerini yanlış belirlemiştir.



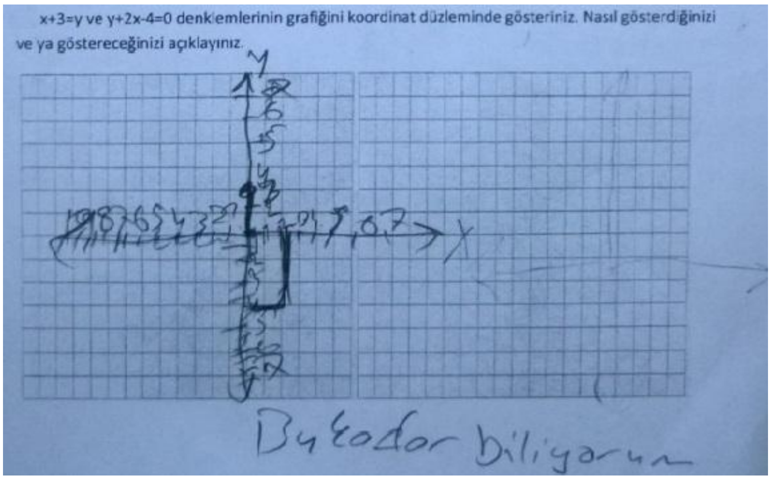
Koordinat düzleminde noktaları belirlediği sorudan bir görüntü



İki değişken arasındaki ilişkinin doğrusallığını belirleyebilen ancak tam olarak açıklayamayan bu öğrencinin doğru denklemine ise işlemsel ya da kavramsal olarak sahip olmadığı sonucuna varılmıştır.



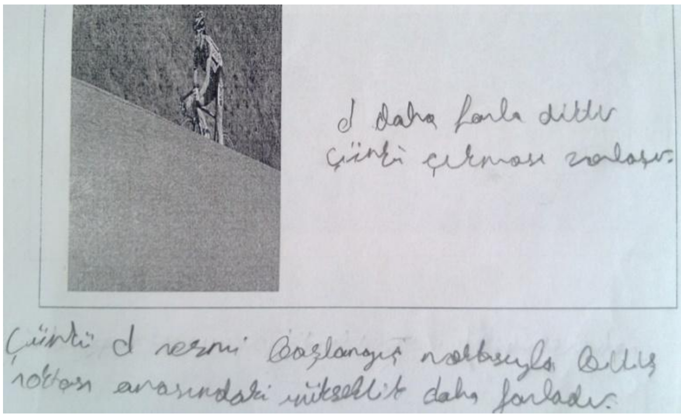
Denklemi verilen bir doğrunun grafiğini çizme sorusundan bir görüntü



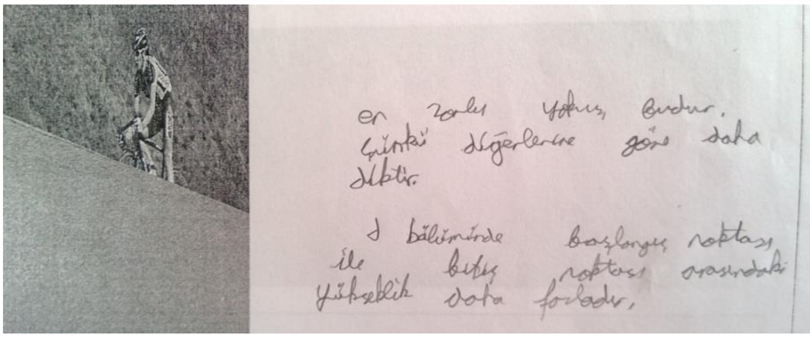
Öğretimin İlk İki Derslik Süreci

Bir bisikletlinin farklı eğimlere sahip yollarda zorlanışını ele alan günlük yaşam bağlamında Ö2' nin eğim kavramının günlük yansımalarından olan "dikliği" öğrenme sürecine çağırabildiği görülürken, neden olarak ise "çıkması daha zorlaşır" savunması ile eğimin bağlı olduğu değişkenleri doğrudan kendi bilgileri yardımıyla fark edememiştir. Ancak açık uçlu testten elde edilen verilerin analizinde oluşan gruplardan 5. Grupta yer alan grup arkadaşının yüksekliği görselden yararlanarak tanımladığı ve ona bağlı olarak dikliği açıkladığı görülmüş ve Ö2' nin de bu açıklamayı hem grup hem de bireysel çalışma kağıdına not ettiği görülmüştür.

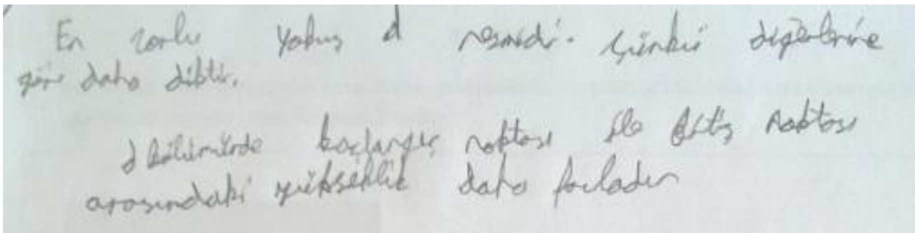
Ö2' nin bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

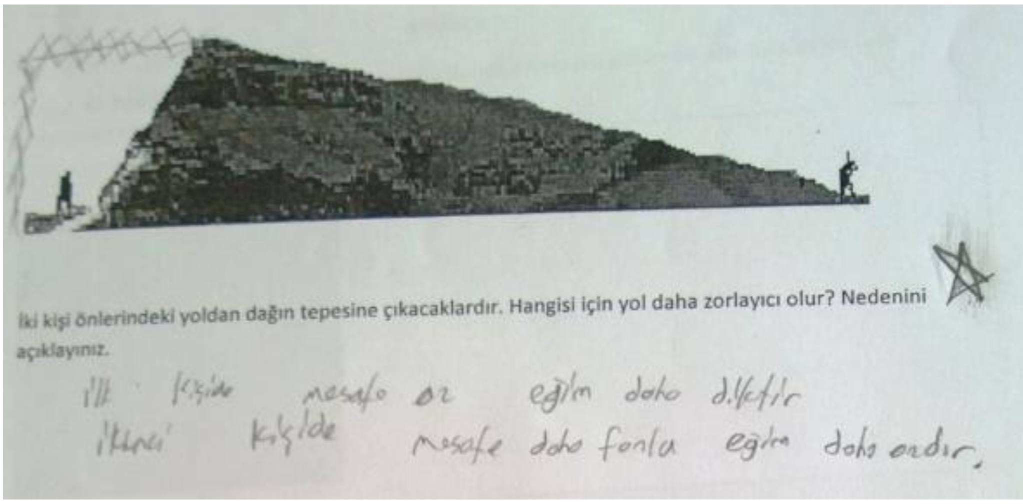


Ö2' nin grup çalışma kağıdından bir görüntü

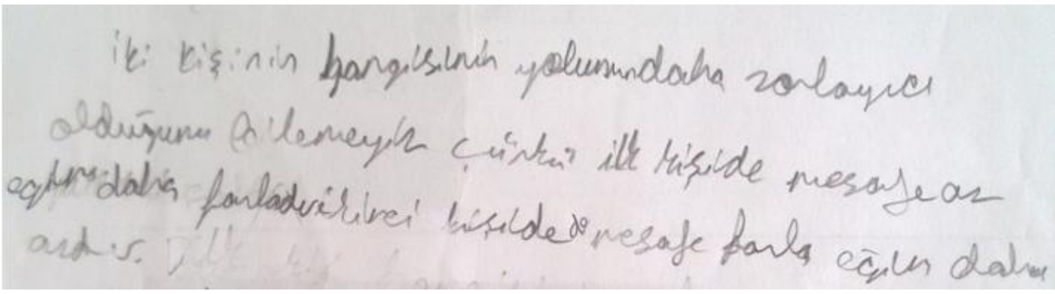


Eğim kelimesini henüz kullanmasa da diklik ile yükseklik arasında ilişki kurmaya başladıkları görülen Ö2 ve grubunun aynı tepenin zirvesine tepenin eteklerinin farklı iki yanından tırmanan iki kişinin zorlanmaları hakkında yaptıkları yorumlarda yine dikliği fark etmişler ancak dikliğin yanında yol uzunluğunun da önemli bir etken olduğunu dile getirmişlerdir. Bu sırada Ö2' nin kendi bireysel kağıdına herhangi bir yorumda bulunmadığı ve yine aynı grup arkadaşının yorumunu anlamlı bulduğu dikkat çekmiştir. Ayrıca grup olarak diklik için yüksekliğin aynı kalmasına rağmen yatay mesafenin değiştiğini ifade edememişler, diğer bir deyişle yatay mesafenin de eğimi etkileyen bir değişken olduğunu fark edememişlerdir. Ancak gruplar arası tartışmalarla yatay mesafenin de eğimi etkileyen bir değişken olduğunu fark ettikleri bir sonraki grup içi tartışmada onu kullanmalarından anlaşılmaktadır.

Ö2' nin grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

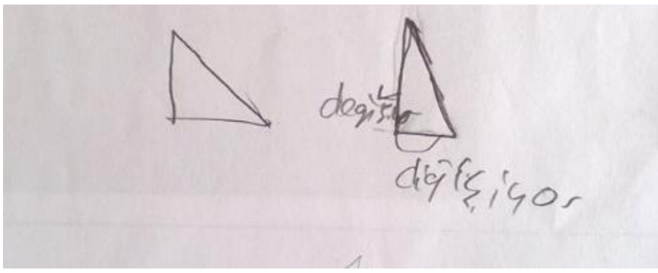


Ö2' nin grup çalışma kağıdından bir görüntü

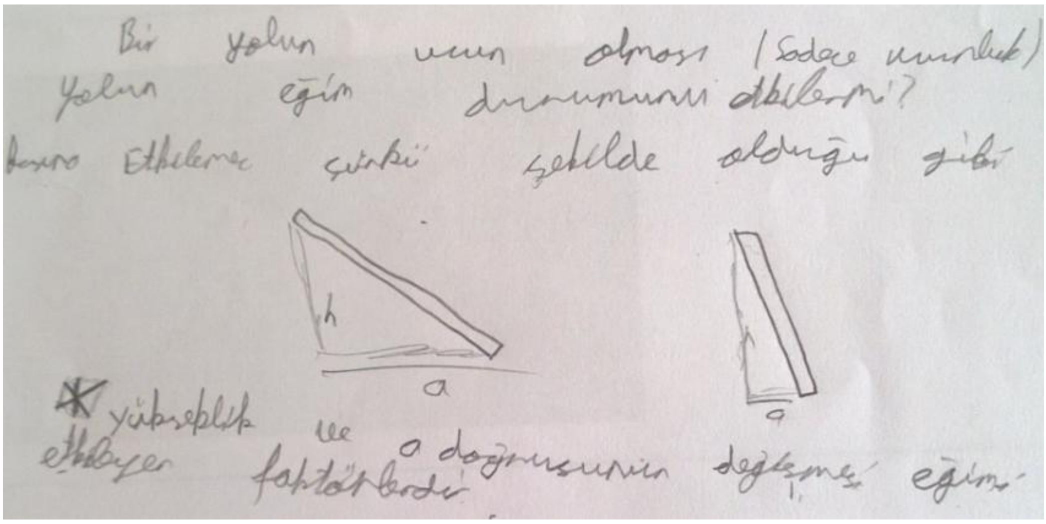


Gruplar arası tartışmalarda yol uzunluğundan ziyade dikliğin zorlanmayı daha çok etkileyeceği görüşü ağırlık basarken yol uzunluğunun eğimi doğrudan etkileyip etkilemeyeceği sorusunun ortaya çıkmasıyla öğrenciler yeniden grup içi düşünme ve tartışma sürecine bırakılmışlardır. Bu süreçte Ö2’ nin grup içinde genellikle dinleyici pozisyonunda olduğu dikkat çekmiş ve grup içindeki tartışma sonucunda grupça yolun uzunluğunun aynı kalırken eğimin değişebilmesini, dik üçgen modelinde yükseklik veyatay mesafe değişimine dayanarak yorumladıkları görülmüştür. Yine aynı grup arkadaşının kağıdında eğimin yükseklik veyatay mesafeye bağlı olduğu genellemesi dikkat çekerken Ö2, varılan bu genellemeyi grup kağıdına ve bireysel kağıdına not etmemiş fakat gruplar arası tartışmada fırsat verildiğinde sözel olarak dile getirmiştir.

Ö2’ nin grup çalışma kağıdından bir görüntü

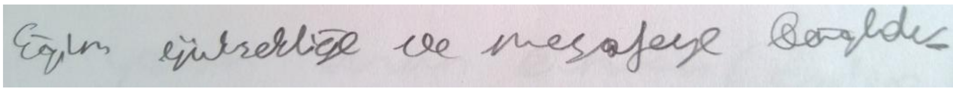


Ö2’ nin grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

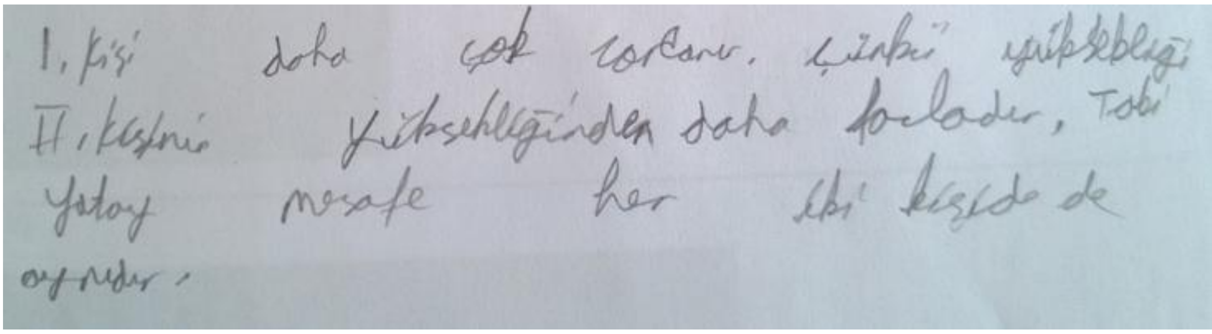


Eğimin yükseklik veyatay mesafeye bağlı olarak değiştiğinin fark edilmesini sağlaması planlanan bir sonraki bağlam durumunda ise öğrenciler bu sefer yatay mesafeleri aynı fakat yükseklikleri farklı olan günlük yaşamdan doğrusal bir görsel ile karşı kaşıya kalmışlardır. Ö2’ nin bu bağlam durumunda eğimin yükseklik veyatay mesafeye bağlı olarak değiştiğini anlamlandırmaya başladığı, grup sözcüsü olarak kendisine fırsat verildiğinde net bir şekilde fark edilmiştir. Yine yazılı olarak, yaptığı savunmayı bireysel ve grup çalışma kağıdına not etmemiş olmasına rağmen sözel olarak yatay mesafelerin aynı olduğunu bu sebeple yüksekliği fazla olan yolun eğiminin daha fazla olacağını arkadaşından herhangi bir yardım almadan dile getirebildiği görülmüştür. Ayrıca bu öğrencinin yatay mesafeyi bazen sadece "mesafe" diye etiketlediği de dikkat çekmiştir. Grup içinde önceki bağlamlarda da başarılı bir performans sergileyen arkadaşının ise bireysel çalışma kağıdına bakıldığında yükseklik veyatay mesafe ile eğim arasındaki ilişkiyi anlamlandırdığı düşünülmüştür.

Ö2' nin bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Ö2' nin grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Ö2' nin günlük yaşam bağlamlarında eğimin yansımalarından olan "diklik" kavramını sürece çağırabildiği ancak onun bağlı olduğu değişkenleri keşfetme ve yorumlama sürecinde kendi deneyimlerinden yola çıkarak gerekli çıkarımları tam olarak yapamadığı görülmüştür. İlk iki ders boyunca daha çok grup içi ve gruplar arası tartışmalardan ulaşılan yorumlar ve genellemeleri benimsediği düşünülen bu öğrenci ile gerçekleştirilen 1. Klinik görüşmede ise onun bilişsel süreci ile ilgili derinlemesine bilgi edinilmesi hedeflenmiştir.

Ö2 ile Gerçekleştirilen 1. Klinik Görüşme

Bu görüşmede Ö2' nin öğretim sürecinde de görüldüğü gibi dikliği fazla ya da az oluşuna göre yorumlayabildiği görülürken geliştirdiği dik üçgensel model dikkat çekmiştir.

G: *Peki şöyle bir şey çizebilir misin bana? İki yol çiz ve biri diğerinden yokuş olsun.*

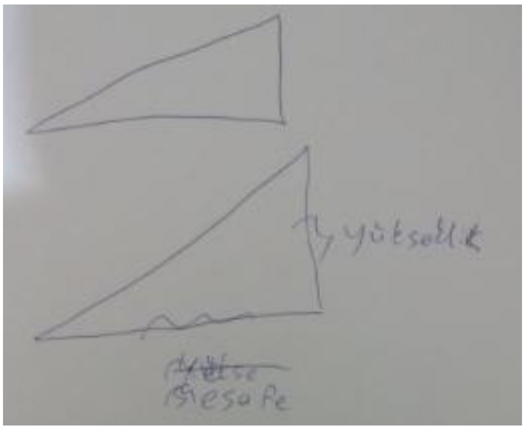
***Ö2:** …(iki dik üçgen çiziyor)*

***G:** İki yol çizmen lazım karşılaştırma yapman için.*

***Ö2:** …(çizmeye devam ediyor)*

***G.** Evet bu iki yoldan hangisi daha dik?*

***Ö2:** 2. resim.*



***G:** Peki neden?*

***Ö2:** Yüksekliği daha fazla, mesafeler eşit.*

***G:** Mesafeler eşit. Mesafe dediğin yer neresi?*

***Ö2:** Şurası(yukarıda verilen resimde de görüldüğü gibi mesafeden kastı yatay mesafedir)*

Ayrıca yüksekliklerin aynı olması durumunda da eğimlerin farklı olabileceğini ifade etmesi onun eğimin, diğer değişken uzunluklara göre değişimini anlamlandırdığını göstermiştir. Bu görüşme boyunca öğrencinin yatay mesafeye "mesafe", eğime "diklik, yokuş, dik" gibi etiketlerine kesinlikle müdahale edilmemiş ve onun informal ve formal deneyimlerinden gelen bu etiketlemelerin onun kavramsal öğrenmesini destekleyeceği düşünülmüştür. Ö2' nin oluşturduğu iki dik üçgensel modelde yükseklikler aynı olduğunda "kat edeceği yola bakarız" demesi fakat ardından eğimin yatay mesafe ve yüksekliğe bağlı olarak değiştiğini vurgulaması onun dik üçgensel modeli zihninde dinamik olarak hareket ettirerek "yükseklikler aynı olursa, kat edeceği yol(hipotenüs) değiştiğinde yatay mesafesinin değişeceğini" görebildiğini düşündürmüştür.

***G:** Farklı yükseklikler farklı eğim, aynı yükseklikler aynı eğim midir her zaman?*

***Ö2:** Kat edeceği yola bağlı, şuraya(yolun kendisi yani hipotenüsten bahsediyor).*

***G:** Aynı olsa o yol…*

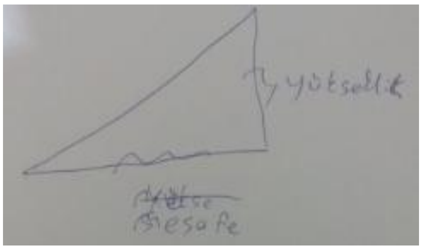
***Ö2:** Mesafeyle yüksekliğe bakarız hocam.*

***G:** Yani sen bir yolun dikliği için nelere bakacağım diyorsun?*

***Ö2:** Mesafe ve yükseklik.*

***G:** Mesafe dediğin yeri ve yükseklik dediğin yeri üzerine yazarak gösterebilir misin?*

Ö2: *Şurası mesafe, şurası da yükseklik.*



Yükseklikleri aynı fakat eğimleri farklı iki yol çizmesi istendiğinde ise öğrencinin oluşturduğu iki dik üçgensel modelde yükseklikle birlikte yol uzunluğunu(hipotenüs) da aynı tuttuğu görülmüştür. Ancak yatay mesafelerin bu durumda farklı olamayacağını, yol uzunluğunun da farklı olması gerektiğini modeller üzerinde savunması ve bunun yanı sıra yükseklikler aynı olduğunda yatay mesafesi kısa olanın eğiminin fazla olacağını vurgulaması, model üzerinde dinamik olarak değişkenleri uzatıp kısaltabildiği ve buna bağlı olarak eğimi yorumlayabildiğini göstermiştir.

G: *Yüksekliklerin aynı olup da dikliğin farklı olduğu iki yol çizebilir misin?*

Ö2: *Mesafeler bu sefer farklı.*

G: *Çiz bakalım.*

Ö2: *Diklikleri aynı(böyle diyor ama gösterdiği yer yükseklikler. Şaşırdı.).*

G: *Yükseklikler aynı evet.*

Ö2: *Şöyle olur... mesela şöyle geliyor. Bir diğeri ise şöyle(iki üçgen çiziyor). Yükseklikleri eşit olacak değil mi?*

G: *Evet. Şimdi senin bu çizmiş olduğun şekillerde nereler eşit "den den" koyarak göster bana istersen.*

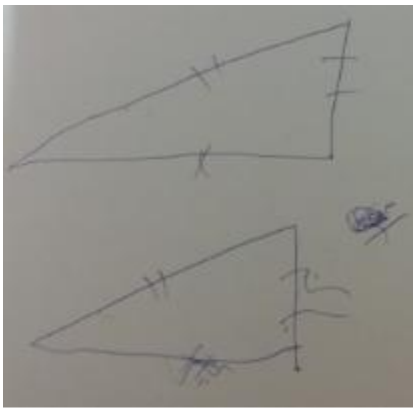
Ö2: *…(yüksekliklere "den den" koydu)*

G: *Tamam.*

Ö2: *…(yol uzunluklarını da eşit gösterdi).*

G: *Bir de buraları eşit diyorsun. Peki nereleri farklı?*

Ö2: *Şurasıyla şurası(yatay mesafeler).*



G: *O zaman bu ikisinden hangisi daha diktir?*

Ö2: *Ben yanlış yaptım hocam burada değil mi? Şu şu…*

G: *Neden? Nasıl yanlış yaptığını düşünüyorsun?*

Ö2: *Şurada yükseklik eşit. O zaman bunun(yatay mesafesi uzun olan birinci resmin hipotenüsünden bahsediyor) daha uzun olması lazım.*

G. *Hangisinin, bunun, fazla mı olması lazım diyorsun? Yükseklikler eşit …*

Ö2: *Mesafe yani kat edeceği yolun da fazla olması lazım.*

G: *Tabi. O şekilde düşünebilirsin. Peki hangisinde daha diktir diyorsun?*

Ö2: *Kısa olan yolda daha diktir.*

G: *Pekala kısa olan yol daha diktir diyorsun. O zaman sence diklik ya da yokuşluk nelere bağlı olarak değişmektedir?*

Ö2: *Diklik.*

G: *Evet. Yani bu daha diktir daha yokuştur diyorsun ya neye göre değişmektedir bu diyorum.*

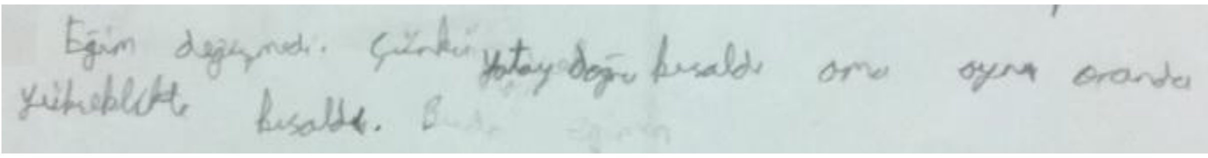
Ö2: *Mesafe ve yükseklik.*

Dik üçgensel modeli araç olarak kullandığı ve bu araç yardımıyla eğimin bağlı olduğu değişkenleri ve bu değişkenlere göre eğimin değişimini içselleştirdiği görülen Ö2' nin, ilk iki derslik öğrenme sürecinde grup içinde keşfeden, fark eden öğrenci olmamasına rağmen grup içi ve gruplar arası etkileşim ile önceki informal ve formal bilgilerini eğimi yapılandırma sürecine entegre edebildiği düşünülmektedir.

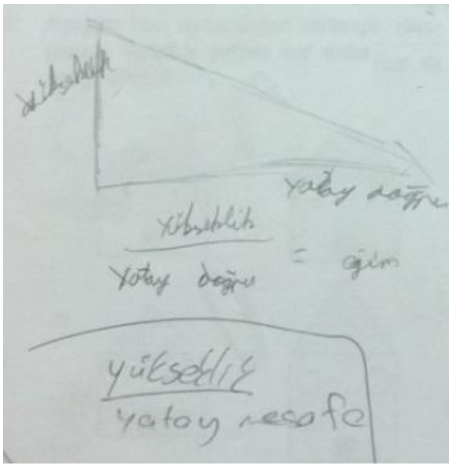
Öğretimin İkinci İki Derslik Süreci

Bu dersin başında doğrusal görsellenen bir dağın eteğinde arka arkaya farklı noktalarda duran kişiler için, onların önlerindeki yolun eğimini yorumlamalarını gerektiren bir bağlam durumuyla öğrenciler düşünme ve tartışma sürecine bırakılmışlardır.

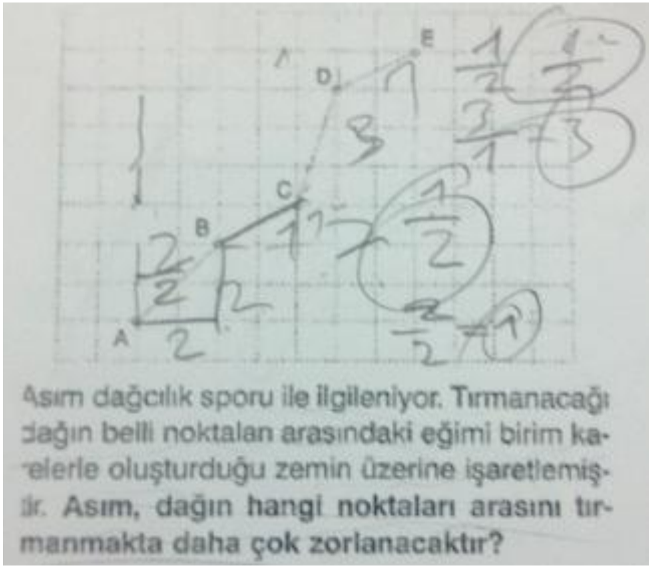
Ö2' nin grup içi düşünme ve tartışma süresinin bitişiyle birlikte grubunun yorumu olarak "eğimin değişmeyeceğini düşündüklerini çünkü yükseklik azaldıkça yatay mesafenin de azalacağını" dile getirmiştir. Ancak grup arkadaşının onu "aynı oranda" diye uyarmasıyla da yorumunu "yükseklik azaldıkça aynı oranda yatay mesafenin de azalacağı" şeklinde değiştirmiştir. Ö2' nin grup çalışma kağıdına da aynı yorumu yazdığı görülmüştür.



Gruplar arası tartışmalarda eğimin değişmediği konusunda tüm grupların ikna olduğunun düşünülmesiyle birlikte yükseklik ile yatay mesafe arasındaki nasıl bir ilişkinin eğimin (ya da onların kullanımıyla dikliğin, yokuşun vb.) değişmemesini sağladığı üzerine başlatılan tartışma ve düşünme sürecinde Ö2' nin grubunun yaptığı yorumdan yola çıkarak diğer grupların da oran kavramına yoğunlaşabildikleri görülmüştür. Bu sırada tüm sınıfa onların yüksekliğin yatay mesafeye oranının sabit kalışını keşfetmeleri amacıyla yöneltici ve ipuçları veren sorular sorulmuştur. Grup içi tartışmalardan sonra başka bir katılımcıya söz hakkı verilmiş ve "yüksekliğin yatay mesafeye oranının aynı kaldığını" dile getirdiği dikkat çekerken başka bir grubun da eğimin değişmemesi ile yükseklik veyatay mesafe arasındaki oranın değişmemesi arasında eşitlik ilişkisi kurarak eğimin, yüksekliğin yatay mesafeye oranına eşit olduğunu keşfettikleri görülmüştür. Daha çok pasif kalarak dinleyici olarak bu süreçte yer aldığı görülen Ö2' nin grup çalışma kağıdına varılan genellemeyi not ettiği fakat gerekçeyi veya tartışmalardan bu genellemeye varış süreci ile ilgili herhangi bir şey yazmadığı dikkat çekmiştir.



Bir doğrusal görselin eğiminin, yüksekliğin yatay mesafeye oranı olduğu sonucuna varan öğrencilere bu sefer dikey matematikleştirme yapma fırsatı sağlamak amacıyla eğimin geometrik ve fiziksel yorumlarını gerektiren sorular sorularak eğim hesaplamaları için uygun ortam sağlanmıştır. Daha çok matematiğin kendi dünyası içinde olduğu görülen sorularda Ö2' nin aşağıdaki örnek' te olduğu gibi yükseklik/yatay mesafe' yi kullanabildiği görülmüştür.



Ö2 ile Gerçekleştirilen 2. Klinik Görüşme

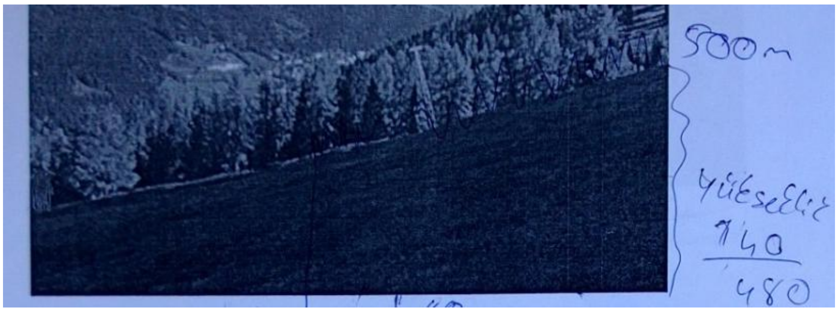
Bu görüşmenin hemen başında Ö2, kendisinden doğrusal bir görselin eğimini bulması istenildiğinde, araştırmacıdan yükseklik veyatay mesafe uzunluklarının ölçüsünü istediği ve bu ikisini birbirine bölerek eğimi hesaplayabildiği görülmüştür.

G: *Şuradan başlayacak yol ve bu doğrultuda yapılacak. Gidecek yukarıya doğru. Bu yolun eğimini istiyorum ben senden. Bu yolun eğimini hesaplamak için nelere ihtiyaç duyarsın?*

Ö2: *Yükseklik.*

G: *Yükseklik neresi? Gösterebilir misin?*

Ö2: *Şurası(yolun en sonundan en yüksek noktasından başlangıç noktası doğrultusuna kadar ki uzunluğu değil de resmin en altına kadarki yeri gösteriyor).*



G: *Tamam orasını da veriyorum. Yine çizerek gösterirsen benim için daha iyi olur. Orası da 140 m' ymiş. Başka bir uzunluk istiyor musun yoksa senin için yeterli mi bu uzunluklar eğimi bulmak için?*

Ö2: *Yeterli hocam.*

G: *Tamam bekliyorum o zaman. Yani yeterliyse hesabını yapabilirsin.*

Ö2: *Yükseklik bölü alt mesafe değil miydi hocam bu ya?*

G: *Yani başka bir şey daha mı istiyorsun o zaman?*

Ö2: *Şununla şunu(yükseklik ile yatay mesafeyi gösteriyor) yapıyordun bunu(yolun kendisi) veriyordu. Şununla şunu yapsak şurasını verir mi hocam?*

G: *Sen nasıl hatırlıyorsan…Hatırladığını söyleyebilirsin bana?*

Ö2: *Şimdi yükseklik ile alt mesafeyi bölü olarak yapıyorduk. Öyle buluyorduk.*

G: *Alt mesafe 480 m.*

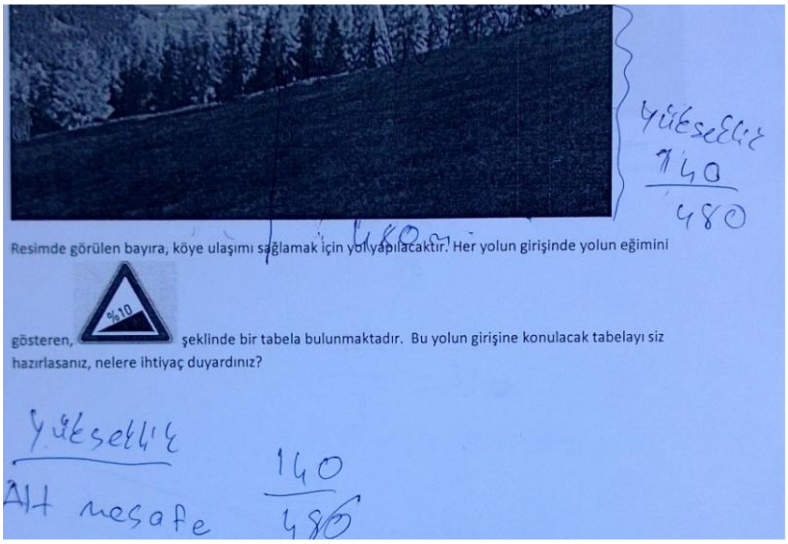
Ö2: *140 bölü.*

G: *Onu da yaz, çiz oraya. 480 m alt mesafe dediğin yer.*

Ö2: *140 bölü 480 eşittir şu alt.*

G: *Eşittir neresi?*

Ö2: *Üst mesafe yani eğim.*



G: *Eğime eşit diyorsun. Yani bu yolun eğimi. Peki şuraya da yazabilir misin? Eğimi nasıl buldun?*

Ö2: *Eğimi, yükseklik bölü alt mesafe ile.*

Sadeleştirme yapmadığı dikkat çeken öğrencinin "yükseklik bölü yatay mesafe değil miydi bu?" gibi sorular sorması onun, yükseklik/yatay mesafe' yi bir formül olarak ezberlediği ya da bir algoritma gibi kullandığını düşündürmesine rağmen aynı doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmeyeceğini anlamlandırma sürecine girdiğinin görülmesi onun eğimi bir oran olarak yapılandırma sürecinde ilerliyor olabileceği olasılığını güçlendirmiştir. Ö2 yukarıdaki bağlam durumunda, aynı doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmeyeceğini tekrar tekrar vurgulamış ve bunun nedeni olarak ise yatay mesafe ile doğrunun kendisi arasında ilişkilendirme yapabildiğini "alt mesafe azaldıkça eğimin gideceği mesafe de azaldı" gibi yorumlarıyla göstermiştir. Bu öğrencinin aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerindeki noktalara göre eğimin değişmezliğini, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın sabit kalışı ile anlamlandırmak yerine dik üçgensel model düşünülürse hipotenüs ile yatay mesafe arasındaki oranın sabit kalışı ile anlamlandırdığı sonucuna varılmıştır.

G: *Mesela şöyle desek: tabelayı ben buraya değil de biraz daha yukarıya koysam bu yol üzerinde, yani yol bu kadar değil de bu uzunlukta olsa…*

Ö2: *Tamam.*

G: *Yarıya düşse, üçte birine düşse. Tabelayı buraya koyacaksın ve buradan sonrasındaki yolun eğimini yazacaksın tabelaya. Tabelaya yazacağın sayısal değer değişir mi değişmez mi?*

Ö2: *Değişmez hocam.*

G: *Neden?*

Ö2: *Şurasını hesaplıyoruz ki buraya giderken. Değil mi?*

G: *Yani orasını da mı hesaplıyoruz diyorsun?*

Ö2: *Yükseklik. Bir de eğimin ucunu(yolun kendisini gösteriyor*

G: *Orayı hesaplıyoruz diyorsun. Sen yolun eğimi değişmez diyorsun.*

Ö2: *Evet değişmez.*

G: *Peki nelere bağlıdır yolun eğimi? Neden değişmez yolun eğimi?*

Ö2: *Yükseklik sabit kalıyor hocam burada.*

G: *Yükseklik sabit kalıyor?*

Ö2: *Evet şurada sabit.*

G: *Peki sen orayı hesaplama için**.***

Ö2: *Burayı mı?*

G: *Yani oradaki yolun şu kısmı olsa sadece, o kısmın eğimini hesaplamak için, şurası şu yolun(gösteriliyor kalemle de) neye ihtiyaç duyuyorsun?*

Ö2: *Yükseklik ve alt mesafeye.*

G: *Onları bana gösterebilir misin? Yükseklik neresi, alt mesafe neresi?*

***Ö2:** Yükseklik şurası, şurası da alt mesafe.*

***G:** Alt mesafe değişti mi?*

***Ö2:** Kısaldı.*

***G:** Yükseklik?*

***Ö2:** Yükseklik sabit. Hocam alt mesafe azaldıkça eğimin gideceği mesafe azaldı sadece. Bununla bu aynı oranda azaldı hocam (yatay mesafe ile hipotenüsten bahsediyor). Bu azalıyor bu da azalıyor.*

***G:** Bu azaldıkça o da azalıyor diyorsun. Şimdi bana bir orandan bahsediyorsun. Bu oran dediğin şey, neyin neye oranı? Ya da eğimin değişmemesini nasıl açıklayabiliyorsun?*

***Ö2:** Eğimin değişmemesini…hocam sadece alt mesafenin yarısı gitti, burası sabit. Diklik de eğim de sabit.*

***G:** Eğim değişmezken başka değişmeyen şeyler de var mı?*

***Ö2:** Yükseklik.*

***G:** Yükseklik değişmiyor diyorsun.*

***Ö2:** Eğim değişmez ki.*

***G:** Ama yatay uzunluk değişir diyorsun.*

***Ö2:** Evet. Eğimle alt mesafe aynı oranda azalıyor hocam. Yarısı gidiyor.*

***G:** Peki yükseklik bu şekilde olmuyor mu?*

***Ö2:** Yükseklik olmuyor hocam. Sabit zaten.*

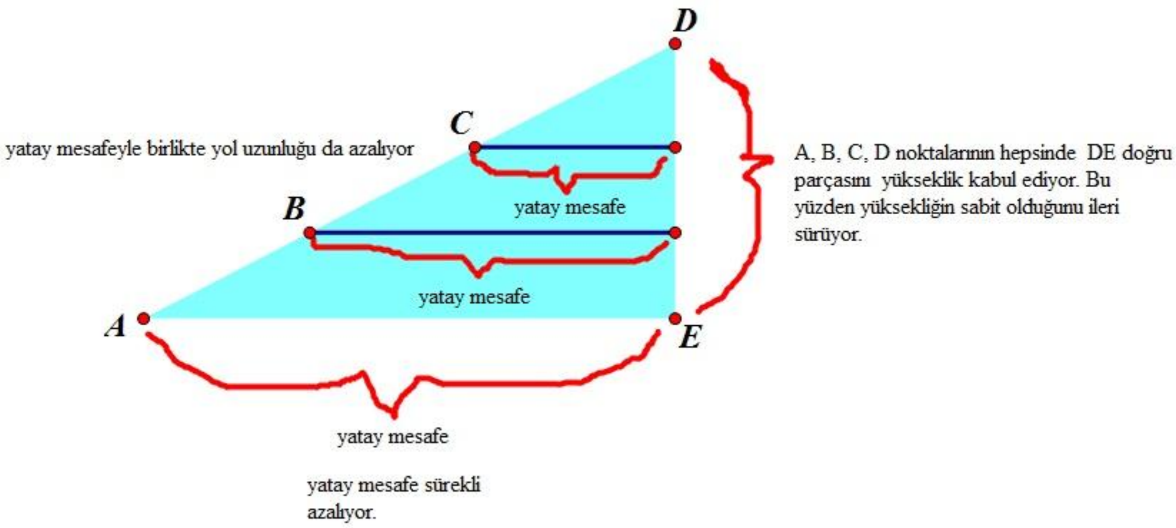
***G:** Peki burada yaşayan birileri olsa, burada ve burada,(ilk başta tabelanın olduğu yolun başı ve sonra var olacağı hayal edilen yer) ikisinin de çıktıkları yükseklik aynı mı olacak? Mesela bulundukları yerden bu tepeye çıksalar.*

***Ö2:** Hocam aynı.*

***G:** Yani ikisinin de dikey olarak kat etikleri mesafe aynı olacak diyorsun.*

***Ö2:** Evet.*

Yukarıdaki alıntıda bu öğrencinin yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın sabit kalışını göremediği ve bunun, yükseklik dediği uzunluğu yanlış anlamlandırmasından kaynaklandığı görülmüştür. Ö2, eğimli bir yol için yüksekliği, bir dağın yüksekliği gibi anladığı ve dağ üzerindeki doğrusal bir yolda yürüyen birisi için yüksekliğin değişmediğini düşündüğü çünkü eğimli yolun başladığı andan itibaren zirveye kadar olan dikey uzunluğu yükseklik kelimesi ile etiketlediği ortaya çıkmıştır. Öğrencinin bu yanılgısı, dik üçgensel model üzerinde şu şekilde gösterilebilir:

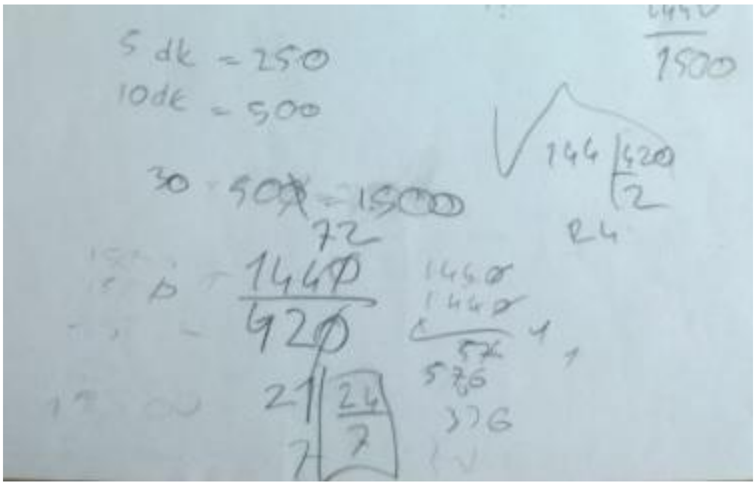


Şekil 7: Yüksekliğin Değişmeyeceği Yanılgısı

Ö2' nin yüksekliği yatay mesafeye bölerek eğimi hesaplayabildiği, bir doğru ya da doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmeyeceğini içselleştirdiği ancak bu değişmezliği yol uzunluğu ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişkiyle anlamlandırdığı görülmüştür. Bu öğrencinin öğrenme sürecinde eğimi, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişki ile anlamlandıramadığı dikkat çekmiştir. Ancak aynı doğrusal görsel üzerinde alınan herhangi bir noktada eğimin değişmemesini yol uzunluğu(hipotenüs) ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişki ile anlamlandırdığı görülmüştür. Bu sebeple öğretim sürecinin son iki derslik aşamasına geçmeden önce Ö2' nin eğimi, yüksekliğin yatay mesafeye oranı olarak yapılandıramadığı sadece eğimi yüksekliği yatay mesafeye bölerek hesaplayacağı bir algoritmayı içselleştirdiği düşünülmektedir. Ancak bu öğrencinin yol uzunluğu veyatay mesafeye bağlı olarak da olsa, zihnindeki dik üçgensel modeli dinamik olarak hareket ettirebilmesiyle eğimin aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde değişmemesini anlamlı bir şekilde içselleştirdiği düşünülebilir. Ö2' nin eğimin değişmezliğini anlamlı bir şekilde soyutlamasına rağmen onun ile yükseklik/yatay mesafe arasında ilişkiyi fark edememesinden dolayı eğim için oluşturduğu bilişsel şemasında bu iki öğrenme arasında bağı kuramadığı yorumu yapılabilir.

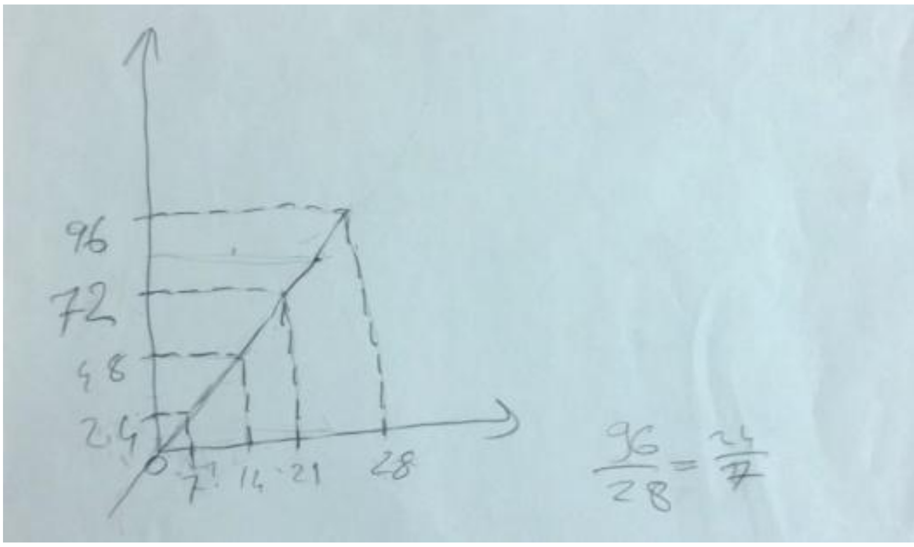
Öğretimin Son İki Derslik Süreci

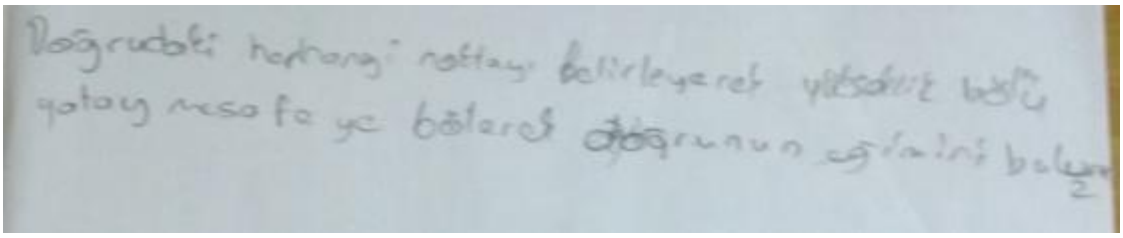
Öğretimin son iki derslik aşamasında artık öğrencilerden koordinat düzleminde bir doğru için daha önceden keşfettikleri eğimi yeniden düzenlemeleri beklenmekteydi. Bu amaçla dersin başında verilen yaylaya çıkma bağlamından günlük yaşamda karşılaştıkları bir durumu matematikleştirmeleri beklenmekteydi. Ö2' nin doğrusal görselin eğimini hesaplama ihtiyacı hissederek gerekli uzunlukları bulduktan sonra sonuca ulaşabildiği görülmüştür.



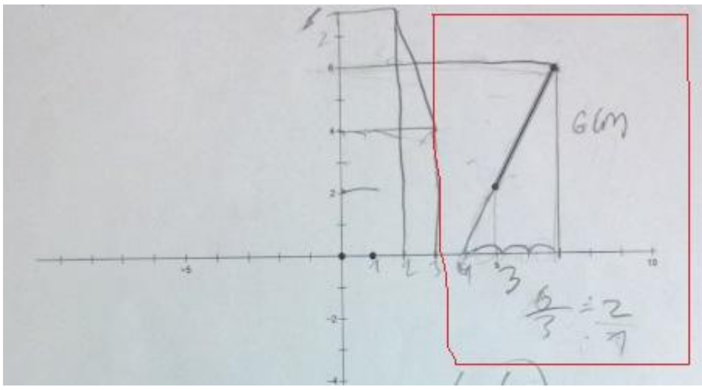
Ardından öğrencilerin yine yatay matematikleştirme süreci ile doğrusal grafik oluşturmaları ve bu grafik üzerinden eğimin her noktada değişmeyeceğini çünkü yüksekliğin yatay mesafeye oranının aynı kalacağını fark etmeleri beklenmekteydi. Ö2' in grafiği oluşturma ve eğimi hesaplamada zorlanmadığı dikkat çekerken grup olarak bu doğrusal grafikten yola çıkarak koordinat düzleminde bir doğrunun eğimini nasıl bulacakları sorusuyla bırakıldıkları düşünme süreci sonunda doğru üzerinde herhangi bir nokta belirleyerek yükseklik veyatay mesafeyi bulup, yüksekliği yatay mesafeye bölerek eğimi hesaplayacakları genellemesine ulaştıkları görülmüştür.

Ö2' in bireysel çalışma kağıdından görüntüler

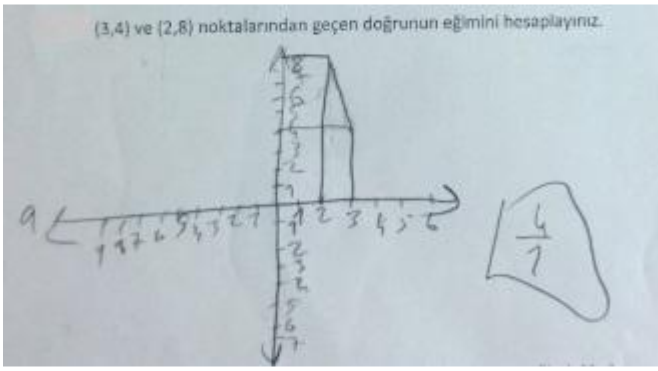




Ardından öğrencilere koordinat düzleminde bir doğru verilerek o doğrunun eğimini hesaplamaları istenmiş ve Ö2' nin yükseklik veyatay mesafe uzunluklarını eksenler yardımıyla bularak eğimi hesapladığı görülmüştür. Bu sırada artık eğim için günlük yaşam durumlarını matematikleştirilmesi sırasında geliştirdiği dik üçgensel modeli, bu çözüm sürecinde hemen oluşturabildiği görülen bu öğrenci için dik üçgensel modelin bir araç olduğu düşünülmektedir. Ayrıca doğruyu hipotenüs kabul eden dik üçgeni oluştururken, onu x eksenine kadar uzatması ve yükseklik ile yatay mesafe uzunluklarını öyle hesaplaması ise eğimin aynı doğru üzerinde değişmeyeceğini içselleştirdiğini göstermiştir.



Önceki soruda diğer arkadaşlarından farklı olarak doğruyu önce uzattığı ve uzattığı doğruya göre dik üçgensel modeli oluşturduğu görülen Ö2' nin, sadece koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplarken ise yine koordinat düzleminde dik üçgensel model oluşturduğu ancak bu sefer doğruyu uzatmadığı görülmüştür.



Bu sırada diğer gruplardan bazı öğrencilerin negatif eğim bulmaları ile dengesi bozulan öğrencilere negatif eğim ile ilgili düşünme ve düşüncelerini savunma fırsatı verilmiştir. Gruplar arası tartışmalarda dik üçgensel model düşünülerek aşağıdaki üç genelleme ortaya konmuştur:

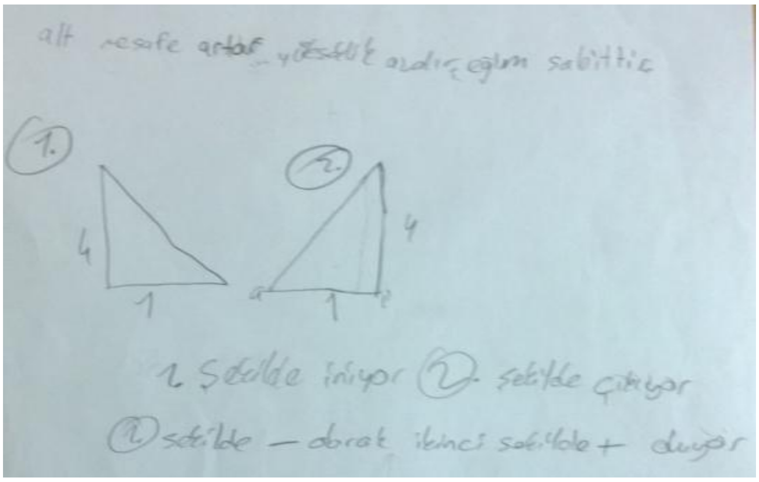
1-)Yol üzerinde yürüyen birisi için yatayda aldığı mesafe arttıkça yüksekliğin de arttığı durumlarda eğimin pozitif, yatayda aldığı mesafe arttıkça yüksekliğin azaldığı durumlarda ise eğimin negatif olur.

2-) Soldan sağa doğru gidildikçe, inen birisi için negatif eğim, yukarıya çıkan birisi için pozitif eğim olur.

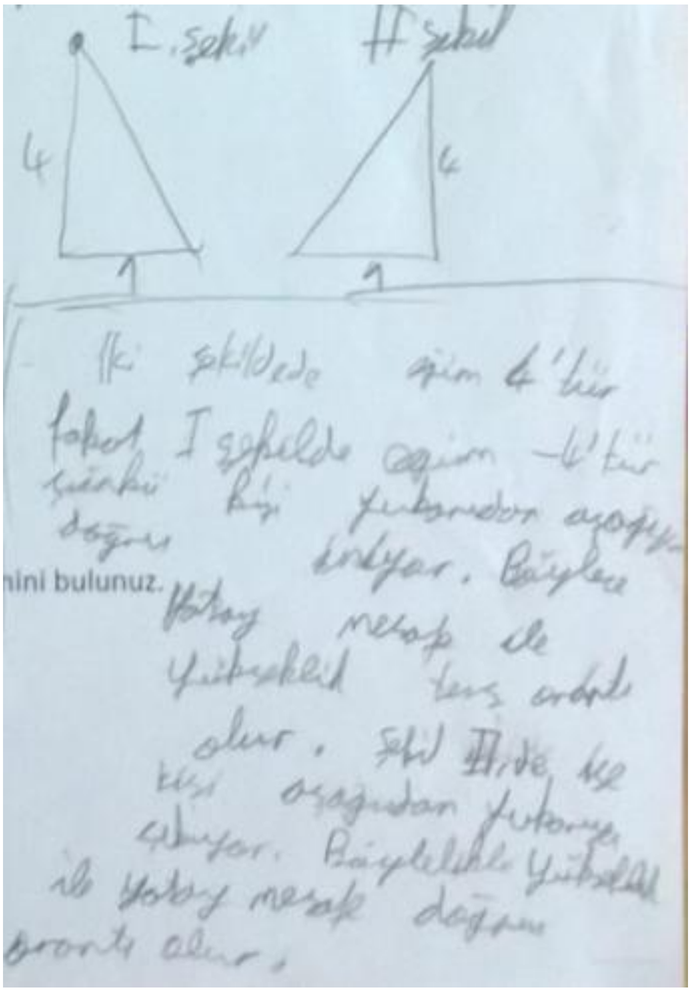
3-) Bahsedilen doğru sağa yatık ise pozitif sola yatık ise negatif eğim olur.

Ö2’ nin 2. genellemeyi benimseyerek bireysel çalışma kağıdına not ettiği görülürken, grup arkadaşının ise 1. Genellemeye kendisinin ulaştığı dikkat çekmiştir.

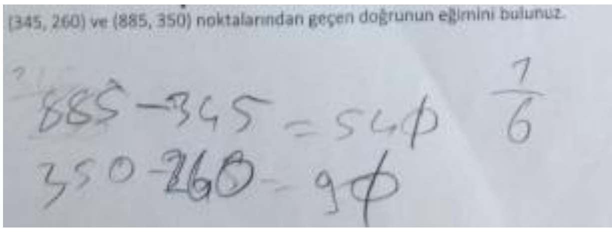
Ö2’ nin bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



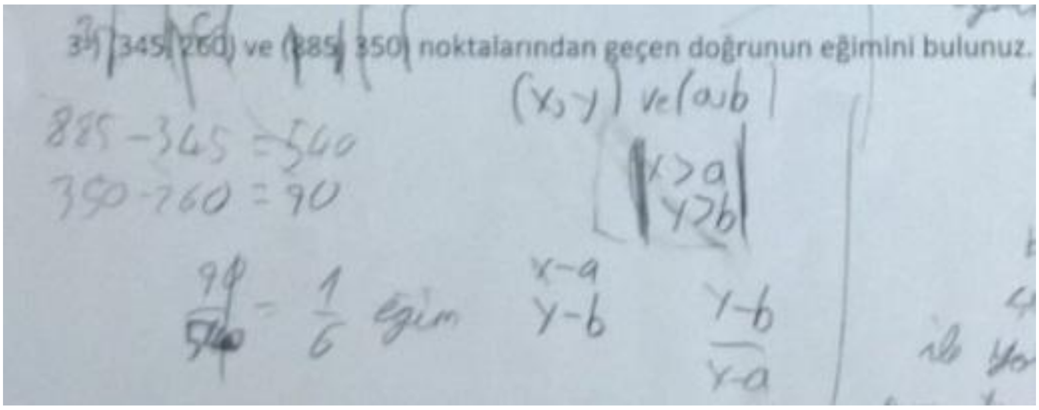
Ö2’ nin grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



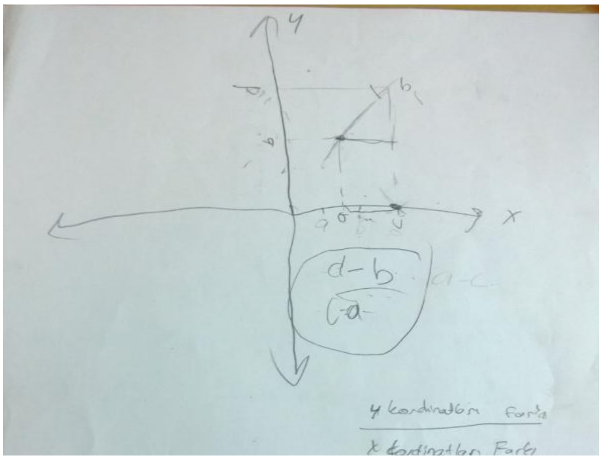
Daha sonra tüm öğrencilere ve dolayısıyla Ö2' ye koordinat değerleri çok büyük olan iki nokta verilerek, istenilen doğruyu koordinat düzleminde çizemediği bir durumla karşılaşması sağlanmıştır. Öğrencilerin y koordinatları arasındaki farkın yüksekliği, x koordinatları arasındaki farkın ise yatay mesafeyi verdiğini keşfetmelerinin beklendiği bu problem durumunda Ö2' nin kendisinin bireysel olarak bu keşfe ulaşamadığı ancak grup arkadaşının yardımını alarak koordinatlar arası farktan yükseklik veyatay mesafeyi bulabileceğini fark ettiği görülmüştür.



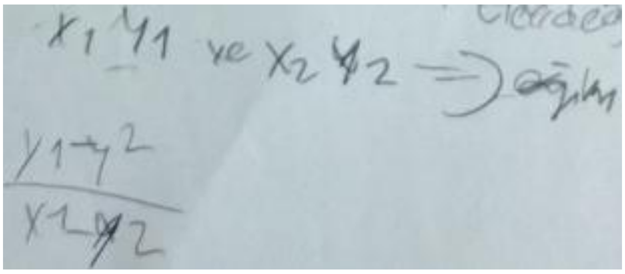
Grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Ö2' nin grup arkadaşının ulaştığı keşfi, henüz kendisinden istenmemesine rağmen, cebirsel olarak da ifade ederek sembolleştirebildiği görülmüştür. Ardından tüm sınıftan koordinat düzleminde koordinatları bilinen iki noktadan geçen bir doğrunun eğimi için cebirsel bir genellemeye ulaşıp ulaşmadıkları sorulmuş ve Ö2 (a,b) ve (c,d) noktalarını ele alarak bu noktalardan geçen bir doğrunun eğimi için bir genellemeye ulaşabilmiştir.

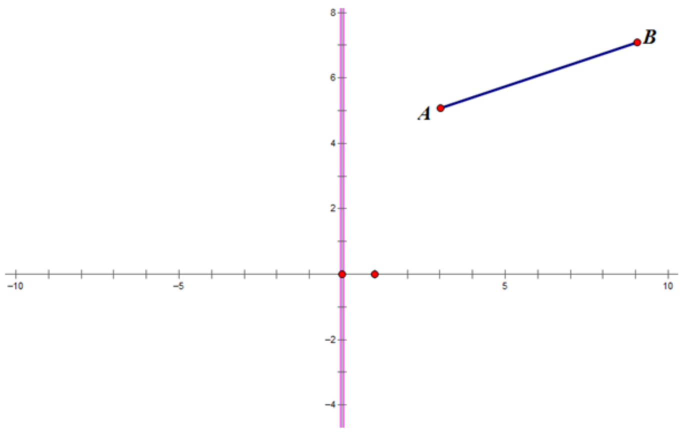


Gruplar arası tartışmalardan ulaşılan (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) noktalarından geçen doğrunun eğimi için diğer genellemeyi ise grup çalışma kağıdına not ettiği görülen Ö2' nin bu genellemeyi anlamlandırıp anlamlandıramadığı kendisiyle gerçekleştirilen 3. Klinik görüşmede görülmüştür.



Ö2 ile Gerçekleştirilen 3. Klinik Görüşme

Ö2 ile gerçekleştirilen 3. Görüşmede koordinat düzlemindeki bir doğrunun eğimini hiçbir dışsal destek beklemeksizin hesaplayabildiği görülmüştür. Herhangi bir formül kullanmadığı gözlemlenen öğrenci o doğruya ait dik üçgensel modeli oluşturarak yüksekliği veyatay mesafeyi koordinatlar yardımıyla bularak sonuca ulaşmıştır.



Görmüş olduğun AB doğrusunun eğimini hesaplayabilir misin?

Ö2: *Hesaplarım(koordinat düzleminde verilen AB doğrusunun eğimi sorusunu okuduktan sonra).*

G: *Dur kalemini de vereyim. Kağıt üzerinde istediğin yere işlemini yapabilirsin.*

Ö2: *Şurası 10 değil mi hocam?(x ekseni üzerindeki bir noktanın koordinatı soruyor)*

G: *Bimiyorum. Sen kendin yapacaksın.*

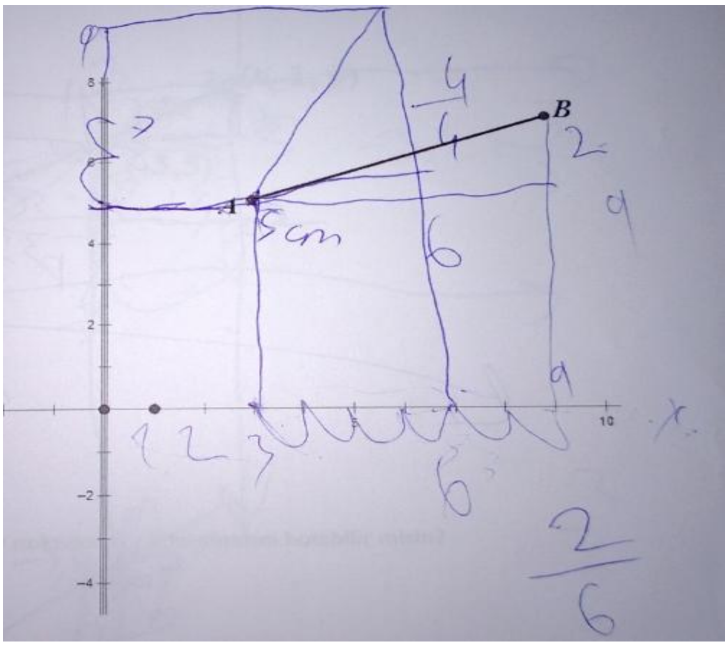
Ö2: ***….****(öğrenci nasıl yaptığını anlatmadan AB' yi hipotenüs kabul eden dik üçgen oluşturdu veyatay mesafe ile yüksekliği koordinatlardan yararlanarak buluyor).*

G: *AB doğrusunun eğimini hesaplayacaksın.(o işlem yaparken öğretmen hatırlatıyor)*

Ö2: *…(2/6 sonucunu buluyor).*

G: *Eğim budur diyorsun.*

Ö2: *Evet.*



Çözüm sürecinde yaptığı adımların tamamıyla farkında olduğunu görülen Ö2, bir algoritmanın adımlarını uygulamadığını, daha önceden yükseklik/yatay mesafe olarak oluşturduğu eğimi koordinat düzlemindeki bir doğru için uyarlayarak çözüme ulaşabildiğini göstermiştir.

G: *Peki burada ne yapmaya çalıştığını anlatabilir misin?*

Ö2: *Burada yüksekliği veyatay mesafeyi bulmaya çalıştım.*

G: *Hı hı. Neyden yararlandın yükseklik veyatay mesafeyi bulurken?*

Ö2: …

G: *Nasıl buldun yani?*

Ö2: *Koordinat düzlemindeki sayılarla.*

G: *Peki yüksekliği hangi eksene bakarak buldun ve hangi koordinatlardan yararlandın yüksekliği bulurken?*

Ö2: *Yüksekliği bulurken y ekseni değil mi hocam? Y' ye bakarak.*

G: *Hı hı. Yatayı?*

Ö2: *Yatayı x' e.*

Kendisine sadece koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimi sorulduğunda ise yine koordinat düzleminde doğruyu görselleştirme ve ona uygun dik üçgensel modeli inşa etme gereği duymuştur.

G: *X' e bakarak buldum diyorsun. Peki ben sana sadece iki nokta verseydim koordinatlarıyla, sen eğimi hesaplayabilir miydin?*

Ö2: *Hesaplardım.*

G: *Mesela vereyim o zaman. 3' e 5 bir noktanın koordinatları, diğer noktanın koordinatları ise 7' ye 9(öğrenci not alıyor bu sırada). Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini istiyorum senden.*

Ö2: *(ilk sorudaki koordinat düzlemini üzerinde noktaları bularak başladı).*

G: *Bu koordinat düzleminde göstereceksin öyle mi?*

Ö2: *Hı hı.*

G: *Tamam göster bakalım.*

Ö2: *1,2,3..(sessizlik) şöyle. (sessizlik). Bu.(bu sırada koordinatlardan yararlanarak noktayı belirliyor).*

G: *Hı hı.*

Ö2: *(sessizlik)… (İki noktayı birleştirerek doğruyu oluşturdu).*

G: *Evet şimdi. Şimdi bunun eğimini...*

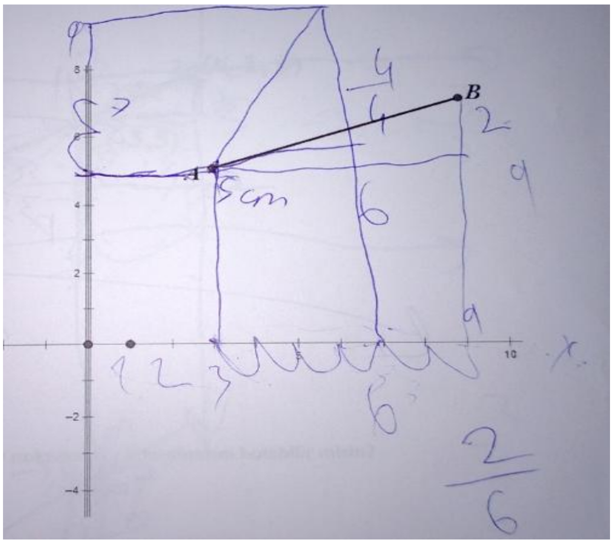
Ö2: *Hesaplayabilirim.*

G: *Nasıl hesaplarsın?*

Ö2: *Alt mesafeyi şuradan bulurum(oluşturduğu üçgenin x eksenine paralel olan dik kenarını gösteriyor). 1,2,3,4.(x ekseni üzerindeki aralıkları sayıyor). Şuradan da yüksekliği bulurum. 5,9..4(bu sefer saymadan direkt koordinatlar üzerindeki farkı aldı. 5….*

G: *5 ne? 5 neresi?*

Ö2: *Dört dört. 4/4 eğimi.*



Kendisine koordinat değerleri büyük olan noktalar verildiğinde, sayıları küçültme gibi yollar aradığı görülen Ö2' nin sonuca y_2-y_1/x_2-x_1 cebirsel genellemesinden yararlanarak ulaşmaya çalıştığı ama onu ezberlemediği ve hatırlayamadığı görülmüştür. Görselleştirme yapmaksızın yüksekliğin y koordinatları, yatay mesafenin ise x koordinatları arasındaki fark olduğunu ortaya koyamayan bu öğrenci için zihninde görselleştirme yapmakta zorlandığı açıkça görülmüştür.

G: *Mesela şöyle diyelim. Ben sana yine iki nokta vereyim. Bize başka iki nokta veriliyor ve bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi soruluyor. Yaz koordinatları. (685,350), birinci noktamız. İkinci noktamız, (385,850). (öğrenci not alıyor). Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplayabilir misin?*

Ö2: *Sadeleştirsek, sıfırları götürsek hocam?*

G: *Hayır olmaz. Sayıların bunlar. Neden sıfırları götürmeye çalıştın?*

Ö2: *Bölsem bu sayıları bir şeye de küçültsem?*

G: *Neden?*

Ö2: *İşlem daha kolay olsun diye.*

G: *Peki işlemi nasıl yapacaksın?*

Ö2: *İşlemiii…x_2'e paralel gelip, y_2' ye paralel gelip öyle yapacağım. X_1 mesela x_2(bunları söylerken hiçbir şey göstermiyor).*

G: *Hı hı. Onu yazabilir misin peki söylediğin şeyi? X_1 ,x_2 dedin ya o nereden aklına geldi?*

Ö2: *Şurası x, şurası y(eksenleri gösteriyor). x' leri bulmak için buradan yapacağım y' leri bulmak için de buradan yapacağım.*

G: *Güzel. Yap bakalım onu. Hani bulacağım dediğin şeyleri.*

Ö2: *(Çizmeye başlayacak gibi oluyor)…*

G: *Kafandan yap bakalım çizmeden. Nasıl yapacaksın?*

Ö2: *(mırıldanıyor) şu y' ye ait(koordinatları bir daha yazıyor gibi). Doğru mu yapıyorum hocam?*

G: *Güven kendine. Yanlış da yapsan önemli değil zaten. Hani ne dedin sen x_1, x_2 dedin mesela. x_1 ne?, x_2 ne?*

Ö2: *X_1 şuradaki mesafe değil mi(orijinden A noktasına kadar olan mesafe)?*

G: *X_2 ?*

Ö2: *X_2 doğrunun alt mesafesi.*

G: *Peki senin normalde eğimi bulmak için neye ihtiyacın vardı? Eğimi nasıl hesaplıyordun?*

Ö2: *Yükseklik veyatay mesafe.*

G: *Peki yatay mesafeyi nasıl hesaplayabilirsin bu iki noktaya bakarak? Ne sana yatay mesafeyi verir?*

Ö2: *X' te hep yatay mesafeyi verir.*

G: *Şunu demek istiyorum. Ben sana böyle iki nokta verdiğimde koordinat düzleminde yapmış olduğun şeyi aslında kafandan yapmanı istiyorum. Bunu yapabilecek bir yolun var mı?*

Ö2: *Hocam direkt yaparım.*

G: *Nasıl?*

Ö2: *(Düşünüyor ve sayıları aynen yazıyor)….*

Koordinat düzleminde bu doğruyu görselleştirebilmesi için izin verildiğinde ise sonuca doğrudan ulaşabilmesi onun için görselliğin önemini ortaya koymaktadır.

G: *Koordinat düzleminde yapabilir misin? Sayılar biraz büyük ama...*

Ö2: *İkisini de bölsem hocam mesela bunu da 3' e bunu da 3' e(x koordinatlarını gösteriyor).*

G: *Bölme. Bölmüş gibi bölmeden yapıyormuş gibi varsay!*

Ö2: …

G: *Mesela 850' ye kadar yazman lazım değil sayıları.*

Ö2: *Evet. Buraya sadece 850 versem…*

G: *Yap bakalım öyle.*

G: *Orda yapma (ilk verilen koordinat düzlemi üzerinde yapmak istedi). Şurada yap ya da en güzeli sayfanın arkasını kullan. Burası karıştı iyice.*

Ö2: *(Koordinat düzlemi çiziyor) kaçmış x?(kendi kendisine soruyor ve arka sayfaya bakıyor tekrardan)*

G: *685' e 850 ve 385'e 850.*

Ö2: *(Koordinat düzleminde koordinatlardan yararlanarak noktaları buldu ve bunları birleştirerek doğruyu oluşturdu).*

G: *Şimdi?*

Ö2: *385'ten 350' yi çıkarıp şuradaki mesafeyi bulacağız(sayılar birbirine yakın olduğu için şaşırdı).*

G: *Bul bakalım.*

Ö2: *850 değil mi bu?(kendi yazdığı koordinatı soruyor). 500(850’ den 350’ yi çıkardı).*

G: *Neresi 500?*

Ö2: *Şurası. Yükseklik.*

G: *Yükseklik 500. Yaz.*

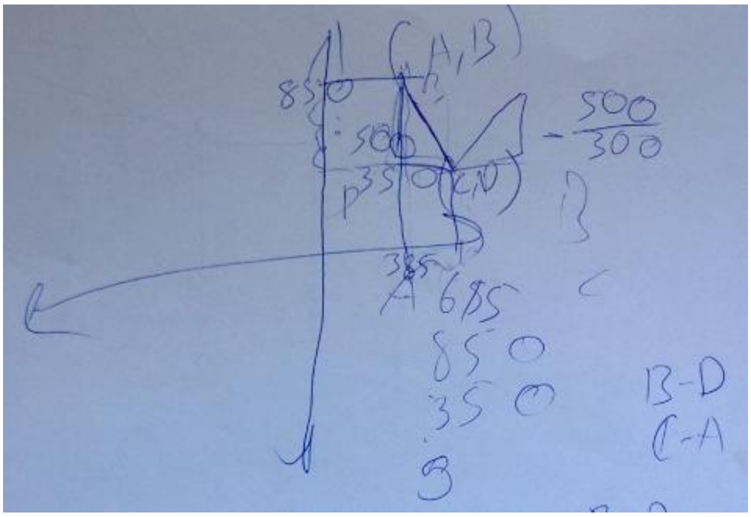
Ö2: *Yatay.*

G: *Yatay?*

Ö2: *Orası da 300(685’ ten 385’ i çıkarıyor).*

G: *Eğim?*

Ö2: *500/300.*



Koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini bulması istendiğinde formül kullanarak sonuca ulaşamayan ancak herhangi bir yardım almaksızın noktaları ve doğruyu koordinat düzleminde görselleştirerek eğimi hesaplayabilen Ö2’ den bu yaptıklarına uygun bir formül bulması istendiğinde herhangi bir yardım almaksızın bir formül elde etmiş ve devamında sorulan soruda eğimi koordinat düzleminde görselleştirmeden, doğrudan ulaştığı bu formüle dayanarak hesaplamıştır. Öğretim sürecinde ne kendisinin ulaştığı “d-b/c-a” ne de gruplar arası tartışmalarla ulaşılan “y_2-y_1/x_2-x_1” formülünü ezberlemediği görülen bu öğrencinin koordinat düzleminde verilen bir doğru için “ordinatların farkını bul, apsislerin farkını da bul ve bunları böl” şeklinde bir algoritmanın adımlarını uygulamaktan ziyade yükseklik veyatay mesafeyi koordinatlar arası farklardan bularak oranladığı görülmüştür. Ö2’ nin koordinat düzleminde bir doğrunun eğimini bulurken yaptığı her adımın ne anlama geldiğinin farkında olduğu ve herhangi bir dışsal uyaran beklemediği dikkat çekmiştir.

G: *Şimdi buraya bakarak, burada ne yaptın sen? Bana burada cebirsel bir ifade, bir formül çıkarabilir misin? Tamam çizdin çizdin. Şimdiye kadar 3 tane yaptın. Üçünde de çizdin bir şeyler buldun. Peki bir formül çıkarmanı istesem senden.*

Ö2: *385' e A desek, diğer sayı 850' ye B deriz. 685 C, 350 D olsun. A….(duraksadı) nasıl yani?*

G: *Şuraya yaz noktanın koordinatlarını daha net görürsün?...Diğer nokta*

Ö2: *(C,D).*

G: *Peki şimdi koordinatları(A,B) ve (C,D) olan iki noktadan geçen doğrunun eğimini yaz bana.*

Ö2: *Şurada B idi dimi hocam orası? B-A yok değil B-D(yüksekliği gösteriyor) burası da A-C yok C-A(yatay mesafe).*

G: *Eğim ne peki?*

Ö2: *Eğim…*

G: *Bu ikisini yazdın ya sen şu anda(koordinatlar arası farklar) peki eğim ne?*

Ö2: …

G: *B-D sana neyi veriyor?*

Ö2: *Şurasını veriyor(yüksekliği gösteriyor).*

G: *Orası ne?*

Ö2: *Yükseklik.*

G: *C-A neyi veriyor?*

Ö2: *Alt mesafeyi veriyor.*

G: *Peki eğimi nasıl buluyorsun?*

Ö2: *B-D/C-A değil mi?*

G: *Peki ben sana bir sayı daha versem eğimi hesaplayabilir misin bana? Mesela yaz. (250,150) diğer nokta (300,200). Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplayabilir misin bana?*

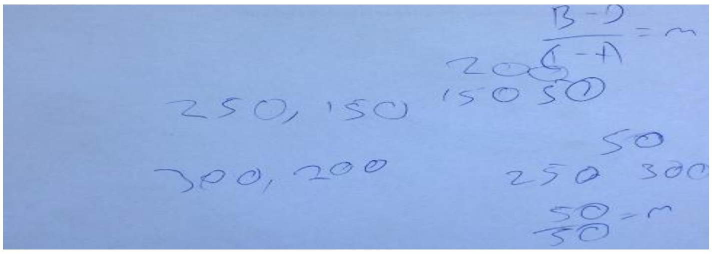
Ö2: *İşlem yapmadan değil mi?*

G: *Yani koordinat düzlemini çizmeden.*

Ö2: *Yani pratik yoldan işlem yapmadan mı?*

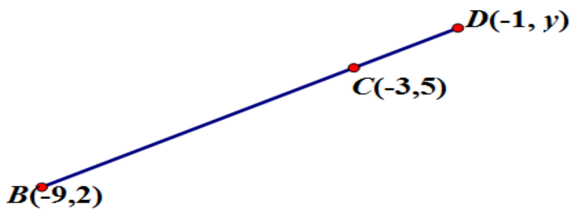
G: *Hayır hayır yapabilirsin tabi ki işlem.*

Ö2: *(200' den 150' yi çıkardı) yükseklik 50. Burası(300' den 250' yi çıkardı) burası da 50. 50/50.*



Ö2' nin gerekli cebirsel genellemeye ulaştıktan sonra görselleştirme yapmaksızın, koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplayabilmesi onun koordinat düzlemindeki bir doğru için eğimi içselleştirmeye yakın olduğunu da düşündürtmektedir. Bu öğrenci bir doğrunun eğimini, koordinat düzleminde görselleştirerek bulabildiğini her fırsatta gösterirken bunun yanında zihnindeki süreci cebirsel olarak da ifade ederek doğruyu görselleştirmeksizin de eğimi bulabileceğini hissettirmiştir.

Doğrudaş üç noktadan bir tanesinin ordinatını bulma gerektiren, daha önceden öğrencilerin karşılaşmadığı bir soruda Ö2' nin eğim kavramını bu sürece çağıramadığı görülmüştür. Doğruya uygun koordinat düzlemi oluşturmaya çalışmış olmasına rağmen doğru denklemi kavramında bilgi eksiklikleri onu engellemiştir.



Bu doğru üzerinde 3 nokta verilmiştir. D noktasının y koordinatını bulabilir misin?

Ö2: *Şeyi bulabilir miyiz?*

G: *İstediğini yapabilirsin.*

Ö2: *(Bu koordinatlara uygun koordinat düzlemini çizmeye çalışıyor) Burası eksi ama değil mi hocam?*

G: *Evet.*

Ö2: *(-1' e bakarak) Burasının altta olması lazım o zaman!!(bu sırada orijini D noktası aldı olmadı, aşağıda bir nokta aldı yine olmadığını fark etti). -1 altta olması lazım değil mi hocam?*

G: *Ama y koordinatı mı -1 yoksa x koordinatı mı?*

Ö2: *x koordinatı.*

G: *X koordinatı -1.*

Ö2: *O zaman şurası -1 oluyor(orijini sağ kaydırmaya çalıştı ama bu sefer de diğerleri tutmuyor).*

G: *Peki nasıl düzelteceksin bu durumu?*

Ö2: *O zaman şöyle olur hocam(düzeltmeye çalıştı ama yine yapamadı).*

G:,*Koordinat düzlemini çizmiş olman sana ne gibi fayda sağlayacak?*

Ö2: *İşlemi daha çabuk yaparsın.*

G: *Yap bakalım hadi.*

Ö2: *y hocam sıfırda oluyor. Yani orijinde!(yanlış olduğunu düşünmüş gibi bir ifadeyle bakıyor).*

G: *Evet bu sefer de öyle bir problemin olmuş oluyor. Demek ki orası da değil.*

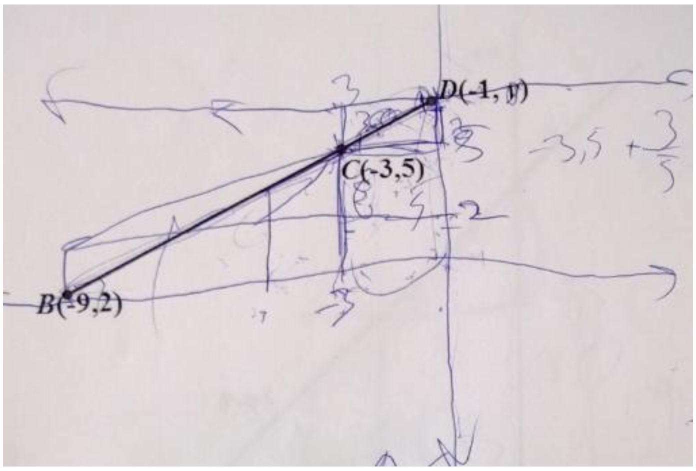
Ö2: *Orası da olmayacağına göre bir alt kalıyor(D noktasının altında C hizasında bir noktayı orijin alırım diyor).*

G: *Orası da olmuyor… nasıl yapacaksın peki?*

Koordinat düzlemini kullanmadan yapmak istediğini yapabilir misin?

Ö2: *…*

G: *Sen şu anda bir üçgen mi oluşturdun burada?*



Ö2: *Evet.*

G: *Tamam bu üçgenleri kullansan! Sana koordinatları vermiş ya nasıl olsa.*

Ö2: *Evet.*

G: *Nasıl kullanabilirsin?*

Ö2: *Şurası 3 buçuk ise burası 3 tür.*

G: *Neresi 3 buçuk? 3 buçuk değil o. -3' e 5 noktası orası.*

Ö2: *Hımm. Burası x, -3; burası da 5. Buna uyuyor mu hocam?*

G: *Ona uyuyor evet.*

Ö2: *Buna uymuyor ama.*

G: *Ona uymuyor.*

Ö2: *Bu orijinde değil mi hocam?(D noktasını gösteriyor)*

G: *Hayır. Eğer orijinde olsaydı x ve y ikisi de sıfır olurdu.*

Ö2: *O zaman orijin ya burada olacak ya da altta.*

G: *Sen buna takılma bunun olmadığının farkındasın. Sadece çizmiş olduğun üçgeni esas alarak devam et.*

Ö2: *Nasıl olur?(kendi kendisine düşünüyor). Bu 2 olur(koordinat düzleminde sayıları yine yazmaya çalışıyor).*

Bu doğru üzerinde alınan noktalara göre eğimin değişmeyeceğini araştırmacının dışsal uyarılarıyla fark edebilen Ö2' nin, eğimin bu doğru üzerinde değişmemesini yol uzunluğu ile yatay mesafe arasındaki ilişkiden anlamlandırdığını bir kez daha göstermiştir. Oluşturduğu dik üçgensel model üzerinde dinamik olarak oynatma yaparak hipotenüs veyatay mesafenin aynı oranda azalacağını vurgulamıştır. Bir diğer dikkat çekici nokta ise bu öğrencinin “sabit gidiyor çünkü” gibi ifadeleriyle görsel olarak da eğimin değişmemesini açıklamasıdır.

G: *B,C, D noktalarının üçünün de ne ortak özelliği burada? Sözel bir şey söyleyebilirsin.*

Ö2: *…(mırıldanıyor)*

G: *Peki ben sana şöyle söyleyeyim. Bu yolda yürüdüğünü düşünsen veya arabanla gittiğini düşünsen. B, C ve D de istasyon olsa yine koordinatlar bu şekilde. Yolda giderken değişen ve değişmeyen neler vardır?*

Ö2: *Hocam yolun şurada çıkmamız değişmiyor.*

G: *Ne değişmiyor?*

Ö2: *Mesela şurada eksilik…nasıl anlatsam size?(suskunluk).*

G: *Değişmeyen ne sen giderken bu yolda?*

Ö2: *Gideceği yol değişiyor hocam.*

G: *Tamam.*

Ö2: *Alt mesafe. O da değişiyor. Eğim ama değişmiyor hocam.*

G: *Eğim neden değişmiyor?*

Ö2: *Hocam eğim, şurada var(yolun BC arasını gösteriyor). şurada da var(CD arasını gösteriyor). yani yolda hep eğim olacak.*

G: *Peki artıp azalmadığını nereden biliyorsun?*

Ö2: *Sabit gidiyor hocam çünkü(eliyle doğru oluşunu gösteriyor).*

G: *Sabit gidiyor…peki ne sabit gidiyor?*

Ö2: *Eğim.*

G: *Eğimi nasıl hesaplarsın?*

Ö2: *Yükseklik bölü yatay mesafe.*

G: *Yükseklik bölü yatay mesafeden.*

Ö2: *Yükseklik azaldıkça eğim miydi? Alt mesafe mi? Yükseklik azalmıyor hocam.*

G: *Yükseklik ne yapıyor?*

Ö2: *Sadece böyle düşüyor ama…Bununla bu aynı oranda azalıyor(doğrunun kendisi veyatay mesafeyi gösteriyor)*

G: *Hımm.*

Ö2: *Bu azalıyor bu da azalıyor.*

G: *Aynı oranda azalıyor.*

Ö2: *Evet. Şu şuraya geliyor bu da buraya(yatay mesafe ile doğrunun kendisi gösteriyor).*

Daha sonra bu üç noktadan herhangi ikisine göre hesaplansa da eğimin değişmeyeceğini bu soruda kullanması beklenen Ö2’ nin eğimleri hesaplarken yine kendi oluşturduğu üçgenler üzerinden gitmeye çalıştığı görülmüş ancak koordinat düzlemi ve doğru denklemi ile ilgili yaptığı hatalar onun sonuca ulaşmasına olanak vermemiştir.

Görselleştirme yapmaksızın doğrudan iki noktayı kullanarak eğimi hesaplayamaması ise onun y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesini içselleştiremediğini göstermektedir.

G: *Peki eğimin aynı kalmasını bu soruda nasıl kullanabilirsin?*

Ö2: *Aynı olmasını…*

G: *Yani sana bu soruda eğimin aynı olması ne gibi fayda sağlar?*

Ö2: *Eğim aynı olursa hocam…nasıl desem? Sabit gibi bir şey oluyor.*

G: *Sana bu doğru üzerinde 3 tane nokta verilmiş değil mi?*

Ö2: *Evet.*

G: *İki noktayı kullanarak eğimi bulabilir misin?*

Ö2: *Evet bulurum. Şöyle…(çizdiği üçgenin uzunluklarını belirginleştirmeye başladı)*

G: *Tamam bul bakalım.*

Ö2: *Şu alt tarafi 3,5.*

G: *Yok koordinatlar -3' e 5. 3,5 değil yani.*

Ö2: *O zaman şurasının koordinatlarını veriyor. Burası +5 burası -3. O zaman eğim 3/5.*

G: *3/5.*

Ö2: *Burada hocam eksi değil artı.*

G: *Eğim diyorsun artı.*

Ö2: *Evet.*

G: *Peki koordinat düzlemini tekrardan kendin oluşturup çizsen sonuca ulaşabilir misin?*

Ö2: *Hocam eksilikler buna dahil değil mi?*

G: *Evet. Koordinat düzlemini yukarıda doğruya göre oluşturamadın madem kendin oluştur bakalım. Noktaları tek tek belirle sonra birleştir. Orada eğimi bulabilir misin acaba?*

Ö2: *(koordinat düzlemini çizip noktaları belirliyor). Çünkü eksilik bu tarafta oluyor ya hocam(koordinat düzleminde (-1,y) noktasının koordinatlarından x koordinatının yerini gösteriyor).*

G: *Hı hı.*

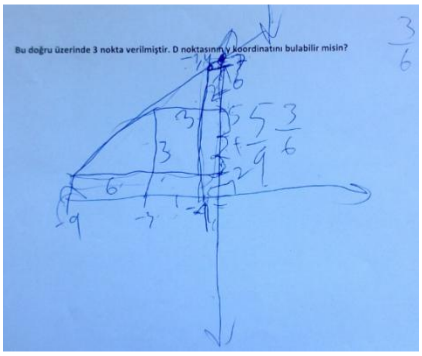
Ö2: *Diğeri de y burada ya da burada olacak(y eksenindeki negatif ya da pozitif tarafında olacağından bahsediyor).*

G: *Tamam o zaman onu en son yaparsın. Önce diğer noktaları belirle.*

Ö2: *-3' e 5 burası. Bu da -9' a 2.*

G: Hı hı.

Ö2: *Burası 3(5' ten 2' yi çıkardı). Burası da 6(9' dan 3' ü çıkardı). 3/6.*



Koordinatları belirli olan iki noktadan doğrunun eğimini bulmasına rağmen bilinmeyenli koordinata sahip noktanın yerini belirlemekte çok zorlanan Ö2, eğimi kullanması konusunda da sürekli dışsal uyarı almış ve bu uyarılara rağmen sonuca ulaşamamıştır. Bu öğrencinin bu sorunun çözümü sürecinde koordinat düzlemi ve doğru ile ilgili yanlışlar yapması ve bu yanlışları birçok kez düzeltememesi, onun eğimi kullanmasına da fırsat bırakmamıştır.

G: *Doğrunun gidişine göre nerede olacağı belli değil ama sen yukarı doğru çıkarıp y' sini göz kararı da olsa belirleyebilir misin?*

Ö2: *Nasıl yani?*

G: *Şimdi sen şu noktayı bulmak istemiyor musun? (-1,y) noktası. O noktayı gösterebilir misin bana?*

…aynı doğru üzerinde olacak bak.

Ö2: *Şöyle bir şey(noktayı gösterdi ve doğruyu uzattı).*

G: *Nereye gelir peki y?*

Ö2: *5,6,7(sayıyor 5' ten yukarıya doğru göz kararı aralık vererek). 7.(aslında doğru sayıyor fakat y ekseni üzerindeki noktayı 7 olarak bulup söylüyor aslında aradığı nokta o değil).*

G: *Ama y üzerinde 7 değil mi?*

Ö2: *Evet. 7 demiş eksi dememiş eksi deseymiş şuralarda olurdu.*

G: *Hı hı. Peki -1' e y noktası neresi?*

Ö2: *-1' e y. Şurası ((0,7) noktasını gösteriyor).*

G: *Yani 7 diyorsun sen y' ye. (-1,7) noktası deseydim orasını mı gösterirdin?*

Ö2: *…*

G: *-1' e 7. Mesela y dediğim şey 7 olsaydı?*

Ö2: *Burası.(((-1,y) olarak sorulan noktayı gösteriyor)*

G: *Ama 7 tam buraya mı denk geliyor?*

Ö2: *Nasıl yani?*

G: *(-1,7) noktası. Burası tam 7' ye mi denk geliyor? 7'den geçmiyor mu bu çizgi?*

Ö2: *Bir dakika hocam. Burası 6 olsa burası 7,5 olur.*

G: *Yani 7, 5 gibi bir şey olur orası diyorsun. Peki, nokta nerede? Noktayı işaretleyebilir misin bana?*

Ö2: *Şurası.(yine (0,7) noktasını gösteriyor)*

G: *Ama -1 değil ki o noktanın koordinatı 0.*

Ö2: *O zaman şurası(-1,y noktasını göstererek).*

G: *Orası da (-1,y). Burada yolun eğimi değişmez demiştin ya.*

Ö2: *Evet.*

G: *Bu noktanın koordinatını yaz istersen (-1,y). Y koordinatını bulabilir misin? Eğim değişmez dedin bana.*

Ö2: *Nasıl bulabilirim ki? Şurası mı hocam(doğruyu göstererek)*

G: *Evet. Sen onun eğimini buldun mu?*

Ö2: *Onun eğimi…7 yükseklik, 9 değil mi şurası?(yatay mesafeyi gösteriyor).*

G: *9 mu orası?*

Ö2: *İki tane üçgen var hocam.*

G: *Hangisinden bulacaksın eğimi?*

Ö2: *Hocam zaten bunların ikisi eşit.*

G: *Neler eşit?*

Ö2: *Mesela şunların ikisinin arasında 2 tane var şurası 3. 3.(iki üçgenin yükseklik veyatay mesafelerini koordinat düzlemindeki koordinat farklarından buluyor). Bunda 3 bunda 6 bunda 3 bunda 2.*

G: *Oradaki 2 olduğunu nereden biliyorsun peki? Senin çizdiğine göre 2 orası.*

Ö2: *Evet.*

G: *Aslında bize orasını soruyor zaten senin 2 dediğin yeri.*

Ö2: *…*

G: *Hani 2 olup olmadığından tam olarak emin değilsin sen onun?*

Ö2: *Evet.*

G: *Peki orayı şuradan bir eğim hesapladın ya sen(iki üçgenden nispeten daha büyük olanına bakarak).*

Ö2: *3/6.*

G: *3/6 dedin eğime. Peki büyük üçgenin eğimi kaç**?***

Ö2: *Bu…(eğimi bulduğu üçgeni gösteriyor).*

G: *O üçgenden daha büyük var mı?*

Ö2: *Şu var(en büyük üçgeni gösteriyor).*

G: *Evet.*

Ö2: *Burası 5(yüksekliği göstermeye çalışıyor ama hepsini alamadı), burası 9(yatay mesafeyi gösterdi). 5/9.*

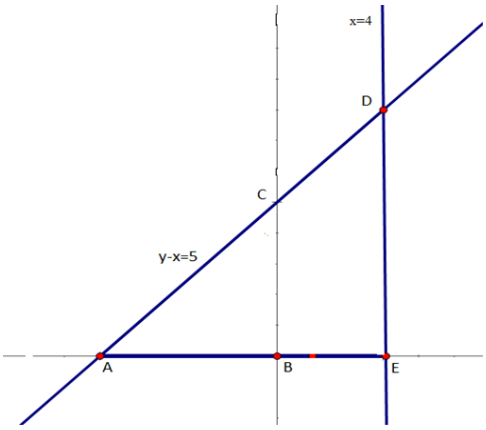
G: *5 olduğunu nereden biliyorsun orasının? Senin çizimine göre 5.*

Ö2: *Evet.*

G: *Burası 7 dedin ama göz kararı 7 yazdın değil mi? Burası 5 burası 6 burası 7 dedin. Öyle mi? Aslında orası 7 değil. Kaç orası?*

Ö2: *Orası…*

Ö2, eğimin doğrudan soru içerisinde geçmediği, daha önceden öğretim sürecinde de karşılaşmadığı tarzda olan diğer soruda da eğimin değişmezliğini yine araştırmacıdan gelen dışsal uyaranlarla çözüm sürecine çağırmış ve kullanmıştır. Eğimin değişmemesini bu sefer, ve araştırma boyunca ilk kez, yükseklik ile yatay mesafenin aynı oranda azalması ile açıklayan Ö2' nin, alan için bulması gerektiğini düşündüğü uzunluğu, orantısal düşünmeden ziyade "yatay mesafe 4 arttıysa yükseklik de 4 artabilir" şeklinde sabit artış stratejisiyle bulmasının onun oran-orantı bilgisi eksikliğini koyması açısından önemli olduğu düşünülmekte ve eğimin de bir oran olduğundan yola çıkılarak, bu eksikliğin onun eğimi yapılandırmasına olumsuz etki ettiğini düşündürmektedir. Öğrencinin eğimin doğru üzerinde alınan noktalara göre değişmeyeceğini anlamlandırmış olmasına rağmen bunu soru içinde kullanamaması ve hatta daima araştırmacının "eğimi başka yerden hesaplayamaz mısın", "eğim değişmez dedin hani nasıl kullanabilirsin onun değişmezliğini?" gibi yardımcı sorularıyla ilerleyebilmesi, onun bu değişimi içselleştiremediğini göstermektedir.



Koordinat düzleminde verilenlere göre ADE üçgeninin alanının, ABC üçgeninin alanının kaç katı olduğunu hesaplayınız.

…

G: *Peki yine bu bir yol olsa ve sen buldan yürüsen. Yolun nesi değişiyor nesi değişmiyor kullanabilir misin?*

Ö2: *Değişen şu uzunluklar hep.*

G: *Peki nesi değişmiyor?*

Ö2: *Eğimi değişmiyor hocam hiç.*

G: *Eğimi nasıl kullanabilirsin?*

Ö2: *Eğime n diyelim(aslında yüksekliğe n dedi ve sözel olarak ifade ederken şaşırdı).*

G: *Tamam.*

Ö2: *n çarpı 9…*

G: *n neresi?*

Ö2: *Burası(DE).*

G: *Hımm. İki kenarı çarptım diyorsun. Peki n' yi nasıl bulabilirsin?*

Ö2: *Burası 5, burası 4(mırıldanır gibi).*

G: *Yolda gittikçe eğim değişmiyor hiç. Nasıl kullanabileceksin eğimin değişmemesini?*

Ö2: *Eğimin değişmemesini…burası 9 burası 5 desem hocam, şurası 7 olabilir.*

G: *Peki eğimin değişmemesi. Eğimin biliyor musun bu yolun kaç?*

Ö2: *Burasının eğimin biliyorum. Burasını bilmiyorum(AC ve CD doğru parçalarını gösteriyor).*

G: *Eğim değişmiyor dedin ama. Aynı mı çıkacak eğim demek istiyorsun?*

Ö2: *Aynı çıkmayacak.*

G: *Ne olacak?*

Ö2: *Nasıl anlatsam. Eğim değişmiyor ama mesafe artıyor azalıyor. Mesela eğim sabit değişmiyor. Yükseklik azaldı aynı oranda alt mesafe de azaldı.*

G: *Peki bu doğrunun eğimini hesaplayabilir misin bana?*

Ö2: *Neresi?*

G: *Doğrunun eğimi.*

Ö2: *…*

G: *İstediğin yerden hesaplayamaz mısın? Madem değişmiyor eğim.*

Ö2: *…*

G: *Şu doğrunun eğimini hesapla bana.*

Ö2: *Nasıl hesaplarız? Hocam bunları harfler versek a, b, c öyle.*

G: *Ne lazım sana eğimi hesaplamak için?*

Ö2: *Yükseklik veyatay mesafe lazım.*

G: *Yükseklik veyatay mesafeyi bilmiyor musun?*

Ö2: *Biliyorum.*

G: *Tamam o zaman hesapla.*

Ö2: *Yüksekliği bilmiyorum hocam. Yatay mesafeyi biliyorum.*

G: *Sen nereye bakarak söyledin bunu?*

Ö2: *Şuraya ve şuraya bakarak(AE ve DE).*

G: *Peki başka bir yerden hesaplayamaz mısın eğimi?*

Ö2: *Şurası 5. Şuraya geliyor. Burası işte sorun orası.(kendi oluşturduğu küçük üçgene bakıyor. Onda da yine yüksekliği bilmiyor)*

G: *Peki ona benzer başka bir üçgen yok mu elinde?*

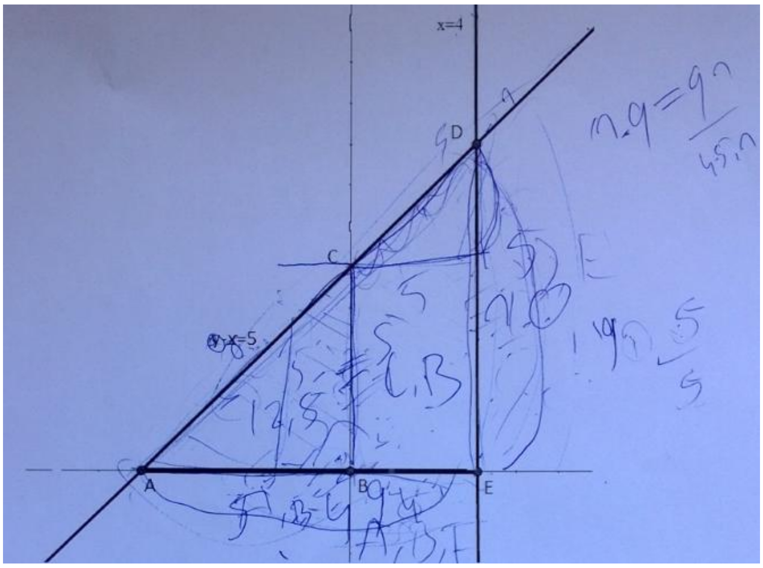
Ö2: *Paralel ama. Sadece bunlar paralel(CB ve DE) şurası sabit(hipotenüslere bakıyor).*

G: *Eğimi hesaplayabilir misin peki?*

Ö2: *Şuradan hesaplarım: 5/5.*

G: *5/5. O eğim yukarıda da aynı mıdır?*

Ö2: *Burası 9 oluyor hocam. Burası 9 ise hocam burası(DE) da 9 olabilir.*



G: *Neden öyle bir kanıya vardın?*

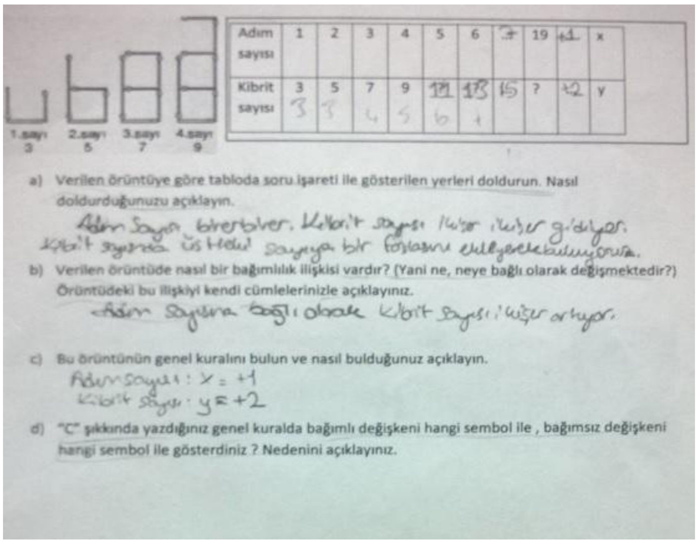
Ö2: *Çünkü hocam şurada artıyor ya(AE doğru parçasında BE' yi gösteriyor) bunda 4 artabilir(DE' den bahsediyor).*

G: *Hımm artıştan kastın toplama olarak bir artış senin.*

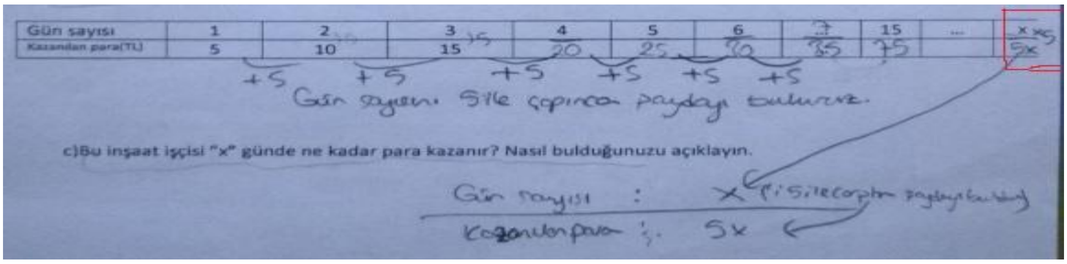
Ö2' nin bir doğru ya da doğrusal görselin eğimini yüksekliği yatay mesafeye bölerek hesaplayabildiği görülürken, öğrenme sürecinin ilk zamanlarında eğim durumunu açıklamak ve yorumlamak için dik üçgensel model oluşturduğu ve onu eğim durumunun bir modeli olarak gördüğü(model-of), ilerleyen zamanlarda ise dik üçgensel modeli artık, eğim hesaplama ve başka formlara uyarlama sürecinde bir araç olarak (model-for) kullanmaya başladığı dikkat çekmektedir. Öğrenme sürecinde kendisinin keşfe ulaşmakta sıkıntı yaşadığı görülmüş ancak grup içi ve gruplar arası tartışmalarla ulaşılan keşifleri anlamlandırmaya çalıştığı dikkat çekmiştir. Ö2' nin eğimi, bir doğru üzerinde herhangi bir noktadaki yükseklik veyatay mesafe arasındaki sabit oran olarak kendisi keşfedemediği görülürken, eğimi bu orandan elde edeceğini benimsediği ve eğimin aynı doğru üzerinde sabit kalacağını ise yol uzunluğu ile yatay mesafe arasındaki orantısal ilişki ile anlamlandırdığı ortaya çıkmaktadır. Aynı doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmezliğini anlamlandıran öğrencinin, kendisine sorulan doğrudan eğim hesaplaması gerektirmeyen sorularda bu değişmezliği ancak dışsal uyaranlarla çağırması ve çağırmasına rağmen kullanamaması, onu içselleştiremediğini göstermektedir. Ö2' nin koordinat düzleminde bir doğrunun eğimi için, yükseklik/yatay mesafe soyutlamasını yansıtarak uyarlayabildiği görülürken istenilen doğruyu koordinat düzleminde görselleştirmeksizin sonuca ulaşamaması onun yine tam olarak içselleştirmeyi gerçekleştiremediğini düşündürmektedir. Ancak bu öğrencinin y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesini bir formül olarak ezberlemediği ve koordinatları bu formülde yerine yazarak sonuca ulaşamadığının görülmesi, ya da "koordinatlar arası farkı bul ve birbirine böl" gibi bir algoritmanın adımlarını uygulamadığı da açıkça görülmüştür. Ö2, koordinat düzleminde bir doğrunun eğimi için attığı adımların ne anlama geldiğinin farkında olduğunu göstermektedir.

Ö3' ün Eğim Kavramını Oluşturma Sürecine İlişkin Bulgular

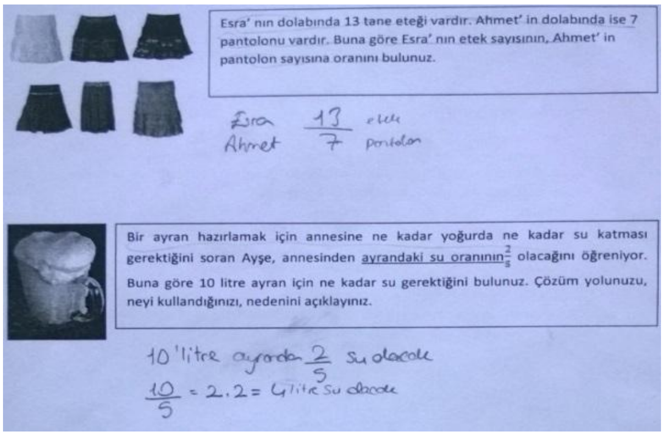
Ö3' ün öğretim süreci öncesinde uygulanan açık-uçlu testte örüntüleri genellerken fonksiyonel düşündüğü ya da düşmeye çok yakın olduğu görülürken, genel kuralı cebirsel olarak ifade etmede sıkıntı yaşadığı görülmüştür.



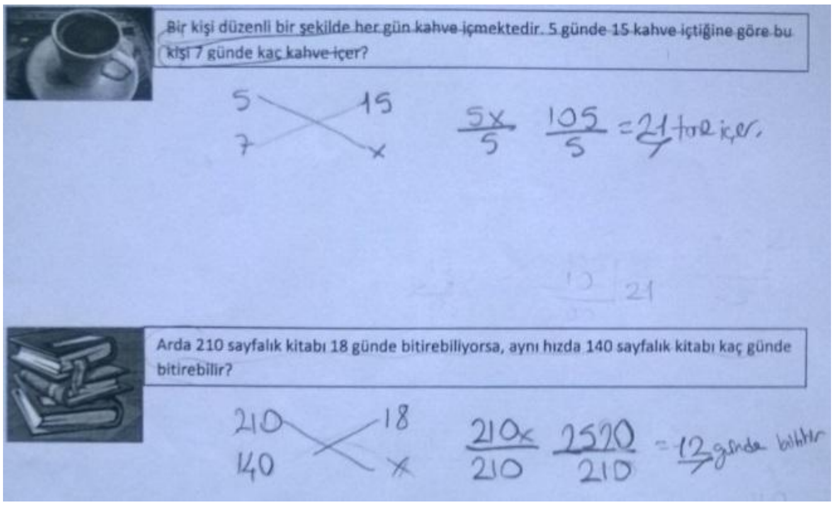
Yukarıdaki alıntıda bağımlı-bağımsız değişkenin terim olarak farkında olmadığı görülen bu öğrencinin bir başka soruda fonksiyonel düşünebildiğini açık bir şekilde ortaya koyabildiği ve değişken kavramının farkında olduğu görülmüştür.



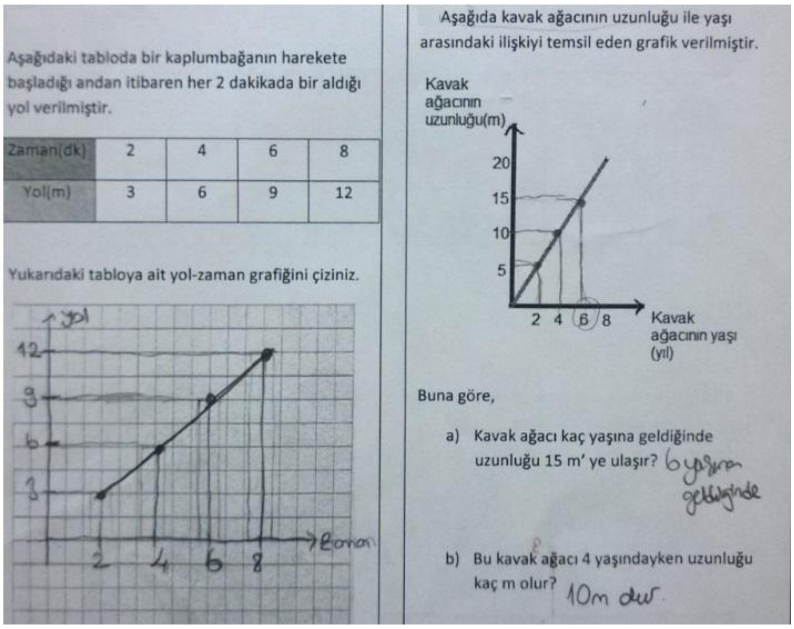
İki niceliği oranlayabilmenin yanı sıra oran verilen bir problem durumunda verilen bu oranı kullanarak istenileni bulabildiği görülen Ö3' ün oran kavramına en basit düzeyde bile olsa sahip olduğu düşünülmüştür.

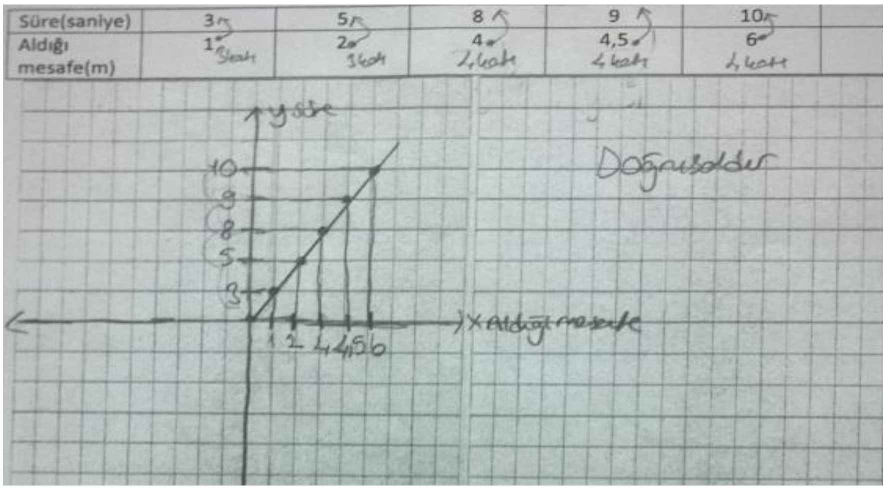


Ayrıca bu öğrencinin doğru orantı kurma gerektiren problemlerde orantı kurarak sonuca ulaşabildiği açık bir şekilde görülmüştür.

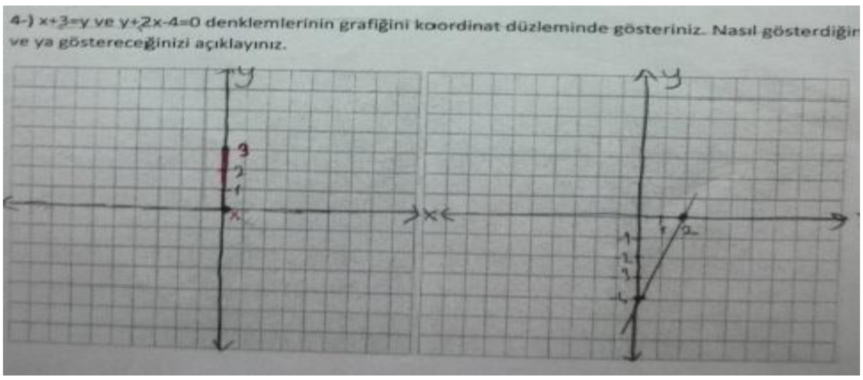


En basit çizgi grafiğini oluşturabildiği ve yorumlayabildiği görülen Ö3' ün, bunun yanında iki niceliğin arasındaki ilişkinin doğrusallığı hakkında yorum yapmak için, bu iki niceliğin birbirine göre değişimini gösteren grafiği oluşturduğu ancak grafiğin eksenlerinde değerler arasındaki aralığı hep eşit tuttuğu için yanlış sonuca vardığı dikkat çekmiştir. Buna rağmen doğrusallık hakkında görselliğe dayanan bir bilgisinin olduğu düşünülmüştür.

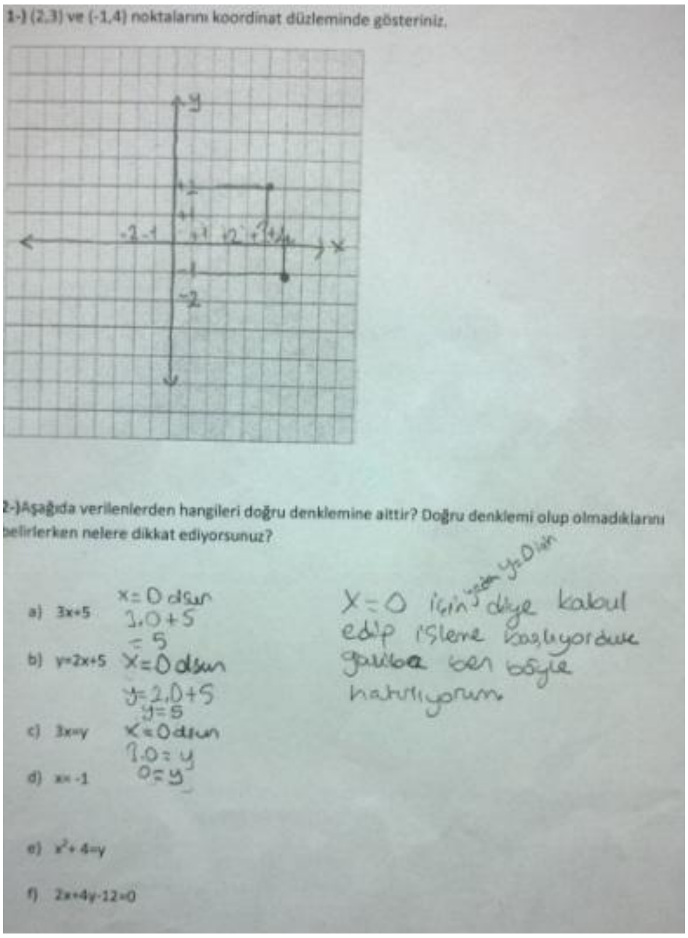




Denklemi verilen bir doğrunun grafiğini çizmeyi başaramayan fakat bu konuda yanlış da olsa bir şeyler hatırladığı görülen Ö3' ün doğru denklemini kavramsallaştırmadığı düşünülmüştür.



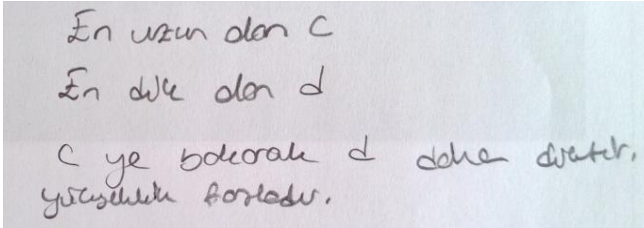
Koordinat düzleminde noktaları belirlemede de hatalar yaptığı dikkat çeken öğrencinin, bir denklemin bir doğruya ait olup olmadığı konusunda ezberlediği bir algoritmayı uygulamaya çalıştığı fakat tam olarak başaramadığı dikkat çekmiştir.



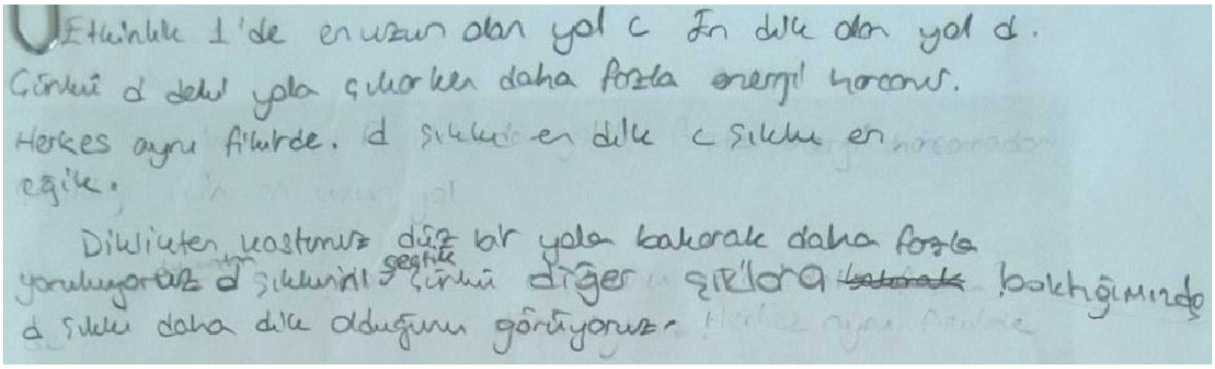
Öğretimin İlk İki Derslik Süreci

Öğretim sürecine, öğrencilerin informal yollardan edindikleri eğim bilgisini çağırmalarına fırsat veren bisikletli bağlamında, eğimin günlük yansımalarından biri olan diklik ifadesini kullandığı görülen Ö3’ ün bireysel çalışma kağıdında diklik ile yüksekliği ilişkilendirme girişimi görülmüştür. Grup içi tartışmalarda ise bu ilişkilendirmeyi grup çalışma kağıdına yazmadığı dikkat çekmiştir. Öğrencilerin bisikletlinin zorlanmasını aynı zamanda yolun uzunluğuna bağlı olarak da yorumlamışlardır ki bu da zaten günlük yaşamdan edindikleri informal deneyimlerini öğrenme sürecine çağırdıklarını göstermektedir. Daha sonra tartışmalar sırasında kullanılan dik, yokuş gibi kelimelerden ne anladıkları sorulduğunda ise Ö3’ ün grup çalışma kağıdında informal bilgilere dayalı açıklaması görülmektedir.

Ö3’ ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

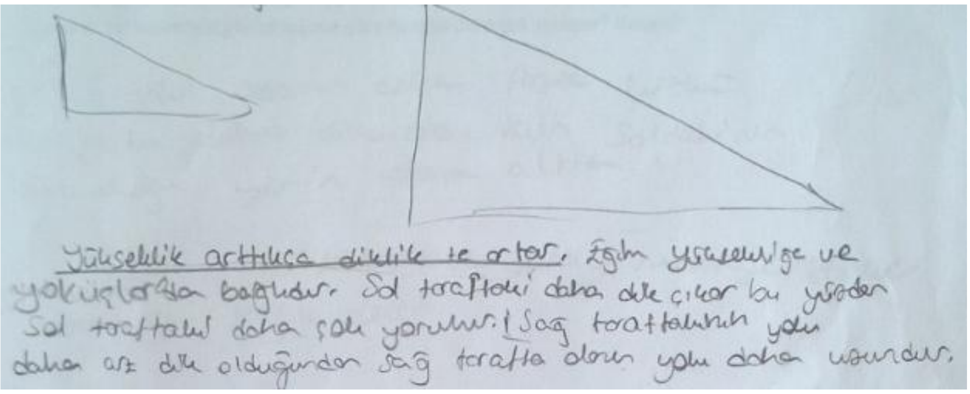

En uzun olan c
En dik olan d
c ye bakarak d daha diktir,
yüksekliği fazladır.

Ö3’ ün grup çalışma kağıdından bir görüntü

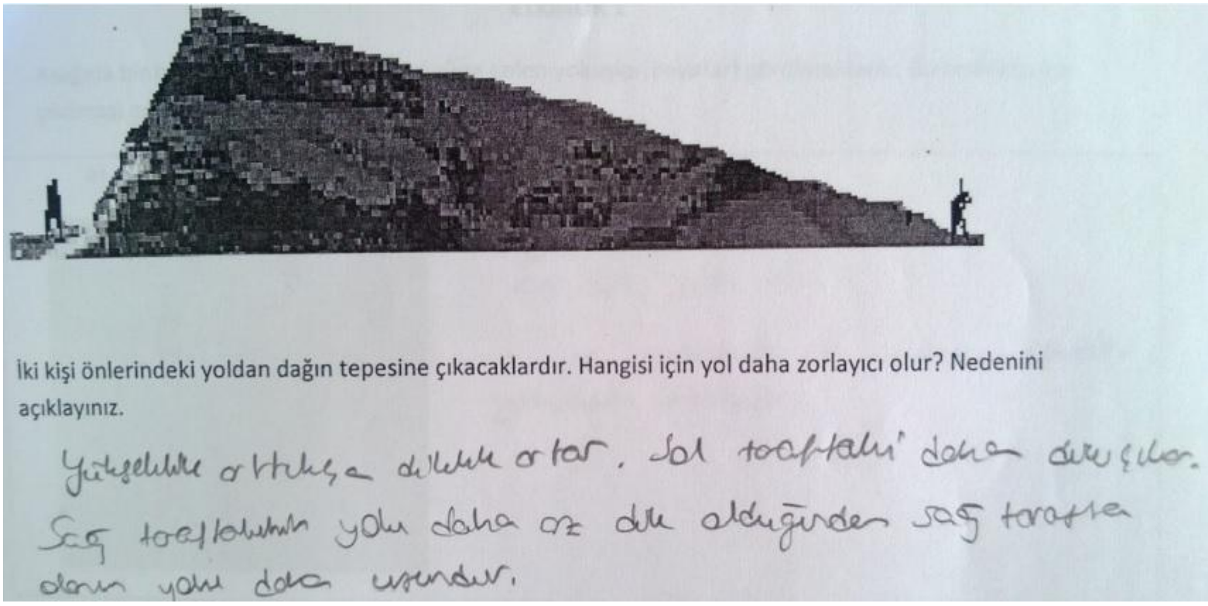

Etkinlik 1'de en uzun olan yol c En dik olan yol d.
Çünkü d dik yola çıkarken daha fazla enerji harcarız.
Herkes aynı fikirde. d şıkkı en dik c şıkkı en
eğik.
Diklikten kastımız düz bir yola bakarak daha fazla
yoruluyoruz d şıkkındaki geçtik çünkü diğer şıklara ~~bakarak~~ baktığımızda
d şıkkı daha dik olduğunu görüyoruz.

Ardından etekleri doğrusal olarak görsellenmiş bir tepeye farklı iki yandan çıkan kişilerin zorlanışının yorumlanmasını gerektiren günlük yaşam bağlamında Ö3’ ün yükseklikler aynı olmasına rağmen yine yükseklikle eğim arasındaki doğru orantılı ilişkiye vurgu yaptığı ve bununla yanında zorlanışı, eğim ile ilişkilendirmekle beraber yol uzunluğu ile de ilişkilendirdiği görülmüştür. Grup arkadaşlarının yükseklikle eğim arasındaki doğru orantılı ilişkiye kendi bireysel çalışma kağıtlarında hiçbir şekilde vurgu yapmadığının görülmesi, ancak grup çalışma kağıdına keşfedilen bu ilişkinin yazılması, Ö3’ ün bu keşfi kendisinin yaptığını düşündürmektedir. Ö3’ ün grup çalışma kağıdında, yükseklik ile eğim arasındaki ilişkiyi açıklamak üzere çizildiği düşünülen iki dik üçgensel modelde yatay mesafelerin farklı oluşunun fark edilmediği görülmüş ve bundan dolayı Ö3 ve grubunun henüz bu aşamada yatay mesafeyi, eğimi etkileyen bir uzunluk olarak görmedikleri yorumu yapılmıştır. Ayrıca Ö3’ ün eğimi, yükseklik ve yokuşa bağlı olarak yorumladığını belirtmesi henüz eğim ile yokuşun aynı anlamda kullanılabileceğini fark edemediğini göstermektedir.

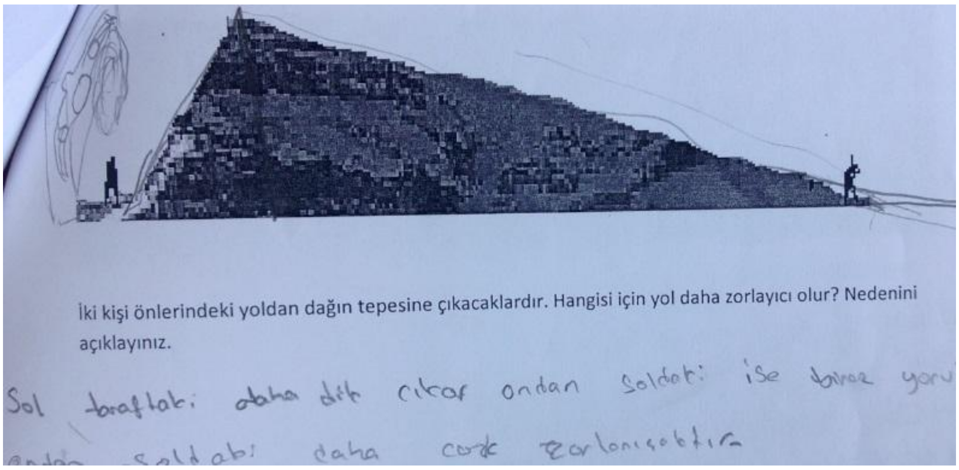
Ö3' ün grup çalışma kağıdından bir görüntü



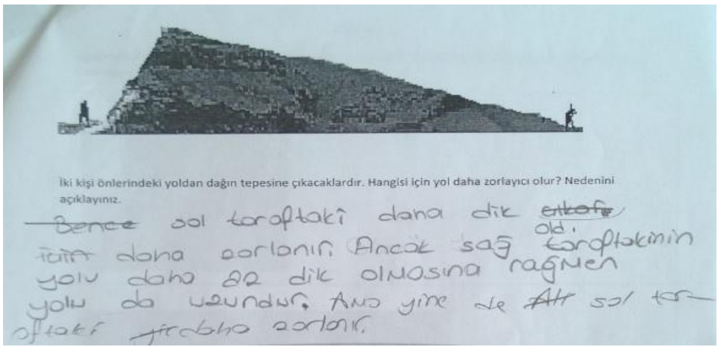
Ö3' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Ö3' ün grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

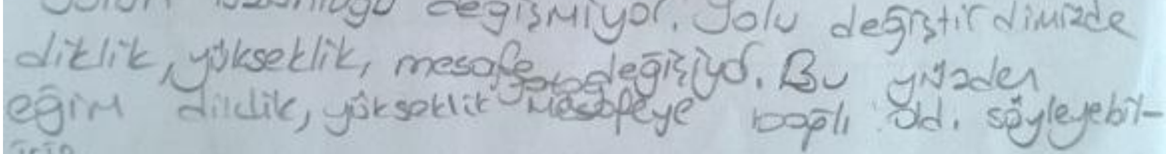


Ö3' ün diğer grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

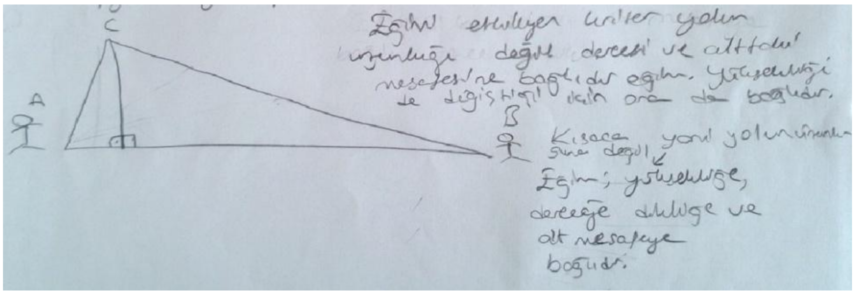


Tüm sınıfın eğimin fazla olduğu yolu rahat bir şekilde belirleyebildiğinin görülmesinin ardından tüm gruplar "eğimin fazla ya da az oluşunu nasıl anladıkları" sorusuyla karşı karşıya bırakılmışlardır. Ö3' ün grubunu temsilen yaptığı açıklamada yüksekliğin aynı olmasının yanında "yolun derecesi ve alttaki mesafeden dolayı" şeklinde yorum yaptığı görülmüştür. Ö3' ün yükseklikle eğimi ilişkilendirmeyi sağlayabildiği ve bunun yanında grup olarak, yatay mesafe ve hatta açı ile ilişkiyi de keşfettiği görülmüştür. Ancak bazı grupların yol uzunluğuna bağlı olarak eğimi yorumladıklarının görülmesi üzerine tüm gruplar yeni bir düşünme ve tartışma sürecine bırakılmıştır. Eğimin yol uzunluğuna bağlı olup olmadığı konusuna yönelik grup içi tartışmalardan sonra Ö3 ve grubunun eğimin yol uzunluğuna bağlı olmadığını dile getirirken eğimin bağlı olduğu değişkenleri "diklik, derece, yükseklik veyatay mesafe" olarak belirledikleri görülmüştür. Yüksekliği keşfetmede daha önceden Ö3' ün grupta öncülük ettiği görülmüşken, bu sefer yatay mesafe ve açıyı bir değişken olarak keşfetme sürecinde ise grup arkadaşının ön plana çıktığı o kişinin bireysel çalışma kağıdındaki notlarından ortaya çıkmaktadır.

Ö3' ün grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

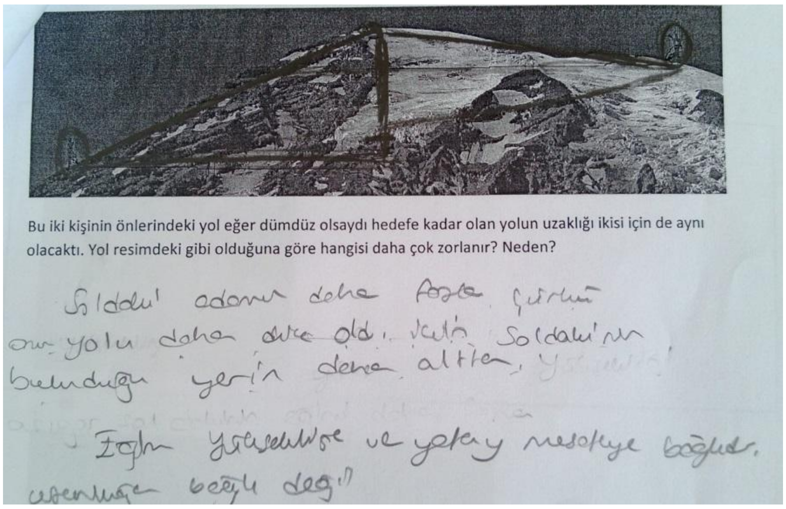


Ö3' ün grup çalışma kağıdından bir görüntü

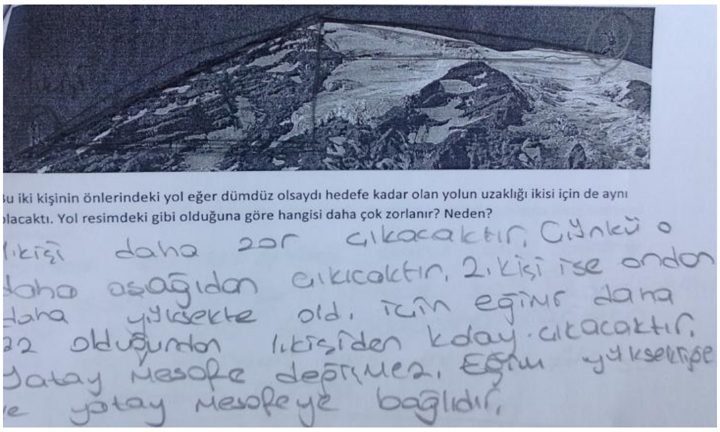


Ardından yatay mesafelerin aynı olduğu fakat yüksekliklerin farklı olduğu günlük yaşam bağlamında Ö3' ün yükseklik veyatay mesafeye bağlı olarak yorum yapamadığı dikkat çekerken, grup arkadaşının yüksekliğin farklı oluşunu açıklamaya çalışırken yatay mesafenin de aynı oluşuna vurgu yapması dikkat çekmiştir. Ancak Ö3' ün yüksekliğe vurgu yapmasa da "daha alttan başlamıştır" şeklinde informal deneyimlerine dayanan açıklamasından aslında yüksekliği düşündüğü sonucu çıkarılabilir. Eğimin bağlı olduğu uzunluk değişkenlerinin(açı hariç) yatay mesafe ve yükseklik olduğu genellemesinin gruplar arası tartışmalarla elde edilmesinin ardından grup ve bireysel çalışma kağıtlarına not edildiği görülmüştür.

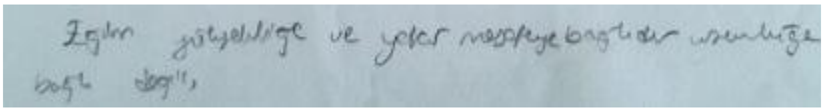
Ö3' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Ö3' ün grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Ö3' ün grup çalışma kağıdından bir görüntü

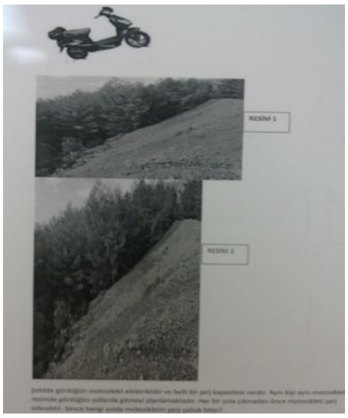


Ö3' ün eğimin, uzunluk olarak, bağlı olduğu değişkenleri anlamlandırıp anlamlandıramadığı, bu değişkenlere göre eğimi zihninde dinamik olarak hareket ettirerek yorumlayıp yorumlayamadığı gibi bilişsel sürecine yönelik derinlemesine bilgi, kendisiyle gerçekleştirilen 1. klinik görüşmede elde edilmeye çalışılmıştır.

Ö3 ile Gerçekleştirilen 1. Klinik Görüşme

İlk iki derslik öğretim sürecini takip eden günlerde Ö3 ile gerçekleştirilen ilk klinik görüşmede ise kendisine verilen doğrusal görselin eğimini ilk olarak dersteki süreçle benzer şekilde, yol uzunluğu ve yüksekliğe bağlı olarak yorumlamıştır. Ancak şunu da belirtmek gerekir ki yolun uzunluğuna bağlı olarak hem derste hem de görüşmede bu öğrenci doğru yorumlamada bulunmuştur. Ö3, savunmasını yaparken bir dik üçgensel model oluşturmuş ve daha sonra ilkinden farklı başka bir dik üçgensel model ortaya koyarken, yol uzunluğu değiştikçe yatay mesafe veya yüksekliğin değişeceğini anlamlandırdığını göstermiştir.

> ***G:*** *Şimdi öncelikle görmüş olduğun resimlere bakalım. Burada gördüğün motosiklet elektrikli ve belli bir şarj kapasitesine sahip. Bu motosiklet gördüğün yollarda gitmeyi planlıyor ve her bir yola çıkmadan önce de şarj edilecektir. Sence hangi yolda motosikletin şarjı daha çabuk biter?*



Ö3: *2. yolda.*

G: *2. yolda daha çabuk biter. Peki neden böyle düşünüyorsun?*

Ö3: *Çünkü daha dik yol.*

G: *Daha dik.*

Ö3: *Daha çok zorlanır.*

G: *Peki daha çok zorlanmasının nedeni ne?*

Ö3: *Yolun dik olması.*

G: *Yolun dik olmasından anladığın şey ne? Yolun dik olması derken neyi kastediyorsun? Çizerek de gösterebilirsin.*

Ö3: *…(düşünüyor)*

G: *Diklikten kastın ne? Diklik ne demek?*

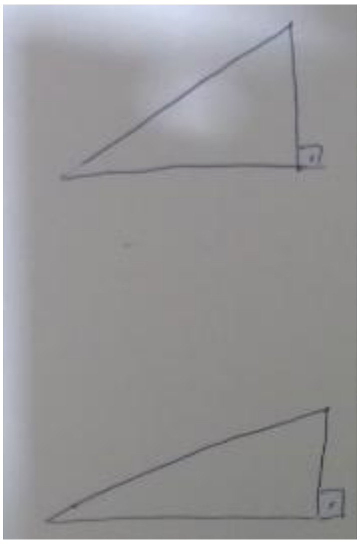
Ö3: *Yani yol uzun değil, yukarı doğru kısa,yüksekliği var.*

G: *Çizerek gösterebilir misin bana? Örneklerle de anlatabilirsin bunu.*

Ö3: *(iki dik üçgen çizdi) burada yüksekliği fazla ama burada daha az hem de yol daha fazla mesafe.*

G: *Yolun uzunluğu da daha fazla diyorsun. Peki yolun daha dik olmasını sağlayan uzunluk yükseklik mi?*

Ö3: *Hem mesafe hem yükseklik.*



G: *Mesafe derken nereyi kastettin?*

Ö3: *Şu yukarıdaki.*

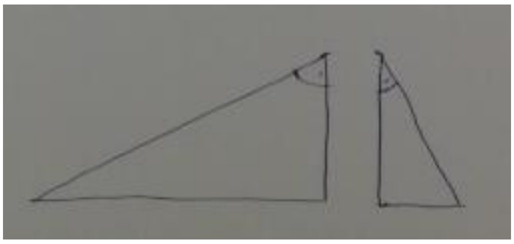
G: *Tekrar gösterebilir misin kalemle?*

Ö3: *Şurası(yolun uzunluğundan bahsediyor, yatay mesafeden değil).*

Bu öğrenciden yükseklikleri aynı fakat eğimleri farklı iki yol çizmesi istendiğinde ise dik üçgensel modeldeki hipotenüs ve yükseklik arasındaki açı ile ilişkilendirme yaparak savunmasını yapmıştır.

G: *Tamam. Bana yükseklikleri aynı olup da eğimleri de aynı olan yol gösterebilir misin? Veya eğimleri farklı olan bir yol çiz önce bana hadi. Yükseklikleri aynı eğimleri farklı olan iki yol çiz.*

Ö3: *Burada yükseklikler aynı ama açısı daralıyor.*



G: *Peki bu yollardan hangisi daha diktir?*

Ö3: *Şu daha diktir, ikinci olan.*

G: *İkincisi daha diktir.*

Ö3: *Açısı dar olan.*

G: *Hangi açısından bahsediyorsun açısı daralmış derken?*

Ö3: *Şu tepedeki.*

Yüksekliklerin yanında yol uzunluklarının da aynı fakat eğimlerin farklı olduğu iki yol çizmesi istendiğinde ise "böyle bir şeyin olamayacağını ve eğimin aynı olmak zorunda olduğunu" belirtmesi onun dik üçgensel modeli zihninde dinamik bir şekilde hareket ettirebildiğini ve buna bağlı olarak eğimi istediği değişkene göre yorumlayabildiğini düşündürmüştür.

G: *Peki şöyle diyorum ben: yolun uzunluğu aynı olsun, yükseklikleri de aynı olsun ama eğimi farklı olsun. Böyle iki yol çizebilir miyiz?*

Ö3: *Çizemeyiz ki sonuçta ikisi de aynı olmak zorunda.*

Yol uzunlukları aynı fakat eğimleri aynı iki yol çizmesi istendiğinde ise yatay mesafeleri aynı tutarak yükseklikleri farklılaştırdığı dikkat çeken Ö3' ün yatay mesafe ve yüksekliklere göre eğimi değiştirdiği ve yol uzunluklarını aynı tutmadığını fark ettiği görülmüştür.

G: *Peki yolun uzunluğu her iki yolda da aynı olsun fakat birisi daha eğimli olsun.*

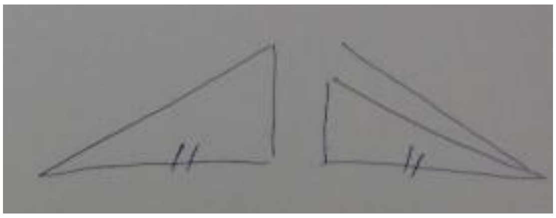
Ö3: *Daha dik. Ha daha aşağıda olsun.*

G: *Daha dik olsun ama yolların uzunlukları aynı olsun.*

Ö3: *(iki dik üçgen çizdi)*

G: *Neleri aynı? Oralara "den den" koyabilir misin? Matematikte gösterdiğimiz şekilde.*

Ö3: *Şuraları aynı. Aşağıdaki mesafeler aynı.*



G: *Neleri farklı?*

Ö3: *Yükseklikleri farklı.*

Daha sonra eğimin bağlı olduğu değişkenleri "yükseklik, açı veyatay mesafe" olarak sıraladığı dikkat çekmiştir.

G: *Peki senin şu ana kadar vermiş olduğun örneklere de bakarak, eğim nelere bağlı olarak değişmektedir?*

Ö3: *Yüksekliğine, şu alt mesafesine ve açısına da.*

Ö3' ün dik üçgensel modellerde eğimin farklılaşmasını yükseklik veyatay mesafeleri değiştirerek sağladığı görülmesine rağmen eğimin azlığına veya çokluğuna karar verirken yol uzunluğuna bakarak karar verdiğini belirtmesi dikkat çekmiştir.

G: *Açısına da bağlı olarak değişmektedir diyorsun. Uzunluk olarak baktığımızda, yani herhangi bir açısal özelliğine bakmaksızın, bize verilen bir yolun eğimine karar verirken nelere bakarak karar veriyoruz?*

Ö3: *Yüksekliğe.*

G: *Ve…*

Ö3: *Motorun gittiği yola.*

G: *Şimdi bazen motorun gittiği yola diyorsun bazen de alt mesafeye diyorsun. Ben de diyorum ki o zaman motorun aynı yolu gittiği durumlar uzunluk olarak, mesela biz buradan Edirne' ye 20 km gidiyoruz Hasköy' den giden birisi de 20 km gidiyor, iki yolun eğimi farklı olabilir mi?*

Ö3: *Evet olabilir.*

G: *Daha önceden de bunu belirttin. Peki farklı olmasının nedeni ne olabilir?*

Ö3: *Yükseklikleri farklıdır.*

G: *Yükseklikler aynı olduğunda yine farklı bir durum ortaya çıkabilir diyorsun. O farklı durum nedir peki?*

Ö3: *Şu alt mesafesi.*

Vermiş olduğu örneklerde yükseklik veyatay mesafe değişirken aynı zamanda yol uzunluğunun da değişmesi onun, yol uzunluğunun eğimi doğrudan etkilemediğini tam olarak anlamlandıramadığını göstermektedir. Diğer yandan eğer bu öğrenci yol uzunluğu aynı kalırken yüksekliğin veyatay mesafenin değişeceği bir örnek model verebilseydi, aslında yol uzunluğunun değil yükseklik veyatay mesafenin değişiminin eğimi etkilediğini anlamlandırabilmiş olacağı düşünülebilirdi ki öğretim sürecinde benzer örnekler ortaya çıkmıştı. Ö3' ün eğimi yorumlarken zihnindeki dik üçgensel modeli aşağıdaki iki durumda oynatabildiği düşünülmüştür;

-Yatay mesafe aynı kalırken yükseklikler farklı,

-Yükseklikler aynı kalırken yatay mesafeler farklı olabilir.

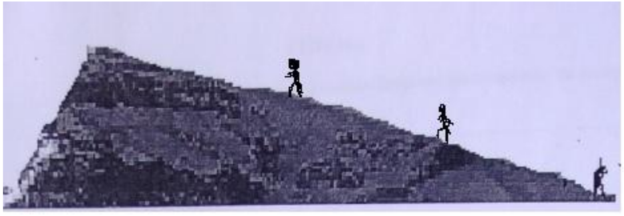
Bu öğrencinin yükseklik veyatay mesafenin ikisi de değişirken yol uzunluğunun aynı kaldığını görebileceği bir dik üçgensel modeli zihninde hareket ettirebilmesi ile eğimin yol uzunluğuna bağlı olmadığını fark ederek anlamlandırabileceği düşünülmektedir.

Öğretimin ilk iki derslik sürecinin sonunda eğimin bağımlı olduğu değişkenlerden yükseklik veyatay mesafeyi ve hatta açıyı anlamlandırdığı görülen Ö3' ün, yol uzunluğundan bağımsızlık konusunda ise tam olarak anlamlandırmayı sağlayamadığı düşünülmüştür. Diklik, yokuş, eğim gibi kelimelerin hepsini kullanarak anlayabildiği görülen bu öğrencinin önceki deneyimlerini sürece çağırabildiği sonucuna varılmıştır.

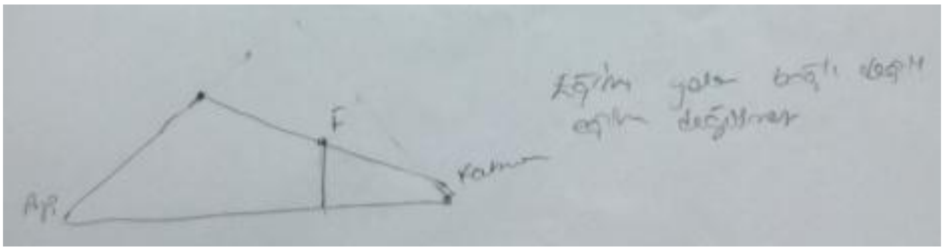
Öğretimin İkinci İki Derslik Süreci

Öğretimin ikinci aşaması olarak görülen üçüncü ve dördüncü dersinde, öğrenciler, yükseklikle yatay mesafe arasındaki oranın sabitliği ile eğimin değişmezliğini fark etmelerine fırsat verecek bağlam durumu ile karşılaştırılmıştır. Aşağıda da verilen bu bağlam durumunun görselinde, Ö3' ün bireysel çalışma kağıdında eğimin değişmeyeceğini düşündüğü ve neden olarak da eğimin yol uzunluğuna bağlı olmadığını ifade ettiği görülmüştür.

Oransal ilişkiyi fark etmeleri için fırsat veren bağlamın görseli

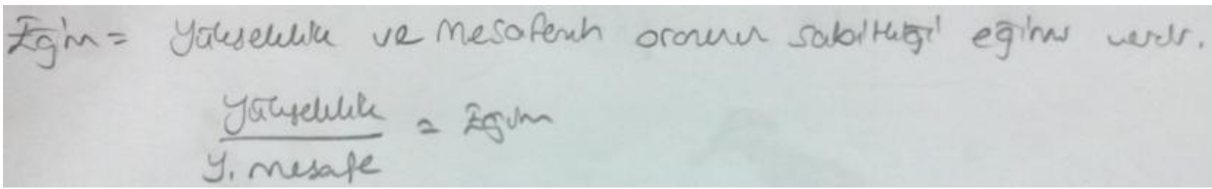


Ö3' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

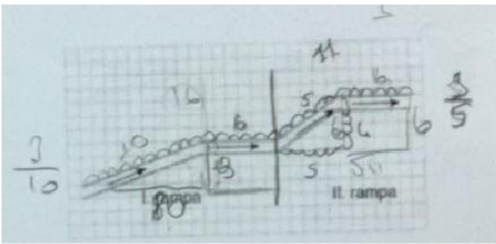


Gruplar arası sınıf tartışmalarında Ö2' nin grubunun eğimin değişmemesini "yüksekliğin yatay mesafeyle aynı oranda azalmasıyla" savunması üzerine öğrencilerin dikkati oransal ilişkiye çekilmiştir ve eğimin değişmemesinin nedeni bir kez daha sınıfa sorularak yeni bir düşünme ve tartışma sürecine girilmiştir. Bazı öğrencilerin yüksekliğin yatay mesafeye oranının sabit kaldığı için eğimin de sabit kaldığını fark ettiği görülürken fırsat eşitliğinin sağlanması açısından bu öğrencilere söz hakkı verilmeyerek diğerlerinin de bu keşfe ulaşmaları için süre verilmiştir. Grup içi düşünme ve tartışma süreci sonunda Ö4' ün "yüksekliğin yatay mesafeye oranı eğimi verir" genellemesini dile getirdiği, Ö3' ün ise bu varılan bu genellemeyi grup çalışma kağıdına not ettiği görülmüştür. Ö3' ün veya grup arkadaşlarının bireysel çalışma kağıtlarında veya grup kağıtlarında bu keşfi anlamlandırdığına dair herhangi bir açıklama ya da model olmaması dikkat çekmiştir.

Ö3' ün grup çalışma kağıdından bir görüntü



Ardından verilen eğimin fiziksel ve geometrik yorumunu gerektiren sorularda, Ö3' ün eğimi hesaplayabildiği görülmüştür. Örneğin;



Ö3' ün eğim hesaplama gerektiren sorularda başarılı olduğu görülmesine rağmen eğimi yüksekliğin yatay mesafeye oranı olarak yapılandırıp yapılandıramadığı, "yükseklik/yatay mesafe" yi bir formül ya da algoritma olarak mı düşündüğünün anlaşılması kendisiyle gerçekleştirilen 2. görüşmenin ana amacı olmuştur.

Ö3 ile Gerçekleştirilen 2. Klinik Görüşme

Bu görüşmede Ö3' ün bir doğrusal görselin eğimini hesaplayabildiği görülürken "eğim için yükseklik bölü yatay mesafe diyorduk" şeklinde düşünmesi onun bir algoritma ya da formül ezberlediğini düşündürmüştür.

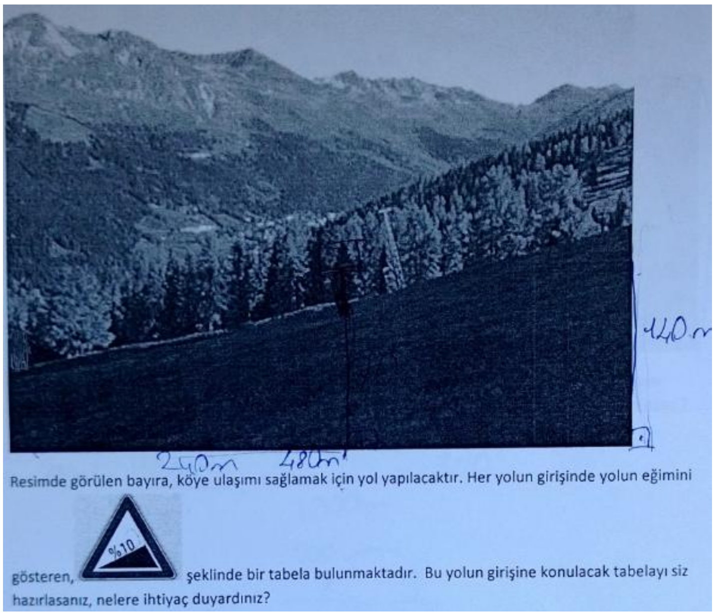
Ö3: *Yükseklik lazım.*

G: *Yükseklik lazım. Yükseklik 140' mış. Orayı da çiz kendin.*

Ö3: *...(yüksekliği çizerek uzunluğu yazdı) Bir de alt mesafesi lazım.*

G: *Alt mesafesi lazımsa onu da veriyorum: 480 m'ymiş orası da.*

Ö3: *...(yazdı onu da yatay mesafenin olduğu yeri belirleyerek)*



G: *Peki almak istediklerini aldıysan eğer, nasıl kullanacaksın şimdi bunları?*

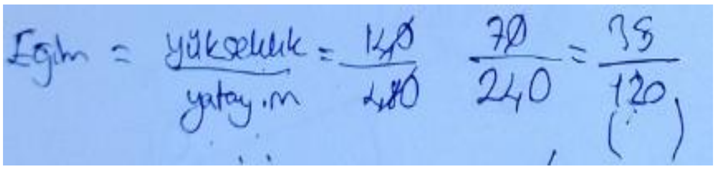
Ö3: *Eğimi bulmak için yükseklik bölü yatay mesafe diyorduk.*

G: *Evet. Onu da yaz istersen. Söylediğin şeylerin hepsini yazabilirsin. Sesli düşünmen benim için daha iyi. Düşüncelerini ifade etmen, her şey olabilir.*

Ö3: *…(sadece yükseklik/ yatay yazmadı aynı zamanda sayısal değerleri de yerine yazdı). Buradan sadeleştirince çıkacak.*

G: *Güzel. Sadeleştir bakalım o zaman.*

Ö3: *… (sadeleştiriyor) Daha sadeleşir mi?(kendi kendisine soruyor). (en sade halini bulamadı ama iki kere sadeleştirdi).*



Ö3' ün aynı doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmeyeceğini "yol, aynı yol" ya da "yokuş aynı" şeklinde savunurken yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın sabitliği ile açıklayamaması, bu değişmezliği sadece görsel olarak anlamlandırdığını düşündürmüştür.

G: *Pekala. Sen burada yolun nesini hesapladın?*

Ö3: *Eğimini.*

G: *Eğim neye eşit? Eğimi nasıl hesaplıyorsun bir diğer deyişle?*

Ö3: *Yükseklik bölü yatay mesafe.*

G: *Peki şunu düşünelim. Ben böyle bir tabela asacağım bu yola ama bazı sebeplerden dolayı tabelayı yolun burasına koyamıyorum mesela. Herhangi bir yere assaydık bu tabelayı, tabela o asılan yerden sonraki yolun eğimini gösterecek, tabela üzerinde yazan değer değişecek miydi?*

Ö3: *Yol yine aynı yol olduğu için değişmezdi.*

G: *Yol aynı olduğu için nesi değişmiyor diyorsun?*

Ö3: *Eğimi değişmez çünkü yokuş yine aynı.*

G: *Peki eğim değişmiyorsa, eğimin değişmemesini sağlayan şey ne?*

Ö3: *…(çok az düşündü)*

G: *Neden değişmiyor eğim?*

Ö3: *Eğimin değişmemesi yolun aynı olmasından ve yokuşun aynı olmasından…*

Ardından öğrencinin dikkatini bu orana çekmeye yönelik sorular sorulması, onun yükseklik ile yatay mesafe değişeceği için bölümün de değişeceğini dolayısıyla eğimin de değişeceği yanılgısını ortaya koymuştur. Bu yanılgı öğrencinin ders içerisinde varılan yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişkiyi tam olarak anlamlandıramadığını göstermiştir. Ö3' ün aynı doğrusal görsel üzerinde yükseklik ile yatay mesafe arasındaki sabit oranı fark ederek bu sabit oran ile eğimin sabitliği arasındaki eşlik ilişkisini keşfedemediği görülmüştür. Bu öğrencinin aynı doğrusal görsel üzerindeki herhangi bir noktada eğimin değişmediğini görsel olarak anlamlandırdığı, eğimi hesaplaması için ise "yükseklik/yatay mesafe" yi bir formül olarak ezberlediği düşünülebilir.

> ***G:*** *Peki senin bu yolda yürüdüğünü düşünürsen, senin önünde yürüyeceğin mesafe değişiyor mu değişmiyor mu? Sen buradan yürümeye başlasan ya da burada yürümeye başlasan…*
>
> ***Ö3:*** *Mesafesi değişiyor. Tabela buradaydı buraya koyduk. O zaman değişiyor yürüyeceğimiz mesafe(alt mesafeden değil yürüdüğü yoldan bahsediyor).*
>
> ***G:*** *Peki yolun eğimi değişmiyorken değişmeyen ya da değişen başka bir şey var mı? Neler değişiyor ya da değişmiyor? Mesela eğimi buradan hesaplarken ya da buradan hesaplarken bir şeyler değişiyor mu? Neler değişiyor?*
>
> ***Ö3:*** *Yatay mesafe değişir.*
>
> ***G:*** *Başka bir şey değişir mi?*
>
> ***Ö3:*** *Yüksekliği de değişir. Mesela buradayken daha fazla buradayken daha az olur.*
>
> ***G:*** *Yükseklik de değişir, yatay mesafesi de değişir. Ama eğimin değişmediğini söylüyorsun.*
>
> ***Ö3:*** *Çünkü yokuş aynı olduğu için değişmez.*
>
> ***G:*** *Ama yükseklik veyatay mesafe değişir diyorsun.*
>
> ***Ö3:*** *Haa evet eğim de değişiyor.*
>
> ***G:*** *Eğim nasıl değişiyor?*
>
> ***Ö3:*** *Yüksekliği yatay mesafeye böldüğümüz için eğim de değişiyor.*

Daha sonrasında kendisinden eğimin değişip değişmediğini örnek modeller çizerek göstermesi istendiğinde ise çizdiği dik üçgensel modelin üzerinde yükseklik veyatay mesafeyi yarıya indirmiş, sonrasında eğimi hesaplayarak değişmediğini fark etmiştir. Bununla birlikte ders sırasındaki varılan keşfi hatırlayarak "yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran sabit kalıyor" demesi ders içerisinde anlamlandıramadığı bu ilişkiyi belki de görüşme sırasında anlamlandırdığını düşündürmektedir ki Ö3 bu andan sonra, kendisine sorulduğunda, öğretim süreci boyunca eğimin aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde değişmeyeceğini dile getirmiştir.

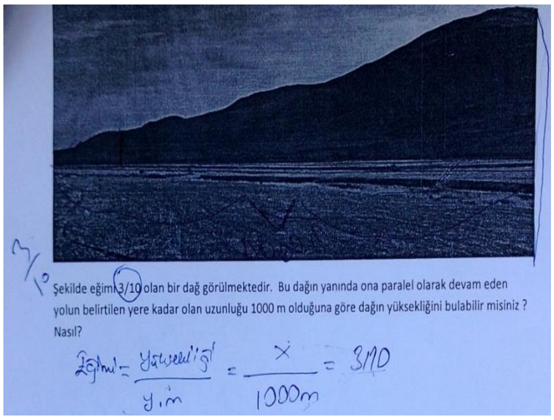
> ***G:*** *Yükseklik ile yatay mesafe arasındaki bir ilişki sana eğimi veriyor doğru mu?*
>
> ***Ö3: …***
>
> ***G:*** *Nasıl bir ilişki bu ilişki?*
>
> ***Ö3:*** *Yüksekliğin yatay mesafeye bölümü işte eğimi veriyor.*
>
> ***G:*** *Şimdi şöyle toparlamaya çalışalım. Bu tabelayı buraya değil de biraz daha ileriye koyduğumuzda tabelanın üzerine yazılan eğim değişir mi değişmez mi? Değişirse veya değişmezse bunu neler sağlıyor?*

> ***Ö3:*** *Eğim değişir herhalde çünkü yükseklik ile yatay mesafenin bölümü farklı olacak bu sefer.*
>
> ***G:*** *Farklı mı olacak? Bu yolun herhangi bir yerindeki eğimi hesaplamak için sana lazım uzunlukları çizerek gösterebilir misin bana?*
>
> ***Ö3: …***
>
> ***G:*** *Daha sonra da sayısal değerler vererek eğimi hesaplayabilir misin? Az önce yapmaya çalışıyordun ya ondan bahsediyorum aslında. Mesela buraya 35 demişsin ya neresi 35? gibi…*
>
> ***Ö3:*** *Alt mesafesi 240. Tabelanın koyulacağı yere kadar da üst kısım 35. Yüksekliği vermemiş. Orası da 70. 70' i 240' a böleceğiz.*
>
> ***G:*** *Hı hı.*
>
> ***Ö3:*** *Bunu da sadeleştirirsek 35…120…(35/120) Bunu da ondalığa çevireceğiz.*
>
> ***G:*** *Eğim değişti mi?*
>
> ***Ö3:*** *Değişmedi.*
>
> ***G:*** *Peki bu ikisi arasındaki bu ilişki sana eğimi veriyor. Sen mesela yoldan yukarıya doğru çıktıkça eğim değişmez mi diyorsun? Değişmedi mi yani eğim?*
>
> ***Ö3:*** *Buradaki sonuçlara bakılınca değişmedi eğim.*
>
> ***G:*** *Peki yükseklikle yatay mesafe arasındaki bu ilişkiyi biz matematiksel bir kavramla anlatabiliyoruz. Biliyor musun acaba bu kavramı? Biliyorsundur mutlaka ama bunu nasıl söyleyebiliriz. Bu ikisi arasında bir şey sabit kalıyor değil mi sürekli? Ne sabit kalıyor?*
>
> ***Ö3:*** *Eğim.*
>
> ***G:*** *Eğim. Bir şey daha sabit kalıyor ama…*
>
> ***Ö3:*** *Hııı(hatırladım, anladım anlamında bir tepki). Yüksekliğin yatay mesafe oranı sabit kalıyor hep.*
>
> ***G:*** *O değişmiyor diyorsun yani.*
>
> ***Ö3:*** *Evet.*

Ayrıca bu görüşmede, Ö3' e doğrusal görsellenmiş bir dağ eteğinin eğim değeri veyatay mesafesi verilmiş yüksekliği bulması istenmiştir. Öğrencinin hemen orantı oluşturduğu ve araştırmacının, onun anlayamadığı bir noktayı düzeltmesi ile doğru cevaba ulaştığı görülmüştür. Ö3' ün aynı doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişmeyeceğini, araç olarak kullandığı dik üçgenin belirli bir oranda küçültülmesi ve kesrin sadeleştirilmesi ile açıklaması onun görüşme başında göremediği yükseklik veyatay mesafe arasındaki sabit oran ile eğim arasındaki ilişkiyi anlamlandırma sürecine görüşme sırasında başladığı düşüncesini desteklemektedir.

> ***G:*** *Şekilde eğimi 3/10 olan bir dağ görünmektedir. Bu dağın yanında ona paralel olarak devam eden yolun belirtilen yere kadar olan uzunluğu 1000 m olduğuna göre dağın yüksekliğini bulabilir misiniz? Nasıl? Bahsedilen paralel yol şurası. Burası 1000 miş.*
>
> ***Ö3:*** *Yüksekliği bulmamız lazım. Eğimi vermiş çünkü.*
>
> ***G:*** *Yüksekliği bulabilir misin?*

Ö3: *Eğimi bulurken yüksekliği yatay mesafeye bölüyorduk(bu sırada bunları yazıyor). Şimdi yükseklik yok(x yazdı onun yerine), yatay mesafe 1000' miş(yerine yazdı 1000' i). Eğim de 3/10' muş(onu da yazarak orantıyı kurmuş oldu).*



G: *Hı hı.*

Ö3: *Ondan sonrası nasıl yapılacak unuttum.*

G: *Hadi bakalım düşün.*

Ö3: *Bunu basit kesre çevirerek mi bunu yapacağız?*

G: *Düşünebilirsin istediğin gibi.*

Ö3: *Ya da neyi 1000' e bölersek bu(3/10) çıkar?*

G: *Peki ordan devam etsen bulabilir misin yüksekliğini?*

Ö3: *...*

G: *Dene yani yap.*

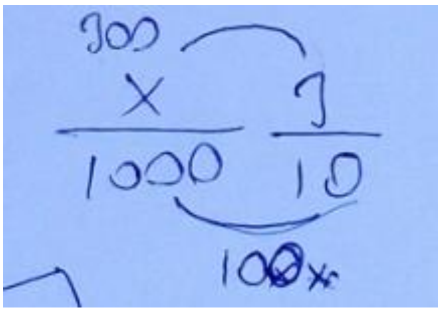
Ö3: *Nasıl yapılacağını bilmiyorum ki.*

G: *Peki(duraksadı). Ben süre vereyim gene sana düşün hadi.*

Ö3: *Bilmiyorum yani nasıl bulacağım bundan sonrasını.*

G: *Şunu(3/10) bilgisayarda yazdığım için ben bu formatta yazdım. Peki sana bunu böyle($\frac{3}{10}$)yazsam, bir anlam ifade eder mi senin için?*

Ö3: *Bunun 10 katı(yanlış söyledi 100 katı demeliydi. Paydalar arasındaki ilişkiye bakıyor). (mırıldandı) bu 100 katı. O zaman burası da 300 eder.*



G: *Peki nasıl yorumluyorsun bunu? Yani burada eğimi bulan adam ne yapmış da eğimi bulmuş?*

Ö3: *...*

G: *Hani sonucu 3/10 bulmuş. Ne yapmış da 3/10 bulmuş.*

Ö3: *Yüksekliği yatay mesafeye bölmüş. Yine benim yaptığım gibi yapmış işte.*

G: *Ha senin yaptığın gibi yapmış. Senin yaptığın nedir? Sen ne yaptın?*

Ö3: *Bunu dediniz böyle de olabilir, ben bilgisayarda böyle yazdım diye(3/10' dan bahsediyor). Bunun 100 katı olduğunu düşünerek bununda 100 katını böyle(300) buldum.*

G: *Pekala öyle buldum diyorsun… Son sorumu sorayım ben sana. Elimizde bu kadar büyük metreler uzunluk ölçmek için yok. Daha kısa var mesela birkaç metrelik bir uzunlukölçer var. Bu kadar büyük uzunlukları ölçmek zor. Eğim için daha pratik bir şey bulabilir misin?*

Ö3: …

G: *Yani 5m, 3m, 1m gibi uzunlukölçerler var. Bu dağın eğimini ya da az önceki sorudaki yolun eğimini fark etmez, hesaplayabilir misin?*

Ö3: *Yine böyle bulacağız ki ama.*

G: *Nasıl yapacaksın peki? Tek tek böyle bütün yatay yolu mu hesaplayacaksın 1000m' ye kadar?*

Ö3: *Burayı tabi hesaplamak lazım. Nasıl bulacağız ki başka türlü? Ya da küçük olur sadeleştirilmiş halini buluruz.*

G: *Mesela küçük olduğunda sadeleştirilmiş halini buluruz diyorsun. Küçük olduğunda değişmez mi eğim***?**

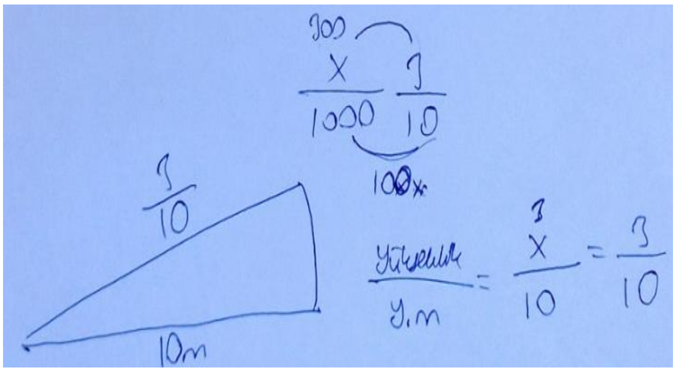
Ö3: *Sabit demiştik burada.*

G: *O zaman kendine daha küçük bir yer seçebilir misin? Nasıl olsa değişmez diyorsun eğim!*

Ö3: *Burası yine bölülü mü olacak?*

G: *Yani o eğim.*

Ö3: *Öyle olsun…(Bir küçük üçgeni kağıdın altına tekrardan çizdi veyatay uzunluğu 10 m aldı ve yüksekliğin bilinmeyen olduğu orantıyı kurdu). Bu da 3 olur(orantıdan direk olarak buldu).*



G: *Üçgeni küçülttün ve 3/10 eğimden yine işlem yaptın. Bu üçgeni o dağ üzerinde gösterebilir misin peki?*

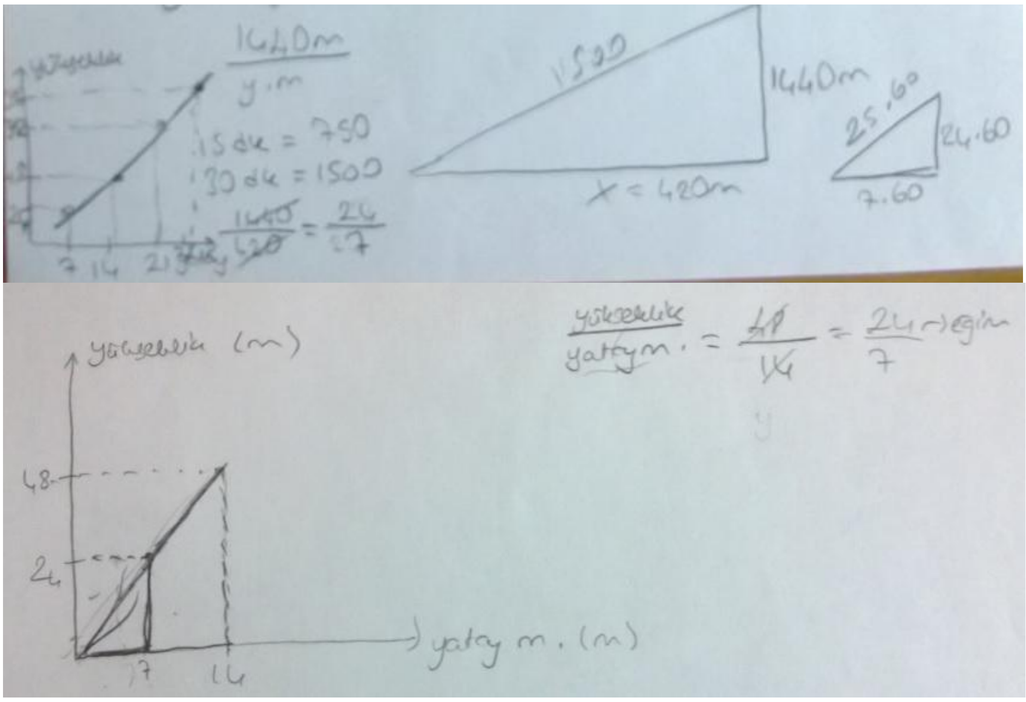
Ö3: *Nasıl?*

G: *Yani bu üçgeni nereden aldın sen?*

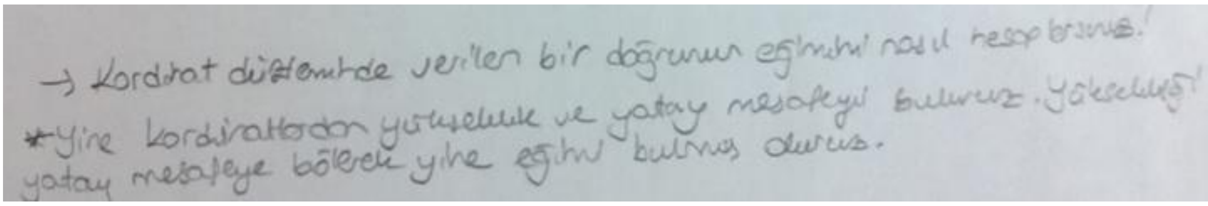
Ö3: *Belki en küçük yerindedir şurası (resim üzerinde eğimli yolun başlangıcında bir yükseklik indirerek gösterdi).*

Öğretimin Son İki Derslik Süreci

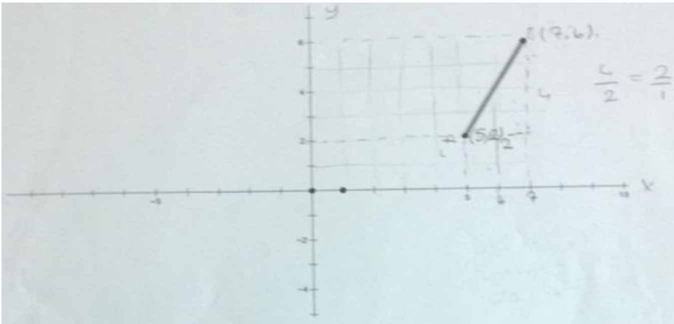
Son iki derslik öğretim sürecinin başlangıcında kendilerine verilen yayla bağlamında eğimi bulma gereği hisseden Ö3' ün, yükseklik veyatay mesafeyi bularak zorlanmadan eğimi hesaplayabildiği görülmüştür. Ardından yükseklik ile yatay mesafe arasındaki doğrusal ilişkiyi gösteren grafiği çizerek, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın daima sabit kaldığını fark etmesi beklenmiştir. Ö3, grafiği çizmekte zorlanmamış ve bunun yanında grafikteki doğru üzerinde aldığı herhangi bir noktada yüksekliği yatay mesafeye oranladığında aynı sonucu elde ettiğini görmüştür.



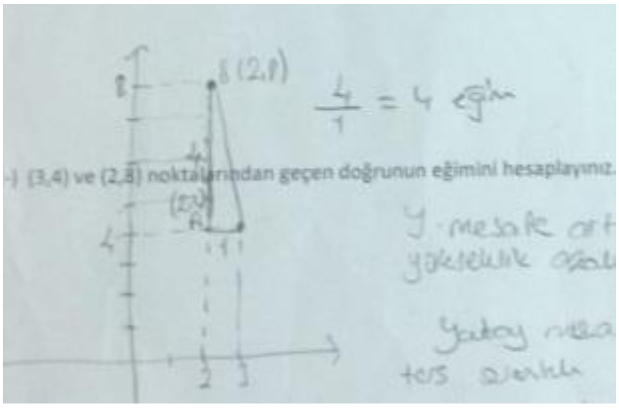
Daha sonra koordinat düzlemindeki bir doğrunun eğimini nasıl hesaplayacakları sorusu ile yeni düşünme ve tartışma süreci başlamış ve bunun sonucunda Ö3' ün koordinat düzlemindeki bir doğru için zihnindeki eğim bilgisini yansıttığı görülmüştür.



Ardından dikey matematikleştirme yapmasına fırsat sağlayan ve adım adım matematikleştirme süreci gerektiren soruların ilkinde koordinat düzleminde verilen bir doğrunun eğimini bulurken, koordinatlara uygun karesel bölgeler oluşturduğu ve oluşan dik üçgensel modelden yükseklik veyatay mesafeyi karelerden yardım alarak elde ettiği görülmüştür.

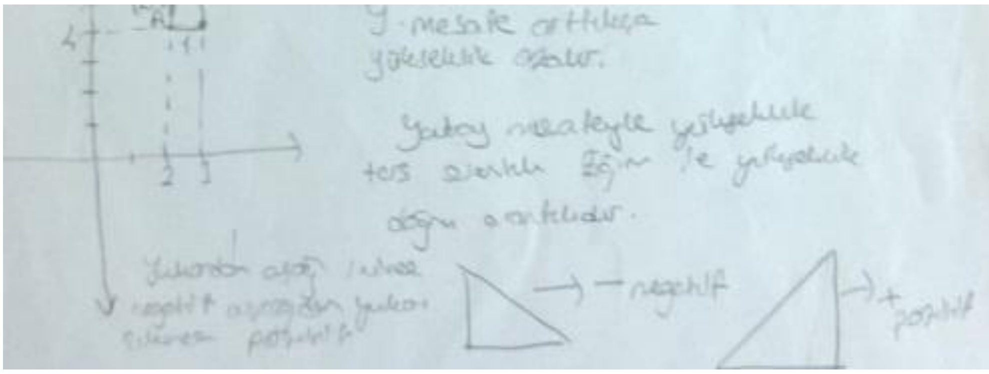


Ardından kendisinden koordinatları verilen iki noktadan geçen bir doğrunun eğimini bulması istendiğinde yine doğruyu görselleştirip dik üçgensel modeli araç olarak kullanmış, koordinatlar arası farkların yükseklik veyatay mesafeyi verdiğini fark edememiştir.

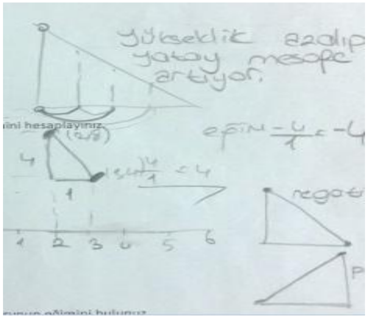


Bu sırada bazı öğrencilerin eğim sonucunu negatif elde ettiğini dile getirmesi ile öğrenciler yeni bir tartışma sürecine girmiştir. Gruplar arası sınıf tartışmalarda negatif eğimin belirlenmesi ile ilgili yapılan tüm yorumları bireysel çalışma kağıdına not ettiği görülen Ö3' ün grup içinde pasif kaldığı ve daha çok grup arkadaşının fark ettiği yükseklik ile yatay mesafe arasındaki ters orantılı ilişkiye odaklanmaya çalıştığı görülmüştür.

Ö3' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

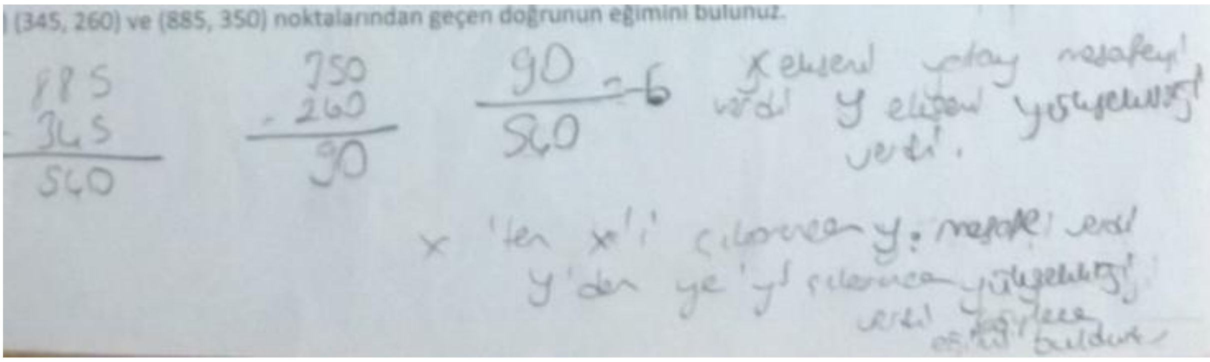


Ö3' ün grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

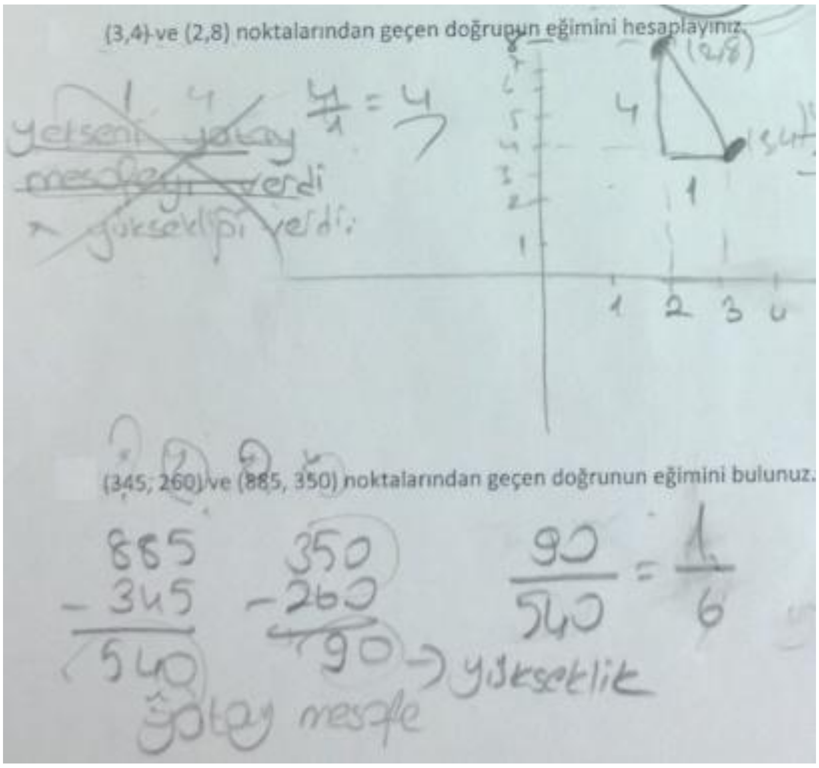


Ardından sayısal değerleri büyük koordinatlara sahip iki nokta verilmiş ve bu noktalardan geçen doğrunun eğimini hesaplamaları istenerek öğrencilerin koordinat düzleminde doğruyu görselleştirmeleri kısıtlanmış ve onlarda, bahsedilen noktaların koordinatları arası fark ile eğimin bağlı olduğu değişkenler arasında ilişki kurma ihtiyacı hissettirilmiştir. Ö3' ün daha önce negatif eğimi yorumladığı görülen grup arkadaşının, önceki soruda yükseklik veyatay mesafeyi koordinatlar arası farktan elde edebileceğini fark etmeye başladığı ama bu keşiften emin olamadığı görülmüştür. Aynı öğrencinin bu sefer eğimi, koordinat düzleminde görselleştirmeksizin hesapladığı ve ilişkiyi fark ederek Ö3' e ve diğer grup arkadaşlarına da anlatmaya çalıştığı görülmüştür.

Ö3' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

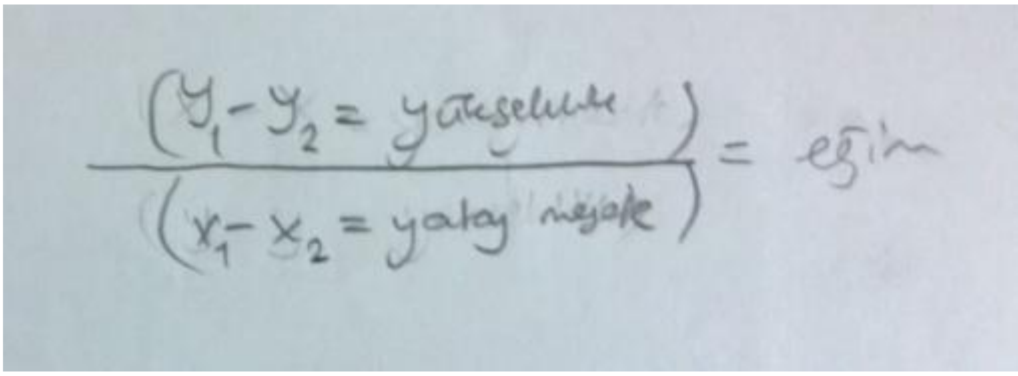


Ö3' ün grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

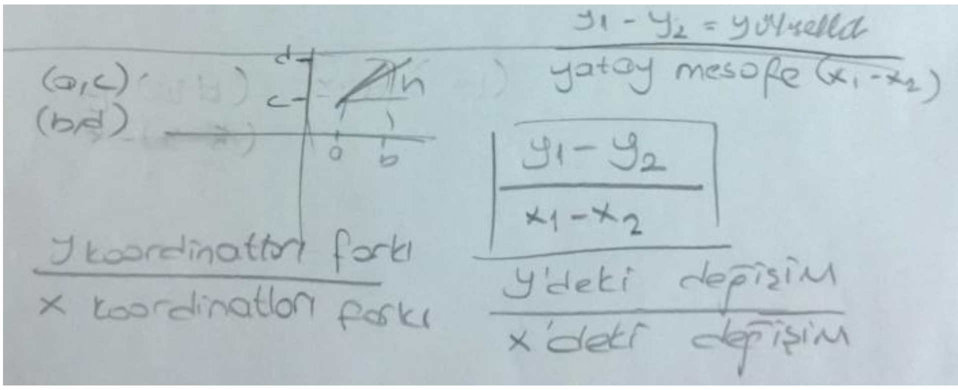


Daha sonra koordinat düzleminde bir doğrunun eğimi için cebirsel bir genellemeye ulaşmaları istendiğinde ise Ö3 ve arkadaşlarının bireysel değil grup olarak çalıştığı ve daha çok yükseklik veyatay mesafeyi koordinatlar arası fark ile bulunduğunu gören öğrencinin, süreci yönettiği dikkat çekmiştir. Ö3' ün bahsedilen grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdında (a,c) ve (b,d) noktaları için ulaşılan cebirsel genelleme dikkati çekerken, sınıfta başka bir grubun (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) noktaları için ulaştığı genelleme hem Ö3' ün hem de grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdında yer almakta olduğu görülmüştür.

Ö3' ün bireysel çalışma kağıdı

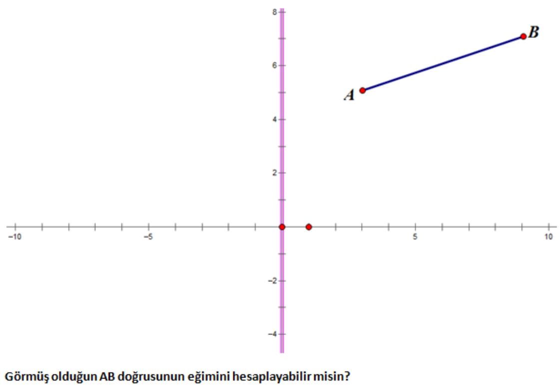


Ö3' ün grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdı



Ö3 ile Gerçekleştirilen 3. Klinik Görüşme

Ö3' ün kendisine koordinat düzleminde bir doğru verildiğinde bu doğrunun eğimini y_1-y_2/x_1-x_2 genellemesini kullanarak bulma yoluna gitmiştir. A ve B noktalarının koordinatlarını belirleyerek rahatça sonuca ulaşabilmiştir.



Ö3: *5' e 3 noktası bu(yerlerini ters söyledi ama eksenler üzerinde doğru yazdı).*

G: *Bir noktanın koordinatlarını yazdın.*

Ö3: *Burası da 9' a 7.*

G: *Hı hı.*

Ö3: *Böyle yapıyorduk.* Y_1-y_2/x_1-x_2=*m(bunu sözel olarak veyazarak gösterdi).*

G: *Buradan ne yapacaksın?*

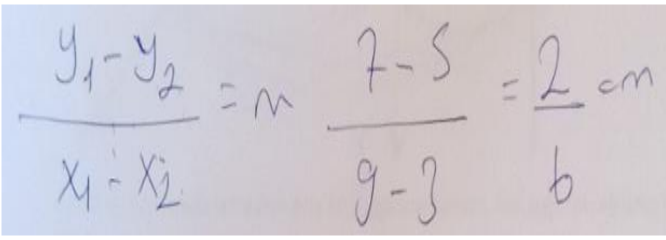
Ö3: *Y' den y' yi, X' ten x' i çıkaracağız.*

G: *Hı hı.*

Ö3: *7' den 5' i, 9' dan da 3' ü(bu farkları kesir olarak yazıyor). Eğim bu(2/6buldu).*

G: *Bu eğim diyorsun. Eğimi kaç buldun?*

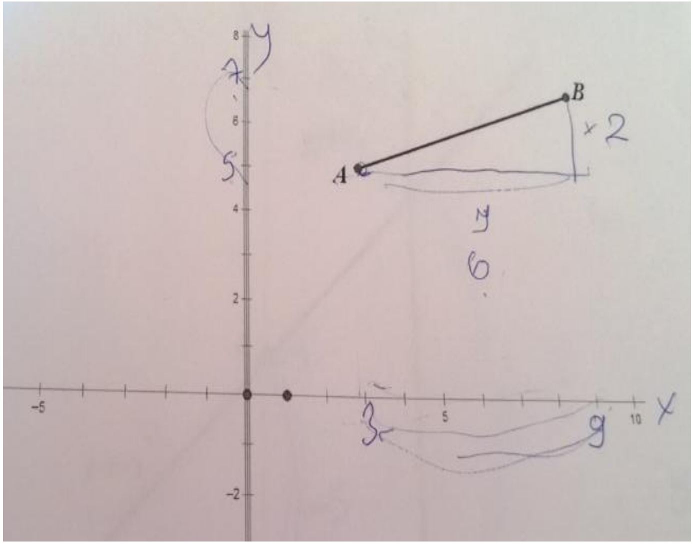
Ö3: *2/6.*



y_1-y_2/x_1-x_2 genellemesini oldukça rahat bir biçimde kullanabildiği gözlemlenen Ö3' ün bu genellemenin yükseklik/ yatay mesafe' nin uyarlanmasından elde edildiğinin de farkında olduğunu göstermiştir. Bu öğrencinin koordinat düzlemini kullanmadan da, yükseklik veyatay mesafeyi koordinatlar arası fark ile bulabileceği görülmüş, yüksekliği veyatay mesafeyi eksenler yardımıyla bularak eğimi hesaplarken "bu formül gibi" ,"aralıkları çıkaracağız işte" gibi ifadeler kullanması, gerekli ilişkilendirmeyi yapabildiğini düşündürmüştür. Ayrıca yapacağı işlemleri adım adım yapmaksızın onun hakkında düşünebildiğinin de görülmesi onun anlamlandırmadan da öteye giderek içselleştirmeye başladığını göstermektedir.

G: *Nasıl bulacaksın başka türlü?*

Ö3: *Burası(yatay mesafe) 6(x eksenindeki 9' dan 3' ü çıkardı); burası(yükseklik) 2(y eksenindeki 7' den 2' yi çıkardı). Birbirine böleceğiz işte.*



G: *Peki 6 ' yı nasıl buldun?*

Ö3: *9' dan 3' ü çıkardık 6; 7' den 5' i çıkardık 2.*

G: *Buradan bir formül geliştirsen sen! Ben sana farklı sayılar versem. Vereyim koordinatları ben sana, yaz: 3' e 5 ve 7' ye 9 noktalarından geçen doğrunun eğimi?*

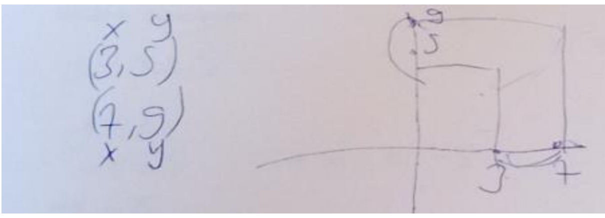
Ö3: *Aralıkları çıkaracağız işte. Bunları çıkaracağız birbirinden sonra böleceğiz. Bu formül gibi.*

G: *Nasıl elde ediyorsun bu formülü?*

Ö3: *Aralıklardan.*

G: *Bu verdiğim noktalardan geçen doğrunun eğimini hesaplar mısın bana?*

Ö3: *Bunu(formülü) bilmeseydik koordinat çizerdik. (koordinat düzlemi çizdi ve noktaları yerleştirdi) burası 9 derdik. Çıkarırdık birbirinden böler bulurduk.*



Kendisine sayısal değerleri büyük olan iki noktanın koordinatları verildiğinde ise koordinat düzleminde çizmenin zorluğundan dolayı y_1-y_2/x_1-x_2 genellemesini kullanacağını belirtmiştir. Koordinat düzleminde doğrunun geçeceği noktaları kabaca belirleyerek eğimi elde etme sürecini anlatan Ö3' ün kendisinden formülü açıklaması istendiğinde de formülü çok rahat açıklayabilmesi dikkat çekmiştir. Bu öğrencinin istediğinde yükseklik/ yatay mesafeyi kullanabildiği ya da y_1-y_2/x_1-x_2 genellemesinden yararlanabildiği ve bu ikisi arasındaki ilişkiyi içselleştirdiği düşünülmektedir. Ayrıca Ö3' ün, bir doğru üzerindeki noktaların ordinatının apsisine oranın sabit olduğunu çözüm sürecine çağırabilmesi, onun doğrunun eğiminin doğru üzerindeki herhangi bir noktadaki yükseklik ile yatay mesafe arasındaki sabit oran olarak yapılandırdığı düşüncesini kuvvetlendirmektedir. Ancak şunu da belirtmek gerekir ki bu yorum sadece orijinden geçen doğrular üzerinde alınan noktalar için geçerli olmaktadır(şekil 8). Ö3' ün doğru üzerindeki bir noktanın y koordinatının x koordinatına oranının sabit olacağını belirtmesi, öğretim esnasında oluşturduğu grafikte yüksekliğin yatay mesafeye oranının sabit olduğunu fark ettiğini ve buradan koordinat düzlemindeki bir doğrunun eğimine geçişini anlamlı bir şekilde yaptığını ve öğretim sürecinde varılan keşfi anlamlandırdığını göstermektedir. Ancak görüşmede verilen (685,350) ve (385, 850) noktaları için ileri sürdüğü aynı yorum, her doğru için y ekseni/x ekseninin sabit olmayacağını henüz fark etmediğini de ortaya koymaktadır.

G: *Yaz yeni noktaların koordinatlarını: 685' e 350 ve 385' e 850(öğrenci yazıyor bu arada koordinatları). Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimin hesaplayabilir misin?*

Ö3: *Hesaplarız.*

G: *Nasıl?*

Ö3: *Yine formülden yapacağız.*

G: *Peki formülü unuttuğunda koordinat düzleminde çizerek mi yapacaksın?*

Ö3: *Çizemeyiz ki çok büyük sayılar.*

G: *Bu formülü nasıl elde ettiğini sormak istiyorum ben sana yine?*

Ö3: *...*

G: *Diyelim ki bu formülü üstünden bir sene geçti ve unuttun ama sen sadece şunu hatırlıyorsun: yükseklik/yatay mesafe. Ne yapacaksın böyle bir doğrunun eğimi karşına çıktığında?*

Ö3: *Bunu buna bölerim bunu da buna bölerim(birinci noktanın x koordinatını y koordinatına, ikinci noktanın x koordinatını y koordinatına bölerim diyor). Sabit ilerliyordu bunlar, aynı orandaydı.*

G: *Neyi neye böldüğünde aynı orandaydı diyorsun?*

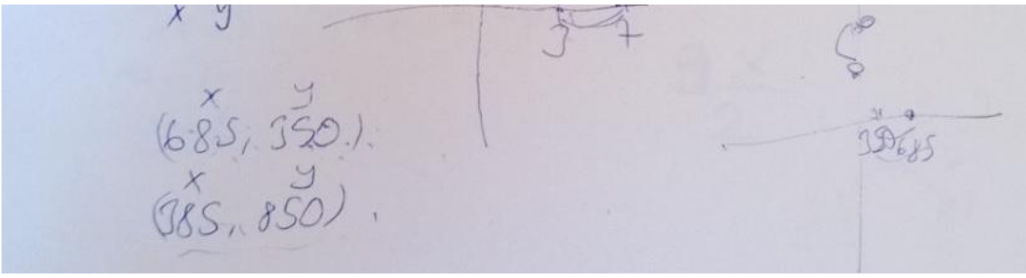
Ö3: *İşte bu yüksekliği yataya bölüyorduk. 685 bölü 350, 385 bölü 850.*

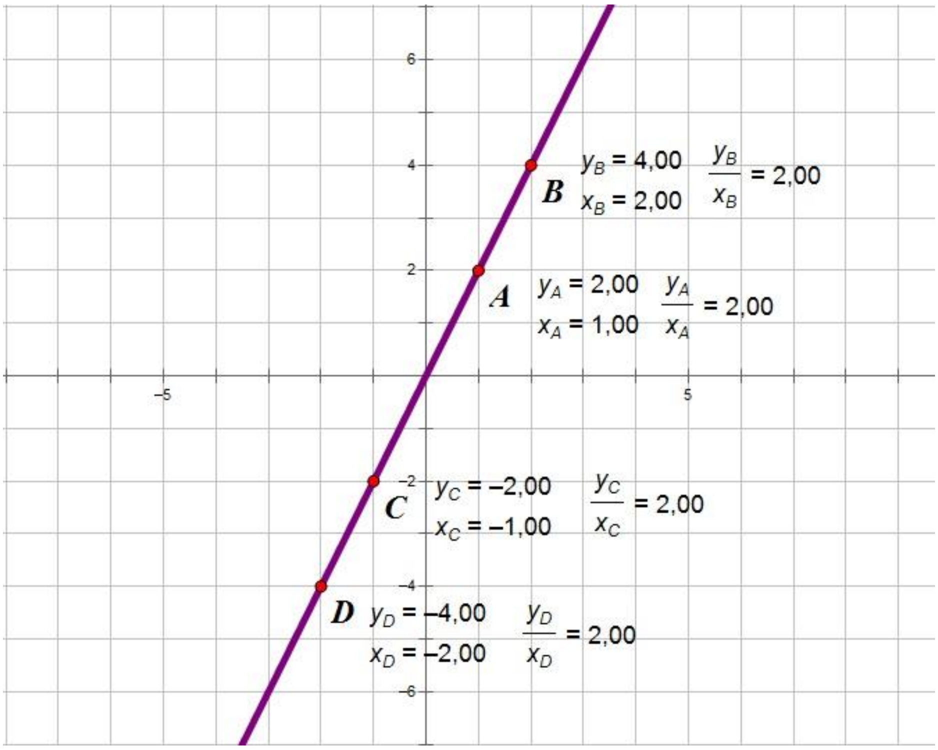
G: *Peki sen bunu(koordinat düzlemini) kullanmadan bulmadan bunu bundan bunu çıkarırız dedin ya. Onları çıkarmakla bunun(formülün) arasındaki ilişki ne?*

Ö3: *Şimdi burada koordinat düzleminde 685 burası, 350 de burası. Burasını da yazacağız işte(diğer noktanın koordinatları). Sonra buradaki aralıkları çıkaracağız.*

G: *Bu formülde ne yapıyorsun peki?*

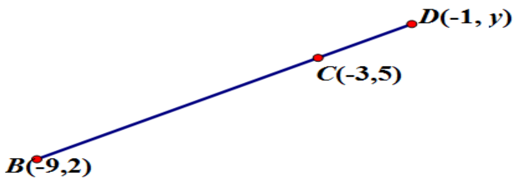
Ö3: *Burası y_1, burası y_2, burası x_1 , burası x_2. Birbirinden çıkarıyoruz sonra da bölüyoruz.*





Şekil 8: Orijinden geçen bir doğru için bir noktanın ordinatının apsisine oranının sabitliği

(685,350) ve (385, 850) noktalarından geçen doğrunun eğiminin negatif olacağını fark edemediği görülen Ö3' ün görüşme boyunca eğim sonucunu negatif olarak bulamaması, onun öğretim sürecinde negatif eğimi anlamlandıramadığını göstermiştir. Doğrudan eğimin sorulmadığı, aynı doğru üzerindeki üç noktadan birinin y koordinatını bulmayı gerektiren soruda ise ancak doğru üzerindeki üç noktanın ona sağlayacağı faydanın sorulmasıyla eğimin sabitliğini çözüm sürecine çağırabilen bu öğrencinin, doğrunun eğimin koordinatları belli olan noktalardan yararlanarak hesapladığı görülmüştür.



Bu doğru üzerinde 3 nokta verilmiştir. D noktasının y koordinatını bulabilir misin?

G: *Yani y koordinatını nasıl bulabilirsin burada?*

Ö3: *Burası x, burası y(koordinatların üzerinde x, y yazıyor). Y' leri mi çıkaracağız bir birinden bunu bulmak için?*

G: *Yani y' leri çıkarsan birbirinden sonra ne yapacaksın?*

Ö3: *...*

G: *Peki aynı doğru üzerinde olması bu üç noktanın sana ne gibi bir kolaylık sağlar? Ne gibi ortak özellikleri var bu üç noktanın?*

Ö3: *Eğimleri aynı çıkar.*

G: *Nereden biliyorsun eğimlerin aynı çıkacağını?*

Ö3: *Sabitti hep eğim…*

G: *Eğim hep sabitti. Kullan bakalım o zaman, Eğimi nasıl kullanacaksın?*

Ö3: *X' ten x' i çıkardık, y' den de y' yi çıkardık(koordinatları bilinen B ve C noktasının ordinatları arası farkı ve apsisleri arası farkı aldı ve böldü): 3/6.*

Daha sonrasında y koordinatı sorulan noktayla eğim arasında ilişki kuramayan Ö3, ancak araştırmacının uyarıcı sorularıyla bunu başarabilmiştir. İşlem hataları yaptığı da görülen öğrencinin dışsal uyaranlarla istenilen koordinatı hesaplayabildiği görülürken, doğru üzerinde alınan iki noktaya göre eğimin değişmeyeceğini bu çözüm sürecine yansıtabildiği ve dışsal uyaranlarla da olsa kullanmayı başarabildiği görülmüş ve bu sebeple içselleştirme sürecine girdiği düşünülmüştür.

G: *3/6 çıkacak diyorsun yani eğim. Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi 3/6 dır diyorsun. Peki onu nasıl kullanacaksın? Bu noktayı da işin içine kat bakalım. Yine 3/6 çıkacak diyorsun ya.*

Ö3: …

G: *İki noktadan geçen doğrunun eğimini biliyorsun değil mi sen? İki nokta dediğine göre iki nokta bilmen lazım. Doğru mu? Hangi iki noktayı alacaksın?*

Ö3: *Burada -1 miş, y' sini de bilmiyoruz. Bunların eğimi 3/6 çıkıyor, belki eşit…*

G: *Hangi doğrunun eğimi 3/6?*

Ö3: *Şu işte(BC arasındaki doğru parçasını sadece), bununla bunun(B ile C) eğimi 3/6 çıktı.*

G: *Başka?*

Ö3: *Bunu nasıl bulacağız onu bilmiyorum(y koordinatından bahsediyor).*

G: *Şimdi bu bir nokta. Bu noktadan ve başka bir noktadan geçen doğrunun eğimini bulabilirsin sen. Başka bir nokta biliyor musun bu noktanın dışında?*

Ö3: *Bu noktayı biliyorum, bunu biliyorum(B ve C' yi gösterdi).*

G: *Tamam. Peki bu üç noktadan herhangi iki tanesini alsan, eğim kaç olur bulabilir misin?*

Ö3: *Burada bulduk işte: ikisini aldık bulduk.*

G: *Peki başka ikisini alsan?*

Ö3: *Bununla bunu(C ve D noktalarını diyor).*

G: *Mesela…(onaylama anlamında). O ikisinden geçen doğrunun eğimini bulabilir misin?*

Ö3: *X' ten x' i çıkarıyorduk 2. y' den y' yi 5y.*

G: *Tamam cebirsel yaz. 5' den y' yi çıkarınca ne oluyor?*

Ö3: *5-y. (5-y/2 yazdı)*

G: *Neye eşit olacak bu?*

Ö3: *3/6. Çünkü aynı doğru.*

G: *Buradan bulabilir misin?*

Ö3: *(5-y/2=3/6 yazdı). 3 katı(paydalara baktı). (5-y' nin de 3 katının 3 olacağını gördü ve 5-y' nin 1 olması gerektiğini yazdı) 1.*

G: *Pek mantıklı gelmedi mi?*

Ö3: *Bulduk işte. 1.*

G: *Peki burası 1 olabilir mi? Yukarıda kalıyor mesela 5' ten ama daha küçük ondan.(koordinat düzleminde y eksenine göre konuşuyor). Niye öyle?*

Ö3: *O zaman yanlış mı çıktı?*

G: *Şimdi 1 neresi olacak? Hepsi olacak bunun 1(5-y' nin hepsi diye gösteriyor).*

Ö3: *…*

G: *O zaman y kaç olacak burada?*

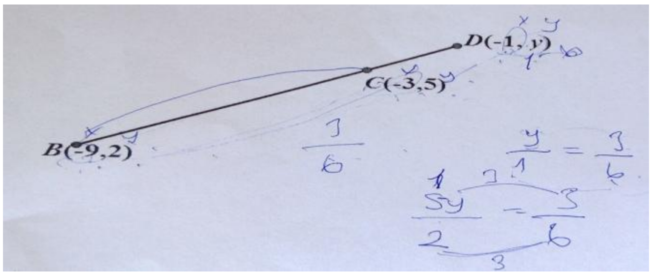
Ö3: *5 mi?*

G: *5 olursa 5-5=0 olur.*

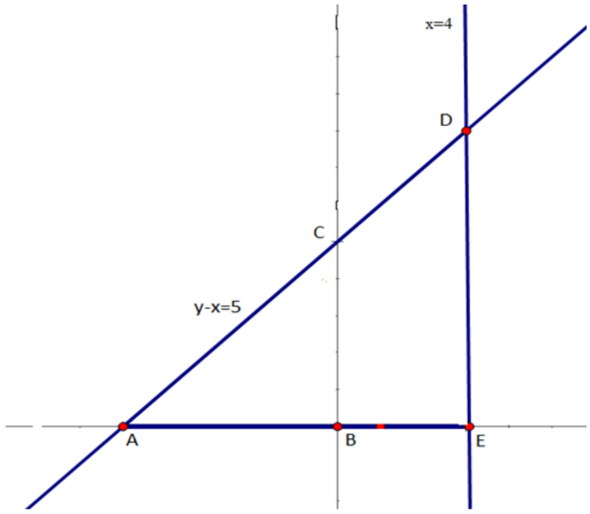
Ö3: *6.*

G: *6 mı olur? Mesela burası 5 ise burası 6 olabilir mi? 2 imiş, 5 miş, burası 6 olabilir mi?*

Ö3: *Olabilir. Yukarı çıkıyor çünkü.*



Doğrudan eğimin sorulmadığı bir başka soruda yine araştırmacının tetikleyici uyarısıyla eğimi yansıtabildiği ve çözüme yükseklik/yatay mesafe' yi kullanarak ulaşabildiği görülmüştür.



Koordinat düzleminde verilenlere göre ADE üçgeninin alanının, ABC üçgeninin alanının kaç katı olduğunu hesaplayınız.

G: *Burada yüksekliği bulabilir misin?*

Ö3: *Yine aynı doğruda bu noktalar.*

G: *Sana ne gibi bir fayda sağlıyor bu?*

Ö3: *Eğimi yine aynı olacak.*

G: *Peki eğimi aynı olacaksa, eğim kaç burada?*

Ö3: Burasını *-5 bulduk, burasını 4 bulduk. O zaman 9 çıktı. Burası -5(BC uzunluğu, küçük üçgen yüksekliği). Y' yi x' e bölüyorduk. -5, burası 9, burasını bilmiyoruz(büyük üçgenin yüksekliği). Burası 5 de…nasıl? Yine katını mı yapacağız?(kendi kendisine soruyor). (5/5 yazdı kağıda düşünürken)*

G: *Bu ne?5/5=?*

Ö3: *Bu doğrunun eğimi işte.*

G: *Peki bunu niye yazdın?(öğrenci y/9 yazdı)*

Ö3: *y' sini bulmak için.*

G: *Eğimlerin eşitliğini nasıl kullanacaksın burada?*

Ö3: *İçler dışlar mı yapacağız.*

G: *Yani içler dışlar mı yapman gerekiyor bir orantıda?*

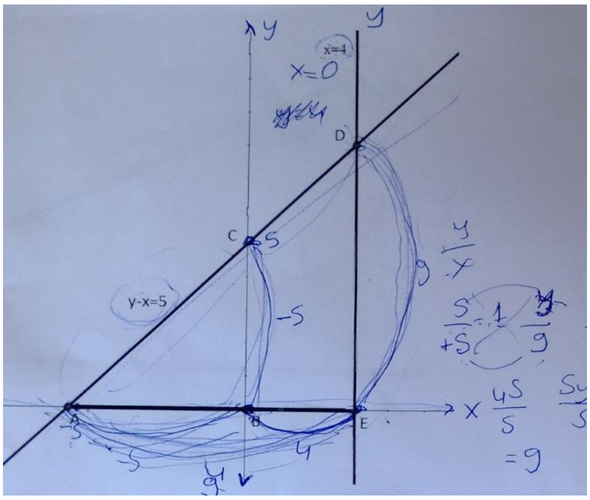
Ö3: *…*

G: *Yap bakalım ne yapacaksın. Belki emin olursun yaptığından.*

Ö3: *(içler dışlar çarpımı yaptı). 5' e böldük, 9 çıktı.*

G: *Neresi 9 çıktı gösterebilir misin?*

Ö3: *Şurası(DE' yi gösterdi yani doğru).*



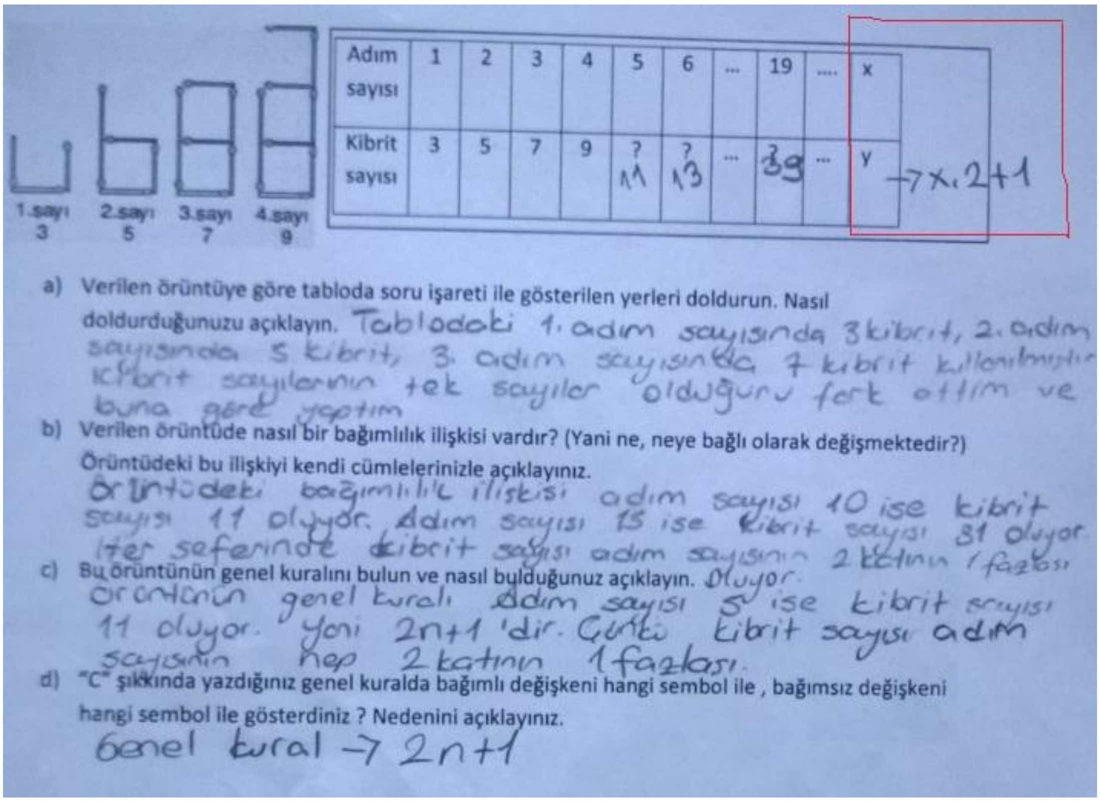
G: *Güven kendine. Peki küçük üçgenle büyük üçgenin eğimi aynı olacak dedin ya sen bana bak bakalım aynı mı eğim?*

Ö3: *Evet. 9 bulduk. 5 burası. Buradan 1 çıkıyor. Buradan da 1 çıkıyor eğim. Aynı oluyor yani.*

Sonuç olarak, Ö3' ün eğim için yükseklik/yatay mesafe' yi sadece bir formül olarak ezberlemek ya da "yükseklik veyatay mesafeyi bul ve yüksekliği yatay mesafeye böl" gibi bir algoritmayı takip etmekten ziyade günlük yaşam durumlarını matematikleştirme yoluyla bir doğrusal görselden yola çıkarak geliştirdiği dik üçgensel modeldeki doğru üzerindeki her noktada yükseklik ile yatay mesafenin oranın sabitliği ile eğimin değişmezliği arasındaki ilişkiyi anlamlandırarak soyutladığı görülmektedir. Daha sonra anlamlandırdığı bu ilişkiyi koordinat düzleminde bir doğrunun eğimi için yansıttığı görülen Ö3' ün, aynı zamanda doğrudan eğimin sorulmadığı sorularda da bu ilişkiyi kullanabilmesi, eğimi bir oran olarak içselleştirme sürecine girdiğini göstermektedir. Ancak dışsal uyaranlar beklemesi onun henüz eğimi bir oran olarak tam anlamıyla içselleştiremediğini göstermektedir. Ayrıca y_1-y_2/x_1-x_2(literatürde y_2-y_1/x_2-x_1 geçmesine rağmen tersi de aynı sonucu vermektedir) genellemesini de bir formül olarak ifade etmesine rağmen bu formülü yükseklik/yatay mesafe ile ilişkilendirmesi ve birbirine dönüştürebilmesi, istediği soruda istediğini kullanabilmesi onun cebirsel genellemeyi ezberlemediğini göstermektedir. Dahası bu cebirsel genellemeyi, daha önceden anlamlandırdığı yükseklik/yatay mesafeye geri çevirebilmesi onu içselleştirdiğini düşündürmektedir.

Ö4' ün Eğim Kavramını Oluşturma Sürecine İlişkin Bulgular

Öğretim öncesinde uygulanan açık-uçlu testte verilen sabit artışlı örüntüyü, fonksiyonel ilişkiyi fark ederek genelleyebildiği ve bunun yanında sembolleştirmede de sıkıntı yaşamadığı görülmüştür. Ayrıca bağımlı değişkeni(y) bağımsız değişken(x) cinsinden yazabilmesinin, fonksiyonel düşünmeyi kazanması açısından önemli olduğu düşünülmektedir.



1.sayı 3 2.sayı 5 3.sayı 7 4.sayı 9

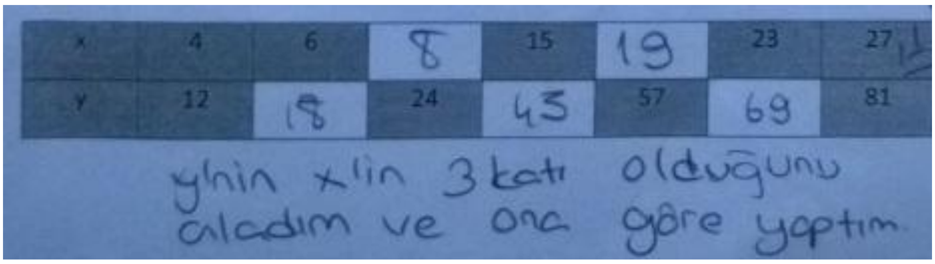
Adım sayısı	1	2	3	4	5	6	...	19	....	x
Kibrit sayısı	3	5	7	9	? 11	? 13	...	39	...	y →x.2+1

a) Verilen örüntüye göre tabloda soru işareti ile gösterilen yerleri doldurun. Nasıl doldurduğunuzu açıklayın. Tablodaki 1. adım sayısında 3 kibrit, 2. adım sayısında 5 kibrit, 3. adım sayısında 7 kibrit kullanılmış kibrit sayılarının tek sayılar olduğunu fark ettim ve buna göre yaptım

b) Verilen örüntüde nasıl bir bağımlılık ilişkisi vardır? (Yani ne, neye bağlı olarak değişmektedir?) Örüntüdeki bu ilişkiyi kendi cümlelerinizle açıklayınız. Örüntüdeki bağımlılık ilişkisi adım sayısı 10 ise kibrit sayısı 11 oluyor. Adım sayısı 15 ise kibrit sayısı 31 oluyor. Her seferinde kibrit sayısı adım sayısının 2 katının 1 fazlası oluyor.

c) Bu örüntünün genel kuralını bulun ve nasıl bulduğunuzu açıklayın. Örüntünün genel kuralı adım sayısı 5 ise kibrit sayısı 11 oluyor. Yani 2n+1 'dir. Çünkü kibrit sayısı adım sayısının hep 2 katının 1 fazlası.

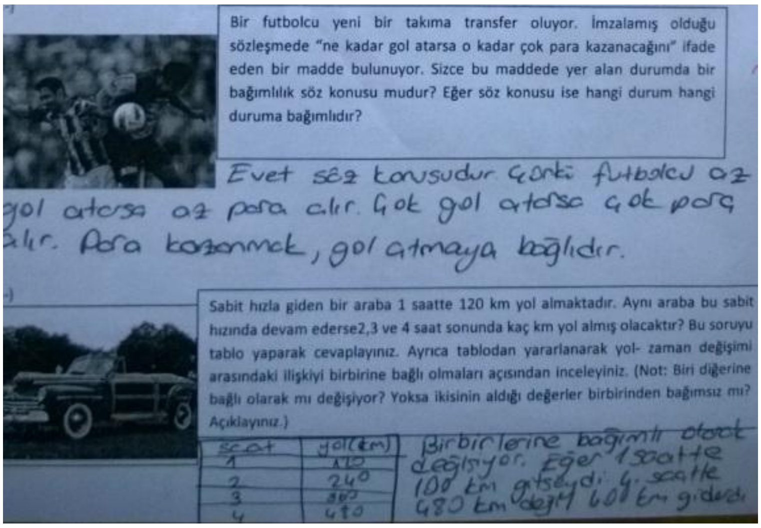
d) "C" şıkkında yazdığınız genel kuralda bağımlı değişkeni hangi sembol ile, bağımsız değişkeni hangi sembol ile gösterdiniz ? Nedenini açıklayınız.
Genel kural → 2n+1



x	4	6	8	15	19	23	27
y	12	18	24	45	57	69	81

y'nin x'in 3 katı olduğunu anladım ve ona göre yaptım

Bu öğrencinin günlük bir yaşam durumundaki bağımlılık ilişkisini de rahatça görerek ifade edebildiği görülmüştür.


Bir futbolcu yeni bir takıma transfer oluyor. İmzalamış olduğu sözleşmede "ne kadar gol atarsa o kadar çok para kazanacağını" ifade eden bir madde bulunuyor. Sizce bu maddede yer alan durumda bir bağımlılık söz konusu mudur? Eğer söz konusu ise hangi durum hangi duruma bağımlıdır?

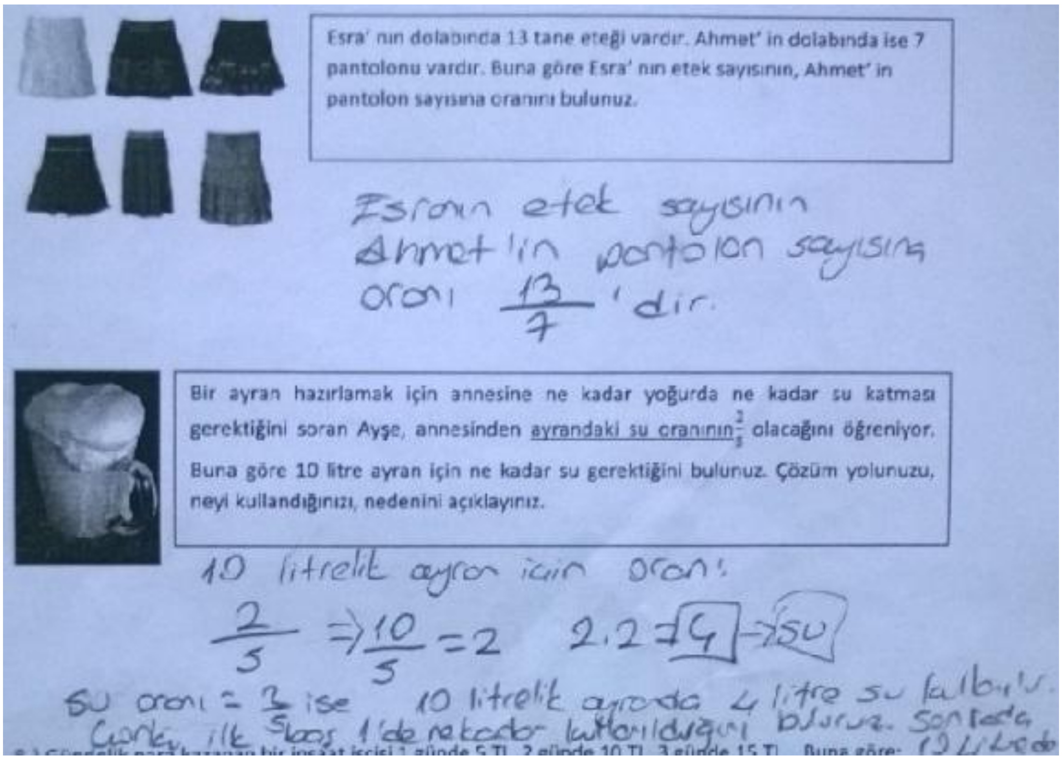
Evet söz konusudur çünkü futbolcu az gol atarsa az para alır. Çok gol atarsa çok para alır. Para kazanmak, gol atmaya bağlıdır.

Sabit hızla giden bir araba 1 saatte 120 km yol almaktadır. Aynı araba bu sabit hızında devam ederse2,3 ve 4 saat sonunda kaç km yol almış olacaktır? Bu soruyu tablo yaparak cevaplayınız. Ayrıca tablodan yararlanarak yol- zaman değişimi arasındaki ilişkiyi birbirine bağlı olmaları açısından inceleyiniz. (Not: Biri diğerine bağlı olarak mı değişiyor? Yoksa ikisinin aldığı değerler birbirinden bağımsız mı? Açıklayınız.)

saat	yol(km)
1	120
2	240
3	360
4	480

Birbirlerine bağımlı olarak değişiyor. Eğer 1 saatte 100 km gitseydi 4. saatte 480 km değil 400 km giderdi.

İki niceliği birbirine rahatça oranlayabildiği görülen Ö4' ün aynı zamanda iki niceliğin oranı verildiğinde de o oranı kullanarak, anlamlı bir şekilde oran kavramına sahip olduğunu göstermiştir.


Esra' nın dolabında 13 tane eteği vardır. Ahmet' in dolabında ise 7 pantolonu vardır. Buna göre Esra' nın etek sayısının, Ahmet' in pantolon sayısına oranını bulunuz.

Esranın etek sayısının Ahmet'in pantolon sayısına oranı $\frac{13}{7}$'dir.

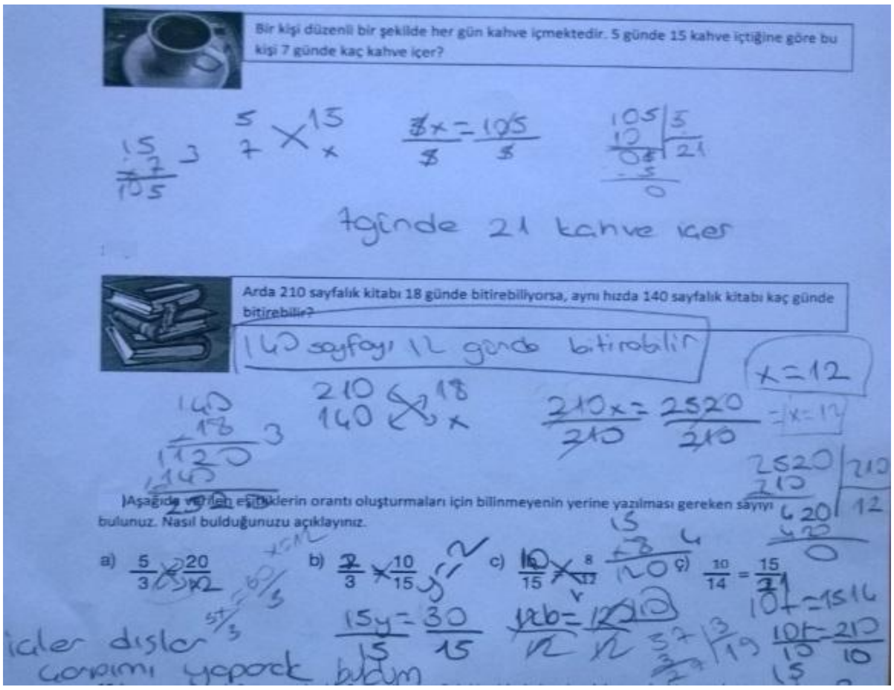
Bir ayran hazırlamak için annesine ne kadar yoğurda ne kadar su katması gerektiğini soran Ayşe, annesinden ayrandaki su oranının $\frac{2}{5}$ olacağını öğreniyor. Buna göre 10 litre ayran için ne kadar su gerektiğini bulunuz. Çözüm yolunuzu, neyi kullandığınızı, nedenini açıklayınız.

10 litrelik ayran için oran:

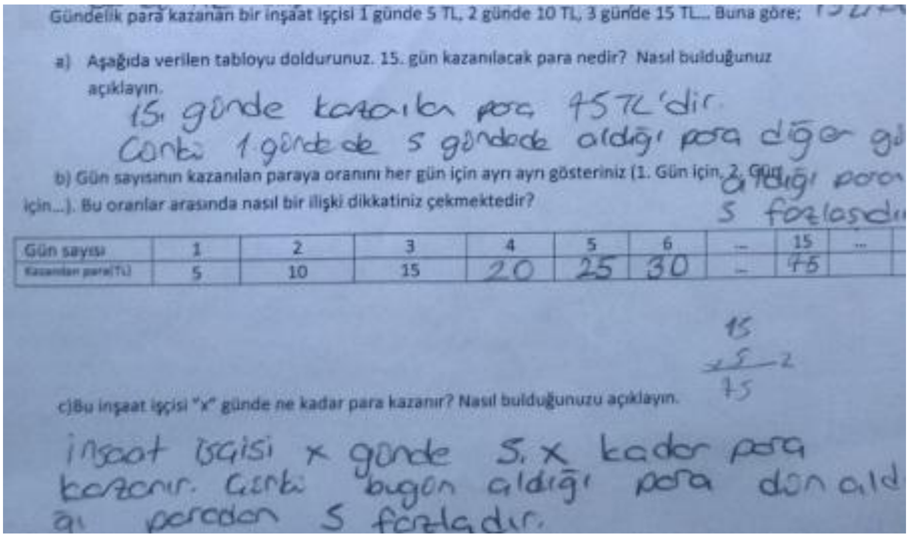
$\frac{2}{5} \Rightarrow \frac{10}{5} = 2 \quad 2.2 = \boxed{4} \rightarrow su$

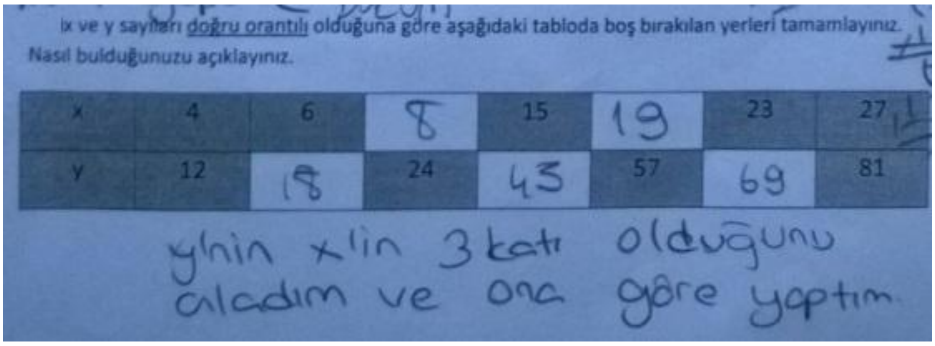
Su oranı = $\frac{2}{5}$ ise 10 litrelik ayranda 4 litre su kullanılır. Çünkü ilk 5 kez 1'de ne kadar kullanıldığını bulursunuz. Sonra da 10 litrede

Orantı problemlerini çapraz çarpım tekniği ile çözebildiği görülen bu öğrencinin iki oranın eşitliği olarak verilen bir orantıda ise bilinmeyeni içler-dışlar çarpımı tekniğini kullanarak bulmuştur.

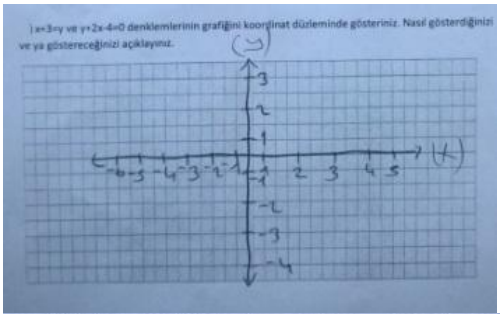


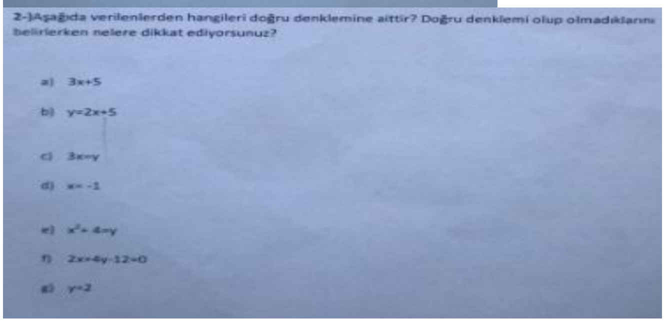
Ancak doğru orantılı olarak artan nicelikler ile ilgili sorularda “oranların eşliği” ya da “iki niceliğin aynı oranda artıp azaldığı” gibi doğru orantıyı anlamlandırdığını gösteren bir yorum yapamadığı görülen Ö4’ ün bu sorularda daha çok fonksiyonel düşünmesini ortaya koyarak ya da ortak artıştan yararlanarak sonuca ulaşması dikkat çekmiştir.



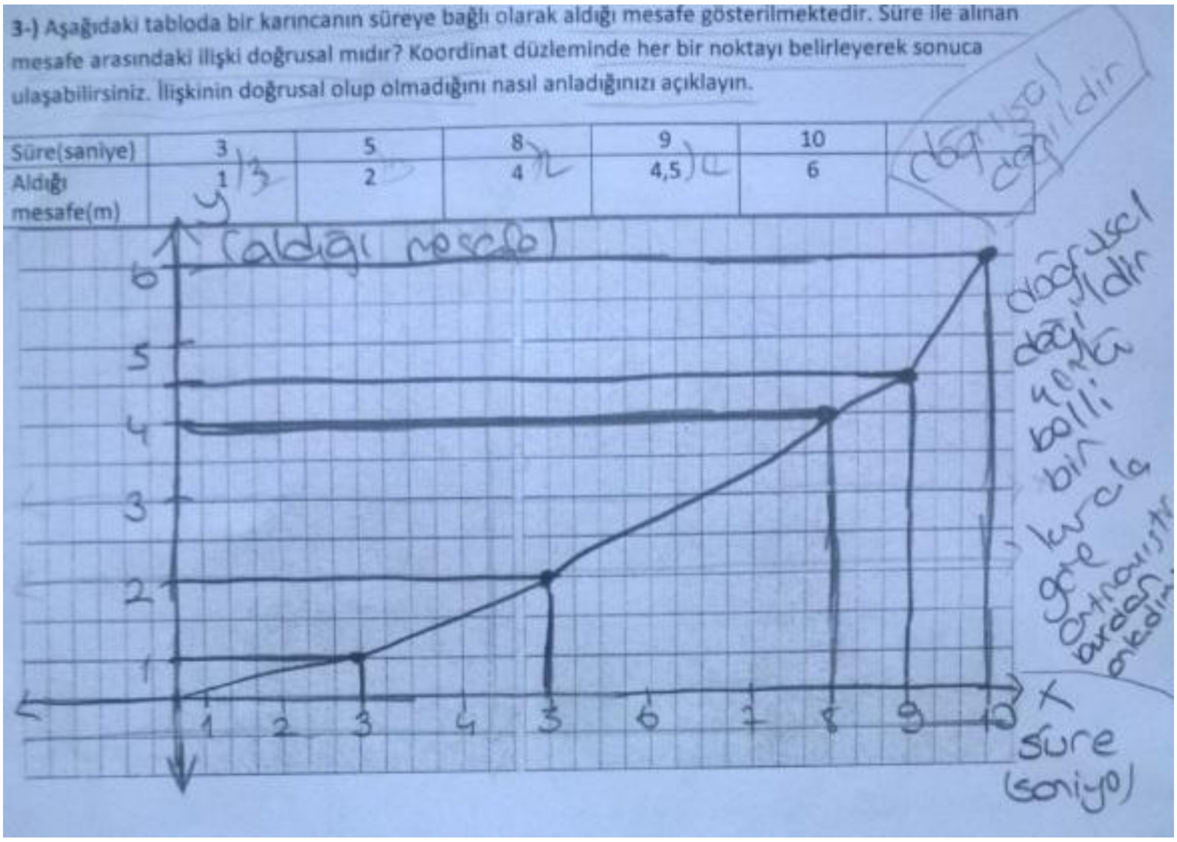


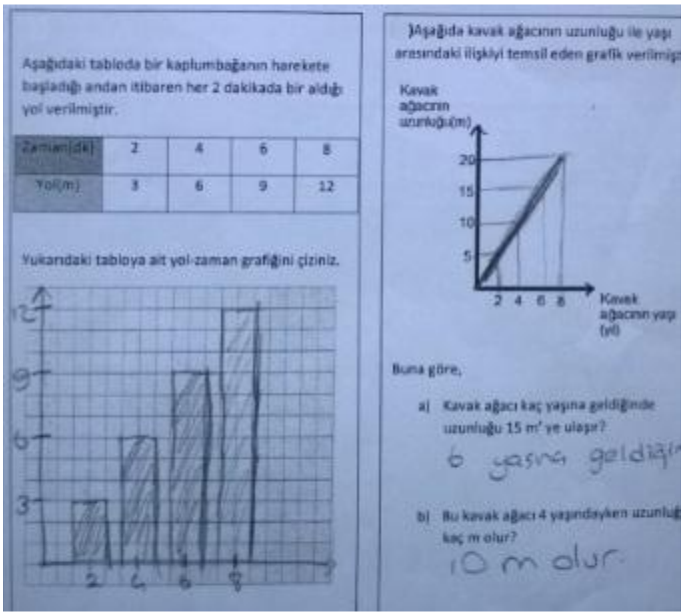
Orantı kavramına işlemsel olarak sahip olduğu dikkat çeken bu öğrencinin, kendisine öğretim sürecinde ona kavramsal olarak sahip olduğunu ortaya koyma fırsatı verildiğinde ise yeterli varlık gösteremediği dikkat çekmiştir. Açık-uçlu testte yer alan doğru denklemi kavramına yönelik sorularda ise denklemi verilen bir doğrunun grafiğini oluşturmadığı ve de bir denklemin grafiğinin doğru olup olmayacacağını belirleyemediği görülmüştür.



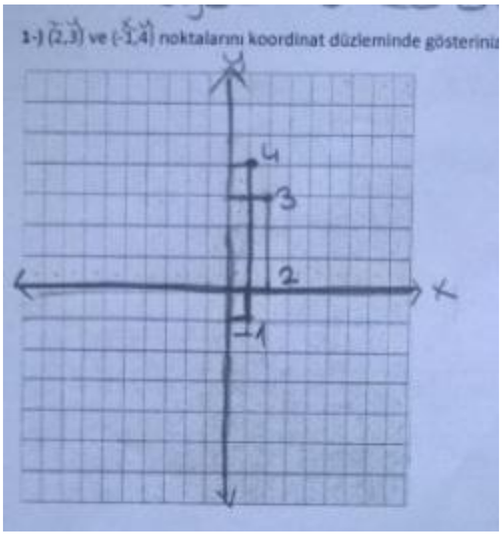


En basit anlamda aralarında doğrusal ilişki olan iki niceliğe ait çizgi grafiğini oluşturarak yorumlayabildiği görülmekte olan Ö4' ün, doğrusallığın farkında olduğu sonucuna varılmıştır.





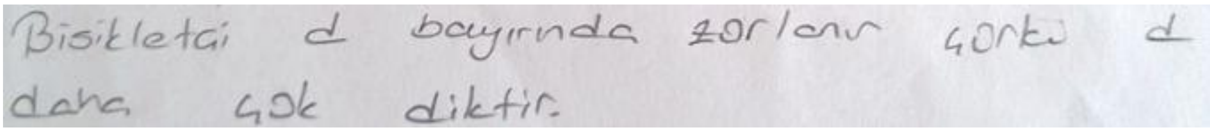
Bu öğrencinin, koordinatları verilen bir noktanın yerlerini koordinat düzleminde belirlerken ufak hatalar yapabildiği görülmüştür.



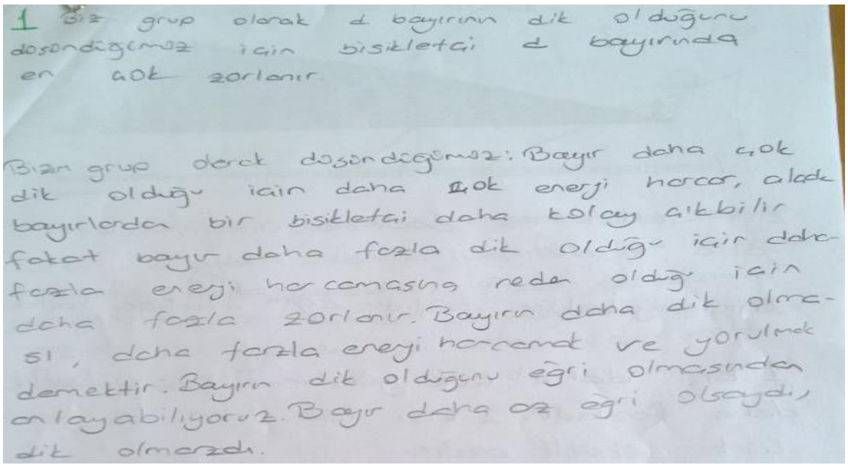
Öğretimin İlk İki Derslik Süreci

Öğretim sürecinin ilk iki dersinde öğrencilerin, eğim ile ilgili informal bilgilerini öğrenme sürecine çağırmaları amacıyla karşı karşıya bırakıldıkları, farklı eğimlere sahip yollarda ilerleyen bir bisikletli bağlamında grup içi tartışmalar sonunda, Ö4 ve grubu, bisikletlinin en çok zorlanacağı yolun en dik yol olacağını söyleyerek eğimi bu sürece çağırabilmiş ancak yolun daha dik olmasına nasıl karar verdikleri sorulduğunda ise yükseklik, yatay mesafe, açı gibi değişkenlerle ilişki kuramamıştır. "Bayırın dik olmasını eğri olmasından anlıyoruz" gibi yorumlarıyla eğimi, herhangi bir değişkene göre değerlendiremedikleri sonucuna varılmıştır.

Ö4' ün bireysel kağıdından bir görüntü

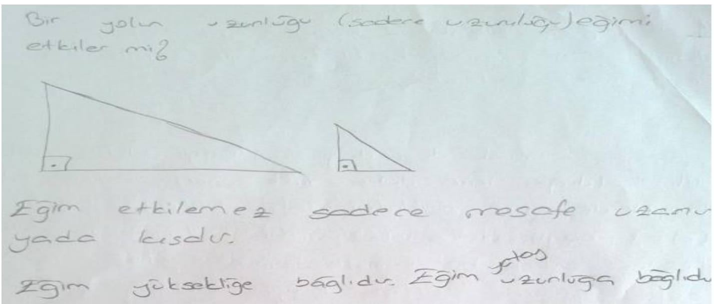


Ö4’ ün grup çalışma kağıdından bir görüntü



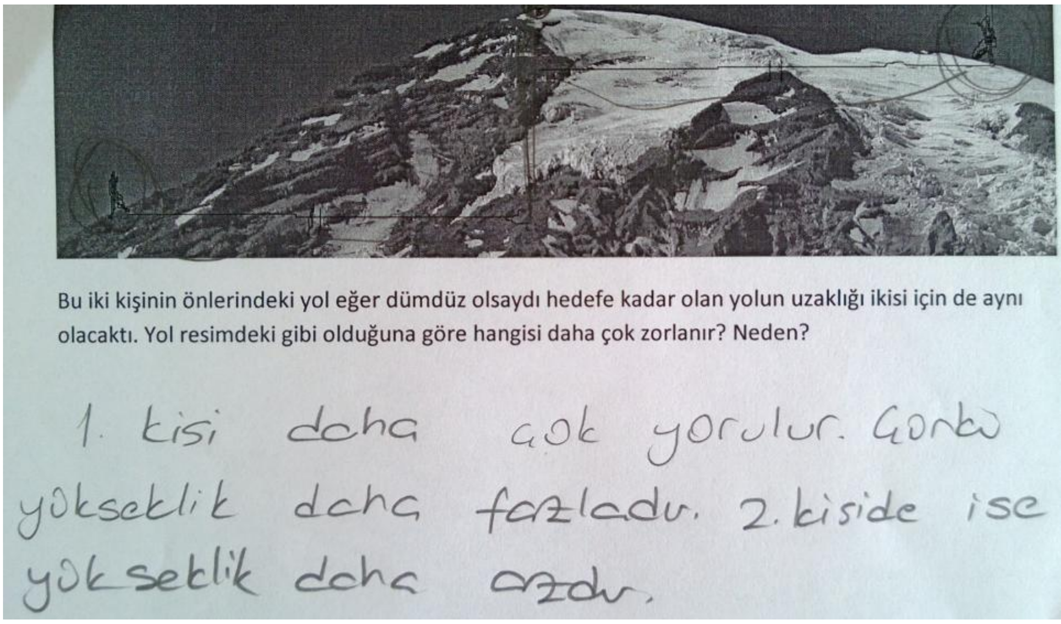
Ö4’ ün bu sırada grup kağıdında diğer grupların savunmalarında kullandıkları yükseklik veyatay mesafe ile eğim arasında ilişkiyi not etmediği dikkat çekmiştir. Daha sonra bazı grupların savunmalarından dolayı, tüm öğrencilere eğimin yol uzunluğuna bağlı olup olmadığı sorusu yöneltilmiş ve yeni bir düşünme ve tartışma sürecine girmeleri sağlanmıştır. Ö4’ ün grup çalışma kağıdına hipotenüsleri aynı iki dik üçgensel model çizmek yerine yükseklikleri veyatay mesafeleri farklı ancak eğimleri aynı olan iki dik üçgensel model çizmesi dikkat çekmiş ve bu modellerden yararlanarak “yol uzunluğu eğimi etkilemez sadece mesafe uzar ya da kısalır” genellemesini ortaya attığı ve grup arkadaşlarının da bu görüşe katıldığı görülmüştür. Bu öğrencinin eğimin, verilen doğrusal görselin uzunluğuna bağlı olmayışını, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişkiden anlamlandırmış olabileceği düşünülmüştür. Grup içi tartışmalarda eğimin yüksekliğe bağlı olduğunu belirtmiş olduğu dikkat çeken Ö4’ün, gruplar arası tartışmalardan sonra eğimin yatay mesafeye de bağlı olduğunu grup çalışma kağıdına not ettiği görülmüştür.

Ö4’ ün grup çalışma kağıdından bir görüntü

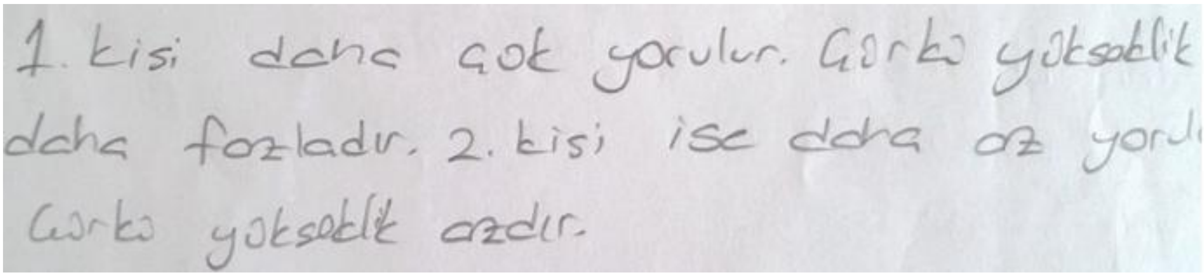


Daha sonra öğrencilere, bahsedilen doğruları hipotenüs kabul eden dik üçgensel modeller oluşturulduğunda, yatay mesafeleri aynı fakat yükseklikleri farklı olan doğrusal görsellenmiş bir dağın etekleri ile ilgili bağlam verilmiş, bu doğrusal görsellerin eğimleri hakkında düşünme fırsatı sağlanmıştır. Ö4' ün bireysel çalışma kağıdında vardığı genellemeyi grup çalışma kağıdına da aynen geçirdiği dikkat çekerken eğim veya diklik, bayır gibi kelimeleri hiç kullanmadığı, yorulmayı yüksekliğe bağlı olarak yorumladığı görülmüştür. Grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdında ise eğim ile yorulmayı ilişkilendirdiği ve eğimi yorumlarken yüksekliğin yanında dağ eteğinin uzunluğunu da etken olarak düşündüğü belirlenmiştir.

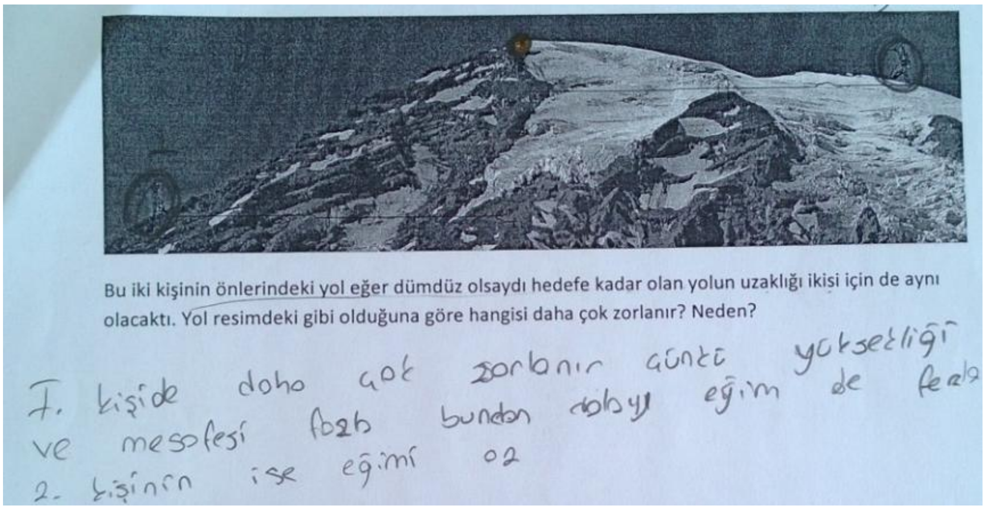
Ö4' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Ö4' ün grup çalışma kağıdından bir görüntü



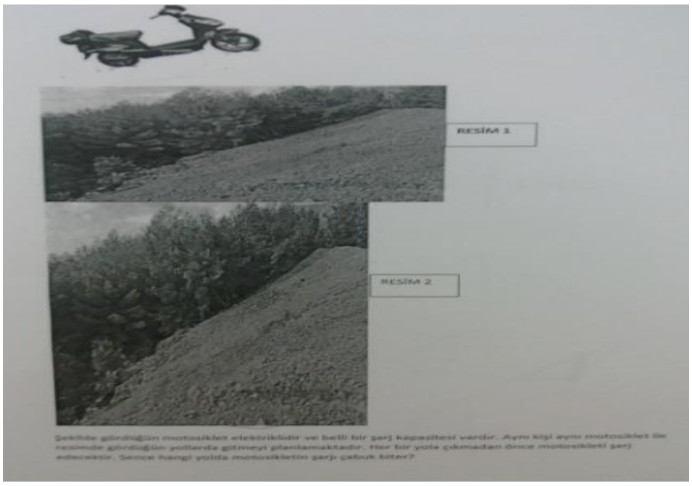
Ö4' ün grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



İlk iki derslik öğretim sürecinde informal yaşantılarından edindiği eğim bilgisini öğretim sürecine çağırabildiği görülen Ö4' ün, eğimin bağlı olduğu değişkenlerden açı ile hiçbir şekilde ilişkilendirme yapmadığı görülürken uzunluk değişkenlerinden yüksekliği ise gruplar arası tartışmalarla fark ederek anlamlandırdığı düşünülmüştür. Yatay mesafenin de eğimi etkileyen bir değişken olduğunu ise gruplar arası sınıf tartışmalarından sonra not ettiği görülmesine rağmen anlamlandırıp anlamlandırmadığı kendisiyle gerçekleştirilen 1. Klinik görüşmede belirlenmiştir.

Ö4 ile Gerçekleştirilen 1. Klinik Görüşme

Görüşmenin başında gösterilen bağlamda eğimin yansımalarından olan "dikliği" çağırabildiği ve onun bağlı olduğu değişkenleri belirleyerek, verilen resim üzerinde de gösterebildiği görülen Ö4, yükseklik veyatay mesafeyi eğimin bağlı olduğu değişkenler olarak ifade edebilmiştir.



Ö4: *Hocam bence 2. Resimde çabuk biter şarjı. Çünkü orada daha çok zorlanır. Bunlar akülü olduğu için belli bir yere şarj ettikleri için burada daha çabuk biter bence.*

G: *2. resimde daha çabuk biter diyorsun. Peki neden 2. Resimde daha çabuk biteceğini düşünüyorsun?*

Ö4: *Çünkü bana göre bu yol daha zorlu. 1. Resimde yol zorlu tamam ama belli bir yere kadar geliyor onda. Nasıl anlatsam? Dik ama 2. Resimdeki kadar dik değil. 2. Resim daha zorlayıcı olduğu için bunda motosikletin şarjı daha çabuk biter.*

G: *Hangisindeki bayır daha zorlu diyorsun?*

Ö4: *2. resimdeki.*

G: *Hangi resim daha dik dedin?*

Ö4: *2. resim.*

G: *2. resim. Peki dikliğini nereden anlıyorsun? Nelere bakarak dik diyebiliyorsun? İki resim arasındaki farkı nasıl karşılaştırabiliyorsun?*

Ö4: *1. resmin yüksekliğini aldığımızda belli bir santim gelecek, belli bir mesafe gelecek. 2. Resimde de bunun yüksekliğini aldığımızda belli bir mesafe gelecek. Ama 2. Resimdeki yükseklik daha fazla olacak. 2. Resimdeki yükseklik daha fazla olduğu için diklik de daha fazla olacak.*

G: *Daha yükseğe çıkacak dedin. Peki sadece yüksekliğe mi bakacağız dikliği belirlemek için?*

Ö4: *Hayır hocam. Şuradaki dağın mesafesine bakacağız.*

G: *Neresi dağın mesafesi, çizerek gösterebilir misin?*

Ö4: *Şurası dağın mesafesi(2. Resimdeki yatay mesafeyi çizdi).*

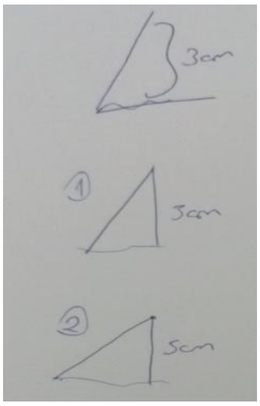
Kendisinden yükseklikleri aynı olan doğrusal görseller çizmesi istendiğinde, eğimleri aynı ya da farklı olan dik üçgensel modeller oluşturabildiği ve bu sırada eğimin yüksekliğe veyatay mesafeye bağlı olarak değişimini dik üçgensel modelleri dinamik olarak oynatabilerek savunduğu görülmüştür.

G: *Peki 2 resimdeki yükseklik aynı olsaydı mesela, eğimler aynı mı olacaktı? Diklik aynı mı olacaktı? Motosiklet aynı mı zorlanacaktı?*

Ö4: *…ıı(dengesi bozuldu sanki ve düşünmeye başladı)*

G: *Mesela öyle bir şey çizebilirsin. Yükseklikleri aynı olan 2 bayır çiz bize.*

Ö4: *Bunu yüksekliği 3 cm olsun. Burası böyle dik olacak. Burası da böyle. Bence aynı olurdu! Ama dağın yüksekliği ile alakası var mı? Bir de burada uzaklığıyla alakalı.*



G: *Hımm. Oradaki uzaklığıyla da alakalıdır diyorsun. O zaman şöyle diyelim: yükseklikleri aynı olup da yokuşları farklı olacak iki yol çizebilir misin bana?*

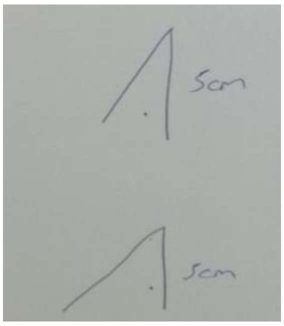
Ö4: *Yokuşları derken şurası mı?(hipotenüsü gösterdi)*

G: *Dikliği.*

Ö4: *Hımm.*

G: *Yani senin için ne anlam ifade ediyorsa yokuş.*

Ö4: *Şimdi burası 5 cm olsun, burası da 5 cm olsun(iki dik üçgen çizerken mırıldanıyor). Çizilebilir.*



G: *Çizilebilir. Peki bu ikisini mi veriyorsun örnek?*

Ö4: *Hı hı.*

G: *Peki bu vermiş olduğun örneklerde dikkatimi çeken bu bölgeler. Sen ne demiştin bunlara?*

Ö4: *Yükseklik.*

G: *Yükseklikler aynı diyorsun ve 5' er cm vermişsin. Neleri farklı tuttun?*

Ö4: *Hocam dağın tam tepesinden aşağı.. yani yerde gittiği mesafeyi farklı tuttum(yatay mesafeyi anlatmaya çalışıyor)*

G: *Peki bu ikisinden hangisinde motosikletin şarjı daha çabuk biter?*

Ö4: *1.resimde daha çabuk biter.*

G: *Neye bağlı olarak bunu söylüyorsun? Neden 1. Resim?*

Ö4: *Çünkü öğretmenim burası daha dik.*

G: *Peki yükseklikler aynı olmasına rağmen daha dik dedin.*

Ö4: *Evet.*

G: *Neden öyle dedin?*

Ö4: *Çünkü buradaki mesafeler farklı(yatay mesafeleri gösterdi).*

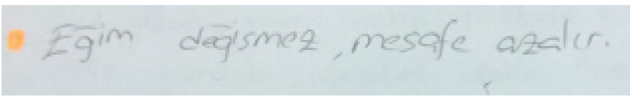
Ö4 öğretim sürecinin ilk aşamasında, eğimin bağlı olduğu değişkenleri ezberlemediğini, aksine onları anlamlandırma sürecinde olduğunu, yorumlarını dik üçgensel modeller yardımıyla savunarak göstermiştir. Bu öğrencinin öğretim sürecinde eğimin yol uzunluğuna bağlı olabileceğini düşünmüş olmasına rağmen görüşme boyunca eğimi hiç yol uzunluğuna bağlı olarak yorumlamaması da dikkat çekmiştir. Öğretim sürecinin bir sonraki aşamasında ise artık öğrencilerden eğimi bir doğru ya da doğrusal görsel üzerinde herhangi bir noktadaki yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran olarak yapılandırmaları beklenmekteydi.

Öğretimin İkinci İki Derslik Süreci

Bu iki derslik öğrenme sürecinin başında doğrusal olarak görsellenen bir dağın eteğinin üzerinde farklı noktalarda yer alan kişilerin önündeki yolun eğimlerini yorumlamalarını gerektiren bir bağlam durumu ile karşı karşıya bırakılan öğrenciler, grup içi ve gruplar arası tartışmalarda düşüncelerini savunmuşlardır.

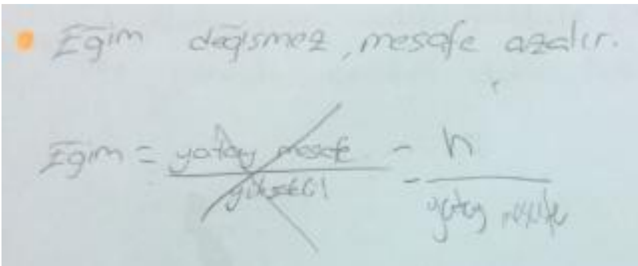
Gruplar arası tartışmalarda Ö4' ün eğimin değişmeyeceğini ileri sürerek, sadece mesafenin azalacağını belirttiği görülürken, kendisinden mesafe dediği uzunluğu göstermesi istendiğinde ise yatay mesafeyi gösterdiği dikkat çekmiştir.

Ö4' ün grup çalışma kağıdından bir görüntü



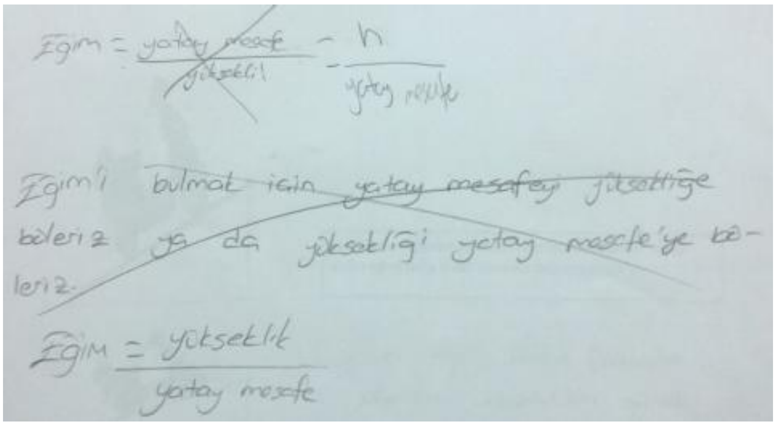
Bu arada beş gruptan sadece birisinin eğimin değişip değişmeyeceği konusunda tereddütte kaldığı görülmüştür. Geriye kalan dört grubun sözcüleri eğimin değişmeyeceği sonucuna varmalarına rağmen, sadece bir grubun yükseklik ile yatay mesafe arasındaki orantısal ilişkiyi fark edebildiği görülmüştür. Bu grubun yükseklik ile yatay mesafenin aynı oranda azalacağını ve bu yüzden eğimin değişmeyeceğini vurgulaması üzerine tüm gruplara eğimin değişmemesinin nedenini bir kez daha düşünme fırsatı verilmiştir. Aynı doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmemesi ve yükseklik ile yatay mesafenin aynı oranda azalıp artması arasındaki ilişkinin fark edilmesi için yönlendirici sorular da sorulmuş ve öğrencilerin oran kavramına odaklanmaları sağlanmaya çalışılmıştır. Bu ilişkiyi keşfeden başka öğrenciler de olduğu görülmüş ancak öncelikle Ö4’ e söz hakkı verilmiştir. Ö4’ ün yüksekliğin yatay mesafeye ya da yatay mesafenin yüksekliğe oranının eğimi vereceğini dile getirmesi ile hangi oranın eğimi vereceğini düşünmeye yönelik yeni bir tartışma ve düşünme süreci başlamıştır. Tüm grupların aksine Ö4’ ün grubunun eğimi, yatay mesafenin yüksekliğe oranı olarak düşündüklerini dile getirmiştir.

Ö4’ ün grup çalışma kağıdından bir görüntü

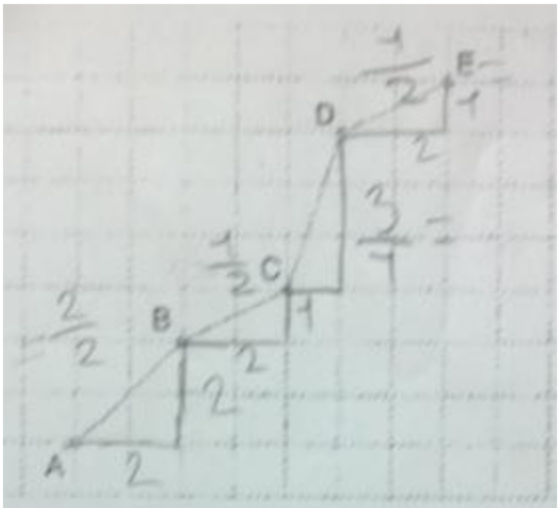


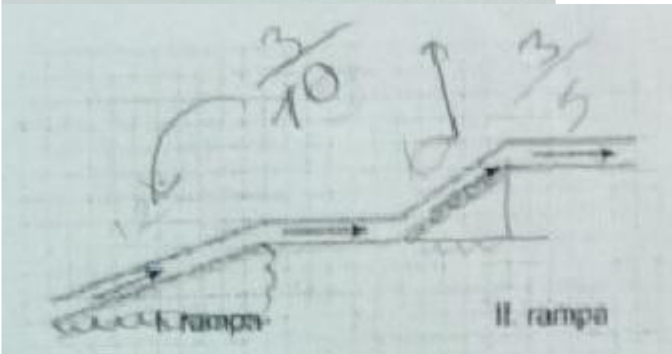
Bunun üzerine öğrencilerden tahtada görsellenen iki yolun eğiminin sayısal değerini bulmaları istenmiş ve hem yatay mesafe/yükseklik hem de yükseklik/yatay mesafe oranları ile eğimi hesaplamaları için fırsat verilmiştir. Görsel olarak yolların eğiminin hangisinin fazla olduğunu tüm öğrencilerin rahatça belirleyebildiği görülürken, bahsedilen iki orandan hangisinin görsel olarak varılan eğim yorumu ile örtüştüğü fark ettirilmeye çalışılmıştır. Bu sırada özellikle Ö4’ ün grubunun verdiği cevaba dikkat edilmiştir. Bu öğrencinin yüksekliğin yatay mesafeye oranının doğru sonucu verdiğini gördüğü ve diğer oranın üzerini karaladığı dikkat çekmiştir.

Ö4' ün grup çalışma kağıdından bir görüntü



Ardından eğimi hesaplama fırsatı verilerek dikey matematikleştirme yapmaları için uygun ortam sağlanmış ve Ö4' ün bu sırada eğimi yükseklik/yatay mesafe' yi kullanarak hesaplayabildiği görülmüştür.





Ö4 ile Gerçekleştirilen 2. Klinik Görüşme

Öğretim sürecinde eğimin yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran olduğunu fark eden ancak yatay mesafeyi yüksekliğe oranlayarak eğimi bulacağı yanılgısına düşen Ö4' ün daha sonra eğim hesaplama gerektiren sorularda bu yanılgısını düzeltebildiği düşünülmüştür. Ancak kendisiyle gerçekleştirilen 2. Klinik görüşmede yükseklik veyatay mesafeyi belirleyerek ve yine yatay mesafeyi yüksekliğe oranlayarak eğimi bulduğunun görülmüş olması, bu öğrencinin ders sırasında hangi değişkenin hangisine oranlanması gerektiğini anlamlandıramadığını ortaya koymuştur.

Resimde görülen bayıra, köye ulaşımı sağlamak için yol yapılacaktır. Her yolun girişinde yolun eğimini gösteren, 

şeklinde bir tabela bulunmaktadır. Bu yolun girişine konulacak tabelayı siz hazırlasanız, nelere ihtiyaç duyardınız?

…

G: *Yükseklikten kastın neresi yani?*

Ö4: *Yükseklikten kastım, bundan önce düz bir yol vardır muhakkak. Şöyle dikiliyordur. Iı nasıl diyeyim? Yani belli bir süre sonra yükseliyordur. Bundan önce düz bir yol var. Bunun bittiği yer yani bayırın bittiği yerin yüksekliğini.*

G: *Güzel. Orayı mesela ölçtün. Çizebilirsin orayı kendin de yazabilirsin. 140 m senin yükseklik dediğin yer.*

Ö4: *…(çizdi ve üzerine değer yazdı) tamam. (yolun eğiminin başladığı yere kadar değil resmin başladığı yere kadar olan kısmı yükseklik olarak gösterdi)*

G: *Başka ne istiyorsun? Yeterli mi senin için yükseklik? Tabelaya 140 mı yazacaksın?*

Ö4: *Burasının yüksekliği..yok şimdi…140. Buradan önceki yolun eğimini gerçi düzlüğünü bulurdum. Sonra burası 140 olduğu için yüzde ne kadar arttığını hesaplardım.*

G: *Hı hı. Peki diğer istediğin mesafeyi mesela bana söyleyebilir misin?*

Ö4: *Burasının uzunluğu(yatay mesafeyi gösterdi).*

G: *Orasının uzunluğu tamam. 480 m.*

Ö4: *…(çizdi yatayı ve sayısal değerini yazdı).*

G:*Pekala güzel. Şimdi bana tabloya ne yazacağını bulabilir misin?*

Ö4: *Sonra 480' i 140' a bölerdim.*

G: *Hı hı.*

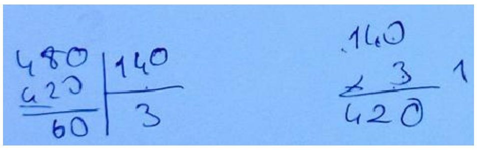
Ö4: *Eğimin ne kadar olduğunu bulurdum.*

G: *Tamam. Bul bakalım.*

Ö4: *Burayı mı? Burası 140 mıydı?*

G: *Evet 140.*

Ö4: *480 bölü 140. 40…2…3…eee tam çıkmadı bunda?(480' i 140' a böldü)*



G: *Tam çıkmadı. Peki şimdi şeyi sormak istiyorum ben sana: tam çıkmadıysa nasıl olacak? Tam çıkmaması seni rahatsız mı etti?*

Ö4: *Evet.*

G: *Neden?*

Ö4: *Çünkü burası tam çıksaydı ona göre yüzdesini hesaplayacaktık.*

G: *O zaman sen…ne yaptın burada sen?*

Ö4: *Ben eğimi bulmak içim mesafeyi yüksekliğe böldüm.*

G: *Eğim her zaman tam sayı mı çıkmak zorundadır?*

Ö4: *Hayır.*

G: *Ne çıkabilir tamsayı çıkmazsa?*

Ö4: *Virgüllü sayılar çıkabilir. Kesirli sayılar çıkabilir.*

Bunun üzerine Ö4' den, yanılgısını fark etmesi için, eğimleri farklı iki merdiven çizmesi ve o eğimlerini karşılaştırması istenmiş ve buradan, ancak yüksekliği yatay mesafeye oranlarsa doğru karşılaştırmayı yapabileceğini fark etmesi sağlanmaya çalışılmıştır. Çizdiği dik üçgensel modellerden merdivenin eğimini görsel olarak doğru yorumladığı hatta yatay mesafe ile eğimin ters orantılı olduğunu bile dile getirdiği görülen öğrencinin gerçek hayatla, ulaştığı sonuçların uyumlu olmayabileceğini dile getirerek eğimi ısrarla yatay mesafeyi yüksekliğe bölerek hesaplaması dikkat çekmiştir.

G: *Bir yolun bir merdivenin bir çatının eğimini nasıl hesaplarsın?*

Ö4: *Yerden o merdivene uzaklık ile yüksekliği bölerim.*

G: *Tamam. Ve eğimi bulmuş olurum diyorsun.*

Ö4: *Evet.*

G: *Peki eğim ne demek sence? Eğimi tanımla desem sana. Hep kullanıyoruz ya eğimi.*

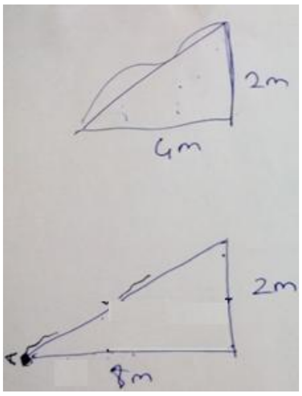
Ö4: *Eğim bence…ıı(düşünüyor)*

G: *Matematiksel de tanımlayabilirsin.*

Ö4: *Mesafe bölü yükseklik.*

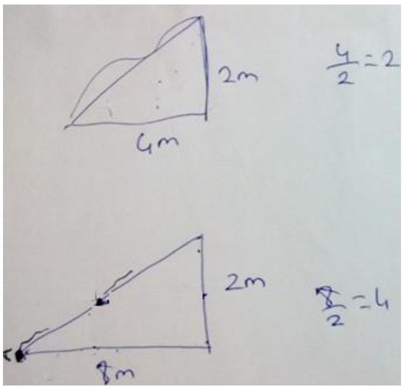
G: *Peki o zaman şöyle bir şey desek. Bana iki tane merdiven çizsen şuraya. Ve bu merdivenlerin eğimleri farklı olsun.*

Ö4: *Tamam şimdi bu duvar. Bu merdiven. Bunun buradaki yüksekliği 4 m(yatay mesafeyi göstererek oraya da yükseklik dedi). Duvarın yüksekliği 2 m. Sonra(ikinci çizdiği merdivene geçti) bu duvar, bu merdiven. Burası 8 m(yatay mesafe) burası da 2 m olsun(yükseklik).*



G: *Tamam.*

Ö4: *Bu 4/2 den eşittir 2. Bunun eğimi 2' ymiş. Sonra bununki de 8/2' den 4' müş(yatay mesafeyi yüksekliğe böldü).*



G: *Peki hangisinin eğimi fazla?*

***Ö4:** Bunun eğimi daha fazla…Dur! Bunun eğimi daha fazla(heyecanla görsel olarak eğimi fazla olanı doğru seçti). Çünkü eğim bunlarla ters orantılıydı(yatay mesafeleri gösteriyor).*

***G:** Peki eğim fazla ama sonuçlarına bakarsak?*

***Ö4:** Eee bu 4 m olduğu için bu(yatay mesafesi 8 m olan) daha uzun oluyor. Daha uzun olduğu için de daha az zorlayıcı oluyor. Ama bunda daha kısa olduğu için daha dik oluyor ve daha zorlayıcı oluyor.*

***G:** Peki anlıyorum seni ama söylemek istediğim şey, sen hangisinde eğim fazla diyorsun: bunda fazla diyorsun. Peki sayısal değerlere baktığımızda?*

***Ö4:** Sayısal değerlere baktığımızda sayısal değerlerle ters orantılı oluyor.*

***G:** Ama sen eğim sayısal değerlerle ters orantılı diyorsun da eğimin hesabını yapmış olmadın mı sen şu anda?*

***Ö4:** Oldum.*

***G:** Peki eğimin hesabını yaptığında bulduğun değerler, günlük hayatta bulduğun değerle yani hangisinin eğiminin fazla olduğuyla aynısını vermek zorunda mı değil mi?*

***Ö4:** Bence değil. Çünkü bunda 4 m çıktı. 4 m çıktığı için o zaman daha fazla olduğundan diklik azalıyor.*

***G:** Hı hı.*

***Ö4:** Burada 2 m çıktı. Metresi yani mesafesi daha az olduğu için daha dik oluyor eğim bence. Değildir yani.*

Ardından bu öğrenciye aynı doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişimini sorgulamaya yönelik sorular sorularak eğimi bir oran olarak algılayıp algılamadığı incelenmeye çalışılmıştır. İlk önce görsel olarak algılamasından ve informal deneyimlerinden dolayı olabileceği düşünülen, eğimin değişmediğini vurgulayabilmiş ancak ardından yükseklik ile yatay mesafenin değişeceği için onun da değişeceğini düşündüğünü ifade etmiştir. Ö4’ ün yükseklik ile yatay mesafenin doğru orantılı değişimini fark edemediği verdiği sayısal örneklerle de görülmüş ve bu öğrencinin eğimi henüz yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran olarak yapılandıramadığı düşünülmüştür.

***Ö4:** Eğim değişmez. Yükseklik değişir.*

***G:** Peki yükseklik değişir. Başka ne değişir?*

***Ö4:** Başka ne değişir? Buna göre mesela burasını görmezsek bu alt mesafe değişir(resmin geri kalan kısmını görmezsek diyor).*

***G:** Hı hı. Peki o mesafe değişir ve yükseklik değişir dedin bana.*

***Ö4:** Evet. O zaman ona bağlı olarak eğim de değişir.*

***G:** Eğim değişir mi değişmez mi?*

***Ö4:** Değişir.*

G: *Neden değişir?*

Ö4: *Şimdi hocam burasını görmezsek(resimdeki yokuşta bir nokta alıyor ve öncesini görmezsek diyor), burası bunun yarısı olursa, yükseklikte 3' te 1 olursa, bunun buna bölümü eğimi verdiği için eğim de değişir.*

G: *Değişir diyorsun. Onu ona böldüğün için… peki o zaman bu yolun eğiminin değişmesi, buradayken farklı buradayken farklı dedin, öyle mi?*

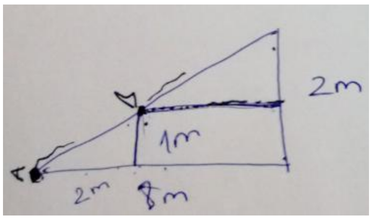
Ö4: *Evet.*

G: *Şuraya mesela senin çizmiş olduğu bu üçgensel bölgede nasıl bir durum göze çarpıyor eğimle ilgili. Desem ki bana A ve B noktalarında bulunan kişilerin önlerindeki doğru şeklindeki yolun eğimini hesapla. Aynı üçgende verilen yol üzerinde bu noktalar ve sadece yol değişmiş.*

Ö4: *Bunun yüksekliği, bunları kestiğimizde mi?(resmi kesmekten bahsediyor)*

G: *Evet.*

Ö4: *Bu yarıya inse 1 m olsa, bu da 4' te 1 olsa…*



G: *Bu iki nokta arasında eğim farklı diyorsun yani buradayken (A-B arası) eğim farklı, buradayken (B' den sonra) eğim farklı diyorsun bana, yani yokuşluğu.*

Ö4: *Evet.*

G: *Burada verdiğin sayısal değerleri de bu şekilde mi açıklıyorsun?*

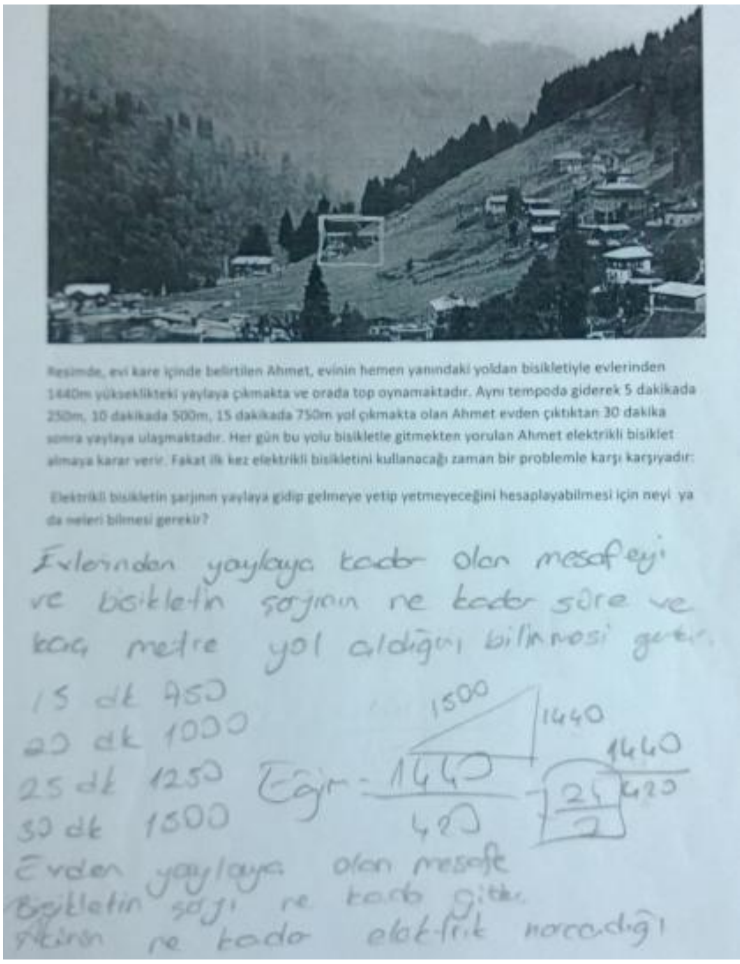
Ö4: *Evet.*

Öğretim bu anında eğimin değişmezliği ile aynı doğru üzerindeki her noktadaki yükseklik ile yatay mesafe arasındaki sabit oran arasında eşitlik ilişkisini kuramadığı görülen Ö4' ün başarısızlığının sebebinin ise yükseklik ile yatay mesafenin doğru orantılı değişimini anlamlandıramaması olduğu düşünülmektedir. Ayrıca eğimi yüksekliğe veyatay mesafeye göre ayrı ayrı yorumlayabildiği görülen bu öğrencinin, ikisi arasındaki orantısal artış ya da azalıştan eğimi çıkarsayamadığı yorumu yapılabilir çünkü bu öğrencinin yükseklik ile yatay mesafeden hangi değişkenin hangi değişkene oranının eğimi sağladığını şu ana kadar anlamlandıramadığı görülmüştür.

Öğretimin Son İki Derslik Süreci

Bu son iki derslik öğretim sürecinin başında öğrencilerde eğim hesaplama ihtiyacı yaratması beklenen yaylaya çıkma bağlamında Ö4' ün eğimi sürece çağırmakta sıkıntı çekmediği ve grup arkadaşıyla birlikte iletişimini aktif tutarak yükseklik veyatay mesafeyi bularak eğimi hesapladığı görülmüştür. Bu bağlam probleminin çözümünde ve bundan sonraki öğretim süreci boyunca yüksekliği yatay mesafeye oranlamasında(yatay mesafeyi yüksekliğe oranlama yanılgısını terketmesi) grup arkadaşıyla etkileşiminin etkili olmuş olabileceği düşünülmüştür. Ayrıca gruplar arası tartışmalarda diğer sınıf arkadaşlarıyla etkileşiminin de bu yanılgısından kurtulmasını olumlu yönde desteklemiş olabileceği öne sürülebilir.

Ö4' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Resimde, evi kare içinde belirtilen Ahmet, evinin hemen yanındaki yoldan bisikletiyle evlerinden 1440m yükseklikteki yaylaya çıkmakta ve orada top oynamaktadır. Aynı tempoda giderek 5 dakikada 250m, 10 dakikada 500m, 15 dakikada 750m yol çıkmakta olan Ahmet evden çıktıktan 30 dakika sonra yaylaya ulaşmaktadır. Her gün bu yolu bisikletle gitmekten yorulan Ahmet elektrikli bisiklet almaya karar verir. Fakat ilk kez elektrikli bisikletini kullanacağı zaman bir problemle karşı karşıyadır:

Elektrikli bisikletin şarjının yaylaya gidip gelmeye yetip yetmeyeceğini hesaplayabilmesi için neyi ya da neleri bilmesi gerekir?

Evlerinden yaylaya kadar olan mesafeyi ve bisikletin şarjının ne kadar süre ve kaç metre yol aldığını bilinmesi gerekir.

15 dk 950
20 dk 1000
25 dk 1250
30 dk 1500

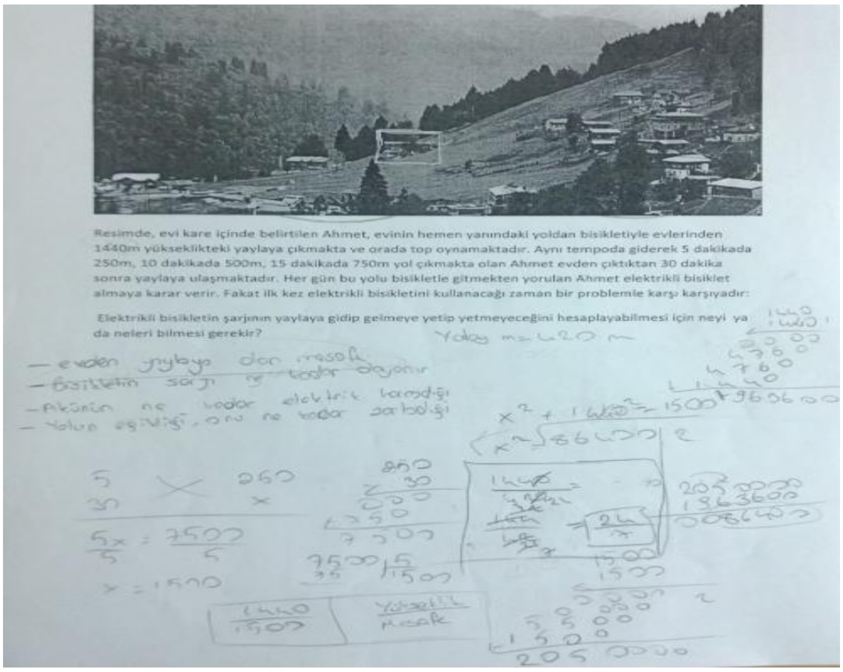
1500
1440

Eğim = $\frac{1440}{420}$ = $\frac{24}{7}$

$\frac{1440}{420}$

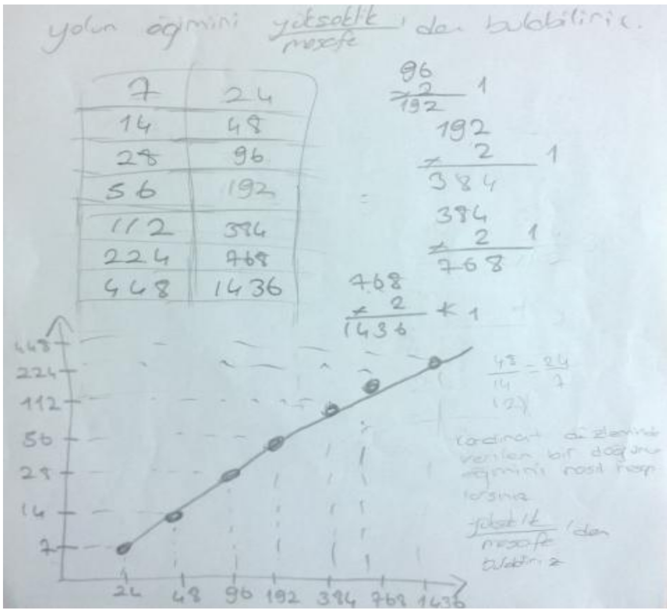
Evden yaylaya olan mesafe
Bisikletin şarjı ne kadar gitti
Gitirken ne kadar elektrik harcadığı

Ö4' ün grup arkadaşının çalışma kağıdından bir görüntü



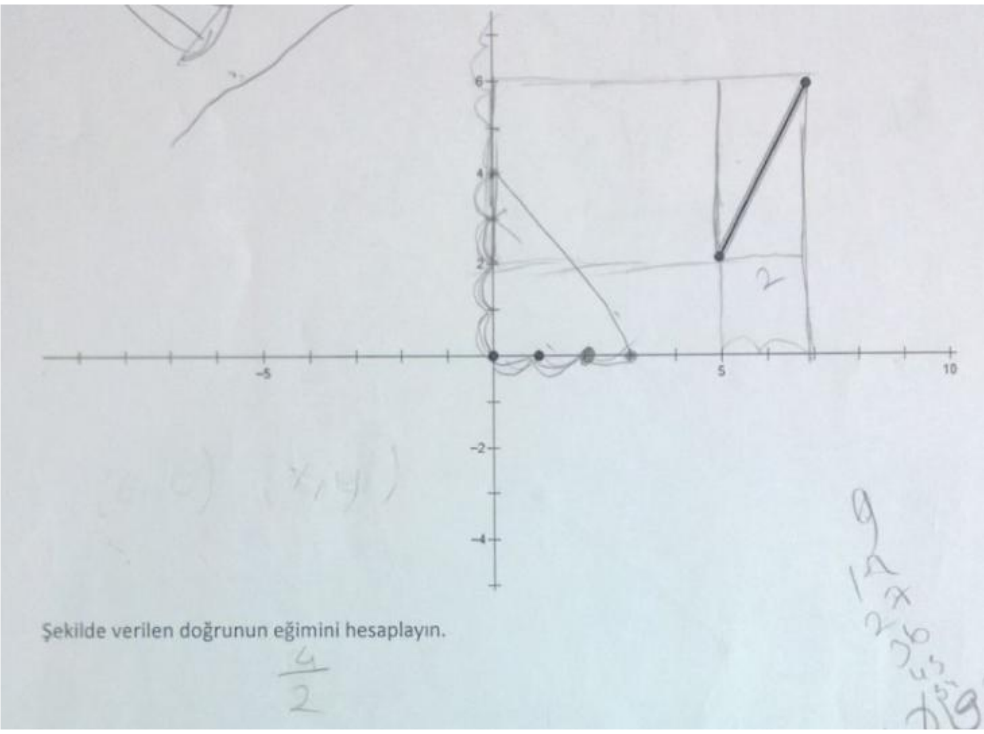
Daha sonra bu yayla yolu için yükseklik veyatay mesafe arasındaki doğrusal ilişkiyi gösteren grafiğin çizilerek eğim değişiminin gözlemlenmesi amacı doğrultusunda gelişen süreçte, tüm gruplar gibi Ö4' ün grubunun da grafiği başarıyla çizebildiği ve oluşan doğrunun eğimini hesaplayabildiği görülmüştür. Oluşturdukları grafikten yola çıkarak Ö4 ve grubu, koordinat düzleminde verilen bir doğrunun eğimini hesaplamak için yine yükseklik/yatay mesafeyi kullanabileceklerini belirtmiştir.

Ö4' ün grup çalışma kağıdından bir görüntü

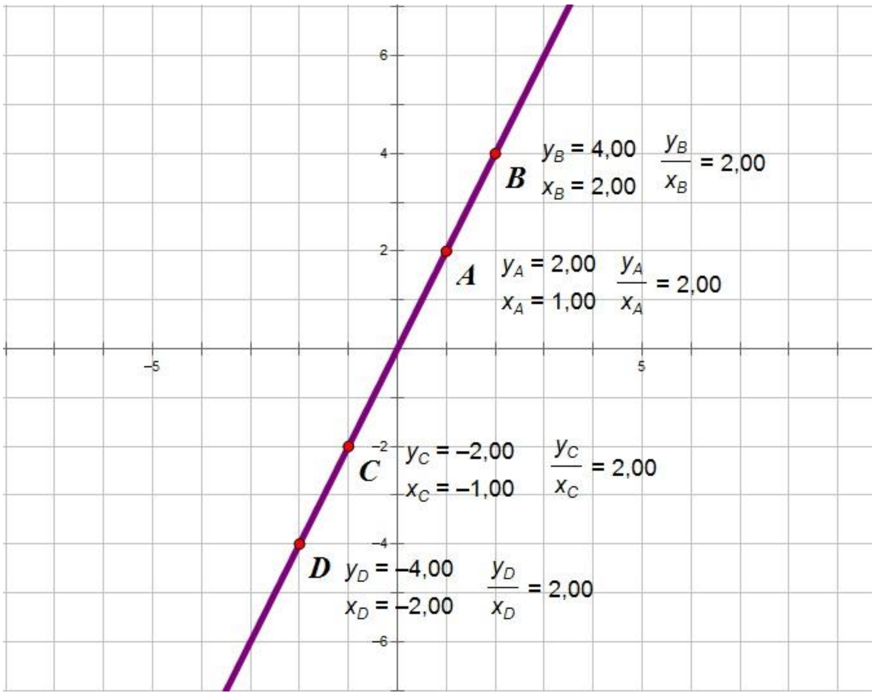


Yükseklik ile yatay mesafenin birbirine göre değişimini gösteren tabloyu da çizebildiği görülen Ö4' ün, bu bağlam probleminde oluşturduğu grafikten, eğimin aynı doğru için sabit kalışının yükseklik veyatay mesafe arasındaki sabit oranla ilişkisini fark ettiğine dair yeterli bir belirti görülmemiş ve bununla ilgili bilişsel sürecine yönelik derinlemesine sorgulama kendisiyle gerçekleştirilen son klinik görüşmeye bırakılmıştır. Öğrencilerin zihinlerindeki eğim bilgisini koordinat düzlemindeki bir doğru için yansıtmalarına fırsat verecek dikey matematikleştirme etkinliklerinde Ö4' ün bireysel çalışma kağıdında, yükseklik veyatay mesafe uzunluklarını eksenlerden yardım alarak hesapladığı dikkat çekmiştir.

Ö4' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



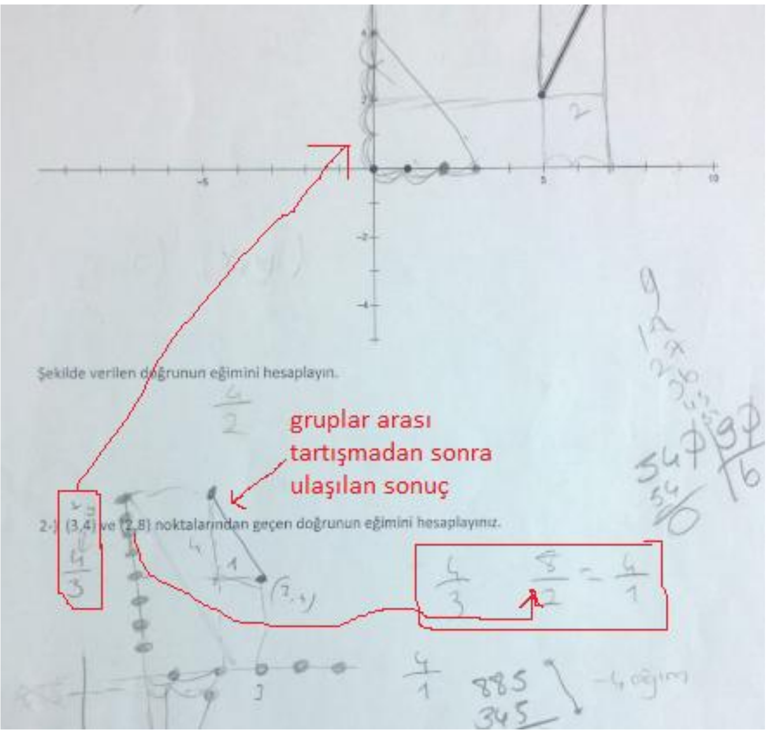
Hemen ardından sadece koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplamaları istendiğinde ise Ö4' ün verilen noktaların y koordinatını x koordinatına bölerek iki oranın eşit olmasını beklediği görülmüştür. Dolayısıyla bu öğrencinin yaylaya çıkma bağlamında oluşturdukları çizgi grafiğinde, yüksekliği "y ekseni" 'nde yatay mesafeyi ise "x ekseni" 'nde gösterdiği ve yüksekliğin yatay mesafeye oranının hep sabit kaldığını fark etmiş olabileceği düşünülmüştür. Bundan yola çıkarak Ö4' ün koordinat düzlemindeki herhangi bir doğru için onun üzerindeki herhangi bir noktanın y koordinatının x koordinatına oranının sabit olması gerektiğini genellemiş olabileceği düşünülmektedir. Ancak bu genelleme sadece orijinden geçen doğrular için geçerli olduğu için tüm doğrulara genellenmesi istenmeyen bir durumdur. Daha önceden Ö3 ile yapılan görüşmenin bulgularında da verilen aşağıdaki şekil, orijinden geçen bir doğru için bu genellemeyi görsel olarak da açıklaması açısından daha faydalı olacaktır.



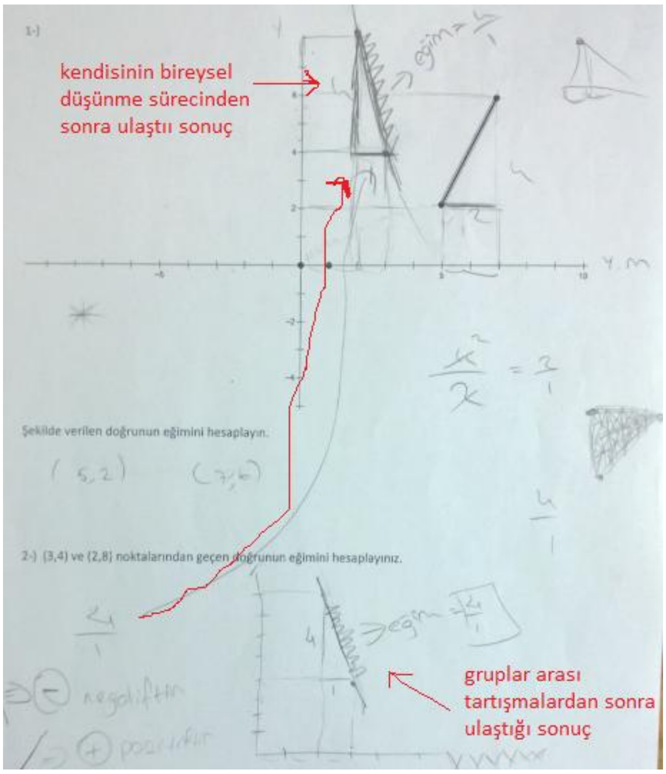
Şekil 8: Orijinden geçen bir doğru için bir noktanın ordinatının apsisine oranının sabitliği

Grup içi düşünme ve tartışma sürecinde koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplayamadığı görülen Ö4' ün, bu noktaların koordinat düzleminde yerlerini belirleyerek bahsedilen doğruyu çizerek eğimi hesaplama yönündeki akıl yürütmeyi ise ancak gruplar arası tartışmalardan sonra yapabilmesi dikkat çekici olmuştur. Hâlbuki grup arkadaşı gruplar arası tartışmalardan önce koordinat düzleminde verilen noktaların yerlerini belirleyerek doğruyu inşa etmiş ve eğimini hesaplamıştır. Bu durum, grup içerisinde iletişimin bu aşamada yeterli olmadığını düşündürmüştür.

Ö4' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

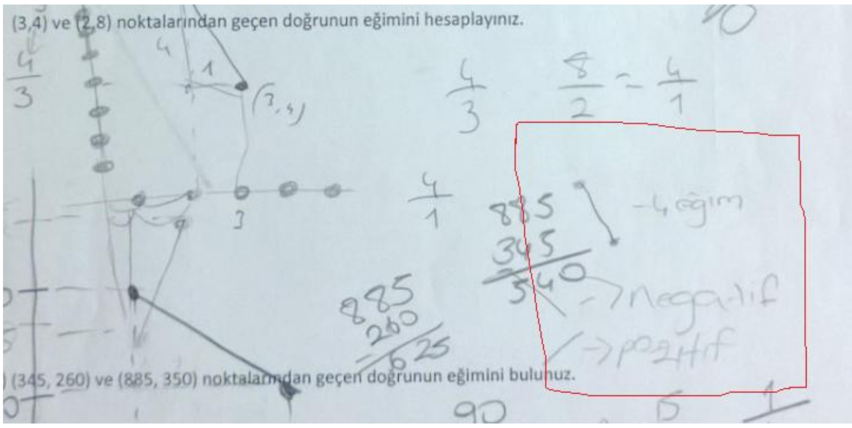


Ö4' ün grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdı

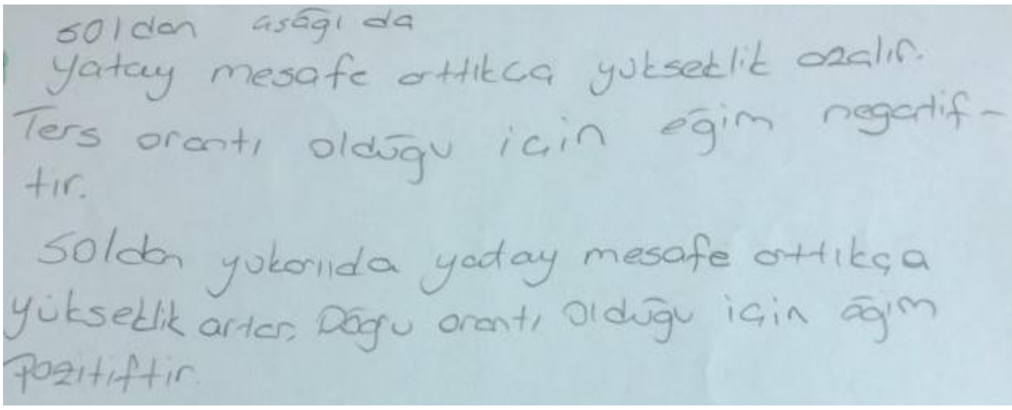


Bu sırada eğimin sonucunun negatif olup olamayacağına yönelik çıkan tartışma ile öğrenciler yeni bir düşünme sürecine girmişler ve bu sürecin sonunda, kendisine söz hakkı verildiğinde, Ö4' ün görsel açıdan düşündüğü ve "doğrunun sağa-sola yatık oluşu" ile eğimin negatifliğini belirleyebileceklerini ileri sürdüğü görülmüştür. Gruplar arası sınıf tartışmalarından sonra ise bahsedilen doğru üzerindeki noktalarda yükseklik ile yatay mesafe arasındaki ilişkinin doğru ya da ters orantılı oluşuna göre de eğimin negatifliğinin anlaşılabileceğini grup çalışma kağıdına not etmiştir.

Ö4' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

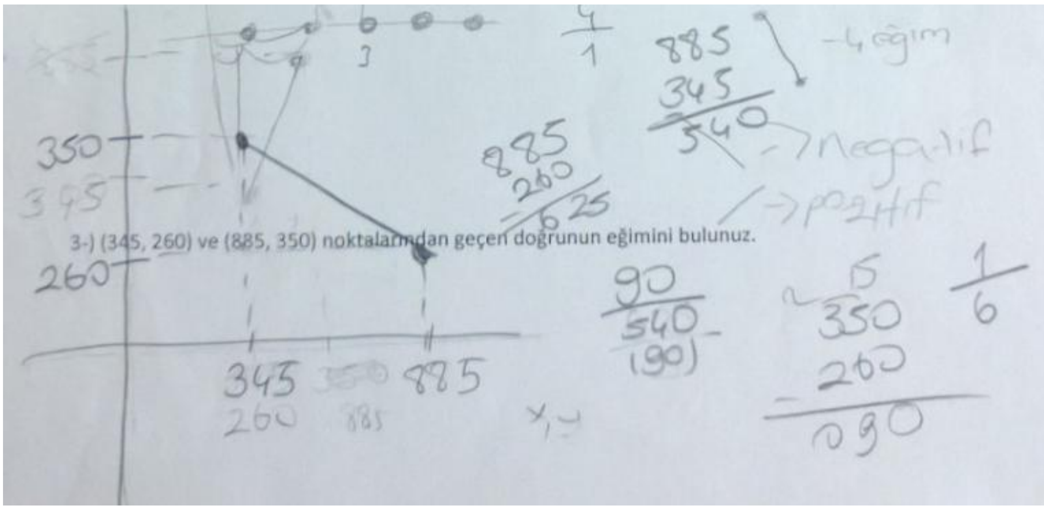


Ö4' ün grup çalışma kağıdından bir görüntü

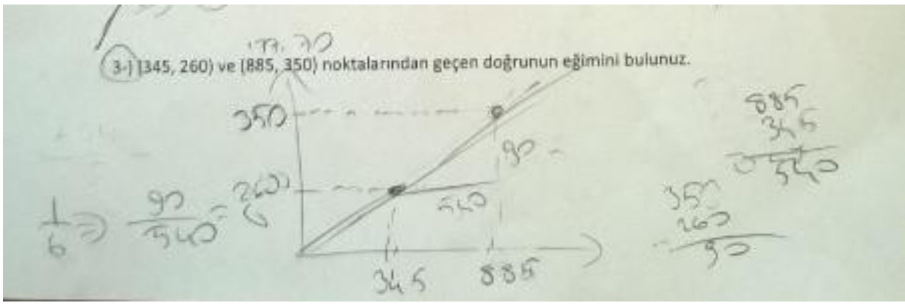


Ardından sayısal değerleri büyük koordinatlara sahip iki noktanın verilerek, öğrencilerin koordinat düzleminde görselleştirme yapmaksızın doğrunun eğimini hesaplamaları için onlara fırsat verilmiştir. Zihinde canlandırma yaparak ve bir önceki etkinlikten de yararlanarak koordinatlar arası fark ile yükseklik ile yatay mesafeyi bulabileceklerini keşfetmeleri için uygun ortam sağlanmaya çalışılmıştır. Ancak Ö4' ün bir önceki etkinlikte gruplar arası tartışmalarda farkettiği koordinat düzleminde görselleştirerek eğim hesaplamayı bu soru için de yansıtmış ve istenilen keşfe bireysel çalışma kağıdında ulaşamadığı görülmüştür. Ayrıca önceki etkinlikte koordinat düzleminde istenilen doğruyu görselleştirerek eğimi bulabileceği şeklinde akıl yürütebilen grup arkadaşının da, önce bir noktanın koordinatlarını, koordinat düzleminde görselleştirmeyi sağlamak amacıyla sadeleştirme teşebbüsünde bulunduğu ancak bu düşüncesini devam ettirmeyerek Ö4' e benzer bir şekilde hesaplama yaptığı ve koordinatlar arası fark keşfine ulaşamadığı dikkat çekmiştir.

Ö4' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

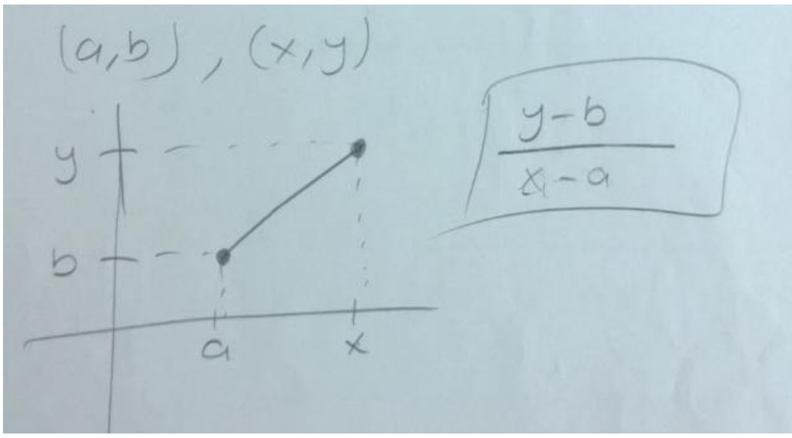


Ö4' ün grup arkadaşının bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

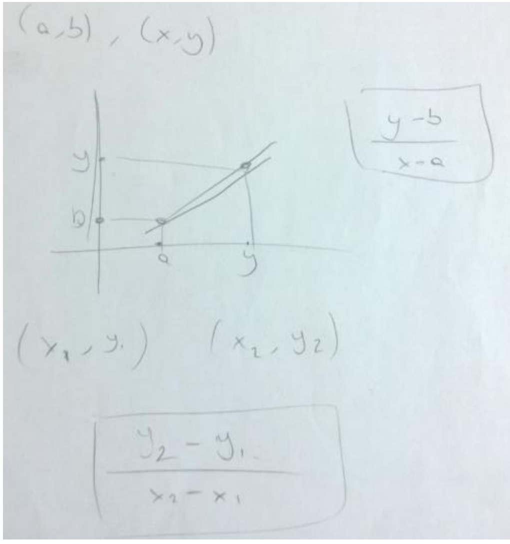


Gruplar arası tartışmalardan sonra koordinatlar arası fark ile yükseklik veyatay mesafeyi bulabileceğini fark ettiği görülen bu öğrencinin (a,b) ve (x,y) noktalarından geçen doğrunun eğimini cebirsel olarak genelleyebildiği de görülmüş olmasına rağmen gruplar arası tartışmalarla elde edilen (x_1,y_1) ve (x_2,y_2) koordinatlarına sahip noktalardan geçen doğrunun eğimi için varılan genellemeyi not etmediği dikkat çekmiştir. Grup arkadaşının ise kendisinin oluşturduğu cebirsel genellemenin yanında aynı zamanda y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesini de not ettiği görülmüştür.

Ö4' ün bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

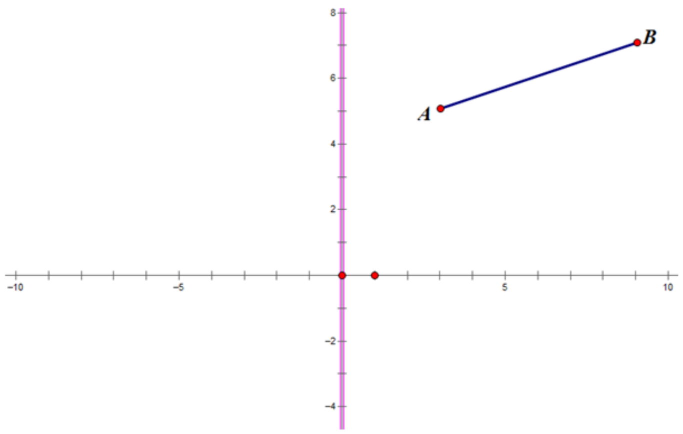


Ö4' ün grup arkadaşının çalışma kağıdından bir görüntü



Ö4 ile Gerçekleştirilen 3. Klinik Görüşme

Ö4 ile gerçekleştirilen görüşmede koordinat düzleminde görsellenen bir doğrunun eğimini eksenler yardımıyla yükseklik veyatay mesafeyi bularak hesaplayabildiği görülmüştür. Ancak doğrunun yüksekliğini belirlemede sıkıntı yaşaması, daha sonra araştırmacının uyarılarıyla bu yanlışını fark ederek düzeltmesi dikkat çekmiştir.



Görmüş olduğun AB doğrusunun eğimini hesaplayabilir misin?

G: *Evet, hadi hesapla.*

Ö4: *Sessizlik…(kağıt üzerinde önce A ve B noktalarının eksenlerde hangi koordinatlara sahip olduklarını bulmak için noktalardan eksenlere doğru dikmeler indirdi ve x ve y eksenleri üzerinde o koordinatlara denk gelen sayıları yazdı. Eğimi hesaplayabilmek için AB doğrusunu hipotenüs kabul eden dik üçgen ortaya çıkmış oldu). Buraya mı yazayım?(sorunun altındaki boş kısmı gösteriyor).*

G: *Her yere yazabilirsin. İstediğin her yeri kullanabilirsin.*

Ö4: *7/6. Yükseklik/ yatay mesafe.*

G: *Yüksekliği kaç?*

Ö4: *7.*

G: *Bu yolun yüksekliği 7 mi?*

Ö4: *Evet.*

G: *Yatayı kaç?*

Ö4: *Yatayı 6.*

G: *Peki, yatayda böyle bir şey yaptın da(yatayda iki nokta arasındaki mesafeyi alırken, yükseklikte direkt x eksenine olan uzaklığı esas aldı) yükseklikte neden böyle bir aralık koymadın?*

Ö4: *Bunu alsaydım buradan daha önceden gidilmiş bir yol olmayacaktı, bu yolu hesaplayamazdık. Buradan belli bir, yani A noktasından B noktasına olan yükseklik.*

G: *A noktasından B noktasına kadar olan yüksekliği mi hesapladın sen şu anda?*

Ö4: *Direkt B noktasını hesapladım.*

G: *Ama A noktasından B noktasına kadar olanı mı hesaplaman lazım?*

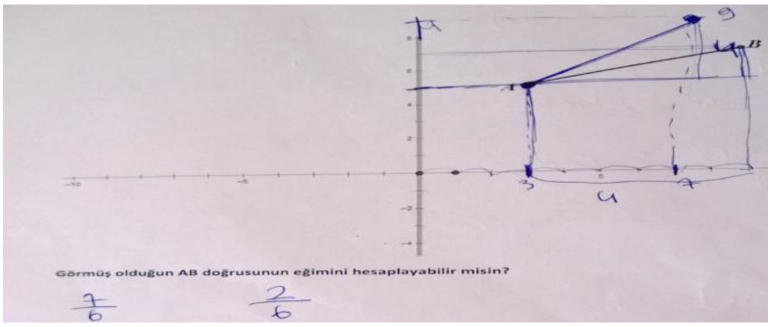
Ö4: *Evet.*

G: *E öyle hesapla o zaman.*

Ö4: *Burası 4(sayıyor y ekseni zerindeki noktaları). Yüksekliği 2.*

G: *Hı hı.*

Ö4: *Yatay mesafesi 6 ile..6 oluyor o zaman.. A' dan B' ye olan yükseklik. (2/6 olarak kağıda yazdı)*



Ardından sadece koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini yine koordinat düzleminde görselleştirerek hesaplayabilen Ö4' ün eksenlerden yardım almaksızın yükseklik veyatay mesafeyi belirlemekte zorlandığı, genellikle eksenler üzerindeki aralıkları tek tek saydığı görülmüştür. Bu da öğrencinin eğimin bağlı olduğu uzunluk değişkenlerini koordinatlar arası fark ile hesaplayacağını henüz içselleştiremediğini ortaya koymaktadır.

G: *Peki, bu işlemi sen bu şekilde yaptın ya, ben sana iki tane nokta verseydim…hatta bu noktaları şimdi vereyim. Yazabilirsin; 3'e 5 ve 7' ye 9 noktaları(bu sırada yazıyor).*

Ö4: *Bulayım mı?*

G: *Evet.*

Ö4: *Şimdi…*

G: *Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplamanı istiyorum.*

Ö4: *3 ile 7, x oluyor. Onları buluruz önce. 3, 5, 7, 1,2,3,4(Mırıldanıyor). Hocam kandırdınız beni! Aynı çıkıyor(noktaların yerlerini belirledi doğruyu çizdi ve x ekseninde yatay mesafeyi buldu. Yüksekliği hesaplamadan eğimin bir öncekiyle aynı sonucu vereceğini düşündü).*

G: *Nasıl? Aynısı mı çıkıyor?*

Ö4: *Evet. Burası 7' ye 9. Burası olmadı…(soruya bakıyor ve toparlamaya çalışıyor). (Yatay mesafeyi zaten hesaplamıştı. Şimdi de yüksekliği y ekseninde 5 ile 9 arasındaki mesafeyi hesaplayarak buldu).*

G: *Şimdi. Eğimi hesapla.*

Ö4: *Bulduk.*

G: *Kaç?*

Ö4: *1,2,3,4 burası. Şimdi burası 9 oluyor yüksekliği. (kalemle iki nokta arasındaki yüksekliği, dikey mesafeyi doğru çizdi).*

G. *Orası ne?*

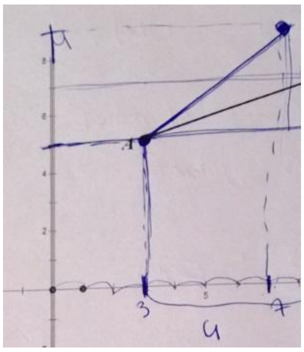
Ö4: *Buradan yüksekliği 3, hayır 4 oluyor. Buradan tam yerden yatay mesafeden yüksekliği 9 oluyor. Yatay mesafesi de 4 oluyor.*

G: *Peki eğim kaçtır? Eğimi de yazabilir misin bize? Yani bu doğrunun eğimi eşittir şu.*

Ö4: *Buraya yazayım. Bu yükseklik(4 yazıyor göstermeden). 4 bölü yatay mesafe. 4(4/4 yazdı).*

G: *4/4 yani?*

Ö4: *1.*



Kendisine sayısal değerleri büyük olan koordinatlara sahip iki nokta verildiğinde, yine koordinat düzleminde noktaları ve doğruyu görselleştirip yüksekliği veyatay mesafeyi bulabildiği ve daha sonra eğimi hesaplayabildiği görülmüştür. Eğimi, koordinat düzlemini kullanmaksızın hesaplamayı hiç aklına getirmemiş olduğu görülen Ö4' ün oluşturduğu doğrunun sola yatık oluşunu görünce "ters mi yaptım" tepkisini vermesi dikkat çekmiştir. Bu öğrencinin dengesinin bozulmasına rağmen eğimin negatif olabileceği yönünde hiçbir fikir yürütememesi, onun bir doğrunun eğiminin negatifliğini ne görsel olarak ne de ders içerisinde ulaşılan yükseklik ile yatay mesafe birbirine göre ters orantılı ilişkiden anlamlandıramamış olduğunu ortaya koymuştur.

G: *Sen burada eğimi yine koordinat düzleminde çizerek gösterdin. Yatay mesafe ve yüksekliği çizerek buldun ve gösterdin. O şekilde soruyu yaptın. Peki koordinatları şu şekilde değiştirsek: 685,350 ve 385, 850(öğrenci yazıyor). Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplayabilir misin?*

Ö4: *Hesaplayabilirim.*

G: *Nasıl?*

Ö4: *Zaten derste de yapmıştık.*

G: *Ne yapmıştık?*

Ö4: *Benzerlerini değil mi?*

G: *Hatırladığın her şeyi yapabilirsin.*

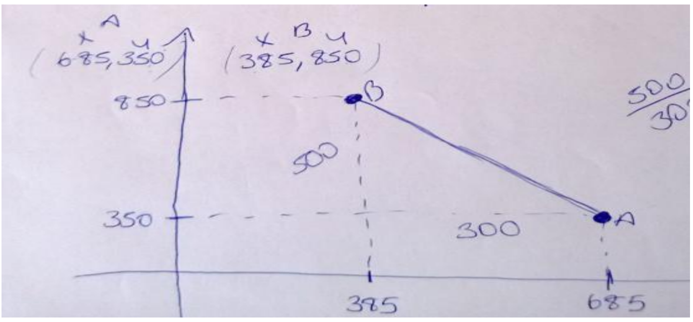
Ö4: *Bir koordinat düzlemi çizelim. Bunlar(koordinatlara bakıyor) artı olduğu için(koordinat düzleminde 1. Bölgeyi çiziyor sadece). x,x (koordinatlardan apsisleri belirledi). y(ordinatları belirledi). burası 685, burası da 385(eksenler üzerinde apsisleri nokta ile gösterdi). Bu y de 350, burası da 850. Ters mi çizdim ben bunu?*

G: *Yok hayır ters çizmedin tamam.*

Ö4: *Evet doğru. Bu birinci nokta: A noktası diyelim buna. Burası da 385' e 850: B noktası diyelim(koordinatları verilen noktaları koordinat düzleminde belirledi). Bununla birleştirelim(AB doğrusunu elde etti).*

G: *Evet…*

Ö4: *Yüksekliği burası: 500. Yatay mesafesi de 300. 500/300.*



G: *Eğim budur diyorsun?*

Ö4: *Evet.*

G: *Peki ufak bir ayrıntıyı unuttuğunu düşünüyor musun?*

Ö4: *Ufak bir ayrıntı derken?*

G: *Eğim 500/300. Değil desem ben sana? Her şeyin doğru ama eğim 500/300 değil desem ben?*

Ö4: *Ters mi yaptım?*

G: *Yok.*

Ö4: *Neden değil o zaman?*

G: *…neyse tamam. Peki sen hep koordinat düzleminde iyi ya da kötü göstererek buluyorsun eğimi. Koordinat düzlemini kullanmaksızın yapabilir misin? Yani her zaman koordinat düzlemini kullanmak zorunda mısın? Ne yaptığını anlatabilir misin bana?*

Ö4: *Öğretmenim siz bana iki nokta verdiğinizde bu iki noktanın neresi olduğunu buluyorum. Mesela ilk verdiğiniz nokta A noktası ise A noktasını buluyorum, ikinci verdiğiniz nokta B noktası ise B noktasını buluyorum. Bunları koordinat düzleminde göstermiştik. Oradan yüksekliği veyatay mesafesini buluyorum. Buradan yüksekliği yukarıya yazıp, yükseklik/ yatay mesafe.*

Koordinat düzleminde bir doğruyu görselleştirmeksizin eğimi hesaplayamadığı görülen öğrenciden cebirsel bir genellemeye ulaşması istendiğinde ise derste kullandıklarından daha farklı harfler kullanması ve y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesinden haberinin olmadığını belirtmesi, onun herhangi bir formülü ezberlemediğini ortaya koymuştur. Y koordinatları arasındaki farktan yükseklik uzunluğunu, x koordinatları arasındaki farktan yatay mesafeyi bulacağını dile getirebilen Ö4' ün bu süreçte "büyük sayıdan küçük sayıyı çıkaracağını" ifade etmesi ise onun bu genellemeyi henüz tam olarak anlamlandıramadığını düşündürmüştür ki bu şekilde düşünmesi onun sonucu negatif olan bir eğim ölçüsü bulamamasına neden olmaktadır.

G: *Yükseklik/ yatay mesafeyi yazıyorsun. Peki ben sana o zaman şöyle sorayım: cebirsel bir formda yazabilir misin bunu? Yani harfler kullanarak. Mesela a,b noktası ve c,d noktası gibi. Direkt "hocam eğimi bu şekilde hesaplarız" diye biliyor musun?*

Ö4: *A,B ve C,D mi?*

G: *Evet yaz istersen. Arkaya yaz.*

Ö4: *(A, B) ve (C,D) olarak yazıyor. Bu x,y bu da x, y(harflerin üzerine bunları yazdı). A noktasından C noktasını çıkarırsak yatay mesafeyi bulmuş oluruz.*

G: *Yaz o zaman.*

Ö4: *Nasıl yazayım?*

G: *Normal dümdüz yaz.*

Ö4: *A-C=yatay mesafe. B noktasında da D noktasını çıkartırsak…Yok tam tersi. Şimdi hangisi büyükse. Mesela şimdi D noktası büyükse D noktasından B noktasını çıkartırız ve yüksekliği buluruz.*

G: *Peki o zaman hep büyük olandan küçük olanı mı çıkaracaksın?*

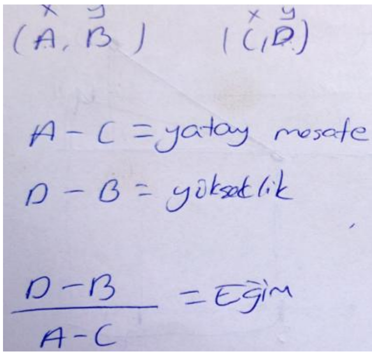
Ö4: *Yani..(onaylıyor anlamında başını salladı). B noktası ile D noktası aralarındaki mesafe.*

G: *Hımm aralarındaki mesafe diyorsun. Tamam yaz onu da oraya.*

Ö4: *B-D= yükseklik.*

G: *Eğim? Eğim =*

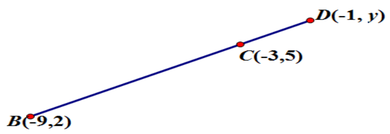
Ö4: *Eğim. D-B/A-C=eğim.*



G: *Peki şöyle bir şey sorsam:* y_1-y_2/x_1-x_2 *diye bir formül gördün mü daha önce? Denk geldin mi hiç böyle bir şeye?*

Ö4: *(Başını hayır anlamında salladı).*

Tüm görüşmelerde ve öğretim sürecinde işlem yeteneğinin yeterli düzeyde olduğu dikkat çeken bu öğrencinin içler dışlar çarpımı tekniği ile orantı kurup bilinmeyeni bulabilme, rahat bir şekilde kesirlerde sadeleştirme yapabilme, genellemeyi cebirsel olarak ifade etme gibi durumlarda zorlanmadığı görülmüştür. Ancak açık uçlu testteki performansında koordinat düzlemine tam olarak sahip olmadığı ve doğru denkleminde ise büyük sıkıntılar yaşadığı dikkat çeken bu öğrencinin doğrudan eğimin hesaplanmasını gerektirmeyen bir soruda, eğimin aynı doğru üzerinde alınan noktaya göre değişmeyeceğini içselleştiremediği görülmüştür. Bahsedilen doğrusal görsel üzerinde önce, eğimin yansımalarından olan dikliğin değişeceğini belirten Ö4' ün daha sonra "eğim aynı kalacak" şeklinde fikrini değiştirmiş olması, onun günlük yaşamdaki kullanım ile matematiksel kavram olarak eğim arasında çatışma yaşadığını düşündürmüştür. Ayrıca bu öğrencinin bir doğrusal görsel üzerindeki her noktada yüksekliğin aynı olacağını düşünmesi ile yüksekliği belirlemede sahip olduğu yanılgı bir kez daha açık bir biçimde görülmüştür. Onun günlük bir yaşam durumunu matematikleştirmesi sırasında, informal olarak edindiği bir dağ yüksekliğinin değişmeyeceği bilgisinin, bir doğru üzerinde alınan bir noktaya göre yüksekliğin(diğer bir deyişle dikey mesafenin) değişeceğini anlamlandırmasına ket vurduğu düşünülmektedir.



Bu doğru üzerinde 3 nokta verilmiştir. D noktasının y koordinatını bulabilir misin?

Ö4: *D noktasının y koordinatını…koordinat düzleminde olsa bulabilirdik.*

G: *Nasıl bulurdun koordinat düzleminde?*

Ö4: *Şimdi koordinat düzleminde bu noktalar belli bir yere denk gelecekti. Onların aralarındaki mesafeyi sayarak… mesela -9,2 noktası, C ise -3,5 noktası, D de -1,y noktası. Bunların hepsini çizdiğimizde bunlar koordinat düzleminde bir yere gelecekti. Şimdi B' nin y noktası 2, C' nin y noktası 5, D' nin y noktasını bilmiyoruz. Bunları koordinat düzleminde belli bir yere getirebilirsek bulabiliriz.*

G: *Peki şu anda koordinat düzleminde değil de…yani koordinat düzleminde gibi hayal de edebilirisin zaten koordinatlarını vermiş noktaların. Noktaların koordinatlarını vermişse koordinat düzlemi vardır. Burada senden biraz daha düşünmeni istiyorum. Ne kullanabilirsin y' yi bulmak için? Sana ne yardımcı olabilir? Mesela bu soru sınavda çıktı diyelim ne yaparsın?*

Ö4: …

G: *Bu üç noktanın ortak özelliği ne?*

Ö4: …

G: *Önce onu sorayım sana. Belki bir şeyler anımsatır?*

Ö4: *Bu üç noktanın ortak özelliği üçünün de x koordinatlarının hepsi eksi.*

G: *O şekilde sormuyorum da, yani sana hiç bu koordinatları vermeseydim…B,C, D noktalarının ortak özelliği ne?*

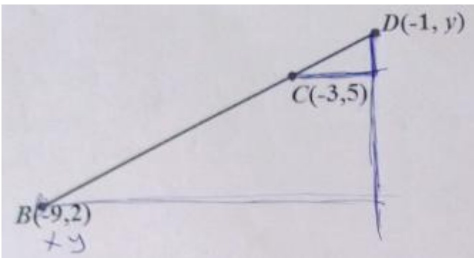
Ö4: *Aynı doğru üzerinde bulunmaları.*

G: *Peki aynı doğru üzerinde olmaları sana ne gibi bir fayda sağlayacaktır? Bu ortak özellik sana bir şeyler çağrıştırabilir sanki.*

Ö4: *Mesela şimdi buraya bir yükseklik indirsek hepsinin yüksekliği aynı olur.*

G: *İndir.*

Ö4: …*(bu doğruyu hipotenüs kabul eden dik üçgeni oluşturdu ve C noktasından da B' den geçen taban paralel çizdi). B' nin de yüksekliği aynıdır. C' nin de yüksekliği buna diktir(D' den inilen doğruya diktir demek istiyor).*



G: *Şimdi? Bak koordinat düzlemi gibi de düşünebilirsin sen bilirsin?*

Ö4: *…yükseklikleri aynı işte!*

G: *Yükseklikleri aynı derken?*

Ö4: *Hepsi aynı nokta üzerinde bulunuyorlar. Yükseklikleri aynı yerde. Başka…*

G: *Nasıl bulabilirsin?*

Ö4: *Nasıl bulabilirim..?*

G: *Mesela sen böyle bir yolda yürüdüğünü düşün ya da arabayla gittiğini. Sen yolda giderken bir şeyler değişir, bir şeyler değişmez. Bu sana yardımcı olabilir.*

Ö4: *Mesela B noktasının dikliği ile C noktasının dikliği farklıdır.*

G: *Farklı mıdır diklikleri? Neden?*

Ö4: *Mesela gittikleri yol aynıdır. Ama D noktasında duran bir kişi ile B noktasında duran bir kişi farklıdır. D noktasına çıktığı için…D noktasının durduğu yer daha diktir çünkü orası tam tepesidir. Ama B' de ise tam aşağıdadır. B başlangıçtır D bitiştir.*

G: *Bu ikisinin dikliğinden kastın nedir senin?*

Ö4: *Diklikten kastım yani nasıl anlatsam..?*

G: *Nedir diklik?*

Ö4: *Yani ikisinin de dikliği aynıdır aslında ama sadece ikisinin de hepsi aynı nokta üzerinde bulunuyorlar ama bulundukları yerler farklı olduğu için…Eğimleri aynıdır!*

G: *Eğimleri aynıdır. Eğimlerinin aynı olmasını kullanabilir misin?*

Ö4: *Yükseklik yatay mesafe…bunun yüksekliği ile bunun yatay mesafesi farklıdır.*

G: *Mesela ne yapabilirsin buradan? Eğimleri aynıdır bu bir ortak özellik olabilir.*

Ö4: …

G: *Eğimleri aynıysa bunu nasıl kullanacaksın?*

Ö4: *Eğer bize belli bir sayı verseydi, yüksekliği bulurduk, yatay mesafeyi bulurduk ve D,C noktalarının eğimini bulurduk.*

G: *Peki sana yeterince sayısal değer vermemiş mi?*

Ö4: *Sayısal değer vermiş ama sadece koordinat düzleminde olan belli bir nokta vermiş. Mesela D noktasından B noktasına olan uzunluğu vermemiş.*

G: *Eğimi bulmak için sana D' den B' ye olan uzunluk mu lazım?*

Ö4: *Hayır. D' den B' ye olan uzunluk lazım. Hepsinin aralarındaki mesafe lazım bir de yükseklik lazım. Yatay mesafe lazım.*

Bu öğrencinin bahsi geçen doğruya göre koordinat düzlemi oluşturmaya çalıştığı ancak çok zorlandığı görülmüş ve bu sırada araştırmacının sürekli olarak uyarılarına maruz kalması dikkat çekmiştir. Ö4' ün koordinat düzleminde görselleştirmeksizin yükseklik veyatay mesafeyi bulamaması, eğimin bağlı olduğu uzunluk değişkenlerini koordinatlar arası farktan elde edeceğini içselleştiremediğini ve cebirsel genellemeyi de ne ezbere ne de anlamlandırarak kavrayamadığını düşündürmektedir.

G: *Peki D ile B arasındaki yatay mesafeyi bulabilir misin? Yüksekliği bulabilir misin?*

Ö4: *Koordinat düzlemi çizersem bulabilirim.*

G: *Çiz. Çiz ya da çiziyormuşsun gibi hayal et. Üşenmiyorsan öyle yapabileceksen çiz.*

Ö4: *(Kağıdın boş bölümüne koordinat düzlemi çizmeye başladı)*

ilk önce B noktası.C..(yerleştiriyor noktaları). Bu -1 olduğu için D noktasının Y koordinatını bilmiyoruz.

G: *Onu soruyor zaten. Onu da göster orada. Aynı doğru üzerinde dikkatli ol. İstersen önce doğrunu çiz.*

Ö4: *Doğru böyle. Zaten aynısı çıktı.*

G: *Uzat biraz istersen buradaki gibi.*

Ö4: *...*

G: *Mesela -1' e y noktası nerede şu anda?*

Ö4: *-1' e y noktası şu anda 7 üzerinde(doğrunun uzantısının y eksenini kestiği noktayı gösterdi).*

G: *-1 nerede?*

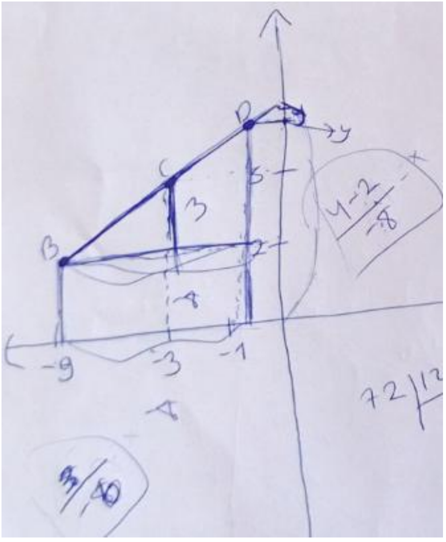
Ö4: *Burada.*

G: *O noktayı nasıl göstereceksin doğrunun üzerinde?*

Ö4: *Nasıl göstereceğim?*

G: *Bunları nasıl gösterdiysen onu da öyle göstereceksin.(-1' i doğru gösterirken y' yi doğrunun uzantısının kestiği yer olarak gösterdiği için sıkıştırılıyor öğrenci).*

Ö4: *Göstereceğim ama tam burada olduğu için(y ekseni üzerinde doğrunun kestiği yeri gösteriyor).*



G: *Orada mı -1?*

Ö4: *-1 burada.*

G: *Tamam ama orası y noktası ben senden -1' e y noktasını istiyorum. Yani x' i -1, y' sini bilmiyorsun.*

Ö4: *Şöyle…(D noktasından -1' e indiriyor dikmeyi).*

G: *y?*

Ö4: *O da şöyle(bu sefer doğru gösterdi).*

G: *Burası neymiş?*

Ö4: *y.*

G: *y neresi?*

Ö4: *Şurası(doğrunun y eksenini kestiği noktayı gösteriyor).*

G: *Burası ne o zaman?(-1' e y noktasının doğru y koordinatını gösteriyor)*

Ö4: *(yine doğrunun y eksenini kestiği yeri gösteriyor) burası y' nin bittiği yer işte.*

G: *-1' e y noktası.*

Ö4: *Burası -1' e y noktası.*

G: *Peki neden buraya y diyorsun o zaman?*

Ö4: *Çünkü buraya -1 dedik. Burası -1' e y noktası. O zaman burası y olur(doğru gösterdi).*

G: *O zaman burası y noktası burası değil.*

Ö4: *Evet.*

Daha sonra eğimin doğru üzerinde alınan noktalara göre aynı oluşunu yine araştırmacının uyarılarıyla kullanmaya çalışan Ö4' ün, işlemsel yeteneğinin iyi olması ile ilerlediği görülmüştür. Ancak dışsal uyaranların çok sık olması sanki bir yönergeyi uyguluyormuş izlenimi yaratmış ve bu sebeple içselleştirerek öğrenmeyi sağlayamadığı sonucuna varılmıştır.

G: *Ne demiştin en son onu hatırlayalım. Eğimler aynı olur demiştin.*

Ö4: *Eğimler aynı olur demiştim.*

G: *Yatay mesafe ve yükseklikten buluruz demiştin. Yatay mesafe ve yüksekliği de koordinat düzleminde çizersek bulabiliriz öğretmenim demiştin.*

Ö4: *Şimdi. O zaman B noktasından tam D' nin bittiği yer yatay mesafe. Burası da -9 eksi -1, -8 olur. Burası -8 oluyor(çizdiği yatay mesafenin üzerine yazdı). Burası yüksekliği: 0' dan y' ye kadar olan mesafe oluyor. Yani yükseklik y olmuş oluyor.*

G: *Hı hı.*

Ö4: *Eğim y=-8 oluyor D noktası için.*

G: *Hımm. -8 oluyor. Peki o yükseklik y mi oluyor?*

Ö4: *Burası mı?*

G: *Şimdi sen yükseklik burasıdır dedin ya. Peki sen hangi doğrunun eğimini hesapladın şu anda?*

Ö4: *...*

G: *Hangi iki noktayı alarak eğim hesapladın?*

Ö4: *D noktasının yüksekliğini aldım.*

G: *Hı hı.*

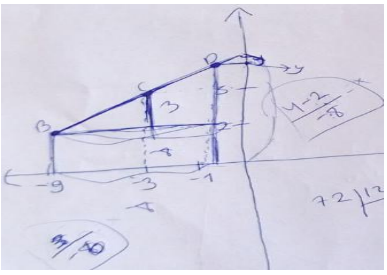
Ö4: *Bir B noktasının…*

G: *B ve D noktaları arasındaki eğimi hesapladın doğru mu?*

Ö4: *Evet.*

G: *Peki B ve D noktaları arasındaki doğrunun eğimini hesaplarken yatay mesafe ve yükseklik nereleri?*

Ö4: *Yükseklik D' den B' ye kadar olan yer. Şurası oluyor(doğru gösterdi bu sefer). Yani y-2 oluyor. Yatay mesafe de -9' dan -1' e kadar olan mesafe -8 oluyor. (bu sırada y-2/-8 yazdı)*



Ö4' ün doğru üzerinde herhangi iki noktayı ele alarak eğimi hesaplayabileceğini içselleştiremediğinin görülmesi, onun eğimi doğru üzerindeki her noktada yüksekliğin yatay mesafeye sabit oranı olarak anlamlandıramadığı yorumunu da güçlendirmektedir.

G: *Tamam doğru. Bu eğim öyle mi? Eğim ne? Eğimin ne olduğunu biliyor musun sen?*

Ö4: *Evet.*

G: *Tamam kaç eğim?*

Ö4: *Hıı öyle bilmiyorum.*

G: *Bulabilir misin?*

Ö4: *...*

G: *Şimdi sen eğim dedin ama burada bir bilinmeyen var doğru mu?*

Ö4: *(evet anlamında başını salladı)*

G: *Eğimin değerini biliyor musun sen? Hani eğim her noktada eşit olur dedin ya. Bulabilir misin eğimi?*

Ö4: *Şimdi bulamam. Yani bilinmeyen olduğu için bulamam.*

G: *Burada 3 nokta var ve sen iki noktayı aldın, eğimi hesapladın. Peki başka iki noktayı alsaydın eğimi hesaplayabilir miydin?*

Ö4: *Bilinmeyen olmasaydı hesaplayabilirdim.*

G: *Bilinmeyenin olmadığı iki nokta var mı?*

Ö4: *Var. B ve C noktası.*

G: *Onları kullanabilir misin?*

Ö4: *Kullanırım.*

G: *Kullansan, nasıl devam edeceksin?*

Ö4: *Kullandıktan sonra eğim hepsinde aynı dediğim için kullanabilirim belki.*

Ö4' ün eğimi çağırıp kullanmasıyla sonuca ulaşabileceği problem durumuna, araştırmacının uyarıcı soruları olmadan eğimi çağıramamış ve aynı zamanda daha sonradan da olsa eğimin bahsedilen doğru üzerinde sabit kalacağını söylemesine rağmen bu sabitliği kullanma yönünde çabasını ancak araştırmacının dışsal müdahaleleriyle gösterebilmiş olduğu görülmüştür. Ayrıca bu öğrencinin koordinat düzlemini bir araç olarak kullandığı ancak ondan bağımsız olarak, diğer bir deyişle onu zihninde oluşturarak, eğimi hesaplayamadığı görülmüştür.

G: *Peki, koordinat düzleminde çizmeden bu soruyu yapamaz mıydın sen?*

Ö4: *Yapardım aslında.*

G: *Nasıl yapardın?*

Ö4: *Eğer bunu(doğruyu) doğru çizmiş olsaydım o zaman onun geldiği yeri bulup,…*

G: *Peki hiç koordinat düzlemini çizmeseydin. Eğimler eşit olacak dedin ya eğimlerin eşit olmasından yararlanarak nasıl bulabilirdin bunu?*

Ö4: *…*

G: *Veya bulabilir miydin?*

Ö4: *Şimdi… ııı… Ben y' nin 6' ya eşit olduğunu buradan buldum. İçler dışlar çarpımı yaparak. Koordinat düzlemi olmasa bulamazdım belki.*

Sonuç olarak Ö4' ün eğimin, bağlı olduğu uzunluk değişkenlerine göre değişimini, geliştirilen dik üçgensel modeli dinamik biçimde kullanarak yorumlayabilmiş olmasına rağmen aynı doğru üzerinde alınan her noktada bu iki değişkenin doğru orantılı değişimini farkedememiş ve de gruplar arası sınıf tartışmalarından sonra da anlamlandıramamıştır. Eğimi, yükseklik/yatay mesafeden hesaplayabildiği ancak bir oran olarak yapılandıramadığı sonucuna varılan bu öğrencinin, eğimin koordinat düzleminde bir doğru için yeniden düzenlemesi sürecinde ise 3 yanılgısı ortaya çıkmıştır;

1-) Yüksekliğin aynı doğru üzerinde alınan noktalara göre değişmeyeceği yanılgısı, ara ara ortaya çıkmıştır.

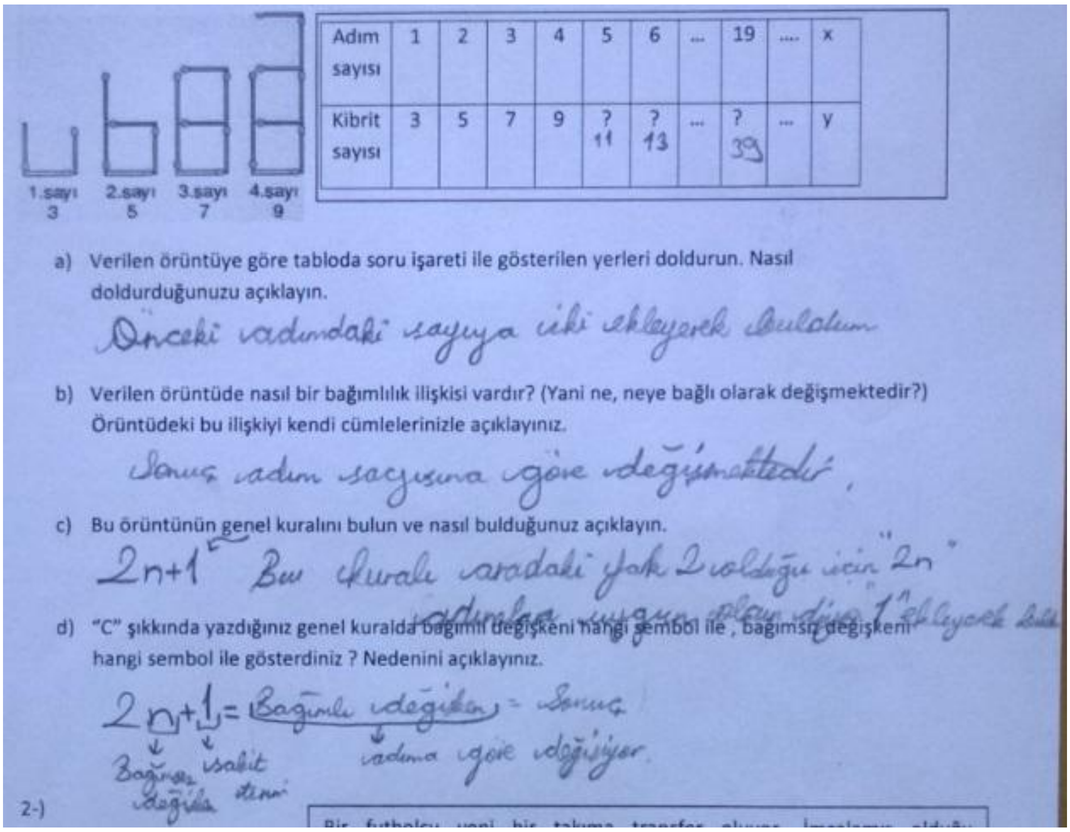
2-) Koordinatları verilen iki noktadan geçen bir doğrunun eğimini hesaplarken yüksekliği veyatay mesafeyi bulmak için daima büyük koordinattan küçük koordinatı çıkaracağı yanılgısı tüm süreç boyunca devam etmiştir.

3-) Koordinat düzleminde alınan bir doğru üzerinde alınan bir noktanın ordinatının apsisine oranının sabit olacağı yanılgısıdır. Sadece orijinden geçen doğrular için doğru olan bu genellemeyi Ö4' ün öğrenme sürecinde düzeltmeyi başardığı görülmüştür.

Koordinat düzlemindeki bir doğrunun eğimini, doğruyu görselleştirmeksizin hesaplayamadığı görülen Ö4' ün herhangi cebirsel bir formül ezberlemediği ve bunun yanısıra yüksekliği yatay mesafeye bölerek eğim bulmayı kullandığı görülmüştür. Herhangi bir doğrunun eğimini hesaplarken "y koordinatlarını birbirinden çıkar yüksekliği bul, x koordinatlarını birbirinden çıkar yatay mesafeyi bul ve yüksekliği yatay mesafeye böl" şeklinde bir algoritma kullanmadığı, koordinat düzleminde görselleştirerek sonuca ulaştığı görülen bu öğrenciden cebirsel bir genelleme yapması istendiğinde ise buna benzer bir algoritmayı ifade etmesi dikkat çekmiştir. Ö4, bir doğrunun eğimi bilgisini koordinat düzleminden bağımsızlaştıramamıştır.

Ö5' in Eğimi Oluşturma Sürecine İlişkin Bulgular

Öğretim öncesinde uygulanan açık-uçlu testte sabit artışlı bir sayı örüntüsünde istenilen adımları ve genel kuralı yinelemeli stratejiyi kullanarak bulduğu görülen Ö5' in değişkenler açısından bağımlılık ilişkisini açıklayabilmesi ve hatta bağımlı-bağımsız değişkenin de farkında olması dikkat çekmiştir.



1.sayı 3 2.sayı 5 3.sayı 7 4.sayı 9

Adım sayısı	1	2	3	4	5	6	...	19	....	x
Kibrit sayısı	3	5	7	9	? 11	? 13	...	? 39	...	y

a) Verilen örüntüye göre tabloda soru işareti ile gösterilen yerleri doldurun. Nasıl doldurduğunuzu açıklayın.

Önceki adımdaki sayıya iki ekleyerek bulalım

b) Verilen örüntüde nasıl bir bağımlılık ilişkisi vardır? (Yani ne, neye bağlı olarak değişmektedir?) Örüntüdeki bu ilişkiyi kendi cümlelerinizle açıklayınız.

Sonuç adım sayısına göre değişmektedir.

c) Bu örüntünün genel kuralını bulun ve nasıl bulduğunuz açıklayın.

2n+1 Bu kuralı aradaki fark 2 olduğu için "2n" adımla uygun olan diye 1 ekleyerek bul...

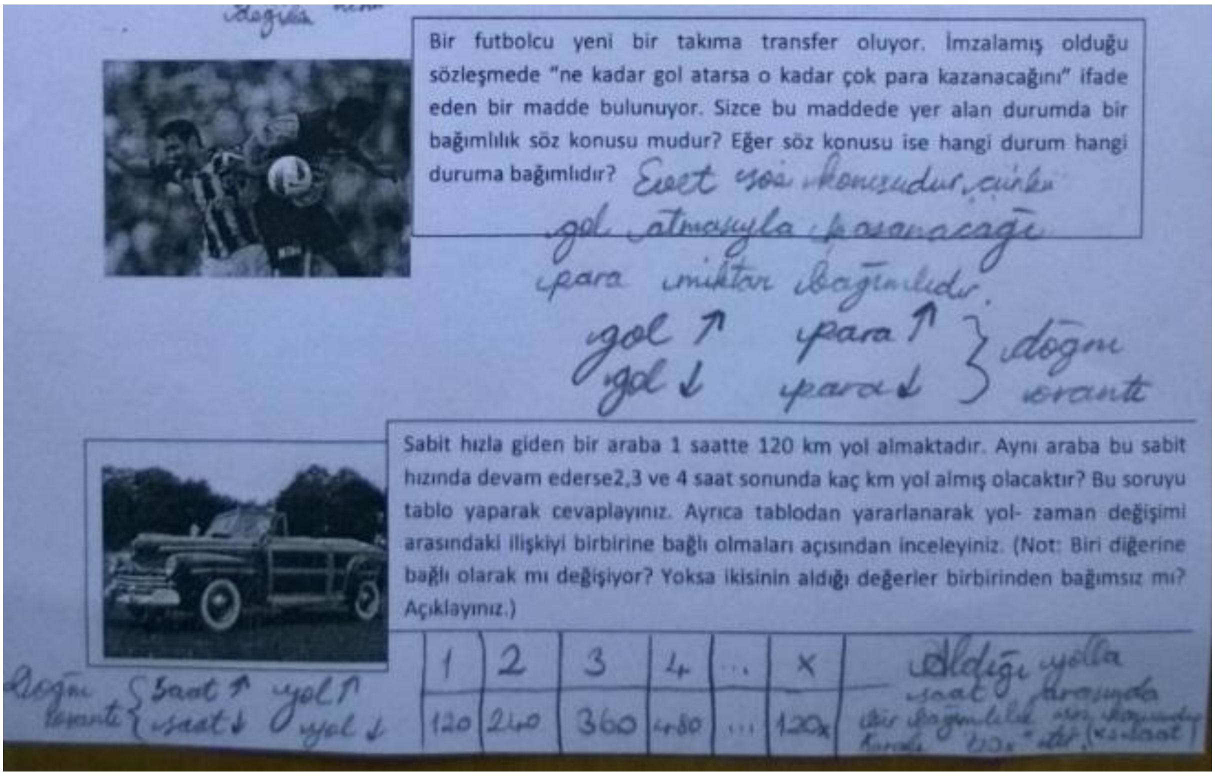
d) "C" şıkkında yazdığınız genel kuralda bağımlı değişkeni hangi sembol ile , bağımsız değişkeni hangi sembol ile gösterdiniz ? Nedenini açıklayınız.

2n+1 = Bağımlı değişken = Sonuç

Bağımsız değişken, sabit terim, adıma göre değişiyor.

2-)

Günlük yaşamdaki bir durumda bağımlılık ilişkisini görebilmesinin yanı sıra sayısal iki nicelik arasındaki ilişkiyi de bağımlılık açısından yorumlayabilmesi ve ayrıca cebirsel olarak genellemesi onun fonksiyonel düşünebildiğini ortaya koymuştur.



Bir futbolcu yeni bir takıma transfer oluyor. İmzalamış olduğu sözleşmede "ne kadar gol atarsa o kadar çok para kazanacağını" ifade eden bir madde bulunuyor. Sizce bu maddede yer alan durumda bir bağımlılık söz konusu mudur? Eğer söz konusu ise hangi durum hangi duruma bağımlıdır? Evet söz konusudur, çünkü gol atmasıyla kazanacağı para miktarı bağımlıdır.

gol ↑ para ↑
gol ↓ para ↓ } doğru orantı

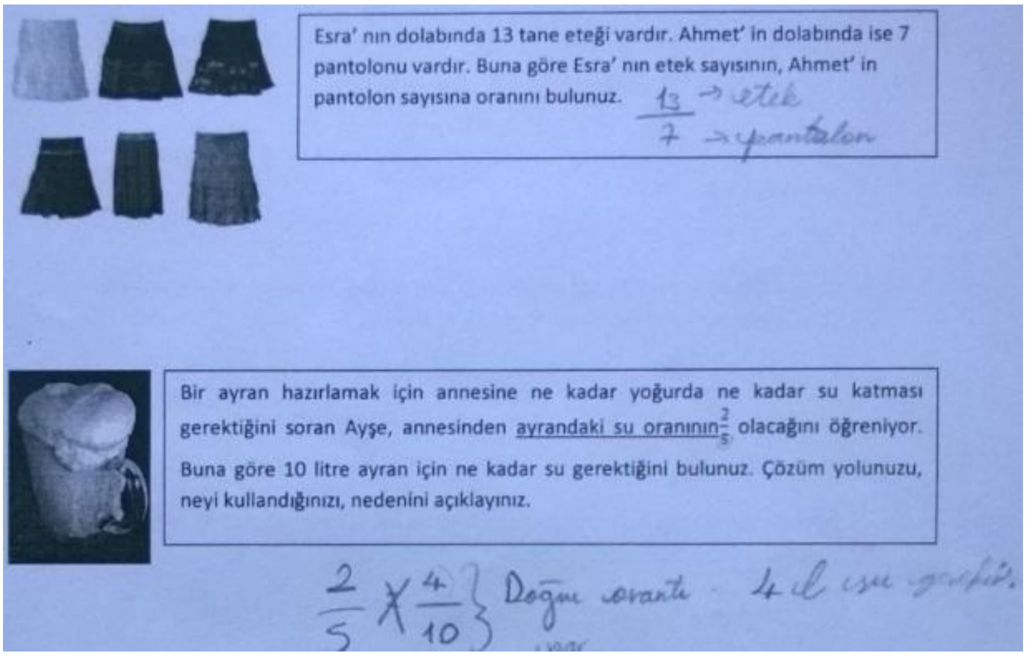
Sabit hızla giden bir araba 1 saatte 120 km yol almaktadır. Aynı araba bu sabit hızında devam ederse2,3 ve 4 saat sonunda kaç km yol almış olacaktır? Bu soruyu tablo yaparak cevaplayınız. Ayrıca tablodan yararlanarak yol- zaman değişimi arasındaki ilişkiyi birbirine bağlı olmaları açısından inceleyiniz. (Not: Biri diğerine bağlı olarak mı değişiyor? Yoksa ikisinin aldığı değerler birbirinden bağımsız mı? Açıklayınız.)

1	2	3	4	..	x
120	240	360	480	...	120x

Doğru orantı { saat ↑ yol ↑ / saat ↓ yol ↓

Aldığı yolla saat arasında bir bağımlılık söz konusudur. Kuralı 120x dir (x=saat)

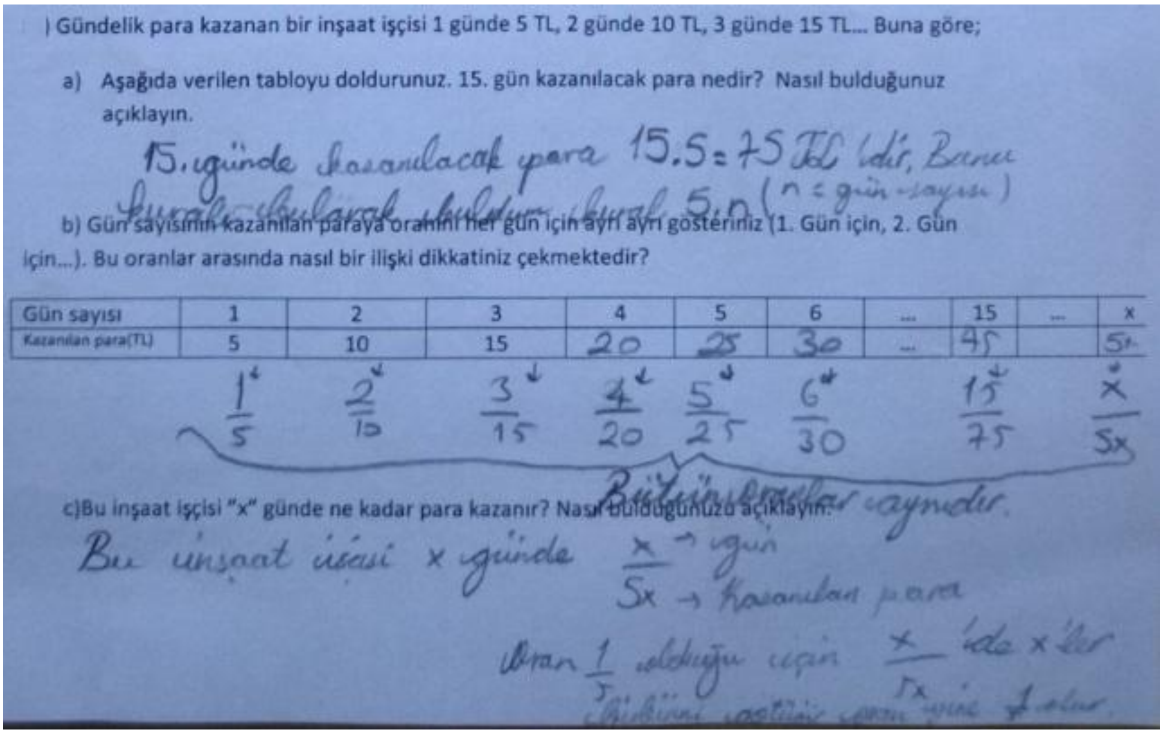
İki niceliği oranlamanın yanı sıra bir problem durumunda oranı yorumlayarak bilinen bir niceliğe göre bilinmeyeni bulabildiği görülmüştür.


Esra' nın dolabında 13 tane eteği vardır. Ahmet' in dolabında ise 7 pantolonu vardır. Buna göre Esra' nın etek sayısının, Ahmet' in pantolon sayısına oranını bulunuz. $\frac{13}{7}$ → etek → pantolon

Bir ayran hazırlamak için annesine ne kadar yoğurda ne kadar su katması gerektiğini soran Ayşe, annesinden ayrandaki su oranının $\frac{2}{5}$ olacağını öğreniyor. Buna göre 10 litre ayran için ne kadar su gerektiğini bulunuz. Çözüm yolunuzu, neyi kullandığınızı, nedenini açıklayınız.

$\frac{2}{5} \times \frac{4}{10}$ } Doğru orantı 4 l su gerekir.

Dahası, aralarında doğru orantılı ilişki olan iki niceliğin verildiği bir tabloda oranların eşitliğini görebilmiş ve buradan cebirsel bir genellemeye ulaşmıştır.


) Gündelik para kazanan bir inşaat işçisi 1 günde 5 TL, 2 günde 10 TL, 3 günde 15 TL... Buna göre;

a) Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz. 15. gün kazanılacak para nedir? Nasıl bulduğunuz açıklayın.

15. günde kazanılacak para 15.5=75 TL 'dir. Bunu kuralı bularak buldum. kural 5.n (n = gün sayısı)

b) Gün sayısının kazanılan paraya oranını her gün için ayrı ayrı gösteriniz (1. Gün için, 2. Gün için...). Bu oranlar arasında nasıl bir ilişki dikkatinizi çekmektedir?

Gün sayısı	1	2	3	4	5	6	...	15	...	x
Kazanılan para(TL)	5	10	15	20	25	30	...	45		5x

$\frac{1}{5}$ $\frac{2}{10}$ $\frac{3}{15}$ $\frac{4}{20}$ $\frac{5}{25}$ $\frac{6}{30}$ $\frac{15}{75}$ $\frac{x}{5x}$

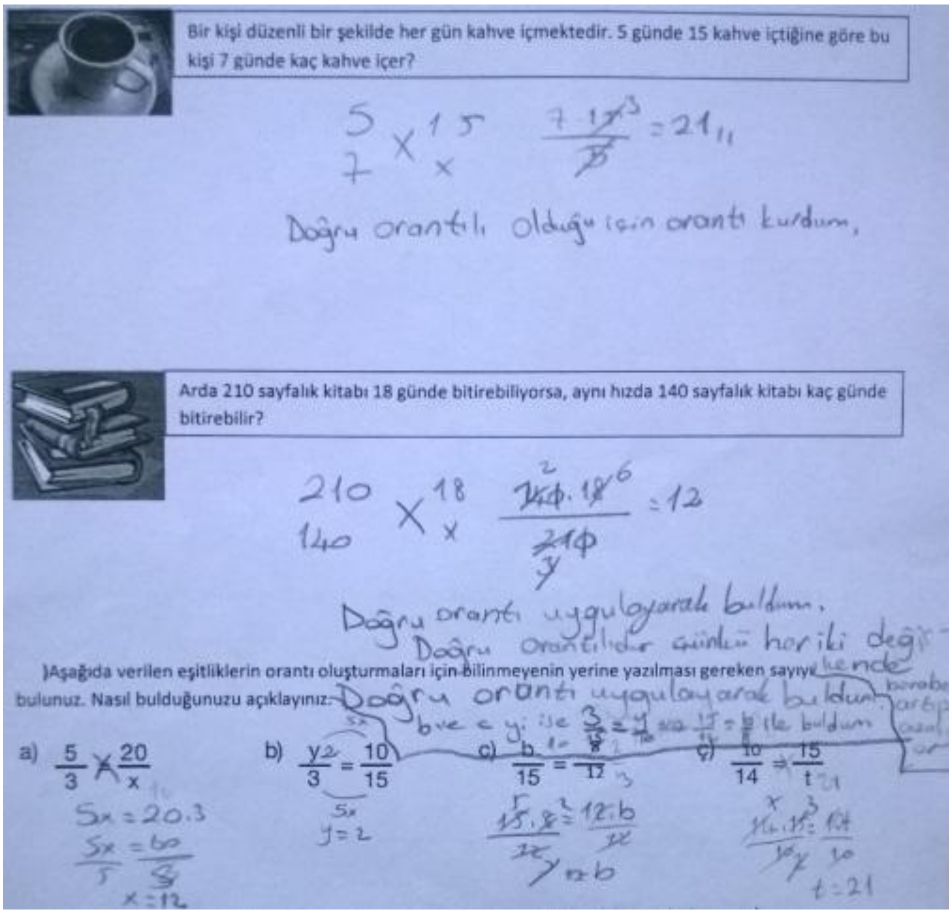
Bütün oranlar aynıdır.

c) Bu inşaat işçisi "x" günde ne kadar para kazanır? Nasıl bulduğunuzu açıklayın.

Bu inşaat işçisi x günde $\frac{x}{5x}$ → gün → kazanılan para

Oran $\frac{1}{5}$ olduğu için $\frac{x}{5x}$ 'de x'ler birbirini götürür yine $\frac{1}{5}$ olur

Doğru orantı problemlerini orantı kurarak zorlanmadan çözdüğü görülen Ö5’ in iki oranın eşitliğini de kimi zaman içler-dışlar çarpımı tekniği ile kimi zaman kesirlerin denkliğinden yararlanarak hesaplayabildiği görülmüştür.



Bir kişi düzenli bir şekilde her gün kahve içmektedir. 5 günde 15 kahve içtiğine göre bu kişi 7 günde kaç kahve içer?

5 × 15
7 × x

$\frac{7 \cdot 15}{5} = 21$

Doğru orantılı olduğu için orantı kurdum,

Arda 210 sayfalık kitabı 18 günde bitirebiliyorsa, aynı hızda 140 sayfalık kitabı kaç günde bitirebilir?

210 × 18
140 × x

$\frac{140 \cdot 18}{210} = 12$

Doğru orantı uygulayarak buldum.

Doğru orantılıdır günlük her iki değişkende

)Aşağıda verilen eşitliklerin orantı oluşturmaları için bilinmeyenin yerine yazılması gereken sayıyı bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız. Doğru orantı uygulayarak buldum

b ve c yi ise $\frac{3}{4} = \frac{y}{16}$ ile buldum

a) $\frac{5}{3} = \frac{20}{x}$ b) $\frac{y}{3} = \frac{10}{15}$ c) $\frac{b}{15} = \frac{8}{12}$ ç) $\frac{10}{14} = \frac{15}{t}$

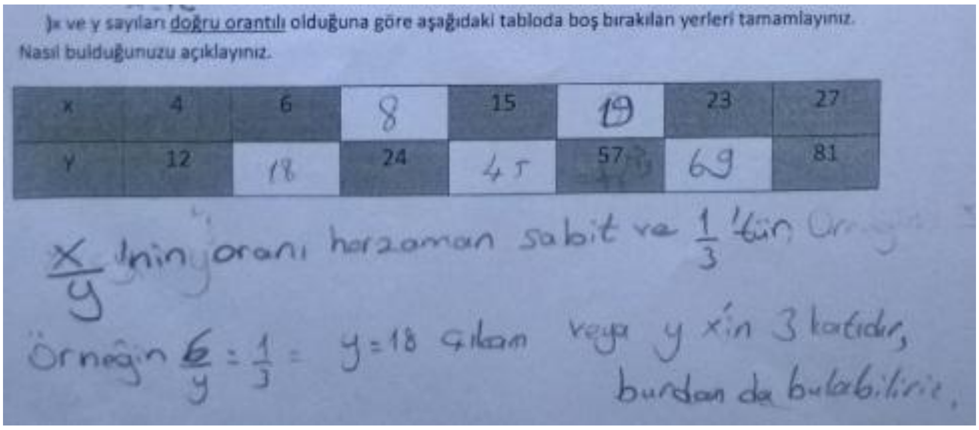
$5x = 20 \cdot 3$
$5x = 60$
$x = 12$

$y = 2$

$15 \cdot 8 = 12 \cdot b$
$10 = b$

$14 \cdot 15 = 10 \cdot t$
$t = 21$

Doğru orantılı niceliklerin verildiği bir tabloda iki değişken arasındaki oranın daima sabit olduğunu belirtmesi ve bu sabit orandan yararlanarak orantı kurabilmesi onun oran-orantı kavramına hem işlemsel hem kavramsal olarak sahip olduğunu ortaya koymuştur. Ayrıca bu sırada bağımlı değişkeni bağımsız değişken cinsinden ifade etmesi fonksiyonel düşünebildiğini ortaya koyması açısından da önemlidir.



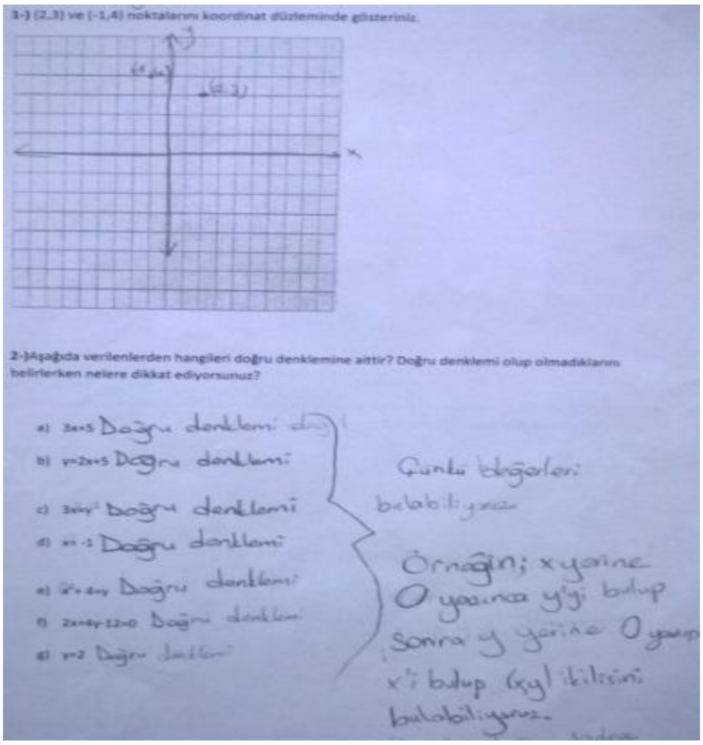
)x ve y sayıları doğru orantılı olduğuna göre aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri tamamlayınız. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

x	4	6	8	15	19	23	27
y	12	18	24	45	57	69	81

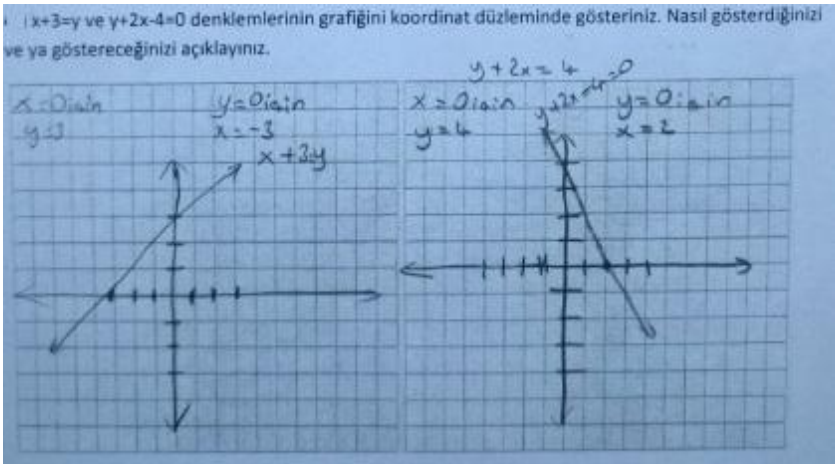
$\frac{x}{y}$ 'nin oranı herzaman sabit ve $\frac{1}{3}$ 'tür. Örneğin

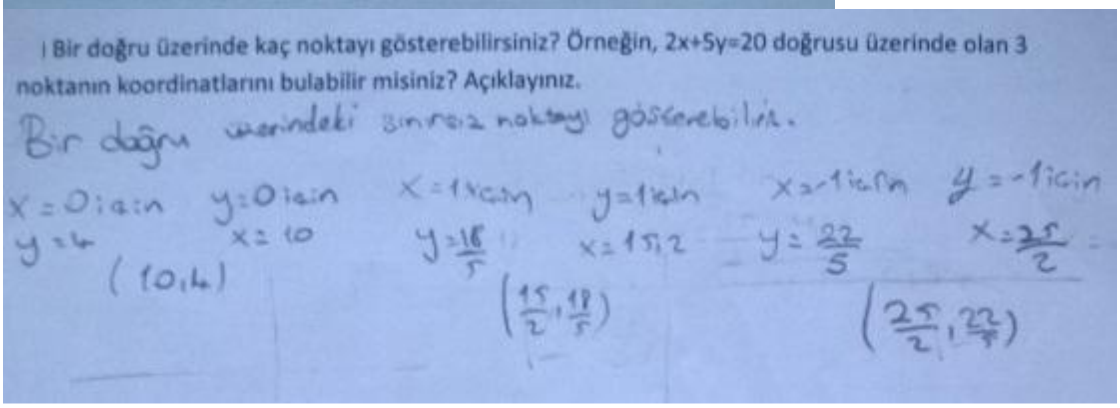
Örneğin $\frac{6}{y} = \frac{1}{3}$ y = 18 olur veya y x'in 3 katıdır, bundan da bulabiliriz.

Bu öğrencinin açık-uçlu testte koordinat düzleminde bir noktanın yerini rahatça belirleyebildiği görülmüş ve ancak verilen denklemlerden doğru olanları belirlemede yanlış bir strateji kullandığı ve bu sebeple sonuca varamadığı dikkat çekmiştir.

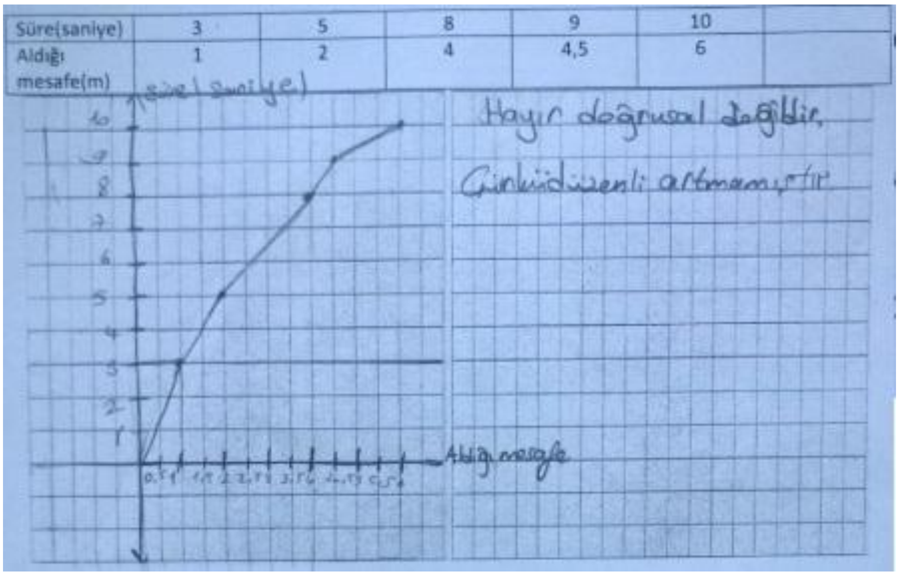


Bir denklemin doğruya ait olup olmadığını belirlemede hata yapmasına rağmen denklemi verilen bir doğrunun grafiğini çizebildiği ve bunun yanında bir doğru üzerinde sonusz tane nokta alınabileceğini belirterek örnekler verebildiği görülmüştür.





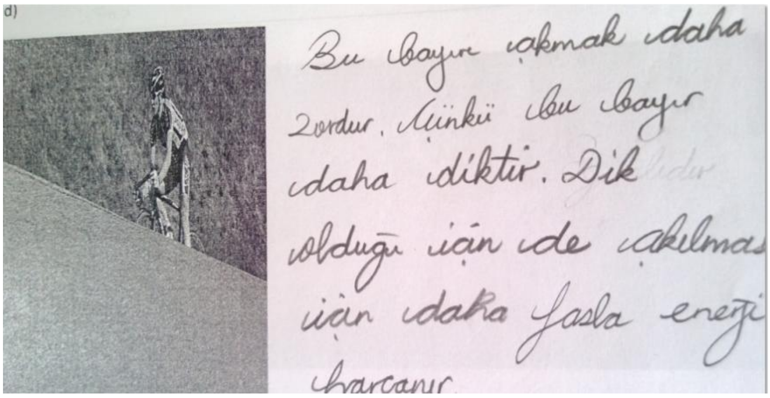
Doğru denklemi kavramına işlemsel olarak sahip olmanın yanında onu kavramsal olarak da yapılandırma sürecinde olduğu düşünülen Ö5' in iki niceliğin arasındaki ilişkinin doğrusallığını belirleyebildiği görülmüştür.



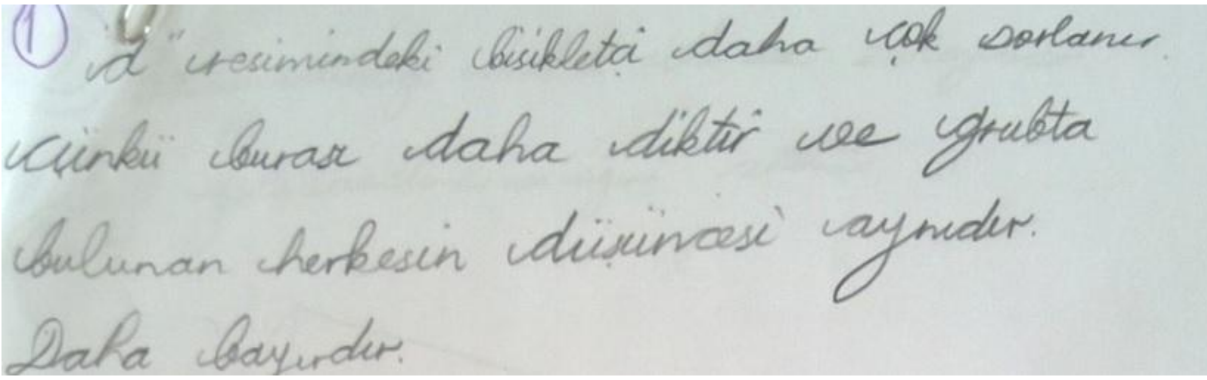
Öğretimin İlk İki Derslik Süreci

Ö5' in dersin hemen girişinde karşılaştıkları farklı eğimlere sahip yollarda seyreden bir bisikletli bağlamında, eğimin günlük yansımalarından olan "bayır ve dik" ifadelerini kullanarak informal bilgilerini öğrenme sürecine yansıtmaya başladığı görülmüştür. Ayrıca grup çalışma kağıdında da grupça aynı fikirde olduklarını belirtmiştir.

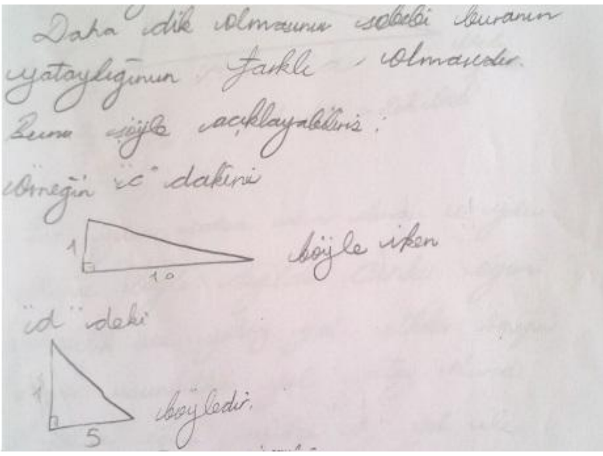
Ö5' in bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



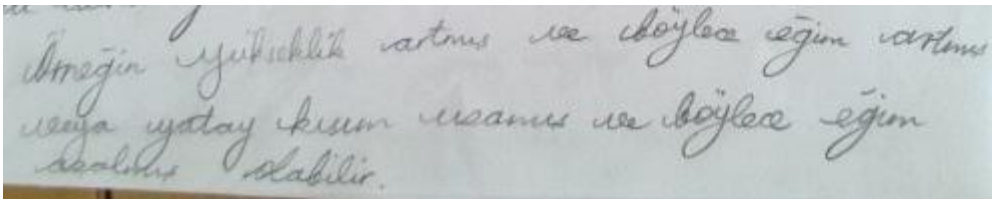
Ö5' in grup çalışma kağıdından bir görüntü



Ardından aynı bağlamda eğimin nasıl yorumladıklarının sorgulanması üzerine Ö5' in "yataylık" diye etikelediği mesafeyi, oluşturduğu dik üçgensel modellerde yüksekliği sabit tutmak şartıyla, eğim için bir etken olarak fark ettiği görülmüştür.

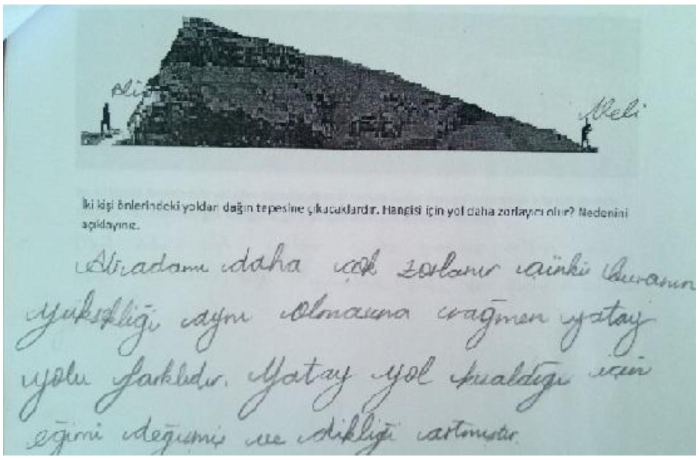


Durumun modellemesi olarak dik üçgeni oluşturduğu ve onun üzerinde eğimin bağlı olduğu değişkenleri keşfetmeye başladığı görülen Ö5' in, gruplar arası tartışmalarla yüksekliği de eğimin bağlı olduğu bir değişken olarak fark ettiği ve hatta, değişkenler ile eğim arasında orantısal ilişkiyi kurmaya başladığı görülmüştür.

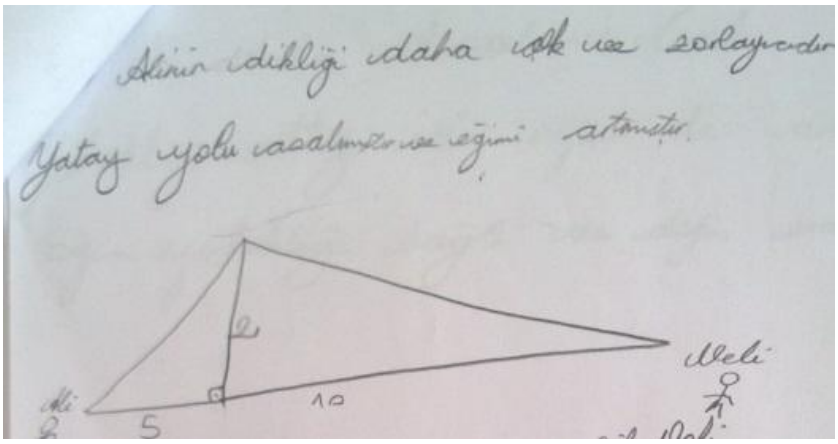


Etekleri doğrusal görsellenen bir dağın farklı taraflarından tepeye çıkma bağlamında ise yükseklikların aynı kaldığını dile getiren bu öğrenci, eğimin değişmesini yatay mesafenin kısalmasıyla açıklamıştır. Bu sırada öğrencilerin tüm sınıfta yükseklik etiketinde birleştikleri fakat yatay mesafe için farklı etiketler verdikleri görülürken, Ö5' in de yatay mesafe için "yatay kısım, yataylık, yatay yol" etiketleri verdiği görülmüştür.

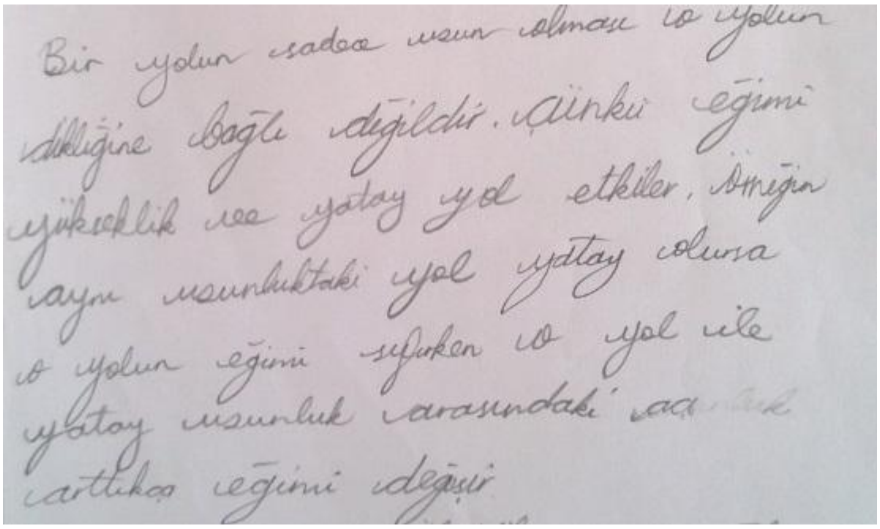
Ö5' in bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Ö5' in grup çalışma kağıdından bir görüntü

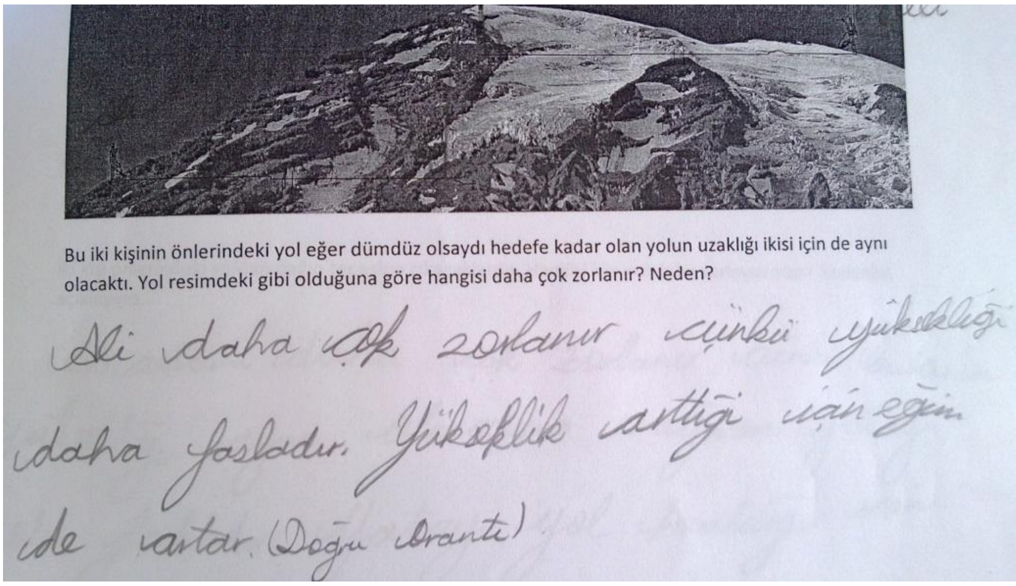


İnformal bilgilerinden gelen diklik ifadesinden matematiksel bir kavram olarak eğime geçiş aşamasında olduğu görülen bu öğrencinin, yol uzunluğunun eğimi etkileyip etkilemediği yönünde bir problem durumuna karşın girdikleri yeni düşünme ve tartışma sürecinde, grup çalışma kağıdında eğimin yol uzunluğuna bağlı olmamasını açısal ilişkiyi ele alarak savunduğu görülmüştür. Bu, onun eğimin bağlı olduğu uzunluk değişkenlerinin yanında açı değişkenini de fark ettiğini ortaya koymuştur. Grup arakadaşlarına önderlik ettiği açıkça görülen Ö5' in aynı uzunluktaki bir yol için dik üçgensel modeli zihninde dinamik oynatarak yol uzunluğunu eğimi doğrudan etkilemediğini keşfetmiştir. Ayrıca bu öğrencinin, eğimin yol uzunluğundan bağımsız bir şekilde yükseklik ile yatay mesafeye bağlı olarak değiştiğini açıklarken aynı zamanda öğretim sürecinde bahsedilmemesine rağmen yolun yatay olması durumunda eğimin sıfır olacağını belirtmesi veyatay mesafe ile yolun kendisi arasındaki açı ile eğimi ilişkilendirmeyi başarması, günlük yaşam deneyimlerinden kazandığı informal bilgileri ve sahip olduğu önceki formal bilgileri etkili bir biçimde bu öğrenme sürecine çağırdığını göstermektedir.

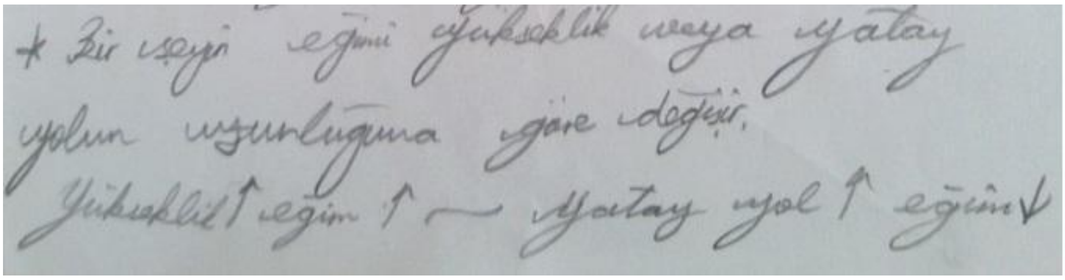

Bir yolun sadece uzun olması ile yolun dikliğine bağlı değildir. Çünkü eğimi yükseklik ile yatay yol etkiler. Örneğin aynı uzunluktaki yol yatay olursa o yolun eğimi sıfırken o yol ile yatay uzunluk arasındaki açı artıkça eğimi değişir

Ö5' in eğimin bağlı olduğu uzunluk değişkenlerini keşfettiği görülmesine rağmen tüm sınıfın bu keşfi, anlamlandırmayı ve içselleştirmeyi yapabilmesi için, onların yine bir dağ yolu bağlamında bu sefer yatay mesafelerin aynı fakat yüksekliklerin farklı olduğu durumda eğimi yorumlamaları için fırsat verilmiştir. Grup içi tartışmalarından sonra Ö5' in bireysel çalışma kağıdında yükseklik ile eğim arasındaki doğru orantılı ilişkiyi de ifade etmesi dikkat çekmiştir. Ayrıca gruplar arası sınıf tartışmalarından sonra Ö5' in eğimin bağlı olduğu değişkenleri ve bu değişkenler ile eğim arasındaki orantısal ilişkiyi fark ederek zihnindeki genellemeyi grup çalışma kağıdına not ettiği görülmüştür.

Ö5' in bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



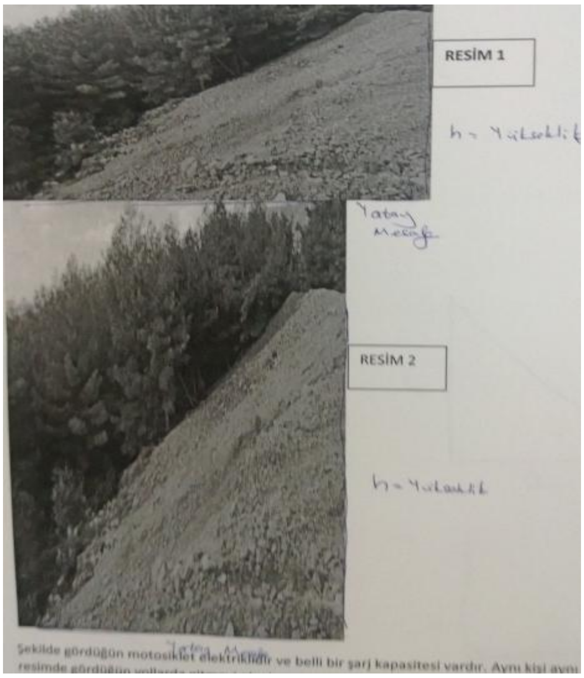
Ö5' in grup çalışma kağıdından bir görüntü



Ö5' in öğretimin ilk iki derslik sürecinde eğimin bağlı olduğu uzunluk değişkenlerinin yanında açı değişkenini de fark ettiği, doğrusal görselin uzunluğunun ise eğim için doğrudan bir etken olmadığını kendisinin fark ederek anlamlandırdığı görülmüştür. Uzunluk değişkenleri ile eğim arasındaki orantısal ilişkiyi de keşfeden bu öğrencinin, dik üçgensel modeli dersin başında durumu açıklamak üzere kullandığı görülürken dersin sonlarına doğru artık onu zihninde dinamik olarak oynatabildiği sonucuna varılmış ve buna dayanarak durumun modeli olmaktan ziyade eğim için soyut bir model haline gelmeye başladığı düşünülmüştür. Öğrencinin bilişsel oluşturma süreci kendisiyle gereçkleştirilen 1. Görüşmede derinlemesine incelenmiştir.

Ö5 ile Gerçekleştirilen 1. Klinik Görüşme

Görüşmenin hemen başında verilen bağlamda eğimi çağırabilen Ö5' in, eğimin bağlı olduğu uzunluk değişkenlerini belirleyebildiği ve onlara göre eğimi yorumlayabildiği görülmüştür. Yatay mesafeye, öğrenme sürecinde farklı ama benzer etiketler verdiği görülmesine rağmen görüşme boyunca artık "yatay mesafe" etiketini bu uzunluğa yapıştırdığı görülmüştür. Eğim ve eğimin günlük yaşamdaki yansımaları olan ifadeleri kullanması da eğimi günlük yaşamdaki bir kavramdan matematiksel bir kavram olarak yapılandırmaya başladığını düşündürmüştür.



Ö5: *Öğretmenim, bence 2. resimde şarjı daha çabuk biter. Çünkü burası daha dik, daha uğraşlı. Bu yüzden daha çok enerji harcayacak ve şarjı daha çabuk bitecek.*

G: *Peki sence daha dik olmasının anlamı ne? Daha dik olacak ve şarjı daha çabuk bitecek diyorsun. bu İkisi arasındaki diklikten kastettiğin şey ne?*

Ö5: *İkisi arasında iki tane fark var. Mesela şu resim 2' de yükseklik daha fazla veyatay yolu daha kısa olmasına rağmen, resim 1' de eğim daha az olduğu için daha dik değil.*

G: *Peki bu uzunluklarla dikliğin ilişkisini nasıl kuruyorsun? Mesela bu daha diktir, bu daha az diktir dedin. Daha dik derken yükseklik veyatay mesafeye göredir dedin. Mesela daha dik olmasının yükseklikle ne ilişkisi var?*

Ö5: *Yükseklik arttıkça dikliği artar. Yatay yoldaki şu yatay mesafe azaldıkça dikliği yine artar.*

Yükseklik artarken eğimin her zaman artmak zorunda olmadığını dile getirirken bu öğrencinin, aynı doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmediğini dile getirmesi ve yükseklik ile yatay mesafe arasındaki doğru orantılı ilişki ile savunması onun eğimi bir oran olarak yapılandırmaya artık çok yakın olduğunu düşündürmüştür. Dik üçgensel model üzerinde yükseklik veyatay mesafeye verdiği sayısal değerler de onun yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişkiden eğimi çıkarsamak üzere olduğunu göstermiştir.

G: *Peki yükseklik arttığında her zaman eğim artmak zorunda mıdır?*

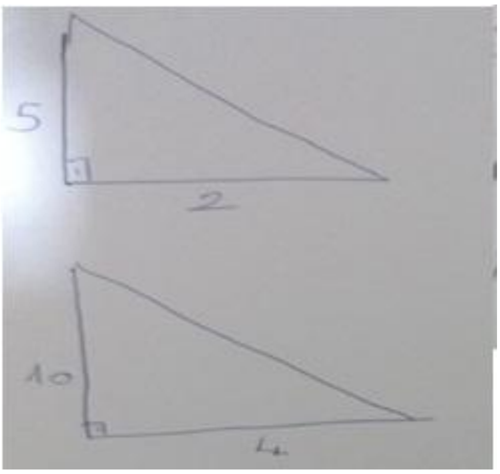
Ö5: *Hayır. Yatay yol da değişirse o zaman eğim ona göre değişir.*

G: *Mesela bir örnek verebilir misin? Yüksekliği artsın ama eğim artmasın. Çizebilir misin?*

Ö5: *Yükseklikle yatay mesafeye aynı oranda arttığı sürece bunun eğimi değişmez.*

G: *Göster bakalım.*

Ö5: *...(bir dik üçgen çizdi). Şurada mesela şurası 5 olsun, şurası da 2 olsun. Sonra da yüksekliği 10 olup, yatay mesafesi 4 olduğunda aynı oranda artmış olacak ve eğim değişmeyecek.*



İlk iki dersin ardından Ö5'in eğimi, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki ilişkinin bir ifadesi olarak gördüğü ve bu değişkenlere göre eğimi yorumlayabildiği açıkça ortaya çıkmıştır. Ayrıca eğim ile değişkenler arasındaki orantısal ilişkiyi de keşfettiği görülen öğrencinin, eğimin aynı doğrusal görsel üzerinde değişmemesini de yükseklik ile yatay mesafenin orantısal artışı ile savunması eğimin bir oran olduğunu keşfetmek üzere olduğunu düşündürmektedir.

G: *Matematiksel olarak yükseklik ile yatay mesafe arasındaki ilişkiyi nasıl ifade ediyoruz?*

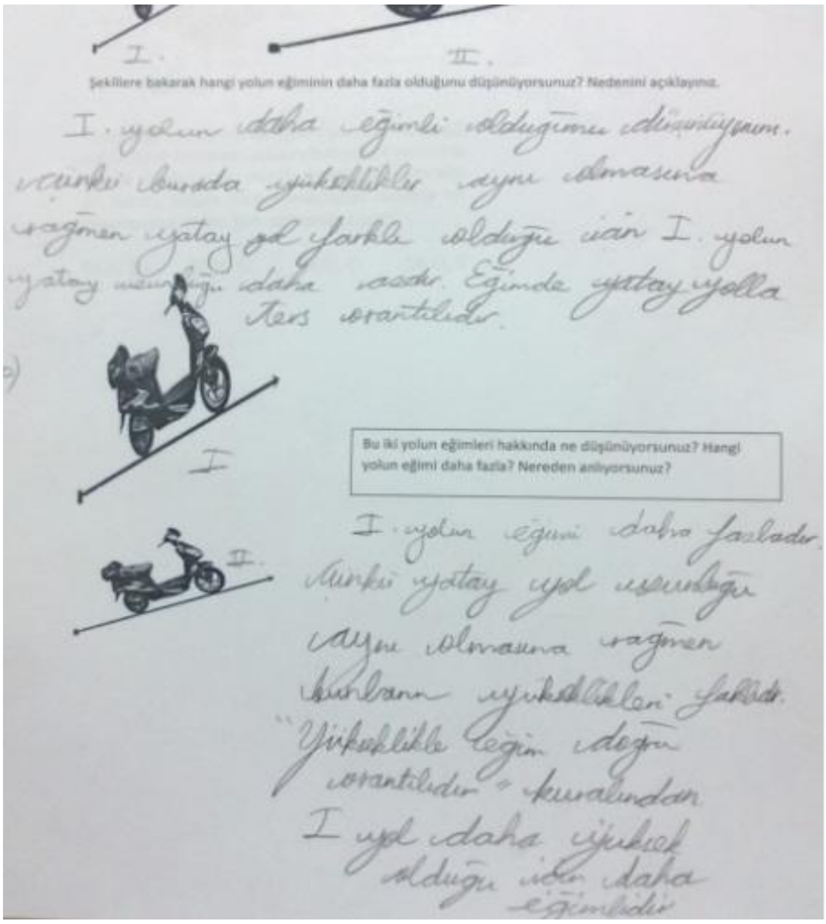
Ö5: *Eğim. Yükseklikle eğim doğru orantılı. Yatay yolda aldığı mesafe ile de ters orantılı.*

Bu öğrencinin dik üçgensel modeli içselleştirdiği ve artık ondan bağımsızlaşarak, diğer bir deyişle ona ihtiyaç duymaksızın eğim ve eğimin değişkenleri hakkında yorumda bulunabildiği dikkat çekmektedir.

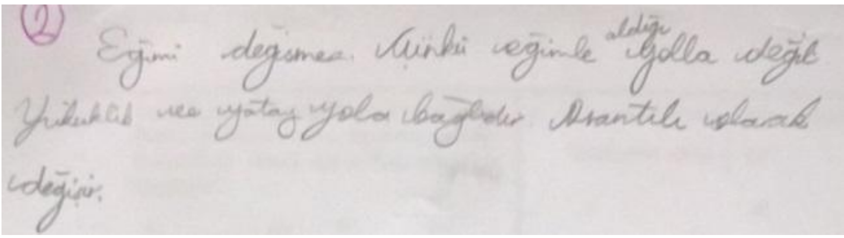
Öğretimin İkinci İki Derslik Süreci

Dersin hemen başlangıcında Ö5’ in, eğimin bağlı olduğu uzunluk değişkenlerinin hatırlanması amacıyla karşı karşıya bırakıldıkları bir bağlam durumunda, hem bireysel hem de grup çalışma kağıdında eğimi yükseklik veyatay mesafeye göre yorumladığı ve eğim ile bu değişkenler arasında orantısal ilişkiyi rahatça yorumlayabildiği tekrar görülmüştür. Bu sırada öğrencinin günlük yaşamda daha çok kullanılan “diktir” ifadesinden ziyade artık “eğimlidir” ifadesini kullanmaya başlamasının, günlük yaşamdaki eğimden matematiksel bir kavram olarak eğime geçişini göstermesi açısından önemli olduğu düşünülmüştür.

Ö5' in bireysel çalışma kağıdından bir görüntü

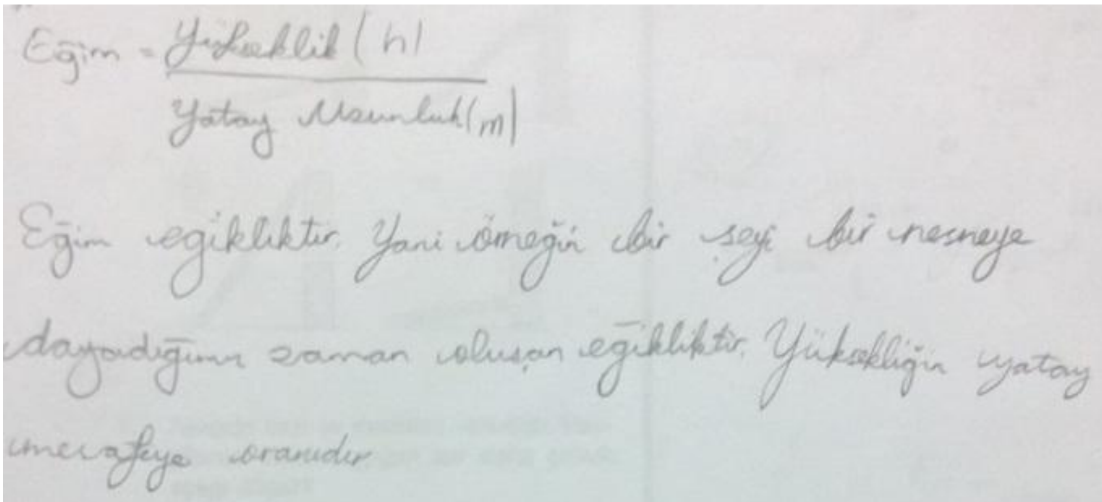


Doğrusal görsellenmiş bir dağ eteğinin aynı doğrusal etek üzerinde fakat farklı noktalarında duran kişilerin önlerindeki yolun eğimini yorumlamaları gereken bağlam durumunda, Ö5' in daha önceden keşfettiği ilişkiyi görmesi zor olmamıştır. Grup çalışma kağıdına, eğimin yol uzunluğundan bağımsız olduğunu dile getirmiş veyatay mesafe ile yüksekliğe bağlı olduğunu ifade ederek savunmasını yaptığı görülmüştür.



(2) Eğimi değişmez. Çünkü eğimle olduğu yolla değil yükseklik ve yatay yola bağlıdır. Orantılı olarak değişir.

Ö5’ in 1. Görüşme sırasında dile getirdiği yükseklik ile yatay mesafe arasındaki doğru orantılı değişimi bu sefer dile getirmediği ancak başka bir grubun savunmasını “yükseklik ile yatay mesafenin aynı oranda artıp azalmasıyla” yapmasından sonra yukarıdaki alıntıda görülen “orantılı olarak değişir” yorumunu eklediği görülmüştür. Ardından eğimin değişmemesini, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki nasıl bir ilişkinin sağlamış olabileceği sorusu ile yeni bir düşünme ve tartışma sürecine girilmiştir. Tüm öğretim boyunca grubunda oldukça aktif olduğu görülen Ö5’ in, doğrusal görsel üzerindeki yükseklik ile yatay mesafe arasındaki sabit oranı fark ederek grup arkadaşlarına da açıkladığı ve kendisine söz hakkı verildiğinde eğimin yüksekliğin yatay mesafeye oranı olduğunu dile getirdiği görülmüştür.

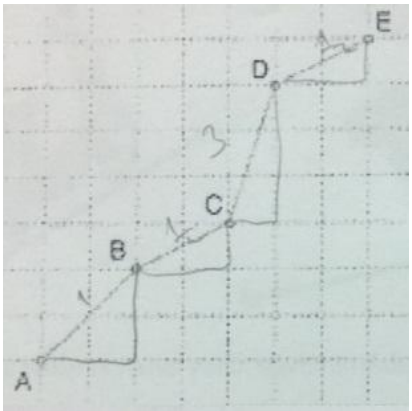


$$\text{Eğim} = \frac{\text{Yükseklik (h)}}{\text{Yatay Uzunluk (m)}}$$

Eğim eğikliktir. Yani örneğin bir şeyi bir nesneye dayadığımız zaman oluşan eğikliktir. Yüksekliğin yatay mesafeye oranıdır.

Yüksekliğe önceki formal öğrenmelerinden gelen “h” sembolünü, yatay mesafeye ise mesafenin baş harfi olmasından dolayı olabileceği düşünülen “m” sembolünü verdiği görülen bu öğrencinin eğimi informal bilgilerinden açıklamaya çalışması onun günlük yaşamdan edindiği deneyimleri öğrenme sürecine çağırabildiğini ve bu sebeple günlük yaşamdan kopuk bir eğim kavramı geliştirmediğini göstermektedir.

Ardından dikey matematikleştirme fırsatı sağlayan, eğim yorumlama ve hesaplama etkinliğinde Ö5' in, oranlama işlemlerini zihinden yaparak rahat bir şekilde eğimi hesaplayabildiği görülmüştür.



Ö5 ile Gerçekleştirilen 2. Klinik Görüşme

Ö5' in görüşmenin başında verilen günlük yaşamdan bir bağlam durumunda eğimi yüksekliğin yatay mesafeye oranını alarak hesaplayabildiği ve ayrıca bulduğu eğim değerini yüzde olarak da ifade edebildiği görülmüştür.

Resimde görülen bayıra, köye ulaşımı sağlamak için yol yapılacaktır. Her yolun girişinde yolun eğimini

gösteren, 

şeklinde bir tabela bulunmaktadır. Bu yolun girişine konulacak tabelayı siz hazırlasanız, nelere ihtiyaç duyardınız?

Ö5: *Şimdi öğretmenim ben bu şekli hazırlayabilmek için önce bu bayırın yüksekliğini veyatay yolunu öğrenmem lazım. Ona göre ayarlamalıyım o tabelayı.*

G: Peki tamam. Benden istediğin herhangi bir uzunluk varsa ben sana orasının uzunluğunu verebilirim. Neresinin uzunluğunu istiyorsun?

Ö5: Yüksekliğini istiyorum.

G: Onu çizerek gösterebilir misin bana? Ben de sana söyleyeyim.

Ö5: Burası(yanlış gösterdi. çünkü eğimin başladığı noktadan itibaren değil resmin başladığı yerden itibaren gösterdi yüksekliği).

G: Orasının uzunluğu 140 m.

Ö5: Bir de şurasını istiyorum öğretmenim, yatay yolunu(bunu doğru gösterdi).

G: Orası da 480 m.

Ö5: Bunun eğimi 140 bölü 480. Sıfırlar gider. Sonra bunu 2' ye bunu da 2' ye bölersem(pay va paydayı 2' ye bölerek kesri sadeleştirdi) 7 bölü 24 olur. Eğim bu olur.

G: Peki tabelayı bunu mu yazacaksın? Yoksa yüzde şeklinde mi yazmak daha doğru olur?

Ö5: Yüzde şeklinde yazmak daha doğru olur.

G: Onu yazabilir misin peki bana?

Ö5: Yazabilirim inşallah(güldü). Şimdi bu...bunun paydasını 100 yapmam lazım.

G: Hı hı.

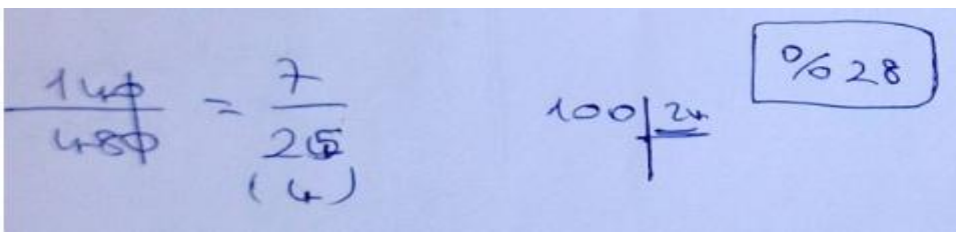
Ö5: Sonra. Bunun eğimi buysa 100' de… önce bir 100' ü 24' e böleyim. Tam olmadığı için virgüllü bir şeyler çıkacak.

G: Biz virgüllü yazmayalım tabelaya. Yaklaşık bir değer yazalım. Olur mu?

Ö5: Olur. Yani burasını 25 mi yapayım?(24 olan paydayı gösteriyor).

G: Olur. Eğer öyle yuvarlıyorsan öyle yap.

Ö5: 25 desek, bunun alt tarafını 4 ile çarparız, üst tarafı da 4 ile çarparız. Yüzde 28 olur o zaman.



Bir doğrusal görselin eğimini rahatça hesaplayabildiği görülen Ö5' in eğimi "diklik ya da eğiklik" durumu olarak açıklaması onun informal bilgilerini bu süreçte kullanabildiğini göstermektedir. Bu öğrenci eğimi sadece yüksekliğin yatay mesafeye bölümü olarak açıklamaması, onun bir formül ya da algoritma ezberlemediği aksine geçmiş bilgileriyle bağ kurduğu ve böylece eğimi anlamlandırdığını düşündürmüştür.

G: *Yüzde 28 olur yüzde ile ifade etmek istersek diyorsun. Eğimden kastettiğin ne? Eğim deyince ne anlıyorsun sen?*

Ö5: *Eğim deyince, bir şeyin kenarlarına bağlı olarak ortaya çıkan diklik ya da eğiklik durumunu anlıyorum.*

Ö5' in aynı doğrusal görselin eğimini o doğru üzerinde alınan herhangi bir anda oluşturacağı dik üçgensel modeldeki yüksekliği yatay mesafeye oranlayarak bulabileceğini, çünkü oranın sabit kalacağını dile getirmesi bu öğrencinin eğimi bir oran olarak yapılandırdığını düşündürmektedir. Yükseklik ile yatay mesafenin doğru orantılı bir şekilde azalacağını ve bununla birlikte iki değişken arasındaki sabit oranın eğim olacağını keşfetmiş görünen öğrenci, bu keşifleri dik üçgensel model üzerinde göstermeksizin bu orantısal ilişkiyi ifade edebildiği dikkat çekmiştir ki bu da artık bu öğrencinin modeli içselleştirerek, onu durumun bir modeli olmaktan çıkardığını göstermektedir.

G: *Şöyle diyelim. Senin elinde bu kadar uzun ölçüm aleti yok. Daha pratik bir çözüm bulabilir misin bize?*

Ö5: *Daha pratik bir çözüm?*

G: *Hı hı.*

Ö5: *Daha küçük bir üçgen oluşturup oranlasak diyorum ama o zaman kolay olmaz ki!*

G: *Nasıl?*

Ö5: *Mesela şuradan(yolun bir kısmını hipotenüs olarak kabul eden bir dik üçgen gösterdi) daha küçük, orantılı olduğu bir üçgen yaparız. Ama zaten oranlamamız için alttaki ve üsttekini de bulmamız gerekmiyor mu? Şu ortadan alalım. Yüksekliğin ortasından.*

G: *Ölçme hakkın var, yani elinde bir metre var. Ama bu kadar büyük bir metre yok. 140 metreyi ölçebilecek kadar bir metre yok. Küçük bir metre var yani. İstediğin şeyleri ölçebilirsin.*

Ö5: *Yüksekliğin yarısını alırım. O zaman yatay mesafenin de yarısını almış olurum. Ya da çeyreğini alırım, %10' unu alırım…her türlü alırım. Zaten yatay yol da ona bağlı olarak oranlanacak.*

G: *Peki mesela az önce söyledin ya küçük bir üçgen alırım dedin. Değil mi?*

Ö5: *Evet.*

G: *Küçük bir üçgen alırsan bu üçgenin eğimi değişmeyecek mi ki?*

Ö5: *Değişmeyecek. Oranlı olacak çünkü.*

G: *Neyin neye oranı olacak?*

Ö5: *Eğim değişmez.*

G: *Neden?*

Ö5: *Yüksekliği aynı oranda…(devam ettirmedi kesti)mesela yüksekliğin yarısını alırsam, yatay mesafenin de yarısı olur. Böylece değişmez.*

G: *Yani biz bu tabelayı yolun burasına koymak yerine burasına koysaydık ve ona göre hesap yapsak tabelada yazan ifade aynı mı olurdu?*

Ö5: *Evet aynı olur.*

G: *Aynı olur çünkü eğim değişmez diyorsun. Peki…*

Ö5: *Alınan mesafe, nasıl desem hipotenüse bağlı değil dik üçgen gibi düşünsek. Yükseklikle yatay mesafeye bağlı.*

Ö5' in aynı doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmemesini, diğer iki değişkenin arasındaki oranın değişmemesinin sağladığının farkında olduğu da kendisine doğrudan bu sorunun sorulmasıyla görülmüştür.

G: *Peki şöyle diyelim, sen bu yoldan yukarıya doğru çıkıyorsun ya, sen bu yoldan yukarıya çıkarken eğim değişmiyor diyorsun.*

Ö5: *Evet.*

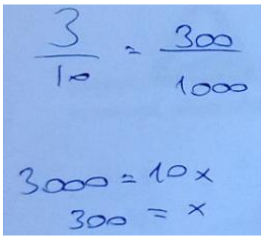
G: *Eğimin değişmemesiyle, başka bir şeyin değişmemesi aynı. Başka ne değişmiyor?*

Ö5: *Bu iki kenarın birbirine oranı mı?*

Kendisine bir doğrusal görselin oranı verildiğinde ise yükseklik uzunluğunu hem orantı kurup içler-dışlar çarpımı tekniğini kullanarak hem de yükseklik veyatay mesafenin aynı oranda artması gerektiğini düşünerek bulması, onun eğimi bir algoritma ya da bir formül ezberlemekten öte keşfederek, informal ve formal diğer bilgileriyle ilişkilendirerek kavramsallaştırdığı düşüncesini güçlendirmiştir.

Şekilde eğimi 3/10 olan bir dağ görülmektedir. Bu dağın yanında ona paralel olarak devam eden yolun belirtilen yere kadar olan uzunluğu 1000 m olduğuna göre dağın yüksekliğini bulabilir misiniz ? Nasıl?

Ö5: *Evet bulabilirim. Şimdi bunun eğimi 3/10 ise, biz az önce de dediğimiz gibi yüksekliği yatay mesafeye bölüyorduk. Burada yatay mesafeyi bize 1000 olarak vermiş. Bunu da oranlarsak işte, işlemsel olarak 3000 10x' e eşit ise x=300 şeyi ile oranı ile burasını bulmuş oluruz(orantı kurdu ve içler dışlar çarpımı yaptı).*



G: *Peki hiç işlem yapmadan bulabilir miydin?*

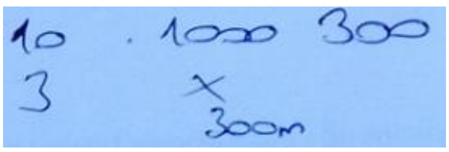
Ö5: *İşlem yapmadan!*

G: *Yani, bana yorumlayabilir misin burada vermiş olduğu eğimi? Onun bakış açısından ne yapmış da eğimi bu hale getirmiş sence?*

Ö5: *Haa(sormak istediğinizi anladım der gibi tepki verdi aniden). Yatay mesafeyi burada 10 vermiş fakat burada 1000 diyor. 100 katı. O yüzden 3' ün de 100 katı olacak 300 cevap. 100 katı olacak ve yine bir işlem olacak ki!*

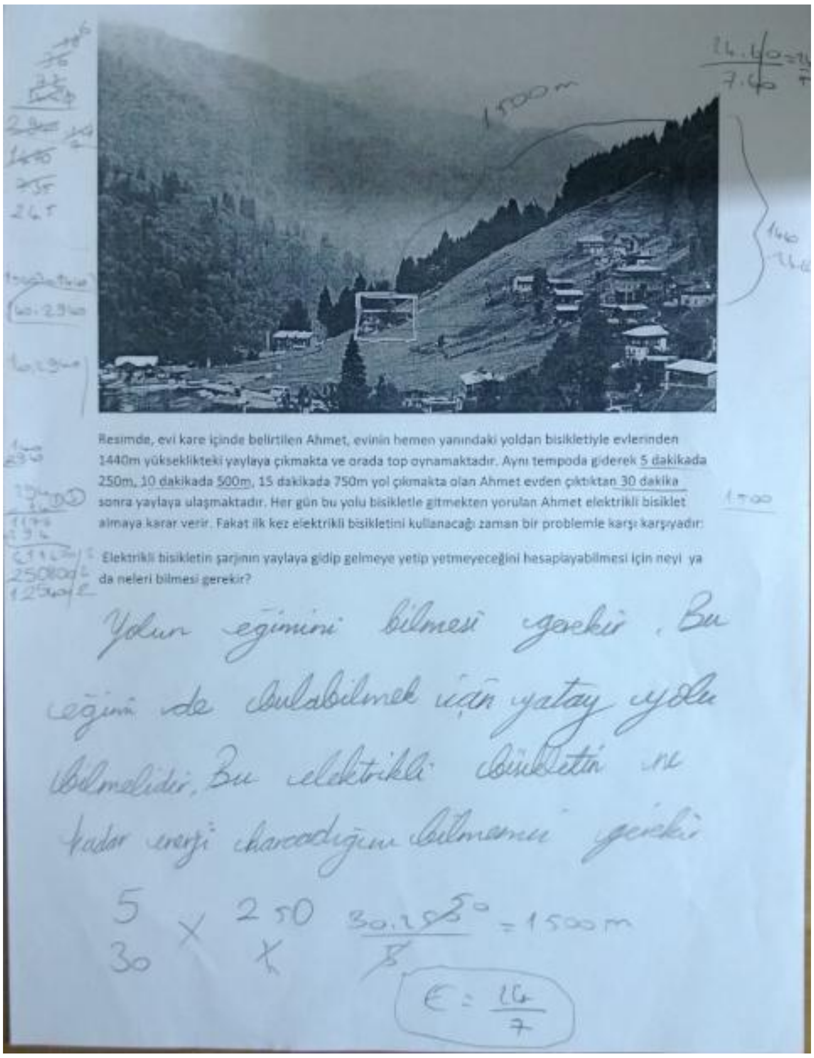
G: *Güzel. Yüksekliği bu şekilde bulabiliriz diyorsun. Peki bahsettiğin diğer yolu da oraya yazabiliri misin?*

Ö5: *Şey demiştim ben. Burada yatay mesafeye 10 demiş. Burada 1000, 10' un 100 katı. O yüzden 3' ün de 100 katı olması lazım. Bundan dolayı 300 oluyor.*

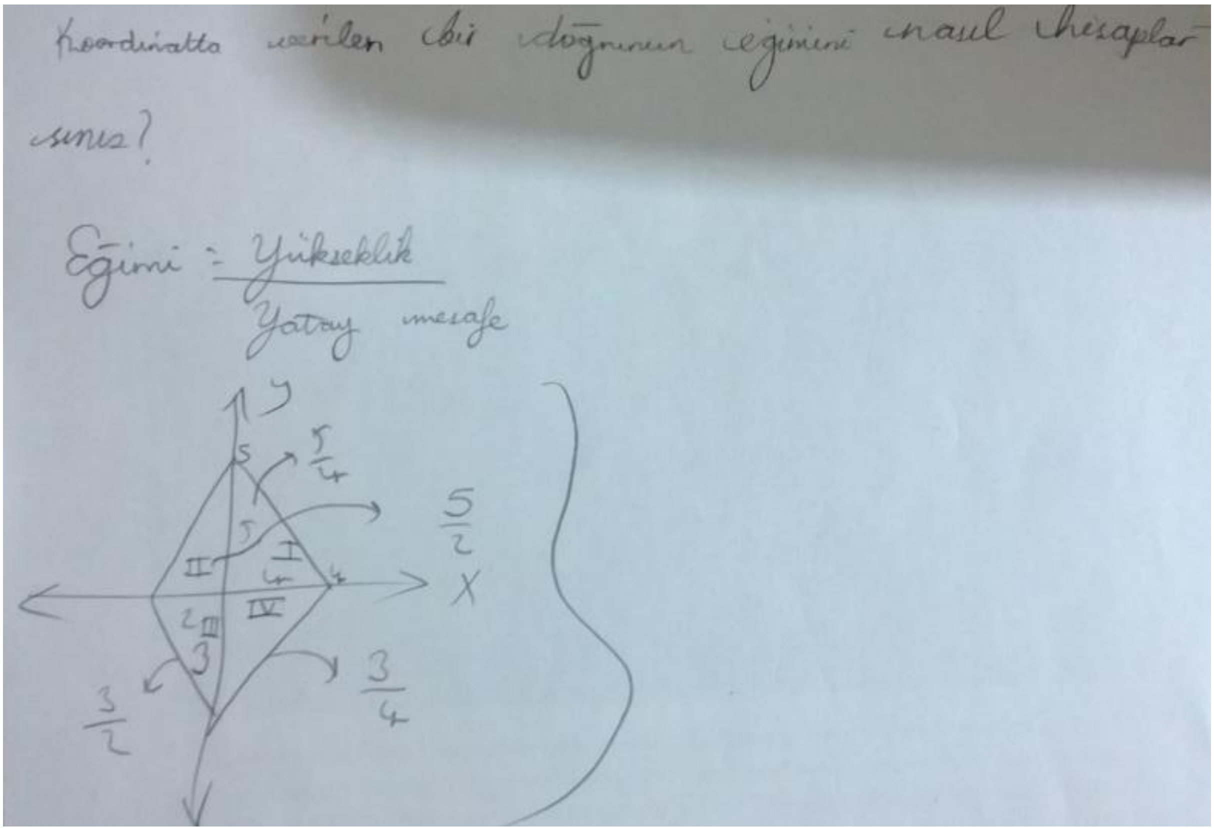


Öğretimin Son İki Derslik Süreci

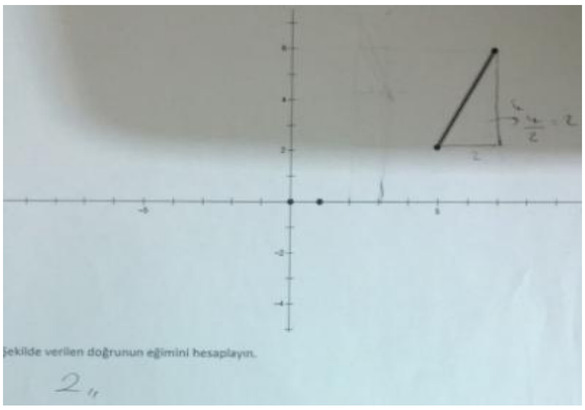
Ö5’ in son iki derslik sürecin başında karşılaştığı bir elektrikli bisikletlinin yaylaya çıkması bağlamında eğimi sürece çağırabildiği ve eğimi hesaplayabildiği görülmüştür.



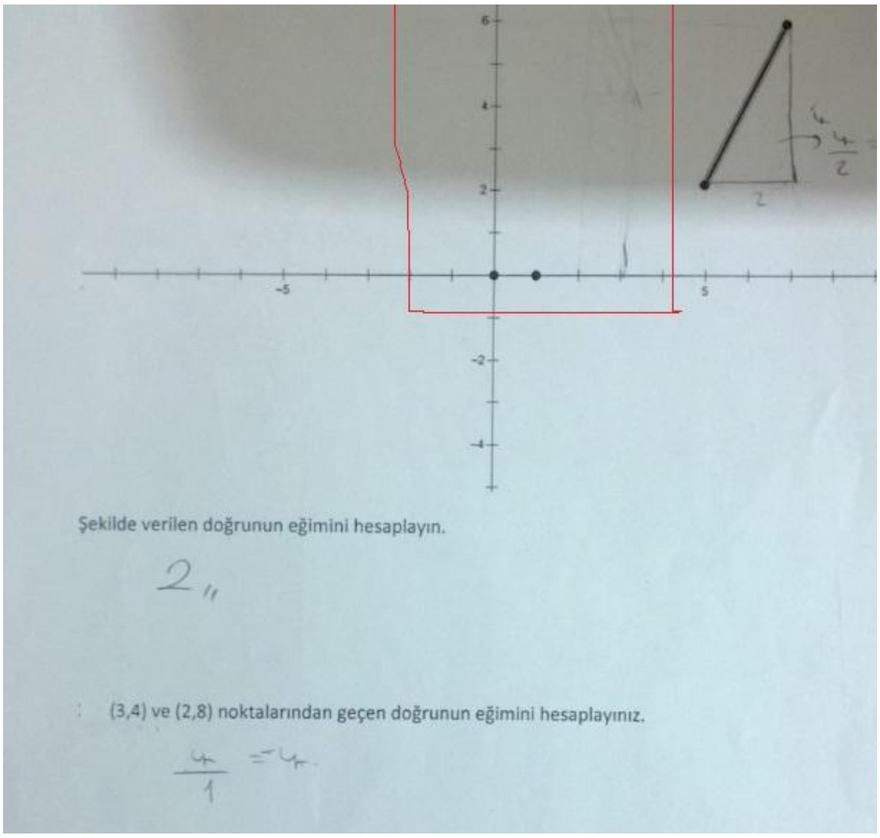
Yüksekliğin yatay mesafeye göre değişimini gösteren çizgi grafiğini rahatça çizebildiği görülen bu öğrencinin oluşan doğrusal grafiğin eğimini hesaplayabildiği de görülmüştür. Aynı doğru üzerinde alınan noktalarda yükseklik ile yatay mesafenin aynı oranda azaldığını daha önceki derste ve görüşmede ortaya koyan Ö5, koordinat düzleminde bir doğrunun eğimini nasıl bulacakları sorusu karşısında ise yükseklik/yatay mesafe’ den yararlanacağını dile getirmiş ve koordinat düzleminde oluşturduğu doğru parçalarının eğimlerini hesaplayarak bu bilgiyi doğrudan yansıttığı görülmüştür. Ancak öğrencinin negatif eğimin henüz farkında olmadığı görülürken ayrıca yükseklik veyatay mesafeyi sadece eksenleri kesen noktalardan yararlanarak bulması dikkat çekmiştir. Ancak bu öğrencinin, dikey matematikleştirme yapmalarına olanak vermesi hedeflenen bu süreçte önceki bilgilerini yansıtmaya başladığı düşünülmüştür.



Koordinat düzleminde görsellenen bir doğru parçasının eğimini bulurken dik üçgensel modeli oluşturarak yüksekliği veyatay mesafeyi belirleyerek sonuca ulaştığı görülen Ö5' in, yüksekliğin veyatay mesafenin doğrunun ya da doğru parçasının eksenleri kestiği noktalar olmaksızın da hesaplanabileceğini fark ettiği görülmüştür.

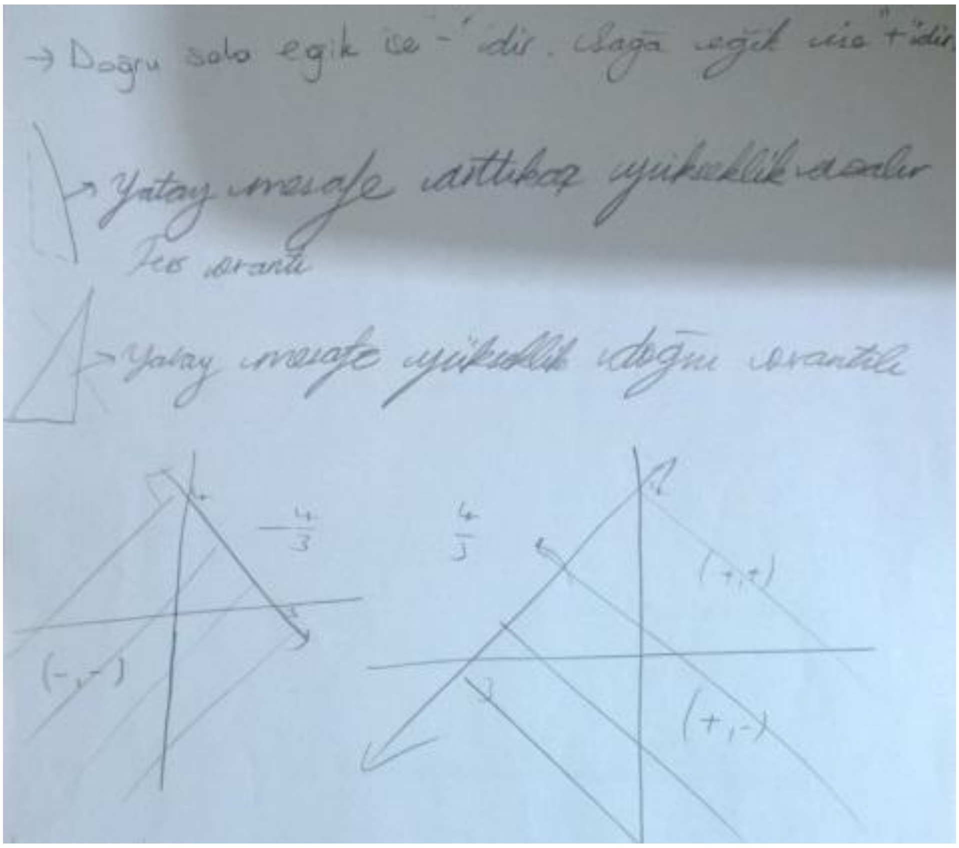


Sadece koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini bulmaları istendiğinde ise bu öğrencinin, önceki verilen koordinat düzleminde noktaları belirleyip doğruyu oluşturduğu ve buradan dik üçgensel modeli inşa ettiği bireysel çalışma kağıdında silik bir şekilde görülmektedir. Muhtemelen bu öğrenci bu modelden yararlanarak, bu soruda koordinatlar arası fark ile yüksekliği veyatay mesafeyi bulabileceğini keşfetmiştir ki söz hakkı verildiğinde kendisi doğrudan sonuca ulaştığını dile getirmiştir. Bu anda ulaştığı keşfi açıklamasına, diğer arkadaşlarının bu keşfi yapmalarına fırsat verme açısından izin verilmemiştir.

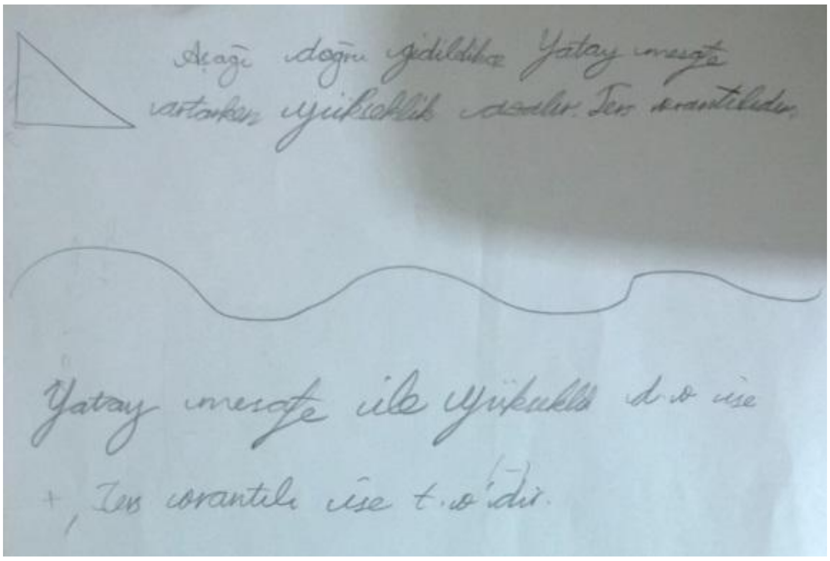


Ayrıca bu soruda Ö5’ in doğrunun yönünün eğimi etkileyip etkilemediği sorusu tüm sınıfa yöneltilerek yeni bir düşünme ve tartışma süreci başlatılmıştır. Ö5’ in bireysel çalışma kağıdında “sağa-sola yatıklık” ile eğimin negatifliğini ilişkilendirerek görsel bir genellemeye vardığı görülmüştür. Ardından gruplar arası sınıf tartışmalarında “ dik üçgensel model yardımıyla hipotenüs üzerinde soldan sağa gidildikçe yükseklik ile yatay mesafe arasındaki orantının ters ya da doğru oluşu” ile eğimin negatifliği arasındaki ilişkiyi keşfettiği görülmüş ve görsel desteklerle bu negatifliği göstermesi ise vardığı genellemeleri içselleştirmeye başladığını düşündürmektedir.

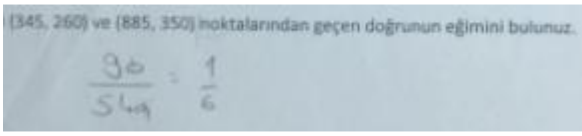
Ö5' in bireysel çalışma kağıdından bir görüntü



Ö5' in grup çalışma kağıdından bir görüntü

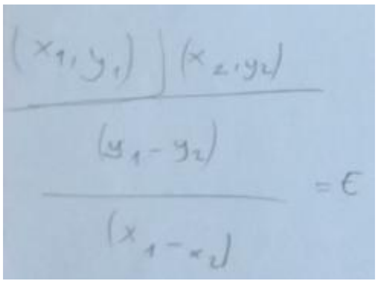


Negatif eğimin fark edilmesi ve anlamlandırılması sürecinin ardından sayısal değerleri büyük olan koordinatlara sahip iki noktadan geçen doğrunun eğiminin hesaplanması sürecinde Ö5' in zaten bir önceki soruda keşfettiği "koordinatlar arası fark ile yükseklik veyatay mesafeye ulaşma" genellemesini rahatlıkla kullandığı görülmüştür.

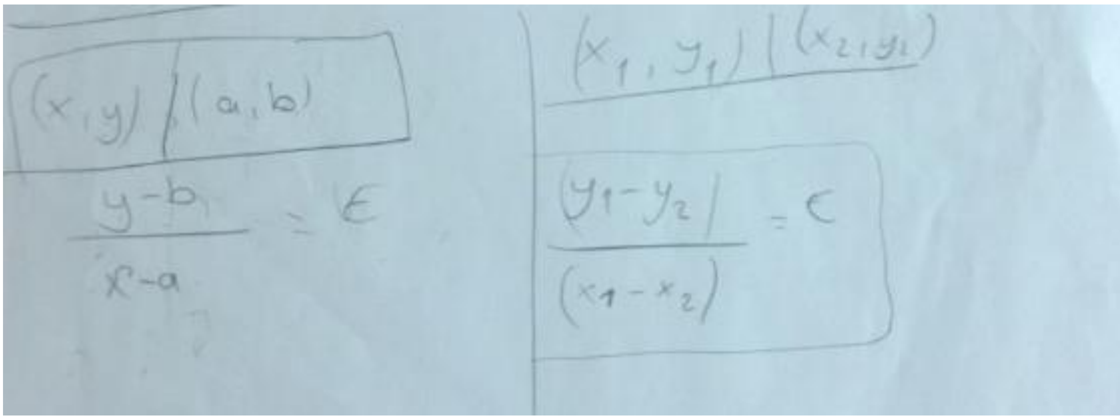


Koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimi için cebirsel bir genelleme oluşturmaları istendiğinde ise Ö5' in bireysel çalışma kağıdında cebirsel genellemeyi (x_1, y_1) ve (x_2, y_2) koordinatlarına sahip noktalarla yaptığı, grup çalışma kağıdına ise grup arkadaşlarının oluşturdukları (x,y) ve (a,b) koordinatlarına sahip noktalarla ulaşılan cebirsel genellemeyi de not ettiği görülmüştür. Yine bu sırada eğimi, baş harfi olan "E" harfi ile etiketlediği dikkat çekmiştir.

Ö5' in ulaştığı cebirsel genelleme için bireysel kağıdından bir görüntü

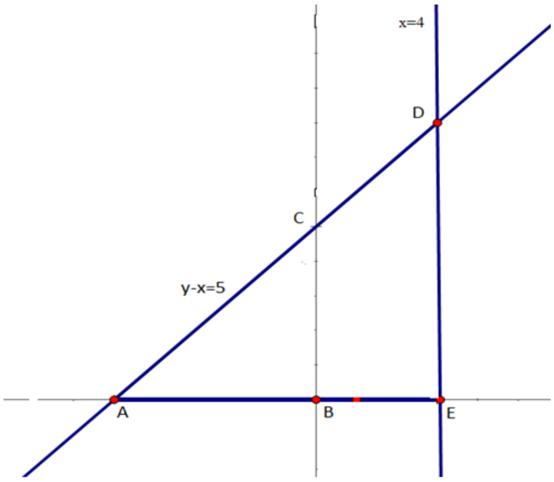


Ö5' in ve grup arkadaşlarının ulaştığı cebirsel genelleme için grup kağıdından bir görüntü



Ö5 ile Gerçekleştirilen 3. Klinik Görüşme

Öğrenme sürecinde dikey matematikleştirme yapma fırsatının verildiği ortamda, daha önceki derslerde keşfettiği eğim bilgisini koordinat düzlemindeki bir doğru için uyarlayabildiği görülen Ö5' in kendisiyle gerçekleştirilen son görüşmede doğrudan eğimi sorgulamayan bir alan hesaplama sorusunda, herhangi bir dışsal destek ya da uyaran beklemeksizin eğimi problem çözme sürecine çağırarak kullanabildiği görülmüştür. Ayrıca öğrencinin bu sırada eğim ile benzerlik kavramları arasında ilişki kurabildiği dikkat çekmiştir ki bu, öğrencinin kavramsallaştırma sürecinde önemli bir ilerleme sağladığını düşündürmektedir.



Koordinat düzleminde verilenlere göre ADE üçgeninin alanının, ABC üçgeninin alanının kaç katı olduğunu hesaplayınız.

Ö5: *.....artmış. (mırıldandı gibi ama tam anlaşılmadı)*

G: *Göster bakalım bize nereleriyse.*

Ö5: *Burası orijin değil mi?*

G: *Evet. Orası orijin.*

Ö5: *(koordinat düzlemindeki uzunlukları göstermeye başlıyor). sonra 4 müş burası. (y-x=5 doğrusunda) x' e 0 verelim y=5. Burası 5 olur(kağıt üzerinde yazıyor). Sonra y' ye 0 verelim x= -5 olur. O zaman burası -5(koordinat düzleminde noktaya -5 yazıyor).*

G: *Hı hı.*

Ö5: *Sonra bu ABC üçgeninin alanı 25/2.*

G:*Yaz istersen oraya görelim onları(kağıda yazması konusunda uyarıyor).*

G: *Nasıl buldun o kenarların 5 ve 5 olduğunu ABC üçgeninde?*

Ö5: *Şurada şey var: y-x=5 var. Y' ye 0 verdim x=-5 çıktı. Sonra x' e 0 verdim bu sefer de y=5 çıktı.*

Hıımm(anlık düşündü). Bunların ikisinin eğimi eşit.

G: *Eğimleri eşit. Nelerin eğimleri eşit?*

Ö5: *Şu iki üçgenin hipotenüslerinin eğimleri eşittir. Zaten burada bir küçük üçgen oluşturursak(DC' yi hipotenüs kabul eden üçgen), burası 4(BE nin karşısındaki kenarı gösteriyor) ve buradan da zaten 1 oluyor(yazarak benzerlik oranının 1 olduğunu gösteriyor) ve iki üçgen benzer olduğu için eğim yine değişmiyor.*

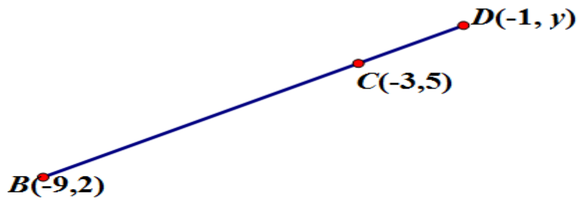
G: *Eğim neden değişmiyor?*

Ö5: *Çünkü bu ikisindeki oran sabit(üçgenleri gösteriyor). Bu iki üçgenin kenarları arasındaki oran sabit oluyor.*

G: *Peki eğimin değişmediğini söylüyorsun. Eğimin değişmemesinden bana bu iki üçgenin kenar uzunluklarını bulabilirmisin?*

Ö5: *Evet. CB doğru parçası 5 ve burada da AB doğru parçası 5. BE doğru parçasının da 4 cm olduğunu söylemiş(grafiği okuyarak söylüyor). Bu doğru parçasının eğimi(ABC üçgeninin hipotenüsünü gösteriyor) 5/5= 1 ve burada da(ADE) 9/x=1 olması lazım(DE' ye x diyor). Bu yüzden DE doğru parçasının da 9 olması lazım.*

Ayrıca Ö5' in eğim ile doğrudan ilişkili olmayan bir başka soruda, aynı doğru üzerinde eğimin değişmezliğini hiçbir dışsal destek almaksızın çağırarak kullanabildiği görülmüştür. Önce ufak bir işlem hatası yapmasına rağmen kendi hatasını kendisi düzeltebilmiştir. Bunun yanında öğrencinin yükseklik veyatay mesafeyi koordinatlar arası fark ile bulduğunun farkında olduğu da dikkat çekmiştir.

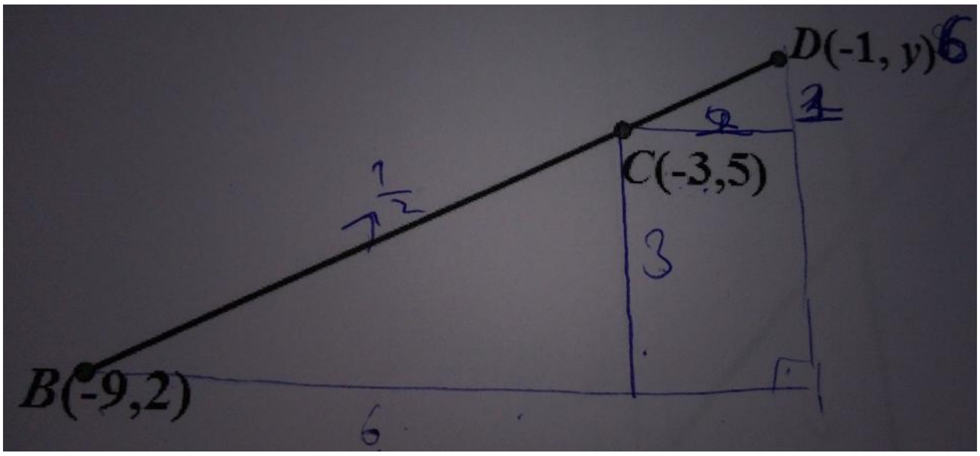


Bu doğru üzerinde 3 nokta verilmiştir. D noktasının y koordinatını bulabilir misin?

Ö5: *Şimdi burada ne demiş bize?(kendi kendisine soruyor ve soruya bakıyor) y koordinatını bulabilir miyim?*

G: *Evet y koordinatını bulabilir misin verilenlere göre?*

Ö5: *Şimdi burada bir tane üçgen oluşturacağım önce(verilen doğru parçasını hipotenüs kabul eden üçgeni çiziyor). (daha sonra konuşmadan aşağıdaki gibi şekli çiziyor)*



Ö5: *9-3, burası 6 oluyor, burası da 3 oluyor. Sonra nasıl desem? Burada şöyle bir küçük üçgen oluşturalım. Bunun eğimi ½(BC' yi hipotenüs kabul eden üçgenden BC' nin eğimini söylüyor veyazıyor). Sonra burada da kaç vermiş bize; -1 ve -3(küçük üçgen dediği üçgene bakıyor). O* *zaman burası 2. Bunun(Küçük üçgen) da eğiminin eşit olması için burasının 4 olması lazım. 4 olması için de burasının, bize bu x olduğu için pardon y, o yüzden burasının 9 olması lazım.*

G: *9 olması lazım diyorsun. Peki, 9 ise orası deneyebilir misin bulduğun sonuç yanlış mı doğru mu diye? Yani 9 nasıl buldun sen öyle söyleyeyim ben sana?*

Ö5: *Hı?*

G: *9' u nasıl buldun***?**

Ö5: *9? 9 neresiydi? 9 başka bir şeydi! Burada eğim… baştan alıyorum. Burada eğim; y koordinatları arasındaki mesafe 3, x koordinatları arasındaki mesafe 6(büyük üçgene bakıyor). Sonra burada x koordinatları arasındaki mesafe 2, burada da 1 olması lazım(küçük üçgene bakıyor ve onun yükseklik- yatay mesafesini hesaplıyor). Burası 1 olduğu için burasının da 6 olması lazım(y koordinatını söylüyor).*

G: *6 olması lazım.*

Ö5: *Yani 6.*

G: *Peki, x koordinatları arasındaki mesafeyi neden buluyorsun? X koordinatları arasındaki mesafe ne işine yarıyor senin?*

Ö5: *O benim yatay mesafeyi bulmamı sağlıyor.*

G: *Yüksekliği nasıl buluyorsun?*

Ö5: *Y' ler arasındaki farkla.*

G: *Y' ler arasındaki farkla.. peki eğimi nasıl hesaplıyorsun?*

Ö5: *Y' yi x' e bölüyorum.*

G: *Y' yi x' e bölüyorum derken ne demek istiyorsun? Daha açık söyle.*

Ö5: *(Büyük üçgeni göstererek)5' ten 2 ' yi çıkarıyorum 3 oluyor, sonra da -3'ten -9' u çıkarıyorum 6 oluyor. Ordan da ½ çıkıyor.*

Aynı doğru üzerinde eğimin değişmemesini hem görsel olarak(doğrunun zig zag çizmemesini vurguluyor), hem yükseklik veyatay mesafe değerlerinin doğrusal artması ile, hem de açının sabit kalması ile açıklayabildiği görülen Ö5' in eğimi farklı yorumlarla içselleştirdiği ve bir çok yönden anlamlı bir şekilde yapılandırdığı düşünülmektedir.

G: *Peki eğimin değişmediğini nereden biliyorsun bu yol üstünde?*

Ö5: *Bu doğru parçası aynı doğru parçası ve bu iki üçgen benzer. O zaman bu 3/6 (büyük üçgendeki eğim)bu da 1/2 (küçük üçgendeki eğim). Kenarlar arasındaki oran da sabit.*

G: *Mesela birazcık daha uzatsak bu doğruyu eğim değişmeyecek mi?*

Ö5: *Değişmeyecek. Zig zak çizmediğimiz sürece değişmez.*

G: *Eğim neden değişmiyor?*

Ö5: *Çünkü hep benzer üçgenler oluşuyor yani doğrusal olarak artıyor ve hep aynı açıda devam ediyor.*

Açı veya doğrusallığın dışında bir neden sunması istendiğinde ise bu öğrencinin, oluşturduğu dik üçgensel modellerin benzerliğiyle ilişkilendirme yaptığı ve yükseklik ile yatay mesafe arasındaki sabit oran ile görüşünü savunduğu görülmüştür. Bu da, öğrencinin eğimi bir oran olarak yapılandırabildiğini ve farklı birçok formda yorumlayarak farklı kavramlarla ilişkilendirdiğini düşündürmektedir.

G: *Doğrusal olarak devam etmesi sence, yani yukarıya doğru doğrusal devam etmesi, eğimin değişmemesini sağlıyor dedin ya, açı olarak değil de başka bir şeyden söyleyebilir misin bana? Ne oluyor da eğim sabit kalıyor?*

Ö5: *Ne oluyor da eğim sabit kalıyor?(kağıda bakarak anlık düşünüyor)*

G: *Şimdi benzer üçgenler diyorsun ama… şöyle sorayım o zaman benzer üçgenler olduğunda neden sabit kalıyor eğim?*

Ö5: *Benzer üçgenler arasındaki oran sabittir. O zaman hipotenüsler arasındaki oran da sabittir. Hipotenüs de yatay mesafe ile yükseklik arasındaki oranla belirleniyor o yüzden onların oranı değişmiyor. Yani eşit miktarda büyümüş oluyor ve o yüzden eğim de değişmiyor.*

Eğimi yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran olarak yapılandırdığı görülen Ö5' in koordinat düzleminde bir doğru için uyarlayabildiği ve istediği zaman öğretim sürecinde kendisinin ulaştığı y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesini kullanabildiği dikkat çekmiştir. Bu öğrencinin, formülü manipüle edebilmesinden ve onu keşfetme sürecini hiçbir dışsal destek almaksızın görsel desteklemeler yaparak açıklayabilmesi, onun bu genellemeyi sadece bir formül ya da algoritma olarak ezberlemediğini ortaya koymuştur.

G: *Sana iki nokta versem . Sen bana bu noktalardan geçen doğrunun eğimini bulabilir misin?*

Ö5: *Verin öğretmenim.*

G: *Bir saniye. 3' e 5 noktası ve 7' e 9 noktası.*

Ö5: *(Öğrenci not alıyor bu koordinatları).*

G: *Evet. Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplayabilir misin bana?*

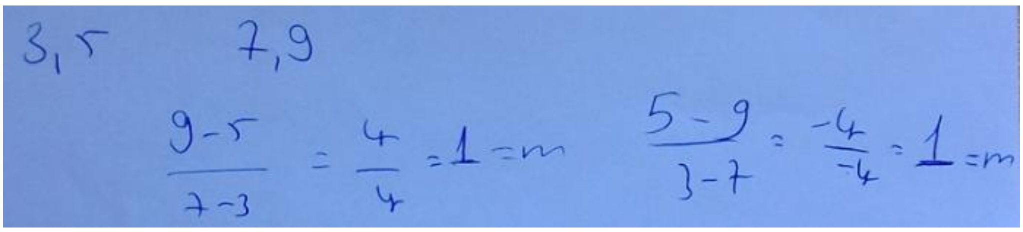
Ö5: *Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimi…*

G: *Çizmeden nasıl yaparsın?*

Ö5: *Hesaplayayım direkt. Şimdi 9' dan 5' i çıkarıyoruz.*

G: *Yazarak yap.*

Ö5: *Buradan da 7' den 3' ü çıkarıyoruz. 9'dan 5 çıkarınca 4;7' den de 3 çıkarınca 4 oluyor. Eğim de 1 oluyor.*



G: *Peki bunu bana formüle etmeni istesem edebilir misin?*

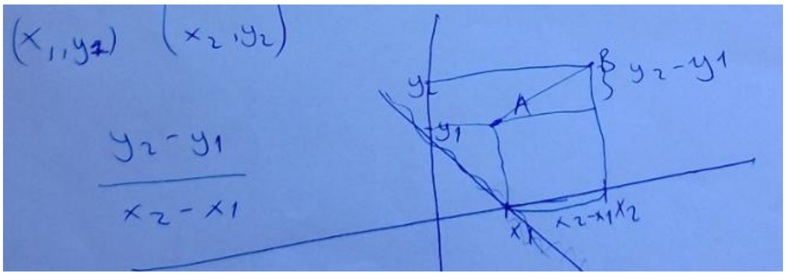
Ö5: *Şimdi burada ben 3 sayısına x_1 dedim sonra 5 sayısına y_1 dedim. 7' ye x_2 dedim, 9' a da y_2 dedim. Buradan da y_2' den y_1' i çıkarıyoruz; x_2' den de x_1' i çıkarıyoruz sonra da bölüyoruz. Ya da y_1' den y_2' yi, x_1' den x_2' yi çıkarıyoruz yine aynı sonuç çıkıyor(bunların hepsini yazarak gösterdi)*

G: *Neden aynı sonuç çıkıyor tersini yaptığında?*

Ö5: *Şimdi biz burada (3, 5) yazsaydık, x' e 3 y' ya de 5 verseydik, sonra da x ve y' ye 7 ve 9 verseydik 5' ten 9' u ve 3' ten 7' yi çıkarsaydık -4/-4 çıkardı. Buradan da eksi eksi artıya dönüşürdü ve sonuç yine 1 çıkardı. Yani değişmezdi.(bunların hepsini yazarak anlattı).*

G: *Hı hı. Bu formülü nasıl elde ettiğini koordinat düzlemi üzerinde gösterebilir misin bana? Yine cebirsel olarak yapmanı istiyorum.*

Ö5: *(koordinat düzlemini çiziyor). Şimdi burası x_1 olsun, burası y_1 olsun. Buradan bir tane…(bu ikisini nokta gibi düşünüp doğru çizdi). Sonra başka bir nokta. Şöyle…(öğretmen ve öğrenci gülüyor çünkü öğrenci diğer noktayı gösterirken bir önceki noktayı doğru gibi çizdiğini gördü ve düzeltti). X_2 ve y_2 olacak. Burası A burası B noktası olsun. Bu iki noktanın eğimini bulmak için x_1 ile x_2 arasındaki şu mesafeyi buluyorum(gösteriyor). X_2-x_1 oluyor. Buradan da y_2-y_1 oluyor. Buradan da y_2-y_1/ X_2-x_1 oluyor.*



Hemen ardından Ö5' in kendisine verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini bulması istendiğinde herhangi bir uyarılma ihtiyacı duymaksızın eğim değerini negatif bulmuş olması onun negatif eğimi en azından içselleştirme sürecinde olduğu yorumunu akla getirmiştir.

G: *İki nokta vereceğim sana bakalım nasıl hesap yapacaksın. 3' e5 ve 7' ye 4 noktası(bu sırada not alıyor). Bu iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplayabilir misin?*

Ö5: *Şimdi az önce de yaptığımız gibi 5' ten 4' ü çıkarıyoruz 1; sonra da 3'ten 7' yi çıkarıyoruz -4. Buradan da eğim 1/-4 , -1/4 oluyor.*

Bir doğrunun eğiminin negatif oluşunu, öğretim sürecinde de vurguladığı gibi, onun "sağa-sola yatık" oluşu ile açıkladığı görülen öğrencinin ayrıca doğru ile x ekseni arasındaki açının "dar-geniş" oluşu ile de ilişkilendirme yaparak bir genellemeye ulaşması dikkat çekmiştir.

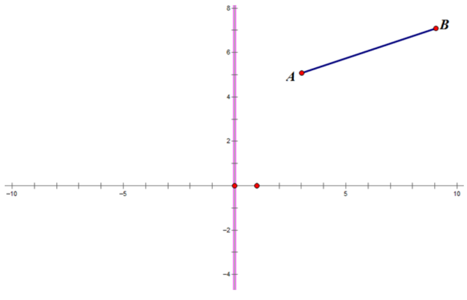
G: *Eğimi sen negatif buldun bu sefer. Mesela çizmiş olsan eğim nasıl çıkacak? Yani göstersen bunu eğimin negatif olduğunu pozitiften farklı bir doğru mu çıkacak?*

Ö5: *Nasıl yani?*

G: *Yani şöyle demek istiyorum: eğim negatif çıktığında o doğrunun karakteristik bir özelliği var mı? Yani Negatif doğrular hep böyle olur öğretmenim diyebiliyor musun**?***

Ö5: *Negatif doğrular hep sola yatık olur, pozitif olanlar hep sağa yatık olur. Ya da negatif olanlar geniş açı, pozitif olanlar hep dar açı olur.*

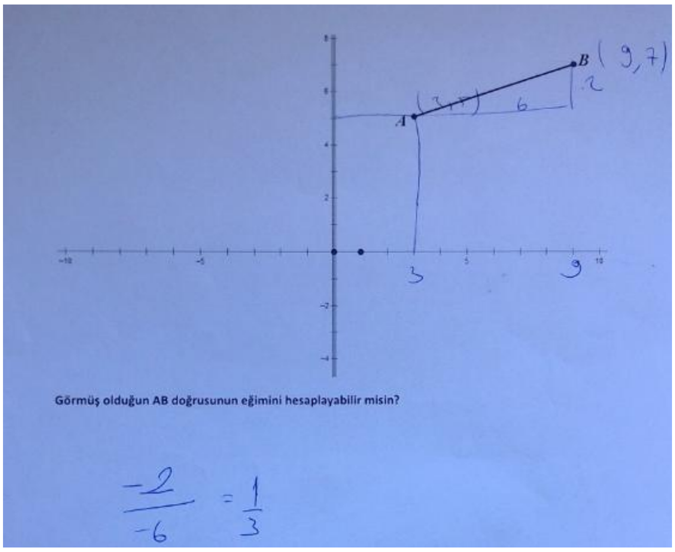
G: *Pekala. O zaman bu sefer şuna bakmanı istiyorum senden(koordinat düzleminde verilmiş AB doğru parçasının eğimi sorusu). Görmüş olduğun AB doğrusunun eğimini hesaplayabilir misin?*



Ö5: *A ile B' nin koordinatlarını bulayım mı?*

G: *Nasıl istersen.*

Ö5: *(Yaptığı her şeyi yazıyor)A' nın koordinatları (3,5), B' nin koordinatları da (9,7) noktası. Sonra bunlardan da az önceki gibi 5' ten 7' yi çıkarıyoruz; -2 yapıyor. 3' ten de 9' u çıkarıyoruz; -6 yapıyor. Bu da eşittir 1/3 oluyor(formül gibi düşünerek yaptı). Ya da buradan 9'dan 3 çıktı 6, burası da 7' den 5 çıktı 2 oluyor. Buradan da yine 1/3 çıktı.(koordinat düzleminde formülsüz uzunlukları göstererek yaptı).*



G: *1/3 oluyor.*

Ö5: *Sağa yatık olduğu içim de pozitif oluyor. Bir de dar açı olduğu için de pozitif oluyor.*

Verilen bir doğrunun eğimini hem yüksekliğin yatay mesafeye oranı olarak hem de y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesi ile hesaplayabildiği, buna bağlı olarak bu ikisi arasında ilişki kurarak, eğimin geometrik oran yorumundan cebirsel oran yorumuna anlamlı bir geçiş yapabildiği dikkat çeken Ö5' in, denklemi verilen bir doğrunun eğimini nasıl hesaplayabileceğini, onu adım adım ortaya koymaksızın açıklayabildiği görülmüştür.

> ***G:*** *Sana şöyle bir şey vereceğim. Yaz. 5x+4y-40=0 (öğrenci not alıyor) denklemine sahip olan doğrunun eğimini hesaplayabilir misin? Nasıl?*
>
> ***Ö5:*** *Sıfır veririm.*
>
> ***G:*** *Neye?*
>
> ***Ö5:*** *X ve y koordinatlarını bulurum. Çizerim.*
>
> ***G:*** *Çizdikten sonra ne yaparsın?*
>
> ***Ö5:*** *Çizdikten sonra işte yüksekliğini yatayına bölerim.*

Kendisinden denklemi verilen doğruyu koordinat düzleminde çizmeksizin eğimini hesaplaması istendiğinde, yükseklik ile yatay mesafeye doğrunun y ve x koordinatlarını kestiği noktalardan elde ettiği ve sonuca geometrik oran yorumundan ulaştığı görülmüştür. Bu öğrencinin dik üçgensel modeli içselleştirerek daha üst düzey sorularda bilişsel bir araç(fiziksel olarak ortaya konulma zorunluluğu olmayan) olarak kullanmaya başladığı dikkat çekerken sadece zihninde canlandırma yaparak herhangi bir çizim ortaya koymaksızın eğime ulaşabilmesinin ileri düzeyde kavramsallaştırma sağlaması açısından önemli bir gösterge olduğu düşünülmüştür.

> ***G:*** *Peki "çizme koordinat düzleminde" desem sana ne yaparsın? Başka bir durumda hani yükseklik yatayını bulmadan başka türlü eğimi bulabilir misin?*
>
> ***Ö5:****…*
>
> ***G:*** *Mesela eğimi bulacaksın. yükseklik/yatay biçiminde bulma diyorum. Nasıl bulabilirsin başka?*
>
> ***Ö5:*** *Nasıl bulabilirim(kendi kendisine soruyor)? Hıhh buldum. Şimdi noktaları yine bulacağım. Sıfır vereceğim ama başka türlü bulacağım. Şimdi burada x' e sıfır verdim y bize kaç oldu? 10 oldu. Bu sefer y' ye sıfır verdiğimizde x, 8 olacak. X=8 oldu. Biz y' yi x' e bölüyorduk. Buradan 10/8 oldu. Bu da 5/4 oldu.*

> ***G:*** *Neden y' yi x' e bölüyorsun?*
>
> ***ö5:*** *Çünkü y bize burada yüksekliği veriyor, x de yatay mesafeyi.*

Ardından doğru üzerinde eksenleri kestiği noktaların dışında herhangi iki nokta da alabileceğinin farkında olduğunu ortaya koyan Ö5' in ufak bir hata yapmasına rağmen hemen toparlayarak bu sefer cebirsel oran yorumundan yararlanarak eğimi hesaplayabildiği dikkat çekmiştir. Aynı soru içerisinde eğimin farklı yorumlarını kullanabildiği görülen Ö5' in eğim ile ilgili vardığı genellemeleri sadece anlamlandırarak benimsemediği aynı zamanda içselleştirerek problem durumlarında anlamlı bir şekilde kullanabildiği görülmüştür.

.

G: *Peki sen x' e sıfır verdin ya sıfır vermek zorunda mısın?*

Ö5: *Hayır vermek zorunda değilim ama en basiti o.*

G: *Mesela sıfır vermeden de yap o zaman madem değilsin.*

Ö5: *Tamam yapayım. 1 verdim… o zaman dur ben bunun şeyden yapayım. 5x+4y-40=0' dan yapayım. Y' ye 1 verdim. -36 oldu attım karşı tarafa x buradan 36/5 oldu(işlemleri yaparken kağıtta sesli olarak da anlatıyor). Sonra x' e 1 verdim. X' e 1 verince 4y=35 oldu. y=35/4 oldu. şimdi 35/4 ' ü 36/ 5' e böleceğiz(işlem yaptı ve duraksadı).*

G: *Ne oldu?*

Ö5: *Sonuç yanlış çıktı.*

G: *Neden yanlış çıktı?*

Ö5: *…(yanlışı bulmaya çalışıyor).*

G: *Sen burada neyi buldun? y' ye bir değer verdin x' i buldun. Bu ne?*

Ö5: *x.*

G: *Aslında ne bulmuş oldun? Y' ye bir değer(öğrenci araya girdi)*

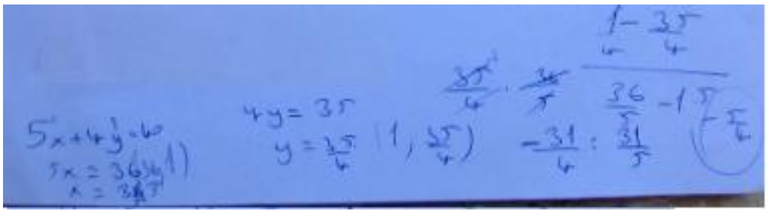
Ö5: *Koordinat bulmuş oldum. Anladım. Burada koordinat 36/5 oldu. (36/5, 1) oldu. sonra burada da x' e kaç vermiştim? 1 vermiştim. (1, 35/4) oldu. Bunlardan birbirini çıkaracağım. 1' den 35/4' ü çıkaracağım, sonra da 36/5' ten 1 çıkarılmış hali bulacağım(yazarak gösteriyor). Sonra da böleceğim.*

G: *Böl bakalım.*

Ö5: *Burası -31/4 olacak(payı buluyor işlem yaparak). Burası da 31/5 olacak(paydayı buldu işlem yaparak). (İkisini bölme işlemi olarak yazdı) bunu ters çevirirsek(paydadan bahsediyor) sonuç yine -5/4 olacak.*

G: *-5/4 olacak. Çıktı mı?*

Ö5: *Çıktı.*



Sonuç olarak Ö5' in eğimi, sadece yüksekliği yatay mesafeye böleceği bir algoritma ya da yükseklik/yatay mesafe formundaki bir formül ile hesaplayacağı bir kavram olarak yapılandırmadığı, aksine bağlı olduğu uzunluk değişkenleri arasındaki oran olarak yapılandırmayı başardığı düşünülmüştür. Eğimi, dik üçgensel modelden yararlanarak, açı ile ilişkilendirmesini sağlamasının yanı sıra benzerlik kavramı ile de ilişki kurmayı başardığı görülmüştür. İnformal bilgilerini sürece çağırabildiği ve onlarla formalleşen eğim kavramı arasında köprü görevi sağlayacak dik üçgensel model geliştirdiği ve onu bir bilişsel araç haline getirdiği sonucuna varılan Ö5' in koordinat düzleminde bir doğru için de önceki öğrenmeleri üzerine eğim şemasını genişletebildiği görülmektedir. y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesine kendisinin keşfettiği görülen bu öğrencinin, birbirinden kopuk bir şekilde eğimin farklı yorumlarını ezberlemekten ziyade bu öğretim sürecinde geometrik oran yorumundan cebirsel oran yorumuna geçişi anlamlı bir şekilde yapabildiği sonucuna varılmıştır ki ileride genişleteceği eğim şeması için de eğimin farklı yorumları arasında ilişki kurabilmesinin temellerinin atıldığı düşünülmektedir.

DÖRDÜNCÜ BÖLÜM
TARTIŞMA, SONUÇ ve ÖNERİLER

Bu bölümde öncelikle elde edilen bulguların alan yazın doğrultusunda tartışılmasına ve daha sonra bu araştırmadaki uygulamaya ve ilerideki araştırmalara yönelik önerilere yer verilmiştir.

Tartışma

Eğimin fiziksel, geometrik ve cebirsel yorumu (Stump, 1999) temelinde desenlenen öğrenme sürecinde öğrencilerin informal yaşantılarından edindikleri eğimin fiziksel yorumu hakkındaki bilgi ve stratejilerini öğrenme sürecine yansıttığı ve fiziksel yorumdan geometrik yoruma geçiş yaptıkları görülmüştür. Ardından geometrik yorumdan cebirsel forma geçiş yapılarak eğimin anlamlı bir şekilde, temsiller arası ilişki kurularak öğrenilebilmesinin onlarda güçlü bir eğim kavramı oluşumu sağladığı sonucuna varılmıştır. Stump (1999) da öğretmen adayları üzerindeki çalışmasında, temsiller arası ilişkinin kurulamamasının eğimin kavramsallaştırılmasında olumsuz etkisinin olduğu sonucuna varmıştır. Dolayısıyla temsiller arasındaki bağların kurulmasının, eğim için ileri düzeyde bir bilişsel yapı oluşumu sağlayacağı düşünülmektedir. Bu araştırmada, henüz sekizinci sınıftan başlayan eğim oluşturma sürecinin, temsiller arası geçişler (ilişki kurularak) yapılarak gelişmesi ile anlamsız bilgilerin önüne geçilebileceği görülmüştür. Eğimin tüm temsillerinin bir anda verilmesi ve ardından bu temsiller arası ilişkilerin kurulmasını beklemek yerine adım adım fiziksel yorumdan geometrik yoruma, geometrik yorumdan cebirsel yoruma geçiş yapılmasının ve bu süreçte RME ilkelerine dayalı matematikleştirmenin esas alınmasının uygun olabileceği sonucuna varılmıştır.

Tüm öğrencilerin informal bilgi ve stratejilerini öğrenme sürecine yansıtabilme konusunda oldukça başarılı olduğu görülmesine rağmen oran bilgisinin, eğimin geometrik yorumunun süreç düzeyinde kavramsallaştırılmasında önemi dikkat çekmiştir. Cheng (2010)' in nicel araştırmasında elde ettiği eğim ile oran arasındaki pozitif korelasyonun, nitel olarak desenlenen bu çalışmada derinlemesine incelenmesi imkanı bulunmuştur. Öğrencilerin oran-orantı kavramına en azından süreç düzeyinde sahip olmasının, onların eğimi özel bir oran çeşidi olarak anlamlandırabileceklerini ve böylece eğimin süreç kavramsallaştırmasına geçebileceklerini ortaya koymuştur. RME' nin etkileşim ilkesine uygun olarak düzenlenen heterojen grupların, grup içi ve gruplar arası sınıf tartışmalarının özellikle önkoşul bilgilerde sıkıntı yaşayan bireyler için öğrenme fırsatlarını arttırdığı sonucuna varılmıştır. Hem bireysel çalışmalarında hem de grup içinde yapılan tartışmalarda etkili bilgi alışverişinde bulunmanın önkoşul bilgilerden kaynaklanan dezavantajları en aza indirgediği görülmüştür. Dolayısıyla öğrenme sürecinde bireyin olumsuz tutum geliştirerek kavramı anlamlandırmaksızın sadece işlemsel öğrenmesi ya da işlemsel veya kavramsal hiçbir şekilde öğrenme gerçekleştirememesi gibi istenmeyen durumlarının büyük ölçüde önüne geçildiği görülmüştür. Öyle ki araştırmanın katılımcıları arasında eylem öncesi (pre-action) kavram oluşumuna sahip olan kimse görülmemiş ve bunun yanında eylem düzeyinde olan öğrencilerin de eylemin sürece içselleştirilmesi yolunda dik üçgensel modelin dinamik olarak zihinde yer edinmeye başlaması, y_2-y_1/x_2-x_1' in anlamsız bir formül olarak ezberlenmemesi, eğimin yükseklik veyatay mesafeye göre yorumlanabilmesi gibi olumlu adımları görülmüştür. Dolayısıyla eğim için önkoşul olan oran kavramının, öğretimde ondan kaynaklanan dezavantajlarını en aza indirgemek için RME' ye dayalı bu araştırmadaki gibi desenlenen bir öğretimin etkili olduğu görülmüştür.

Simon ve Blume (1994)' ün eğim temelinde oranın bir ölçüm olarak anlaşılması üzerine öğretmenlerin alan bilgilerini geliştirmeye yönelik araştırmasından elde ettiği sonuçlar doğrultusunda, eğimleri aynı fakat büyüklükleri farklı rampaların eğimin, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki bir oran olduğunun fark edilebilmesi için kullanılabileceği önerisi bu çalışmada elde edilen sonuçlarla tutarlılık göstermektedir. Adım adım matematikleştirme ve keşfetme sırasında oldukça uzun bir süreç olarak dikkat çeken yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın sabit kalmasının eğimin değişmemesini sağlaması, buna bağlı olarak eğimin yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran olduğu çıkarsamasının yapılmasının, eğimin bir oran olarak anlaşılmasında, dolayısıyla süreç düzeyinde kavramsallaştırma sağlanmasında çok kritik bir süreç olduğu görülmüştür. Öğrencilerin eğimi bir oran olarak oluşturmasında yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranı kendilerinin keşfetmeleri, kendileri keşfedemezlerse grup içi ve gruplar arası tartışmalarda bu keşfi anlamlandırmaları gerekmektedir.

Lobato ve Thanheiser (2002)'in oranın bir ölçüm olarak anlaşılmasına yönelik araştırmasında, eğimi oluşturma sürecinin dört bileşenine ulaştığı görülmüştür. Bu araştırmada da eğimin geometrik yorumuna yönelik olarak, bu bileşenlere benzer şekilde eğime etki eden uzunluk değişkenlerinin (yükseklik veyatay mesafe) fark edilmesi ve bu iki değişken arasındaki oransal ilişkiden eğimin çıkarsanması böylece bir oran olarak eğimin oluşturulabileceği sonucuna ulaşılmıştır. Ancak Lobato ve Thanheiser (2002)' in lise öğrencileri ile yaptığı bu araştırmada eğimin sadece geometrik yorumu ele alınmış ve DGS yardımıyla öğretimi gerçekleştirmiştir. Lobato ve Thanheiser, öğrencileri yükseklik ile yatay mesafenin arasındaki hangi ilişkinin, dikliğin ölçümü için uygun olduğuna yönelik sorgulama gerektiren bir problem durumu ile karşı karşıya bırakmıştır. Araştırmasında DGS yardımıyla dinamik olarak, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran değerlerinin dikliğin ölçümü için tutarlı olduğu sonucuna ulaştıran bir öğretim ile öğrencilerin eğimin bir oran olduğunu hatırladıklarını vurgulamaktadır. Eğer sekizinci sınıf düzeyindeki öğrencilerle böyle bir çalışma yapılmış olsaydı hatırlama olmayacaktı ve öğrencilerden bu ilişkiyi keşfetmesi beklenecekti. Sekizinci sınıflarla yapılan ve eğimin bir oran olarak keşfedilmesini gerektiren bu tez çalışmasında ise öğrenciler, aynı doğrusal görsel (bir dağ eteği, rampa, bayır vb.) üzerinde farklı noktalarda duran ya da ilerleyen bir kişi için eğimin değişmemesi gerektiği informal bilgisini sürece çağırmışlardır. Bunun yanında formal anlamda ise yükseklik ile yatay mesafenin değiştiğini o zaman eğimin de değişmek zorunda olabileceği karmaşasıyla karşı karşıya kalmışlardır. Bunun sonucunda informal bilgileriyle formal bilgiler arasında çıkan çatışma ile bilişsel dengeleri bozulmuştur. Devam eden süreçte yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın değişmediğini keşfederek, informal bilgileriyle tutarlı hale gelen bu bilgiden eğimin bir oran olduğunun keşfedilerek anlamlandırılmasıyla bilişsel dengelerinin yeniden oluşturulması sağlanmıştır. Dolayısıyla eğimin oluşturulması sürecinde gerçekçi bağlam problemlerinde öğrencilerin modelleme, yorumlama, tartışma, keşfetme gibi matematikleştirme faaliyetlerine yer verilerek öğrenmelerine fırsat sağlayan bir öğretim sürecinin eğimin bir oran olarak oluşturulmasını sağlamada, bunun sonucunda süreç düzeyinde kavramsallaştırılmasında etkili olacağı sonucuna varılmıştır.

Duncan ve Chick (2013) öğretmen adaylarıyla yaptığı çalışmasında dikliğin bir oran olarak anlaşılabilmesinin lineer cebirdeki başarıya ve eğimin bir oran olarak yapılandırılmasına bağlı olduğu sonucuna ulaşmıştı. Bu araştırmada da doğru denklemi ve oran-orantı kavramına tam anlamıyla sahip olduğu düşünülen katılımcının (Ö5) eğimi nesne düzeyinde kavramsallaştırdığı düşünülmüştür. Bununla birlikte bu kavramlara yönelik araştırma öncesinde iyi bir performans koymasına rağmen ancak eylem düzeyinde kavramsallaştırma sağlayabilen Ö4' ün öğretim sürecinde ve klinik görüşmelerde doğru denklemi ve oran-orantı kavramlarında daha çok işlemsel başarısının olduğu, kavramsallaştırmada sıkıntı yaşadığı görülmüştür. Bu sebeple eğimin en az süreç düzeyinde kavramsallaştırılmasında, öğrencilerden doğru denklemi ve oran-orantıyı işlemsel öğrenmeden ziyade kavramsal olarak öğrenmeleri beklenmektedir. Bir diğer önkoşul bilgisi kabul edilen bağımlı-bağımsız değişken kavramı için ise henüz sekizinci sınıf düzeyinde, günlük yaşamdaki bağımlılık ilişkisinin fark edilmesi ve yorumlanmasının yeterli olacağı sonucuna varılmıştır. Ancak bağımlı-bağımsız değişken kavramına matematiksel anlamda sahip olmanın, eğim şemasının lise ve üniversite yıllarında devam eden genişlemesinde önemli bir önkoşul bilgisi olacağı da düşünülmektedir.

Tabaghi, Mamolo ve Sinclair (2009)' in üniversite öğrencileriyle gerçekleştirdiği, DGS'nin eğimin kavramsallaşmasına olumlu katkı sağladığı sonucuna vardığı çalışmasında, dinamik olarak bir doğru üzerinde eğim değerlerinin değişiminin gözlemlenmesinin kavramsallaştırmaya olumlu katkısını ileri sürmüştür. Crawfort ve Scott (2000) da benzer şekilde eğimin değişim oranı olarak anlamlandırılması için gerçek yaşam probleminin tablolaştırılması, tablodan elde edilen sıralı ikililerle grafik üzerinde doğru denkleminin elde edilmesi ve bu şekilde eğim ile değişim arasındaki ilişkinin dinamik olarak görülmesini önermiştir. Bu araştırmada da yükseklik ile yatay mesafe arasındaki doğru orantılı azalış ve artışı anlamlandıramayan, sabit oranı fark ederek eğimin bu oran olduğunu keşfedemeyen öğrenciler olmuştur. Öğretim sürecine tam bu sırada dinamik geometrik yazılımların entegre edilerek keşfi yapamayan ve daha sonraki tartışmalarla da anlamlandıramayan öğrencilerin, eğimin değişmemesi ve yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın da değişmezliği arasındaki ilişkiyi dinamik olarak gözlemlemesinin kavramsallaştırmaya olumlu katkı sağlayacağı düşünülmektedir.

Eğimin matematikleştirilerek formal bir kavram olarak oluşturulması sürecinde karşılaşılan bazı sıkıntılar alanyazında daha önceden görülmüş sıkıntıların varlığını desteklemiştir. Clement (1985)’ in ortaya koyduğu yükseklik ile eğim kargaşası bu araştırmada da ortaya çıkmıştır. Yükseğe çıkıldıkça her zaman eğimin de artacağı ya da tam tersi şeklinde görülen, yatay mesafenin dikkate alınmadan yüksekliğin eğim için tek etken olarak düşünülmesi yanılgısı bu araştırmada da görülmüştür. Ancak öğrencilerin eğim için tek etkenin yükseklik olmadığını, yatay mesafenin hatta açının da bir etken olduğunu öğretim sürecinde keşfettikleri, ya da yapılan keşfi etkileşim yoluyla anlamlandırdıkları görülmüştür. Araştırma sonunda tüm öğrencilerin, eğimin bağlı olduğu değişkenleri önce dik üçgensel modeli bir araç gibi kullanarak daha sonra modelden bağımsızlaşarak anlamlı bir şekilde savunabildiği görülmüştür. Ayrıca eğimi hesaplanan doğrunun, kendisinin uzunluğunun eğimini etkileyen değişkenlerden biri olup olmadığı sorgulamasının da öğrencilerin yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranı keşfederek eğimi anlamlandırıp oluşturmasında ve eğimin informal ile formal anlamları arasında ilişki kurmasında önemli rol oynamıştır.

Alanyazında eğimin bir oran olarak yapılandırması ile ilişkili çalışmalara (Simon ve Blume, 1994; Lobato ve Thanheiser, 2002; Duncan ve Chick, 2013) rastlanırken eğimin cebirsel yorumunun (y_2-y_1/x_2-x_1) oluşturulmasına ilişkin herhangi bir çalışmaya rastlanmamıştır. Bu araştırmada öğrencilerin yükseklik/yatay mesafe’ yi koordinat düzleminde bir doğru için yeniden düzenlemelerine yönelik adım adım y_2-y_1/x_2-x_1 cebirsel genellemesine ulaşmaları amacıyla bir dizi dikey matematikleştirme etkinlikleri uygulanmıştır. Katılımcı öğrencilerden sadece eylem düzeyinde olan Ö1’ in bir algoritma geliştirerek bu genellemeyi formül gibi ezberlediği düşünülmüş ancak yapılan görüşmede, onun da koordinatlar arası fark ile aslında yükseklik veyatay mesafeyi bulduğunun farkında olduğu sonucuna varılmıştır. Ayrıca kendiliğinden gelişen dik üçgensel modelin, bu matematikleştirme etkinliklerinde durumdan bağımsızlaşarak eğim için fiziksel olarak ortaya konma gereği duyulan bir bilişsel araç konumuna geldiği görülmüştür. İlerleyen zamanlarda ise önkoşul bilgilere tam anlamıyla sahip olduğu düşünülen Ö5’ in bu aracı hiçbir şekilde ortaya koymaksızın kullandığı, hatta belki onu kullandığının kendisinin bile farkında olmadığı görülmüştür. Kendiliğinden gelişen bu modelin, bu öğrenci için, fiziksel olarak ortaya konma gereği duyulmayan, eğim kavramının içerisinde ayrılmaz bir parça olarak yer alan bilişsel bir araç konumuna geldiği sonucuna varılmıştır. RME’ de kendiliğinden gelişen modellerin başlangıçta duruma özgü bir araç (model-of) olarak ortaya çıktığı, daha sonra durumdan bağımsızlaşarak bilişsel bir araç, kendi başına bir varlık olarak (model-for) geliştiği ileri sürülmektedir. Bu araştırmada da kendiliğinden gelişen dik üçgensel modelin model-of olarak ortaya çıktığı ardından model-for olacak şekilde gelişim gösterdiği görülmüştür. Streefland' ın vurguladığı model-of' tan model-for' a doğru sıçrama (kayış) süreci bu araştırmada açıkça görülmüştür.

- Duruma özgü model
- Fiziksel olarak ortaya konulma gerekliliği duyulan bilişsel model
- Fiziksel olarak ortaya konulma gerekliliği duymayan bilişsel model.

Bu sıçramayı yapabildiği düşünülen Ö5' in ileri düzeyde kavram oluşumu gerçekleştirmesi de model-of' tan model-for' a kayışın gerekliliğini ortaya koymuştur. Bu kayışın gerçekleşebilmesi için önkoşul bilgilerin varlığının, hedeflenen keşifleri yapabilmenin, informal ve formal bilgi arasında ilişkilendirme yapıp ve ardından oluşturduğu formal bilgiyi dikey matematikleştirme sürecinde yansıtabilmenin önemli olduğu sonucuna varılmıştır.

Barr (1981)' ın araştırmasında eğim kavramına ilişkin ulaştığı ve cebirsel yorumu ile ilgili olan,

- bir doğrunun iki noktası, koordinatları ile verildiğinde, "x değerlerindeki değişimi y değerlerindeki değişime mi bölüyorduk yoksa tam tersi mi?" karışıklığı,
- iki noktası verilen bir doğrunun eğimini bulamama,

güçlüklerinin bu çalışmadaki eylem düzeyindeki öğrencilerde bile görülmemesi RME' ye dayalı yürütülen öğretimin eğim kavramının oluşturulmasında etkililiğini gösterdiği düşünülmektedir.

Bu araştırma, eğim gibi günlük yaşamda yansımaları sıklıkla görülen başka matematiksel kavramların da benzer şekilde RME yaklaşımına dayalı olarak desenlenen bir öğretim ile işlemsel öğrenmenin yanında kavramsal öğrenmenin de gerçekleştirilmesi açısından önemli sonuçlar ortaya koymuştur. RME yaklaşımının etkililiğini kanıtlamaktan ziyade öğrencilerin bağlam problemlerinde informal bilgi ve stratejilerini yansıtma, düşünme, tartışma, yorumlama, keşfetme ve keşifleri anlamlandırma, model gelişimi, yatay ve dikey matematikleştirme aktivitelerinde karşılaşılan ve karşılaşılması olası zorluklar hakkında ayrıntılı bilgiler sağlayan bu araştırmanın kısaca matematikleştirme sürecinin betimlenmesi açısından alanyazında önemli bir yer edindiği düşünülmektedir. Ayrıca eğim kavramına yönelik alanyazında APOS teorik çerçevesinde de herhangi bir çalışmaya rastlanmamış olması bu çalışmayı özgün kılmaktadır. Türevin oluşturulması için en önemli ön bilgilerden biri olduğu sonucuna varılan eğim kavramının, öğrencilerin formal anlamda ilk kez karşılaştığı sekizinci sınıf seviyesinde oluşturulma sürecinin APOS teorik çerçevesinde incelenmesi ile alanyazında önemli bir boşluk doldurulmuştur.

Alanyazında, RME yaklaşımına dayalı olarak yürütülen bir çalışmada kavramsal öğrenme düzeylerinin APOS teorik çerçevesinde incelendiği bir çalışmaya rastlanmamış olmasının da bu çalışmada elde edilen sonuçları önemli kıldığı düşünülmektedir. Matematikleştirme etkinlikleriyle bizzat öğrencinin keşfederek yapılandırdığı bir öğretim sürecini temel alan RME yaklaşımının, eğer önkoşul bilgilerden kaynaklanan dezavantajlar en aza indirgenirse en az süreç düzeyinde kavramsallaştırma sağlama fırsatı yarattığı görülmüştür.

Ayrıca bu araştırmada ev ödevlerinin, kavramsallaştırma sürecinde önemli bir role sahip olduğu düşünülmüştür. Öğretim sürecinde öğrencilerin eğime ait bilişsel gelişimlerinde kopukluk olmasını önlemek amacıyla ev ödevler verilmiş ve böylece unutma, uygulama eksikliği gibi istenmeyen durumların önüne geçilmesi hedeflenmiştir. Öğretim sürecinde ödevlerin kontrolü bizzat araştırmacı tarafından yapılmış ve ödevleri yaptığı görülen öğrencilerin, sonraki matematikleştirme etkinliklerinde önceki öğrendiklerini yansıtmada güçlük yaşamadığı görülmüştür. Bu sebeple öğrencilere matematikleştirme etkinliklerine destek olarak ev ödevleri verileceği düşünülmektedir.

Sonuç

Bu bölümde, elde edilen bulgular temelinde doğrudan araştırma sorularına yönelik sonuçlara yer verilmiştir. Sonuçlar, eğimin matematikleştirilmesi ve APOS çerçevesinde oluşturulmasına ilişkin olmak üzere iki başlık altında verilmiştir.

Ortaokul 8. Sınıf Öğrencilerinin "Eğim" Kavramını Matematikleştirme Sürecine İlişkin Sonuçlar

Öğrencilerin günlük yaşamda sıklıkla deneyime girdikleri eğim kavramına ilişkin informal bilgilerini öğrenme sürecinde ilk bağlam durumundan itibaren çağırabildikleri görülmüştür. Tüm öğrencilerin “dik, yokuş, eğik, bayır” gibi eğimin daha çok günlük yaşamdaki yansımaları olarak düşünülen formlarına sahip oldukları görülmüş ve böylece yabancı olmadıkları bir kavramı öğrendikleri için yatay matematikleştirme sürecinde oldukça aktif olarak rol alabilmeleri dikkat çekmiştir.

Eğimin bağlı olduğu değişkenlerin keşfedilmesinin amaçlandığı ilk iki derslik öğrenme sürecinde yükseklik, yatay mesafe, açı ve hatta doğrunun kendisi ile eğimin ilişkilendirilebildiği görülürken, grup içi ve gruplar arası sınıf tartışmalarında tüm öğrencilerin eğimi, bağlı olduğu bu değişkenlere göre yorumlarken dik üçgensel modeli benimsedikleri görülmüştür. Onların informal bilgilerinden formal bilgiye doğru geçişlerinde bir köprü görevi gören bu model öncelikle Ö5 tarafından kullanılmış ve ardından hiçbir yönlendirme olmaksızın tüm öğrenciler tarafından daha ilk iki ders içerisinde yavaş yavaş içselleştirilmeye başlanmıştır.

Eğimin bağlı olduğu uzunluk değişkenlerinden yüksekliğin, eğimi etkileyen bir değişken oluşunun daha çabuk fark edilip yorumlandığı görülmüştür. Bunun, öğrencilerin informal bilgilerinden edindikleri deneyimden kaynaklanabileceği düşünülebilir. Çünkü birey günlük yaşamdaki bir yokuşu ya da bayırı tırmanırken genellikle yükseğe çıktığını ya da çıkacağını düşünerek yorum yaparken yatayda aldığı mesafeyi ise daha az önemser ve dolayısıyla eğimin bağlı olduğu değişkenlerden yatay mesafenin keşfedilmesi de daha çok etkileşim gerektirmiştir. Eğimin bağlı olduğu açı değişkenini keşfeden öğrencilerin ise dik üçgensel modeli önce geliştiren veya daha çabuk kullanmaya başlayanlar olması dikkat çekmiştir.

Gerçekleştirilen klinik görüşmelerde tüm katılımcıların eğimin bağlı olduğu değişkenleri ifade edebildiği görülürken, aynı zamanda eğimi bu değişkenlere göre yorumlarken geliştirilen dik üçgensel model üzerinden savunma yapmaları dikkat çekici olmuştur. Dik üçgensel modeli dinamik olarak hareket ettirmekte zorlanan Ö1’ in eğimi bağlı olduğu değişkenlere göre yorumlarken sıkıntı yaşadığı belirlenmiştir. Dik üçgensel modeli dinamik olarak hareket ettirebildiği sonucuna varılan diğer dört katılımcının ise eğimi, bağlı olduğu değişkenlere göre yorumlamakta başarılı olduğu görülmüştür. İlk iki derslik öğretim sürecinde, önce eğim durumunun modellemesi(model-of) olarak ortaya çıkan dik üçgensel modelin öğrenciler için eğimin ayrılmaz bir parçası olarak düşünülmeye başladığı görülmüştür.

Eğimin bağlı olduğu değişkenlere kendilerinin etiketler vermesi için fırsat verilen öğrencilerin dik üçgensel modeldeki dikey olan mesafeye "yükseklik" etiketini kullanmada hem fikir oldukları görülürken, yatay mesafe için ise "taban, yatay taban, mesafe, alt mesafe, yatay uzunluk, yatay" gibi farklı etiketler kullandıkları görülmüştür. Eğim için ise önceleri "diklik, bayır, yokuş" gibi kelimeler kullandıkları görülmüş ve hatta Ö1 gibi bazı öğrencilerin eğim kelimesi geçtiğinde bunu kendisine daha anlamlı gelen "yokuş, diklik" kelimelerine çevirdiği dikkat çekmiştir. Öğrencilerin bu etiketleri kendilerinin vermeleri onlar için yabancı, anlamsız, tepeden inme gibi görülen kavramlardan uzak kalmalarını sağlamış ve onlara, bahsedilen "yükseklik, eğim, açı, yatay mesafe" gibi kavramların anlamlı gelmesinde çok önemli bir katkı sağladığı görülmüştür. Öğretim sürecinin ilerleyen zamanlarında tüm öğrencilerin "yükseklik, yatay mesafe, eğim" etiketlerinde karar kıldıkları dikkat çekmiştir. Bu süreç, dile yeni giren bir kelimenin yerleşmesine benzer şekilde yürümüştür.

Eğimin bağlı olduğu uzunluk değişkenleri olan yükseklik veyatay mesafe arasındaki sabit oranın keşfedilmesi, öğretimin en önemli aşamalarından biri olarak görülmüş ve yeterli süre verilerek bu keşfin öğrenciler tarafından yapılması için uygun ortam hazırlanmaya çalışılmıştır. Özellikle oran-orantı bilgisinin ön plana çıktığı bu keşif sırasında, açık uçlu testte oran-orantı kavramına en üst düzeyde sahip olan beşinci grup öğrencilerinin grup içi ve gruplar arası tartışmalarda kendi gruplarına önderlik ettikleri görülmüştür. Verilen bağlamda hemen hemen tüm öğrencilerin informal bilgilerine dayanarak eğimin aynı doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre değişmeyeceğini sezdikleri ve vurguladıkları görülmüş ancak bunun yanında yükseklik ve yatay mesafenin değişmesi ile eğimin de değişmesi gerekeceği yanılgısı da ortaya çıkmıştır. Öğrencilerin, informal deneyimlerinden edindikleri bilgiler ile formal olarak öğrenme sürecinde edindikleri bilgiler arasında çatışma çıkmış ve bilişsel dengeleri bozulmuştur. Bu süreçte aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmemesi gerektiği yönünde öğrencilerde dört farklı dayanak ortaya çıkmıştır:

1) "Doğrunun aynı doğru olması", "hiç kırılmaması", "zigzag çizmemesi" gibi informal yaşantılardan gelen görsel dayanaklar,
2) Dik üçgensel model ile savunulan, hipotenüs ile yatay mesafe arasındaki açının aynı kalması,

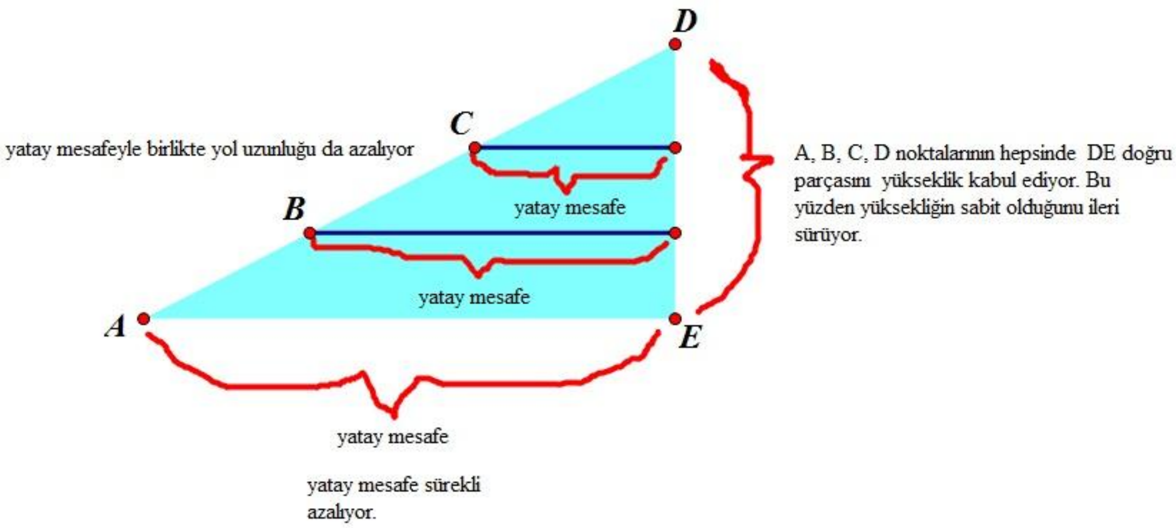
3) Eğimin bir önceki dersteki tartışmada varılan yol uzunluğundan bağımsız olduğu ve uzunluk olarak sadece yükseklik ile yatay mesafe göre değiştiği,
4) Yükseklik ile yatay mesafenin aynı oranda azalıp artması ve bu sebeple eğimin değişmediği yönünde.

Gruplar arası tartışmalarda öğrencilerin aynı doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişmeyeceği genellemesinin doğruluğunun onaylanmasıyla, eğimin neden değişmediği sorgulaması onların informal bilgisine matematiksel bir dayanak yaratma ihtiyacı doğurmuştur. Bir doğrunun eğiminin yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran olduğunun keşfedilmesi süreci şu sıra ile gelişmiştir:

1) Yükseklik ile yatay mesafenin aynı oranda azalıp arttığının tekrardan fark edilmesi,
2) Doğrusal görsel üzerinde hareket eden birey için eğim sabit iken yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın da sabit oluşunun keşfedilmesi,
3) Eğimin sabit oluşu ve yükseklik ile yatay mesafenin oranın sabit oluşu arasında eşlik ilişkisinin kurulması, diğer bir deyişle eğimin sabit kalmasını sağlayan ilişkinin yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın sabit oluşunun keşfedilerek içselleştirilmesi.

Eğimin, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran oluşunun keşfedilmesi sırasında öğrencilerin özellikle oran-orantı bilgisi ön plana çıkmış ve bu bilgiye kavramsal olarak sahip olmayan öğrencilerin süreci ve sonucu anlamlandırmakta zorlandıkları görülmüştür. Eğim hesaplama fırsatı verildiğinde tüm öğrencilerin, bu aşamada dikey matematikleştirme denilebilecek süreçte başarılı bir şekilde eğimi hesaplayabildikleri görülmüştür.

Gerçekleştirilen klinik görüşmeler sırasında, Ö1' in aynı doğru ya da doğrusal görselin eğiminin alınan noktaya göre değişebileceğini, yükseklik ile yatay mesafenin değişimine dayandırmış ve bu sebeple eğimi bir oran olarak anlamlandırmadığı sonucuna varılmıştır. Bu öğrenci eğimi, yükseklik/yatay mesafe'den hesaplayabildiğini göstermesine rağmen, onu bir oran olarak yapılandıramamıştır. Ö4' ün ise informal bilgilerinden gelen eğimin değişmemesi bilgisini matematiksel bir dayanakla destekleyemediği sonucuna varılmıştır ki bu öğrencinin dik üçgensel model üzerinde yaptığı savunmasında yatay mesafe ile yüksekliğin aynı oranda azalıp arttığını anlamlandıramadığı görülmüştür. Bu öğrenci aynı doğrusal görsel üzerinde eğimin değişmemesi gereğini informal olarak benimsemiş ancak "matematiksel olarak değişebilir günlük yaşama uymak zorunda değil" tarzında bir bilişsel dengeleme yapmıştır. Eğim hesaplamakta zorluk çekmeyen bu öğrencinin de eğimi bir oran olarak yapılandıramadığı sonucuna varılmıştır. Açık uçlu testten elde edilen bulgular doğrultusunda oran-orantı kavramında sıkıntı yaşadığı görülen Ö2' nin, grup arkadaşının vardığı "yükseklik ile yatay mesafenin aynı oranda azalması ya da artması" keşfini anlamlandırmakta zorlandığı ancak oran kavramının ona sıkıntı yaratmasına rağmen, oransal ilişkiye dayalı olarak eğimi benimsediği görülmüştür. Bu öğrencinin görüşme boyunca eğimin aynı doğrusal görsel üzerinde değişmeyeceğini vurgulaması ve savunmasını yatay mesafe ile yol uzunluğunun(yükseklik ile yatay mesafe değil!) aynı oranda azalması ile yapması dikkat çekmiştir. Bu öğrencinin yüksekliği sabit bir uzunluk olarak düşündüğü için yanlış anlamlandırdığı da ortaya çıkmıştır ki aynı yanılgı ara ara da olsa Ö4' te de görülmüştür (Şekil 7).



Şekil 7: Yüksekliğin Değişmeyeceği Yanılgısı

Eğimi hesaplayabildiği görülen Ö2' nin oran kavramına tam anlamıyla sahip olmadığı için eğimi istenilen oran olarak tam anlamıyla yapılandıramadığı düşünülmüş ancak eğimin sabit oluşunu içselleştirdiği ve sadece bir formül ya da algoritma ezberleyerek hesaplayağı bir kavram olarak yapılandırmadığı sonucuna varılmıştır. Kendisiyle gerçekleştirilen son görüşmede eğimin aynı doğru üzerinde alınan noktaya göre değişmemesini yükseklik ile yatay mesafe arasındaki doğru orantılı ilişki ile açıklayabilmesi de bu öğrencinin eğimi bir oran olarak yapılandırma sürecinde olduğunu desteklemektedir. Ö3' ün ise kendisiyle gerçekleştirilen ikinci görüşme sırasında eğimin, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki bir oran olduğunu fark etme sürecinin, diğer bir deyişle informal eğim bilgisi ile formalleştirme sürecinde olduğu eğim bilgisi arasındaki çatışmanın henüz bitmediği görülmüştür. Görüşme boyunca yaşadığı bilişsel çatışmaları dikkat çeken öğrencinin, yaptığı savunmalar sırasında eğimin, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki sabit oran olduğunu içselleştirmiş olabileceği düşünülmüştür. Ö5' in ise önkoşul bilgilerine sahipliğinin de verdiği avantaj ile yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran olarak eğimi yapılandırdığı açık bir şekilde görülmüştür. Zaten bu öğrenci, eğimin bir oran olduğunun keşfedilmesi sürecinde önderlik eden öğrencilerden birisi olmuş ve eğimin aynı doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre değişmemesini, yeri geldiğinde, daha önceden de verilen dayanakların hepsi ile savunmuştur. Bu süreçte tüm öğrencilerin dik üçgensel modeli bir araç olarak kullandıkları görülürken artık durumun modellemesinden bağımsızlaşarak eğim için bilişsel bir araç halini almaya başladığı görülmüştür.

Daha çok dikey matematikleştirme süreci olarak yorumlanabilecek olan son iki derslik öğretimde öğrencilerin koordinat düzleminde bir doğru için oluşan eğim şemasını genişletmeleri beklenmekteydi. Öğrencilerin tamamının yükseklik/ yatay mesafe' yi koordinat düzleminde bir doğru için yansıtarak kullanabildiği görülürken eksenlerden yardım alarak yükseklik ve yatay mesafeyi hesaplayabildikleri dikkat çekmiştir. Koordinatlar arası farkın yükseklik ve yatay mesafeyi verdiğini adım adım keşfetmeleri için verilen dikey matematikleştirme etkinliğinde, açık-uçlu testten elde edilen verilerin analizi sonucu beşinci grupta yer alan öğrencilerin keşfetmeyi daha rahat başardığı görülmüş ve yine etkileşim ile, varılan bu keşif tüm öğrencilere yayılmıştır. Öğrenciler genel olarak, bir doğru üzerinde alınan iki noktanın koordinatları ile eğim arasındaki ilişkiden varılan genelleme(y_2-y_1/x_2-x_1)' yi cebirsel olarak farklı harflerle de olsa gösterebilmişlerdir.

Gerçekleştirilen son görüşmede koordinat düzleminde görselleştirilmiş bir doğrunun ya da sadece üzerindeki iki noktasının koordinatları verilen bir doğrunun eğimini, Ö1 yükseklik/yatay mesafe ile ya da "y koordinatlarını çıkar yüksekliği bul, x koordinatlarını çıkar yatay mesafeyi bul ve birbirine böl" algoritması ile; Ö2 ve Ö4 daima istenen doğruyu görselleştirerek yükseklik/yatay mesafe ile (formül ya da algoritma kullanmaksızın); Ö3 ve Ö5 ise istenen doğruyu görselleştirerek yükseklik/yatay mesafe ile ya da görselleştirmeksizin y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesi ile hesaplayabildiğini göstermiştir.

Katılımcıların, eğimi koordinat düzlemindeki bir doğru için yeniden düzenlemeleri sürecinde doğru denklemi ve koordinat düzlemi bilgilerinin, onların daha üst düzey problem durumlarında eğimi yansıtabilmeleri için önemli bir etken olduğu göze çarpmıştır. Eğim ile doğrudan ilişkili olmayan problem durumlarında Ö2, Ö3 ve Ö4' ün eğim kavramını kullanmaya çalışmalarına rağmen doğru üzerindeki noktaları ve doğrunun denklemini yorumlamakta ya da koordinat düzleminde bahsedilen doğruyu görselleştirmekte oldukça zorlandıkları ve araştırmacının(görüşmecinin) dışsal destek ve uyarılarına ihtiyaç duydukları görülmüştür. Ö1' in ise eğimi aynı doğru üzerinde alınan noktaya göre değişmeyeceğini hiçbir şekilde anlamlandıramamış olması onun bahsedilen soruları çözmesine olanak bırakmamıştır. Eğim ile doğrudan ilişkili olmayan bu problem durumlarında Ö5' in benzerlik, açı gibi farklı kavramlarla eğimi ilişkilendirdiği görülmüş ve bunun yanında farklı yollardan sonuca ulaşarak bu yollar arasındaki bağı da ifade edebilmesi dikkat çekmiştir. Ayrıca bu öğrenciden sadece denklemi verilen bir doğrunun eğimini hesaplaması istendiğinde, doğruyu inşa etmeksizin yükseklik veyatay mesafeyi bularak bu ikisi arasındaki orandan ve bunun yanında doğru üzerinde herhangi iki nokta ele alarak y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesinden sonuca ulaşması Ö5' in eğim kavramını içselleştirerek zihnindeki başka kavramlarla da ilişkilendirme yapabildiği ve aynı zamanda hem yatay hem dikey matematikleştirme sürecini başarıyla sürdürdüğünü göstermiştir. Yükseklik/ yatay mesafe ile y_2-y_1/x_2-x_1 arasındaki ilişkiyi tam olarak içselleştirdiği düşünülen Ö3 dışındaki diğer öğrencilerin ise kısmen anlamlandırma yaptıkları düşünülmektedir ki bu öğrencilerden hepsi y_2-y_1/x_2-x_1 'ye benzer cebirsel genellemeler yaparak, bu genellemelere nasıl ulaştıklarını anlatabilmişlerdir.

Son olarak, eğimin kavramsal öğrenilmesini sağlama açısından etkili olduğu görülen RME yaklaşımına dayalı bir öğretimde, öğrencilerin kendilerine gerçekçi gelen bağlam problemlerinden yola çıkarak, matematikleştirme sürecinde keşfe ulaşma ya da keşfi anlamlandırma yolunda aktif bir şekilde rol alabildikleri belirlenmiştir. Buna bağlı olarak anlamlı öğrenme gerçekleştirme yolunda olumlu adımlar atabildikleri dikkat çekerken, önkoşul bilgilerin de matematikleştirme sürecinde önemli olduğu görülmüştür. Öğrenme sürecinde oluşturulan heterojen gruplar arasında ve grup içinde, düşünme ve tartışma süreçlerinin, onların kavramı kendilerinin keşfetmelerine ve özgür bir biçimde yorumlarını, düşüncelerini, genellemelerini açıklayabilmelerine fırsat veren bir ortam oluşturularak yönetilmesinin daha çok işlemsel öğrenildiği görülen eğimin, kavramsal öğrenilmesini sağlayabileceği sonucuna varılmıştır. Ayrıca eğim gibi, informal deneyimlerden gelen bir kavram imajına sahip olunan diğer kavramların öğrenilmesinde de benzer bir öğretim ortamı yaratılarak RME ilkelerinin temel alındığı bir sürecin etkili olabileceği düşünülmektedir.

Ortaokul 8. Sınıf Öğrencilerinin Eğimi Oluşturma Süreçlerinin APOS Teorik Çerçevesinde İncelenmesine İlişkin Sonuçlar

Araştırmanın katılımcıları olarak belirlenen beş öğrenci ile yapılan klinik görüşmeler onların eğimi oluşturma süreçlerine dair derinlemesine bilgi vermiştir. Farklı hazır bulunuşluklara sahip olan bu öğrencilerin eğimi kavramsallaştırma süreçleri incelenmiş ve APOS teorik çerçevesinde yorumlanmıştır. Bu bölümde alt başlıklar altında sırasıyla, alanyazındaki ilgili çalışmalar ve araştırmacının deneyimleri doğrultusunda eğim kavramının oluşumu için ileri sürülen ilk genetik ayrışma, ardından eğim kavramını oluşturma sürecinde oluşan bilişsel yapılar ve son olarak eğim için revize edilmiş genetik ayrışma verilmiştir.

İlk Genetik Ayrışma

1. Eylem. Bu düzeyde olan bir öğrenci eğimi, verilen bir özel durum için dikey mesafenin yatay mesafeye bölümü genel kuralı ile ya da y_2-y_1/x_2-x_1 formülü kullanarak hesaplayabilir. Ancak bu düzeyde olan bir öğrencinin eğimi, yüksekliğin yatay mesafe' ye oranı olarak anlamlandırmayacağı düşünülmektedir.

2. Süreç. Bu düzeyde olan bir öğrenci herhangi bir eğim durumunda yüksekliğin yatay mesafeye bölümünü ya da y_2-y_1/x_2-x_1 cebirsel ifadesini oran kavramına ilişkin şemasıyla ilişkilendirerek içselleştirir. Böylece bu düzeydeki öğrenci bir doğrunun eğiminin dikey veyatay mesafelere bağlı olarak nasıl değişebileceğini yorumlayabilir.

3. Nesne. Süreç düzeyinde "eğim" olarak içselleştirilen "yükseklik/yatay mesafe" oranı bu düzeyde nesne olarak kapsüllenir. Yani bu düzeydeki öğrenci eğim kavramını matematiksel bir nesne olarak farklı problem durumlarında ve sahip olduğu ilişkili matematiksel kavramlarla kullanabilir.

Eğimi Yapılandırma Sürecinde Oluşan Bilişsel Yapılar

Eğimin oluşturulması sürecinde katılımcı öğrencilerin farklı bilişsel yapılar ortaya koydukları görülmüştür. Bu bölümde bilişsel yapıların göstergeleri olan öğrencilerin ortaya koydukları performanslar eylem, süreç, nesne başlıkları altında verilmiştir.

Eylem. Eğim kavramını eylem düzeyinde oluşturabilen öğrencilerin eğimi, bir oran olarak yapılandıramadığı görülmüştür. Bu düzeydeki öğrenciler kendilerine verilen bir doğru ya da doğrusal görselin eğimini, yüksekliği yatay mesafeye böleceği bir algoritma ile hesaplamakta ya da "yükseklik/yatay mesafe" 'yi bir formül olarak düşünüp o doğru ya da doğrusal görsele ait yükseklik veyatay mesafe değerini formülde yerine yazarak sonuca ulaşmaktadır. Eğimi eylem düzeyinde oluşturabilen bir birey, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişkiden eğimi çıkarsayamamıştır. Diğer bir deyişle aynı doğrusal görsel üzerindeki herhangi bir noktada eğimin değişmezliği ve yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın değişmezliği arasındaki eşitlik ilişkisini kuramamıştır. Dolayısıyla eğimi, yüksekliği yatay mesafeye bölerek hesaplayacağı bir kavram olarak gören bireyin aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişmeyeceğini anlamlandıramadığı görülmüştür. Bu düzeyde olduğu sonucuna varılan Ö1' in aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde, eğimin alınan noktaya göre değişeceğini ileri sürdüğü ve buna neden olarak da yükseklik veyatay mesafe değerlerinin değişmesini gösterdiği görülmektedir. Yükseklik veyatay mesafe değerleri değişirken bu değerler arasındaki oranın değişmediğini fark edemeyen ve öğretim sürecinde varılan bu keşfi de anlamlandıramayan Ö1' in eğimi, "yüksekliği veyatay mesafeyi bulup birbirine böl" şeklinde geliştirdiği algoritma ile hesaplayacağı bir kavram olarak gördüğü ve bu sebeple ancak eylem düzeyinde kavramsallaştırma sağladığı sonucuna varılmıştır. Bu düzeyde olduğu sonucuna varılan bir diğer katılımcı olan Ö4' ün de aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişeceğini ileri sürdüğü görülürken, dik üçgensel model üzerinde yaptığı savunmasında hipotenüs üzerinde alınan noktaya göre yükseklik ile yatay mesafenin aynı oranda azalıp artacağını anlamlandıramadığı ortaya çıkmıştır. Ö4' ün de Ö1' e benzer şekilde eğimi “yükseklik/yatay mesafe” ile hesaplayacağı bir kavram olarak gördüğü sonucuna varılmış ve bu sebeple eylem düzeyinde kavramsallaştırma gerçekleştirebildiği belirlenmiştir. Hem Ö1 hem Ö4 aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimi yorumlamalarına yönelik sorgulamalarında, eğimi her adımda hesaplamaksızın onun hakkında düşünmekte zorlandığı ve eğimi yükseklik ile yatay mesafe arasındaki orandan ziyade sadece bölüm ilişkisi ile oluşturdukları düşünülmektedir.

Öğrenciler tarafından öğretim sürecinde geliştirilen dik üçgensel modelin daha çok duruma özgü olduğu görülen bu düzeyde, Ö1’ in eğimin yatay mesafe ve yüksekliğe bağlı olarak değiştiğini dik üçgensel model yardımıyla savunabilme ve yükseklik ile eğim arasındaki orantısal ilişkiyi yorumlayabilme gibi olumlu adımları olduğu görülmüş ancak dik üçgensel modeli dinamik olarak tam anlamıyla hareket ettiremeyişinin onun eğimi oluşturma sürecini olumsuz etkilediği düşünülmüştür. Ö4’ ün ise dik üçgensel modeli dinamik olarak oynatabildiği ve buna bağlı olarak yükseklik veyatay mesafeye bağlı olarak eğim değişimini yorumlayabildiği görülmüştür. Ancak onun da yükseklik ile yatay mesafe arasındaki doğru orantılı değişimden yola çıkarak oranın ve dolayısıyla eğimin sabit kaldığını anlamlandırmadığı görülmüştür. Eylem düzeyinde, kendiliğinden oluşan bu dik üçgensel modelin henüz durağan olduğu ve durumdan bağımsız olarak bir bilişsel araç olarak kullanılamadığı sonucuna varılmıştır.

Koordinat düzlemindeki bir doğru için eğim bilgisinin yeniden düzenlenmesi beklenen öğrenme sürecinde ise eylem kavramsallaştırması yapan bireyin iki farklı performans ortaya koyduğu sonucuna varılmıştır:

- y_2-y_1/x_2-x_1 cebirsel genellemesini bir formül olarak kullanır ve doğru üzerinde verilen ya da doğrunun o noktalardan geçtiği bilgisi verilen iki noktanın koordinat değerlerini formülde yerine yazarak eğimi hesaplar. Cebirsel genelleme(y_2-y_1/x_2-x_1) ile geometrik yorum(yükseklik/yatay mesafe) arasında ilişki kuramaz.
- y_2-y_1/x_2-x_1 cebirsel genellemesini bir formül olarak ezberlemese de benzer şekilde y koordinatları arasındaki ve x koordinatları arasındaki farkı bulup birbirine böleceği şeklinde ya da buna benzer şekilde algoritmalar geliştirerek eğimi hesaplar. Öğrenci ortaya koyduğu adımların nedenlerini açıklayamaz ve yorumda bulunamaz.

Koordinat düzleminde bir doğru için eğimi "yükseklik/yatay mesafe" olarak yansıtabildiği görülen Ö1'in, koordinatlar arası fark ile yükseklik veyatay mesafe uzunluklarını bulabileceğini kendisi keşfetmemiş olmasına rağmen varılan bu keşfi anlamlandırarak kullanabildiği görülmüştür. Kendisine verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini bulurken yüksekliği y koordinatları, yatay mesafeyi x koordinatları arasındaki farktan yararlanarak bulduğu görülen Ö1' in yaptığı açıklamalarda neden böyle bir uygulama yaptığının farkında olduğu görülmüştür. Ayrıca y_2-y_1/x_2-x_1 cebirsel genellemesinin farkında olmadığı ve kendisine belki de anlamsız gelişinden dolayı bu genellemeyi bir formül olarak ezberlemediği dikkat çeken bu öğrencinin kendisinden bir cebirsel genellemeye varması istendiğinde koordinatlar arası farklardan yararlanarak yükseklik veyatay mesafeyi bulurken daima büyük sayıdan küçüğü çıkaracağı yanılgısına sahip olduğu ve buna bağlı olarak hiçbir şekilde negatif eğim bulamadığı sonucuna varılmıştır. Aynı zamanda çok büyük sayılarda kullanacağı bir formül olarak nitelendirdiği bu yolu açıklarken "*derste öyle yapıyorduk işte*" gibi savunma yapması ya da eğimi hesaplarken "*önce yükseklikleri çıkarıyorduk sonra…*" tarzında bir algoritmanın adımlarını uyguladığı düşüncesini doğuran söylemleri onun henüz koordinat düzleminde bir doğru için varılan genellemeyi tam anlamıyla içselleştirmediği yorumunu güçlendirmiştir. Bu sebeple eğimi bir oran olarak yapılandırmadığı da göz önüne alınarak Ö1' in henüz eylemi sürece içselleştiremediği sonucuna varılmıştır. Ancak bu öğrencinin koordinat düzleminde bir doğru için "y koodinatları arasındaki farkı bul, x koordinatları arasındaki farkı bul ve yüksekliği yatay mesafeye böl" şeklinde geliştirdiği algoritmada da dikkat çektiği gibi aslında yükseklik veyatay mesafeyi bulduğunun farkında olması ve algoritmayı açıklama girişimleri onun güçlü bir eylem kavramsallaştırmasına, diğer bir deyişle sürece yakın bir eylem kavramsallşatırmasına sahip olduğunu düşündürmektedir.

Koordinat düzlemindeki bir doğru için eğimi yeniden düzenleme sürecinde yükseklik/yatay mesafeyi yansıtabildiği görülen Ö4' ün ise koordinatlar arası farkın istenilen uzunlukları verdiğini kendisi keşfedemediği ve ulaşılan bu keşfi(y_2-y_1/x_2-x_1) kendisiyle gerçekleştirilen üçüncü görüşmede bir algoritma olarak ya da bir formül olarak kullanamadığı görülmüştür. Kendisinden istenen doğrunun eğimini daima yükseklik veyatay mesafeyi bulup daha sonra birbirine bölerek hesapladığı dikkat çeken bu öğrencinin öğretim sürecinin son iki saatlik bölümünde arkadaşlarıyla etkileşimi sonucu hangi uzunluğu hangisine böleceği konusundaki yanılgısını düzelttiği görülmüştür. Ö4’ ün bir doğrunun eğimi için sürekli görselleştirme ve dik üçgensel modeli araç olarak kullanma gereği duyması onun dik üçgensel modelden bağımsızlaşamadığını göstermiştir. Buna bağlı olarak doğrudan eğim hesaplaması gerektirmeyen aynı doğru üzerindeki üç noktanın birisinin ordinatının sorgulandığı görüşme sorusunda, bahsi geçen doğrunun eğimini, yükseklik ile yatay mesafeyi koordinatlar arası farktan elde edeceğini içselleştiremediği için hesaplayamadığı görülen bu öğrencinin daha üst düzey kavramsallaştırma gerçekleştiremediği ortaya çıkmıştır. Ö4’ ün eğimi oran olarak yapılandırmamasının yanında koordinat düzlemindeki bir doğru için eğimi yeniden düzenleyemediği görülmüş ve y_2-y_1/x_2-x_1 cebirsel genellemesini anlamlandırmadığı sonucuna varılmıştır. Koordinatları verilen iki noktadan geçen bir doğrunun eğimini, ancak onu koordinat düzleminde görselleştirerek dik üçgensel model yardımıyla hesaplayabilmesi bu öğrencinin eğim kavramını eylem düzeyinde oluşturduğu yorumunu desteklemiştir.

Doğrunun eğimi için eylem kavramsallaştırması sağlayan bireyin geliştirdiği algoritmayı ya da ezberlediği formülü, ancak önceden karşılaştığı spesifik benzer problem durumlarında uygulayabileceği görülmektedir. Örneğin, Ö1 ve Ö4’ ün kendisine koordinatlarıyla birlikte verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini hesaplayabildikleri görülürken, doğru üzerinde üç nokta verildiğinde herhangi ikisinin koordinatlarından yararlanarak eğim değerini hesaplayamadıkları görülmüştür. Kendilerine önceden bilindik gelmeyen problem durumlarında Ö1 ve Ö4’ ün dışsal destek ve uyaranlar doğrultusunda performanslar ortaya koyma gayretleri de başarılı bir şekilde sonuçlanamamıştır.

Süreç. Eğimi yükseklik ile yatay mesafe arasındaki bir oran olarak yapılandırabilen birey, adımları tek tek ortaya koymaksızın da aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişmeyeceğini anlamlı bir şekilde içselleştirmiştir. Öğrencinin sadece görsel olarak eğimin değişmeyeceğini vurgulaması, onun informal yaşantısından edindiği deneyimler doğrultusunda bu yargıya vardığını düşündürmekte ve dolayısıyla süreç düzeyinde kavramsallaştırma sağladığını göstermemektedir. Ayrıca eğimin aynı doğru üzerinde değişmeyeceğini anlamlandırmadan ezberleyen birey de, eğimin özel bir oran çeşidi olduğunu içselleştiremediği için süreç kavramsallaştırmasına sahip olmayacaktır. Süreç düzeyinde kavram oluşumu sağlanması için yüksekliğin yatay mesafeye oranının sabit kalışı ile eğimin sabit kalışı arasındaki eşlik ilişkisinden çıkarsama yapılması gerekmektedir. Bu düzeydeki öğrenciler aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre yüksekliğin veyatay mesafenin değiştiğini fakat bu ikisinin arasındaki oranın sabit kaldığı ve bu sebeple de eğimin herhangi noktada ele alınabileceği yönünde içsel bir yapı oluşturmuştur. Bu yüzden artık eylemi sürece içselleştirdiği düşünülür. Ayrıca bu düzeyde öğrencilerin geliştirdiği dik üçgensel modelin artık duruma bağımlı olmaktan ayrılmaya başladığı ve dinamik bir şekilde oynatılabildiği görülür. Dik üçgensel modelin eğim için ayrılmaz bir parça haline geldiği görülürken öğrencilerin savunmalarında, yorumlarında, yeniden düzenleme etkinliklerinde dinamik bir şekilde modeli kullanabildiği ortaya çıkmıştır. Ancak dik üçgensel modelin, onu ortaya koymaksızın bir araç olarak kullanılamadığı, kullanılacağı zaman görselleştirme ihtiyacının olduğu dikkat çekmekte ve bu sebeple süreç düzeyindeki kavramsallaştırmada henüz tam anlamıyla soyutlanarak bilişsel bir araç haline gelmediği görülmektedir.

Ö2’ nin aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişmeyeceğini vurguladığı, bu değişmezliği önce dik üçgensel modeldeki hipotenüs veyatay mesafenin doğru orantılı ilişkisi ile anlamlandırdığı ancak öğretimin ilerleyen zamanlarında yükseklik ile yatay mesafe arasındaki doğru orantılı ilişki ile ve görsel olarak da doğrunun kırılmamasıyla anlamlandırdığı görülmüştür. Ayrıca dikey matematikleştirme gerektiren etkinliklerde doğruyu uzatarak eğim için gerekli uzunlukları bulup hesaplaması, onun eğimin değişmemesini içselleştirdiği yorumunu güçlendirmiştir. Dolayısıyla Ö2’ nin eğimi, bir algoritma ya da formül ile hesaplanacak bir kavram olarak yapılandırmadığı, özel bir oran çeşidi olarak oluşturabildiği düşünülmüştür. Eğimi bir oran olarak oluşturması ise bu öğrencinin süreç düzeyinde olduğunu göstermiştir. Ayrıca dik üçgensel modeli dinamik bir şekilde kullanabilmesi ve bu modeli bir araç olarak kullanarak eğimi, bağlı olduğu uzunluk değişkenlerine göre yorumlayabilmesi de onun eylem düzeyinin ötesine geçtiğinin göstergeleri olarak düşünülmektedir.

Süreç düzeyinde kavram oluşumu gerçekleştirdiği düşünülen diğer öğrenci olan Ö3’ ün aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktalara göre eğimin değişmemesini informal bilgilerine dayalı olarak "*aynı doğru işte*" gibi görsel dayanaklarla savunduğu görülmüş ve bu öğrencinin, öğretim sürecinde anlamlandırmasını tamamlayamadığı "*yükseklik ile yatay mesafe arasındaki sabit oran"* keşfini, ikinci görüşme sırasında anlamlandırması dikkat çekici olmuştur.. Bir doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktalara göre yükseklik veyatay mesafenin doğru orantılı bir şekilde değişimini savunabildiği görülen Ö3' ün, bu ikisi arasındaki sabit oran ile eğim arasındaki ilişkiyi tam olarak bu görüşme sırasında keşfettiği ve buna bağlı olarak eğimi bir oran olarak yapılandırma sürecine girdiği düşünülmüştür. İkinci görüşmenin devamında bu öğrencinin gerçek hayattan verilen bir doğrusal görsel örneğinde eğimi bulurken, o doğrusal görsele uygun oluşturduğu dik üçgensel modeli istenildiği kadar küçültülebileceğini ve eğimin değişmeyeceğini belirtmesi onun eğimi bir oran olarak yapılandırma sürecinde olduğu düşüncesini daha da güçlendirmiştir. Devam eden öğretim sürecinde ve kendisiyle gerçekleştirilen üçüncü görüşmede ise artık eğimin aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre değişmeyeceğini tereddütsüz vurgulayan ve bunun savunmasını, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oransal ilişki ile yapabildiği görülen bu öğrencinin, eğimi her noktada tek tek hesaplamaksızın yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın hep sabit kalacağını içselleştirdiği görülmüştür. Ayrıca yaptığı savunmalarında dik üçgensel modeli dinamik bir şekilde kullanabilmesi de dikkat çekmiştir.

Koordinat düzleminde bir doğru için eğimi yeniden düzenlemeleri beklenen öğrenme sürecinde geometrik yorum(yükseklik/yatay mesafe)' dan yola çıkarak cebirsel yoruma(y_2-y_1/x_2-x_1) ulaşmaları ve böylece eğimin cebirsel genellemesinin anlamlı hale getirilmesi hedeflenmiştir. Eğimin süreç düzeyinde oluşumunu gösteren göstergeler ise aşağıda verilmiştir:

- y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesine algoritma ya da formül olarak sahip olunmamasına rağmen koordinatlarıyla birlikte iki noktası verilen bir doğru için ya da verilen bir doğru üzerinde herhangi iki noktayı ele alınarak, o doğru için eğimi görselleştirmek suretiyle yüksekliğin veyatay mesafenin bulunup oranlanabilmesi henüz başlangıç düzeyinde de olsa süreç kavramsallaştırmasını işaret etmektedir. Bu düzeyde olduğu görülen Ö2' nin karalama şeklinde de olsa görselleştirmeyi sağlayarak ve doğrudan koordinatlar arası farktan yararlanarak eğimi hesaplayabildiği görülmektedir. Cebirsel genellemeye varması istendiğinde ise kendi kullandığı semboller ile bir genellemeye ulaştığı görülen bu öğrencinin bu genellemenin ardından kendisine verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini görselleştirme yapmaksızın da bulması süreç düzeyinde bir kavram oluşumu içerisinde olduğu fakat bu süreç kavramsallaşmasının henüz sağlamlaşmadığı şeklinde yorumlanmaktadır.

- Koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini bulurken ya da verilen bir doğrunun üzerinde iki noktanın koordinatlarından yola çıkarak eğimi bulurken y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesi ya da bu genelleme temelli bir algoritma kullanılabilir. Güçlü bir süreç kavramsallaştırmasına sahip olan birey eğimin geometrik yorumu(yükseklik/yatay mesafe) ile cebirsel yorumu(y_2-y_1/x_2-x_1) arasında ilişki kurar veyaptığı her adımın ne anlama geldiğinin farkında olur. Örneğin, neden koordinatlar arasındaki farkı bulduğu, farkları neden birbirine böldüğü, neden negatif sonuç elde ettiği vb. sorulara anlamlı cevaplar verebilir. Doğru üzerinde alınan herhangi iki noktanın eğim için hep aynı sonucu vereceğini adım adım işlemleri otaya koyup eğimi bulma gereği duymaksızın savunabilir.

Güçlü bir süreç kavramsallaştırmasına sahip olduğu düşünülen Ö3' ün kendisiyle gerçekleştirilen üçüncü görüşmede koordinat düzleminde bir doğrunun eğimini hem y_2-y_1/x_2-x_1 cebirsel genellemesi ile hem de yükseklik/yatay mesafe ile bulabildiği görülmüştür. Bunun yanında attığı adımların ne anlama geldiğinin farkında olmasının yanı sıra eğimin bu iki yorumu arasında ilişki kurup açıklayabilmesi onun doğrudan bir ezberleme yapmak yerine önceki eğim bilgisi(yükseklik/ yatay mesafe)' nden yola çıkarak yeni bir eğim bilgisi(y_2-y_1/x_2-x_1) oluşturduğu yorumunu desteklemiştir. Ancak bu öğrencinin öğretim sürecinde de görüldüğü üzere negatif eğimi tam olarak anlamlandırmadığı görülmüş ve görüşme boyunca da ne cebirsel genelleme ile ne de görsel vurgulama ile hiçbir şekilde negatif eğim elde edememiş olması onun süreç düzeyinde güçlü bir kavram oluşumunda bir eksikliğini ortaya koymuştur. Üçüncü görüşmede yer alan doğrudan eğim hesaplaması gerektirmeyen iki ayrı problem durumunda eğim bilgisini doğrudan çözüm sürecine yansıtamadığı görülen Ö3' ün, araştırmacıdan gelen dışsal uyaranlar ile eğimi kullanma çabası görülmüştür. Bu iki soruda hem yükseklik/yatay mesafe hem de y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesini kullanabildiği dikkat çeken bu öğrencinin, bununla beraber aynı doğru üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişmeyeceği keşfini çözüm sürecine yansıtabilmesi onun artık eğimin değişmezliğini içselleştirdiği yorumunu desteklemiştir. Ayrıca aynı doğru üzerinde koordinatlarıyla birlikte verilen üç nokta sorusunda herhangi iki noktayı ele alarak eğimi bulabileceğinin de farkında olduğu görülmesi Ö3' ün güçlü bir süreç kavramsallaştırması yolunda olumlu göstergeler olarak yorumlanmıştır.

Henüz başlangıç düzeyinde bir süreç kavramsallaştırmasına sahip olduğu düşünülen Ö2' nin koordinat düzleminde bir doğru için eğimi yeniden düzenleme sürecinde "yükseklik/ yatay mesafe" den yola çıkarak kendi cebirsel genellemesine ulaştığı görülmüş ve y_2-y_1/x_2-x_1 cebirsel genellemesini ise ezberleme gereği bile duymamıştır. Kendisinin ulaştığı cebirsel genellemeyi de bir formül ya da algoritma olarak düşünmediği dikkat çeken Ö2' nin bahsedilen doğruyu daima koordinat düzleminde görselleştirerek yüksekliği yatay mesafeye oranladığı görülmüştür. Bu öğrencinin üçüncü görüşmede koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimi için kendisinin ortaya koyduğu sembollerle bir cebirsel genellemeye varmasının ardından, koordinatları verilen iki noktadan geçen doğrunun eğimini görselleştirme yapmaksızın doğrudan bu genelleme temelinde yaptığı görülmüştür. Attığı her adımı nedenleriyle birlikte açıklayabilmesi, onun bir algoritma ya da bir formül ezberlemediğini ortaya koyması açısından önemli görülmektedir. Ayrıca negatif eğimi görsel olarak anlamlandırdığı görülen bu öğrencinin negatif eğim sonuçları da bulabildiği görülmektedir. Ancak bu öğrencinin eğimin doğrudan sorgulanmadığı problem durumlarında, ancak araştırmacıdan(görüşmeciden) gelen dışsal uyaranlar doğrultusunda eğimi çağırabildiği ve kullanabildiği görülmüştür. Bahsedilen problemlerde, sürekli dışsal destek beklediği dikkat çeken Ö2' nin aynı zamanda doğrunun üzerindeki herhangi iki noktayı ele alarak eğimi hesaplayamadığı, dik üçgensel model oluşturarak yükseklik veyatay mesafeyi bulma yoluna gittiği ancak bu sırada önceki bilgilerinin eksikliğinin onu engellediği görülmüştür. Dolayısıyla bu öğrencinin dik üçgensel modelden bağımsızlaşarak koordinatlar arası farktan ulaşacağı cebirsel genellemeyi formül veya algoritma olarak soyutlamamasının da onun daha ileri düzey sorularda çözüme ulaşmasına olanak vermediği düşünülmektedir. Tüm bu performanslar bu öğrencinin süreç kavramsallaştırmasının henüz başında olduğu şeklinde yorumlanmaktadır.

Nesne. Bir kavram oluşumunun süreç düzeyinde kavramsallaştırılması tamamlandığında, sürecin kapsüllenerek nesne olarak ortaya konması ve bu sayede üzerine eylemler uygulanabilmesi beklenmektedir. Ancak sekizinci sınıf düzeyinde bunun açık bir şekilde görülemeyeceği sonucuna varılmış olmakla birlikte lise ve üniversite yıllarında nesne oluşumun daha net görülebileceği düşünülmektedir. Bunun yanında nesne düzeyinde kavram oluşumu sağlanmasının bir diğer göstergesi nesnenin geri açılma mekanizması ile süreç formunda farklı problem durumlarında ya da kavram oluşumlarında yansıtılabilmesidir. Nesne oluşumunu inceleyebilmek ve ortaya koyabilmek amacıyla üçüncü klinik görüşmede doğrudan eğim sorgulaması gerektirmeyen, öğrencilerin daha önceden karşılaşmadığı kabul edilen iki problem durumu verilmiştir. Her iki problem durumunda da dışsal destek ve uyaranlar beklemeksizin eğim bilgisini problem durumuna yansıtabildiği ve sonuca rahatça ulaşabildiği görülen Ö5’ in, eğimin farklı temsilleri(fiziksel, cebirsel, geometrik) arasında ilişkiler kurabildiği ve geçişler yapabildiği görülmüştür. Eğimi bir süreç olarak çağırıp yansıtabildiği görülen Ö5’ in benzerlik ile eğim kavramı arasında, orandan yola çıkarak ilişki kurabildiği ve gerektiği zaman açı ile eğim arasındaki ilişkiyi de ortaya koyabildiği görülmüştür. Bu öğrencinin eğimi, sahip olduğu farklı kavramlarla ilişkilendirebilmesi ve gerektiğinde dışsal uyaran ya da destek beklemeksizin onu başka bir problem durumunda çağırarak kullanabilmesi, eğim için gerekli işlemleri adım adım ortaya koymaksızın onun hakkında fikir yürütebilmesi eğimin bilişsel oluşumunu süreç düzeyinde tamamladığını veya nesneleştirme sürecine girdiğini düşündürmektedir. Ayrıca yine eğim ile doğrudan ilişkili olmayan sorularda ve denklemi verilen bir doğrunun eğimini hesaplaması istendiğinde, eğim hesaplaması için birden fazla yol kullanabilmesi(doğrunun eksenleri kestiği noktaları bularak, doğru üzerinde iki nokta alarak, doğruyu inşa edip herhangi bir noktada yükseklik/yatay mesafe’ den yararlanarak) ve bu farklı yollar arasındaki bağları kurabilmesi, görselleştirmeyi zihninde yapması ve doğruyu ya da dik üçgensel modeli ortaya koymaksızın(zihninde hayal etmesi) eğim hakkında düşünüp yorumlayabilmesi, yine onun eğimin süreç olarak oluşumunu tamamladığı ve eğimi bir bütün olarak düşünebildiğini, dolayısıyla süreci nesneleştirdiği yorumunu kuvvetlendirmektedir.

Süreç kavramsallaştırmasını tamamladığı ve nesne düzeyine geçtiği düşünülen Ö5’ in öğretimin henüz son iki derslik sürecine girmeden dik üçgensel modeli ortaya koymaksızın eğim ve bağlı olduğu değişkenler hakkında yorumlar yapabilmesi, ilişki kurabilmesi, zihninden işlemler yaparak yükseklik veyatay mesafeyi bulup eğime ulaşabilmesi, modelin dinamik bir şekilde hareketini onu çizmeksizin, sözel olarak da açıklayabilmesi, onun dik üçgensel modeli duruma özgü olmaktan hatta eğimi hesaplayabileceği ya da yorumlayabileceği bir araç olarak görmekten çıkararak, onu eğim objesine, ayrılmaz bir parça olarak entegre etmeye başladığını düşündürmektedir. Diğer bir deyişle nesne düzeyinde kavram oluşumuna sahip bir bireyin dik üçgensel modeli artık kavrama destek olan ondan ayrı(ama onunla ilişkili) bir bilişsel araç olarak içselleştirmekten ziyade, dik üçgensel modeli kavram ile bütünleşmiş bir bilişsel araç olarak görebilmesi beklenmektedir.

Ö5' in görüşme boyunca şaşırmaksızın negatif sonuç elde edebildiği ve bu negatifliği hem görsel olarak(doğru sağa-sola yatık) hem orantısal olarak(öğretim sürecinde ortaya attığı doğru üzerinde sağdan sola gidildikçe yükseklik ile yatay mesafenin birbirine göre değişimi) hem de açının geniş ya da dar oluşu ile savunabildiğinin görülmesi, onun ileri düzeyde ve güçlü bir kavram oluşumu gerçekleştirdiği düşüncesini kuvvetlendirmektedir.

Revize Edilmiş Genetik Ayrışma

Elde edilen bulgular doğrultusunda genetik ayrışmanın aşağıdaki gibi revize edilmesi gerektiği sonucuna varılmıştır. Eğimin geometrik ve cebirsel temsillerinin oluşumlarının ayrı olarak ele alınmasına karar verilirken, öğrenme sürecinde kendiliğinden gelişen modellerin(self developed models-emergent models, Gravemeijer, 1994) oluşan bilişsel yapılara göre farklı işlevler edindiği görülmüştür. Bu sebeple genetik ayrışmaya eğim için öğrenciler tarafından geliştirilen dik üçgensel modelin gelişimi de eklenmiştir.

1a. Geometrik. Yükseklik/yatay mesafe' yi bir formül ya da algoritma olarak kullanma ve bir doğrunun eğimi için yükseklik veyatay mesafeyi belirleyip yerine yazarak sonuca ulaşma eylemi.

1.b Cebirsel. y_2-y_1/x_2-x_1 genellemesini bir formül ya da algoritma olarak kullanma ve verilen iki noktanın koordinatlarını yerine yazarak sonuca ulaşma eylemi.

Duruma özgü model(model-of): Eylem kavramsallaştırmasında, öğrenciler tarafından geliştirilen dik üçgensel model durağandır ve duruma özgüdür(model-of).

2.a Geometrik. Yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran olarak eğimin oluşturulması süreci. Doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan herhangi bir noktada eğimin değişmemesi, o noktadaki yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın sabit kalmasından dolayıdır.

2.b Cebirsel. Yüksekliğin yatay mesafeye oranı olarak yapılandırılan eğimin koordinat düzleminde bir doğru için yeniden düzenlenmesi ile y_2-y_1/x_2-x_1 cebirsel genellemesinin anlamlandırılması süreci. Eğimin farklı temsilleri arasında geçişler yapılabilir ve ilişkiler kurulabilir. Eğim hesaplarken atılan her adımın farkında olunur ve gerekli açıklamalarla bu farkındalık savunabilir.

Fiziksel ve bilişsel bir araç olarak model: Süreç kavramsallaştırmasında, öğrenciler tarafından geliştirilen dik üçgensel model durumdan bağımsızlaşarak eğimi yeniden düzenleme, problem durumlarında kullanma, yorumlama ve düşüncelerini savunma sırasında, daha çok fiziksel olarak ortaya konan bilişsel ve fiziksel bir araç olarak kullanılır. Ancak bu aşamada modelin ortaya konulması, görselleştirilmesi gereği vardır. Öyle ki birey modeli kullandığının her zaman farkındadır.

3. Farklı bir kavramın oluşturulması sırasında sürecin, üzerine başka eylemlerin uygulanmasına izin vermesini sağlamak amacıyla nesne olarak kapsüllenmesi. Nesne olarak kapsüllenen eğimin, onunla doğrudan ilişkili olmayan farklı problem durumlarında geri açılıp, süreç olarak dışsal destek ya da uyaran beklemeksizin ortaya konulabilmesi. Bunun yanında bireyin sahip olduğu farklı bilişsel yapılarla eğim arasında anlamlı ilişkiler kurulması.

Bilişsel bir araç olarak model: Nesne düzeyindeki kavram oluşumunda, öğrenciler tarafından geliştirilen model artık bilişsel nesnenin(eğimin) ayrılmaz bir parçasıdır. Süreç düzeyindeki kavram oluşumunda bahsedildiği gibi bir araç olarak kullanılmanın ötesinde bu düzeydeki öğrenci birçok zaman modeli kullandığının farkında bile olmayabilir. Onun için bu model artık fiziksel olarak ortaya konma gereği duyulmayan bilişsel bir araçtır.

Öneriler

Araştırmanın bulguları doğrultusunda uygulamaya ve ileride yapılacak araştırmalara yönelik geliştirilen öneriler iki başlık altında verilecektir.

Uygulamaya Yönelik Öneriler

- Öğretmenlere, eğim gibi, günlük yaşamdan edinilen deneyimler sayesinde informal bir imaja sahip olunarak gelinen kavramların öğretiminde, matematikleştirmenin temel alındığı ve RME ilkelerinin uygulandığı bir öğretim desenlenmesi önerilmektedir. Bu sayede günlük yaşamdaki anlamı ile matematiksel anlamı arasında ilişki kurulan bu kavramlar, sadece işlemsel öğrenilmesinin önüne geçilerek aynı zamanda kavramsal öğrenilmesi için de önemli bir fırsat sağlanmış olacaktır.
- Öğrencilerin informal bilgi ve stratejilerini öğrenme sürecine çağırmalarına ve grup içi ve gruplar arası sınıf tartışmalarıyla kendi görüş, yorum ve erişilerini paylaşmalarına fırsat verilirse hem matematiğe karşı tutumlarının değişebileceği hem de bilginin onlar için anlamlı olacağı düşünülmektedir. Bu sebeple bu noktanın matematik öğretiminde dikkate alınması önerilmektedir.
- RME' nin etkileşim ilkesi heterojen grupların kurulması, ardından grup içi ve gruplar arası tartışmaların öğrenme sürecinin tamamına dağıtılması, öğrencilerin keşifleri kendileri yapamasalar bile yapılan keşfi anlamlandırmalarına fırsat vermektedir. Ayrıca bilgi ve stratejilerini bu şekilde paylaşan öğrenciler farklı yorumlar, genellemeler, yöntemlerle karşılaşmakta ve böylece tek düze öğrenmeden ziyade zengin bir öğrenme sağlamaktadırlar. Bu sebeple heterojen grupların oluşturulması ve herkesin düşüncelerini rahatça açıklayabileceği tartışmalara fırsat veren, etkileşimin en üst düzeyde olduğu bir öğretim ortamının yaratılması önerilmektedir.
- Eğimin bir oran olarak yapılandırılmasında aynı doğru ya da doğrusal görsel üzerinde alınan herhangi bir noktada yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oranın sabit olmasının ve bu sabit oranın eğimin değişmemesini sağladığının keşfedilmesi ve ulaşılan keşfin anlamlandırılması kritik önem taşımaktadır. Dolayısıyla bu keşif süreci önceden düşünce deneyleri yapılarak planlanmalı ve öğretmen tarafından onları keşfe yönlendirecek sorular, yorumlar ve ipuçları

öğrencilerin hazırbulunuşlukları ve kişilikleri de dikkate alınarak özenle seçilmelidir. Süreç düzeyinde kavram oluşumu için kritik bir an olarak görülen bu keşfin, çok zaman alsa da öğrenciler tarafından yapılması ve anlamlandırılması için gerekli fırsatlar sağlanmalıdır. Öğretmenin sadece bu oran keşfinde değil tüm keşif süreçlerinde, keşfi sekteye uğratabilecek önceden varılması beklenen keşfi bilen öğrencilerin olması, keşfin hazırbulunuşlukları iyi olan öğrenciler tarafından çok kısa sürede yapılması, keşif için öğrencilerde yeterli istek ve gereksinim yaratılamaması gibi istenmeyen durumlar öğretmen tarafından pasifize edilerek, keşif süreci öğrencilerden hiç birinin öğrenmesini olumsuz etkilemeyecek bir biçimde profesyonelce yönetilmelidir.

- Matematikleştirme sürecinde öğrencilerin, gerekli gördükleri şeyler (uzunluklar, mesafeler, kavramlar, geometrik şekiller vb.) için kendilerinin etiketlemeler yapmasına izin verilmesi, onlar için bir anlam ifade eden matematiksel kavramlarla çalışma fırsatı verecektir. Bu araştırmada, ders kitabında “dikey mesafe” olarak geçen uzunluk hemen hemen tüm öğrenciler tarafından yükseklik olarak etiketlenmiş ve böylece bu kavramın ne anlam ifade ettiğini bilmeyen öğrencinin olmadığı görülmüştür. Dolayısıyla bu öğrenciler, kendilerine genellikle yabancı gelen ve anlamlandırmak zorunda oldukları matematiksel terimler arasında kalmamış, kendilerinin isimlendirdikleri terimlerle daha anlamlı bir öğrenme gerçekleştirdikleri görülmüştür. Buna bağlı olarak öğrencilerin informal ve formal deneyimleri doğrultusunda kendilerinin etiketlemeler yapmalarına izin verilmesi önerilmektedir. Öğretmen “buraya bu isim verilir”, “burası bakın böyle olur” gibi doğrudan bilgi ve terim ismi vermemeli, uygun bir öğrenme ortamında öğrencinin kendisinin bu terimleri anlamlandırması beklenmelidir.
- Öğrencilerin kendilerinin modeller geliştirmesi ve önceleri duruma özgü geliştirdikleri bu modelleri, durumdan bağımsızlaşarak bilişsel bir araç, bir varlık gibi kavramın ayrılmaz bir parçası olarak içselleştirmelerine yardımcı olacak matematikleştirme etkinlikleri ile desenlenmiş bir öğretim süreci önerilmektedir.
- Eğimin tüm temsillerinin bir anda verilmesi, ve ardından bu temsiller arası ilişkilerin kurulmasını beklemek anti-didaktik olarak görülmektedir. Bunun

yerine öğrencilere informal bilgilerinden yola çıkarak sahip oldukları eğimin fiziksel yorumundan geometrik yorumuna, geometrik yorumdan da cebirsel yoruma geçiş yapabilecekleri yatay ve dikey matematikleştirme etkinlikleri sağlanmalıdır.

İlerideki Araştırmalara Yönelik Öneriler

- Eğimin ilk formal anlamda karşılaşıldığı seviye olması amacıyla sekizinci sınıf öğrencilerinin eğimi matematikleştirme ve oluşturma süreçleri incelenmiştir. Lise yıllarında öğrenciler, eğimin farklı yorumları için yeniden düzenleme yaparak eğim şemasını genişletecektir. Bu sebeple eğimin oluşturulması ve matematikleştirilmesi sürecinin lise düzeyinde devam eden gelişiminin de araştırılması yapılabilir.
- Eğim gibi günlük yaşamda yansımaları sıklıkla görülen diğer matematiksel kavramların matematikleştirilme süreçleri araştırılabilir ve bu araştırmada elde edilen bulgular ve sonuçlarla tutarlılığı karşılaştırılabilir.

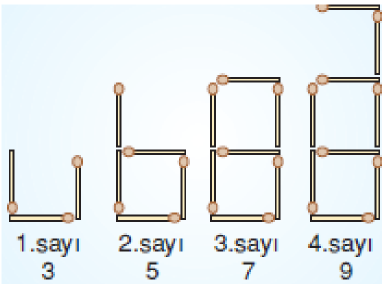
EKLER

EK 1

AÇIK UÇLU TEST

BAĞIMLI-BAĞIMSIZ DEĞİŞKEN VE ORAN-ORANTIYA YÖNELİK KISIM

1-)



Adım sayısı	1	2	3	4	5	6	…	19	….	x
Kibrit sayısı	3	5	7	9	?	?	…	?	…	y

a) Verilen örüntüye göre tabloda soru işareti ile gösterilen yerleri doldurun. Nasıl doldurduğunuzu açıklayın.

b) Verilen örüntüde nasıl bir bağımlılık ilişkisi vardır? (Yani ne, neye bağlı olarak değişmektedir?) Örüntüdeki bu ilişkiyi kendi cümlelerinizle açıklayınız.

c) Bu örüntünün genel kuralını bulun ve nasıl bulduğunuz açıklayın.

d) “C” şıkkında yazdığınız genel kuralda bağımlı değişkeni hangi sembol ile , bağımsız değişkeni hangi sembol ile gösterdiniz ? Nedenini açıklayınız.

2-) 

Bir futbolcu yeni bir takıma transfer oluyor. İmzalamış olduğu sözleşmede “ne kadar gol atarsa o kadar çok para kazanacağını” ifade eden bir madde bulunuyor. Sizce bu maddede yer alan durumda bir bağımlılık söz konusu mudur? Eğer söz konusu ise hangi durum hangi duruma bağımlıdır?

3-)

Sabit hızla giden bir araba 1 saatte 120 km yol almaktadır. Aynı araba bu sabit hızında devam ederse2,3 ve 4 saat sonunda kaç km yol almış olacaktır? Bu soruyu tablo yaparak cevaplayınız. Ayrıca tablodan yararlanarak yol- zaman değişimi arasındaki ilişkiyi birbirine bağlı

4-)

Esra’ nın dolabında 13 tane eteği vardır. Ahmet’ in dolabında ise 7 pantolonu vardır. Buna göre Esra’ nın etek sayısının, Ahmet’ in pantolon sayısına oranını bulunuz.

7-)

Bir ayran hazırlamak için annesine ne kadar yoğurda ne kadar su katması gerektiğini soran Ayşe, annesinden ayrandaki su oranının $\frac{2}{5}$ olacağını öğreniyor. Buna göre 10 litre ayran için ne kadar su gerektiğini bulunuz. Çözüm yolunuzu, neyi kullandığınızı, nedenini açıklayınız.

8-) Gündelik para kazanan bir inşaat işçisi 1 günde 5 TL, 2 günde 10 TL, 3 günde 15 TL… Buna göre;

a) Aşağıda verilen tabloyu doldurunuz. 15. gün kazanılacak para nedir? Nasıl bulduğunuz açıklayın.

b) Gün sayısının kazanılan paraya oranını her gün için ayrı ayrı gösteriniz (1. Gün için, 2. Gün için…). Bu oranlar arasında nasıl bir ilişki dikkatiniz çekmektedir?

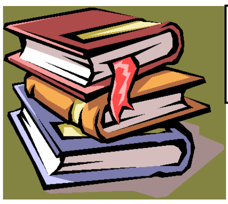
Gün sayısı	1	2	3	4	5	6	…	15	…	
Kazanılan para(TL)	5	10	15				…			

c)Bu inşaat işçisi "x" günde ne kadar para kazanır? Nasıl bulduğunuzu açıklayın.

9-)

Bir kişi düzenli bir şekilde her gün kahve içmektedir. 5 günde 15 kahve içtiğine göre bu kişi 7 günde kaç kahve içer?

10-)



Arda 210 sayfalık kitabı 18 günde bitirebiliyorsa, aynı hızda 140 sayfalık kitabı kaç günde bitirebilir?

11-)Aşağıda verilen eşitliklerin orantı oluşturmaları için bilinmeyenin yerine yazılması gereken sayıyı bulunuz. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

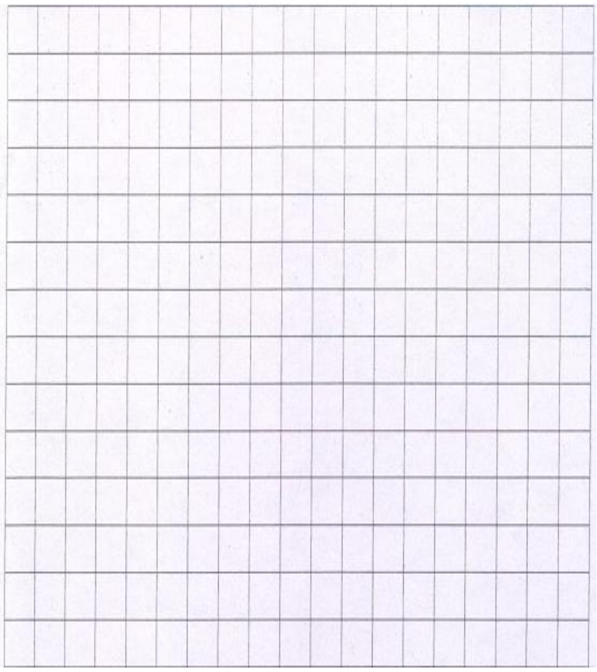
a) $\frac{5}{3} = \frac{20}{x}$ b) $\frac{y}{3} = \frac{10}{15}$ c) $\frac{b}{15} = \frac{8}{12}$ ç) $\frac{10}{14} = \frac{15}{t}$

12-)x ve y sayıları doğru orantılı olduğuna göre aşağıdaki tabloda boş bırakılan yerleri tamamlayınız. Nasıl bulduğunuzu açıklayınız.

x	4	6		15		23	27
y	12		24		57		81

DOĞRU DENKLEMİNE YÖNELİK KISIM

1-) (2,3) ve (-1,4) noktalarını koordinat düzleminde gösteriniz.



2-)Aşağıda verilenlerden hangileri doğru denklemine aittir? Doğru denklemi olup olmadıklarını belirlerken nelere dikkat ediyorsunuz?

a) 3x+5

b) y=2x+5

c) 3x=y

d) x= -1

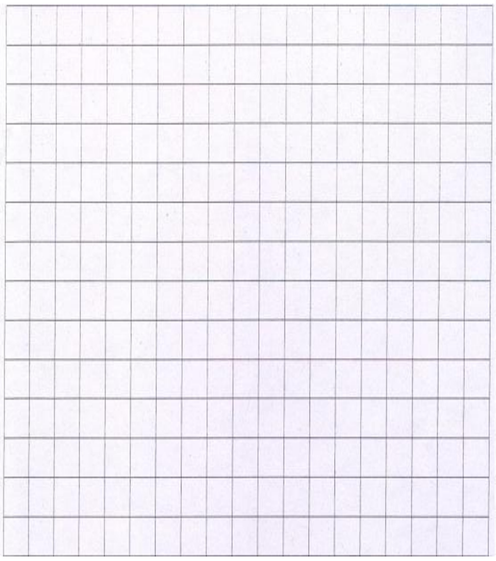
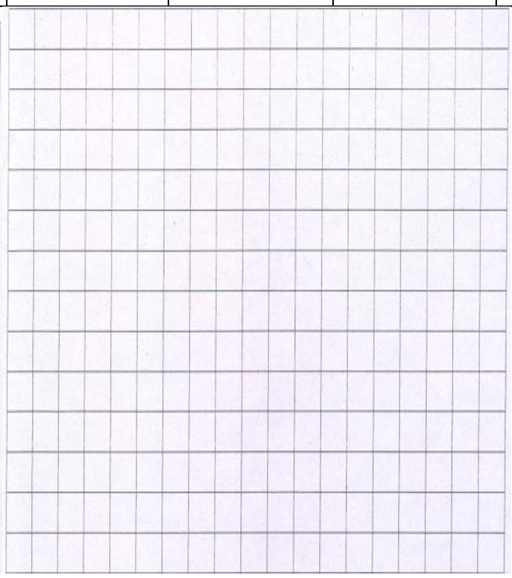
e) x^2+ 4=y

f) 2x+4y-12=0

g) y=2

3-) Aşağıdaki tabloda bir karıncanın süreye bağlı olarak aldığı mesafe gösterilmektedir. Süre ile alınan mesafe arasındaki ilişki doğrusal mıdır? Koordinat düzleminde her bir noktayı belirleyerek sonuca ulaşabilirsiniz. İlişkinin doğrusal olup olmadığını nasıl anladığınızı açıklayın.

Süre(saniye)	3	5	8	9	10	
Aldığı mesafe(m)	1	2	4	4,5	6	

4-) x+3=y ve y+2x-4=0 denklemlerinin grafiğini koordinat düzleminde gösteriniz. Nasıl gösterdiğinizi veya göstereceğinizi açıklayınız.

5-) Bir doğru üzerinde kaç noktayı gösterebilirsiniz? Örneğin, 2x+5y=20 doğrusu üzerinde olan 3 noktanın koordinatlarını bulabilir misiniz? Açıklayınız.

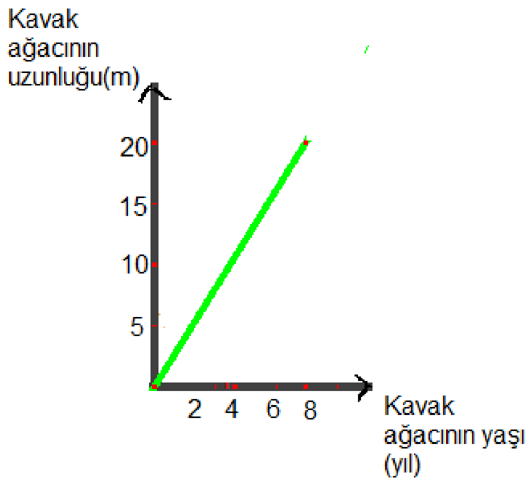
6-)

Aşağıdaki tabloda bir kaplumbağanın harekete başladığı andan itibaren her 2 dakikada bir aldığı yol verilmiştir.

Zaman(dk)	2	4	6	8
Yol(m)	3	6	9	12

Yukarıdaki tabloya ait yol-zaman grafiğini çiziniz.

7-)Aşağıda kavak ağacının uzunluğu ile yaşı arasındaki ilişkiyi temsil eden grafik verilmiştir.



Buna göre,

a) Kavak ağacı kaç yaşına geldiğinde uzunluğu 15 m' ye ulaşır?

b) Bu kavak ağacı 4 yaşındayken uzunluğu kaç m olur?

EK 2
KLİNİK GÖRÜŞME SORULARI
1.Klinik Görüşme Soruları

RESİM 1

RESİM 2

Şekilde gördüğün motosiklet elektriklidir ve belli bir şarj kapasitesi vardır. Aynı kişi aynı motosiklet ile resimde gördüğün yollarda gitmeyi planlamaktadır. Her bir yola çıkmadan önce motosikleti şarj edecektir. Sence hangi yolda motosikletin şarjı çabuk biter?

1-) Şekilde gördüğün motosiklet elektriklidir ve belli bir şarj kapasitesi vardır. Aynı kişi aynı motosiklet ile resimde gördüğün yollarda gitmeyi planlamaktadır. Her bir yola çıkmadan önce motosikleti şarj edecektir. Sence hangi yolda motosikletin şarjı çabuk biter?

……….

2-)Neden?

………..

3-)O ne demek açıklar mısın?(diktir, yokuştur… derse)

………..

4-)Onu nereden anlıyorsun?(mesela daha diktir derse)

…………

5-)Dikey uzunluk, yatay uzunluk, yükseklik vb. ile motosiklet şarjının bitmesi arasındaki ilişki nedir?

………….

6-)Peki Motosikletin şarjı sadece çıktığı yüksekliğe(ya da yatay uzunluğa) mı bağlı?

……………

7-) Motosiklet aynı yükseklikte farklı yollardan çıkamaz mı? Mesela bu iki yolda aynı mı zorlanır?

……………..

8-)Bu iki yolda aynı zorlanmıyorsa bu ikisi arasındaki fark ne?

………………

9-)Peki o zaman şarj neye bağlı?

………………

10-) (Eğime derse eğer) eğim nelere bağlı olarak değişiyor?

………………

2. Klinik Görüşme Soruları

Resimde görülen bayıra, köye ulaşımı sağlamak için yol yapılacaktır. Her yolun girişinde yolun eğimini gösteren, 

şeklinde bir tabela bulunmaktadır. Bu yolun girişine konulacak tabelayı siz hazırlasanız, nelere ihtiyaç duyardınız?

……………………….

Yolun dikliğini hesaplayabilmen için nelere ihtiyaç duyarsın?

……………………….

İstediğin uzunlukları bana kağıt üzerinde de kalemle gösterebilir misin?

……………………….

Bu istediğin uzunlukları nasıl kullanacaksın şimdi?

………………………..

Yüksekliği eğimi verir. (o zaman ne yazılacak tabelaya?)

………………………..

Pekala her hangi bir yolun, merdivenin, çatının, rampanın eğimin nasıl hesaplarsın o halde?

…………………………

Bu yol bu gösterdiğimiz yerde değil de biraz daha yukarıda başlasa ve tabela buraya konsa, tabelada yazan değer değişir mi? Neden?

………………………..

Yolun uzunluğu değişirken değişmeyen bir şey var mı?

…………………………

Diklik sabit kalır diyorsun. Sence dikliğin sabit kalmasını sağlayan ne?

…………………………

Dikliği sabit kalması hangi uzunluklar sayesinde oluyor?

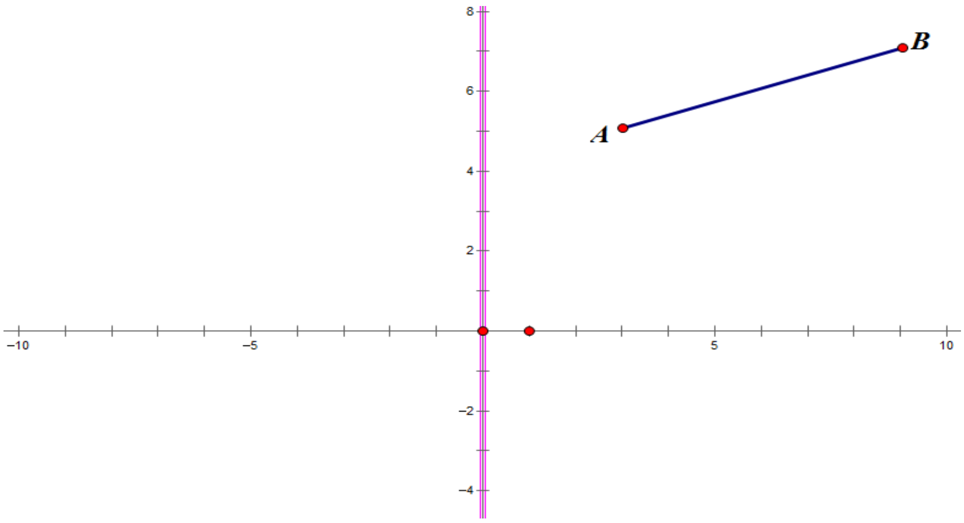
…………………………

Peki bu ikisinin arasındaki hangi ilişki eğimin sabit kalmasını sağlıyor?

………………………..

Şekilde eğimi 3/10 olan bir dağ görülmektedir. Bu dağın yanında ona paralel olarak devam eden yolun belirtilen yere kadar olan uzunluğu 1000 m olduğuna göre dağın yüksekliğini bulabilir misin ? Nasıl?

3. Klinik Görüşme Soruları



Görmüş olduğun AB doğrusunun eğimini hesaplayabilir misin?

Olası cevaplar:

- Yüksekliği yatay mesafeye bölerek. (**O halde yükseklik veyatay mesafeyi nasıl bulursun?**).
- Y_2-y_1/x_2-x_1 formülünü kullanarak buluyorum.(**Bu formülün nereden geldiğini biliyor musun? Biraz açıklar mısın bu formülü**).

Yüksekliği yatay mesafeye bölerek buluyorsa,

Yükseklik veyatay mesafe dediğin yerleri çizerek gösterebilir misin?

Yüksekliğin uzunluğunu nasıl bulabilirsin?

Yatay mesafenin uzunluğunu nasıl bulabilirsin?

Bu doğrunun Koordinat düzleminde olması sana nasıl bir kolaylık sağlar?

Peki sana sadece iki nokta versem, tabi ki bu noktanın koordinatlarını vereceğim, o iki noktadan geçen doğrunun eğimini bulabilir misin?(3, 5) ve (7,9) noktaları verilir.

Olası cevaplar:

- İki noktayı koordinat düzleminde bulurum. İkisini birleştirerek doğruyu gösteririm ve yükseklik yataydan eğimi hesaplarım.
  Peki bu iki noktayı kullanarak doğruyu çizmeden eğimi bulabilir misin?
  ……

Sadece iki noktadan yararlanarak eğimi hesaplayacağın kısa bir yol biliyor musun?

…….

Mesela (685,350) ile (385,850) noktalarından geçen doğrunun eğimini bulabilir misin?

……

Senin yaptığın yolla biraz zor olacak sanki, daha pratik bir yol biliyor musun?

……

Yaptıklarından çıkarabilir misin?

……

- Y_2-y_1/x_2-x_1 formülünü kullanarak eğimi bulabilirim.

Bu formülü nereden buldun?

…….

Bu formülü kullanmadan eğimi hesaplayabilir miydin peki?

…….

- Çizerek anlatabilir ve formül yazmadan aslında formülü uygulayabilir bu çizime bakarak.

Bu yapmış olduğun şeyi kurallaştırmanı istesem, formülleştirmeni nasıl yaparsın?

…….

Örneğin senin yaptığın biçimde (685,350) ile (385,850) noktalarından geçen doğrunun eğimini bulabilir misin?

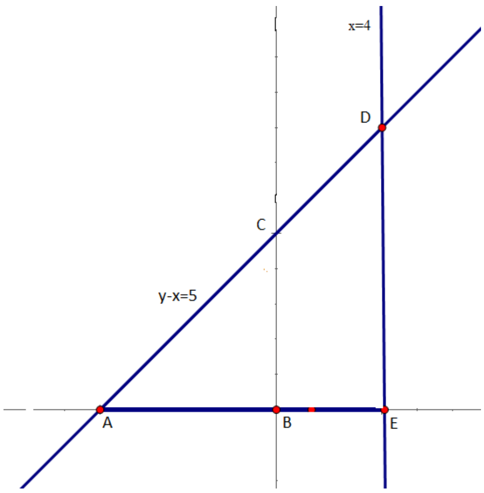
…….

Nasıl bulabilirsin?

…….

Çizmek zor oluyorsa pratik bir yol geliştirebilir misin bu küçük sayılarla yaptığın çözümden?

…………



Koordinat düzleminde verilenlere göre ADE üçgeninin alanının, ABC üçgeninin alanının kaç katı olduğunu hesaplayınız.

…………………………..

Bu uzunlukları bulabilir misin peki?

………………..

Yeterli mi alan için bulduklarıın? Alanları hesaplayabilir misin?

……………………..

Neden?

……………………..

Peki o üçgenin taban ve yüksekliğinin (kenar uzunluklarının)nereleri olduğunu çizerek gösterebilir misin bana?

……………………..

Tabanının uzunluğunu bulabilir misin üçgenin?

……………………..

Yüksekliği bulabilir misin?

……………………..

- **Bu soruda benzerlik(eğer benzerlik kullanırsa) kullanmamanız istense veya aklınıza gelmese farklı bir yolla yüksekliği bulabilir miydiniz?**
- **Yüksekliği bulurken matematikte hangi konudan yardım aldınız? Başka bir konu ile ilişkilendirebilir misiniz?**

Eğer "eğim" cevabını verirse,

- Eğimi nasıl kullanacaksın peki?
- Eğimi bulabilmen için neleri bilmen lazım?
- Hangi doğrunun eğimini bulmaya çalışıyorsun?
- Bu doğrunun eğimini bulman sana nasıl bir yarar sağlayacak?
- Neden bu doğrunun eğimini buluyorsun?
- Eğimin doğru üzerine değişmediğini nereden biliyorsun?

O şekilde mi buluyorduk doğrunun eksenleri kestiği noktaları?

……

Pekala eksenleri kestiği noktaları buldun. Şimdi ne yapmayı planlıyorsun?

….

Neden buldun bu noktaları?

…..

Sana bu noktaları bulmak ne fayda sağlayacak?

………………………

Ne için buldun bu uzunlukları?

………………………….

Neden buluyorsun eğimi? Neden eğim?

………………………..

Tamam. Eğimi bul bakalım. (Küçük üçgendeki eğimi bulduktan sonra) Şimdi ne yapacaksın?

……………………….

Sorunun başına dönelim sen neyi bulmaya çalışıyorsun?

………………………..

Alanı bulmak için sana ne lazımdı?

……………………….

Peki küçük üçgen için aradıklarını buldun mu?

……………………..

Büyük üçgen için buldun mu?

………………………..

Nasıl bulacaksın?

……………………….

Nasıl? Neden?

EK 3

BAĞLAM PROBLEMLERİ

1. ve 2. DERS

1.Bağlam Durumu

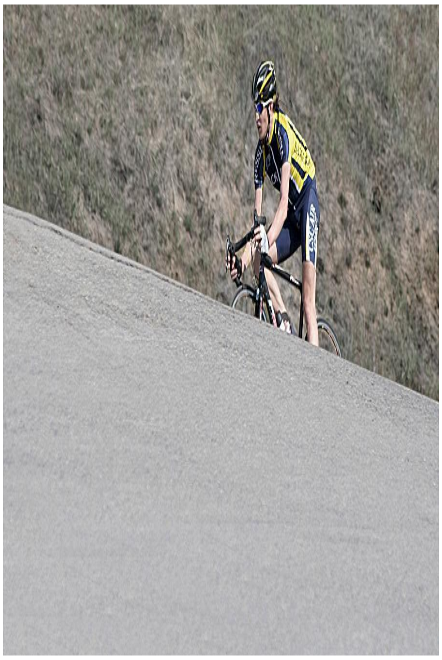
Kazanımlar:

1. *Eğimi, günlük yaşamdaki kullanımından yola çıkarak onun bir matematik kavramı olduğunu fark eder.*
2. *Farklı eğimler arasında sayısal olarak hesaplama yapmadan büyüklük küçüklük karşılaştırması yapabilir.*

Aşağıda bir bisikletçinin çıktığı turda önüne gelen yokuşlar(bayırlar) görülmektedir. Bu bisikletçi için çıkılması en zor olan yokuş hangisidir? Neden?

a)

b)

c) 
d) 

2.Bağlam Durumu

Kazanım: *Farklı eğimlerin karşılaştırmasını yaparken, eğimin dikey mesafeye (yüksekliğe) bağlı olduğunu fark eder.*

Bu iki kişinin önlerindeki yol eğer dümdüz olsaydı hedefe kadar olan yolun uzaklığı ikisi için de aynı olacaktı. Yol resimdeki gibi olduğuna göre hangisi daha çok zorlanır? Neden?

3. **Bağlam Durumu**

Kazanım*: Farklı eğimlerin karşılaştırmasını yaparken, eğimin yatay mesafeye bağlı olarak değiştiğini fark eder.*

İki kişi önlerindeki yoldan dağın tepesine çıkacaklardır. Hangisi için yol daha zorlayıcı olur? Nedenini açıklayınız.

4. Bağlam Durumu

Kazanım:

1. *Eğimin dikey mesafe(yükseklik) veyatay mesafenin ikisine de bağlı olarak değiştiğini ifade eder.*
2. *Dik üçgensel modellerde hipotenüsün eğim büyüklüğüne etki etmediğini fark eder.*

- Öncelikle başlangıçta aynı hizada olan B ve C noktalarından dağa tırmanan iki kişiden hangisi dağa çok zorlanır?Neden?
- B ve C noktalarında dağa tırmanan iki kişinin önündeki yol için uzunluk olarak neler farklıdır neler aynıdır?
- A ve B noktalarından dağa tırmanan iki kişiden hangisi daha çok zorlanır? Bu iki kişinin önündeki yol için neler aynıdır neler farklıdır?

3. ve 4. DERSLER

BAĞLAM PROBLEMLERİ

Kazanım:

1. *Eğimin dikey mesafe(yükseklik) ile yatay mesafeye bağlı olarak değiştiğini fark eder ve yorumlar.*

1. Bağlam durumu

Şekillere bakarak hangi yolun eğiminin daha fazla olduğunu düşünüyorsunuz? Nedenini açıklayınız.

Bu iki yolun eğimleri hakkında ne düşünüyorsunuz? Hangi yolun eğimi daha fazla? Nereden anlıyorsunuz?

2. **Bağlam Durumu**

Alt Kazanım:

1. Aynı doğrusal görsel üzerinde alınan noktaya göre eğimin değişmediğini fark eder.

2. Yükseklik ile yatay mesafe arasındaki sabit oranı ve doğru orantılı ilişkiyi keşfeder.

3. Eğimi, yükseklik ile yatay mesafe arasındaki oran ile ilişkilendirerek anlamlandırır.

4. *Farklı problem durumlarında dikey mesafe ile yatay mesafe arasındaki oranı kullanarak eğimi sayısal bir veri olarak hesaplar.*

Şekilde görüldüğü gibi bir dağın eteğine farklı başlangıç noktalarından tırmanmaya başlayan kişiler için önlerindeki yolun hangisi daha diktir? Neden? Nasıl bu karara vardığınızı tartışınız.

NOT: Öğrencilere MEB tarafından verilen çalışma kitabındaki etkinlikler bu ders boyunca kullanılacaktır.

5. ve 6. DERSLER

Kazanımlar:

1. *Bir doğrusal ilişkinin grafiğini inşa ederek, oluşan doğrunun eğimini hesaplar.*
2. *Koordinat düzleminde verilen bir doğrunun eğimini hesaplarken eksenler ile yatay ve dikey mesafe arasındaki ilişkiyi fark eder.*
3. *Bir doğru üzerinde alınan iki noktanın koordinatlarını kullanarak eğimi hesaplar ve verilen iki noktanın ait olduğu doğrunun eğimi için cebirsel gösterim kullanarak genellemeye ulaşır.*
4. *Hangi doğruların eğiminin negatif olacağını hesaplama yapmadan görsel olarak fark eder.*

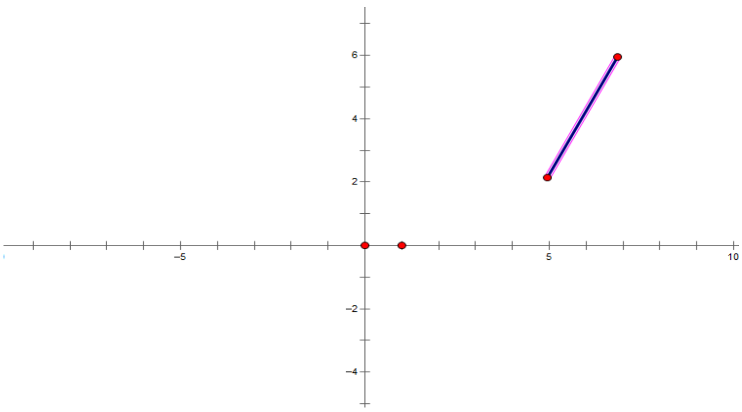
BAĞLAM PROBLEMİ VE ETKİNLİK(Dikey Matematikleştirme İçin)

Resimde, evi kare içinde belirtilen Ahmet, evinin hemen yanındaki yoldan bisikletiyle yaylaya çıkmakta ve orada top oynamaktadır. Aynı tempoda giderek 5 dakikada 240m, 10 dakikada 480m, 15 dakikada 720m yol çıkmakta olan Ahmet evden çıktıktan 30 dakika sonra yaylaya ulaşmaktadır. Her gün bu yolu bisikletle gitmekten yorulan Ahmet elektrikli bisiklet almaya karar verir. Fakat ilk kez elektrikli bisikletini kullanacağı zaman bir problemle karşı karşıyadır:

Elektrikli bisikletin şarjının yaylaya gidip gelmeye yetip yetmeyeceğini hesaplayabilmesi için neyi ya da neleri bilmesi gerekir?

Etkinlik

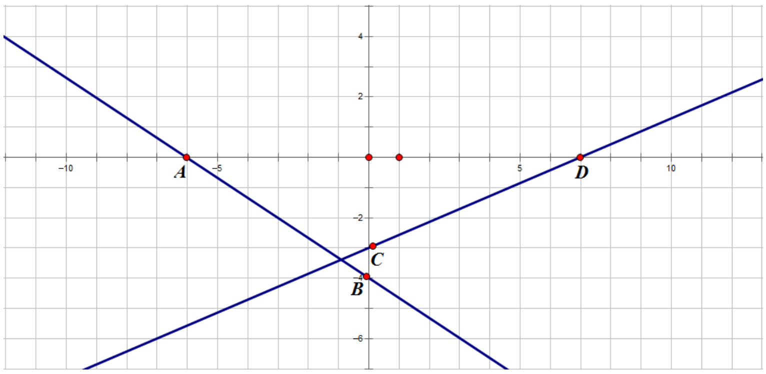
1-) Şekilde verilen doğrunun eğimini hesaplayın.



2-) (3,4) ve (2,8) noktalarından geçen doğrunun eğimini hesaplayınız.

3-) (345, 260) ve (885, 350) noktalarından geçen doğrunun eğimini bulunuz.

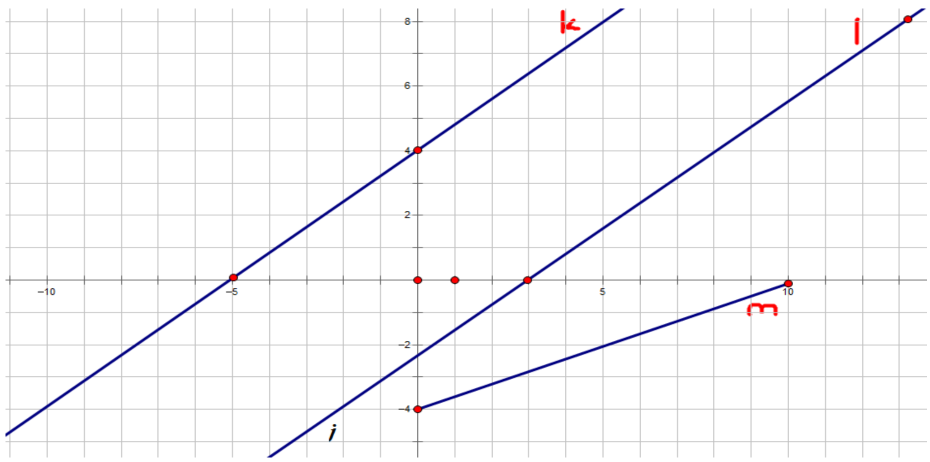
4-)AB ve CD doğrularının eğimlerini bulunuz ve eğimler arasındaki en dikkat çekici farkı tartışınız.



NOT: Bu soruların çözümlerinde öğrencilerin derslerde ulaştığı genellemeleri, stratejileri, sembolleri kullanmaları beklenmektedir. Öğrencilerin yapamadıkları soruları birbirilerine ve öğretmene(araştırmacıya) istedikleri zaman sorabilecekleri vurgulanacak ve ödevler birebir takip edilecektir. Öğrencilerin bilişsel süreçlerinde kopukluk yaşanmasını önleyecek olan ev ödevi çalışmaları her iki dersten sonra verilecektir. Birinci ve ikinci ödevler ders kitabına destek olarak MEB tarafından verilen çalışma kitabından olacaktır. Son ödev ise aşağıdaki şekilde araştırmacı tarafından hazırlanmıştır. Verilen ödevlerde ve yeni bağlam problemlerinde öğrencilerin soyutladıkları kavramları yansıtmaları beklenmektedir.

EV ÖDEVİ

1-) k, l doğrusunun ve m doğru parçasının eğimlerini bulunuz.



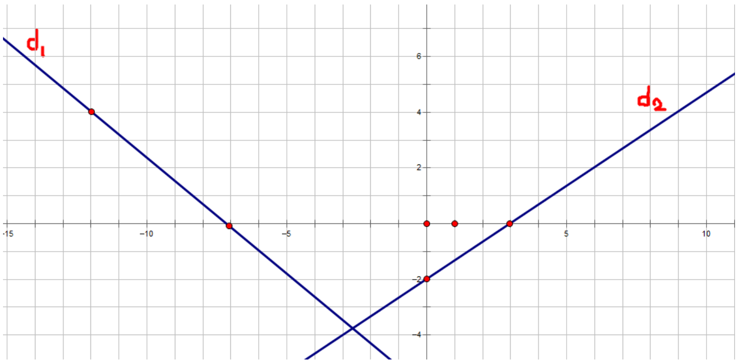
2-)Aşağıda tabloda bir manavın haftalara göre sattığı elma adetleri verilmiştir. Buna göre bu manavın sattığı elmaların grafiğinin eğimini hesaplayabilir misiniz?

Hafta sayısı	1	2	3	4	5
Satılan elma(kg)	4	8	12	16	20

3-) 5x-6y-30= 0 ve y=2x+5 doğrularının eğimlerini nasıl hesaplarsınız?

4-)y=- $\frac{2}{3}$x-12 ve y= $\frac{4}{3}x + 6$ doğrularının eğimlerini hesaplayarak, doğrunun eğimini hesaplamak için pratik bir yol bulunuz.

5)



Bu iki doğrunun eğimlerini hesaplayarak iki doğrunun eğimi arasındaki en belirgin fark nedir?

6-) (2,3) ve (9,5) noktalarından geçen doğrunun eğimini doğruyu koordinat düzleminde çizerek ve hiç çizmeden hesaplayınız.

EK 4

VELİ ONAY FORMU

Tarih

Sayın Veli,

Fenerbahçeliler Derneği Hamamlı Ortaokul Matematik öğretmeniyim. Aynı zamanda Eskişehir Anadolu Üniversitesinde Tezli yüksek lisans yapmaktayım. Özel bir matematik öğrenme kuramı olan gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımı altında eğim kavramını öğrenme süreçlerini inceleme konulu tez yazmayı planlıyorum.

Çalışmanın amacı, ortaokul 8. Sınıfta görülen eğim kavramını, öğrencilerin gerçekçi matematik eğitimi yaklaşımına göre desenlenmiş bir öğretim sürecinde nasıl öğreneceklerini incelemektir. Etkili bir öğrenme sağladığı yapılan çalışmalarla ortak savunu haline gelmiş olan bu yaklaşım ile öğrencilerin matematiği anlamlı ve kalıcı bir şekilde öğrenebilecekleri düşünülmektedir. Bu sebeple günlük hayatta çok kez karşılaştığımız eğim kavramının gerçekçi bir yaklaşımla ele alındığında daha anlamlı öğrenileceği ve ilerleyen yıllarda birçok yeni kavramın öğrenilmesinde ortaya konabileceği düşünülmektedir. Bu öğretim süreci içerisinde daha derinlemesine bilgi alabilme amacıyla öğrencilerle görüşmeler yapılacaktır.

Çocuğunuz ile 3 kere görüşme yapılacak ve görüşme ses kayıt cihazı ile kaydedilecektir. Sorulan matematik soruları ve görüşme çocuğunuz için ruhsal ve fiziksel bir risk taşımamaktadır. Çocuğunuzun hiçbir kimlik bilgisi alınmayacaktır. Ses kayıtları sadece proje yürütücüsü ve araştırmacısı tarafından ulaşılabilecektir ve gizlilik esaslarına kesinlikle uyulacaktır. Katılım tamamen gönüllülük esaslarına bağlıdır ve arzu ettiğiniz takdirde, herhangi bir yaptırıma maruz kalmadan katılımdan vazgeçme hakkına sahipsiniz. Sizin onayınız yanı sıra çocuğunuzun kendi gönüllüğü de bir ön şarttır. Araştırmaya ya da çocuğunuzun katılımına yönelik daha fazla bilgi için matematik öğretmeni Ömer DENİZ' e başvurabilirsiniz.

Teşekkürler,

Aynı zamanda matematik öğretmeni olan araştırmacının adresi ve telefon numarası

Ömer DENİZ (5558538135)
Yeni mah. Sıla sk. Sıla sitesi E blok Daire: 3 İnegöl-BURSA-: 555 853 81 35

Yukarıda açıklamasını okuduğum çalışmaya, oğlum/kızım ______________________'nin katılımına izin veriyorum. Ebeveynin:

Adı, soyadı: __________________________ İmzası: _______________________ Tarih: _____________

Çocuğunuzun katılımı ya da haklarının korunmasına yönelik sorularınız varsa ya da çocuğunuz herhangi bir şekilde risk altında olabileceğine, strese maruz kalacağına inanıyorsanız Anadolu Üniversitesi Etik Kuruluna (222) 330 05 80 - 4412 telefon numarasından ulaşabilirsiniz.

EK 5

GÖNÜLLÜ KATILIM FORMU

Bu çalışma, matematik öğretmeni Ömer DENİZ tarafından yürütülmektedir. Çalışmanın amacı, RME yaklaşımı altında eğim kavramının oluşturulma süreçlerinin incelenmesidir. Sizinle yapılacak görüşmeler tamamıyla gizli tutulacak ve sadece araştırmacılar tarafından değerlendirilecektir; elde edilecek veriler bilimsel yayımlarda kullanılacaktır. Yapacağınız görüşmelerin ses kayıt cihazı ile kaydedilmesi beklenmektedir. Öğretim süreci ve görüşmeler esnasında ya da sonrasında herhangi bir nedenden ötürü kendinizi rahatsız hissederseniz araştırmadan çekilmekte serbestsiniz. Bu çalışmaya katıldığınız için şimdiden teşekkür ederiz. Çalışma hakkında daha fazla bilgi almak için İlköğretim Matematik Öğretmenliği öğretim üyelerinden Doç. Dr. Tangül KABAEL (Tel: 335 05 80 - 3550 ; E-posta: tuygur@anadolu.edu.tr) ya da Fenerbahçeliler Derneği Hamamlı Ortaokulu Matematik Öğretmeni Ömer DENİZ(Tel: 555 853 8135; E-posta: omeraga86@gmail.com) ile iletişim kurabilirsiniz.

Bu çalışmaya tamamen gönüllü olarak katılıyorum ve istediğim zaman yarıda çıkabileceğimi biliyorum. Verdiğim bilgilerin bilimsel amaçlı yayımlarda kullanılmasını kabul ediyorum.

(Formu doldurup imzaladıktan sonra uygulayıcıya geri veriniz).

İsim Soyad	Tarih	İmza
	----/----/-----	

EK 6

27.3.2014
165.01/369

T.C.
BURSA VALİLİĞİ
İl Milli Eğitim Müdürlüğü

06/03/2014

Sayı : 86896125/605.01/985643
Konu: Ömer DENİZ'İN Araştırma İsteği

MÜDÜRLÜK MAKAMINA

İlgi : M.E.B. Araştırma, Yarışma ve Sosyal Etkinlik İzinleri konulu 07/03/2012 tarihli ve 2012/13 sayılı Genelgesi.

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Öğrencisi Ömer DENİZ'in "8.Sınıf Öğrencilerinin Gerçekçi Matematik Eğitimine Yaklaşımı Altında Eğitim Kavramını Oluşturma Süreçlerinin APOS Çerçevesinde İncelenmesi" konulu araştırma isteği Anadolu Üniversitesi Rektörlüğü Genel Sekreterliği'nin 25/02/2014 tarihli ve 63784619-399-211/2038 sayılı yazıları ile bildirilmektedir.

Anadolu Üniversitesi Eğitim Bilimleri Enstitüsü, Matematik Eğitimi Anabilim Dalı Matematik Eğitimi Yüksek Lisans Öğrencisi Ömer DENİZ'in "8.Sınıf Öğrencilerinin Gerçekçi Matematik Eğitimine Yaklaşımı Altında Eğitim Kavramını Oluşturma Süreçlerinin APOS Çerçevesinde İncelenmesi" konulu araştırmasını Bursa İnegöl İlçesi Fenerbahçeliler Derneği Hamamlı Ortaokulu 8.sınıf öğrencilerine uygulanma isteği İlimizde oluşturulan "Araştırma Değerlendirme Komisyonu" tarafından incelenerek değerlendirilmesi sonucunda, araştırma ile ilgili çalışmanın okuldaki eğitim öğretim faaliyetleri aksatılmadan, Öğretmen ve öğrenci görüşme formları aslı okul müdürlüğünce görülerek, gönüllülük esası ile okul müdürünün gözetim ve sorumluluğunda ilgi Genelge çerçevesinde komisyonumuzca uygun görülmektedir.

Makamlarınızca da uygun görülmesi halinde olurlarınıza arz ederim.

İbrahim ATAMAN
İl Milli Eğitim Şube Müdürü

OLUR
06/03/2014

Mustafa BİLİCİ
İl Milli Eğitim Müdür V.

KAYNAKÇA

1) Akyüz M. C. (2010). Gerçekçi Matematik Eğitimi Yönteminin Ortaöğretim 12. Sınıf Matematik Dersi (İntegral Ünitesi) Öğretiminde Öğrenci başarısına Etkisi. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Van Yüzüncü Yıl Üniversitesi, VAN.
2) Altun, M. (2002). Sayı Doğrusunun Öğretiminde Yeni Bir Yaklaşım. *İlköğretim-Online*, 1 (2), 2002, 33-39.
3) Altun, M., Bintaş, J. ve Arslan, K. (2003). GME ile Simetri Öğretimi. *Matematikçiler Derneği*, [Online]: http://www.matder.org.tr/Default.asp?id=107
4) Altun, M. (2006). Matematik Öğretiminde Gelişmeler. *Uludağ Üniversitesi Eğitim Fakültesi Dergisi, XIX (2), 2006, 223-238.*
5) Asiala, M., Brown, A., DeVries, D., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (1996). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. Research in collegiate mathematics education, 2(3), 1-32.
6) Asiala, M., Brown, A., DeVries, D. J., Dubinsky, E., Mathews, D., & Thomas, K. (2004). A framework for research and curriculum development in undergraduate mathematics education. *MAA NOTES*, 37-54.
7) Asiala, M., Cottrill, J., Dubinsky, E., & Schwingendorf, K. E. (1997). The development of students' graphical understanding of the derivative. The Journal of Mathematical Behavior, 16(4), 399-431.
8) Baki, A., Karataş, İ., & Güven, B. (2002). Klinik mülakat yöntemi ile problem çözme becerilerinin değerlendirilmesi. *Ulusal Fen Bilimleri ve Matematik Eğitimi Kongresi*, Orta Doğu Teknik Üniversitesi Eğitim Fakültesi, 16-18.
9) Barr, G. (1981). Some student ideas on the concept of gradient. *Mathematics in School*, *10*(1), 14-17.
10) Birgin, O., Kutluca, T. Ve Gürbüz, R. (2008). Yedinci sınıf matematik dersinde bilgisayar destekli öğretimin öğrenci başarısına etkisi. Erişim: ietc2008.home.anadolu.edu.tr/ietc2008/170.doc
11) Bonotto, C., (2010). Realistic Mathematical Modeling and Problem Posing. Erişim: http://site.educ.indiana.edu/portals/161/public/bonotto.pdf
12) Breidenbach, D., Dubinsky, E., Hawks, J., & Nichols, D. (1992). Development of the process conception of function. *Educational Studies in Mathematics*, *23*(3), 247-285.

13) Cahyono, A. N. (2012). Virtualmatriks: A Conceptual Mathematization Process in Virtual Learning Environment. *The Online Journal of Science and Technology*, *2*(3).

14) Chang, C. K., & Tsai, Y. L. (2005). An alternative Approach for the Learning of $(a+b)^2= a^2+ 2ab+ b^2$. In *Electronic Proceedings the 3rd East Asia Regional Conference in Mathematics Education* (pp. 7-12).

15) Cheng, D. S. (2010). *Connecting proportionality and slope: Middle school students' reasoning about steepness*. Boston University.

16) Clark, J. M., Cordero, F., Cottrill, J., Czarnocha, B., DeVries, D. J., St John, D., ... & Vidakovic, D. (1997). Constructing a schema: The case of the chain rule?.*The Journal of Mathematical Behavior*, *16*(4), 345-364.

17) Clement, J. (1985). Misconceptions in graphing. *Proceedings of the Ninth International Conference for the Psychology of Mathematics Education*, The Netherlands.

18) Clement, J. (2000). Analysis of clinical interviews: Foundations and model viability. In A. E. Kelly, & R. A. Lesh (Eds.), *Handbook of research design in mathematics and science education* (pp. 547-589). London: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers.

19) Cobb, P., & Steffe, L. P. (1983). The constructivist researcher as teacher and model builder. *Journal for research in mathematics education*, *14* (2), 83-94.

20) Cottrill, J., Dubinsky, E., Nichols, D., Schwingendorf, K., Thomas, K., & Vidakovic, D. (1996). Understanding the limit concept: Beginning with a coordinated process scheme. *The Journal of Mathematical Behavior*, *15*(2), 167-192.

21) Crawford, A. R., & Scott, W. E. (2000). Making sense of slope. *The Mathematics Teacher*, *93*(2), 114-118.

22) Çetin, İ. (2009). *Students'understandıng Of Lımıt Concept: An Apos Perspectıve* (yayınlanmamış doktora tezi), Ortadoğu Teknik Üniversitesi, ANKARA.

23) DeLange, J. (1996). *Using and applying mathematics in education* (Vol. 1, pp. 49-97). International Handbook of Mathematics Education. Erişim: http://www.google.com.tr/books?hl=tr&lr=&id=0TC-CYCHoPUC&oi=fnd&pg=PA49&dq=using+and+applying+mathematics+&ots=HIKLy1Zhxr&sig=tFboxiea_lu_yOXWUXnh9zlDwws&redir_esc=y#v=onepage&q=using%20and%20applying%20mathematics&f=false

24) Demirdöğen, N. (2007). Gerçekçi Matematik Eğitimi Yönteminin İlköğretim 8. Sınıflarda Kesir Kavramının Öğretimine Etkisi. (Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Gazi Üniversitesi, ANKARA.

25) Drijvers, P. H. M. (2003). Learning algebra in a computer algebra environment: Design research on the understanding of the concept of parameter.

26) Dubinsky, E., & Lewin, P. (1986). Reflective abstraction and mathematics education: The genetic decomposition of induction and compactness. The Journal of Mathematical Behavior.

27) Dubinsky, E. (1991). Reflective abstraction in advanced mathematical thinking. In D. O. Tall (Ed.), Advanced Mathematical Thinking (pp. 95-126). Dordrecht: Kluwer

28) Dubinsky, E. & G. Harel, "The Nature Of The Process Conception Of Function", In G. Harel and E. Dubinsky (Eds.), The Concept Of Function: Aspects Of Epistemology And Pedagogy, MAA Notes 25: 85-106,Mathematical Association Of America, Washington (1992)

29) Dubinsky, E. (2001). Using a theory of learning in college mathematics courses. *MSOR Connections*, *1*(2), 10-15.

30) Dubinsky, E. D., & McDonald, M. (2001). APOS: A constructivist theory of learning in undergraduate mathematics education research. NEW ICMI STUDIES SERIES, 7, 275-282.

31) Dubinsky, E., Weller, K., Mcdonald, M. A., & Brown, A. (2005). Some historical issues and paradoxes regarding the concept of infinity: An Apos-Based analysis: Part 1. Educational Studies in Mathematics, 58(3), 335-359.

32) Dubinsky, E., & Moses, R. P. (2011). Philosophy, math research, math ed research, K-16 education and the civil rights movement: A synthesis. Notices of the American Mathematical Society, 58(3), 1-11.

33) Duncan, B., & Chick, H. L. (2013). How do adults perceive, analyse and measure slope?. In 36th annual conference of the Mathematics Education Research Group of Australasia (MERGA 36) (pp. 258-265).

34) Eraslan, A.(2009). Finlandiya' nın PISA' daki Başarısının Nedenleri: Türkiye İçin Alınacak Dersler. *Necatibey Eğitim Fakültesi Elektronik Fen ve Matematik Eğitimi Dergisi (EFMED) Cilt 3, Sayı 2, Aralık 2009, sayfa 238-248.*

35) Fauzan, A. (2002). *Applying Realistic Mathematics Education (RME) in teaching geometry in Indonesian primary schools*. University of Twente.

36) Fauzan, A., Slettenhaar, D., & Plomp, T. (2002). Traditional mathematics education vs. realistic mathematics education: Hoping for changes. In*Proceedings of the 3rd International Mathematics Education and Society Conference* (pp. 1-4).

37) Freudenthal, H., Why To Teach Mathematics So As To Be Useful, *Educational Studies İn Mathematics*, (1968), 1 , p. 3-8.

38) Freudenthal, H. (1973). *Mathematics as an educational task*. Springer. Erişim: http://www.google.com.tr/books?hl=tr&lr=&id=pbO39rHjwbQC&oi=fnd&pg=PR5&dq=Mathematics+As+An+Educational+Task&ots=u_5Dkem5do&sig=zJljHF4DHdNReVhlnsa3PwZSfwc&redir_esc=y#v=onepage&q=Mathematics%20As%20An%20Educational%20Task&f=false

39) Freudenthal, H. (1983). Didactical phenomenology of mathematical structures. Dordrecht, the Netherlands: Reidel Publishing Company.

40) Freudenthal, H.(1991). Revisiting Mathematics Education: China Lecturers. Dordrecht: Kluwer, (1991).

41) Gelibolu M. F. (2008). Gerçekçi Matematik Eğitimi Yaklaşımıyla Geliştirilen Bilgisayar Destekli Mantık Öğretimi Materyallerinin 9. Sınıf Matematik Dersinde Uygulamasının Değerlendirilmesi. (Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi). Ege Üniversitesi, İZMİR.

42) Ginsburg, H. P. (1981). The clinical interview in psychological research on mathematical thinking: Aims, rationales, techniques. *For Th e Learning of Mathematics, 1* (3), 4-11.

43) Glesse, C. (2012). Nitel Araştırmaya Giriş. A. Ersoy ve P. Yalçınoğlu (Çev. Edt.). Ankara: Anı Yayıncılık.

44) Gravemeijer, K., Context Problems and Realistic Mathematics Instruction, *Research in Mathematics Education*, (1990), 11, p. 10-32

45) Gravemeijer, K. (1994). Educational development and developmental research in mathematics education. *Journal for Research in Mathematics Education*, 443-471.

46) Gravemeijer, K., & Doorman, M. (1999). Context problems in realistic mathematics education: A calculus course as an example. *Educational studies in mathematics*, *39*(1-3), 111-129.

47) Gravemeijer, K., & Terwel, J. (2000). Hans Freudenthal: a mathematician on didactics and curriculum theory. *Journal of Curriculum Studies*, *32*(6), 777-796.

48) Gravemeijer, K. (2004). Creating opportunities for students to reinvent mathematics. In *10Th International Congress in Mathematics Education* (pp. 4-11).

49) Gravemeijer, K. (2007). Emergent modelling as a precursor to mathematical modelling. In *Modelling and applications in mathematics education* (pp. 137-144). Springer US.

50) Green, J., Willis, K., Hughes, E., Small, R., Welch, N., Gibbs, L., & Daly, J. (2007). Generating best evidence from qualitative research: the role of data analysis. *Australian and New Zealand journal of public health*, 31(6), 545-550.

51) Grigoraş, R. and Hoede, C. (2008). Modelling İn Environments without Numbers. Erişim: http://doc.utwente.nl/64950/1/memo1875.pdf.

52) Güven, İ. (2004). Sosyal Bilgiler Alanı Öğretmen Adaylarının Okul Uygulamalarına Yönelik Görüşleri Üzerine Nitel bir Araştırma. *Kuram ve Uygulamada Eğitim Bilimleri* 4 (2) Kasım 2004 ss. 271-300.

53) Hamdan, M. (2011). *Horizontal and Vertical Concept Transitions*. Erişim: http://directorymathsed.net/download/Hamdan.pdf

54) Herscovics, N. (1996). The construction of conceptual schemes in mathematics. In L. Steffe, P. Nesher, P. Cobb, G. Goldin, & B. Greer (Eds.). Theories of mathematical learning. (pp. 351-379). Mahwah, New Jersey: Lawrence Erlbaum Associates.

55) Heuvel-Panhuizen, M. V. D. (1996). *Assessment and Realistic Mathematics Education*. Freudenthal Institute, Mathematics and Computer Science Education, Tiberdreef 4, 3561 GG Utrecht, The Netherlands.

56) Huang, C. H. (2011). Engineering students' conceptual understanding of the derivative in calculus'. *World Transactions on Engineering and Technology Education, Vols*, *9*, 209-214.

57) Hough, S., & Gough, S. (2007). Realistic Mathematics Education. *Mathematics Teaching Incorporating Micromath*, *203*, 34-38.

58) Karasar, Niyazi. (2008). Bilimsel araştırma yöntemi. Ankara: Nobel Yayıncılık.

59) Kabael, T. (2009). The effects of the function machine on students' understanding levels and their image and definition for the concept of function. In *Proceedings of*

the 31st annual meeting of the North American chapter of the International Group for the Psychology of Mathematics Education (pp. 58-64).

60) Kabael, T. (2010). Cognitive Development of Applying the Chain Rule through Three Worlds of Mathematics. *Australian Senior Mathematics Journal*, *24*(2), 14-28.

61) Kabael, T.(2011). Tek Değişkenli Fonksiyonların İki Değişkenli Fonksiyonlara Genellenmesi, Fonksiyon Makinesi ve APOS, KUYEB,11(1), pp.465-499.

62) Kely, A. E. & Lesh, R. A. (2000) Handbook of Research Design in Mathematics and Science Education. Lawrence

63) Kerekes, J. (2011). Using The Learners World To Construct And Think In A System Of Mathematical Symbols. *College Teaching Methods & Styles Journal (CTMS)*, *1*(2), 17-26.

64) Kizito, R. N. (2012). Realistic Mathematics Education (RME) as an instruction design perspective for introducing the relationship between the derivative and integral via distance education (Doctoral dissertation, Stellenbosch: Stellenbosch University).

65) Kocakülah, A. & Şardağ, M. (2013). Fen Bilgisi Öğretmen Adaylarının Görüntü Oluşumu Hakkındaki Kavramsal Anlamaları. Erişim:http://www.jret.org/FileUpload/ks281142/File/01.kocakulah.pdf

66) Kwon, O. N. (2009). Conceptualizing the realistic mathematics education aproach in the teaching and learning of ordinary differential equations. *Colección Digital Eudoxus, (11).*

67) Lamon, S. J. (1996). The development of unitizing: Its role in children's partitioning strategies. *Journal for Research in Mathematics Education*, 170-193.

68) Lobato, J., & Siebert, D. (2002). Quantitative reasoning in a reconceived view of transfer. *The Journal of Mathematical Behavior*, *21*(1), 87-116.

69) Lobato, J., & Thanheiser, E. (2002). Developing understanding of ratio as measure as a foundation for slope. Making sense of fractions, ratios, and proportions, 162-175.

70) Meel, D. (2003). Models and theories of mathematical understanding: Comparing Pirie and Kieren’s model of the growth of mathematical understanding and APOS theory. In A. Selden, E. Dubinsky, G. Harel & F. Hitt (Eds.) Research in collegiate mathematics education. V. Issues in mathematics education, Vol. 12. Providence, RI: American mathematical society, 132-181.

71) Menon, U. (2012). Mathematisation-horizontal and Vertical. In epiSTEME 5. Erişim: http://episteme5.hbcse.tifr.res.in/index.php/episteme5/5/paper/view/168/52

72) Miles, M., & Huberman, M. (1994). .*An expanded sourcebook qualitative data analysis* (2nd ed.). California, CA: Sage Publications.

73) Mitchelmore, M. C., & White, P. (2000). Development of angle concepts by progressive abstraction and generalisation. *Educational Studies in Mathematics*, *41*(3), 209-238.

74) Moses, R. ve Dubinsky, E., (2011) Philosophy, Math Research, Math Ed Research, K–16 Education, and the Civil Rights Movement: A Synthesis. Notices of the AMS, 58(3). Erişim: http://www.ams.org/notices/201103/rtx110300401p.pdf

75) (NCTM)(2000). Curriculum and evaluation standards for school mathematics. Erişim http://www.nctm.org/standards.htm.

76) Nelissen, J. & Tomic, W. (1993). Learning and Thought Processes In Realistic Mathematics Education. *Curriculum and Teaching, Volume 8, No. 1, 1993.*

77) Nelissen, J. M. C. (1999). Thinking skills in realistic mathematics. *Teaching and learning thinking skills*, 189-213.

78) Nkambule, T. (2009). Teaching and learning linear programming in a grade ii multilingual mathematics class of English language learners: exploring the deliberate use of learners home language (Doctoral dissertation).

79) Olive, J. and Çağlayan, G. (2007) 8th grade students' understanding of slope and its antecedents in a learning situation based on quantitative reasoning. In D. K. Pugalee, A. Rogerson & A. Schinck (Eds.) *Proceedings of the Ninth International Conference of the Mathematics Education into the 21st Century Project: Mathematics Education in a Global Community*, 491-496. Charlotte, NC: University of North Carolina at Charlotte.

80) Özdemir, E. (2008). Gerçekçi Matematik Eğitimine (RME) Dayalı Olarak Yapılan "Yüzey Ölçüleri ve Hacimler" Ünitesinin Öğretiminin Öğrenci Başarısına Etkisi ve Öğretime Yönelik Öğrenci Görüşleri.(Yayınlanmamış yüksek lisans tezi). Balıkesir Üniversitesi, BALIKESİR.

81) PISA 2003 Ulusal Nihai Raporu. Erişim: http://pisa.meb.gov.tr/wp-content/uploads/2013/07/PISA-2003-Ulusal-Nihai-Rapor.pdf

82) PISA 2006 Ulusal Nihai Raporu. Erişim: http://pisa.meb.gov.tr/wp-content/uploads/2013/07/PISA2006-Ulusal-Nihai-Rapor.pdf

83) PISA 2009 Ulusal Ön Raporu. Erişim: http://pisa.meb.gov.tr/wp-content/uploads/2013/07/PISA-2009-Ulusal-On-Rapor.pdf

84) Presmeg, N., & Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). Leen Streefland's legacy. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 1-4.

85) Rasmussen, C. L., & King, K. D. (2000). Locating starting points in differential equations: A realistic mathematics education approach. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *31*(2), 161-172.

86) Rasmussen,C. , Zandieh, M., King, K. and Teppo,A.(2005) Advancing Mathematical Activity: A Practice-Oriented View of Advanced Mathematical Thinking. *Mathematical Thinking and Learning*, 7:1, 51-73.

87) Ralston, A., & Willoughby, S. S. (1997). Realistic Problem Formulation and Problem Solving. *Mathematics Teacher*, *90*(6), 430-34.

88) Reed, B. (2007). The effects of studying the history of the concept of function on student understanding of the concept. (Unpublished Doctoral Dissertation). Kent State University, Ohio.

89) Simon, M. A., & Blume, G. W. (1994). Mathematical modeling as a component of understanding ratio-as-measure: A study of prospective elementary teachers. *The Journal of Mathematical Behavior*, 13(2), 183-197.

90) Steffe, L., Thompson, P.W., & Glasersfeld von, E. (2000). Teaching experiment methodology: Underlying principles and essential elements. In A.E. Kelly & R.A. Lesh (Eds.), *Handbook of Research design in mathematics and science education.* (pp. 267-306), Mahwah, NJ: Lawrence Erlbaum Associates, Publishers

91) Strauss, A., Corbin, J. (1998). Basics of Qualitative Research: Grounded TheoryProcedures and Technique, 2nd Edition. Sage, NewburyPark, London.

92) Stump, S. (1999). Secondary mathematics teachers' knowledge of slope.*Mathematics Education Research Journal*, *11*(2), 124-144.

93) Stump, S. L. (2001). Developing preservice teachers' pedagogical content knowledge of slope. *The Journal of Mathematical Behavior*, *20*(2), 207-227.

94) Tabaghi, S. G., Mamolo, A., & Sinclair, N. (2009).The Effect Of Dgs On Students' Conception Of Slope.

Erişim:
http://www.pmena.org/2009/proceedings/ALGEBRAIC%20THINKING/algebraBRR369496.pdf

95) Tall, D., Thomas, M., Davis, G., Gray, E., & Simpson, A. (1999). What is the object of the encapsulation of a process?. *The Journal of Mathematical Behavior*, *18*(2), 223-241.

96) Tall, D. (1999). Reflections on APOS theory in elementary and advanced mathematical thinking. In *PME CONFERENCE* (Vol. 1, pp. 1-111).

97) Tall, D. (2008). The transition to formal thinking in mathematics. *Mathematics Education Research Journal*, *20*(2), 5-24.

98) Tanışlı, D. (2008). İlköğretim beşinci sınıf öğrencilerinin örüntülere ilişkin anlama ve kavrama biçimlerinin belirlenmesi. Yayınlanmamış Doktora Tezi, Eskişehir, Türkiye.

99) Thompson, P. W. (1994). Students, functions, and the undergraduate curriculum. *Research in Collegiate Mathematics Education, I. CBMS Issues in Mathematics Education*, *4*, 21-44.

100) TIMMS 1999 Ulusal Rapor. Erişim: http://timss.meb.gov.tr/wp-content/uploads/timss_1999_ulusal_raporu.pdf

101) TIMMS 2007 Ulusal Rapor 8. Sınıf. Erişim: http://www.vitaminogretmen.com/_docs/pdf/TIMSS_2007_TURKIYE_ULUSAL_RAPOR_SINIF8.pdf

102) Yücel, C., Karadağ, E., & Turan, S. (2013). TIMSS 2011 ulusal ön değerlendirme raporu. Eskişehir Osmangazi Üniversitesi Eğitim Fakültesi Eğitimde Politika Analizi Raporlar Serisi I, Eskişehir.

103) Treffers, A., Three Dimensions: A Model Of Goal And Theory And Theory Description in Mathematics Instruction- The Wiskobas Project, Dordrecht: Kluwer. (1987), p:11-13, 14-17, 247.

104) Treffers, A. (1993). Wiskobas and Freudenthal Realistic Mathematics Education. *Educational Studies in Mathematics, 25* (1-2), 89-108.

105) Tsai, Y. L., & Chang, C. K. (2005). The Discussion of the Implementation Result about Alternative Approach of Multiplicative Identities.

Erişim:http://euler.math.ecnu.edu.cn/earcome3/TSG3/EARCOME3_Tsai_YuLing_TSG3(20050512)().doc

106) Tziritas, M. (2011). APOS Theory as a Framework to Study the Conceptual Stages of Related Rates Problems. Analysis. Concordia University.

107) Uzel, D., & Uyangor, S. M. (2006). Attitudes of 7th Class Students Toward Mathematics in Realistic Mathematics Education. In*International Mathematical Forum* (Vol. 1, No. 39, pp. 1951-1959).

108) Ünal, Z. A., & İpek, A. S. (2010). Gerçekçi matematik eğitiminin ilköğretim 7. sınıf öğrencilerinin tam sayılarla çarpma konusundaki başarılarına etkisi. *Eğitim ve Bilim*, *34*(152), 60-70.

109) Üzel, D. (2007). Gerçekçi Matematik Eğitimi Destekli Eğitimin İlköğretim 7. Sınıf Matematik Dersi Öğretiminde Öğrenci Başarısına Etkisi.(Yayınlanmamış doktora tezi). Balıkesir Üniversitesi, Balıkesir..

110) Van den Heuvel-Panhuizen, M. (1998). Realistic Mathematics Education as work in progress. *Theory into practice in Mathematics Education. Kristiansand, Norway: Faculty of Mathematics and Sciences*

111) Van den Heuvel-Panhuizen, M. (2000). Mathematics education in the Netherlands: A guided tour. *Freudenthal Institute CD-rom for ICME9*.

112) Van Den Heuvel-Panhuizen, M. (2003). The didactical use of models in realistic mathematics education: An example from a longitudinal trajectory on percentage. *Educational Studies in Mathematics*, *54*(1), 9-35.

113) Van Putten, C. M., Van den Brom-Snijders, P. A., & Beishuizen, M. (2005). Progressive mathematization of long division strategies in Dutch primary schools. *Journal for Research in Mathematics Education*, 44-73.

114) Verner, I. M., & Maor, S. (2005). Mathematical aspects of educating architecture designers: a college study. *International Journal of Mathematical Education in Science and Technology*, *36*(6), 655-671.

115) Verschaffel, L., & De Corte, E. (1997). Teaching realistic mathematical modeling in the elementary school: A teaching experiment with fifth graders.*Journal for Research in mathematics education*, 577-601.

116) Weller, K., Clark, J., Dubinsky, E., Loch, S., McDonald, M. A., & Merkovsky, R. (2000). An examination of student performance data in recent RUMEC studies. *Washington, DC: Mathematical Association of America*.

117) Weyer, R. S. (2010). APOS theory as a conceptualisation for understanding mathematics learning. Erişim: http://www.learningace.com/doc/377374/b820000ac4f275d4e7519bdd4cd74c4e/s-weyer-apos-theory

118) Wijaya, A., Doorman, L. M., & Keijze, R. (2011). Emergent Modelling: From Traditional Indonesian Games to a Standard Unit of Measurement. *Journal of Science and Mathematics Education in Southeast Asia*, *34*(2), 149-173.

119) Wubbels, T., Korthagen, F., Broekman, H. (1997). Preparing Teachers for Realistic Mathematics Education. Educational Studies in Mathematics. Erişim:http://cimm.ucr.ac.cr/usodetecnologia/Uso%20de%20tecnologia/PDF,%20Viejos%20y%20Nuevos%20(uso%20de%20tecnologia)/Wubbels,Theo.%20Korthagen%20F.%.

120) Yağcı E., Arseven A. (2010). Gerçekçi Matematik Öğretimi Yaklaşımı. *International Conference on New Trends in Education and Their Implications 11-13 November* Antalya- Turkey.

121) Yıldırım, A., & Şimşek, H. (2005). Sosyal Bilimlerde Nitel Araştırma Yöntemleri. 5. Baskı. Ankara: Seçkin Yayıncılık

122) Yurdagül, Ö. (2008). Grafiksel Hesap Makinelerinin Doğrusal Denklemlerin Grafikleri ve Eğim Konusunda 8. Sınıf Öğrencilerinin Matematik Başarısına Etkisi.(yayınlanmamış doktora tezi). Ortadoğu Teknik Üniversitesi, ANKARA.

123) Zandieh, M. J. (2000). A theoretical framework for analyzing student understanding of the concept of derivative. *Research in Collegiate Mathematics Education. IV. CBMS Issues in Mathematics Education*, 103-127.

124) Zulkardi, Z. (1999). How to Design Mathematics Lessons based on the Realistic Approach?. Erişim: http://eprints.unsri.ac.id/692/1/rme.html

125) Zulkardi, Z. (2002). *Developing a learning environment on realistic mathematics education for Indonesian student teachers*. University of Twente.

126) Zulkardi, Z. (2003). Developing a'rich'learning environment on Realistic Mathematics Education (RME) for student teachers in Indonesia. *Special Edition of International Journal of Indonesian Mathematics Society (MIHMI)*.