ÇEMBER - YILDIZIL
ve
ÇEMBER - KONVEKS
FONKSİYONLAR

Adnan İlerçi

(Doktora Tezi)

İSTANBUL - 1985

Seminer ve derslerde , ilgi ve teşviklerini gördüğüm , Sayın Hocam , Prof.Dr. Suzan KAHRAMANER'e ; danışmanlık ve tez yöneticiliğini üstlenen , yazdıklarımı tek tek inceleyerek tavsiyelerde bulunan , Sayın Doç.Dr. Yusuf AVCI'ya teşekkürü bir borç bilirim .

İÇİNDEKİLER

0 . GİRİŞ

Düzlemde , bir bölge üzerinde tanımlı bire-bir fonksiyonlara " yalınkat " denmesi alışılagelmiştir . Özel olarak ; birim daire bölge $B=\{z:|z|<1\}$ ismini verdiğimiz B içinde analitik fonksiyonlar sınıfı H(B) , bu sınıfın

$$f(0)=f'(0)-1=0$$

koşulunu sağlayan fonksiyonlardan oluşan alt sınıfı " normallenmiş analitik fonksiyonlar " sınıfı N(B) olmak üzere ; N(B) nin yalınkat olan fonksiyonlardan ibaret alt kısmına da " yalınkat fonksiyonlar sınıfı " denir ve S ile gösterilir .

Bu sınıf ile,ortaya çıkışı olan 1913 lerden beri bir çok matematikçi ilgilenmiş , doğrudan yapılan çalışmalardan ziyade, resim bölgelerinin geometrileri ile tanımlanmış fonksiyonlardan oluşan alt sınıflarla ilgilenilmiştir . Gerçekten , geometrik yapısı iyi bilinen düzlem bölgelerini resim bölgesi kabul eden fonksiyonlar hakkında , bölgenin geometrisinden gelen bir çok özellik elde edilebilmektedir . Bu konuda en yaygın örnekler ; yıldızıl ve konveks bölgeler ile yıldızıl ve konveks fonksiyonlardır :

> " Her noktası ile birlikte bu noktayı orijine birleştiren doğru parçasını da ihtiva eden bölgeye yıldızıl ; her hangi iki noktası ile birlikte bu noktaları birleştiren doğru parçasını da bulunduran bölgeye konveks denir ."

Resim bölgesi f(B) , yıldızıl ise , $f\in N(B)$ fonksiyonuna yıldızıl ; f(B) konveks ise , $f\in N(B)$ fonksiyonuna konveks fonksiyon denir . Bu fonksiyonların S sınıfına ait olduğu bilinmektedir . Bu fonksiyonlarla ilgili binlerce çalışma yapılmış , çeşitli şekillerde genelleştirmelere gidilmiştir . Örneğin ; orijin yerine bölgenin başka bir w_0 noktası alınarak , w_0 noktasına göre yıldızıl bölge ve fonksiyonlar tanımlanmıştır ; sınır noktasına göre yıldızıllıktan bahsedilmiştir . Bir doğrultuda yıldızıllık ve konvekslik kavramları ortaya atılmıştır . Bunlar geometrik olarak yapılan genelleştirmelerdir . Ayrıca , analitik olarak α-yıldızıllık , α-konvekslik gibi genellemeler de vardır .

Bunların yanında , Rahmanov [13] tarafından 1954 yılında altı yeni tür yıldızıllık ve konvekslik tanımlanmıştır . Avhadiev ve Aksent'ev [2] çalışmalarında bunlara yer vermişler .

Biz de bu çalışmamızda , yıldızıl ve konveks bölge kavramlarını , doğru parçası yerine bir çember yayı kullanarak genelleştirdik . Bu genelleştirmenin doğal sonucu olarak ortaya çıkan fonksiyonları inceledik . Tanımda , çember yayını tek türlü belirlemek için , çemberlerin bölge dışındaki aynı bir w noktasından geçmelerini şart koştuk . Böylece , tanımladığımız bu yeni fonksiyonlara " çember-yıldızıl " adını vererek , ait oldukları sınıfı $CS^*(w)$ ile gösterdik ; benzer şekilde , "çember-konveks " adını verdiğimiz fonksiyonların sınıfını da CK(w) ile gösterdik .

Bu doktora çalışmasının özünü , yukarıda belirtilen yeni fonksiyon sınıflarının daha önceki sınıflarla ilişkileri ve bunların kendi doğal yapılarının sistematik bir şekilde incelenmesinden ortaya çıkarılan sonuçlar oluşturmaktadır .

Çalışmamıza temel olacağı için , öncelikle , 1.Bölüm'de yıldızıl ve konveks fonksiyonların karaterizasyonunda rol oynayan , B de analitik , gerçel kısmı pozitif ve $p(0)=1$ olan fonksiyonların ; 2.Bölüm'de yıldızıl ve konveks fonksiyonların önemli özelliklerini hatırlattık . Bu bölümler için Pommerenke [11] , Schober [12] , Duren [5] veya Goodman [7]'ın hepsi aynı " Univalent Functions " adını taşıyan kitaplarında ilgili bölümlere bakılabilir . 3.Bölüm'de çember-yıldızıl bölge ve çember-yıldızıl fonksiyon tanımlarını verdik . Bu bölümün birici kısmında , çember-yıldızıl fonksiyonların analitik olarak nasıl karakterize edilebildiklerini , yıldızıl fonksiyonlarla ilgilerini , değişik dönüşümler altındaki davranışlarını inceledik . Bu bölümün ikinci kısmında ise , çember-yıldızıl fonksiyonların kendine özgü bir takım distorsiyonlarını elde ettik . Son bölüm olan 4.Bölüm'de çember-konveks bölge ve fonksiyon tanımlarını , bu tanımların ilk sonuçlarını sıraladık .

1.Bölüm

POZİTİF GERÇEL KISIMLI FONKSİYONLAR

Birim dairede analitik , gerçel kısmı pozitif ve $z=0$ noktasında 1 değerini alan fonksiyonların sınıfını

$$\mathbb{P}=\{p\in H(B) : \operatorname{Re} p(z) > 0 , p(0)=1\}$$

şeklinde tanımlayacağız . Bu sınıfın temel özelliklerini sıralamadan önce " subordinasyon " ilkesinden bahsedelim .

TANIM 1.1. (SUBORDİNASYON) f ve F birim dairede analitik fonksiyonlar ve F yalınkat olsun :

$$f(0)=F(0) \quad \text{ve} \quad f(B)\subset F(B)$$

ise " f fonksiyonu , F fonksiyonuna subordine " denir ve bu ilişki kısaca

$$f\prec F$$

şeklinde ifade edilir .

Bu tanımın ilk sonuçları olarak aşağıdaki teoremi elde edebiliriz .

TEOREM 1.1. $f\prec F$ olsun : o takdirde ;

(1) B içinde analitik ve Schwarz Lemmasını gerçekleyen öyle bir b fonksiyonu vardır ki

$$f(z)=F(b(z))$$

yazılabilir .

(2) $$|f'(0)| \leqslant |F'(0)|$$

olup , eşitlik hali , $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere

$$b(z) = e^{ia} z$$

fonksiyonu için var olur .

(3) Her $0 < r < 1$ için , $B_r = \{z : |z| < r\}$ ise ,

$$f(B_r) \subset F(B_r) \quad \text{dır .}$$

Hemen arkasından , $\mathbb{P}$ sınıfına ait bütün fonksiyonlar

$$p(z) = \frac{1+z}{1-z}$$

fonksiyonuna subordine oldukları için , aşağıdaki distorsiyon teoremi verilebilir .

TEOREM 1.2. $p \in \mathbb{P}$ olsun :

(1) Her $z = re^{it} \in B$ için ,

$$\frac{1-r}{1+r} \leqslant |p(z)| \leqslant \frac{1+r}{1-r} \quad ; \quad \text{ve} \quad ,$$

(2) $$|p'(0)| \leqslant 2 \quad \text{dir .}$$

Her iki halde de eşitlikler , $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere ,

$$p(z) = \frac{1+e^{ia}z}{1-e^{ia}z}$$

fonksiyonu için söz konusudur .

Harmonik fonksiyonlar teorisinden yararlanarak , $\mathbb{P}$ sınıfının elemanları için bir integral gösterilişi bulunabilir.

TEOREM 1.3. (HERGLOTZ) Her $p \in \mathbb{P}$ için , öyle negatif olmayan biricik $u(t)$ fonksiyonu vardır ki u artan ve $u(2\pi)-u(0)=1$ olup , her $z \in B$ için

$$p(z)=\int_0^{2\pi} \frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\, du(t)$$

yazılabilir .

TEOREM 1.4. $p(z) = 1 + \sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$ fonksiyonu $\mathbb{P}$ sınıfına ait ise , $n=1,2,\ldots$ için ,

$$|c_n| \leqslant 2 \qquad \text{dir .}$$

Eşitlik hali , $a \in \mathbb{R}$ olmak üzere ,

$$p(z)=\frac{1+e^{ia}z}{1-e^{ia}z}$$

fonksiyonu tarafından elde edilir .

2.Bölüm

YILDIZIL VE KONVEKS FONKSİYONLAR

Birim dairede analitik ve normallenmiş f fonksiyonuna, resim bölgesi $f(B)$ yıldızıl ise, " yıldızıl fonksiyon " denir. Geometrik olarak, $0 \leqslant t \leqslant 1$ olmak üzere

$$\text{her } w \in f(B) \text{ için } tw \in f(B)$$

oluyorsa, f fonksiyonuna yıldızıldır denir. (Burada tanım özel halde verilmiş oluyor. Daha genel olarak, bir bölge her noktası ile birlikte bu noktayı bölgenin sabit bir w_0 noktasına birleştiren doğru parçasını da ihtiva ediyorsa, bu bölgeye " w_0 noktasına göre yıldızıl " denir. Biz $w_0 = 0$ özel halini almış oluyoruz.) Gelenek olduğu üzere,

$$S^* = \{ f \in N(B) : f(B) \text{ yıldızıl bölge} \}$$

ile yıldızıl fonksiyonlar sınıfı gösterilecektir. Bu sınıf analitik olarak aşağıdaki gibi karakterize edilebilir.

TEOREM 2.1. $f \in S$ ise, aşağıdakiler denktirler :

(1) $f \in S^*$ dir.

(2) Her $0 < r < 1$ için $f(B_r)$ yıldızıl bir bölgedir.

(3) $zf'(z)/f(z)$ olarak tanımlanan fonksiyon $\mathbb{P}$ sınıfına aittir.

TEOREM 2.2. $f \in N(B)$ olsun : f fonksiyonunun yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul,

$$f(z) = z \exp\left(-2\int_0^{2\pi} \log(1-e^{-it}z)\, du(t)\right), \quad z \in B,$$

olacak şekilde, artan, negatif olmayan ve

$u(2\pi)-u(0)=1$ şartını gerçekleyen bir u fonksiyonunun bulunmasıdır . Bu fonksiyon varsa tek türlü belirlidir .

Yıldızıl fonksiyonların analitik karakterizasyonu yalınkat olduklarını gösterir , dolayısı ile de

$$S^* \subset S$$

olur .

TEOREM 2.3. $f \in N(B)$ olsun : o takdirde , her $z \in B$ için ,

$$\operatorname{Re}\left\{z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > 0$$

ise , f fonksiyonu yalınkattır .

Yukardaki hatırlatmaların ışığı altında , bazan S^* olarak doğrudan doğruya

$$\{f \in S : f(B) \text{ yıldızıl}\}$$

sınıfı alınır .

Birim dairede analitik ve normallenmiş f fonksiyonuna , resim bölgesi f(B) konveks ise , " konveks fonksiyon " denir. Geometrik olarak , $0 \leqslant t \leqslant 1$ olmak koşulu ile

$$\text{her } w_1, w_2 \in f(B) \text{ için } tw_1 + (1-t)w_2 \in f(B)$$

oluyorsa , f fonksiyonuna konvekstir denir . Kısaca bu sınıf

$$K = \{ f \in N(B) : f(B) \text{ konveks bölge} \}$$

olarak gösterilir . Gene geometrik olarak derhal görüleceği gibi , konveks bir fonksiyon yıldızıldır , dolayısı ile de konveks fonksiyonlar'da yalınkat olup ,

$$K \subset S^* \subset S$$

sırası vardır .

Analitik olarak , konveks fonksiyonlar aşağıdaki gibi belirlenirler .

TEOREM 2.4. $f \in S$ ise , aşağıdakiler denktirler .

(1) $f \in K$ dır .

(2) Her $0 < r < 1$ için , $f(B_r)$ konveks bir bölgedir .

(3) $1 + zf''(z)/f'(z)$ olarak tanımlanan fonksiyon $\mathbb{P}$ sınıfına aittir .

(4) $zf'(z)$ fonksiyonu yıldızıldır .

Analitik karakterizasyonları da konveks fonksiyonların yalınkat olduklarını gösterir .

TEOREM 2.5. $f \in N(B)$ olsun : o takdirde , her $z \in B$ için ,

$$\mathrm{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)}\right\} > 0$$

ise , f fonksiyonu yalınkattır .

TEOREM 2.6. $f \in K$ olsun : o takdirde , her $z \in B$ için , her $\zeta \in B$ için ,

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{2zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right\} > 0$$

eşitsizliği gerçeklenir .

Yalınkat fonksiyonlar sınıfı S için var olan distorsiyonlar , yıldızıl ve konveks fonksiyonlar için de söz konusu olacaklardır .

TEOREM 2.7. $f \in S$ ise ; her $z = re^{it} \in B$ için ,

(1) $$\frac{1-r}{(1+r)^3} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1+r}{(1-r)^3} ,$$

(2) $$\frac{r}{(1+r)^2} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{(1-r)^2} ,$$

(3) $$\frac{1-r}{1+r} \leqslant \left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant \frac{1+r}{1-r} .$$

Bütün bu eşitsizlikler erişilebilirdir : Köebe fonksiyonu , ya da onun bir rotasyonu için eşitlikler sağlanır .

(Bir f fonksiyonu için elde edebileceğimiz yeni

$$f_a(z) = e^{ia} f(e^{-ia} z)$$

fonksiyonuna , " f fonksiyonunun a-rotasyonu " veya " f fonksiyonunun a-dönmesi " diyeceğiz ; burada $a \in (0,2\pi)$ dir . Örneğin ; Köebe fonksiyonu

$$k(z) = \frac{z}{(1-z)^2}$$

için $k_\pi(z) = \frac{z}{(1+z)^2}$ olacaktır .)

Ancak konveks fonksiyonlar için yukardaki eşitsizlikler erişilebilir olmadıklarından , konveks fonksiyonlar için başka distorsiyonlar verilebilir .

TEOREM 2.8. $f \in K$ ise ; her $z \neq re^{it} \in B$ için ,

(1) $$\frac{1}{(1-r)^2} \leqslant |f'(z)| \leqslant \frac{1}{(1-r)^2} ,$$

(2) $$\frac{r}{1-r} \leqslant |f(z)| \leqslant \frac{r}{1-r} .$$

Her iki eşitsizlik de $\ell(z) = \frac{z}{1-z}$ fonksiyonu veya bu fonksiyonun bir dönmesi için erişilebilirdir .

$f(z) = -f(-z)$ koşulunu gerçekleyen , birim dairede analitik fonksiyona , gerçel fonksiyonlarda olduğu gibi bir "tek fonksiyon" denir . Bu tip bir analitik fonksiyonun seri gösteriliminde z nin sadece tek kuvvetleri yer alır .

TEOREM 2.9. $f(z) = z + \sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$ fonksiyonunu göz önüne alalım :

(1) f yıldızıl bir fonksiyon ise , $n = 2,3,\ldots$ için ,

$$|a_n| \leqslant n$$

olup , eşitlik hali Köebe fonksiyonu için söz konusudur .

(2) f tek , yıldızıl bir fonksiyon ya da konveks bir fonksiyon ise , $n = 2,3,\ldots$ için,

$$|a_n| \leqslant 1$$

olup , eşitlik hali ;
tek , yıldızıl fonksiyonlar için $K(z) = \frac{z}{1-z^2}$;
konveks fonksiyonlar için $\ell(z) = \frac{z}{1-z}$
fonksiyonları tarafından sağlanır .

Ayrıca , yıldızıl fonksiyonların katsayıları için erişilebilir

$$-n \leqslant \mathrm{Re}\, a_n \leqslant n \quad ;$$

tek , yıldızıl ve konveks fonksiyonların katsayıları içinse gene erişilebilir

$$-1 \leqslant \mathrm{Re}\, a_n \leqslant 1$$

eşitsizlikleri geçerlidir .

3.Bölüm

ÇEMBER-YILDIZIL FONKSİYONLAR

Çalışmamızın esasını oluşturan bu bölümde , yıldızıllık kavramını , doğru parçası yerine bir çember yayı alarak nasıl genelleştireceğimizi söyleyecek ; tanımları ve ilk sonuçlarını vereceğiz .

3.1. ÇEMBER-YILDIZIL FONKSİYONLAR VE ÖZELLİKLERİ :

TANIM 3.1.1. Düzlemde , orijini içinde bulunduran bir bölgeyi ve bu bölge dışındaki bir w noktasını göz önüne alalım : Bu bölgenin her noktası orijine w noktasından geçen bir çemberin bölge içinde kalan bir yayı ile birleştirilebiliyorsa , bu bölgeye ,

" w noktası için çember yayına göre yıldızıl "

diyeceğiz . Doğal olarak $w \neq 0$ dır .

Böyle bir bölgenin her noktası orijine , w noktasından da geçen bir çemberin -ki tek türlü belirlidir - bir yayı aracılığı ile tamamen bölge içinde kalınarak birleştirilebilir. Hemen anlaşılacağı gibi $w = \infty$ için , çember yayına göre yıldızıl bir bölge , yıldızıl bir bölgeden başkası değildir .

TANIM 3.1.2. Birim dairede analitik ve normallenmiş bir fonksiyon f olsun : Üstelik w değeri birim dairenin hiçbir noktasında f tarafından alınmasın. İşte bu fonksiyon için $f(B)$, w noktası için çember yayına göre yıldızıl bir bölge ise , f fonksiyonuna ,

" w noktası için çember yayına göre yıldızıl "

diyeceğiz . Bu fonksiyonların sınıfını $CS^{*}(w)$ ile gösteréceğiz .

Bu çalışma boyunca - aksi söylenmedikçe - fonksiyonlar daima birim daire B içinde analitik ve normallenmiş olarak düşünüleceklerdir . Çok uzun olan

" w noktası için çember yayına göre yıldızıl "

deyimi yerine

" w-çember yıldızıl "

ya da , adını anmadığımız halde , w dan başka bir noktanın düşünülmeyeceği

" çember-yıldızıl "

deyimini kullanacağız .

TEOREM 3.1.1. w değerini almayan bir $f \in N(B)$ fonksiyonunu göz önüne alalım : ancak ve ancak

$$\frac{wf(z)}{w-f(z)}$$

şeklinde tanımlanabilen fonksiyon yıldızıl ise , f çember-yıldızıl bir fonksiyondur .

İSPAT : Önce $\Phi(\overline{w}) = \dfrac{w\overline{w}}{w-\overline{w}}$ fonksiyonunu ele alalım .

Bu bir Moebius dönüşümü olup , w noktası dışında düzlemin her noktasında analitik ve

$$\Phi(0) = 0 \quad , \quad \Phi'(0) = 1 \quad \text{dir .}$$

Üstelik , Φ fonksiyonu , w ve orijinden geçen çemberleri konform olarak , gene orijinden geçen doğrulara dönüştürür .

Şimdi , f çember-yıldızıl bir fonksiyon olsun : $\Phi(f)$ fonksiyonunun yıldızıl olacağını iddia ediyoruz . Bu amaçla $\Phi(f)(B)$ nin bir ζ noktasını ele alırsak , bu noktanın Φ tarafından verilen ters görüntüsü W ise , $W \in f(B)$ dir . f fonksiyonu çember-yıldızıl olduğundan W noktasını orijine bağlayan(ve w dan geçen)bir çember yayı tamamen $f(B)$ içinde kalır ki , bu çember yayının Φ altındaki görüntüsü ζ noktasını orijine birleştiren bir doğru parçası olup , bu doğru parçası bütünü ile $\cancel{\Phi(f)(B)}$ içindedir . Bu ise ,

$$\Phi(f)(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)}$$

fonksiyonunun yıldızıl olduğunu gösterir .

Tersine , $\Phi(f)$ yıldızıl bir fonksiyon olsun : $W \in f(B)$ noktasından orijine giden (w dan da geçen) çember yayının Φ altındaki resmi , orijinden çıkan ve $\Phi(W)$ noktasından geçen bir ışındır , ve bu ışının orijin ile $\Phi(\overline{W})$ noktası arasındaki parçası $\Phi(f)(B)$ içinde kalacaktır . Dolayısı ile , bu ışının ters görüntüsü olan söz konusu ettiğimiz orijini W noktasına birleştiren çember yayı da $f(B)$ içinde kalmak zorundadır . Bu ise , f fonksiyonunun çember-yıldızıl olması demektir . Böylece ispat tamamlanmış olur .

Bu teoremin hemen arkasından çember-yıldızıl fonksiyonlar için gerçeklenen bir takım özellikleri sıralayabiliriz .

SONUL . f çember-yıldızıl bir fonksiyon ise ;

(1) $\quad f(z) = \dfrac{wg(z)}{w+g(z)}$ olacak biçimde bir yıldızıl

g fonksiyonu vardır .

(2) f fonksiyonu yalınkattır .

Tersine ; g birim dairede $-w$ değerini almayan yıldızıl bir fonksiyon olsun : O takdirde ;

(3) $f(z)=\dfrac{wg(z)}{w+g(z)}$ fonksiyonu çember-yıldızıl olacaktır .

İSPAT : (1) Önceki teoremden , $\dfrac{wf(z)}{w-f(z)}$ yıldızıl bir fonksiyondur ; buna $g(z)$ dersek , buradan $w-f(z)\neq 0$ olduğu da dikkate alınarak , $f(z)$ yukarıda verildiği gibi bulunur . (Burada ,

$$w+g(z)=w^2/(w-f(z))$$

olduğundan , g birim dairede $-w$ değerini alamaz , aksi takdirde $w=0$ olurdu .)

(2) $z_1, z_2 \in B$ için $f(z_1)=f(z_2)$ olsun : (1) den ,

$$wg(z_1)(w+g(z_2))=wg(z_2)(w+g(z_1))$$

olur ki , buradan da

$$w^2g(z_1)=w^2g(z_2)$$

ve sonuçta

$$g(z_1)=g(z_2)$$

elde edilir . Oysa , g yıldızıl bir fonksiyon olduğundan yalınkattır ve dolayısı ile de $z_1=z_2$ olur ; bu ise f fonksiyonunun yalınkat olması demektir .

(3) Önce $w-f(z)=w^2/(w+g(z))$ sıfırdan farklıdır . Teoremin üçüncü şıkkında $f(z)$ için verilen eşitlikten $g(z)$,

$$g(z)=\frac{wf(z)}{w-f(z)}$$

olarak çözülebilir .

Teorem 3.1.1. den (g yıldızıl olduğu için) , f fonksiyonunun çember-yıldızıl bir fonksiyon olduğu sonucu çıkarılır .

TEOREM 3.1.2. Birim dairede w değerini almayan f fonksiyonunun çember-yıldızıl olması için gerek ve yeter koşul , her $z \in B$ noktasında ,

$$\mathrm{Re}\left\{ \frac{w}{w-f(z)} \, z\frac{f'(z)}{f(z)} \right\} > 0$$

olmasıdır .

İSPAT : Teorem 3.1.1. den , ancak ve ancak $g(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)}$ fonksiyonu yıldızıl ise , f fonksiyonu çember-yıldızıl olur . Öte yandan , Teorem 2.1. e göre , g fonksiyonunun yıldızıl olabilmesi için , her $z \in B$ noktasında

$$\mathrm{Re}\left\{ z\frac{g'(z)}{g(z)} \right\} > 0$$

koşulunun gerçeklenmesi gerek ve yeterdir . Burada hemen hesaplanacağı gibi ,

$$z\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{w}{w-f(z)} \, z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

bağıntısı vardır . Böylece , teoremde ileri sürülen koşul gerek ve yeter bir koşuldur .

Şimdi , bazı geometrik gözlemlerde bulunabiliriz :

f çember-yıldızıl bir fonksiyon olsun . O takdirde , orijinden çıkan ve w noktasından geçen ışının , w dan sonsuza giden kısmı f(B) bölgesi içinde kalamaz . Aksi halde söz konusu ışının w dan sonsuza giden parçası üzerinde f(B) ye ait bir nokta bulunsaydı , bu noktayı orijine birleştiren ve w noktasından geçen çemberin bu nokta ile orijin arasında kalan yayı tamamen f(B) içinde kalacaktı . Oysa burada söz konusu çember , bahsi geçen ışından başkası değildir ve bu doğru parçasının orijin ile işin başında ele aldığımız noktayı birleştiren parçası tamamiyle f(B) içinde kalamaz ; w bu doğru parçası üzerinde olup , f(B) bölgesine ait değildir . Başka deyimle ,

$$D = \{ \overline{W} : \overline{W} \neq tw \ , \ t \geqslant 1 \}$$

olmak üzere , $f(B) \subset D$ olacaktır .

$F(0) = 0$ ve $F(B) = D$ koşullarını sağlayan , B içinde analitik bir F fonksiyonunu belirlemeye çalışalım :

$\zeta(\overline{W}) = -\dfrac{\overline{W}}{4w}$ fonksiyonu , D bölgesini Köebe fonksiyonu k nın resim bölgesi üzerine resmeder ; yani ,

$$\zeta(D) = \{ \zeta : \zeta \neq -\tfrac{1}{4}t \ , \ t \geqslant 1 \}$$

olur . $k(z) = \dfrac{z}{(1-z)^2}$, Köebe fonksiyonunu göstermek üzere , $k = \zeta o F$ elde edilir ki , buradan da $F = \zeta^{-1} ok$ bulunur . Daha açık olarak ,

$$F(z) = -\,4w\,\frac{z}{(1-z)^2}$$

şeklinde belirlenir .

Bu arada , çember-yıldızıl fonksiyonların yalınkat olmalarından dolayı , $|w| \geqslant 1/4$ olacağını söyleyelim .

Böylece aşağıdaki teoremi verebiliriz .

TEOREM 3.1.3. f çember-yıldızıl bir fonksiyon ise Schwarz Lemmasını gerçekleyen ve $b'(0)=-1/(4w)$ olan öyle bir b fonksiyonu vardır ki ,

$$f(z)=-4w\frac{b(z)}{(1-b(z))^2}$$

şeklinde yazılabilir .

İSPAT : Gözlemlerimizden $f \prec F$ dir . Dolayısı ile ,

$$b(z)=(F^{-1}of)(z)$$

Schwarz Lemmasını sağlar ve $F'(0)=-4w$ olduğundan $b'(0)=-\frac{1}{4w}$ dır . (Üstelik b yalınkat , ancak normallenmemiş bir fonksiyondur .) Böylece ,

$$f(z)=F(b(z))$$

ileri sürüldüğü biçimde elde edilir .

Şimdi , akla hemen gelebilecek olan şu soruyu soralım : Verilen her b fonksiyonu için , yukardaki şekilde yazılabilen f fonksiyonu çember-yıldızıl mıdır ?

Bu soruya aşağıdaki teorem bir cevap olacaktır .

TEOREM 3.1.4. b Schwarz Lemmasını gerçekleyen ve $b'(0)=-1/(4w)$ olan bir fonksiyonu göstermek üzere;

$$f(z)=-4w\frac{b(z)}{(1-b(z))^2}$$

fonksiyonunu göz önüne alalım : ancak ve ancak , her $z \in B$ için ,

$$\mathrm{Re}\left\{ z\frac{b'(z)}{b(z)}\ \frac{1-b(z)}{1+b(z)}\right\} > 0$$

ise , f çember-yıldızıl bir fonksiyondur .

İSPAT : Teorem 3.1.1. den , ancak ve ancak $g(z)=\frac{wf(z)}{w-f(z)}$ yıldızıl bir fonksiyon ise , f çember-yıldızıldır . Burada , f(z) yerine teoremde verilen şekli yazılırsa , kolayca ,

$$g(z) = -4w\frac{b(z)}{(1+b(z))^2}$$

olduğu ve dolayısı ile de ,

$$z\frac{g'(z)}{g(z)} = z\left(\frac{b'(z)}{b(z)} - 2\frac{b'(z)}{1+b(z)}\right) = z\frac{b'(z)}{b(z)}\ \frac{1-b(z)}{1+b(z)}$$

olacağı hesaplanır . Böylece , teoremdeki koşulun gerekli olduğu görülür .

Tersine ,

$$\mathrm{Re}\left\{ z\frac{b'(z)}{b(z)}\ \frac{1-b(z)}{1+b(z)}\right\} > 0$$

ise , son bulduğumuz denklikten g fonksiyonunun yıldızıl olduğu görülür ki , gene Teorem 3.1.1. gereği f nin çember-yıldızıl bir fonksiyon olduğu sonucuna varılır ; bu bize koşulun yeterli olduğunu gösterir .

Bunlara ek olarak şu sonuçları da sıralayabiliriz ./

SONUL . Schwarz Lemmasını sağlayan bir b fonksiyonu her $z \in B$ için ,

$$-4w\, b(z) = z(1+b(z))^2 \exp\left(-2\int_0^{2\pi} \log(1-e^{-it}z)\, du(t)\right)$$

denklemini sağlıyorsa - burada , u monoton artan ve negatif olmayan gerçel bir fonksiyondur -

$$f(z) = -4w\,\frac{b(z)}{(1-b(z))^2}$$

fonksiyonu çember-yıldızıldır .

Tersi de doğrudur . Üstelik , bu durumda

$$g(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)}$$

yıldızıl fonksiyonu , $G(z) = -4wz/(1+z)^2$ fonksiyonuna subordinedir .

İSPAT : Verilen denklemi sağlayan b fonksiyonu için

$$-4w\,\frac{b(z)}{(1+b(z))^2} = z \exp\left(-2\int_0^{2\pi} \log(1-e^{-it}z)\, du(t)\right)$$

eşitliği B nin her noktasında var olur . Bu eşitliğin sağ tarafı , Teorem 2.2. ye göre bir yıldızıl fonksiyon olup buna g(z) dersek ,

$$g(z) = -4w\,\frac{b(z)}{(1+b(z))^2}$$

yıldızıl ve $-w$ değerini almayan bir fonksiyondur .
(g , $-w$ değerini alsaydı , b de 1 değerini alırdı)
Kolayca görülebilir ki ,

$$\frac{wg(z)}{w+g(z)} = f(z)$$

dir ve bu ilişki f fonksiyonunun çember-yıldızıl olduğunu gösterir .

Tersine , f teoremde verildiği gibi ise , bu çember-yıldıza karşılık gelen

$$g(z)=\frac{wf(z)}{w-f(z)}=-4w\,\frac{b(z)}{(1+b(z))^2}$$

fonksiyonu yıldızıl olduğundan , Teorem 2.2. de bahsi geçen integral gösterilişe sahiptir ; dolayısı ile de b fonksiyonu

$$-4w\ b(z)=z(1+b(z))^2\exp\left(-2\int_0^{2\pi}\log(1-e^{-it}z)\ du(t)\right)$$

şeklinde bir denklemi sağlar .

Burada yazdığımız şekli ile , Teorem 1.2. den , g fonksiyonunun

$$G(z)=-4w\,\frac{z}{(1+z)^2}$$

fonksiyonuna subordine olduğu görülür .

ALT DAİRE BÖLGELERDE ÇEMBER-YILDIZILLIK ve DÖNME-BÜZÜLME DÖNÜŞÜMÜ :

Yıldızıl fonksiyon birim dairenin alt daire bölgelerini gene yıldızıl olan bölgelere resmeder . Çember-yıldızıl fonksiyonlar da bu özelliğe sahiptirler . Şöyle ki ; eğer f çember-yıldızıl bir fonksiyon ve

$0 < r < 1$ olmak koşulu ile $B_r = \{ z : |z| < r \}$

ise , $f(B_r)$ çember-yıldızıl bir bölgedir :

" Gerçekten , hemen w noktasının $f(B_r)$ dışında kalacağını ; daha önce tanımladığımız $g = \Phi(f)$ fonksiyonunun yıldızıl olmasından ötürü , $g(B_r)$ nin yıldızıl bir bölge olacağını söyleyebiliriz . Şimdi , $\overline{W} \in f(B_r)$ ise , bu noktanın Φ altındaki görüntüsü $\Phi(\overline{W}) \in g(B_r)$ olup , burada $\Phi(\overline{W})$ noktasını orijine birleştiren doğru parçası $g(B_r)$ içinde kalır ki , bu doğru parçasının Φ altındaki ters resmi , $\overline{W}$ noktasını orijine bağlayan - w noktasından geçen - çemberin bir yayıdır ; bu çember yayı , o fonksiyonunun konform oluşundan dolayı $f(B_r)$ içinde kalacaktır . Her $\overline{W} \in f(B_r)$ için bu gerçeği söyleyebileceğimizden , $f(B_r)$ bölgesinin çember-yıldızıl olacağı anlaşılır . "

Şimdi , $|\zeta| \leq 1$ olmak üzere , yıldızıl bir g fonksiyonu için aşağıdaki yeni fonksiyonu göz önüne alalım :

$$G(z) = \frac{g(\zeta z)}{\zeta} \quad , \quad (\zeta \neq 0) \quad .$$

Burada , z ye göre türev alınırsa , derhal $G'(z) = g'(\zeta z)$ ve dolayısı ile , G fonksiyonu normallenmiş olup ,

$$z\frac{G'(z)}{G(z)} = \zeta z\frac{g'(\zeta z)}{g(\zeta z)}$$

eşitliği sağlanır ; $|\zeta z| \leqslant |z| < 1$ olduğu dikkate alınırsa G fonksiyonunun da yıldızıl olduğu anlaşılır . Benzer dönüşüm çember-yıldızıl fonksiyonlar için biraz farklı davranır .

LEMMA 3.1.1. $f \in CS^*(w)$ ise , her $\zeta \in B-\{0\}$ için ,

$$F(z) = \frac{f(\zeta z)}{\zeta}$$

fonksiyonu $CS^*(\frac{w}{\zeta})$ sınıfına aittir .

İSPAT : Basit bir hesapla ,

$$\frac{(\frac{w}{\zeta})}{(\frac{w}{\zeta})-F(z)}\, z\frac{F'(z)}{F(z)} = \frac{w}{w-f(\zeta z)}\, \zeta z\frac{f'(\zeta z)}{f(\zeta z)}$$

bağıntısının var olduğu ve dolayısı ile Teorem 3.1.2.den F fonksiyonunun $\frac{w}{\zeta}$ noktası için çember-yıldızıl olduğu sonucu çıkarılır . ($|\zeta z| \leqslant |z| < 1$ olduğuna dikkat)

Yukarıda bahse konu olan dönüşüm bize , g yıldızıl bir fonksiyon olduğu zaman ,

$$g(z) = z + a_2 z^2 + \ldots$$

açılımındaki a_2 katsayısının , g bütün yıldızıl fonksiyonları dolaştığı zaman , $|Z| \leqslant 2$ dairesini tamamen dolduracağını söyler . Başka deyimle , yıldızıl fonksiyonlar için a_2 nin değişim bölgesi $|Z| \leqslant 2$ dairesidir ; bu dairenin her a noktası için $a_2 = a$ olacak şekilde bir yıldızıl fonksiyon bulunabilir . Gerçekten , k Köebe fonksiyonunu göstermek üzere , $\zeta = a/2$ alarak elde edilecek olan yıldızıl fonksiyon

$$\frac{2}{a}\, k(\frac{a}{2}z) = z + az^2 + \ldots \text{ dir .}$$

Çember-yıldızıl bir f fonksiyonunu göz önüne alalım : öyle ki , seriye açılımı

$$f(z)=z+a_2z^2+\ldots$$

şeklinde olsun . O takdirde uygun bir yıldızıl g fonksiyonu vardır ve bu fonksiyon aracılığı ile

$$f(z)=\frac{wg(z)}{w+g(z)}$$

yazılabilir . Şimdi , $g(z)=z+A_2z^2+\ldots$ ise , buradan basit bir hesapla

$$f(z)=z+(A_2-\frac{1}{w})z^2+\ldots$$

olacağı görülür . Böylece ,

$$a_2=A_2-\frac{1}{w}$$

katsayılar arası bir ilişki olarak elde edilir . Öncelikle , f ve g fonksiyonlarının her ikisi de yalınkat olduğundan

$$|a_2|\leqslant 2 \quad \text{ve} \quad |A_2|\leqslant 2$$

olmak zorundadır .

Öte yandan , $w=|w|e^{i\alpha}$ dersek , $|w|\geqslant\frac{1}{4}$ olduğundan $\left|\frac{1}{w}\right|\leqslant 4$ olur . $2<\left|\frac{1}{w}\right|\leqslant 4$ olduğunu varsayalım : o takdirde , a_2 , $|Z|\leqslant 2$ ile $\left|Z+\frac{1}{w}\right|\leqslant 2$ dairelerinin arakesitindedir . $\left|\frac{1}{w}\right|>2$ olduğundan , $\frac{1}{w}$ noktasının $|Z|\leqslant 2$ dairesine en yakın uzaklığından bahsedebiliriz . Bu uzaklık , orijinden çıkan ve $\frac{1}{w}$ noktasından geçen ışının $|Z|=2$ çemberini kestiği nokta $2e^{-i\alpha}$/ ile $\frac{1}{w}=\frac{1}{|w|}e^{-i\alpha}$ arasındaki uzaklıktır ; bu ise

$$\left|2e^{-i\alpha}-\frac{1}{|w|}e^{-i\alpha}\right|=\frac{1}{|w|}-2 \quad \text{dir .}$$

$A_2 = 2e^{-i\alpha}$ için a_2 nin mutlak değerce alabileceği değerin $|a_2| = |A_2 - \frac{1}{w}| = \frac{1}{|w|} - 2$ olduğuna dikkat edilecek olursa , bu değerin bir en küçük değer olacağı görülecektir . $A_2 = 2e^{-i\alpha}$ olan ve $-w$ değerini almayan yıldızıl fonksiyon Köebe fonksiyonunun α-dönmesi

$$k_\alpha(z) = \frac{z}{(1-e^{-i\alpha}z)^2}$$

olduğundan , $|a_2|$ için söz konusu en küçük değere

$$f(z) = \frac{wk_\alpha(z)}{w+k_\alpha(z)} = \frac{wz}{w(1-e^{-i\alpha}z)^2+z}$$

$$= z + (2e^{-i\alpha} - \frac{1}{w})z^2 + \ldots$$

fonksiyonu tarafından ulaşılır . Ustelik f çember-yıldızıl bir fonksiyondur .

$|a_2|$ için en büyük değer olan 2 , çember-yıldızıl bir fonksiyon olan $k_{\pi+\alpha}$ için sağlanır :

$$k_{\pi+\alpha}(z) = \frac{z}{(1+e^{-i\alpha}z)^2} = z - 2e^{-i\alpha}z^2 + \ldots \quad \text{dir .}$$

Böylece , $2 < \frac{1}{|w|} \leqslant 4$ varsayımı altında çember-yıldızıl fonksiyonların ikinci katsayılarının erişilebilir alt ve üst sınırlarını bulmuş oluyoruz . Bu sonuçları toplu yazmak istersek ; Teorem 3.1.5. i verebiliriz :

TEOREM 3.1.5. $\frac{1}{4} \leqslant |w| < \frac{1}{2}$ koşulu altında ,

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \ldots \in CS^*(w) \text{ ise ;}$$

$$\left(\frac{1}{|w|} - 2\right) \leqslant |a_2| \leqslant 2 \quad \text{olup ,}$$

eşitsizlikler erişilebilirdir .

UYARI : $|w| \geqslant \frac{1}{2}$ olduğu zaman $|a_2|$ nin sıfırdan büyük bir alt sınırını bulamayız . Gerçekten , bu durumda $\left|\frac{1}{2w}\right| \leqslant 1$ olup , $g(z) = 2w\, k(\frac{z}{2w})$ şeklindeki fonksiyon yıldızıldır ve Köebe fonksiyonu k birim dairede $-\frac{1}{2}$ değerini almadığından , bu g fonksiyonu da $-w$ değerini almaz ; üstelik ,

$$g(z) = z + \frac{1}{w} z^2 + \ldots$$

olduğundan , bu yıldızıl fonksiyonca tanımlanacak

$$f(z) = \frac{wg(z)}{w + g(z)}$$

çember-yıldızıl fonksiyonunun ikinci katsayısı

$a_2 = \frac{1}{w} - \frac{1}{w} = 0$ dır .

$|a_2|$ için , 2 , $|w| \geqslant \frac{1}{2}$ halinde de en iyi üst sınırdır .

(Bu üst sınırı $k_{\pi+\alpha}$ fonksiyonu verir .)

Yeri gelmişken , w noktasının konumuna bağlı olarak çember-yıldızıl fonksiyonların S içindeki yerinin nasıl değiştiğine bir göz atalım :

(a) $|w| = \frac{1}{4}$ ise ;

subordinasyon ilkesinden dolayı ,

$$CS^*(w) \cap S^* = \{ k_{\pi+\alpha} : \alpha = \arg w \} \quad \text{dir .}$$

(b) $\frac{1}{4} \leq |w| < \infty$ ise ;

$CS^*(w) \cap S^*$ içinde birden fazla eleman olacaktır .

(c) $w = \infty$ ise ;

bu durumda tanımda yer alan çember yayı bir doğru parçasına dönüşeceğinden , çember-yıldızıl fonksiyonlarla yıldızıl fonksiyonlar çakışırlar : yani ,

$$CS^*(\infty) = S^* \quad \text{dır .}$$

· KARE-KÖK DÖNÜŞÜMÜ :

Bilindiği gibi , $f \in S$ ise , $F(z) = \sqrt{f(z^2)}$ şeklinde tanımlanabilen " kare-kök " dönüşümü de **yalınkat** bir fonksiyon gösterir . Gerçekten , öncelikle

$$f(z) = z + a_2 z^2 + \dots \quad \text{ise,} \quad \frac{f(z^2)}{z^2} = 1 + a_2 z^2 + \dots$$

fonksiyonu B de artık sıfır olmayan bir fonksiyondur , basit bağlantılı olan birim dairede bu fonksiyonun analitik kare kökü tanımlanabilir ; üstelik bu fonksiyon bir " çift fonksiyon " dur . Bu fonksiyon aracılığı ile

$$F(z) = z\sqrt{\frac{f(z^2)}{z^2}} = z(1 + a_2 z^2 + \ldots)^{1/2} = z(1 + A_2 z^2 + \ldots)$$

olduğu ve F fonksiyonunun normallenmiş, bir " tek fonksiyon " olacağı anlaşılır .

z_1 ve z_2 , B nin her hangi iki noktası ve $F(z_1) = F(z_2)$ olsun : buradan $f(z_1^2) = f(z_2^2)$; f fonksiyonunun yalınkat olmasından da derhal $z_1 = z_2$ veya $z_1 = -z_2$ sonuçları elde edilir . Ancak , F tek fonksiyon olduğundan $z_1 = -z_2$ hali gerçekleşemez : aksi takdirde , $F(-z_2) = F(z_2)$ olacaktı ! Böylece sadece $z_1 = z_2$ sonucunu bulmamız , F fonksiyonunun yalınkat olmasından başka bir şey söylemez .

Bu dönüşümü yıldızıl fonksiyonlar için ele alalım . $g \in S^*$ olmak üzere , bunun kare-kök dönüşümüne G dersek $G^2(z) = g(z^2)$ denkliğinden ($z \neq 0$ için) logaritmik türev alır sonra z ile çarparsak aşağıdaki eşitliği elde ederiz - ki bu eşitlik $z = 0$ için de doğru olur - ;

$$z\frac{G'(z)}{G(z)} = z^2\,\frac{g'(z^2)}{g(z^2)} \quad .$$

$z^2 \in B$ olacağından yıldızıl fonksiyonların analitik karakterizasyonu bize , G fonksiyonunun da yıldızıl olduğunu gösterir .

Çember-yıldızıl fonksiyonlara gelince , bunların Schwarz Lemmasını gerçekleyen ve $b'(0) = -1/(4w)$ olan bir b fonksiyonu aracılığı ile

$$f(z) = -4w \frac{b(z)}{(1-b(z))^2}$$

biçiminde gösterilişlerini göz önüne alırsak , f çember-yıldızıl fonksiyonunun kare-kök dönüşümü olarak

$$\sqrt{f(z^2)} = 2i\sqrt{w}\, \frac{\sqrt{b(z^2)}}{1-b(z^2)}$$

elde ederiz . $\beta(z) = \sqrt{b(z^2)}$ dersek , bu fonksiyon da Schwarz Lemmasını gerçekler ve $\beta'(0) = 1/(2i\sqrt{w})$ olur . (b , bire-bir olduğundan kare kök fonksiyonu tanımlanabilir .)
Sonuç olarak ,

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = 2i\sqrt{w}\, \frac{\beta(z)}{1-\beta^2(z)}$$

bulunur ki , F fonksiyonu $2i\sqrt{w}\, \frac{z}{1-z^2}$ fonksiyonuna subordine olup , $\pm\sqrt{w}$ değerlerini alamaz .

Öte yandan $$\frac{\sqrt{w}\,F(z)}{\sqrt{w}-F(z)} = 2i\sqrt{w}\, \frac{\beta(z)}{(1-i\beta(z))^2}$$

fonksiyonunun yıldızıl olması için , bu fonksiyona G dersek ,

$$z\frac{G'(z)}{G(z)} = z\frac{\beta'(z)}{\beta(z)}\, \frac{1+i\beta(z)}{1-i\beta(z)}$$

fonksiyonlarının gerçel kısımlarının pozitif olması gerekir .

Benzer şekilde , $\frac{-\sqrt{w}F(z)}{-\sqrt{w}-F(z)}$ fonksiyonunun yıldızıl olabilmesi koşulundan hareket ederek ,

$$\mathrm{Re}\left\{ z\frac{\beta'(z)}{\beta(z)}\, \frac{1-i\beta(z)}{1+i\beta(z)} \right\} > 0$$

sağlanıyorsa , $F \in CS^{*}(-\sqrt{w})$ olacağı sonucunu elde ederiz ki bütün bu yaptıklarımızı aşağıdaki teorem altında toplayabiliriz.

TEOREM 3.1.6. Çember-yıldızıl bir

$$f(z) = -4w \frac{b(z)}{(1-b(z))^2}$$ fonksiyonunun

kare-kök dönüşümü , $\beta(z) = \sqrt{b(z^2)}$ olmak üzere ,

$$F(z) = \sqrt{f(z^2)} = 2i\sqrt{w}\, \frac{\beta(z)}{1-\beta^2(z)}$$ dır .

Üstelik ; her $z \in B$ için ,

$$\mathrm{Re}\left\{ z\frac{\beta'(z)}{\beta(z)}\, \frac{1+i\beta(z)}{1-i\beta(z)} \right\} > 0$$

koşulu sağlanıyorsa , $F \in CS^{*}(\sqrt{w})$;

her $z \in B$ için ,

$$\mathrm{Re}\left\{ z\frac{\beta'(z)}{\beta(z)}\, \frac{1-i\beta(z)}{1+i\beta(z)} \right\} > 0$$

oluyorsa , $F \in CS^{*}(-\sqrt{w})$ dır .

Bir de , f çember-yıldızıl fonksiyonuna karşılık gelen

$g(z) = \dfrac{wf(z)}{w-f(z)}$ yıldızıl fonksiyonunun kare-kök dönüşümü ele

alınabilir ki bu da yıldızıl ve $\pm i\sqrt{w}$ değerlerini almayan bir fonksiyondur . Dolayısı ile

$$G(z) = \sqrt{g(z^2)}$$ ise ,

$$\frac{i\sqrt{w}\,G(z)}{i\sqrt{w}+G(z)} = \frac{\sqrt{w}\sqrt{f(z^2)}}{\sqrt{w-f(z^2)} - i\sqrt{f(z^2)}} \in CS^{*}(i\sqrt{w})$$;

$$\frac{i\sqrt{w}G(z)}{i\sqrt{w}-G(z)}=\frac{\sqrt{w}\sqrt{f(z^2)}}{\sqrt{w-f(z^2)}+i\sqrt{f(z^2)}}\in CS^*(-i\sqrt{w}) \quad \text{dır .}$$

Bu bölümde , çember-yıldızıl fonksiyonların a_n $(n=2,3,..)$ katsayılarını inceleyelim :

f çember-yıldızıl bir fonksiyon ise ,

$$f(z)=-4w\,\frac{b(z)}{(1-b(z))^2}$$

şeklinde yazılabilecektir . $f(z)-w$ farkını hesaplarsak ,

$$f(z)-w=-w\left(\frac{4b(z)}{(1-b(z))^2}+1\right)=-w\,\frac{(1+b(z))^2}{(1-b(z))^2}$$

olduğunu görürüz . Burada , $p(z)=\dfrac{1+b(z)}{1-b(z)}$ denirse ,

$p\in\mathbb{P}$ olur ve böylece

$$f(z)=w(1-p^2(z))$$

sonucuna varılır . ($b'(0)=-1/(4w)$ olduğundan $p'(0)=-1/(2w)$ dır .)

Öte yandan ,

$$p(z)=\int_0^{2\pi}\frac{1+e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\,du(t)=1+2\int_0^{2\pi}\frac{e^{-it}z}{1-e^{-it}z}\,du(t)$$

$$=1+2\int_0^{2\pi}\sum_{n=1}^{\infty}(e^{-it}z)^n\,du(t)$$

eşitliklerinden , p fonksiyonunun seri gösteriliminin

$n=1,2,\ldots$ için , $c_n=\int_0^{2\pi} e^{-int}\,du(t)$,

olmak üzere ,

$$p(z)=1+2\sum_{n=1}^{\infty} c_n z^n$$

şeklinde olduğu görülebilir . Burada yer alan u fonksiyonunun özelliklerinden hemen

$n=1,2,\ldots$ için , $|c_n|\leqslant 1$

olduğu açıktır . Şimdi ,

$$p^2(z)=(1+2\sum_{r=1}^{\infty} c_r z^r)(1+2\sum_{s=1}^{\infty} c_s z^s)=1+4\sum_{r=1}^{\infty} c_r z^r+4\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} c_r c_s z^{r+s}$$

bağıntısından , çift toplamda $n=r+s$ dersek , $s=n-r$ olur ,

ve dolayısı ile , $\sum_{r=1}^{\infty}\sum_{s=1}^{\infty} c_r c_s z^{r+s}=\sum_{n=2}^{\infty}\sum_{r=1}^{n-1} c_r c_{n-r} z^n$

denkliğinden de **yararlanarak** ,

$$p^2(z)=1+4\sum_{n=1}^{\infty}\left(\sum_{r=1}^{n} c_r c_{n-r}\right) z^n$$

elde ederiz . Sonuçta , çember-yıldızıl

$$f(z)=z+\sum_{n=2}^{\infty} a_n z^n$$

fonksiyonunun katsayıları , her $n=2,3,\ldots$ için ,

$f(z)=w(1-p^2(z))$ bağıntısından , aşağıdaki şekilde bulunur :

$$a_n=-4w\sum_{r=1}^{n} c_r c_{n-r}$$

Burada , $c_0 = 1$ ve $c_1 = -1/(4w)$ dır .

Hemen , her $n = 2,3,\ldots$ için ,

$$|a_n| < 4|w|n$$

eşitsizliği elde edilir . Ancak , Bieberbach tahmininin doğru olduğu , 1984 yılı yazında , Louis de Branges tarafından ispat edildiğinden ve $|4w| \geqslant 1$ olduğundan , bu eşitsizlik erişilebilir değildir .

Eğer , birinci türevleri $p'(0) = -1/(2w)$ olarak belirli gerçel kısmı pozitif olan fonksiyonlar için c_r katsayıları tamamen belirlenebiliyorsa , yukarıda verdiğimiz formül yardımı ile , $|a_n|$ için iyi bir üst sınır bulunabileceğini tahmin ediyoruz .

O halde burada gerçeklenmesi gereken erişilebilir eşitsizlik , $n = 1,2,3,\ldots$ için ,

$$\left|\sum_{r=1}^{n} c_r c_{n-r}\right| \leqslant n|c_1|$$

dir . c_r katsayılarının yapıları , hakkında fazla bilgimiz olmayan u fonksiyonuna bağlı olduğundan bu son eşitsizliğin doğrudan bir ispatını veremiyoruz .

3.2. ÇEMBER-YILDIZIL FONKSİYONLAR İÇİN DİSTORSİYON TEOREMLERİ :

Yalınkat fonksiyonlar sınıfı S için bilinen aşağıdaki distorsiyonlar , yıldızıl ve çember-yıldızıl fonksiyonlar için de söz konusudur .

$0 < r < 1$ olmak üzere ,

$$m(r) = \frac{r}{(1+r)^2} \quad \text{ve} \quad M(r) = \frac{r}{(1-r)^2}$$

olarak alırsak , her $f \in S$ için , $z = re^{it} \in B$ ise ;

$$(1) \qquad m(r) \leqslant |f(z)| \leqslant M(r) \quad ,$$

$$(2) \qquad m'(r) \leqslant |f'(z)| \leqslant M'(r) \quad ,$$

$$(3) \qquad r\frac{m'(r)}{m(r)} \leqslant \left| z\frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leqslant r\frac{M'(r)}{M(r)} \quad .$$

Burada , eşitlik halleri her $z \in B$ noktasında , aynı zamanda birer yıldızıl fonksiyon olan Köebe fonksiyonu veya Köebe fonksiyonunun bir dönmesi için söz konusu olacağından bu distorsiyonlar yıldızıl fonksiyonlar için de erişilebilir olacaklardır . (Kısaca hatırlatalım : bir fonksiyon sınıfı ile ilgili bir eşitsizlikte her z noktasında eşitliğin olmasını sağlayan sınıfa ait bir fonksiyon bulunabiliyorsa , bu eşitsizliğe sözü edilen sınıf üzerinde erişilebilir denir.)

Ancak bu distorsiyonlar artık çember-yıldızıl fonksiyonlar için erişilebilir olamayacaklardır ; çünkü , bu sınıf dönmeye göre kapalı değildir .

Gene de , $CS^*(w)$ üzerinde , distorsiyonlardaki eşitlikler $\alpha = \arg w$ olmak koşulu ile ,

$$k_{\pi+\alpha}(z) = \frac{z}{(1+e^{-i\alpha}z)^2}$$ fonksiyonu için $z = \pm re^{i\alpha}$

noktalarında sağlanır : gerçekten ;

$$\left|k_{\pi+\alpha}(re^{i\alpha})\right| = m(r) \quad , \quad \left|k_{\pi+\alpha}(-re^{i\alpha})\right| = M(r) \quad ;$$

$$\left|k'_{\pi+\alpha}(re^{i\alpha})\right| = m'(r) \quad , \quad \left|k'_{\pi+\alpha}(-re^{i\alpha})\right| = M'(r) \quad ;$$

ve dolayısı ile ;

$$\left|re^{i\alpha}\frac{k'_{\pi+\alpha}(re^{i\alpha})}{k_{\pi+\alpha}(re^{i\alpha})}\right| = r\frac{m'(r)}{m(r)} \quad , \quad \left|(-re^{i\alpha})\frac{k'_{\pi+\alpha}(-re^{i\alpha})}{k_{\pi+\alpha}(-re^{i\alpha})}\right| = r\frac{M'(r)}{M(r)} \quad \text{dir .}$$

(1) no'lu distorsiyona dikkat edilecek olursa , bu distorsiyon eşitsizlikleri , fonksiyonun orijine ne kadar yakın ne kadar uzak kalabileceğini göstermektedir . Bu görüşten hareketle , çember-yıldızıl fonksiyonların , kendileri için özel bir yeri olan w noktasına uzaklıklarını inceleyelim :

Önce , çember-yıldızıl bir fonksiyon f için ,

$$f(z) = \frac{wg(z)}{w+g(z)}$$

yazılışını göz önüne alalım . Burada g bir yıldızıl fonksiyon olup ,

$$w-f(z) = w - \frac{wg(z)}{w+g(z)} = \frac{w^2}{w+g(z)} \quad \text{dir .}$$

Dolayısı ile , $z = re^{it} \in B$ ise ,

$$|w-f(z)| \geqslant \frac{|w|^2}{|w|+|g(z)|} \geqslant \frac{|w|^2}{|w|+M(r)}$$ alt sınırı bulunur .

$\alpha = \arg w$ ve k_α Köebe fonksiyonunun α-dönmesi ise ,

$$f(z) = \frac{w k_\alpha(z)}{w + k_\alpha(z)}$$

çember-yıldızıl fonksiyonu için , $z = re^{i\alpha}$ noktasında ,

$$\left| w - f(re^{i\alpha}) \right| = \left| \frac{w^2}{|w| e^{i\alpha} + M(r) e^{i\alpha}} \right| = \frac{|w|^2}{|w| + M(r)}$$

olduğu görülür .

Öte yandan , hemen görülebileceği gibi ,

$$|w - f(z)| \leqslant |w| + M(r)$$

olmakta , eşitlik $k_{\pi+\alpha}$ için $z = -re^{i\alpha}$ noktasında gerçeklenmektedir :

$k_{\pi+\alpha}(-re^{i\alpha}) = -M(r)e^{i\alpha}$ ve $\left| w - k_{\pi+\alpha}(-re^{i\alpha}) \right| = \left| (|w| + M(r))e^{i\alpha} \right|$ dır .

Böylece aşağıdaki teoremi ispat etmiş oluyoruz .

TEOREM 3.2.1. $f \in CS^*(w)$ olsun : o takdirde , her $z = re^{it} \in B$ için ,

$$\frac{(1-r)^2 |w|^2}{(1-r)^2 |w| + r} \leqslant |w - f(z)| \leqslant \frac{(1-r)^2 |w| + r}{(1-r)^2}$$

eşitsizlikleri gerçeklenir . Eşitlikler , soldan sağa sırasıyla , $\alpha = \arg w$ ise ,

$f = wk_\alpha/(w + k_\alpha)$ fonksiyonu için $z = re^{i\alpha}$ noktasında ;

$k_{\pi+\alpha}$ fonksiyonu için $z = -re^{i\alpha}$ noktasında gerçeklenir .

Bu teorem S sınıfı için de söylenebilir ve aşağıdaki soruya bir cevap oluşturulabilir .

SORU : " S sınıfına ait bir fonksiyon , birim dairenin hiç bir noktasında almadığı bir w değerine ne kadar yakın olabilir ? "

CEVAP :TEOREM 3.2.2. $f \in S$ ve $w \notin f(B)$ olsun : o takdirde , Teorem 3.2.1. ile verilen eşitsizlikler geçerlidir ve erişilebilirdir .

İSPAT : Varsayımlarımız altında $g(z) = \dfrac{wf(z)}{w-f(z)}$ fonksiyonu da S sınıfında olup , Teorem 3.2.1. in ispatında yapılanlar tekrarlanabilir ve teoremin S sınıfı için de doğru olacağı görülebilir .

SONUÇ . $f \in CS^{*}(w)$ ise , her $z = re^{it} \in B$ için ,

$$\frac{(1-r)^2|w|}{(1-r)^2|w| + r} \leqslant \left|\frac{w-f(z)}{w}\right| \leqslant \frac{(1-r)^2|w| + r}{(1-r)^2|w|}$$

eşitsizlikleri vardır . $\alpha = \arg w$ ise , eşitlikler soldan sağa sırasıyla ,

$f = wk_{\alpha}/(w+k_{\alpha})$ fonksiyonu için , $z = re^{i\alpha}$ noktasında ;

$k_{\pi+\alpha}$ fonksiyonu için , $z = -re^{i\alpha}$ noktasında gerçeklenir .

Çember-yıldızıl bir fonksiyon f için , $g = wf/(w-f)$ fonksiyonunun yıldızıl olduğunu bir kez daha hatırlayalım : Birinci distorsiyon diyebileceğimiz

$$m(r) \leqslant |g(z)| \leqslant M(r)$$

eşitsizliğini kullanarak , $f \in CS^*(w)$ için , $z = re^{it} \in B$ ise ,

$$m(r)\left|\frac{w-f(z)}{w}\right| \leqslant |f(z)| \leqslant M(r)\left|\frac{w-f(z)}{w}\right|$$

şeklinde bir distorsiyon elde ederiz . Burada sınırlar f nin w noktasına uzaklığına bağlı olarak ortaya çıkmaktadır .

$f = wk_\alpha/(w+k_\alpha)$ fonksiyonu için , $z = -re^{i\alpha}$ noktasında , $k_\alpha(-re^{i\alpha}) = m(r)$ olduğuna dikkat ederek ,

$$m(r)\left|\frac{w-f(-re^{i\alpha})}{w}\right| = m(r)\left|\frac{f(-re^{i\alpha})}{k_\alpha(-re^{i\alpha})}\right| = |f(-re^{i\alpha})|$$

sonucunu buluruz ki , ilk eşitsizlikte eşitliğin , $f = wk_\alpha/(w+k_\alpha)$ çember-yıldızıl fonksiyonu için $z = -r\exp(i\alpha)$ noktasında sağlandığını görürüz .

Aynı çember-yıldızıl fonksiyon için , $k_\alpha(re^{i\alpha}) = M(r)$ olduğundan , $z = r\exp(i\alpha)$ noktasında ,

$$M(r)\left|\frac{w-f(re^{i\alpha})}{w}\right| = |f(re^{i\alpha})|$$

eşitliğinin gerçeklendiği görülür . Başka deyimle , bulduğumuz distorsiyonda yer alan ikinci eşitsizlikte eşitlik , $f = wk_\alpha/(w+k_\alpha)$ çember-yıldızıl fonksiyonu için $z = re^{i\alpha}$ noktasında gerçeklenir .

Gene çember-yıldızıl f fonksiyonunu ele alalım : bu durumda , yıldızıl $g = wf/(w-f)$ fonksiyonunun türevi ,

$$g'(z) = \frac{w^2}{(w-f(z))^2} f'(z)$$

olup , ikinci distorsiyon diyebileceğimiz

$$m'(r) \leqslant |g'(z)| \leqslant M'(r)$$

eşitsizliklerini de kullanarak , $f \in CS^*(w)$ için , $z = re^{it} \in B$ ise ,

$$m'(r) \left|\frac{w-f(z)}{w}\right|^2 \leqslant |f'(z)| \leqslant M'(r) \left|\frac{w-f(z)}{w}\right|^2$$

eşitsizlikleri ile verilmiş bir distorsiyon buluruz .

$k'_\alpha(z) = \dfrac{1+e^{-i\alpha}z}{(1-e^{-i\alpha}z)^3}$ olduğundan , $k'_\alpha(-re^{i\alpha}) = m'(r)$ ve

$k'_\alpha(re^{i\alpha}) = M'(r)$ denkliklerinden , $f = wk_\alpha/(w+k_\alpha)$ çember-yıldızıl fonksiyonu için , $z = -re^{i\alpha}$ noktasında ,

$$m'(r) \left|\frac{w-f(-re^{i\alpha})}{w}\right|^2 = |f'(-re^{i\alpha})| \quad ;$$

aynı fonksiyon için , $z = re^{i\alpha}$ noktasında ,

$$M'(r) \left|\frac{w-f(re^{i\alpha})}{w}\right|^2 = |f'(re^{i\alpha})|$$

eşitliklerinin gerçeklendiğini görürüz .

Böylece çember-yıldızıl fonksiyonların türevi için ikinci distorsiyonu veren bir eşitsizlikler takımı bulmuş , eşitlik hallerini incelemiş oluyoruz .

f çember-yıldızıl fonksiyonu ve $g = wf/(w-f)$ yıldızıl fonksiyonu için , her $z \in B$ noktasında ,

$$z\frac{g'(z)}{g(z)} = \frac{w}{w-f(z)}\, z\frac{f'(z)}{f(z)}$$

olduğu hatırlanırsa , üçüncü distorsiyon adını verebileceğimiz

$$r\frac{m'(r)}{m(r)} \leqslant \left| z\frac{g'(z)}{g(z)} \right| \leqslant r\frac{M'(r)}{M(r)}$$

eşitsizliklerinden hareketle , $f \in CS^*(w)$ için , $z = re^{it} \in B$ ise ,

$$r\frac{m'(r)}{m(r)} \left| \frac{w-f(z)}{w} \right| \leqslant \left| z\frac{f'(z)}{f(z)} \right| \leqslant r\frac{M'(r)}{M(r)} \left| \frac{w-f(z)}{w} \right|$$

distorsiyonunu elde ederiz .

$f = wk_\alpha/(w+k_\alpha)$ çember yıldızıl fonksiyonu için , $z = -re^{i\alpha}$ noktasında ,

$$r\frac{m'(r)}{m(r)} \left| \frac{w-f(-re^{i\alpha})}{w} \right| = \left| (-re^{i\alpha}) \frac{k'_\alpha(-re^{i\alpha})}{k_\alpha(-re^{i\alpha})} \right| \left| \frac{w-f(-re^{i\alpha})}{w} \right|$$

$$= \left| (-re^{i\alpha}) \frac{f'(-re^{i\alpha})}{f(-re^{i\alpha})} \right|$$

eşitliğinin var olduğu görülebilir . Benzer şekilde , aynı çember-yıldızıl fonksiyonun $z = r\exp(i\alpha)$ noktasında

$$r\frac{M'(r)}{M(r)} \left| \frac{w-f(re^{i\alpha})}{w} \right| = \left| re^{i\alpha} \frac{f'(re^{i\alpha})}{f(re^{i\alpha})} \right|$$

eşitliğini vereceğini gösterebiliriz .

Böylece , bütün bu sonuçları aşağıdaki teorem altında topluca ifade edebiliriz :

TEOREM 3.2.3. $f \in CS^*(w)$ olsun : $z = re^{it} \in B$ ise ,

$$(1) \quad m(r)\left|\frac{w-f(z)}{w}\right| \leqslant |f(z)| \leqslant M(r)\left|\frac{w-f(z)}{w}\right| \quad ,$$

$$(2) \quad m'(r)\left|\frac{w-f(z)}{w}\right|^2 \leqslant |f'(z)| \leqslant M'(r)\left|\frac{w-f(z)}{w}\right|^2 \quad ,$$

$$(3) \quad r\frac{m'(r)}{m(r)}\left|\frac{w-f(z)}{w}\right| \leqslant \left|z\frac{f'(z)}{f(z)}\right| \leqslant r\frac{M'(r)}{M(r)}\left|\frac{w-f(z)}{w}\right| \quad ,$$

eşitsizlikleri vardır . Her üç halde de , soldan sağa sırasıyla , birinci eşitlik , $\alpha = \arg w$ ise , $f = wk_\alpha/(w+k_\alpha)$ çember-yıldızıl fonksiyonu için , $z = -re^{i\alpha}$ noktasında ; ikinci eşitlik , gene aynı fonksiyon için , $z = re^{i\alpha}$ noktasında elde edilir .

4.Bölüm

ÇEMBER-KONVEKS FONKSİYONLAR

Bu son bölümde , çember-yıldızıl fonksiyonlarda olduğu gibi , konvekslik kavramını da doğru parçası yerine bir çember yayı kullanarak genişleteceğiz ve böylece tanımlayacağımız fonksiyonlara kısaca bir göz atacağız . Bu fonksiyonları daha sonra , bir bütün olarak - bu teze konu olan çember-yıldızıl fonksiyonlar için yaptığımız gibi - incelemeyi planlıyoruz ; o nedenle , burada ayrıntıya girmeden sadece gözlemlerimizin sonuçlarını vermekle yetineceğiz .

TANIM 4.1. Düzlemde bir bölgeyi ve dışındaki bir w noktasını göz önüne alalım : bu bölgenin herhangi iki noktası W_1 ile W_2 yi birleştiren , w noktasından geçen bir çemberin yayı , tamamen bölge içinde kalıyorsa , bu bölgeye ,

" w noktası için çember yayına göre konveks "

ya da , kısaca

" çember-konveks "

bölge diyeceğiz .

TANIM 4.2. Birim daire bölge B içinde analitik ve normallenmiş bir fonksiyon f ve $w \notin f(B)$ olsun : $f(B)$ çember-konveks bir bölge ise , bu fonksiyona ,

" çember-konveks fonksiyon "

diyeceğiz . Bu tür fonksiyonların sınıfını

$$CK(w)$$

ile göstereceğiz . (Burada , $w \neq 0$ olacaktır .)

Hemen görülebilir ki , $CK(\infty) = K$ dır .

Tanımın ilk sonuçlarından biri de , çember-yıldızıl fonksiyonların , çember-konveks fonksiyonları bir alt sınıf kabul etmeleridir :

$$CK(w) \subset CS^{*}(w) \quad \text{dır} .$$

(ancak burada $|w| \geqslant \frac{1}{2}$ olmak zorundadır)

Daha önce de yaptığımız gibi , f çember-konveks bir fonksiyon ise ,

$$(\phi of)(z) = \frac{wf(z)}{w-f(z)}$$

şeklinde tanımlayacağımız fonksiyon konveks olacaktır - ki bu nedenle $|w| \geqslant 1/2$ koşulunu sağlamak zorundadır .- .

Böylelikle gözlemlerimizi sıralamaya başlayabiliriz .

TEOREM 4.1. Birim dairede analitik , normallenmiş ve w değerini almayan bir f fonksiyonu , ancak ve ancak ,

$$\frac{wf(z)}{w-f(z)}$$

fonksiyonu konveks ise , çember-konveks bir fonksiyondur .

SONUÇ . $f \in CK(w)$ olsun : o takdirde ,

(1) $$f(z) = \frac{wg(z)}{w+g(z)}$$

olacak şekilde bir konveks g fonksiyonu vardır .
Tersine ; g konveks ve $w+g(z) \neq 0$ olan bir fonksiyon ise , (1) ile verilen fonksiyon f çember-konvekstir .

(2) f yalınkat bir fonksiyondur .

TEOREM 4.2. B içinde analitik , normallenmiş ve w değerini almayan bir f fonksiyonunun çember-konveks olması için gerek ve yeter koşul , her $z \in B$ için ,

$$\operatorname{Re}\left\{1 + z\frac{f''(z)}{f'(z)} + 2\,\frac{zf'(z)}{w-f(z)}\right\} > 0$$

eşitsizliğinin gerçeklenmesidir .

Hatırlanacağı gibi konveks bir fonksiyon için , alt daire bölge B_r lerin de resimleri birer konveks bölgedir ; bu özellik çember-konveks fonksiyonlar için de vardır .(Burada alışılageldiği üzere , $0 < r < 1$ dir .)

$f \in CK(w)$ ve $C_r = f(|z|=r)$ ise , $\Phi(C_r)$ konveks bir eğri olacağından

$$\arg\left\{\Phi(f(re^{it})) - \Phi(f(re^{it_0}))\right\}$$

$t \in (t_0,\ t_0 + 2\pi)$ nin artan bir fonksiyonudur . Böylece , aşağıdaki lemmayı elde edebiliriz :

LEMMA 4.1. $f \in CK(w)$ ve $C_r = f(|z|=r)$ olsun : o takdirde , $z, \zeta \in B_r = \{ z : |z| < r \}$, $z \neq \zeta$ ise ,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{2\,zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}\,\frac{w-f(\zeta)}{w-f(z)}\right\} > 0 \quad \text{dır .}$$

Bu Lemma ve Teorem 2.6. aracılığı ile ;

TEOREM 4.3. $f \in CK(w)$ ise , her $z, \zeta \in B$ için ,

$$\operatorname{Re}\left\{\frac{2\,zf'(z)}{f(z)-f(\zeta)}\,\frac{w-f(\zeta)}{w-f(z)} - \frac{z+\zeta}{z-\zeta}\right\} > 0 \quad \text{dır .}$$

$$\mathrm{Re}\left\{\frac{w}{w-f(z)}\, z\frac{f'(z)}{f(z)}\right\} > \alpha \geqslant 0$$ koşulunu sağlayan f

fonksiyonuna " α -ıncı dereceden çember-yıldızıl " diyeceğiz . Böylece , Teorem 4.3. de $\zeta = 0$ alarak aşağıdaki sonucu elde edeceğiz .

SONUÇ . $f \in CK(w)$ ise ,
f , $\frac{1}{2}$ -inci dereceden çember-yıldızıl
bir fonksiyondur .

(Daha önce geometrik olarak vardığımız ; çember-konveks fonksiyonların çember-yıldızıl olduğu gerçeği analitik olarak da doğrulanmış olur .)

Bilindiği üzere , f konveks bir fonksiyon ise

$$g(z) = zf'(z)$$

ile tanımlanan g fonksiyonu yıldızıldır . Çember-konveks fonksiyonlarla çember-yıldızıl fonksiyonlar arasında da benzer bir ilişki vardır .

TEOREM 4.4. f çember-konveks bir fonksiyon olmak üzere , $|w| \geqslant 1/2$ ise , her $z \in B$ için ,

$$\frac{w}{w-g(z)}\, g(z) = \left(\frac{w}{w-f(z)}\right)^2 zf'(z)$$

bağıntısı ile tanımlanabilen g fonksiyonu çember-yıldızıldır .

LİTERATÜR

[1] J.W.Alexander II :"Functions which map the interior of the unit circle upon simple regions " Annals of Math. 17(1915) 12-22 .

[2] F.G.Avhadiev-L.A.Aksent'ev :"Fundamental results on sufficient conditions for the univalence of analytic functions"(Russian) Uspeki Mat.Nauk 30(1975), no.4(184), 3-60 .

[3] J.Clunie - F.R.Keogh :"On starlike and convex functions" J.London Math.Soc.35(1960), 229-233 .

[4] P.L.Duren :"Coefficients of univalent functions" Bull.Amer. Math.Soc.83(1977), 891-911 .

[5] " " " :"Univalent Functions" Springer-Verlag , Heidelberg and New-York , 1983 .

[6] G.Goluzin :"Interior problems of the theory of schlicht functions" Trans. by T.C.Doyle, A.C.Schaeffer and D.C.Spencer , Office of Naval Research. Navy Dept. Wash.D.C. 1947,138.

[7] A.W.Goodman :"Univalent Functions , I,II." Mariner Publishing Company , inc.1983 .

[8] I.S.Jack :"Functions starlike and convex of order α" J.London Math.Soc.(2)3(1971),469-474.

[9] Z.Nehari :"Conformal Mappings" Mc.Graw Hill , New-York , 1966.

[10] Ch.Pommerenke :"On starlike and convex functions"
J.London Math.Soc.37(1962),209-224.

[11] "   " :"Univalent Functions"
Vandenhoeck-Ruprecht , Göttingen 1975.

[12] G.Schober :"Univalent Functions" Selected Topics ,
Lecture Notes in Math.vol.478 ,
Springer-Verlag , Berlin 1975 .

[13] B.N.Rahmanov :"on the theory of univalent functions"
Dokl.Akad.Nauk SSSR (N.S.) 103(1955)
369-371 .

ÖZET

Düzlemde , orijini de içinde bulunduran bir bölge ve dışındaki bir w noktası göz önüne alınmış , bu bölgenin her noktası orijine w noktasından geçen bir çemberin bölge içinde kalan bir yayı ile birleştirilebiliyorsa , bu bölgeye " çember-yıldızıl " adı verilmiştir . Birim daireyi , çember-yıldızıl bir bölge üzerine resmeden normallenmiş analitik fonksiyona da

" çember-yıldızıl fonksiyon "

denerek , bu fonksiyonlar sınıfı CS(w) ile gösterilmiştir.

Bu doktora çalışmasında yukarıda adı geçen fonksiyonların geometrik ve analitik olarak nasıl karakterize edilebildikleri , yalınkat oldukları yıldızıl fonksiyonlarla olan ilişkilerinden yaralanılarak gösterilmiş ; bir takım özellikleri araştırılarak ortaya çıkarılmış , bazı dönüşümler altındaki davranışları ve katsayıları incelenmiştir . Bunlar yapılırken , gelenek olan sistematik uygulanmıştır . Ayrıca , bu fonksiyonlara özgü distorsiyon teoremleri elde edilmiştir .

Benzer şekilde , çember-konveks bölge ve fonksiyonlar tanımlanmış , analitik karakterizasyonları , konveks fonksiyonlarla bu yeni fonksiyonların ilişkileri , yalınkat oldukları gösterilmiş ; çember-yıldızıl ve çember-konveks fonksiyonlar arasında bir bağıntı elde edilmiştir .