JACKKNIFE VE BOOTSTRAP PARAMETRE TAHMİN YÖNTEMLERİNİN ETKİNLİĞİNİN ARAŞTIRILMASI

FEZAN ŞAHİN

Anadolu Üniversitesi
Sağlık Bilimleri Enstitüsü
Lisansüstü Öğretim Yönetmeliği Uyarınca
Tıbbi Biyoloji Anabilim Dalı
Biyoistatistik Bilim Dalı
YÜKSEK LİSANS TEZİ
Olarak Hazırlanmıştır

Danışman: Prof. Dr. Kazım ÖZDAMAR

ŞUBAT 1993

30236

KABUL VE ONAY SAYFASI

Fezan Şahin'in YÜKSEK LİSANS tezi olarak hazırladığı " Jackknife ve Bootstrap Parametre Tahmin Yöntemlerinin Etkinliğinin Araştırılması " başlıklı bu çalışma, jürimizce Lisansüstü Öğretim Yönetmeliği'nin ilgili maddeleri uyarınca değerlendirilerek kabul edilmiştir.

19 /02/ 1993

ÜYE:

ÜYE:

ÜYE:

Anadolu Üniversitesi Sağlık Bilimleri Enstitüsü Yönetim Kurulu'nun 19.02.1993 gün ve 207/532 sayılı kararıyla onaylanmıştır.

ASLI GİBİDİR
28 NİSAN 1994
Mehmet MUSMUL
Enstitü Sekreteri

Prof. Dr. Nurettin BAŞARAN
Enstitü Müdürü

ÖZET

Bu araştırma, olasılık dağılım fonksiyonu bilinmeyen bir dağılımdan alınan küçük hacimli örnekler aracılığı ile topluma ilişkin parametre tahminlerinde yararlanılan Jackknife ve Bootstrap parametrik olmayan parametre tahmin yöntemlerinin etkinliğini matematiksel ümit yöntemi ile karşılaştırmak amacıyla yapılmıştır.

Yöntemlerin ortalama ve standart sapmaları N(100;10) parametreli Normal, W(X;3,2) parametreli Weibull ve E(X;10) parametreli Üstel dağılımlardan türetilen X değişkenlerinden hesaplanmıştır. Bu türetim, örnek hacmi n=10,20,30,50,100,200,300,500 ve her türetim sayısında tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 olacak şekilde yapılmıştır.

Normal, Üstel ve Weibull dağılımı gösteren türetilmiş verilerden Jackknife ve Bootstrap yöntemleri ile hesaplanan ortalamalar n sayısı artarken toplum ortalamasına çok yakın değerler almıştır. Matematiksel ümit değerleri ile elde edilen parametre tahminleri ile Jackknife ve Bootstrap yöntemi ile elde edilen parametre tahminleri arasında benzerlikler bulunmuştur. n sabit tutulup tekrar sayısı arttırıldığında Bootstrap ve Jackknife yöntemleri ile elde edilen istatistiklerde önemli değişmeler olmamış, istatistiklerin değişim aralıkları önemli düzeyde küçülmüştür.

Parametre tahminleri ile μ değerleri arasında önemli farklılıklar bulunmamıştır ($P>0.05$). n 30'dan büyük olduğunda istatistikler μ değerine süratle yaklaşmıştır.

Bartlett testine göre tüm örnek türetimlerinin varyansları homojendir. Türetim sayısı arttıkça Jackknife standart sapma tahminleri toplumun standart sapmalarından daha küçüktür ($P>0.05$). Türetimlerle ilgili istatistikler kendi içlerinde birbiriyle tutarlı ve tekrar sayısı artarken minimum varyanslı olarak bulunmuştur.

Bootstrap yöntemi standart sapma değerleri tekrar sayısı arttıkça toplumun sigma değerinden önemli düzeyde küçük değerler olarak hesaplanmıştır ($P<0.001$). Bootstrap yönteminde türetimlerle ilgili istatistikler kendi içlerinde birbiriyle tutarlı olmakla beraber toplum değerleriyle önemli düzeyde farklılık göstermiştir. Örnek hacimleri artarken standart sapma değerleri küçülmüş ve sigma değerinden yaklaşık n=10 için 1/9'u kadar, n=500 için 1/500'ü kadar değerler almıştır.

Tüm dağılım varsayımlarında Jackknife ve Bootstrap ortalamaları birbirleriyle benzerlik göstermiştir. Her iki yöntemde de ortalama istatistikleri dağılım türünden etkilenmemiştir.

Standart sapma değerleri bakımından Jackknife yöntemi Bootstrap yönteminden farklılaşmaktadır. Bootstrap yöntemi çok küçük standart sapma değerleri vermekte ise de türetimlerde alınan parametrik değerlerle önemli farklılaşmalar göstermektedir ($P<0.001$). Jackknife yöntemi ise parametrik değerler ile benzer sonuçlar vermektedir ($P>0.05$).

Toplumun standart sapma ve ortalamalarının tahmininde Jackknife yöntemi matematiksel ümit yöntemi ile benzer sonuçlar, Bootstrap yöntemi ile farklı sonuçlar vermektedir.

X değişkeninin dağılım fonksiyonunun bilinmediği durumlarda toplumun parametre tahmininde, Jackknife yöntemi Bootstrap yöntemine göre daha tutarlıdır. $10 < n < 30$ olduğu koşulda Jackknife ile tahminlenen ortalama geçerli, tutarlı fakat minimum varyansa sahip olmayan bir istatistiktir. $n \geq 30$ koşulunda ise bir parametre tahmininde bulunması gereken özellikleri taşıyan parametre tahminleri vermektedir.

Parametrik yöntemlerin uygulanmasının mümkün olmadığı ya da kullanılmasının doğru olmayacağı durumlarda Jackknife yöntemi toplum parametrelerinin tahminlenmesinde parametrik yöntemlere benzer tutarlı tahminler vermektedir.

SUMMARY

This research has been realized to compare efficiency of the Bootstrap and the Jackknife methods that being nonparametric parameter estimating methods with mathematical expectation method on samples that drawn small size from unknown distribution function population.

The mean and standart deviations of methods have calculated from X variables generated from Normal Distribution with N(100,10) parameters, Weibull Distribution with W(X;3,2) parameters and Exponential Distribution with E(X;10) parameter. This generation has done according to the number of sample size n=10,20,30,50,100,200,300,500 and the number of replication R=10,20,30,50,100,200,500 in every generation.

The calculated means with the Jackknife and the Bootstrap Methods from Normal, Exponential and Weibull Distributions had similar values to population means when n was increasing. It had found similarity among the mathematical expectation values and the parameter estimates calculated by the Bootstrap and the Jackknife methods. When the number of replication was increased while n was constant, the statistics found with the Bootstrap and the Jackknife methods had not much important changing and the ranges of in the statistics were decreased.

There was not significant difference among the estimates of parameter and the value of μ (P>0.05). When n was greater than 30, the statistics approached rapidly to the value of μ

The variances of all samples generations were homogen according to Bartlett's test. But the estimates of the Jackknife's standart deviation were smaller than the standart deviation of population when the number of replication was increasing (P>0.05). The statistics interested in generation have had minimum variances and were consequent with each other when the number of replication was increasing.

The Bootstrap's standart deviations have calculated smaller than the population's sigma value when the number of replication was increasing (P<0.001). Although the statistics of the Bootstrap were consequent with each other, they had differed from the value of population. While the sample size was increasing, standart deviations had decreased gradually and taken aproximately the values of 1/9 for n=10 and 1/500 for n=500 of sigma value.

The means of the Jackknife and the Bootstrap were similar in all of distributions assumptions. The means of statistics has not been effected from the type of distribution of variables in both methods.

The Jackknife method's standart deviations had differed from the Bootstrap methods'. Although the Bootstrap's standart deviations values had had small value in generation they had became significantly different and small from population parameter that assumed in generation (P<0.001). The statistics of the Jackknife method were similar with population parameters (P>0.05).

To estimate the mean and the standart deviation of population, the Jackknife method's results were similar with mathematical expectations but the Bootstrap method's results not similar.

We can suppose the Jackknife method is consistent than the Bootstrap method to estimate of population parameter at the conditions of the distribution functions of X variable is not known . While n is equal 10 and lower than 30, the Jackknife's estimated mean is consistent and efficient but not minimum varianced statistics. If n is equal and greater than 30, it gives the estimation having statistical features.

When the parametric methods must not use or are not true, the Jackknife method gives consistent estimations like parametric methods' for the populations parameter.

TEŞEKKÜR

Bu çalışmanın gerçekleşmesinde yol gösterip, ilgi ve yardımlarını esirgemeyen değerli hocam Prof.Dr.Kazım ÖZDAMAR'a, çalışmalarım sırasında yakın ilgisini gördüğüm Yrd.Doç.Dr. K.Setenay DİNÇER'e ve Arş. Gör. Mevlüt TÜRE'ye ve çalışma arkadaşlarım Arş.Gör. Canan BAYDEMİR ve Ayşe KALAVA'ya teşekkürlerimi sunarım.

Ayrıca çalışmalarım sırasında gösterdikleri maddi ve manevi destekten dolayı aileme teşekkürü borç bilirim.

İÇİNDEKİLER

İÇİNDEKİLER (Devam)

İÇİNDEKİLER (Devam)

ŞEKİLLER DİZİNİ

ÇIZELGELER DIZINI

Çizelge | Sayfa

ÇIZELGELER DIZINI (Devam)

ÇİZELGELER DİZİNİ (Devam)

Çizelge | Sayfa

ÇIZELGELER DIZINI (Devam)

1. GİRİŞ

Günümüzde araştırmalar, n hacimli örnekler seçerek incelenen değişkenlerden elde edilen verilerden topluma ilişkin genellemelere ulaşabilmek amacıyla yapılmaktadır. Bu verilerden hesaplanan istatistik değerlerinin toplum parametrelerinin tahminlenmesinde kullanılabilmesi için bazı varsayımların gerçekleşmiş olması gerekmektedir. Bu varsayımlar, değişkenin normal dağılması, varyanslarının homojen olması, birimlerin birbirlerinden bağımsız ve rasgele olarak seçilmesidir. Bu varsayımlar aracılığı ile yapılan araştırmalardan güvenilir parametre tahminlerini elde etmek için istatistiksel yöntemlerden yararlanılmaktadır (Mood and Graybill, 1963; Gürtan, 1982; Dixon and Massey, 1983; Sümbüloğlu ve Sümbüloğlu, 1987).

Toplum sınırlı sayıda birimden oluşuyorsa verilerin, tüm birimler ele alınarak toplanması sorun yaratmayabilir. Fakat toplum hacmi N çok büyük sayılara ulaştığında ya da $N \to \infty$ sonsuza yaklaştığı durumlarda tüm birimlerden verilerin toplanması zaman alıcı ve maddi destek gerektiren bir durum ortaya koyduğundan verilerin geç elde edilmesi sorunu ile karşılaşılmaktadır. Toplum hacminin büyük olduğu, birimlere ulaşmanın güç olduğu ve veri toplarken birimlerin yok olması ya da niteliğini kaybetmesi, risk altına girmesi gibi nedenlerden dolayı toplum parametreleri yerine onların etkin, geçerli, en küçük varyanslı ve yansız tahmincilerini hesaplamak ve sorunlara olasılıklı geçerlilikte çözümler getirmek tercih edilmektedir. Bu nedenle N birim yerine bu birimleri temsil eden n birimden oluşan örnekten veri toplamak, değişkenlerin parametre tahminleri olan istatistikleri bulmak ve bilimsel olarak geçerlilik düzeyi belirlenebilen bilgilere ulaşmak gerekir (Özçelik, 1981; Özdamar, 1989; Serper ve Gürsakal, 1989).

Topluma ilişkin genel yargılara ulaşmak için n sayıda toplumu temsil edecek nitelikte örnekten veriler elde ederek incelenen değişken ya da değişkenlerin istatistiklerinin elde edilmesi ile toplum parametrelerinin tahminlenmesi ve genellemelere gidilmesi örnekleme çalışmalarıdır. Örneklemenin en önemli özelliği, topluma ilişkin tutarlı, geçerli tahminlere ulaşmak için örneklem hatasının minimum olmasını sağlamaktır. Örneklem hatası minimuma indirgendiğinde, seçilen örnek toplumun en iyi tahminini vermektedir. Toplum parametresini belirli bir güven aralığında kontrollü olarak tahmin etmek mümkün olmaktadır.

Sağlık alanında yapılan araştırmalarda, biyolojik ve medikal değişkenlerin büyük bir bölümü normal dağılım göstermekte ve bu dağılım analitik değerlendirmelerde en çok yararlanılan bir dağılım olmaktadır (Şenocak, 1992).

Yapılan araştırmalarda incelenen değişken ya da değişkenlerin değerleri kontrolümüz dışında olan bir çok etkenin etkisiyle değişebiliyorsa, bu değişkenlerle ilgili olarak topluma ilişkin genel yargılara ulaşmak güçleşmektedir. Bunun yanında, doğadaki olayların değişmesi bir dereceye kadar belirli bir düzen içinde olmaktadır. Bu düzen içinde toplumdan rasgele olarak alınan örneklerin ortalama etrafında yoğunlaşması beklenmektedir. Diğer durumda ise, ortalamadan uzaklaştıkça sapma göstermektedir. Toplumun bilinmeyen bir parametresini tahminlemek için toplumdan rasgele olarak birbirinden bağımsız ve eş olasılıkla örnekler alındığında, alınan bu örneklerdeki değişkenlerin dağılımı bilinmediğinden ortalama ve varyansın parametre tahmininde kullanılması tahminin geçerliliğini etkilemektedir (Walpole, 1968; Püskülcü ve İkiz, 1986; Kan, 1991).

İstatistiksel tahminleme yöntemleri, nokta ve aralık tahminleri olarak ikiye ayrılmaktadır. Toplumdan rasgele seçilen örneklerin tek bir sayısal değere göre yorumlanması nokta tahmini, parametrenin belirli bir olasılıkla minimum ve maksimum değerlerinin bulunması ise aralık tahmini olarak bilinmektedir. Tahminleme işlemini belirleyen formülasyona tahminleyici, formülasyon gerçek verilerle işlendiğinde ise ulaşılan sayıya tahmin adı verilmektedir (Püskülcü ve İkiz, 1986).

Rasgele seçilen örneklerle toplum için tahminleme yaparken, nokta ve aralık tahminleriyle birlikte istatistikte uygulanan parametrik tahminleme yöntemlerinden yararlanılmaktadır. Bu yöntemler, Matematiksel Ümit, Enküçük Kareler Yöntemi, Enbüyük Benzerlik ve Bayes yöntemleri gibi yöntemlerdir. Parametrik tahminleme yöntemlerinde varsayımlar bozulduğu zaman parametrik olmayan tahminleme yöntemlerinden yararlanılmaktadır (Hogg and Craig, 1965; Gücelioğlu, 1973; Papoulis, 1990).

Tıbbi araştırmalarda, hastalıkların belirlenmesi konusunda toplumla ilgili tanımlama yapılmasında bazı güçlükler olmaktadır. Bunun nedeni, hastaların tek tek başvurmalarından dolayı hangi toplumdan geldiklerinin bilinememesidir. Hastalıkların belirlenebilmesi amacıyla toplanan örneklerde tahminin hatasının minimum olması istenmektedir. Fakat parametrik tahminleme yöntemleri örnek sayısı az olduğu zamanlarda güvenilir sonuçlar vermeyebilir ve aynı zamanda parametrik yöntemlerin varsayımı da bozulabilir. Bu durumu ortadan kaldırmak amacıyla parametrik olmayan yöntemlerden yararlanılmaktadır. Çünkü bu yöntemler aracılığı ile örnek sayısının yeterli olmadığı durumlarda belirli bir güven payı ile tahminin standart hatası minimuma indirilebilir.

Sağlık alanındaki olayların nitelikleri belirlenirken bazı durumlarda değişkenin dağılım fonksiyonunu bilmek ya da tahmin edebilmek mümkün olmamaktadır. Yeterli sayıda birim içermeyen örnek verilerinin belirli bir parametrik dağılım varsayımı ile incelenmesi, parametre tahminlerinin hatalı elde edilmesine ve standart hatalarının yüksek olmasına neden olmaktadır (Miller, 1974; Mosteller and Tukey, 1977; Efron and Gong, 1983; Efron and Tibshirani, 1986).

Yeterli sayıda birim üzerinde araştırma yapılamadığı zaman, parametrik tahminler hatalı olmakta ve bir parametre tahmininin taşıması istenilen istatistik özellikleri yerine gelmemektedir. Bu nedenle, olasılık dağılımı bilinmeyen bir F dağılımından rasgele alınan örneklerin hatalarını minimuma indirgemek için parametrik olmayan tahminleme yöntemlerinden yararlanılmaktadır. Bu yöntemlerden en yaygın olarak kullanılanları Jackknife ve Bootstrap tahmin yöntemleridir. Dağılımı bilinmeyen F dağılımından alınan n sayıdaki küçük bir örnekten elde edilen istatistiklerden yararlanarak parametre tahminlerinin minimum hatayla belirlenmesi mümkün olmaktadır (Gray and Schucany, 1972; Efron, 1981a,1981b; Efron, 1985; Efron and Gong, 1983; Efron and Tibshirani, 1986; McLachlan, 1987; Cook, 1990).

Parametrik olmayan Jackknife ve Bootstrap parametre tahmin yöntemleri matematiksel ümit ve enbüyük benzerlik tahmin yöntemleri ile belirlenen parametre tahminleriyle karşılaştırılarak etkinliklerinin analizi üzerinde bir çok araştırma yapılmıştır. Bu araştırmalarda örneğin alındığı toplumun dağılım fonksiyonu bilindiği ve bilinmediği durumlarda Jackknife ve Bootstrap yöntemleri ile elde edilen parametre tahminleri karşılaştırılmıştır. Bu dağılımlar genelde normal ve tekdüze dağılımlar olarak ele alınmıştır (Efron and Tibshirani, 1986; Müller and Wang, 1990; Cook, 1990; Hall, 1990).

Tıbbi ve biyolojik değişkenlerin büyük bir bölümünün normal dağılım gösterdiği bilinmekle beraber yaşamsal verilerin bir çoğu üstel (eksponansiyel) ya da Weibull dağılımı göstermektedir. Ayrıca klinik ve laboratuvar denemelerinde toplumdan alınan örnekler çoğunlukla başvuru sırasına bağlı olarak oluşmakta ve başvuruda bulunan birimlerin ölçülen değişkenlerinin dağılımı genelde bilinmemektedir. Yaşamsal olguların toplumda görülme sıklıklarına bağlı olarak da başvuru sayıları önemli değişmeler göstermektedir. Bu nedenle topluma ilişkin geçerli kararlar alınırken parametre tahminlerinde parametrik yöntemlerin varsayımlarının geçerli olmadığı durumlarda parametrik tahmin yöntemleri yerine parametrik olmayan tahmin yöntemlerinin kullanılması gerekmektedir.

Bu araştırma;

1. Parametrik olmayan Jackknife ve Bootstrap parametre tahmin yöntemlerinin Normal, Üstel ve Weibull dağılımlardan çekilen rasgele örneklerde ortaya koyduğu parametre tahminlerini (ortalama ve standart sapma değerlerini) matematiksel ümit yöntemi sonuçları ile karşılaştırarak etkinliklerini değerlendirmek,

2. Toplumdan n hacimli örneklerin büyüklüklerinin istatistikler üzerindeki etkilerini değerlendirmek,

3. n hacimli R tekrarlı örnek çekimlerinde istatistiklerin dağılımını değerlendirmek ve

4. n ve tekrar sayısı artarken topluma ilişkin yapılan parametre tahminlerinin istatistiksel özelliklerini değerlendirmek amacıyla yapılmıştır.

2. İSTATİSTİKSEL TAHMİNLEME YÖNTEMLERİ

2.1. Nokta Tahmini

Nokta tahmini, toplum parametresinin n hacimli örneklerden elde edilen verilere dayalı olarak tek bir değer olarak tahmin edilmesi yöntemidir. Toplum parametresi θ'nın $\hat{\theta}$ gibi bir değere eşit olduğu tahminleme yöntemidir (Mood and Graybill, 1963; Gücelioğlu, 1973).

Nokta tahmini, toplum ile örnek arasında fonksiyonel bir takım özellikler meydana getirmektedir. Bu özellikler kayıp fonksiyonu, risk fonksiyonu ve karar fonksiyonu olarak belirtilmektedir (Gücelioğlu, 1973).

2.1.1. Kayıp Fonksiyonu

Toplumun bir parametresi olan θ, Ω parametre uzayında tanımlanan bir parametre iken a ise A aksiyom uzayında $\hat{\theta}$ değerini alan bir aksiyom olduğunda, l olarak tanımlanan bir kayıp fonksiyonu meydana gelmektedir.

Bu fonksiyonun oluşmasında,

1. A aksiyom uzayındaki tüm a'lar ile Ω parametre uzayındaki tüm θ'lar arasında $l(a;\theta) \geq 0$ koşulu ya da

2. Ω parametre uzayında θ'nın her değeri A aksiyom uzayındaki bir a değeri için $l(a;\theta) = 0$ olması koşulu sağlanabiliyorsa, bu koşullardan birisinin gerçekleşmesine kayıp fonksiyonu adı verilmektedir (Mood and Graybill, 1963; Gücelioğlu, 1973).

2.1.2. Risk Fonksiyonu

Ω parametre uzayında tanımlanan θ'nın tahmini $\hat{\theta}=(X_1,X_2,\dots,X_n)$ biçiminde ele alınan bir karar fonksiyonundan elde edildiğinde, θ, $\hat{\theta}$'ya eşit olmayacaktır. Bu durumda, kayıp fonksiyonu meydana gelmektedir. Kayıp fonksiyonun beklenen değeri ise risk fonksiyonu olarak isimlendirilmektedir. Bu fonksiyon,

$$R(d;\theta)=E[l(a;\theta)]=\int_{-\infty}^{\infty}\int_{-\infty}^{\infty}\dots\int_{-\infty}^{\infty} l[d(X_1\dots X_n);\theta] \tag{1}$$

olarak gösterilmektedir (Mood and Graybill, 1963; Gücelioğlu, 1973; Korum, 1985).

2.1.3. Karar Fonksiyonu

X değişkeninin toplumda $f(X;\theta)$ yoğunluğuna sahip olduğu varsayılsın. Bu toplumdan n adet örnek alındığında gözlenen değerler $(X_1,X_2,\dots,X_n)$, θ parametresinin tahmininde kullanılır.

$f(X;\theta)$ fonksiyonunda θ aşağıdaki özellikleri taşımaktadır.

1. θ, Ω parametre uzayında yer alır. θ'nın alabileceği değerler Ω parametre uzayında tanımlanmış bir değerdir.

2. θ'nın tahmini aksiyom uzayı olarak alınan ve Ω parametre uzayında tanımlanmış bir değerdir.

3. $f(X;\theta)$ yoğunluğuna sahip bir toplumdan rasgele alınan n hacimli bir örnekten $a=d(X_1,\dots,X_n)$ biçiminde ele alınan bir karar fonksiyonu belirlenir. Bu karar fonksiyonuna göre θ tahmini yapılır (Mood and Graybill, 1963).

Yukarıda belirtilen özellikleri taşıyan nokta tahmini aşağıdaki şekilde tanımlanabilir.

n hacimli örnek verilerine dayanarak elde edilen ve Ω parametre uzayında yer alan bir θ değerlerinden herhangi birine eşit ya da bu değerlere çok yakın olan $\hat{\theta}$ değerine nokta tahmini adı verilmektedir. $\hat{\theta}$ değerinin θ yerine kullanılmasında l olarak belirlenen bir kayıp fonksiyonu söz konusudur (Gücelioğlu, 1973; Köksal, 1977; Papoulis, 1990).

2.2. Aralık Tahmini

Bilinmeyen bir toplum parametresi θ için, nokta tahmini yerine, sınırları α yanılma payına göre $1-\alpha$ olasılıkla iki rasgele değer olan ve Ω parametre uzayında yer alan θ değerleri setine aralık tahmini adı verilmektedir.

$1-\alpha$ güven olasılığı ile elde edilen $\hat{\theta}_L$ ve $\hat{\theta}_U$ tahmin aralığı,

$$P(\hat{\theta}-2s_{\hat{\theta}} \leq \theta \leq \hat{\theta}+2s_{\hat{\theta}}) = 1-\alpha \tag{2}$$

şeklinde gösterilmektedir (Korum, 1985; Püskülcü ve İkiz, 1986).

3. TAHMİNCİNİN ÖZELLİKLERİ

Genelde uygulamalı problemlerde toplumdan çekilen n hacimli örnekler aracılığı ile toplum parametresi θ, nokta tahmini $\hat{\theta}$ ile ya da bir aralık tahmini olan $\hat{\theta}_L \leq \theta \leq \hat{\theta}_U$ şeklindeki aralık tahmini ile tahmin edilmektedir. Burada yer alan $\hat{\theta}$ değerlerine θ'nın tahmincileri adı verilmektedir. θ'nın tahmini olarak alınan bu tahmincilerin geçerli olabilmeleri için istatistiksel olarak bazı özelliklere sahip olması gerekir. Bu özellikler,

1. Yeterlilik
2. Sapmasız tahmin
3. Tutarlılık
4. Asimtotik olarak etkinlik ve
5. Minimum varyanslı tahmin

olarak sayılmaktadır (Mood and Graybill, 1963; Gücelioğlu, 1973; Korum, 1985).

Bu özellikler aşağıda kısaca açıklanmıştır.

3.1. Yeterlilik

Bir tahminin iyi bir tahmin olarak nitelendirilebilmesi için gerekli olan özellik, tahmin değerinin hesaplanmasında örnekteki bilgilerin tamamının kullanılıp kullanılmadığı ile ilgilidir. Bu özellik yeterlilik olarak isimlendirilir ve örnekteki bilgilerin tamamının kullanılması ile elde edilen tahminler yeterli sayılmaktadır (Mood and Graybill, 1963; Köksal, 1977; Korum, 1985). Yeterlilik özelliği iki farklı durumda incelenmektedir.

3.1.1. Tek Parametreli Durum

Ω uzayında yer alan ve $f(X;\theta)$ yoğunluğundan rasgele olarak seçilen n hacimli örneği, $\hat{\theta}=d(X_1,\dots,X_n)$ karar fonksiyonu olarak ele alınmaktadır. $\hat{\theta}$'dan bağımsız olarak $\theta^*=d^*(X_1,\dots,X_n)$ gibi başka bir tahminci alındığında güçlü bir tahmin elde edilebiliyorsa bu durumda güçsüz olan $\hat{\theta}$ tahmincisine yeterli istatistik denilmektedir (Mood and Graybill, 1963).

3.1.2. Çok Parametreli Durum

Çok parametreli durumda k sayıda $f(X;\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k)$ yoğunluk fonksiyonundan n hacimli rasgele örnekler alındığında;

$$\hat{\theta}_1 = d_1(X_1 \ldots X_n), \hat{\theta}_2 = d_2(X_1 \ldots X_n), \ldots, \hat{\theta}_m = d_m(X_1 \ldots X_n) \qquad (3)$$

şeklinde belirtilen m sayıda $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_m$ tahmin dizisi elde edilmektedir. Böylece Ω parametre uzayından alınan k sayıda θ parametresi ile m sayıda karar fonksiyonu ile elde edilen $\hat{\theta}$ değerleri arasında birbirinin aynısı olan parametreler olabileceği için m<k koşulu gözönünde bulundurulmaktadır. Bu durumda $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_m$ dizisi $\theta_1,\theta_2,\ldots,\theta_k$ parametrelerinin birden fazla parametreli yeterli istatistiği olarak tanımlanmaktadır (Mood and Graybill, 1963).

3.2. Sapmasız Tahmin

Ω parametre uzayında θ'nın bütün değerleri için $E(\hat{\theta}) = \theta$ olarak tanımlanırsa, böyle bir $\hat{\theta}$ tahminine θ'nın sapmasız tahmini adı verilmektedir (Gücelioğlu, 1973; Köksal, 1977).

3.3. Tutarlılık

Ω parametre uzayındaki bütün θ'ların tahmin dizisi $\hat{\theta}_1,\hat{\theta}_2,\ldots,\hat{\theta}_n$ ise,

$$\lim_{n \to \infty} E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2] = 0 \qquad (4)$$

n değeri büyüdükçe $\hat{\theta}$ tahmini θ'ya yaklaşıyorsa buna hata kareler tutarlılık tahmini adı verilmektedir.

Eğer $\epsilon > 0$ ise,

$$\lim_{n \to \infty} P(\theta - \epsilon \leq \hat{\theta}_n \leq \theta + \epsilon) = 1 \tag{5}$$

n değeri büyüdükçe, θ parametresi aracılığı ile $\hat{\theta}$'nın güven sınırları ϵ değerine bağlı olarak 1'e yaklaşıyorsa buna basit tutarlılık tahmini adı verilmektedir (Mood and Graybill, 1963; Korum, 1985).

3.4. Asimtotik Olarak Etkin Tahmin

θ'nın hata kareler tahminini oluşturan dizi $\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_n$ olarak tanımlanmaktadır. Bu dizideki tahminlerden hangisinin varyansı daha küçük ise θ'nın tahmini olarak o istatistik tercih edilmektedir ve

$$\lim_{n \to \infty} \frac{E[(\hat{\theta}_n - \theta)^2]}{E[(\theta_n^* - \theta)^2]} > 1 \tag{6}$$

olduğunda n sayısı büyüdükçe en küçük varyansa sahip tahminci, en etkin tahminci olmaktadır. Buna asimtotik olarak etkili hata kareler tahmini adı verilmektedir (Mood and Graybill, 1963; Köksal, 1977; Korum, 1985).

3.5. Tarafsız Minimum-Varyans Tahminleri

Tahminciler arasındaki seçme işlemini sadece sapmasız tahmincilere indirgendiği zaman hata kareler ortalaması kriteri yerine varyans kriteri kullanılabilir $E(\hat{\theta}-\theta)^2 = Var(\hat{\theta})$. Çünkü, sapmasız bir tahmincinin varyansı hata kareler ortalamasına eşittir.

Bu durumda $f(X;\theta)$ yoğunluk fonksiyonundan rasgele alınan n hacimli örneğin tahmincisi $\hat{\theta} = d(X_1,\dots,X_n)$ karar fonksiyonuyla ifade edilmektedir. Eğer,

1. $E(\hat{\theta}) = \theta$ olursa ve

2. $Var(\hat{\theta})$, diğer herhangi bir sapmasız tahminciden küçük ise

$\hat{\theta}$ minimum varyanslı sapmasız tahminci olmaktadır (Mood and Graybill, 1963).

4. PARAMETRİK TAHMİNLEME YÖNTEMLERİ

Yukarıda belirtilen tahminlemenin parametrik bir tahminlemesini yapmak için üç yöntem kullanılmaktadır. Bu tahminleme yöntemleri; Matematiksel Ümit, Enbüyük Benzerlik ve Bayes Tahmin yöntemleridir (Hogg and Craig, 1965).

4.1. Matematiksel Ümit

Rasgele değişkenlerin dağılımına ilişkin bilgilerin varlığı söz konusu olduğunda n hacimli örneklerden toplum parametrelerini nokta ve aralık tahmini olarak elde etme yöntemlerinden birisi matematiksel tahminlemedir. Bu tahminleme yönteminde, kesikli ve sürekli olmak üzere iki dağılım ele alınmaktadır.

Eğer dağılım kesikli ise $\hat{\theta}$'nın beklenen değeri,

$$E(\hat{\theta})=\sum_{i=1}^{n}\theta_i f(\theta_i) \tag{7}$$

şeklinde, dağılım sürekli ise,

$$E(\hat{\theta})=\int_{-\infty}^{\infty}\theta_i f(\theta_i)d\theta_i \tag{8}$$

olarak tanımlanmaktadır (Hogg and Craig, 1965).

4.2. Enbüyük Benzerlik Yöntemi

$f(X;\theta)$ yoğunluk fonksiyonundan rasgele seçilen n hacimli örneğin, θ'ya bağlı olan herbir X değerinin yoğunluk fonksiyonlarının çarpımı, benzerlik fonksiyonu olarak tanımlanmaktadır. Bu fonksiyon,

$$g(X_1,\ldots,X_n;\theta)=f(X_1;\theta),f(X_2;\theta),\ldots,f(X_n;\theta) \tag{9}$$

şeklinde ifade edilmektedir. Benzerlik fonksiyonu L olarak ifade edilirse,

$$L(\theta)=f(X_1,X_2,\ldots,X_n;\theta)=\prod_{i=1}^{n}f(X_i;\theta) \tag{10}$$

şeklinde tanımlanır (Mood and Graybill, 1963; Hogg and Craig, 1965; Papoulis, 1990).

4.3 Bayes Tahmini

Bayes tahmini, beklenen riski minimum yapan bir tahmin yöntemidir. Bu yöntemde, $f(X;\theta)$ yoğunluk fonksiyonundan $(X_1,X_2,\ldots,X_n)$ örneği alındığı zaman $P(\theta)$ ise θ'nın bir fonksiyonu olarak tanımlanabilir. θ verildiği zaman X_i'lerin koşullu dağılımı $g(X_1,X_2,\ldots,X_n|\theta)$ ve X_i'ler verildiği zaman θ'nın koşullu dağılımıda $h(\theta|X_1,X_2,\ldots,X_n)$ ve kayıp fonksiyonu $l(\hat{\theta};\theta)$ verildiği zaman $\hat{\theta}=d(X_1,\ldots,X_n)$ tahmincisi eğer

$$B(d)=E[R(d;\theta)]=\int_{-\infty}^{\infty} R(d;\theta)P(\theta)d\theta \tag{11}$$

ifadesini minimum yapıyorsa $\hat{\theta}$ da θ'nın Bayes tahmincisidir (Mood and Graybill, 1963; Hogg and Craig, 1965; Gücelioğlu, 1973; Papoulis, 1990).

5. PARAMETRİK OLMAYAN TAHMİN YÖNTEMLERİ

Yapılan araştırmalarda, olasılık dağılım fonksiyonu açıkça bilinmeyen bir F dağılımından örnek alındığı durumlarda bu örnekten elde edilen istatistiklerin toplum parametresinin tahmin edilmesinde geçerli olabilmesi için dikkat edilecek en önemli özellik tahminin standart hatasını minimuma indirgemektir. Standart hatayı minimuma indirgeyen yöntemlerden parametrik olmayan Bootstrap ve Jackknife yöntemleri en sık yararlanılan yöntemlerdendir (Gray and Schucany, 1972; Efron 1982).

5.1. Bootstrap Yöntemi

Bootstrap, tahminin standart hatasını minimuma indirerek toplum parametresini tahminlemek için kullanılan bir yöntem geliştirilmiştir. Bu yöntem; zaman serilerinde, karmaşık veri yapılarında ve topluma ilişkin tahminlemede sıklıkla uygulanmaktadır.

Olasılık dağılımı bilinmeyen bir F dağılımından birbirinden bağımsız ve eş olasılıkla n hacimli örnek çekilmekte ve bu örnekte her bir X değeri ardışık olarak çıkarılıp (n-1) sayıdaki örneğin ortalama ve standart sapması hesaplanmaktadır. Ardışık olarak örnek gözlemlerden birisi hesaplamadan çıkarılarak oluşturulan n-1 hacimli yeni örnekte parametre tahminleri,

$$\hat{\theta}_{(i)} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n) \tag{12}$$

şeklinde tanımlanmaktadır. Elde edilen $(\hat{\theta}_1, \hat{\theta}_2, \ldots, \hat{\theta}_n)$ dizisinin ortalaması,

$$\hat{\theta}_B = \frac{\sum_{i=1}^{n} \hat{\theta}_{(i)}}{n} \tag{13}$$

ve standart hatası

$$s_{\hat{\theta}_B} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{i=1}^{n} (\hat{\theta}_{(i)} - \hat{\theta}_B)^2} \tag{14}$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Efron, 1981a, 1981b; Efron and Gong, 1983, Efron 1985; Efron and Tibshirani, 1986; McLachlan, 1987; Müller and Wang, 1990; Hall, 1990).

5.2. Jackknife Yöntemi

Jackknife, toplumun parametresini tahmin etmede kullanılan örneklem hatasını minimuma indirgeme yöntemi olarak ileri sürülmüştür. Bu yöntemle ilgili ilk çalışma Quenoille ile tanımlanmış ve Tukey tarafından güven aralığı yaklaşımıyla geliştirilmiştir (Gray and Schucany, 1972).

Bootstrap yönteminde olduğu gibi bir F dağılımından n hacimli örnek alınmakta ve ardışık örnekleme sonucunda (12) ve (13) nolu formüller kullanılarak parametre tahminleri,

$$\hat{\theta}_{(j)} = n\hat{\theta}_B - (n-1)\hat{\theta}_{(i)} \tag{15}$$

ve

$$\hat{\theta}_{j1}, \hat{\theta}_{j2}, \ldots, \hat{\theta}_{jn} \tag{16}$$

şeklinde Jackknife değerlerine dönüştürülürler. Bu değerlerin ortalaması,

$$\hat{\theta}_J = \frac{\sum_{j=1}^{n} \hat{\theta}_{(j)}}{n} \tag{17}$$

ve standart hatası,

$$s_{\theta_J} = \sqrt{\frac{1}{n(n-1)} \sum_{j=1}^{n} (\hat{\theta}_{(j)} - \hat{\theta}_J)^2} \qquad (18)$$

şeklinde tanımlanmaktadır (Gray and Schucany, 1972; Yücel, 1973; Miller, 1974; Mosteller and Tukey, 1977; Efron and Gong, 1983; Heltsh, 1983).

Jackknife ve Bootstrap yöntemi ile elde edilen parametre tahminlerinin, değişkeninin dağılımının bilinmediği koşullarda güvenle uygulanabileceği ve dağılım varsayımı altında ise parametrik yöntemlerle benzer sonuçlar vereceği ileri sürülmüştür (Efron, 1981a;1981b;1982).

6. VERİ TÜRETİMİ

Bu araştırmada, Jackknife ve Bootstrap yöntemlerinin istatistiklerini matematiksel ümit yöntemi ile elde edilen istatistiklerle karşılaştırmak ve toplum parametreleri olarak alınan μ ve σ değerleri ile olan yaklaşımlarını ortaya koymak için üç değişik dağılımdan türetilen veriler kullanılmıştır.

Normal, Üstel ve Weibull dağılımı varsayımları altında Monte Carlo benzetim yöntemi ile bilgisayarda türetimler yapılmıştır (Yücel, 1973; Bratley et al., 1983; Özdamar, 1988). Türetim için örnek hacmi, n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 olmak üzere seçilmiş ve her bir n türetimi tekrarlı olarak ele alınmış ve tekrar sayıları da R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 olarak seçilmiştir.

Veri türetiminde uygulanan bu üç yöntem aşağıda açıklanmıştır.

6.1. Normal Dağılım Gösteren Verilerin Türetimi

Normal dağılım, medikal ve biyolojik değişkenlerin uyduğu dağılımların en önemlilerinden birisidir. Olasılık fonksiyonu ise

$$f(X)=\frac{1}{\sigma\sqrt{2\pi}}e^{\frac{-(X-\mu)^2}{2\sigma}} \qquad -\infty < X < \infty \tag{19}$$

$$= 0 \qquad \text{diğer durumlarda}$$

şeklinde tanımlanmaktadır.

Normal dağılım gösteren rasgele değişkenlerin türetilmesinde Box-Muller türetim yönteminden yararlanılmıştır. Box-Muller türetim yönteminde tekdüze dağılım gösteren R1 ve R2 değişkenleri kullanılarak X1 ve X2 normal dağılım gösteren değişkenler türetilmektedir. Bu değişkenlerin ortalaması μ ve standart sapması σ olan

$$X_1 = \mu + [(-2 log R_1)^{1/2} \cos 2\pi R_2]\sigma \tag{20}$$

$$X_2 = \mu + [(-2 log R_1)^{1/2} \sin 2\pi R_2]\sigma \tag{21}$$

yaklaşımı ile türetim yapılır (Budakçı ve Püskülcü, 1979; Özdamar, 1988).

Box-Muller yöntemi ile türetimde yararlanılan QBASIC'de yazılmış program EK1'de verilmiştir.

6.2. Üstel Dağılım Gösteren Verilerin Türetimi

Üstel dağılım, yaşamsal değişkenlerin uyduğu dağılımlardan birisidir. Bu dağılım özellikle olaylar arasındaki oluş zamanlarının dağılımı incelendiğinde yararlanılan dağılımlardan birisidir. Olasılık fonksiyonu ise

$$\begin{aligned} f(x) &= \alpha e^{-\alpha x} \qquad \alpha > 0 \ , \ x \geq 0 \\ &= 0 \qquad \text{diğer durumlarda} \end{aligned} \tag{22}$$

olarak tanımlanmaktadır (Papoulis, 1990).

Üstel olarak dağılan bir rasgele değişken türetmek için [0,1] aralığında tekdüze olarak dağılan değişkenlerden yararlanıldı. Bu değerlerden yararlanılarak yapılan dönüştürmelerle Üstel dağılan değişken değerleri türetildi.

Türetimler,

$$X = -\mu \log R \tag{23}$$

şeklinde elde edildi (Özdamar, 1988).

Bu yaklaşımla türetilen değerler ortalaması μ olan bir üstel dağılım gösterir. Türetim için yararlanılan QBASIC'de yazılmış program EK2'de verilmiştir.

6.3. Weibull Dağılımı Gösteren Verilerin Türetimi

Weibull dağılımı yaşamsal verilerin uyduğu dağılımlardan birisidir. Weibull dağılımı Üstel dağılımın bir genellemesi olmaktadır. Weibull dağılımı gösteren n sayıdaki rasgele değişkenin olasılık fonksiyonu

$$f(x) = \frac{c}{b}\left(\frac{x}{b}\right)^{c-1} e^{-\left(\frac{x}{b}\right)^{c}} \tag{24}$$

olarak tanımlanmaktadır. Burada b eksen ve c eğim parametresini ifade etmektedir. Weibull dağılımı eğer c=1 ise Üstel dağılım c>1 ise çan eğrisi dağılımı göstermektedir.

Weibull dağılım gösteren X rasgele değişkeni

$$x = b(-\log R)^{\frac{1}{c}} \tag{25}$$

yaklaşımından yararlanılarak türetilir (Johnson, 1970; Özdamar, 1988). Türetim için yararlanılan QBASIC'de yazılmış program EK3'de verilmiştir.

7. YENİDEN ÖRNEKLEME (RESAMPLING)

Olasılık dağılımı bilinmeyen bir F dağılımdan toplum parametresinin tahmini için n hacimli ($X_1, X_2, \ldots, X_n$) örnek alınmaktadır. Bu örneğin ardışık örneklemesi

$$\hat{\theta}_{(i)} = \hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_{i-1}, X_{i+1}, \ldots, X_n) \tag{26}$$

ifadesi ile gösterilmektedir. Bu araştırmada incelenen üç dağılım kullanılarak örnekler elde edildi. Ele alinan n hacimli örnekte her bir X değeri ardışık olarak çıkarıldı ve geriye kalan n-1 hacimli örnek için ortalama ve standart sapma hesaplandı. Bu değerlerden yeni veri setleri oluşturuldu (Gray and Schucany, 1972; Mosteller and Tukey, 1977; Efron, 1981a;1981b; Efron and Gong, 1983; Efron and Tibshirani 1986).

8. VERİ ANALİZİ

Türetilen verilerin analizinde matematiksel ümit yöntemi, Jackknife ve Bootstrap yöntemleri ile türetilen verilerin istatistikleri hesaplanmıştır.

8.1. Bootstrap Yöntemi

Parametrik olmayan Bootstrap yöntemi parametre tahminlerinde hatayı minimuma indirmek için, uygun istatistiklerin hesaplanmasını amaçlamaktadır. Bu yöntemde türetilen verilerin n sayıdaki örnekleri her defasında bir değer dışarıda bırakılarak, n kez tekrar örnekleme yapılarak, herbir yeniden örneklenen alt örneklerin istatistiklerini hesaplayarak en uygun parametre tahmini yapmaya yarayan istatistikleri hesaplamayı amaçlamaktadır.

Normal, Üstel ve Weibull dağılımından türetilen veriler R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 defa tekrarlanarak her bir türetim için R defa ortalama ve standart sapma bulundu. R defa tekrar sonucunda elde edilen tahminler dizisi

$$\hat{\theta}_1^*, \hat{\theta}_2^*, \ldots, \hat{\theta}_R^* \qquad (27)$$

şeklinde tanımlanmıştır. Bu değerlerin hesaplanması için QBASIC'de yazılan programlar EK1, EK2 ve EK3'de verilmiştir.

8.2. Jackknife Yöntemi

Bootstrap yönteminde olduğu gibi Box-Muller, Weibull ve Üstel dağılımdan örnek alındı. Alınan n hacimli örneğin her bir X değeri ardışık olarak çıkarılarak geriye kalan n-1 hacimli örnek eşitlik (15)'den elde edildi. Bu dağılımın ortalama ve standart sapması bulundu. Bu değerlerin ortalaması eşitlik (17) ve standart hatası eşitlik (18) ile hesaplandı. Bu değerlerin hesaplanması için QBASIC'de yazılan programlar EK1, EK2 ve EK3'de verilmiştir.

8.3. İstatistiksel Analizler

Türetilen verilerden elde edilen istatistiklerin toplum parametreleri ile olan benzerliklerinin test edilmesinde t ve z testlerinden yararlanılmıştır.

Toplum standart sapması ile örnek türetimlerden elde edilen standart sapmaların karşılaştırılmasında ise Bartlett varyans homojenlik testinden yararlanılmıştır.

Bartlett testi iki ve daha fazla toplum ya da örneğin varyanslarının türdeşliğini karşılaştırmada yararlanılan bir testtir ve aşağıdaki formüllere göre uygulanır (Dixon and Massey, 1983; Pindyck and Rubinfeld, 1983).

$$M = (N-k)\ln s^2 - \sum_p [(n_i - 1)\ln s_i^2] \qquad (28)$$

$$s_p^2 = \frac{\sum (n_i - 1) s_i^2}{N-k} \qquad (29)$$

$$A = \frac{1}{3(k-1)}\left[\sum\left(\frac{1}{n_i - 1}\right) - \frac{1}{N-k}\right] \tag{30}$$

$$\nu_1 = k - 1 \tag{31}$$

$$\nu_2 = \frac{k+1}{A^2} \tag{32}$$

$$b = \frac{\nu_2}{1 - A + (2/\nu_2)} \tag{33}$$

$$F = \frac{\nu_2 M}{[\nu_1 (b - M)]} \tag{34}$$

F test istatistiği M'ye bağlı olarak F_{ν_1,ν_2} parametreli F dağılımı gösterir.

9. BULGULAR

9.1. Normal Dağılımdan Türetimler

Jackknife, Bootstrap yöntemlerinin N(μ,σ) parametreli dağılımdan türetilmiş n=10,20,30,50,100,200,300,500 hacimli ve tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 olan verilerde parametre tahminlerini belirlemek için Jackknife ve Bootstrap yöntemlerinin istatistikleri elde edilmiştir. Elde edilen bulgular yöntemlere göre aşağıdaki gibi bulunmuştur.

9.1.1. Jackknife Yöntemi Bulguları

N(100,10) parametreli dağılımdan n=10 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ile toplum standart sapmaları ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.1.1'de verilmiştir.

Tablo 9.1.1 incelendiğinde n=10 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 99.21853 iken R artarken R=500 için 99.93058'e yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 101.57718 değerini alırken R=500'e ulaştığında 100.23059 değerini almaktadır. Bu değer türetimde varsayılan μ değerinden önemli farklılık göstermemektedir (t=0.498; SD=9; P>0.05). Maksimum değerler ise R=10 için 103.94147 iken R değeri 500'e giderken 100.54942 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir.

Parametre tahminlerinin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır (P>0.05).

Tablo 9.1.1. n=10 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkenin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu,\sigma) \rightarrow f(X) \cong N(100,10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	99.21853	101.57718	103.94147	8.52032	9.90971	11.29909
20	98.70167	100.23985	101.77833	9.17992	10.11400	11.04808
30	99.06068	100.17029	101.27932	9.20362	9.93893	10.67424
50	99.42886	100.46052	101.49114	9.18173	9.83053	10.47933
100	99.58948	100.24132	100.91052	9.32060	9.77975	10.23889
200	99.79937	100.28247	100.78063	9.40980	9.74586	10.08192
500	99.93058	100.23059	100.54942	9.55634	9.76910	9.98186

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha düşük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=10 için tekrar sayısı R=10 için minimum 8.52032 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 9.55634 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 9.90971 iken R=500 olduğunda 9.76910'a düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 11.29909 değerini alırken R=500'de azalarak 9.98186 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

N(100,10) parametreli dağılımdan n=20 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.1.2'de verilmiştir.

Tablo 9.1.2. n=20 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu, \sigma) \Rightarrow f(X) \cong N(100, 10)$						
Tekrar Sayısı (R)	Ortalama			Standart Sapma		
	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	97.45381	99.39568	101.34619	9.89044	10.68138	11.47232
20	98.36734	99.51742	100.67266	9.82971	10.56183	11.29395
30	99.03548	99.87614	100.72452	9.87147	10.44400	11.01653
50	99.17366	99.84743	100.52634	9.99170	10.42400	10.85629
100	99.42960	99.90437	100.37040	10.13005	10.43066	10.73127
200	99.53947	99.86667	100.20053	10.23909	10.45044	10.66179
500	99.65314	99.85401	100.06685	10.30273	10.42821	10.57369

Tablo 9.1.2 incelendiğinde n=20 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 97.45381 iken R artarken R=500 için 99.65314'e yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 99.39568

değerini alırken R=500'e ulaştığında 99.85401 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 101.34619 iken R değeri 500'e giderken 100.06685 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerinin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır ($P>0.05$).

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha yüksek değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir ($P>0.05$). n=20 için tekrar sayısı R=10 için minimum 9.89044 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 10.30273 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 10.68138 iken R=500 olduğunda 10.42821'e düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 11.47232 değerini alırken R=500'de azalarak 10.57369 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

N(100,10) parametreli dağılımdan n=30 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.1.3'de verilmiştir.

Tablo 9.1.3 incelendiğinde n=30 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 99.01983 iken R artarken R=500 için 100.22496'ya yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken

99.98003 değerini alırken R=500'e ulaştığında 100.36566 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 100.94023 iken R değeri 500'e giderken 100.51509 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerinin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır ($P>0.05$).

Tablo 9.1.3. n=30 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu,\sigma) \rightarrow f(X) \cong N(100,10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	99.01983	99.98003	100.94023	9.73741	10.33223	10.92705
20	99.90496	100.56526	101.22556	9.84158	10.34328	10.84498
30	99.69257	100.23699	100.78743	9.75702	10.19094	10.62486
50	99.89509	100.33801	100.78492	9.80716	10.11502	10.42288
100	99.98286	100.31065	100.63844	9.96858	10.18095	10.39332
200	100.11792	100.35360	100.60008	10.06562	10.21613	10.36664
500	100.22496	100.36566	100.51504	10.11189	10.20826	10.30463

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha büyük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir ($P>0.05$). n=30 için tekrar sayısı R=10 için minimum 9.73741 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 10.11189 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 10.33223 iken R=500 olduğunda 10.20826'ya düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 10.92705 değerini alırken R=500'de azalarak 10.90463 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

N(100,10) parametreli dağılımdan n=50 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.1.4'de verilmiştir.

Tablo 9.1.4 incelendiğinde n=50 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 99.27556 iken R artarken R=500 için 99.97024'e yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 100.08019 değerini alırken R=500'e ulaştığında 100.07552 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 100.88444 iken R değeri 500'e giderken 100.18976 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerinin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır ($P>0.05$).

Tablo 9.1.4. n=50 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X)\cong N(\mu,\sigma)\rightarrow f(X)\cong N(100,10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	99.27556	100.08019	100.88444	9.21735	9.97322	10.72909
20	99.64040	100.13653	100.63260	9.54408	9.96924	10.39440
30	99.79338	100.20485	100.61634	9.63058	9.98759	10.34460
50	99.72264	100.04322	100.37336	9.76747	10.01735	10.26723
100	99.85976	100.31068	100.32624	9.83838	10.02023	10.20208
200	99.90256	100.07188	100.25144	9.94120	10.06772	10.19424
500	99.97024	100.07552	100.18976	10.00112	10.07987	10.15862

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha büyük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=50 için tekrar sayısı R=10 için minimum 9.21735 iken R=500 için 10.00112 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 9.97322 iken R=500 olduğunda 10.07987'ye yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 10.72909 değerini alırken R=500'de azalarak 10.15862 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

N(100,10) parametreli dağılımdan n=100 olmak üzere tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.1.5'de verilmiştir.

Tablo 9.1.5. n=100 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu,\sigma) \Rightarrow f(X) \cong N(100,10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	99.44668	99.78873	100.13075	9.55139	9.98396	10.41653
20	99.75604	100.04620	100.34796	9.72949	10.02069	10.31189
30	99.82822	100.17152	100.52558	9.97709	10.21619	10.45529
50	99.85092	100.08636	100.33308	9.92131	10.11139	10.30147
100	99.97662	100.14828	100.33138	10.00709	10.14731	10.28753
200	100.01456	100.14043	100.26544	10.05154	10.14923	10.24692
500	100.07192	100.15135	100.23068	10.08699	10.14616	10.20533

Tablo 9.1.5 incelendiğinde n=100 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 99.44668 iken R artarken R=500 için 100.07192'ye yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 99.78873 değerini alırken R=500'e ulaştığında 100.15135 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 100.13075 iken R değeri 500'e giderken 100.23068 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim

aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerinin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır (P>0.05).

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha büyük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=100 için tekrar sayısı R=10 için minimum 9.55139 iken R=500 için 10.08699 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 9.98396 iken R=500 olduğunda 10.14616'ya yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 10.41653 değerini alırken R=500'de azalarak 10.20533 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

N(100,10) parametreli dağılımdan n=200 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.1.6'da verilmiştir.

Tablo 9.1.6 incelendiğinde n=200 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 100.26108 iken R artarken R=500 için 99.98330'a düşmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 100.57860 değerini alırken R=500'e ulaştığında 100.05705 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 100.89612 iken R değeri 500'e giderken 100.13069 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerinin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır (P>0.05).

Tablo 9.1.6. n=200 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu,\sigma) \Rightarrow f(X) \cong N(100,10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	100.26108	100.57860	100.89612	9.90540	10.17956	10.45372
20	100.29684	100.58280	100.86876	9.96778	10.14344	10.31909
30	100.40949	100.63740	100.86531	9.99153	10.13494	10.27835
50	100.40258	100.58295	100.76037	10.04820	10.15562	10.26309
100	100.45160	100.57869	100.70640	10.06441	10.14009	10.21577
200	100.49109	100.57991	100.66871	10.08356	10.13738	10.19176
500	99.98330	100.05705	100.13069	10.10559	10.13944	10.17329

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha büyük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=200 için tekrar sayısı R=10 için minimum 9.90540 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 10.10559 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 10.17956 iken R=500 olduğunda 10.13944'e düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 10.45372 değerini alırken R=500'de azalarak 10.17329 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

N(100,10) parametreli dağılımdan n=300 olmak üzere tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.1.7'de verilmiştir.

Tablo 9.1.7. n=300 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X)=N(\mu,\sigma) \rightarrow f(X)=N(100,10)$						
Tekrar Sayısı (R)	Ortalama			Standart Sapma		
	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	99.54345	99.98055	100.41765	9.68850	9.97656	10.26462
20	99.79226	100.08485	100.30000	9.80453	9.97652	10.14651
30	99.93192	100.16581	100.39969	9.81653	9.95790	10.09927
50	99.94548	100.12441	100.30333	9.87670	9.98624	10.09578
100	100.05848	100.18401	100.30954	9.89505	9.97372	10.05239
200	100.09928	100.18677	100.27426	9.92649	9.98127	10.03605
500	100.13041	100.18554	100.24067	9.94766	9.98180	10.01594

Tablo 9.1.7 incelendiğinde n=300 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 99.54345 iken R artarken R=500 için 100.13041'e yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 99.98055 değerini alırken R=500'e ulaştığında 100.18554 değerini

almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 100.41765 iken R değeri 500'e giderken 100.24067 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerininin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır (P>0.05).

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha düşük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=300 için tekrar sayısı R=10 için minimum 9.68850 iken R=500 için 9.94766 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 9.97656 iken R=500 olduğunda 9.98180'e yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 10.26462 değerini alırken R=500'de azalarak 10.01594 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

N(100,10) parametreli dağılımdan n=500 olmak üzere tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.1.8'de verilmiştir.

Tablo 9.1.8 incelendiğinde n=500 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 99.63649 iken R artarken R=500 için 100.02261'a yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 99.93501 değerini alırken R=500'e ulaştığında 100.06745 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 100.23351 iken R değeri 500'e giderken 100.11229 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerininin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır (P>0.05).

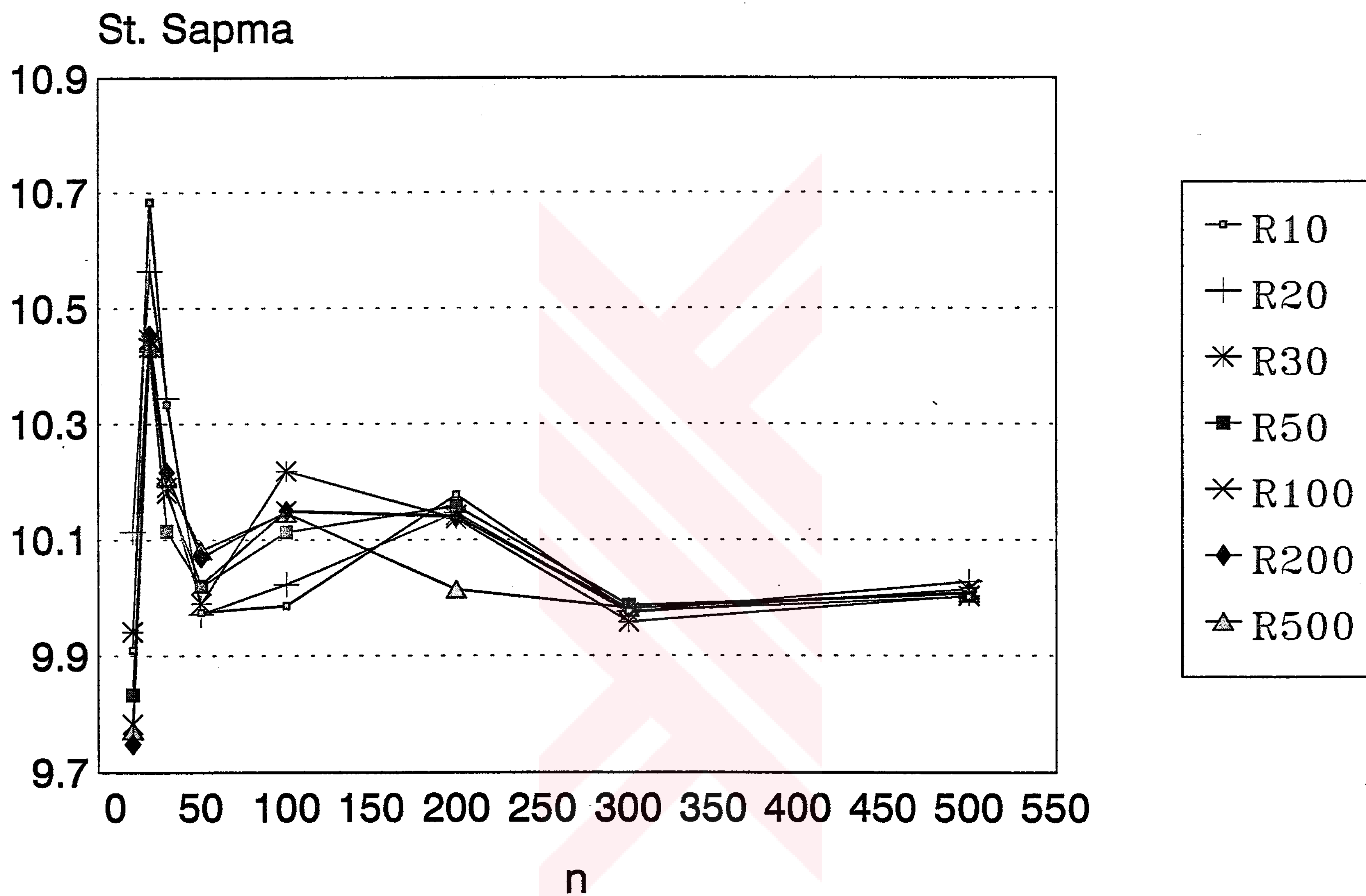
Tablo 9.1.8. n=500 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu,\sigma) \rightarrow f(X) \cong N(100,10)$						
Tekrar Sayısı (R)	Ortalama			Standart Sapma		
	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	99.63649	99.93501	100.23351	9.84060	10.00128	10.16196
20	99.85720	100.09750	100.33779	9.82901	10.02765	10.12627
30	99.91315	100.08894	100.26465	9.90459	10.00000	10.09541
50	99.90652	100.05000	100.19347	9.93838	10.00635	10.07432
100	99.94166	100.04532	100.14894	9.96435	10.01447	10.06459
200	99.98665	100.06253	100.13835	9.97194	10.00740	10.04286
500	100.02261	100.06745	100.11229	9.98481	10.00704	10.02927

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha büyük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=500 için tekrar sayısı R=10 için minimum 9.84060 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 9.98481 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 10.00128 iken R=500 olduğunda

10.007040'e yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 10.16196 değerini alırken R=500'de azalarak 10.02927 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

n birim ve R tekrar sayısına göre Jackknife standart sapma değerlerinin dağılımı Şekil 9.1.1'de gösterilmiştir.



Şekil: 9.1.1. n=10,20,30,50,100,200,300,500 iken tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Jackknife standart sapma tahminleri

9.1.2. Bootstrap Yöntemi Bulguları

Bootstrap yönteminin türetilen verilerde parametre tahminlerinde yararlanılan ortalama ve standart sapma istatistikleri n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 olmak üzere ve tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 olarak türetilen verilerde hesaplanmıştır. Türetilen verilerin aynı anda Jackknife ve Bootstrap yöntemleri birlikte uygulanarak istatistikleri bulunmuştur. Ortalama için elde edilen tahminler her iki yöntemde de aynı değerleri vermektedir. Bu nedenle ortalamaya ilişkin min, max ve ortalama tahminleri tablolarda yer almamaktadır. Ortalamalar üzerindeki değerlendirmeler Bootstrap ile Jackknife yöntemlerinde benzerlik göstermektedir. Her iki yöntemde ortalamalara ilişkin elde edilen istatistikler eşit bulunmuştur. Bu nedenle ortalama ile ilgili tahminler burada tekrarı önlemek için açıklanmamıştır.

N(100,10) parametreli dağılımdan n=10 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.1.9'da verilmiştir.

Tablo 9.1.9 incelendiğinde n=10 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olmadığı belirlenmiştir ($P<0.001$). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapması yaklaşık 1/9 'ü kadar olmaktadır. Standart sapmaların ortalaması n=500 ve R=500' de bile σ'nın 1/9 'u kadar gerçekleşmiştir. Türetimlerle ilgili istatistikler kendi içlerinde birbirleri ile tutarlı olmakla beraber toplum değerleri ile önemli düzeyde farklılıklar göstermektedir ($P<0.001$).

Tablo 9.1.9. n=10 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu,\sigma) \Rightarrow f(X) \cong N(100,10)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.94505	1.10108	1.25495
20	1.00604	1.12378	1.23395
30	1.01412	1.10433	1.18588
50	1.01793	1.09228	1.16207
100	1.03512	1.08664	1.14488
200	1.04258	1.08287	1.11742
500	1.06546	1.08545	1.11454

N(100,10) parametreli dağılımdan n=20 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.1.10'da verilmiştir.

Tablo 9.1.10 incelendiğinde n=20 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının toplum varyansı ile türdeş olmadığı belirlenmiştir (P<0.001). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/19 ´u kadar olmaktadır. Standart sapmaların ortalaması n=500 ve R=500´ de bile σ´nın 1/18 ´i kadar gerçekleşmiştir. Türetimlerle ilgili istatistikler kendi içlerinde birbirleri ile tutarlı olmakla beraber toplum değerleri ile önemli düzeyde farklılıklar göstermektedir (P<0.001).

Tablo 9.1.10. n=20 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu,\sigma) \Rightarrow f(X) \cong N(100,10)$			
Tekrar	Standart Sapma		
Sayısı(R)	Min.	s	Max.
10	0.51661	0.56218	0.60339
20	0.52056	0.55589	0.59944
30	0.51779	0.54970	0.58221
50	0.52783	0.54863	0.57217
100	0.53432	0.54898	0.56568
200	0.53432	0.55002	0.56568
500	0.54213	0.54938	0.55663

N(100,10) parametreli dağılımdan n=30 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.1.11´de verilmiştir.

Tablo 9.1.11. n=30 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu,\sigma) \Rightarrow f(X) \cong N(100,10)$			
Tekrar	Standart Sapma		
Sayısı(R)	Min.	s	Max.
10	0.33713	0.35628	0.37543
20	0.33945	0.35666	0.37387
30	0.33639	0.35141	0.36642
50	0.33791	0.34879	0.35967
100	0.34368	0.35107	0.35846
200	0.34716	0.35228	0.35739
500	0.34867	0.35201	0.35533

Tablo 9.1.11 incelendiğinde n=30 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının toplum varyansı ile türdeş olmadığı belirlenmiştir (P<0.001). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/27'i kadar olmaktadır. Standart sapmaların ortalaması n=500 ve R=500' de bile σ'nın 1/28 'i kadar gerçekleşmiştir. Türetimlerle ilgili istatistikler kendi içlerinde birbirleri ile tutarlı olmakla beraber toplum değerleri ile önemli düzeyde farklılıklar göstermektedir (P<0.001).

N(100,10) parametreli dağılımdan n=50 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.1.12'de verilmiştir.

Tablo 9.1.12 incelendiğinde n=50 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının toplum varyansı ile türdeş olmadığı belirlenmiştir (P<0.001). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/48 'i kadar olmaktadır. Standart sapmaların ortalaması n=500 ve R=500' de bile σ'nın 1/48'i kadar gerçekleşmiştir. Türetimlerle ilgili istatistikler kendi içlerinde birbirleri ile tutarlı olmakla beraber toplum değerleri ile önemli düzeyde farklılıklar göstermektedir (P<0.001).

Tablo 9.1.12. n=50 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \approx N(\mu,\sigma) \Rightarrow f(X) \approx N(100,10)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.18832	0.20354	0.21968
20	0.19518	0.20345	0.21282
30	0.19636	0.20383	0.21164
50	0.19940	0.20444	0.20960
100	0.20064	0.35107	0.20836
200	0.20276	0.20546	0.20824
500	0.20413	0.20571	0.20747

N(100,10) parametreli dağılımdan n=100 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.1.13'de verilmiştir.

Tablo 9.1.13. n=100 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \approx N(\mu,\sigma) \rightarrow f(X) \approx N(100,10)$			
Tekrar	Standart Sapma		
Sayısı(R)	Min.	s	Max.
10	0.09608	0.10085	0.10392
20	0.09836	0.10122	0.10412
30	0.10065	0.10319	0.10570
50	0.10020	0.10214	0.10412
100	0.10115	0.10250	0.10391
200	0.10156	0.10252	0.10348
500	0.10187	0.10249	0.10313

Tablo 9.1.13 incelendiğinde n=100 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının toplum varyansı ile türdeş olmadığı belirlenmiştir (P<0.001). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/97 'i kadar olmaktadır. Standart sapmaların ortalaması n=500 ve R=500' de bile σ'nın 1/97'i kadar gerçekleşmiştir. Türetimlerle ilgili

istatistikler kendi içlerinde birbirleri ile tutarlı olmakla beraber toplum değerleri ile önemli düzeyde farklılıklar göstermektedir (P<0.001).

N(100,10) parametreli dağılımdan n=200 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.1.14'de verilmiştir.

Tablo 9.1.14. n=200 için tekrar R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu,\sigma) \Rightarrow f(X) \cong N(100,10)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.04980	0.05115	0.05250
20	0.05009	0.05097	0.05185
30	0.05020	0.05093	0.05166
50	0.05057	0.05103	0.05135
100	0.05059	0.05096	0.05133
200	0.05067	0.05094	0.05121
500	0.05077	0.05095	0.05113

Tablo 9.1.14 incelendiğinde n=200 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının toplum varyansı ile türdeş olmadığı belirlenmiştir (P<0.001). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve

500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/196'sı kadar olmaktadır. Standart sapmaların ortalaması n=500 ve R=500' de bile σ'nın 1/196'sı kadar gerçekleşmiştir. Türetimlerle ilgili istatistikler kendi içlerinde birbirleri ile tutarlı olmakla beraber toplum değerleri ile önemli düzeyde farklılıklar göstermektedir (P<0.001).

N(100,10) parametreli dağılımdan n=300 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.1.15'de verilmiştir.

Tablo 9.1.15. n=300 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu,\sigma) \Rightarrow f(X) \cong N(100,10)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.03235	0.03337	0.03439
20	0.03275	0.03336	0.03397
30	0.03283	0.03330	0.03377
50	0.03305	0.03340	0.03375
100	0.03311	0.03336	0.03361
200	0.03320	0.03338	0.03356
500	0.03326	0.03338	0.03350

Tablo 9.1.15 incelendiğinde n=300 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R,

arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının toplum varyansı ile türdeş olmadığı belirlenmiştir (P<0.001). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapması yaklaşık 1/300'ü kadar olmaktadır. Standart sapmaların ortalaması n=500 ve R=500' de bile σ'nın 1/298.5'i kadar gerçekleşmiştir. Türetimlerle ilgili istatistikler kendi içlerinde birbirleri ile tutarlı olmakla beraber toplum değerleri ile önemli düzeyde farklılıklar göstermektedir (P<0.001).

N(100,10) parametreli dağılımdan n=500 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.1.16'da verilmiştir.

Tablo 9.1.16 incelendiğinde n=500 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının toplum varyansı ile türdeş olmadığı belirlenmiştir (P<0.001). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/500'ü kadar olmaktadır. Standart sapmaların ortalaması n=500 ve R=500' de bile σ'nın 1/498'i kadar gerçekleşmiştir. Türetimlerle ilgili istatistikler kendi içlerinde birbirleri ile tutarlı olmakla beraber toplum değerleri ile önemli düzeyde farklılıklar göstermektedir (P<0.001).

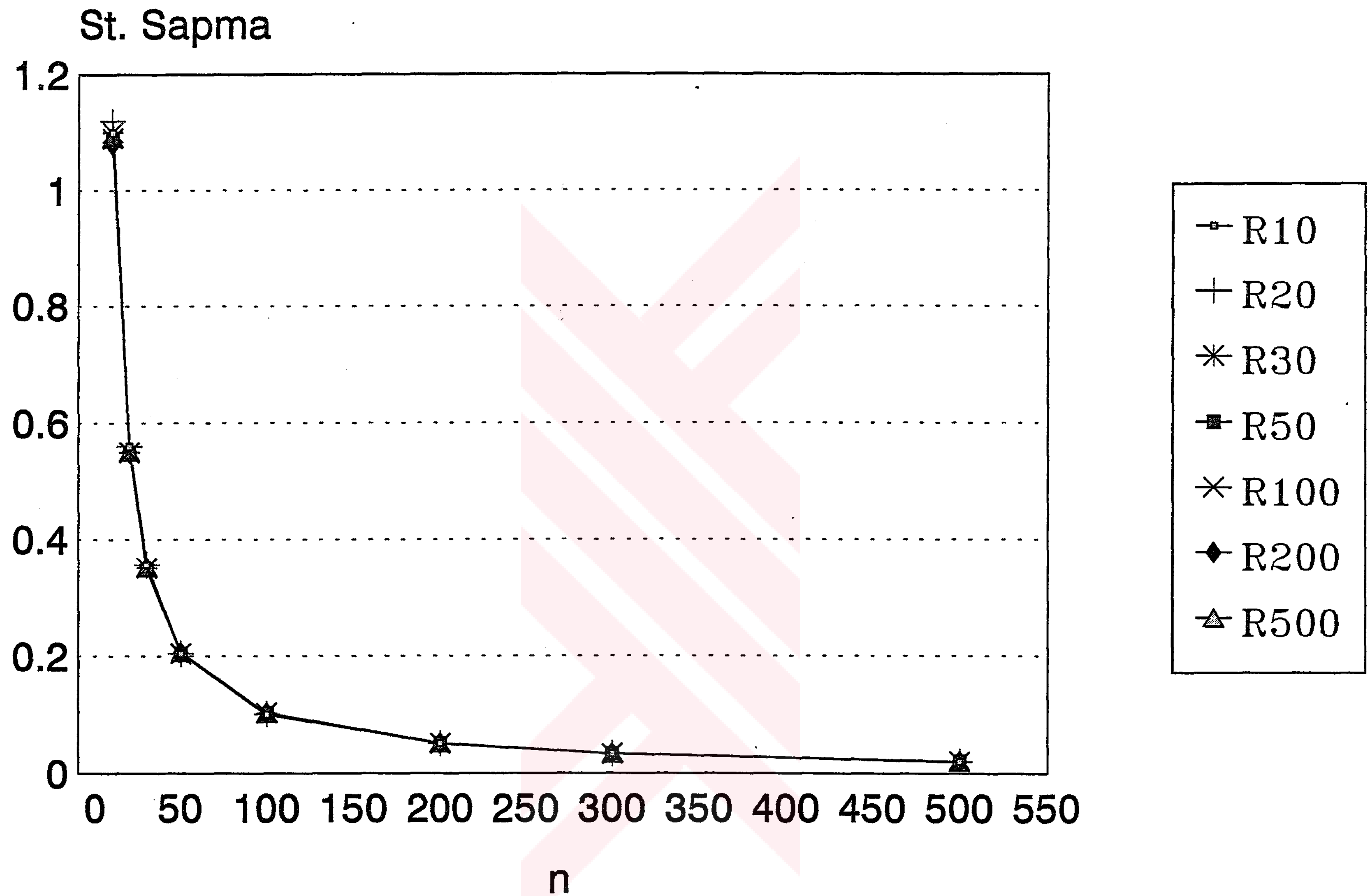
Tablo 9.1.16. n=500 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Normal Dağılım $f(X) \cong N(\mu,\sigma) \rightarrow f(X) \cong N(100,10)$			
Tekrar	Standart Sapma		
Sayısı(R)	Min.	s	Max.
10	0.01967	0.02004	0.02033
20	0.01988	0.02010	0.02022
30	0.01985	0.02005	0.02020
50	0.01991	0.02005	0.02019
100	0.01997	0.02007	0.02017
200	0.01998	0.02006	0.02014
500	0.02001	0.02005	0.02009

Jackknife ve Bootstrap yöntemleri istatistiklerinden ortalamalar, örnek hacimleri küçük olduğunda bile toplum ortalamaları ile önemli düzeyde farklılık göstermeyen farklılıklar vermektedirler. Ancak n>=30 için istatistiklerin ortalamaları ve minimum maksimum değerleri toplum parametresine çok büyük bir hızla yaklaşmaktadır. Türetimlerin değişik n sayılarına ve tekrar sayılarına göre elde edilen standart sapma değerleri Jackknife yönteminde her örnek hacmi için toplum standart sapması ile türdeşlik gösteren değerler olarak saptanırken, Bootstrap yöntemi standart sapmaları ise örnek hacimleri artarken önemli düzeyde küçülen ve toplum standart sapmasına göre 1/10, 1/20, 1/50 ve 1/500'ü kadar olan değerler almaktadır. Bootstrap standart sapmaları n sayısı ve tekrar sayısı ne olursa olsun toplum σ'sını tahminden çok uzak kalmaktadır.

Örnek türetimlerde hesaplanan ortalama ve standart hata değerleri matematiksel ümit yöntemi ile bulunan tahminlerle karşılaştırıldığında Jackknife ve Bootstrap yöntemi ile elde edilen değerler arasında önemli farklılıklar bulunmamaktadır. Standart sapma değerleri için yapılan karşılaştırmalarda ise Jackknife yöntemi bulguları ile matematiksel ümit sonuçları benzerlik gösterirken, Bootstrap yöntemi standart sapma değerleri önemli düzeyde farklılıklar göstermektedirler ($P<0.001$). Bootstrap standart sapma değerleri Jackknife ve matematiksel ümit standart hata değerlerinden bile çok küçük değerler olarak gerçekleşmektedir.

n birim ve R tekrar sayısına göre Bootstrap standart sapma değerlerinin dağılımı Şekil 9.1.2'de gösterilmiştir.



Şekil: 9.1.2. n=10,20,30,50,100,200,300,500 iken tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Normal dağılan N(100,10) değişkeninin Bootstrap standart sapma tahminleri

9.2. Üstel Dağılımdan Türetimler

Üstel dağılım yaşamsal değişkenlerin dağılımı olarak bilinmektedir. Bu nedenle Jackknife ve Bootstrap yöntemlerinin ortalama ve standart sapma istatistiklerini hesaplamak için türetimler yapılmıştır. Türetimde seçilen parametreler Üstel dağılımın normale yaklaşımını sağlayan parametreler olarak seçilmiş ve E(X;μ) parametreli Üstel dağılımdan türetimler bulunmuştur. Türetilen verilerden Jackknife ve Bootstrap yöntemlerinin istatistikleri elde edilmiştir.

9.2.1. Jackknife Yöntemi Bulguları

E(X;10) parametreli dağılımdan n=10 için yapılan türetimlere ilişkin Jackknife yöntemine göre hesaplanan ortalama, ve standart sapma istatistiklerinin minimum, ortalama ve maksimum değerleri Tablo 9.2.1'de; n=20 için yapılan türetimlere ilişkin hesaplanan istatistikler Tablo 9.2.2'de; n=30 için yapılan çeşitli tekrar sayılarını içeren türetimlerden elde edilen istatistikler Tablo 9.2.3'de; n=50 için yapılan türetimlere ilişkin sonuçlar Tablo 9.2.4'de; n=100 için yapılan türetimlere ilişkin elde edilen istatistikler Tablo 9.2.5'de; n=200 için elde edilen bulgular Tablo 9.2.6'da; n=300 için elde edilen bulgular Tablo 9.2.7'de ve n=500 için elde edilen bulgular ise Tablo 9.2.8'de sırası ile verilmiştir.

Tablo 9.2.1. n=10 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \Rightarrow f(X) \approx E(X;10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	8.41615	10.44212	12.46809	6.97669	8.83497	10.69325
20	9.39454	10.74324	12.09194	8.39682	9.72156	11.04630
30	9.31400	10.23234	11.35068	8.46973	9.99588	11.52203
50	9.20793	10.07588	10.94383	9.19023	9.59842	10.96153
100	9.47092	10.04017	10.40941	8.56202	9.29990	10.03598
200	9.65195	10.07098	10.48980	8.90325	9.43988	9.97651
500	10.02877	10.15822	10.28767	9.18375	9.52165	9.85955

Tablo 9.2.2. n=20 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \Rightarrow f(X) \approx E(X;10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	10.06568	11.25209	12.43849	8.95659	10.19896	11.44133
20	9.48173	10.33854	11.19535	8.79860	9.85576	10.91293
30	9.51875	10.31986	11.12097	8.84489	9.65954	10.47419
50	9.41952	10.03471	10.64990	8.54845	9.21910	9.88875
100	9.62182	10.04732	10.47280	8.90126	9.36794	9.83462
200	9.83809	10.12986	10.42163	9.11983	9.44942	9.77901
500	9.90323	10.08755	10.27187	9.20995	9.41808	9.62621

Tablo 9.2.3. n=30 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \cong E(X;\mu) \rightarrow f(X) \cong E(X;10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	8.95182	10.15211	11.35139	8.72030	10.01300	11.30569
20	9.22570	10.05870	10.89170	9.22880	9.98946	10.75011
30	9.10125	9.77502	10.44879	8.93449	9.58744	10.24039
50	9.58756	10.10865	10.62974	9.31328	9.82727	10.34126
100	9.62312	9.97770	10.33228	9.17849	9.58699	9.99549
200	9.76142	10.02384	10.28626	9.35142	9.65300	9.95459
500	9.85859	10.02410	10.18423	9.46659	9.66253	9.85847

Tablo 9.2.4. n=50 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \cong E(X;\mu) \rightarrow f(X) \cong E(X;10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	9.42281	10.00950	10.59619	8.21139	9.35838	10.50537
20	9.52068	10.03496	10.54924	8.83639	9.80490	10.77341
30	9.74631	10.22822	10.71013	9.33292	10.07368	10.81444
50	9.72991	10.11080	10.49169	9.36931	9.90668	10.44405
100	9.84023	10.11155	10.38287	9.59253	9.94388	10.29523
200	9.92978	10.12835	10.32692	9.69938	9.95208	10.20468
500	9.99967	10.12785	10.25603	9.80198	9.96413	10.12628

Tablo 9.2.5. n=100 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \Rightarrow f(X) \approx E(X;10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	9.42575	10.08894	10.75212	8.68948	9.66870	10.64792
20	9.40618	9.85404	10.30190	8.43509	9.54559	10.65609
30	9.71233	10.07166	10.43099	9.28553	9.75664	10.22775
50	9.71210	9.98299	10.25388	9.34557	9.72358	10.10159
100	9.87940	10.06237	10.24534	9.56977	9.86391	10.15805
200	9.97378	10.10490	10.23602	9.74991	9.97092	10.19193
500	10.01206	10.09485	10.17764	9.81832	9.95638	10.09444

Tablo 9.2.6. n=200 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \Rightarrow f(X) \approx E(X;10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	9.33780	9.71771	10.09762	8.93118	9.44484	9.95850
20	9.49170	9.81796	10.14422	9.23178	9.58842	9.94506
30	9.65864	9.94335	10.22806	9.42417	9.75608	10.08799
50	9.73699	9.95273	10.16847	9.52239	9.76024	9.99809
100	9.80051	9.95962	10.11873	9.59089	9.77056	9.95023
200	9.85891	9.96934	10.07980	9.65808	9.78360	9.90912
500	9.90466	9.97095	10.03724	9.70615	9.78553	9.86491

Tablo 9.2.7. n=300 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \Rightarrow f(X) \approx E(X;10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	9.64140	9.93293	10.22450	9.34887	9.75373	10.15859
20	9.65768	9.87101	10.08434	9.38837	9.69776	10.00715
30	9.78698	9.96808	10.14918	9.54169	9.79721	10.05274
50	9.82718	9.99135	10.15552	9.57646	9.85960	10.14274
100	9.87147	9.98529	10.09911	9.69140	9.86852	10.04565
200	9.90603	9.99011	10.07419	9.75286	9.88571	10.01856
500	9.94209	9.99530	10.04850	9.80586	9.89083	10.97580

Tablo 9.2.8. n=500 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

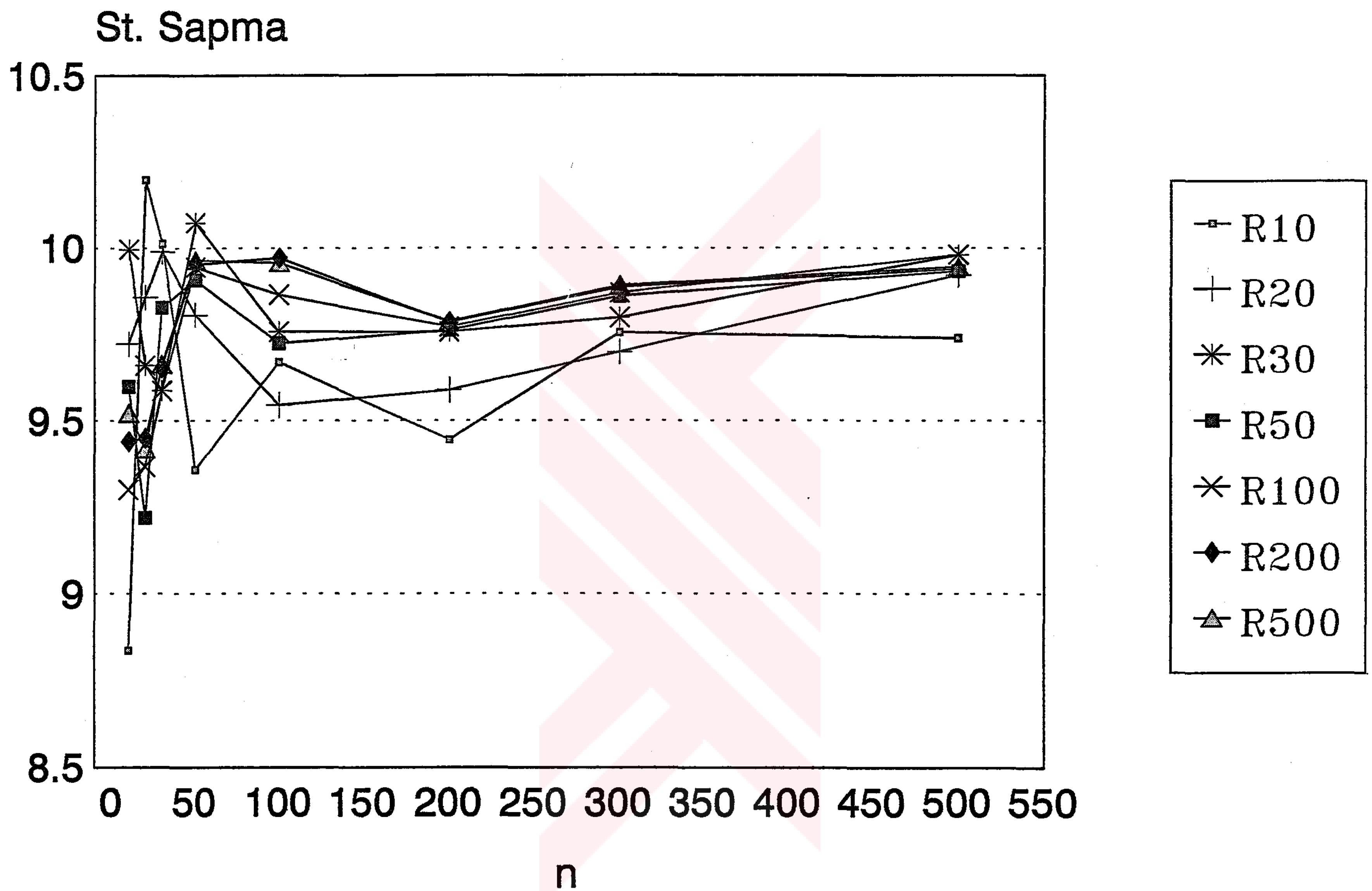
Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \Rightarrow f(X) \approx E(X;10)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	9.59752	9.80263	10.00770	9.40178	9.73812	10.07446
20	9.71010	9.93089	10.15168	9.63818	9.92095	10.20372
30	9.86733	10.04179	10.21625	9.76424	9.97978	10.19532
50	9.87292	10.00336	10.13179	9.76651	9.93246	10.09841
100	9.93134	10.02569	10.12004	9.84864	9.98004	10.11144
200	9.92685	9.99157	10.05630	9.84652	9.93817	10.02985
500	9.86807	10.00098	10.13389	9.88700	9.94455	10.00210

Tablo 9.2.1, 9.2.2, 9.2.3, 9.2.4, 9.2.5, 9.2.6, 9.2.7 ve 9.2.8 karşılaştırmalı olarak incelendiğinde E(X;μ) parametreli dağılım gösteren X değişkeninin artan değişik sayıdaki ve artan değişik sayıdaki tekrarlı türetimlerinden elde edilen ortalamalar tüm türetimlerde μ değerine benzerlik göstermektedir. μ ile türetim ortalamaları arasında önemli farklılıklar bulunmamıştır ($P>0.05$). Ortalamalar n sayısı $n>=20$ iken μ değerine hızla yaklaşım göstermiştir.

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, n ve R arttıkça standart sapma tahminleri σ değerinden önemli düzeyde farklı olmayan değerler almışlardır. Yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir ($P>0.05$). $n=>30$ için tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri σ değerlerine yaklaşmaktadır. Standart sapma tahminlerinin σ ile türdeşliği Bartlett testi ile değerlendirilmiş ve tüm türetim gruplarında standart sapma değerlerinin σ ile türdeşlik gösterdiği saptanmıştır ($P>0.05$).

Jackknife istatistikleri matematiksel ümitle elde edilen parametre tahminleriyle uyumlu tahminler vermiştir. Ortalama ve standart sapma değerlerine ilişkin hesaplanan istatistikler $n>=30$ için toplum değerleri ile çok küçük fark içeren değerler olarak hesaplanmıştır.

n birim ve R tekrar sayısına göre Jackknife standart sapma değerlerinin dağılımı Şekil 9.2.1'de gösterilmiştir.



Şekil: 9.2.1. n=10,20,30,50,100,200,300,500 iken tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Jackknife standart sapma tahminleri

9.2.2. Bootstrap Yöntemi Bulguları

Bootstrap yönteminde, parametre tahminlerinde yararlanılan ortalama ve standart sapma istatistikleri n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 olmak üzere ve tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 olarak türetilen verilerde hesaplanmıştır. Türetilen verilerin aynı anda Jackknife ve Bootstrap yöntemleri birlikte uygulanarak istatistikleri bulunmuştur. Ortalama için elde edilen tahminler her iki yöntemde de aynı değerleri vermektedir. Bu nedenle ortalamaya ilişkin minimum, maksimum ve ortalama tahminleri tablolarda yer almamaktadır. Ortalamalar üzerindeki değerlendirmeler Bootstrap ile Jackknife yöntemlerinde benzerlik göstermektedir. Bu nedenle ortalama ile ilgili tahminler burada tekrarı önlemek için açıklanmamıştır.

Standart sapma ile ilgili hesaplamalar n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 için tekrar sayıları R=10, 20, 30, 50, 100, 200, ve 500 için sırası ile Tablo 9.2.9, 9.2.10, 9.2.11, 9.2.12, 9.2.13, 9.2.14, 9.2.15 ve 9.2.16'da verilmiştir.

Tablo 9.2.9. n=10 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \Rightarrow f(X) \approx E(X;10)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.78307	0.98166	1.18025
20	0.93874	1.08017	1.22160
30	0.94107	1.11065	1.28023
50	0.93468	1.06649	1.19830
100	0.95018	1.03332	1.11646
200	0.98841	1.04888	1.10935
500	1.01999	1.05796	1.09592

Tablo 9.2.10. n=20 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \Rightarrow f(X) \approx E(X;10)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.46992	0.53679	0.60666
20	0.46476	0.51872	0.57268
30	0.46591	0.50840	0.55089
50	0.45031	0.48522	0.52013
100	0.46879	0.49305	0.51732
200	0.48025	0.49737	0.51443
500	0.48477	0.49569	0.50661

Tablo 9.2.11. n=30 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \rightarrow f(X) \approx E(X;10)$			
Tekrar	Standart Sapma		
Sayısı(R)	Min.	s	Max.
10	0.30159	0.34528	0.38897
20	0.31876	0.34446	0.37016
30	0.30673	0.33060	0.35447
50	0.32005	0.33887	0.35769
100	0.31630	0.33059	0.34488
200	0.32210	0.33286	0.34362
500	0.32639	0.33319	0.33999

Tablo 9.2.12. n=50 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \rightarrow f(X) \approx E(X;10)$			
Tekrar	Standart Sapma		
Sayısı(R)	Min.	s	Max.
10	0.16678	0.19099	0.21520
20	0.18060	0.20010	0.21960
30	0.19077	0.20559	0.22041
50	0.19069	0.20218	0.21367
100	0.19567	0.20294	0.21021
200	0.19791	0.20310	0.20829
500	0.20004	0.20335	0.20666

Tablo 9.2.13. n=100 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \Rightarrow f(X) \approx E(X;10)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.08739	0.09766	0.10793
20	0.08982	0.09642	0.10303
30	0.09389	0.09855	0.10321
50	0.09442	0.09822	0.10202
100	0.09670	0.09964	0.10258
200	0.09851	0.10072	0.10293
500	0.09918	0.10057	0.10196

Tablo 9.2.14. n=200 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \Rightarrow f(X) \approx E(X;10)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.04497	0.04746	0.04995
20	0.04640	0.04818	0.04996
30	0.04473	0.04903	0.05075
50	0.04782	0.04905	0.05028
100	0.04816	0.04910	0.05004
200	0.04851	0.04916	0.04981
500	0.04876	0.04917	0.04958

Tablo 9.2.15. n=300 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \rightarrow f(X) \approx E(X;10)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.03125	0.03262	0.03399
20	0.03141	0.03243	0.03345
30	0.03193	0.03277	0.03361
50	0.03204	0.03298	0.03392
100	0.03242	0.03301	0.03360
200	0.03261	0.03306	0.03351
500	0.03281	0.03308	0.03335

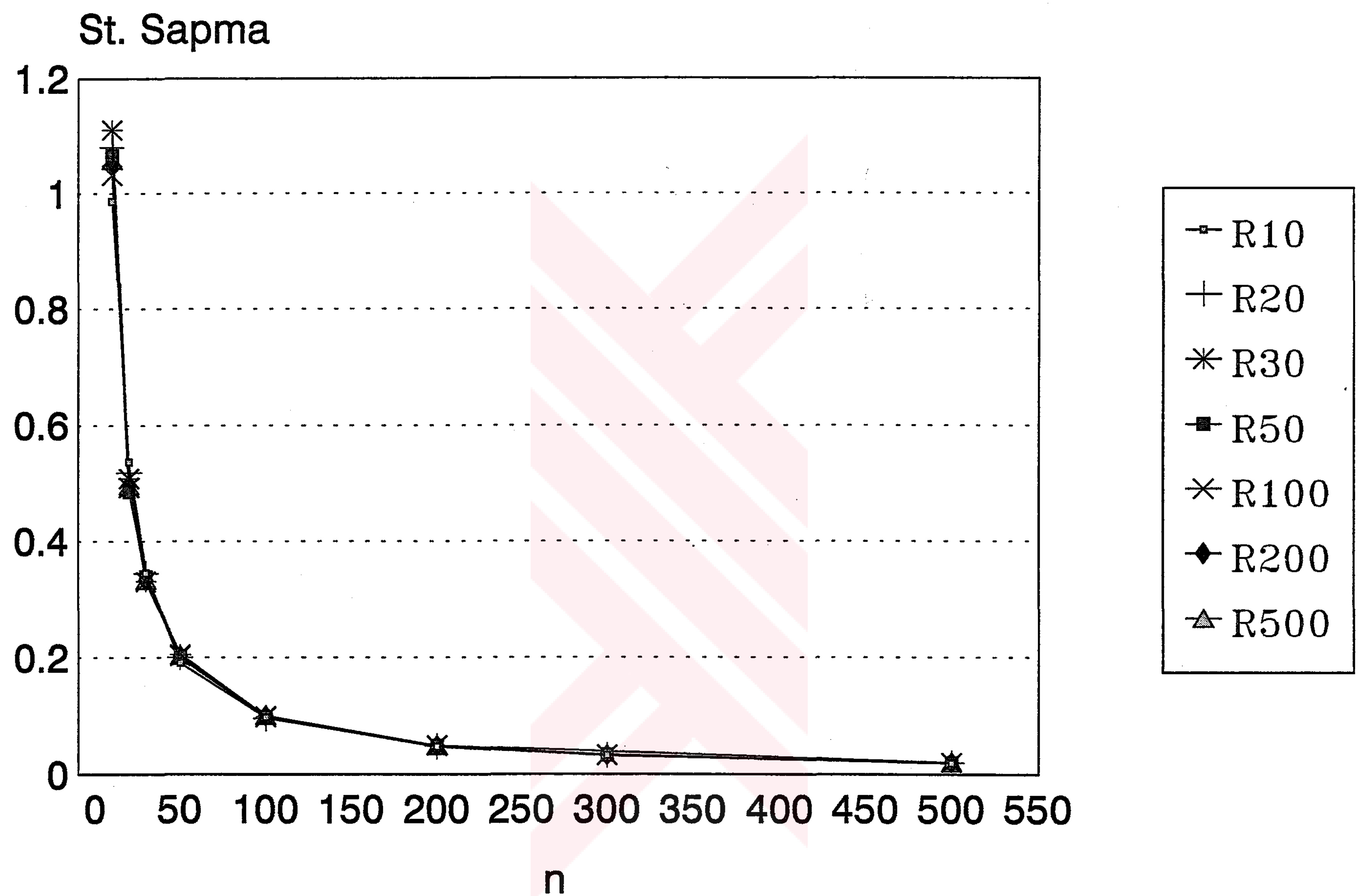
Tablo 9.2.16. n=500 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=10.0)

Üstel Dağılım $f(X) \approx E(X;\mu) \rightarrow f(X) \approx E(X;10)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.01879	0.01952	0.02025
20	0.01929	0.01988	0.02047
30	0.01957	0.01975	0.02043
50	0.01957	0.01990	0.02023
100	0.01975	0.01991	0.02025
200	0.01972	0.01992	0.02012
500	0.01981	0.01993	0.02005

Bootstrap yöntemi ile elde edlen standart sapma istatistikleri toplum standart sapma değerinden önemli düzeyde farklılık gösteren ve n sayısı artarken ve tekrar sayısı artarken önemli düzeyde küçülen değerler olarak saptanmıştır. n=10 ve R=10 için elde edilen s=1.05796 iken n=500 ve R=500 için s=0.01993 değerini almıştır.

n sayısı n=10 için belirlenen s değeri σ'nın 1/9'u kadar iken bu değer n=500 ve R=500 için 1/501 'i kadar olmaktadır. Bu değerler her türetim için hesaplanan standart hatalarından bile çok küçük değerler olmaktadır. Bootstrap standart sapmalarından hesaplanan standart hata değerleri n=>30 için süratle sıfıra yaklaşmaktadır. Bu değerler örnek teorisi ile elde edilen tahminler ile benzerlik göstermemektedirler (P<0.001).

n birim ve R tekrar sayısına göre Bootstrap standart sapma değerlerinin dağılımı Şekil 9.2.2'de gösterilmiştir.



Şekil: 9.2.2. n=10,20,30,50,100,200,300,500 iken tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Üstel dağılan E(X;10) değişkeninin Bootstrap standart sapma tahminleri

9.3. Weibull Dağılımından Türetimler

Weibull dağılımı yaşamsal değişkenlerin dağılımı olarak bilinmektedir. Bu nedenle Jackknife ve Bootstrap yöntemleri için W(X;b,c) parametreli dağılımdan türetimler normale yaklaşımı destekleyen parametreler olan b=3, c=2 değerleri ele alınarak yapılmıştır. Türetilen verilerden Jackknife ve Bootstrap yöntemlerinin istatistikleri elde edilmiştir.

9.3.1. Jackknife Yöntemi Bulguları

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=10 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ile toplum standart sapmaları ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.3.1'de verilmiştir.

Tablo 9.3.1 incelendiğinde n=10 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 2.49192 iken R artarken R=500 için 2.66696'ya yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 2.78080 değerini alırken R=500'e ulaştığında 2.70616 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 3.06970 iken R değeri 500'e giderken 2.74536 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerinin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır ($P>0.05$).

Tablo 9.3.1. n=10 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \cong W(X;b,c) \Rightarrow f(X) \cong W(X;3,2)$						
Tekrar Sayısı (R)	Ortalama			Standart Sapma		
	Min.	$\overline{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	2.49192	2.78080	3.06970	1.31250	1.59128	1.87001
20	2.49750	2.67606	2.85460	1.27699	1.46101	1.64503
30	2.53930	2.68515	2.83098	1.27661	1.41534	1.55407
50	2.53678	2.64981	2.76284	1.24570	1.34878	1.45176
100	2.63495	2.72407	2.81320	1.28035	1.35697	1.43360
200	2.64040	2.70296	2.76552	1.29810	1.35190	1.40574
500	2.66696	2.70616	2.74536	1.31220	1.34581	1.37946

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha düşük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=10 için tekrar sayısı R=10 için minimum 1.31250 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 1.31220 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 1.59128 iken R=500 olduğunda 1.34581'e düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 1.87001 değerini alırken R=500'de azalarak 1.37946 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=20 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ile toplum

standart sapmaları ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.3.2'de verilmiştir.

Tablo 9.3.2 incelendiğinde n=20 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 2.47886 iken R artarken R=500 için 2.64180'e yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 2.66702 değerini alırken R=500'e ulaştığında 2.66809 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 2.85518 iken R değeri 500'e giderken 2.69437 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerinin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır ($P>0.05$).

Tablo 9.3.2. n=20 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \approx W(X;b,c) \Rightarrow f(X) \approx W(X;3,2)$						
Tekrar Sayısı (R)	Ortalama			Standart Sapma		
	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	2.47886	2.66702	2.85518	1.34653	1.50166	1.65679
20	2.55959	2.70079	2.84199	1.31000	1.41443	1.51886
30	2.55788	2.66560	2.77330	1.33720	1.42189	1.50662
50	2.60560	2.68745	2.76929	1.34630	1.41347	1.48064
100	2.60810	2.66806	2.72800	1.34920	1.39631	1.44347
200	2.62596	2.66763	2.70930	1.35366	1.38737	1.42108
500	2.64180	2.66809	2.69437	1.36400	1.38509	1.40618

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha düşük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=20 için tekrar sayısı R=10 için minimum 1.34653 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 1.36400 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 1.50166 iken R=500 olduğunda 1.38509'a düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 1.65679 değerini alırken R=500'de azalarak 1.40618 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=30 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ile toplum standart sapmaları ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.3.3'de verilmiştir.

Tablo 9.3.3 incelendiğinde n=30 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 2.42258 iken R artarken R=500 için 2.64714'e yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 2.60377 değerini alırken R=500'e ulaştığında 2.66991 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 2.78495 iken R değeri 500'e giderken 2.69269 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerinin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır (P>0.05).

Tablo 9.3.3. n=30 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \approx W(X;b,c) \Rightarrow f(X) \approx W(X;3,2)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	2.42258	2.60377	2.78495	1.35562	1.49251	1.62940
20	2.50127	2.62391	2.74655	1.33777	1.43945	1.54113
30	2.50900	2.61106	2.71312	1.30486	1.38438	1.46390
50	2.53695	2.62313	2.70931	1.31444	1.37812	1.44180
100	2.59210	2.64476	2.69743	1.32578	1.36424	1.40270
200	2.62728	2.66477	2.70227	1.34960	1.37579	1.40198
500	2.64714	2.66991	2.69269	1.36358	1.37979	1.39599

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha düşük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=30 için tekrar sayısı R=10 için minimum 1.35562 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 1.36358 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 1.49251 iken R=500 olduğunda 1.37979'a düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 1.62940 değerini alırken R=500'de azalarak 1.39599 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=50 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ile toplum

standart sapmaları ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.3.4'de verilmiştir.

Tablo 9.3.4 incelendiğinde n=50 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 2.44357 iken R artarken R=500 için 2.65394'e yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 2.60233 değerini alırken R=500'e ulaştığında 2.67166 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 2.76109 iken R değeri 500'e giderken 2.68938 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerinin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır (P>0.05).

Tablo 9.3.4. n=50 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \cong W(X;b,c) \Rightarrow f(X) \cong W(X;3,2)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	2.44357	2.60233	2.76109	1.30451	1.35743	1.41035
20	2.53988	2.63690	2.73392	1.33846	1.40126	1.46406
30	2.52862	2.60663	2.68464	1.30223	1.35682	1.41141
50	2.59746	2.65667	2.71588	1.32392	1.36470	1.40547
100	2.62407	2.66635	2.70863	1.34826	1.37805	1.40784
200	2.64119	2.66993	2.69866	1.35814	1.37852	1.39890
500	2.65394	2.67166	2.68938	1.36979	1.38267	1.39555

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha düşük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir ($P>0.05$). n=50 için tekrar sayısı R=10 için minimum 1.30451 iken R=500 için 1.36979 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 1.35743 iken R=500 olduğunda 1.38267'e yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 1.41035 değerini alırken R=500'de azalarak 1.39555 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=100 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ile toplum standart sapmaları ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.3.5'de verilmiştir.

Tablo 9.3.5 incelendiğinde n=100 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 2.61800 iken R artarken R=500 için 2.62344'e yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 2.67984 değerini alırken R=500'e ulaştığında 2.64735 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 2.74168 iken R değeri 500'e giderken 2.65931 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerinin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır ($P>0.05$).

Tablo 9.3.5. n=100 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \approx W(X;b,c) \Rightarrow f(X) \approx W(X;3,2)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	2.61800	2.67984	2.74168	1.33299	1.39911	1.46522
20	2.60025	2.66487	2.72949	1.32331	1.36612	1.40893
30	2.61857	2.66318	2.70779	1.34791	1.38045	1.41299
50	2.60623	2.64392	2.68161	1.34701	1.37372	1.40043
100	2.62160	2.64826	2.67492	1.36115	1.37985	1.39855
200	2.62949	2.64870	2.66791	1.37044	1.38398	1.39752
500	2.62344	2.64735	2.65931	1.37531	1.38388	1.39245

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha düşük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=100 için tekrar sayısı R=10 için minimum 1.33299 iken R=500 için 1.37531 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 1.39911 iken R=500 olduğunda 1.38388'e düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 1.46522 değerini alırken R=500'de azalarak 1.39245 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=200 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ile toplum

standart sapmaları ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.3.6'da verilmiştir.

Tablo 9.3.6 incelendiğinde n=200 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 2.57467 iken R artarken R=500 için 2.63612'ye yükselmektedir. Toplum parametresi µ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 2.62388 değerini alırken R=500'e ulaştığında 2.64598 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 2.67299 iken R değeri 500'e giderken 2.65584 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerinin µ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır (P>0.05).

Tablo 9.3.6. n=200 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \cong W(X;b,c) \rightarrow f(X) \cong W(X;3,2)$						
Tekrar Sayısı (R)	Ortalama			Standart Sapma		
	Min.	$\overline{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	2.57476	2.62388	2.67299	1.28043	1.34082	1.40121
20	2.59491	2.63191	2.66892	1.32974	1.36788	1.40602
30	2.62171	2.66011	2.69851	1.35490	1.38934	1.42378
50	2.61201	2.64127	2.67053	1.35507	1.38111	1.40713
100	2.62437	2.64607	2.66777	1.37127	1.38905	1.40683
200	2.63051	2.64594	2.66137	1.37599	1.38850	1.40100
500	2.63612	2.64598	2.65584	1.38051	1.38855	1.39659

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha düşük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=200 için tekrar sayısı R=10 için minimum 1.28043 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 1.38051 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 1.34082 iken R=500 olduğunda 1.38855'e yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 1.40121 değerini alırken R=500'de azalarak 1.39659 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=300 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ile toplum standart sapmaları ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.3.7'de verilmiştir.

Tablo 9.3.7 incelendiğinde n=300 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 2.60926 iken R artarken R=500 için 2.65349'a yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 2.63697 değerini alırken R=500'e ulaştığında 2.66120 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 2.66468 iken R değeri 500'e giderken 2.66890 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerininin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır (P>0.05).

Tablo 9.3.7. n=300 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \approx W(X;b,c) \rightarrow f(X) \approx W(X;3,2)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	2.60926	2.63697	2.66468	1.33092	1.36959	1.40826
20	2.62788	2.65687	2.68586	1.35815	1.38696	1.41577
30	2.62587	2.65770	2.68953	1.36652	1.38890	1.41128
50	2.63468	2.66049	2.68630	1.36346	1.38190	1.40034
100	2.64166	2.65895	2.67624	1.37805	1.39128	1.40451
200	2.64883	2.66081	2.67279	1.37991	1.38947	1.39903
500	2.65349	2.66120	2.66890	1.38380	1.38980	1.39579

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha düşük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). n=300 için tekrar sayısı R=10 için minimum 1.33092 iken R=500 için 1.38380 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 1.36959 iken R=500 olduğunda 1.38980'a yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 1.40826 değerini alırken R=500'de azalarak 1.39579 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=500 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem ortalamaları minimum ve maksimum değerleri ile toplum

standart sapmaları ve Jackknife parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, ortalama ve maksimum değerleri tablo 9.3.8'de verilmiştir.

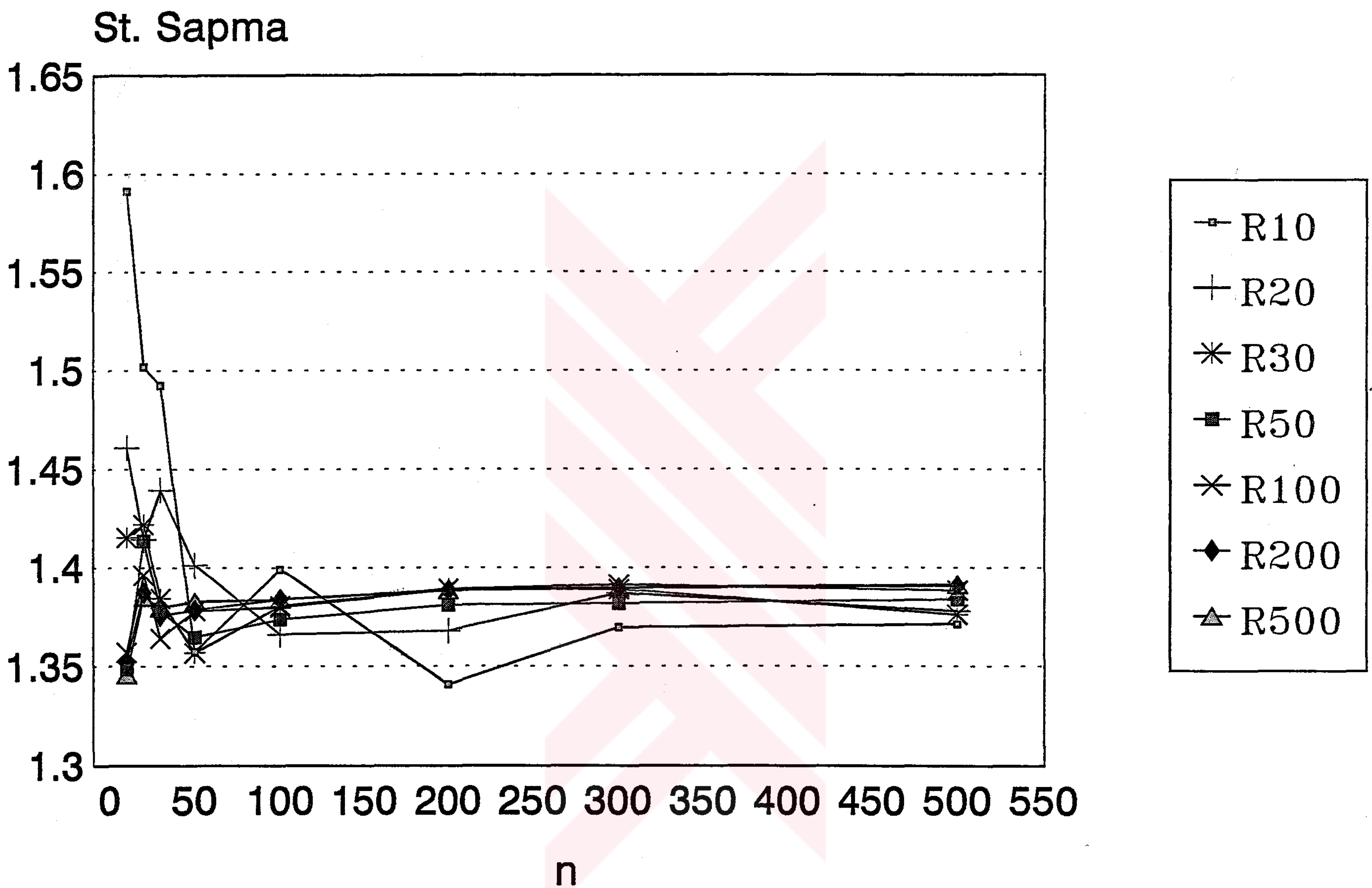
Tablo 9.3.8. n=500 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Jackknife ortalama, standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \approx W(X;b,c) \rightarrow f(X) \approx W(X;3,2)$						
Tekrar	Ortalama			Standart Sapma		
Sayısı (R)	Min.	$\bar{x}$	Max.	Min.	s	Max.
10	2.60085	2.64483	2.68881	1.33343	1.37128	1.40913
20	2.62058	2.65459	2.68859	1.35469	1.37794	1.40119
30	2.62578	2.65132	2.67686	1.35934	1.37616	1.39298
50	2.63289	2.65293	2.67296	1.37173	1.38616	1.40059
100	2.64349	2.65776	2.67203	1.37772	1.38836	1.39900
200	2.65039	2.66009	2.66979	1.38318	1.39084	1.39850
500	2.65329	2.65937	2.66545	1.38652	1.39130	1.39608

Tablo 9.3.8 incelendiğinde n=500 için Jackknife yöntemi ile ortalamalar R=10 için minimum 2.60085 iken R artarken R=500 için 2.65329'a yükselmektedir. Toplum parametresi μ'nün tahmini olarak alınan ortalamaların ortalaması ise R=10 iken 2.64483 değerini alırken R=500'e ulaştığında 2.65937 değerini almaktadır. Maksimum değerler ise R=10 için 2.68881 iken R değeri 500'e giderken 2.66545 değerini almaktadır. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığı küçülmektedir. Parametre tahminlerininin μ değerinden olan farklılıklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır (P>0.05).

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde ise, tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha düşük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olduğu belirlenmiştir ($P>0.05$). n=500 için tekrar sayısı R=10 için minimum 1.33343 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 1.38652 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 1.37128 iken R=500 olduğunda 1.39130'a yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 1.40913 değerini alırken R=500'de azalarak 1.39608 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

n birim ve R tekrar sayısına göre Jackknife standart sapma değerlerinin dağılımı Şekil 9.3.1 gösterilmiştir.



Şekil: 9.3.1. n=10,20,30,50,100,200,300,500 iken tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkeninin Jackknife standart sapma tahminleri

9.3.2. Bootstrap Yöntemi Bulguları

Bootstrap yönteminin türetilen verilerde parametre tahminlerinde yararlanılan ortalama ve standart sapma istatistikleri n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 olmak üzere ve tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 olarak türetilen verilerde hesaplanmıştır. Türetilen verilerin aynı anda Jackknife ve Bootstrap yöntemleri birlikte uygulanarak istatistikleri hesaplanmıştır. Ortalama için elde edilen tahminler her iki yöntemde de aynı değerleri vermektedir. Bu nedenle ortalamaya ilişkin minimum, maksimum ve ortalama tahminleri tablolarda yer almamaktadır. Ortalamalar üzerindeki değerlendirmeler Bootstrap ile Jackknife yöntemlerinde benzerlik göstermektedir. Her iki yöntemde ortalamalara ilişkin elde edilen istatistikler eşit bulunmuştur. Bu nedenle ortalama ile ilgili tahminler burada tekrarı önlemek için açıklanmamıştır.

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=10 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.3.9'da verilmiştir.

Tablo 9.3.9 incelendiğinde n=10 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olmadığı belirlenmiştir ($P<0.001$). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/8'i kadar olmaktadır. Standart sapmanın ortalaması n=500 ve R=500'de ise σ'ın 1/9'u kadar gerçekleşmektedir. n=10 için tekrar sayısı R=10 için minimum 0.14365 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 0.14579 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 0.17681 iken R=500 olduğunda 0.14953'e düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 0.20997 değerini alırken R=500'de azalarak 0.15336 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

Tablo 9.3.9. n=10 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X)=W(X;b,c) \rightarrow f(X)=W(X;3,2)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.14365	0.17681	0.20997
20	0.14097	0.16233	0.18370
30	0.14160	0.15726	0.17292
50	0.13840	0.14986	0.16130
100	0.14224	0.15077	0.15930
200	0.14420	0.15021	0.15623
500	0.14579	0.14953	0.15336

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=20 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.3.10'da verilmiştir.

Tablo 9.3.10. n=20 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \cong W(X;b,c) \Rightarrow f(X) \cong W(X;3,2)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.07013	0.07903	0.08793
20	0.06893	0.07444	0.07995
30	0.07033	0.07484	0.07935
50	0.07084	0.07439	0.07794
100	0.07106	0.07349	0.07592
200	0.07128	0.07302	0.07476
500	0.07180	0.07290	0.07998

Tablo 9.3.10 incelendiğinde n=20 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olmadığı belirlenmiştir ($P<0.001$). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/19.2'i kadar olmaktadır. Standart sapmanın ortalaması n=500 ve R=500'de bile σ'ın 1/19.2'i kadar gerçekleşmektedir. n=20 için tekrar sayısı R=10 için minimum 0.07013 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 0.07180 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 0.07903 iken R=500 olduğunda 0.07290'a düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 0.08793 değerini alırken

R=500'de azalarak 0.07998 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=30 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.3.11'de verilmiştir.

Tablo 9.3.11 incelendiğinde n=30 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olmadığı belirlenmiştir ($P<0.001$). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/29.4'ü kadar olmaktadır. Standart sapmanın ortalaması n=500 ve R=500'de bile σ'ın 1/29.4'ü kadar gerçekleşmektedir. n=30 için tekrar sayısı R=10 için minimum 0.04669 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 0.04703 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 0.05147 iken R=500 olduğunda 0.04758'e düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 0.05625 değerini alırken R=500'de azalarak 0.04813 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

Tablo 9.3.11. n=30 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \approx W(X;b,c) \Rightarrow f(X) \approx W(X;3,2)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.04669	0.05147	0.05625
20	0.04615	0.04964	0.05313
30	0.04496	0.04774	0.05052
50	0.04540	0.04752	0.04964
100	0.04573	0.04704	0.04835
200	0.04654	0.04744	0.04834
500	0.04703	0.04758	0.04813

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=50 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.3.12'de verilmiştir.

Tablo 9.3.12 incelendiğinde n=50 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olmadığı belirlenmiştir (P<0.001). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/49.6'ı kadar olmaktadır. Standart sapmanın ortalaması n=500 ve R=500'de bile σ'ın 1/49.6'ı kadar gerçekleşmektedir. n=50 için tekrar sayısı R=10 için minimum

0.02659 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 0.02795 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 0.02770 iken R=500 olduğunda 0.02822'ye yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 0.02882 değerini alırken R=500'de azalarak 0.02849 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

Tablo 9.3.12. n=50 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) = W(X;b,c) \rightarrow f(X) = W(X;3,2)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.02659	0.02770	0.02882
20	0.02723	0.02860	0.02997
30	0.02657	0.02769	0.02881
50	0.02700	0.02785	0.02869
100	0.02751	0.02812	0.02873
200	0.02772	0.02813	0.02854
500	0.02795	0.02822	0.02849

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=100 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.3.13'de verilmiştir.

Tablo 9.3.13. n=100 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \approx W(X;b,c) \Rightarrow f(X) \approx W(X;3,2)$			
Tekrar	Standart Sapma		
Sayısı(R)	Min.	s	Max.
10	0.01342	0.01413	0.01484
20	0.01335	0.01380	0.01425
30	0.01361	0.01394	0.01427
50	0.01361	0.01388	0.01415
100	0.01374	0.01394	0.01414
200	0.01384	0.01398	0.01412
500	0.01390	0.01398	0.01406

Tablo 9.3.13 incelendiğinde n=100 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olmadığı belirlenmiştir (P<0.001). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/100.1'i kadar olmaktadır. Standart sapmanın ortalaması n=500 ve R=500'de bile σ'ın 1/100.1'i kadar gerçekleşmektedir. n=100 için tekrar sayısı R=10 için minimum 0.01342 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 0.01390 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 0.01413 iken R=500 olduğunda 0.01398'e düşmüştür. Maksimum değerler R=10 iken 0.01484 değerini

alırken R=500'de azalarak 0.01406 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=200 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.3.14'de verilmiştir.

Tablo 9.3.14. n=200 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) = W(X;b,c) \rightarrow f(X) = W(X;3,2)$			
Tekrar	Standart Sapma		
Sayısı(R)	Min.	s	Max.
10	0.00643	0.00674	0.00705
20	0.00665	0.00687	0.00709
30	0.00680	0.00698	0.00716
50	0.00680	0.00694	0.00708
100	0.00688	0.00698	0.00708
200	0.00692	0.00698	0.00704
500	0.00694	0.00698	0.00702

Tablo 9.3.14 incelendiğinde n=200 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olmadığı belirlenmiştir (P<0.001). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin

tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapması yaklaşık 1/200.6'ı kadar olmaktadır. Standart sapmanın ortalaması n=500 ve R=500'de bile σ'ın 1/200.6'ı kadar gerçekleşmektedir. n=200 için tekrar sayısı R=10 için minimum 0.00643 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 0.00694 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 0.00674 iken R=500 olduğunda 0.00698'e yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 0.00705 değerini alırken R=500'de azalarak 0.00702 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=300 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.3.15'de verilmiştir.

Tablo 9.3.15 incelendiğinde n=300 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olmadığı belirlenmiştir (P<0.001). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/301.1'i kadar olmaktadır. Standart sapmanın ortalaması n=500 ve R=500'de bile σ'ın 1/301.1'i kadar gerçekleşmektedir. n=300 için tekrar sayısı R=10 için minimum 0.00444 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 0.00463 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 0.00458 iken R=500 olduğunda 0.00465'e yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 0.00472 değerini alırken R=500'de azalarak 0.00467 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

Tablo 9.3.15. n=300 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \cong W(X;b,c) \Rightarrow f(X) \cong W(X;3,2)$			
Tekrar	Standart Sapma		
Sayısı(R)	Min.	s	Max.
10	0.00444	0.00458	0.00472
20	0.00454	0.00464	0.00474
30	0.00457	0.00465	0.00473
50	0.00456	0.00462	0.00468
100	0.00461	0.00465	0.00469
200	0.00461	0.00465	0.00469
500	0.00463	0.00465	0.00467

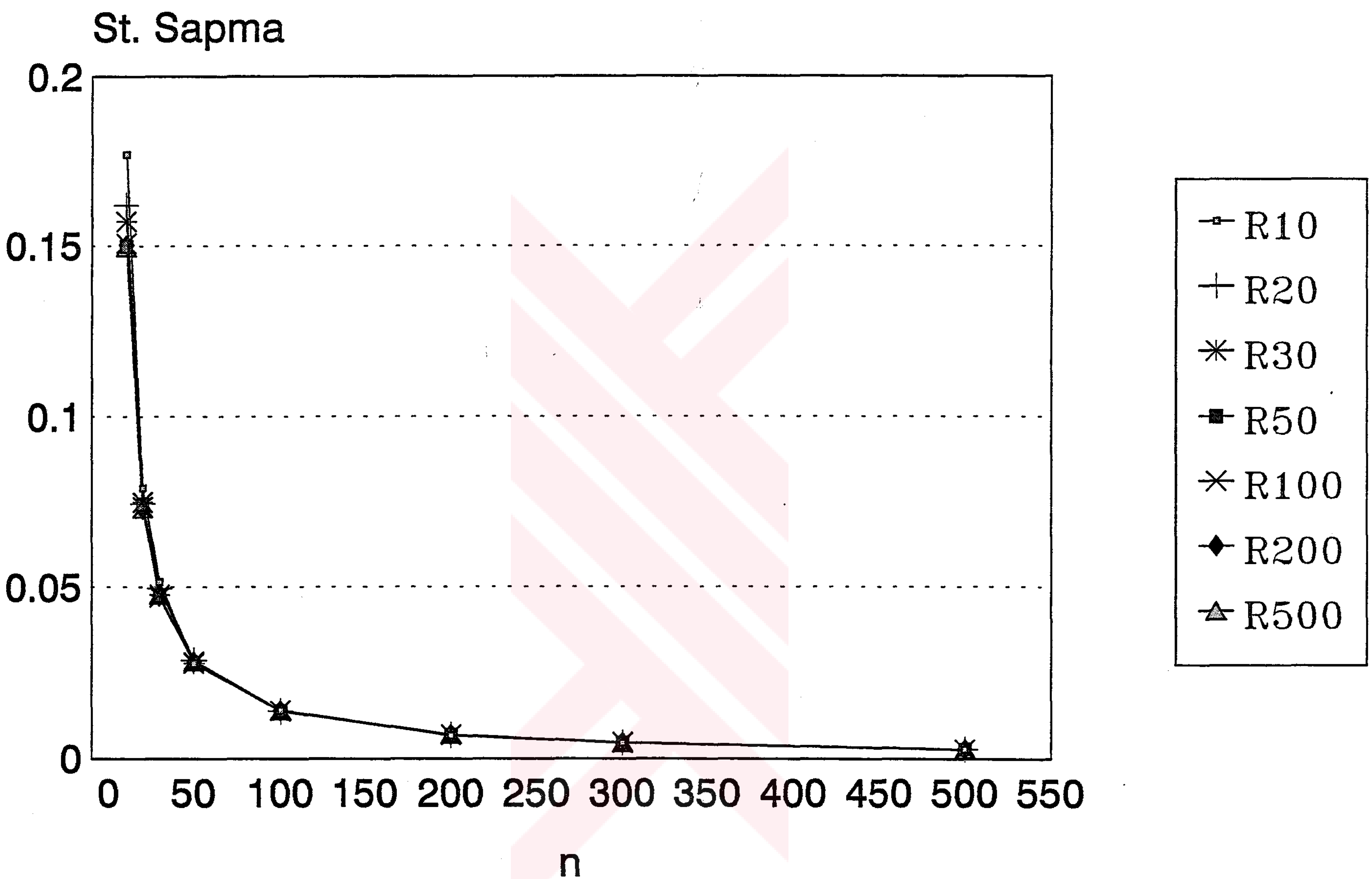
W(X;3,2) parametreli dağılımdan n=500 olmak üzere tekrar sayısı R=10, 20, 30, 50, 100, 200 ve 500 için yapılan türetimlerde örneklem Bootstrap parametre tahminleri olan standart sapmanın minimum, maksimum ve ortalama değerleri tablo 9.3.16'da verilmiştir.

Tablo 9.3.16 incelendiğinde n=500 için Bootstrap yöntemi standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı R, arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değer almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olmadığı belirlenmiştir ($P<0.001$). n=10, 20, 30, 50, 100, 200, 300 ve 500 değerlerinin tüm tekrar sayılarında standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık 1/501.8'i kadar olmaktadır. Standart sapmanın ortalaması n=500 ve R=500'de bile σ'ın 1/501.8'i kadar gerçekleşmektedir. n=500 için tekrar sayısı R=10 için minimum 0.00267 iken ara tekrarlarda değişim aralığı çok küçük düzeyde kalmıştır. R=500 için 0.00277 olmuştur. Standart sapmaların ortalaması ise R=10 için 0.00275 iken R=500 olduğunda 0.00279'e yükselmiştir. Maksimum değerler R=10 iken 0.00282 değerini alırken R=500'de azalarak 0.00281 değerine düşmektedir. Tekrar sayısı artarken minimum ve maksimum değerler arasındaki değişim aralığında farklılıklar önemsiz boyutlarda kalmaktadır.

Tablo 9.3.16. n=500 için tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkenin Bootstrap standart sapma ve min, max tahminleri (Toplum sigması=1.4)

Weibull Dağılım $f(X) \cong W(X;b,c) \rightarrow f(X) \cong W(X;3,2)$			
Tekrar Sayısı(R)	Standart Sapma		
	Min.	s	Max.
10	0.00267	0.00275	0.00282
20	0.00272	0.00276	0.00272
30	0.00272	0.00276	0.00279
50	0.00274	0.00278	0.00272
100	0.00276	0.00278	0.00280
200	0.00277	0.00279	0.00281
500	0.00277	0.00279	0.00281

n birim ve R tekrar sayısına göre Bootstrap standart sapma değerlerinin dağılımı Şekil 9.3.2'de gösterilmiştir.



Şekil: 9.3.2. n=10,20,30,50,100,200,300,500 iken tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 için Weibull dağılan W(X;3,2) değişkeninin Bootstrap standart sapma tahminleri

10. TARTIŞMA ve SONUÇ

Jackknife ve Bootstrap yöntemleri, olasılık dağılım fonksiyonu açıkça bilinmeyen bir F dağılımından örnek alındığı durumlarda bu örnekten elde edilen istatistiklerin toplum parametresinin tahmin edilmesinde geçerli olabilmesi için tahminin standart hatasını minimuma indirgeyen yöntemlerdir.

Bu araştırmada, Jackknife ve Bootstrap yöntemlerinin istatistiklerini matematiksel ümitle elde edilen istatistiklerle karşılaştırmak ve toplum parametreleri olarak ele alınan μ ve σ değerlerini tahminlemek için Normal, Üstel ve Weibull dağılımından türetilmiş verilerden yararlanılmıştır.

Jackknife ve Bootstrap yöntemlerini N(100;10) parametreli Normal, W(X;3,2) parametreli Weibull ve E(X;10) parametreli Üstel dağılımlardan türetilmiş n=10,20,30,50,100,200,300,500 hacimli ve tekrar sayısı R=10,20,30,50,100,200,500 olan verilerde parametre tahminlerini belirlemek için Jackknife ve Bootstrap yöntemlerinin istatistikleri hesaplanmıştır.

Normal, Üstel ve Weibull dağılımlarında Jackknife ve Bootstrap yöntemleri ile hesaplanan ortalamalar n sayısı artarken toplum ortalamasına çok yakın değerler almaktadır. Matematiksel ümit değerleri ile elde edilen parametre tahminleri ile Jackknife ve Bootstrap yöntemi ile elde edilen parametre tahminleri arasında önemli düzeyde benzerlikler bulunmaktadır. n sabit tutulup tekrar sayısı arttırıldığında her iki yöntemle elde edilen istatistiklerde önemli değişmeler olmamakta fakat istatistiklerin değişim aralıkları önemli düzeyde küçülmektedir.

EFRON ve arkadaşları (1981a,1981b,1982,1983,1986) yaptıkları türetimlerde istatistiklerin benzer tahminler ortaya koyduklarını belirlemişlerdir.

Parametre tahminlerinin μ değerlerinden olan farklarının analizleri sonuçlarında önemli farklılıklar bulunmamıştır (P>0.05). n=>30 koşulunda istatistikler μ değerine süratle yaklaşmaktadır.

Efron (1982), Tekdüze dağılımdan türetilen verilerde n=10 iken tekrar sayısı R=200 olduğunda Jackknife ve Bootstrap ortalama sonuçlarının benzerlik gösterdiğini bulmuştur. Efron and Tibshirani (1986), Monte Carlo benzetim yöntemiyle standart normal dağılımdan türettiği n=15 olan verilerde tekrar sayısı arttıkça Jackknife ve Bootstrap yöntemi ortalama sonuçlarının benzerlik gösterdiğini saptamışlardır.

Jackknife standart sapma tahminleri incelendiğinde tekrar sayısı arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden daha düşük değerler almaktadır. Fakat yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyanslarının homojen olduğu belirlenmiştir (P>0.05). Türetimlerle ilgili istatistikler kendi içlerinde birbiriyle tutarlı ve tekrar sayısı artarken ise minimum varyanslı olarak bulunmuştur.

Bootstrap yöntemine göre hesaplanan standart sapma tahminleri incelendiğinde, tekrar sayısı R arttıkça toplumun standart sapma tahminleri σ değerinden çok küçük değerler olarak hesaplanmıştır. Yapılan Bartlett testlerinde tüm örnek türetimlerinin varyansının homojen olmadığı belirlenmiştir.

Bootstrap yönteminde türetimlerle ilgili istatistikler kendi içlerinde birbiriyle tutarlı olmakla beraber toplum değerleriyle önemli düzeyde farklılık göstermektedir ($P<0.001$).

Türetimlerin değişik n sayılarına ve tekrar sayılarına göre elde edilen standart sapma değerleri Jackknife yönteminde her örnek hacmi için toplum standart sapması ile türdeşlik gösteren değerler olarak saptanırken, Bootstrap yöntemi standart sapması ise örnek hacimleri artarken önemli düzeyde küçülen tüm tekrar sayılarına göre standart sapma değerleri gerçek toplum standart sapmasının yaklaşık n=10 için 1/9'u iken n=500 için bu değer 1/500'e ulaşmıştır.

Efron (1981a), Bootstrap yöntemi standart sapma değerleri tahminlerini n=10,20,...,400 için yapılan türetimlerde hesaplanmış ve n sayısı arttıkça s değerlerinin küçüldüğünü belirlemiştir. Efron (1981b), Jackknife ve Bootstrap yöntemlerini 15 değişik dağılım ve koşul altında türettiği verilerde denemiş ve Jackknife yöntemi ile Bootstrap yöntemi ortalamaları arasında benzerlikler saptarken, standart sapma değerlerinde farklılıklar belirlemiştir. Efron (1981b), Jackknife yönteminin olasılık dağılım fomnksiyonu bilinmeyen durumlara uygunluğu kadar normal dağılım varsayımı koşullarına da uygun bir yöntem olduğunu belirtmiştir.

Efron (1982), Jackknife yöntemi standart sapma değerlerinin n=10 için Bootstrap yöntemi s değerlerinin 1.57 katı olduğunu belirlemiştir. Bu sayı araştırmamızda 8 kat olarak belirlenmiştir.

Efron and Gong (1983), Jackknife ve Bootstrap yöntemlerinin etkinliğini karşılaştırarak %25 düzeltilmiş (trimmed) n=15 olan veri setlerinde Bootstrap ve Jackknife ortalama ve standart sapmalarını farklı olarak bulmuşlardır. Bootstrap ortalamaları sınırlanmış veri setinde gerçek ortalamaya daha yakın fakat standart sapmasını Jackknife s değerinden küçük olarak saptanmıştır.

Normal, Üstel ve Weibull dağılımlarının Jackknife ve Bootstrap ortalama istatistikleri birbirleriyle benzerlik göstermiştir. Her iki yöntemde de ortalama istatistikleri dağılım türünden etkilenmemektedir. Değişkenin dağılımına bakılmaksızın türetim için alınan parametrik değerler Jackknife ve Bootstrap yönteminde benzer olarak elde edilmektedir. Yöntemin teorisinde bahsedilen dağılımdan bağımsız parametre tahminlemesi koşulu ortalama istatistikleri için her iki yöntemde de gerçekleşmektedir.

Standart sapma değerleri için Jackknife yöntemi Bootstrap yönteminden farklılaşmaktadır. Her ne kadar Bootstrap yöntemi çok küçük standart sapma değerleri vermekte ise de türetimlerde alınan parametrik değerlerle önemli farklılaşmalar göstermektedir ($P<0.001$). Jackknife yöntemi ise parametrik değerler ile benzer sonuçlar vermektedir.

Araştırmadan elde edilen sonuçlara göre; Jackknife yöntemi değişkenin dağılımından bağımsız olarak topluma ilişkin ortalama ve varyans tahminlerinin yapılmasında matematiksel ümit yöntemi ile benzer sonuçlar verdiği, Bootstrap yönteminin değişkenin dağılım fonksiyonundan bağımsız olarak toplum parametrelerini tahminlemede sadece ortalama için geçerli sonuçlar verdiği varyans tahminleri için gerçek durumu yansıtmayan sonuçlar verdiği ortaya çıkmaktadır.

Jackknife yöntemi Bootstrap yöntemine göre üstünlük göstermektedir. Örnek hacminin 10<n<30 olduğu koşullarda Jackknife ortalama için geçerli, tutarlı fakat yeterli istatistik özelliğine sahip tahminler verirken, n=>30 koşulunda bir parametre tahmininde bulunması gereken özellikleri taşıyan parametre tahminleri vermektedir.

Jackknife yöntemi dağılım varsayımları kurmadan küçük hacimli örneklerden parametre tahminleri yapmada matematiksel ümide göre geçerli bir yöntem olarak görülmektedir. Bootstrap yönteminin çapraz geçerlilik tahminlerinde etkin olduğu Efron (1982) ve Efron and Gong (1983) tarafından ileri sürülmektedir. Jackknife ve Bootstrap yöntemlerinin çapraz geçerlilik tahminlerinde etkinliklerinin araştırılması gerekir.

Parametrik yöntemlerin uygulanmasının mümkün olmadığı ya da kullanılmasının doğru olmayacağına ilişkin kararlar alındığı durumlarda Jackknife yöntemi toplum parametrelerinin tahminlenmesinde parametrik yöntemlere benzer tutarlı tahminler vermektedir.

KAYNAKLAR DIZINI

1. Bratley, P., Fox, B.L. and Schrage, L.E.: A Guide to Simulation. Springer-Verlag Inc., New York, 1983.

2. Budakçı, A. ve Püskülcü, H.: Normal Dağılıştan Şans Sayısı Türeten Bazı Yöntemlerin Tanıtılması ve Karşılaştırılması. Uygulamalı İstatistik, 2, 309-320, 1979.

3. Cook, E.R.: Bootstrap Confidence Intervals for Red Spruce Ring-Width Chronologies and An Assessment of Age-Related Bias In Recent Growth Trends. Can . J. For. Res., 20, 1326-1331, 1990.

4. Dixon, W.J. and Massey, F.J.Jr.: Introduction to Statistical Analysis. McGraw-Hill Company, Tokyo, 1983.

5. Efron B.: Censored Data and The Bootstrap. Journal of The American Statistical Association, 76, 312-319, 1981a.

6. Efron, B.: Nonparametric Estimates of Standart Error: The Jackknife, The Bootstrap and Other Methods. Biometrika, 68, 589-599, 1981b.

7. Efron, B.: The Jackknife, The Bootstrap and Other Resampling Plans. Society for Industrial and Applied Mathematics. Philadelphia, 1982.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

8. Efron, B. and Gong, G.: A Leisurely Look at The Bootstrap, The Jackknife, and Cross-Validation. The American Statistician, 37, 36-48, 1983.

9. Efron, B.: Bootstrap Confidence Intervals for A Class of Parametric Problems. Biometrika, 72, 45-58, 1985.

10. Efron, B. and Tibshirani, R.: Bootstrap Methods for Standart Errors, Confidence Intervals, and Other Measures of Statistical Accuracy. Statistical Science, 1, 54-77, 1986.

11. Gray, H.L. and Schucany, W.R.: The Generalized Jackknife Statistic. Mercel Dekker Inc., New York, 1972.

12. Gücelioğlu, Ö.S.: Temel İstatistik (Olasılık ve İstatistik Teorisinin İlkeleri). D.İ.E. Eğitim Merkezi, Ankara, 1973.

13. Gürtan, K.: İstatistik ve Araştırma Metodları. İstanbul Üniversitesi Yayını, İstanbul, 1982.

14. Hall, A.: Asymptotic Properties of The Bootstrap for Heavy-Tailed Distributions. The Annals of Probability, 18, 1342-1360, 1990.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

15. Heltshe, J.F.: Jackknife Estimate of The Matching Coefficient of Similarity. Biometrics, 44, 447-460, 1988

16. Hogg, R.V. and Craig, A.T.: Introduction to Mathematical Statistics, The Macmillan Company, New York, 1965.

17. Johnson, N.L.: Continuous Univariate Distributions Vol.1. Houghton Mifflin Company, Boston, 1970.

18. Kan, İ.: Biyoistatistik Ders Kitabı. Uludağ Üniversitesi Basımevi, Bursa, 1991.

19. Korum, U.: Matematiksel İstatistiğe Giriş. Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayınları, Ankara, 1985.

20. Köksal, B.A.: İstatistik Analiz Metodları. Boğaziçi Üniversitesi Yayınları, İstanbul, 1977.

21. McLachlan, G.J.: On Bootstrapping The Likelihood Ratio Test Statistic for The Number of Components in A Normal Mixture. Applied Statistics, 36, 318-324, 1987.

22. Miller, R.G.: The Jackknife-A Review. Biometrika, 61, 1-14, 1974.

KAYNAKLAR DIZINI (devam ediyor)

23. Mosteller, F. and Tukey, J.W.: Data Analysis and Regression. Addison-Wesley Publishing Company, London, 1977.

24. Mood, A.M. and Graybill, F.G.: Introduction to The Theory of Statistics. McGraw-Hill Company, Tokyo, 1963.

25. Müller, H.G. and Wang, J.L.: Bootstrap Confidence Intervals for Effective Doses in The Probit Model For Dose-Responce Data. Biom.J., 32, 529-544, 1990.

26. Özçelik, D.A.: Araştırma Teknikleri Düzenleme ve Analiz. ÜSYM Eğitim Yayınları, Ankara, 1981.

27. Özdamar, K.: Bilgisayar İle Benzetim Yöntemleri (Benzetime Giriş). Anadolu Üniversitesi Yayınları, Eskişehir, 1988.

28. Özdamar, K.: Biyoistatistik. Bilim Teknik Yayınevi, Eskişehir, 1989.

29. Papoulis, A.: Probability and Statistics. Prentice-Hall International Inc., New Jersey, 1990.

30. Pindyck, R.S. and Rubinfeld, D.L.:Econometric Models and Econometric Forecasts. McGraw-Hill Company, Tokyo, 1983.

KAYNAKLAR DİZİNİ (devam ediyor)

31. Püskülcü, H. ve İkiz, F.: İstatistiğe Giriş. Ege Üniversitesi Basımevi, İzmir, 1986.

32. Serper, Ö. ve Gürsakal, N.: Araştırma Yöntemleri. Filiz Kitabevi, İstanbul, 1989.

33. Sümbüloğlu, K. ve Sümbüloğlu, V.: Biyoistatistik. Çağ Matbaası, Ankara, 1987.

34. Şenocak, M.: Özel Biyoistatistik. Çağlayan Kitabevi, İstanbul, 1992.

35. Walpole, R.E.: Introduction to Statistics. The Macmillan Company, New York, 1968.

36. Yücel, M.N.: Monte Karlo Metodu. İstanbul Teknik Üniversitesi Elektronik Hesap Bilimleri Enstitüsü Yayınları, İstanbul, 1973.

EK 1: NORMAL DAĞILIM VERİ TÜRETİMİ VE VERİ ANALİZİ
****

```
CLS : CLEAR
INPUT N
INPUT R
CLS
DIM S1#(R), OX#(N), X1#(N), X(R), SX#(R), SHX#(R)
M = 100: GS = 10
FOR S = 1 TO R
GOSUB 1000
FOR I = 1 TO N: TX# = 0: TX2# = 0: FOR J = 1 TO N
IF I = J THEN 1
TX# = TX# + X1#(J)
1 NEXT J
OX#(I) = TX# / (N - 1)
NEXT I
TX# = 0: TX2# = 0
FOR I = 1 TO N: TX# = TX# + OX#(I): TX2# = TX2# + OX#(I) ^ 2: NEXT
X(S) = TX# / N: SX#(S) = SQR((TX2# - TX# ^ 2 / N) / (N - 1)):
SHX#(S) = SX#(S) / SQR(N)
TXX# = TXX# + X(S): TXX2# = TXX2# + X(S) ^ 2: TSX = TSX + SX#(S)
T1# = 0: T2# = 0
FOR I = 1 TO N: T1# = T1# + X1#(I): T2# = T2# + X1#(I) ^ 2: NEXT
S1#(S) = SQR((T2# - T1# ^ 2 / N) / (N - 1)): TS1 = TS1 + S1#(S)
NEXT
NR = N * R
T1# = 0: T2# = 0
OX# = TXX# / R: SOX# = SQR(TXX2# - TXX# ^ 2 / R) / (R - 1)
SSO = TS1 / R: SSX1 = TSX / R
PRINT
PRINT "     OX          SOX          GO            SG            SSO
SSX1"
PRINT "-------------------------------------------------------------
-------------"
MU = TOP# / (R * N): SIGMA = SQR((TOP2# - TOP# ^ 2 / (N * R)) / (N
* R - 1))
PRINT USING "######.#####"; OX#; SOX#; MU; SIGMA; SSO; SSX1
INPUT AAA
N = R
PRINT "X DEĞERLERİ İCİN"
GOSUB 10
FOR I = 1 TO N
X(I) = S1#(I)
NEXT
GOSUB 10
FOR I = 1 TO N
X(I) = SX#(I)
NEXT
PRINT "ST. SAP. DEĞERLERİ İCİN "
GOSUB 10
END
```

```
10 '*****************************************
20 '* BU PROGRAM DIZILERIN FREKANS DAGILIM   *
30 '* TABLOSU DURUMUNA GETIRILMESINI SAGLAR  *
40 '*****************************************
50 CLS : T1$ = TIME$: DIM F(50), SBD(50), KF(50), SO(50), GF(50),
YGF(50)
70 TX = 0: TX2 = 0
80 FOR I = 1 TO N: TX = TX + X(I): TX2 = TX2 + X(I) ^ 2: NEXT
85 LOCATE 15, 30: PRINT "LUTFEN BEKLEYINIZ"
90 FOR I = 1 TO N - 1: FOR J = I + 1 TO N
100 IF X(I) < X(J) THEN 120
110 SWAP X(I), X(J)
120 NEXT: NEXT
130 IF N / 2 = INT(N / 2) THEN OD = (X(N / 2) + X((N + 2) / 2)) /
2: GOTO 150
140 OD = X((N + 1) / 2)
150 PRINT : PRINT : PRINT "SIRAYA DIZILMIS VERILER"
160 PRINT : FOR I = 1 TO N: R = X(N) - X(1): PRINT X(I); : NEXT
170 C1 = INT(R / 16): C2 = INT(R / 8): PRINT : PRINT
180 SA = 0: T = 0
190 PRINT "MINx ="; X(1); "DIR 1.CI SINIF BASLANGIC DEGERINI
VERINIZ";
200 INPUT " ", SB: IF SB < X(1) - 10 OR SB > X(1) + 2 THEN 210
ELSE 240
210 PRINT "VERILERIN BASLANGIC SAYISI UYGUN DEGIL";
220 PRINT X(1) - 10; " ILE "; X(1); " ARASINDA BIR TAMSAYI
VERILMELIDIR"
230 GOTO 180
240 PRINT : PRINT C1 - 3; " ILE "; C2 + 3; " ARASINDA TAMSAYI
VERINIZ ";
250 INPUT " ", SA: IF SA < C1 - 3 OR SA > C2 + 3 THEN PRINT SA;
"UYGUN DEGIL": GOTO 240
260 IF SA < C1 - 3 AND SA > C2 + 3 THEN 270
270 I = 1: SBD(I) = SB
275 I = I + 1
280 SBD(I) = SBD(I - 1) + SA
290 IF SBD(I) >= X(N) THEN 300 ELSE 275
300 K = I
310 PRINT : PRINT : PRINT
320 FOR I = 1 TO K: F(I) = 0: FOR J = 1 TO N
330 IF X(J) >= SBD(I) AND X(J) < SBD(I + 1) THEN F(I) = F(I) + 1
340 NEXT: NEXT: CLS
350 T = 0: SFX = 0: SFX2 = 0
360 FOR I = 1 TO K: T = T + F(I): KF(I) = T: SO(I) = SBD(I) + SA /
2
370 SFX = SFX + SO(I) * F(I): SFX2 = SFX2 + SO(I) * SO(I) * F(I):
NEXT
380 FOR I = 1 TO K: GF(I) = F(I) / T: YGF(I) = KF(I) / T: NEXT
390 FOR I = 1 TO K: IF KF(I) >= N / 2 THEN OKF = KF(I - 1): B =
SBD(I): BF = F(I): GOTO 410
400 NEXT
410 ODS = B + ((N / 2 - OKF) / BF) * SA
420 PRINT " TABLO: "; N; " VERININ FREKANS DAGILIM TABLOSU"
430 PRINT STRING$(25, 45)
```

```
440 PRINT "      SBD          FREKANS "
450 PRINT STRING$(25, 45)
460 Y$ = "  #####.##### ": YY$ = "#######"
470 FOR I = 1 TO K: PRINT USING Y$; SBD(I); : PRINT USING YY$;
F(I): NEXT
475 IF SBD(I) < 10 THEN 476
476 IF F(I) < 10 THEN INPUT AA$ ELSE 490
490 XO = TX / N: SX = SQR((TX2 - TX ^ 2 / N) / (N - 1))
500 PRINT : F$ = "####.#####"
510 SHX = SX / SQR(N)
520 XORT = SFX / T: SSX = SQR((SFX2 - SFX ^ 2 / T) / (T - 1))
530 SSHX = SSX / SQR(N)
540 PRINT "          VERİLERİN  İSTATİSTİKLERİ"
550 PRINT "SINIFLANDIRILMAMIŞ                SINIFLANDIRILMIŞ"
560 PRINT STRING$(60, "=")
570 PRINT "ORTALAMA       ="; USING F$; XO; : PRINT TAB(35);
"ORTALAMA       ="; USING F$; XORT 580 PRINT "STANDART SAPMA =";
USING F$; SSX; : PRINT TAB(35); "STANDART SAPMA ="; USING F$; SX
590 PRINT "STANDART HATA  ="; USING F$; SSHX; : PRINT TAB(35);
"STANDART HATA  ="; USING F$; SHX 600 PRINT "ORTANCA DEĞER  =";
USING F$; OD; : PRINT TAB(35); "ORTANCA DEĞER  ="; USING F$; ODS
610 PRINT STRING$(60, "="): PRINT : PRINT
620 PRINT "ELDE EDILEN FREKANS DAGILIMI SIZCE UYGUNMU (E/H)";
630 INPUT " ", S$: IF S$ = "E" OR S$ = "e" THEN 645 ELSE 640
640 IF S$ = "H" OR S$ = "h" THEN 170 ELSE 620
645 T2$ = TIME$: PRINT : PRINT : PRINT
646 PRINT "İŞLEMİN BAŞLAMA ZAMANI  ", T1$
647 PRINT "İŞLEMİN SONLANMA ZAMANI ", T2$
668 RETURN
1000 RANDOMIZE 1111
PI = 3.141592654#
FOR I = 1 TO N
R1 = RND: R2 = RND: C1 = SQR(-2 * LOG(R1)): C2 = COS(2 * PI * R2)
X1#(I) = M + C1 * C2 * GS
TOP# = TOP# + X1#(I): TOP2# = TOP2# + X1#(I) ^ 2
NEXT
RETURN
```

EK 2: ÜSTEL DAĞILIM VERİ TÜRETİMİ VE VERİ ANALİZİ

```
***************************************************

CLS : CLEAR
INPUT N
INPUT R
CLS
DIM S1#(R), OX#(N), x1#(N), X(R), SX#(R), SHX#(R), R1(N)
M = 10
FOR S = 1 TO R
GOSUB 1000
FOR I = 1 TO N: TX# = 0: TX2# = 0: FOR J = 1 TO N
IF I = J THEN 1
TX# = TX# + x1#(J)
1 NEXT J
OX#(I) = TX# / (N - 1)
NEXT I
TX# = 0: TX2# = 0
FOR I = 1 TO N: TX# = TX# + OX#(I): TX2# = TX2# + OX#(I) ^ 2: NEXT
X(S) = TX# / N: SX#(S) = SQR((TX2# - TX# ^ 2 / N) / (N - 1)): SHX#(S) =
SX#(S) / SQR(N)
TXX# = TXX# + X(S): TXX2# = TXX2# + X(S) ^ 2: TSX = TSX + SX#(S)
T1# = 0: T2# = 0
FOR I = 1 TO N: T1# = T1# + x1#(I): T2# = T2# + x1#(I) ^ 2: NEXT
S1#(S) = SQR((T2# - T1# ^ 2 / N) / (N - 1)): TS1 = TS1 + S1#(S)
NEXT
NR = N * R
T1# = 0: T2# = 0
OX# = TXX# / R: SOX# = SQR(TXX2# - TXX# ^ 2 / R) / (R - 1)
SSO = TS1 / R: SSX1 = TSX / R
PRINT
PRINT "     OX          SOX          GO          SG          SSO       SSX1"
PRINT "------------------------------------------------------------------------"
PRINT
MU = TOP# / (R * N): SIGMA = SQR((TOP2# - TOP# ^ 2 / (N * R)) / (N * R -
1))
PRINT USING "######.####"; OX#; SOX#; MU; SIGMA; SSO; SSX1
INPUT AAA
N = R
PRINT "X DEĞERLERİ İCİN"
GOSUB 10
FOR I = 1 TO N
X(I) = S1#(I)
NEXT
GOSUB 10
FOR I = 1 TO N
X(I) = SX#(I)
NEXT
PRINT "ST. SAP. DEĞERLERİ İCİN "
GOSUB 10
END
10 '*********************************************
20 '* BU PROGRAM DIZILERIN FREKANS DAGILIM    *
30 '* TABLOSU DURUMUNA GETIRILMESINI SAGLAR   *
```

```
40 '*********************************************
50 CLS : T1$ = TIME$: DIM F(50), SBD(50), KF(50), SO(50), GF(50), YGF(50)
70 TX = 0: TX2 = 0
80 FOR I = 1 TO N: TX = TX + X(I): TX2 = TX2 + X(I) ^ 2: NEXT
85 LOCATE 15, 30: PRINT "LUTFEN BEKLEYINIZ"
90 FOR I = 1 TO N - 1: FOR J = I + 1 TO N
100 IF X(I) < X(J) THEN 120
110 SWAP X(I), X(J)
120 NEXT: NEXT
130 IF N / 2 = INT(N / 2) THEN OD = (X(N / 2) + X((N + 2) / 2)) / 2: GOTO
150
140 OD = X((N + 1) / 2)
150 PRINT : PRINT : PRINT "SIRAYA DIZILMIS VERILER"
160 PRINT : FOR I = 1 TO N: R = X(N) - X(1): PRINT X(I); : NEXT
170 C1 = INT(R / 16): C2 = INT(R / 8): PRINT : PRINT
180 SA = 0: T = 0
190 PRINT "MINx ="; X(1); "DIR 1.CI SINIF BASLANGIC DEGERINI VERINIZ";
200 INPUT " ", SB: IF SB < X(1) - 10 OR SB > X(1) + 2 THEN 210 ELSE 240
210 PRINT "VERILERIN BASLANGIC SAYISI UYGUN DEGIL";
220 PRINT X(1) - 10; " ILE "; X(1); " ARASINDA BIR TAMSAYI VERILMELIDIR"
230 GOTO 180
240 PRINT : PRINT C1 - 3; " ILE "; C2 + 3; " ARASINDA TAMSAYI VERINIZ ";
250 INPUT " ", SA: IF SA < C1 - 3 OR SA > C2 + 3 THEN PRINT SA; "UYGUN
DEGIL": GOTO 240
260 IF SA < C1 - 3 AND SA > C2 + 3 THEN 270
270 I = 1: SBD(I) = SB
275 I = I + 1
280 SBD(I) = SBD(I - 1) + SA
290 IF SBD(I) >= X(N) THEN 300 ELSE 275
300 K = I
310 PRINT : PRINT : PRINT
320 FOR I = 1 TO K: F(I) = 0: FOR J = 1 TO N
330 IF X(J) >= SBD(I) AND X(J) < SBD(I + 1) THEN F(I) = F(I) + 1
340 NEXT: NEXT: CLS
350 T = 0: SFX = 0: SFX2 = 0
360 FOR I = 1 TO K: T = T + F(I): KF(I) = T: SO(I) = SBD(I) + SA / 2
370 SFX = SFX + SO(I) * F(I): SFX2 = SFX2 + SO(I) * SO(I) * F(I): NEXT
380 FOR I = 1 TO K: GF(I) = F(I) / T: YGF(I) = KF(I) / T: NEXT
390 FOR I = 1 TO K: IF KF(I) >= N / 2 THEN OKF = KF(I - 1): B = SBD(I): BF
= F(I): GOTO 410
400 NEXT
410 ODS = B + ((N / 2 - OKF) / BF) * SA
420 PRINT " TABLO: "; N; " VERININ FREKANS DAGILIM TABLOSU"
430 PRINT STRING$(25, 45)
440 PRINT "      SBD          FREKANS "
450 PRINT STRING$(25, 45)
460 Y$ = "  #####.##### ": YY$ = "#######"
470 FOR I = 1 TO K: PRINT USING Y$; SBD(I); : PRINT USING YY$; F(I): NEXT
475 IF SBD(I) < 10 THEN 476
476 IF F(I) < 10 THEN INPUT AA$ ELSE 490
480 'PRINT USING YY$; GF(I): NEXT
490 XO = TX / N: SX = SQR((TX2 - TX ^ 2 / N) / (N - 1))
500 PRINT : F$ = "####.#####"
```

```
510 SHX = SX / SQR(N)
520 XORT = SFX / T: SSX = SQR((SFX2 - SFX ^ 2 / T) / (T - 1))
530 SSHX = SSX / SQR(N)
540 PRINT "            VERİLERİN  İSTATİSTİKLERİ"
550 PRINT "SINIFLANDIRILMAMIŞ                SINIFLANDIRILMIŞ"
560 PRINT STRING$(60, "=")
570 PRINT "ORTALAMA        ="; USING F$; XO; : PRINT TAB(35); "ORTALAMA
="; USING F$; XORT 580 PRINT "STANDART SAPMA ="; USING F$; SSX; : PRINT
TAB(35); "STANDART SAPMA ="; USING F$; SX 590 PRINT "STANDART HATA  =";
USING F$; SSHX; : PRINT TAB(35); "STANDART HATA  ="; USING F$; SHX 600
PRINT "ORTANCA DEĞER  ="; USING F$; OD; : PRINT TAB(35); "ORTANCA DEĞER
="; USING F$; ODS 610 PRINT STRING$(60, "="): PRINT : PRINT
620 PRINT "ELDE EDILEN FREKANS DAGILIMI SIZCE UYGUNMU (E/H)";
630 INPUT " ", S$: IF S$ = "E" OR S$ = "e" THEN 645 ELSE 640
640 IF S$ = "H" OR S$ = "h" THEN 170 ELSE 620
645 T2$ = TIME$: PRINT : PRINT : PRINT
646 PRINT "İŞLEMİN BAŞLAMA ZAMANI  ", T1$
647 PRINT "İŞLEMİN SONLANMA ZAMANI ", T2$
648 RETURN
1000 RANDOMIZE 12277
FOR I = 1 TO N
R1(I) = RND
x1#(I) = M * (-LOG(R1(I)))
TOP# = TOP# + x1#(I): TOP2# = TOP2# + x1#(I) ^ 2
NEXT
RETURN
```

EK 3: WEİBULL DAĞILIMI VERİ TÜRETİMİ VE ANALİZİ
****

```
CLS : CLEAR
INPUT N
INPUT R
CLS
DIM S1#(R), OX#(N), X1#(N), X(R), SX#(R), SHX#(R), R1(N)
B = 3: C = 2
FOR S = 1 TO R
GOSUB 1000
FOR I = 1 TO N: TX# = 0: TX2# = 0: FOR J = 1 TO N
IF I = J THEN 1
TX# = TX# + X1#(J)
1 NEXT J
OX#(I) = TX# / (N - 1)
NEXT I
TX# = 0: TX2# = 0
FOR I = 1 TO N: TX# = TX# + OX#(I): TX2# = TX2# + OX#(I) ^ 2: NEXT
X(S) = TX# / N: SX#(S) = SQR((TX2# - TX# ^ 2 / N) / (N - 1)): SHX#(S) =
SX#(S) / SQR(N)
TXX# = TXX# + X(S): TXX2# = TXX2# + X(S) ^ 2: TSX = TSX + SX#(S)
T1# = 0: T2# = 0
FOR I = 1 TO N: T1# = T1# + X1#(I): T2# = T2# + X1#(I) ^ 2: NEXT
S1#(S) = SQR((T2# - T1# ^ 2 / N) / (N - 1)): TS1 = TS1 + S1#(S)
NEXT
NR = N * R
T1# = 0: T2# = 0
OX# = TXX# / R: SOX# = SQR(TXX2# - TXX# ^ 2 / R) / (R - 1)
SSO = TS1 / R: SSX1 = TSX / R
PRINT
PRINT "     OX          SOX          GO           SG           SSO        SSX1"
PRINT "---------------------------------------------------------------------
-"
MU = TOP# / (R * N): SIGMA = SQR((TOP2# - TOP# ^ 2 / (N * R)) / (N * R -
1))
PRINT USING "######.#####"; OX#; SOX#; MU; SIGMA; SSO; SSX1
INPUT AAA
N = R
PRINT "X DEĞERLERİ İCİN"
GOSUB 10
FOR I = 1 TO N
X(I) = S1#(I)
NEXT
GOSUB 10
FOR I = 1 TO N
X(I) = SX#(I)
NEXT
PRINT "ST. SAP. DEĞERLERİ İCİN "
GOSUB 10
END
```

```
10 '*******************************************
20 '* BU PROGRAM DIZILERIN FREKANS DAGILIM    *
30 '* TABLOSU DURUMUNA GETIRILMESINI SAGLAR   *
40 '*******************************************
50 CLS : T1$ = TIME$: DIM F(50), SBD(50), KF(50), SO(50), GF(50), YGF(50)
70 TX = 0: TX2 = 0
80 FOR I = 1 TO N: TX = TX + X(I): TX2 = TX2 + X(I) ^ 2: NEXT
85 LOCATE 15, 30: PRINT "LUTFEN BEKLEYINIZ"
90 FOR I = 1 TO N - 1: FOR J = I + 1 TO N
100 IF X(I) < X(J) THEN 120
110 SWAP X(I), X(J)
120 NEXT: NEXT
130 IF N / 2 = INT(N / 2) THEN OD = (X(N / 2) + X((N + 2) / 2)) / 2: GOTO
150
140 OD = X((N + 1) / 2)
150 PRINT : PRINT : PRINT "SIRAYA DIZILMIS VERILER"
160 PRINT : FOR I = 1 TO N: R = X(N) - X(1): PRINT X(I); : NEXT
170 C1 = INT(R / 16): C2 = INT(R / 8): PRINT : PRINT
180 SA = 0: T = 0
190 PRINT "MINx ="; X(1); "DIR 1.CI SINIF BASLANGIC DEGERINI VERINIZ";
200 INPUT " ", SB: IF SB < X(1) - 10 OR SB > X(1) + 2 THEN 210 ELSE 240
210 PRINT "VERILERIN BASLANGIC SAYISI UYGUN DEGIL";
220 PRINT X(1) - 10; " ILE "; X(1); " ARASINDA BIR TAMSAYI VERILMELIDIR"
230 GOTO 180
240 PRINT : PRINT C1 - 3; " ILE "; C2 + 3; " ARASINDA TAMSAYI VERINIZ ";
250 INPUT " ", SA: IF SA < C1 - 3 OR SA > C2 + 3 THEN PRINT SA; "UYGUN
DEGIL": GOTO 240
260 IF SA < C1 - 3 AND SA > C2 + 3 THEN 270
270 I = 1: SBD(I) = SB
275 I = I + 1
280 SBD(I) = SBD(I - 1) + SA
290 IF SBD(I) >= X(N) THEN 300 ELSE 275
300 K = I
310 PRINT : PRINT : PRINT
320 FOR I = 1 TO K: F(I) = 0: FOR J = 1 TO N
330 IF X(J) >= SBD(I) AND X(J) < SBD(I + 1) THEN F(I) = F(I) + 1
340 NEXT: NEXT: CLS
350 T = 0: SFX = 0: SFX2 = 0
360 FOR I = 1 TO K: T = T + F(I): KF(I) = T: SO(I) = SBD(I) + SA / 2
370 SFX = SFX + SO(I) * F(I): SFX2 = SFX2 + SO(I) * SO(I) * F(I): NEXT
380 FOR I = 1 TO K: GF(I) = F(I) / T: YGF(I) = KF(I) / T: NEXT
390 FOR I = 1 TO K: IF KF(I) >= N / 2 THEN OKF = KF(I - 1): B = SBD(I): BF
= F(I): GOTO 410
400 NEXT
410 ODS = B + ((N / 2 - OKF) / BF) * SA
420 PRINT " TABLO: "; N; " VERININ FREKANS DAGILIM TABLOSU"
430 PRINT STRING$(25, 45)
440 PRINT "      SBD          FREKANS "
450 PRINT STRING$(25, 45)
460 Y$ = "  #####.##### ": YY$ = "#######"
470 FOR I = 1 TO K: PRINT USING Y$; SBD(I); : PRINT USING YY$; F(I): NEXT
475 IF SBD(I) < 10 THEN 476
476 IF F(I) < 10 THEN INPUT AA$ ELSE 490
```

```
480 'PRINT USING YY$; GF(I): NEXT
490 XO = TX / N: SX = SQR((TX2 - TX ^ 2 / N) / (N - 1))
500 PRINT : F$ = "####.#####"
510 SHX = SX / SQR(N)
520 XORT = SFX / T: SSX = SQR((SFX2 - SFX ^ 2 / T) / (T - 1))
530 SSHX = SSX / SQR(N)
540 PRINT "           VERİLERİN  İSTATİSTİKLERİ"
550 PRINT "SINIFLANDIRILMAMIŞ              SINIFLANDIRILMIŞ"
560 PRINT STRING$(60, "=")
570 PRINT "ORTALAMA       ="; USING F$; XO; : PRINT TAB(35); "ORTALAMA
="; USING F$; XORT 580 PRINT "STANDART SAPMA ="; USING F$; SSX; : PRINT
TAB(35); "STANDART SAPMA ="; USING F$; SX 590 PRINT "STANDART HATA  =";
USING F$; SSHX; : PRINT TAB(35); "STANDART HATA  ="; USING F$; SHX 600
PRINT "ORTANCA DEĞER  ="; USING F$; OD; : PRINT TAB(35); "ORTANCA DEĞER
="; USING F$; ODS 610 PRINT STRING$(60, "="): PRINT : PRINT
620 PRINT "ELDE EDILEN FREKANS DAGILIMI SIZCE UYGUNMU (E/H)";
630 INPUT " ", S$: IF S$ = "E" OR S$ = "e" THEN 645 ELSE 640
640 IF S$ = "H" OR S$ = "h" THEN 170 ELSE 620
645 T2$ = TIME$: PRINT : PRINT : PRINT
646 PRINT "İŞLEMİN BAŞLAMA ZAMANI  ", T1$
647 PRINT "İŞLEMİN SONLANMA ZAMANI ", T2$
648 RETURN
1000 RANDOMIZE 1111
FOR I = 1 TO N
R1(I) = RND
X1#(I) = B * (-LOG(R1(I))) ^ (1 / C)
TOP# = TOP# + X1#(I): TOP2# = TOP2# + X1#(I) ^ 2
NEXT
RETURN
```

ÖZGEÇMİŞ

1967 yılında Eskişehir'de doğdu. İlkokulu 1978 yılında bitirdi. 1984 yılında ortaöğretimini Eskişehir'de tamamlayarak 1985 yılında Anadolu Üniversitesi Fen Edebiyat Fakültesi İstatistik Bölümü'ne girdi. Bu bölümden 1989 Haziran döneminde mezun oldu. 1991 yılında Anadolu Üniversitesi Tıp Fakültesi Biyoistatistik Bilim Dalı'na Yüksek Lisans Öğrencisi olarak başladı. Halen Anadolu Üniversitesi Tıp Fakültesi Biyoistatistik Bilim Dalı'nda görevini sürdürmektedir.