T. C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
İŞLETME ANABİLİM DALI
SAYISAL YÖNTEMLER BİLİM DALI

GÜVEN ARALIĞI OLUŞTURMADA TEKRARLI ÖRNEKLEME VE BOOTSTRAP YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

YÜKSEK LİSANS TEZİ

GÜNEŞ IŞIK

DANIŞMAN: YRD. DOÇ. DR. İ. HAKKI ARMUTLULU

İSTANBUL — 1993

İÇİNDEKİLER

Sayfa No

GİRİŞ

1. ARALIK TAKDİRİ VE GÜVEN ARALIĞI 3

1.1. PARAMETRİK YAKLAŞIM 4

1.1.1. Test İstatistiğinin Kullanılması 4

1.1.2. Pivot Değişkenin Kullanılması 5

1.2. PARAMETRİK OLMAYAN YAKLAŞIM 8

1.2.1. Jackknife Yöntemi 8

1.2.2. Bootstrap Yöntemi 9

1.2.3. Bootstrap Takdirleri İçin Jackknife Yaklaşımları 12

1.2.4. Tekrarlı Örnekleme İşlemleri 12

1.2.4.1. Standart Sapmanın Bootstrap Takdirleri ve Jackknife ile Arasındaki Bağıntı 14

1.2.5. Tekrarlı Örnekleme İşleminde Varsayımlar 15

1.2.5.1. Tekrarlı Örnekleme Farkları İçin Bir Genel Metod 16

1.3. PARAMETRİK OLMAYAN GÜVEN ARALIKLARI 19

1.4. BİÇİMSEL EDGEWORTH AÇILIMIN GEÇERLİLİĞİ 21

2. BOOTSTRAP YÖNTEMLERİ 24

2.1. BOOTSTRAP YÖNTEMİ ve GÜVEN ARALIKLARI 25

2.2. PARAMETRİK ve PARAMETRİK OLMAYAN BOOTSTRAP YÖNTEMLERİ 27

2.3. PARAMETRİK OLMAYAN BOOTSTRAP GÜVEN ARALIKLARI 28

2.3.1. Medyan 29

2.3.2. Medyan İçin Bootstrap Teoremi 30

2.3.3. Percentile Metodu 31

3. BOOTSTRAP GÜVEN ARALIKLARIN TEORİK KARŞILAŞTIRILMASI 33

3.1. EDGEWORTH AÇILIMI ve CORNISH-FISHER TERSİ 36

3.2. TEORİK KRİTİK NOKTALAR 38

3.2.1. Normal Dağılım, t-Dağılımı, Karma ve Ters Kritik Noktaları 38

Sayfa No

3.2.2. Taraflı-Düzeltme Kritik Noktaları 39
3.2.3. İvme Sabiti 41
3.2.4. En Dar Aralıklar 44

3.3. BOOTSTRAP KRİTİK NOKTALARI 45

3.3.1. Normal Dağılım, t-Dağılımı, Karma ve Ters Kritik Noktaları 45
3.3.2. Taraflı-Düzeltme Kritik Noktaları 46
3.3.3. İvme Sabiti 47
3.3.4. En Dar Aralıklar 49

3.4. BOOTSTRAP KRİTİK NOKTALARIN ÖZELLİKLERİ 49

3.4.1. Kritik Noktaların Özellikleri Açısından Edgeworth Açılımları ve Cornish-Fisher Tersi 51
3.4.2. Bootstrap Kritik Noktaların Açılımları 51
3.4.3. Çift-Taraflı Eşit-Uzantılı Aralıkların Uzunluğu 57
3.4.4. En Dar Aralıklar 63
3.4.4.1. Örnekler 64

4. SONUÇ 65

YARARLANILAN KAYNAKLAR 66

GİRİŞ

Örnekleme dağılımı kullanılarak parametrelerin belirlenmiş bir olasılık dahilinde hangi değerler arasında olabileceğinin belirlenmesi aralık takdiri konusunu oluşturur. Teorik temelde aralık takdiri ile bir parametre için alt ve üst sınırları oluşturan istatistiklerin tespiti yapılır. Bir ana kütleden alınan sınırlı sayıda gözleme dayanarak bilinmeyen parametrenin gerçek değerinin belirli bir olasılıkta bulunacağı aralığa Güven aralığı denir.

Güven aralığı oluşturmada ve güvenilirlik seviyesinin takdirinde yeni bir yöntem olarak Efron (1979) tarafından Bootstrap yöntemi geliştirilmiştir. Bu yöntem pivot olarak alınan gözlem değerlerinin bir fonksiyonunun dağılımına yaklaşım içermektedir. Yaklaşık olarak bulunan bu dağılıma Efron tarafından Bootstrap dağılımı ismi konmuştur. Bootstrap dağılımının bulunuşunda parametrik ve nonparametrik (parametrik olmayan) yaklaşımlar kullanılabilmektedir.

Parametrik olmayan yaklaşımla Bootstrap dağılımın tespitinde bilinmeyen dağılım yerine istatistiksel fonksiyonun tanımına göre gözlemlerin deneysel dağılımı konularak işe başlanır. Ardından Monte-Carlo benzetimi ile tekrar-tekrar değer türetilerek yaklaştırma yapılır.

Parametrik yaklaşımda ise başlangıçta deneysel dağılım yerine varsayılan bir dağılım konulur.

Bootstrap yönteminin iyi anlaşılabilmesi için daha eski ve bootstrap yöntemine göre daha dar alanda kullanımı olan Quenouille-Tukey'in Jackknife yöntemi anlaşılmalıdır. Jackknife yöntemi, bootstrap yöntemine lineer açılımla yaklaşım olarak düşünülebilir.

Bootstrap güven aralıklarının karşılaştırılmasında ise Edgeworth açılımı ve Cornish-Fisher tersi ışık tutmaktadır.

Çalışmanın birinci bölümünde aralık takdiri, güven aralığı açıklanmış ve Jackknife, Bootstrap yöntemlerin genel tanımları verilmiştir.

Bootstrap, Jackknife'ın başaramadığı bilinen bir durum olan örneklem medyanın varyans takdirinde (asimtotik olarak) tam doğru olduğu görülür.

Çalışmanın ikinci bölümünde Bootstrap yöntemleri ve güven aralığı oluşturmadaki işlevi açıklanmıştır. Özetle Bootstrap yöntemi, güven aralıkların kapsama olasılıkların farklı görüş noktalarındaki problemde, kolayca uygun çözümü bulmada avantajlara sahiptir.

Çalışmamızın üçüncü bölümünde de Bootstrap güven aralıkların teorik karşılaştırılması, Bootstrap kritik noktaları ve bunların özellikleri incelenmiştir.

1. ARALIK TAKDİRİ ve GÜVEN ARALIĞI

Bir ana kütlenin bilinmeyen ~~bazı özellik~~lerini ortaya çıkarmak için yapılan gözlemlerle, istatistik veriler ~~elde~~ edilmiş olur. Bu verilere dayanarak **ana kütlenin belirli** bir özelliğini yansıtan bilinmeyen bir parametrenin, gerçek değeri saptamaya çalışılır. Fakat gözlemler, ana kütle çok büyükse bu saptama işlemi çok zorlaşır. Bu nedenle ana kütleden örnekleme yapılır ve bu örnek değerlerine dayanılarak parametrenin değeri saptanır. Ana kütlenin bilinmeyen parametresinin verilen olasılık terimleri ile içinde bulunduğu aralığa "güven aralığı" denir.

Yani Güven Aralığı; Bir ana kütleden alınan, sınırlı sayıda örneğe dayanarak, ana kütlenin bilinmeyen parametresi için, parametrenin gerçek değerini belli bir olasılıkla kapsayan aralığa denir.

Nokta takdirinde bilinmeyen parametre θ'nın yerine kullanılabilecek, örneklemi oluşturan rassal değişkenlerin fonksiyonları olan ve değeri bir örnek noktasında hesaplanan istatistiği belirleme esas alınmıştır. Bu istatistik pratikte parametre yerine kullanılarak hesaplamada bir boşluğu doldurur. Ancak üstün özelliklere sahip olsun veya olmasın her istatistik bir rassal değişkendir. Bir dağılımı ve varyansı vardır. Hesaplamalarda, bu örnekleme dağılımı kullanılarak parametrelerinin belirlenmiş bir olasılık dahilinde hangi değerler arasında olabileceğinin belirlenmesi aralık takdiri konusuna girer. Genelleme yapılarak teorik temelde ise aralık takdiri ile bir parametre için alt ve üst sınırları oluşturan istatistiklerin tespiti yapılır. $X_1, X_2, \ldots, X_n$ bir rassal örneklem $Y = t(\bar{X})$ istatistiği θ'nın taktircisi, $\Omega = (a,b)$ kümesi parametre uzayı olsun. $L(\bar{x}) < U(\bar{x})$ olmak üzere $(L(\bar{x}), U(\bar{x})) \subset (a,b)$ ve $Y \in (L(\bar{x}), U(\bar{x}))$, $P[L(\bar{x}) < \theta < U(\bar{x})] = 1-\alpha$ olsun. Burada $(L(\bar{x}), U(\bar{x}))$ aralığına θ'nın güven aralığı, $(1-\alpha)$'ya güven katsayısı denir. Gözlem değerlerinden hesaplanan reel alt ve üst sınırlardan oluşan aralık sabittir. Rassal değişkenleri içeren $L(\bar{x})$ ve $U(\bar{x})$' in oluşturduğu aralık ise rassal aralıktır.

1.1. PARAMETRİK YAKLAŞIM

Parametrik yaklaşımın başlangıcında bir dağılım varsayımı vardır. Örneğin, $X_1,\ldots,X_n$ örneklemi $N(\mu, \sigma^2)$ gibi kesin belli bir dağılımdan alınmış olduğunun kabulu vardır.

1.1.1. Test İstatistiği Kullanılması

İstatistiksel vardama da (inference) aralık takdiri ile hipotez testleri konusu iç-içedir. Hipotez testleri konusu bu çalışmanın kapsamı dışında tutulduğundan bu yöntem ileriki bölümlerde kullanılmayacaktır.

Bu yöntemi bir örnekle açıklamaya çalışalım; $X_1, X_2,\ldots,X_n$ rassal örneklemi $n(\mu, \sigma^2)$ dağılımından alınmış olsun. Sabit α hata yüzdesi ile hipotezimiz $H_0: \mu = \mu_0$ ve alternatif hipotezimiz $H_1: \mu \neq \mu_0$ olsun. Bu durumda α hatası ile H_0 hipotezini reddetme bölgesi $\{x: |\bar{x}-\mu_0| > z_{\alpha/2}\sigma/\sqrt{n}\}$ olacaktır. Diğer bir deyişle

$$(\bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu_0 \leqslant \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}})$$

aralığı α hatası ile H_0' rı kabul bölgesidir. Hipotez testi mantığı ile buradaki α, doğrudan hipotezin reddedilme olasılığı (birinci tip hata) dır. Matematiksel olarak

$$P(H_0 \text{ red}/ \mu = \mu_0) = \alpha$$

şeklinde ifade edilir. Bu ifadenin tümleyeni olarak

$$P(\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu_0 \leqslant \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

yazılır. Bu olasılık ifadesi her μ_0 sabit değeri için doğrudur. Bu aralığa kabul bölgesi denir. Bu kabul bölgesinden hareketle μ parametresi için

$$P(\bar{X}-z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{X}+z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}) = 1 - \alpha$$

yazılabilir. Böylece test istatistiğinden hareketle μ için

$$\left(\bar{X} - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \quad , \quad \bar{X} + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\right)$$

güven aralığı bulunmuş olur. Genel olarak güven bölgesi ile hipotez testindeki kabul bölgesi arasındaki ilişki aşağıdaki gibi ifade edilebilir.

Hipotez testinde; $H_o: \mu = \mu_o$ hipotezi için kabul bölgesi örneklem uzayı içinde bir küme olup

$$A(\mu_o) = \{(x_1,x_2,\ldots,x_n): \mu_o - Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \bar{X} \leqslant \mu_o + Z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$$

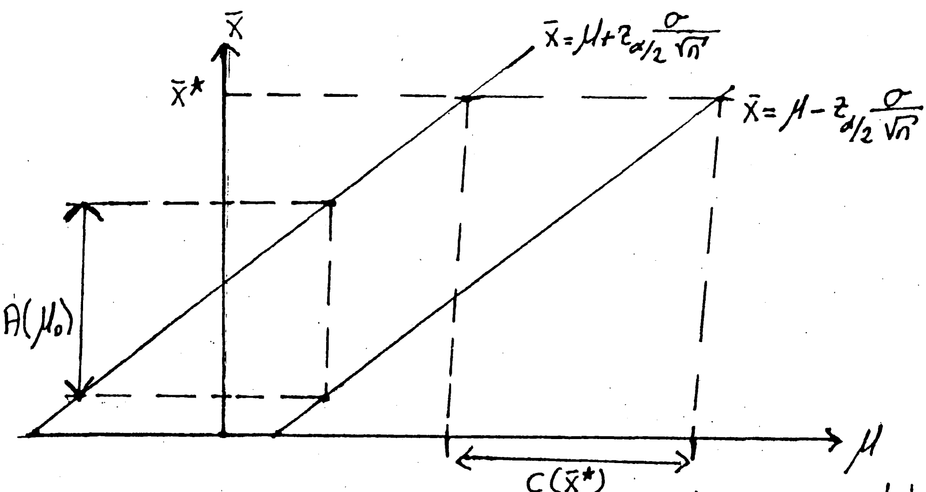
şeklindedir. Diğer taraftan μ için güven bölgesi parametre uzayı içinde bir küme olup

$$C(x_1,x_2,\ldots,x_n) = \{\mu : \bar{x} - z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}} \leqslant \mu \leqslant \bar{x} + z_{\alpha/2}\frac{\sigma}{\sqrt{n}}\}$$

şeklindedir. Böylece, bu iki bölge arasındaki ilişki

$$(x_1, x_2,\ldots, x_n) \in A(\mu_o) \Leftrightarrow \mu_o \in C(x_1,\ldots,x_n)$$

şeklinde bir totolojidir. Gerek test için, gerekse aralık için aynı sorulara cevap aranmakta ancak meseleye farklı perspektiflerden bakılmaktadır. Hipotez testinde parametre'nin sabit değeri için örneklem değerinin ne olması gerektiği sorulmaktadır. Güven bölgesinin bulunmasında ise sabit bir örneklem değeri için parametre değerinin ne olması gerektiğini sorulmaktadır. Bu karşılıklı ilişkiyi şeklen göstermek için yukarda verilen örneğe bağlı kalınarak aşağıdaki şekil çizilmiştir.



Şekil 1: Kabul bölgesi ile güven bölgesi arasındaki ilişki

1.1.2. Pivot Değişken Kullanılması

Güven aralığının oluşturulmasında pivot değişken kullanma yöntemi hassas bir konudur. G.A. Barnard (1980) bu yöntemin sonuçlarından

hareketle bu konuya Pivotal Inference (vardama) ismini koymuştur. D.A.S Fraser (1968) vardamanın yapısı (The Structure of Inference) isimli eserinde bu konu üzerinde ağırlıklı olarak durmuştur. Fraser'in yaklaşımı ile pivot değişken tanımı şöyledir.

$X_1, X_2, \ldots, X_n$ rassal örneklem ve $Y = f(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ bir istatistik, S örneklem uzayı, Ω parametre uzayı olsun. Y'nin θ parametresine bağlı dağılımından türetilebilen, θ'ya bağlı olmayan (sabit bir) dağılıma sahip ve $(S \times \Omega)$ üzerinde tanımlı $t = Q(Y, \theta)$ şeklindeki fonksiyona pivot değişken denir.

Bu tanıma göre eğer $Y \sim F(x|\theta)$ ise $Q(Y,\theta)$'nın dağılımıda bütün θ değerleri için aynıdır. Burada, pivot değişken hem istatistik hem de parametreyi içermektedir. Ancak herhangi bir A kümesi için $P_\theta(Q(Y,\theta) \in A)$'nın değeri θ'ya bağımlı değildir. Örneğin $X_1, X_2, \ldots, X_n$ örneklemi için örneklem ortalaması ve standard sapması sırasıyla $\bar{X}$ ve S olsun. $f(x-\mu)$ yoğunluğu için pivot değişken $(\bar{X}-\mu)$, $\sigma^{-1} f(X\sigma^{-1})$ yoğunluğu için pivot değişken $(\bar{X}/\sigma)$, $\sigma^{-1} f((\bar{X}-\mu)/\sigma)$ yoğunluğu için pivot değişken $((\bar{X}-\mu)/S)$ olur. Bunların ispatı için yoğunluk fonksiyonlarının parametrelerden bağımsız olduklarını göstermek yeterlidir. Bilinen bir dağılımdan örnek verirsek; örneklemimiz $n(\mu,\sigma^2)$ dağılımından alınmış olsun. σ^2'nin bilinmemesi durumunda $t = (\bar{X}-\mu)/(S/n^{1/2})$ değişkeni pivot tur. Çünkü t dağılımı μ ve σ^2' den bağımsızdır. Genellikle eksen değişimi olduğunda farklar ($\bar{X}-\mu$ gibi); ölçek değişimlerinin olduğu problemlerde ise oranlar veya çarpımlar ($\bar{X}/\sigma$ gibi) pivot değişken olmaktadır.

<u>Örnek:</u> $X_1, X_2, \ldots X_n$ rassal örneklem'i λ parametreli üstel dağılımdan alınmış olsun. Bu durumda $Y = \sum X_i$ istatistiği λ için yeterli istatistik olup dağılımı $Y \sim$ Gamma (n,λ) olur. Gamma dağılımının yoğunluk fonksiyonunda y ve λ birlikte olup y/λ şeklinde yer alır. Gamma (n,λ) yoğunluğu,

$$(\Gamma(n)\,\lambda^n)^{-1}\, y^{n-1}\, e^{-y/\lambda}$$

olup çeşitli ölçeklerde bir yoğunluk ailesidir. Dolayısıyla eğer $Q(Y,\lambda) = 2Y/\lambda$ alınırsa,

$$Q(Y,\lambda) \sim \text{gamma}\ (n,\ \lambda(2/\lambda)) = \text{gamma}\ (n,2)$$

olup, bu da λ'ya bağımlı değildir. Böylece $Q(Y,\lambda)$ bir pivot değişken olup dağılımı gamma (n,2) veya $X^2_{(2n)}$ olur.

Elimizde bir pivot varsa, bazen yoğunluk fonksiyonunun şeklini görmeye çalışırız. Yukarıdaki örnekte, yoğunluk fonksiyonunda (y/λ) ifadesi yer aldığından bunu bir pivot değişkene dönüştürmek kolay olmaktadır. Normal dağılımda $((\bar{X}-\mu)/a)$ değişkeni pivot değişken olarak ortaya çıkmaktadır. Genel olarak, g herhangi bir fonksiyon ve Q, θ'nın değerinden bağımsız y'nin monoton fonksiyonu olmak üzere Y istatistiğinin koşullu yoğunluk fonksiyonu $f(y/\theta)$.

$$f(y/\theta) = g(Q(y,\theta)) \left| \frac{\partial}{\partial y} Q(y,\theta) \right|$$

şeklinde ifade edilir (1).

---

(1) Casella G., Berger. R.L. ,Statistical Inference, Wadsworth Co. California 1990, s. 414

Bir pivot'a sahip olduğumuzda bununla güven aralığını oluşturmak oldukça basittir. $Q(Y, \theta)$ pivot olmak üzere verilen bir α değeri için θ'dan bağımsız olarak bulabileceğimiz a,b sabitleri ile

$$P_\theta \ (a \leqslant Q(Y,\theta) \leqslant b) \geqslant 1-\alpha$$

olur. Her $\theta_o \in \Omega$ için H_o: $\theta = \theta_o$ hipotezinin α seviyesindeki kabul bölgesi

$$A(\theta_o) = \{ \ y : a \leqslant Q(y, \theta_o) \leqslant b \}$$

olur. Buradan, test istatistiğini kullanma yönteminde olduğu gibi güven bölgesi bulunabilir; veya doğrudan pivot değişkeni kullanarak θ için $(1-\alpha)$' lık güven bölgesi

$$C(y) = \{ \ \theta_o : a \leqslant Q(y,\theta_o) \leqslant b \ \}$$

olur.

1.2. PARAMETRİK OLMAYAN YAKLAŞIM

Parametrik olmayan (nonparametrik) yaklaşımda başlangıçta dağılımın bilinen bir dağılım olma kabulu yoktur. Yani $X_1,\ldots,X_n$ örneklemi herhangi bir dağılımdan alınmıştır.

1.2.1. Jackknife Yöntemi

Bilinmeyen bir F olasılık dağılımından $\mathbf{X} = (X_1, X_2,\ldots, X_n)$ rassal örneklemi verilince, gözlenen x verisi (data) esas alınarak, $R(\mathbf{X},F)$, bazı rassal değişkenlerin örnekleme dağılım takdiridir. (Standart Jackknife teorisi $R(\mathbf{X},F) = \theta(\hat{F}) - \theta(F)$ durumunda yaklaşık ortalama ve varyansı verir). Bu durumda ileri sürülen Bootstrap olarak adlandırılan bir metod, takdir problemlerin çeşitliliğinde uygun bir şekilde çalışır. Jackknife, bootstrap için doğrusal (linear) bir yaklaşım olarak görülür (2). Temelde ise Bootstrap metodunun Jackknife dan daha geniş bir uygulama alanı vardır.

---

(2) EFRON, B., Bootstrap methods: another look at the Jackknife., Ann. Statist. 7, 1979, s. 1-26

The Quenouille-Tukey Jackknife'i, ilgili istatistiğin varyans ve taraflı takdirleri için parametrik olmayan metodla ilgilenir.

1.2.2. Bootstrap Yöntemi

n ölçüsünde rassal bir örneklemin, tamamen özel olmayan F olasılık dağılımında gözlenen tek örneklem durumunu tartışalım.

$$X_i = x_i \quad , \quad X_i \sim_{ind} F \qquad i = 1,2,\dots,n \tag{1.2.2.1}$$

Çalışmamızda, F, ya gerçel doğru veya düzlem üzerinde bir dağılım olacaktır. Ama bunun teoride hiçbir rolü yoktur. $\mathbf{X} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ rassal örneklemi, $\mathbf{x} = (X_1, X_2, \dots, X_n)$ de onu gerçekleyen gözlemleri tanımlasın.

Çözmeye çalışacağımız problemimiz şudur : hem $\mathbf{X}$'e hem de bilinmeyen bir F dağılımına bağlı olması mümkün olan, verilen bir $R(\mathbf{X},F)$ özel rassal değişkenin, gözlem değeri $\mathbf{X}$'in temelinde, R örnekleme dağılımının takdirinin bulunmasıdır.

Geleneksel Jackknife teorisi, R' nin seçilen 2 özelliği üzerinde durur. $\theta(F)$, ortalamanın, korelasyonun veya F'in standart sapması gibi ilgilenilen bazı parametreleri olsun ve $t(\mathbf{X})$ de, örneklem ortalaması, örneklem korelasyonu veya örneklem rangın bir katsayısı gibi $\theta(F)$'in bir takdircisi olsun. O zaman

$$R(\mathbf{X}, F) = t(\mathbf{X}) - \theta(F) \tag{1.2.2.2}$$

in örnekleme dağılımı ya da daha doğrusu onun ortalaması (t taraflı) ve varyansı, standart Jackknife teorisi kullanılarak hesaplanır. Taraf ve varyans takdirleri $\widehat{Bias}(t)$ ve $\widehat{Var}(t)$, her defa $\mathbf{X}$'in bir elemanını devre dışı bırakıp, t(.)'yı n kez yeniden hesaplayarak elde edilen, akıllıca birleştirilmiş $\mathbf{X}$'in fonksiyonlarıdır. R'nin ikinci geleneksel seçimi

$$R(X,F) = \frac{t(X) - \widehat{Bias}(t) - \theta(F)}{(\widehat{Var}(t))^{1/2}} \tag{1.2.2.3}$$

dir.

Tek örnekler problemi için Bootstrap metodu oldukça basittir. Kuralları :

1) $x_1, x_2, \ldots, x_n$ noktalarının herbirine 1/n (kütleden) konularak, $\hat{F}$ örneklem olasılık dağılımı birleştirilir.

2) $\hat{F}$ sabiti ile $\hat{F}$ den n ölçülü bir rassal örneklem seçilir ve bunun

$$X_i^* = x_i^* \quad , \quad X_i^* \sim_{ind} \hat{F} \qquad i = 1,2,\ldots,n \qquad (1.2.2.4)$$

olduğu söylenir. Buna $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$, $\mathbf{x}^* = (x_1^*, x_2^* \ldots x_n^*)$ bootstrap örneklemi denir. $(x_1, x_2, \ldots, \mathbf{x}_n)$ kümesinden yerine konulmasıyla seçilen X^*' ın değerlerinden bir permütasyon dağılımı elde edilemiyecektir. Kıyaslama açısından, bilinen Jackknife, yerine koymaksızın n-1 ölçüsünde örneklem çekilir gibi düşünülebilir.

$$R^* = R(X^*, \hat{F}) \qquad (1.2.2.5)$$

R^*'ın bootstrap dağılımıyla, R(X,F)'ın yaklaşık örnekleme dağılımı, $\hat{F}$'ın ileri sürülen değerde sabit tutulmuş haliyle (1.2.2.4) rassal yöntemiyle sonuca ulaşılır.

Teoride bir kez data x ileri sürüldüğünde hesaplanabilecek R^*'ın dağılımı, $F = \hat{F}$ olduğu takdirde R' nin istenilen dağılımına eşitlenir. R dağılımlarının her parametrik olmayan takdircileri, y ni F şeklinde önceki sınır koşulları olmaksızın iyi takdir işi yapan biri, $F = \hat{F}$ olduğu zaman doğruya yakın bir cevap vermelidir.

Çünkü $\hat{F}$, ileri sürülen X = x'e sahip olan uygun F'ler sınıfı arasında merkezi bir noktadır. $F = \hat{F}$ için cevabı tamamen doğrulamak, belli takdir problemlerimiz için uygulanan Fisher uyumluluğudur.

Bootstrap metodunun mümkün olan en basit örneği gibi, bir F olasılık dağılımı tüm kütlesini sıfır veya bire konulduğu düşünülsün ve ilgilenilen parametre $\theta(F) = \mathrm{Prob}_F\{X = 1\}$ olsun. İlgilenilen rassal değişkenin en belirgini

$$R(X,F) = \bar{X} - \theta(F) \qquad \bar{X} = \left(\sum_{i=1}^{n} X_i/n\right) \qquad (1.2.2.6)$$

$X = x$ olduğu gözlenir ki, $X^* = (X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^*)$ bootstrap örneklemin her bir elemanı bağımsız olarak $\bar{X} = \theta(\hat{F})$ olasılığıyla 1'e, $1-\bar{X}$ olasılığıyla da sıfıra eşittir. Standart binom sonuçları

$$R^* = R(X^*, \hat{F}) = \bar{X}^* - \bar{x} \tag{1.2.2.7}$$

nın

$$E(\bar{X}^* - \bar{x}) = 0, \quad \mathrm{Var}_*(\bar{X}^* - \bar{x}) = \bar{x}(1-\bar{x})/n \tag{1.2.2.8}$$

ortalamasına ve varyansına sahip olduğunu gösterir. ("E_*" , "Var_*", "Prob_*" gibi notasyonlar, x ve $\hat{F}$ sabitiyle X^*' in bootstrap dağılımıyla ilgili olan olasılık hesaplarını gösterir).

2. örnek olarak $t(X) = \sum_{i=1}^{n} (x_i-\bar{X})^2/(n-1)$ takdircisini kullanarak gerçel doğru üzerindeki keyfi bir dağılımın varyansı, $\theta(F) = \mathrm{Var}_F X$ takdiri düşünülsün. Belki

$$R(\mathbf{X},F) = t(\mathbf{X}) - \theta(F) \tag{1.2.2.9}$$

in örnekleme dağılımını da öğrenebiliriz.

$\mu_k(F)$, $\mu_k(F) = E_F(X-E_F X)^k$ olan F' in k. merkezli momentini göstersin ve $\hat{\mu}_k = \mu_k(\hat{F})$, $\hat{F}$' ün k. merkezli momenti olsun. Standart örnekleme teorisi

$$R^* = R(\mathbf{X}^*,\hat{F}) = t(\mathbf{X}^*) - \theta(\hat{F})$$

nın

$$E_*R^* = 0, \quad \mathrm{Var}_*R^* = \frac{\hat{\mu}_4 - ((n-3)/(n-1))\hat{\mu}_2^2}{n} \tag{1.2.2.10}$$

olduğunu gösterir.

$\mathrm{Var}_F\, t(X) \approx \mathrm{Var}_* R^*$ yaklaşımı, $\mathrm{Var}_F t$ için (hemen hemen) Jackknife takdiridir.

Bootstrap yöntemin zor yönü, bootstrap dağılımın gerçek hesaplarıdır. Hesaplamada 3 metot mümkündür.

1. Metod : Yukarıdaki 2 örnek gibi, doğrudan teoriksel hesaplama

2. Metod : Bootstrap dağılımı için Monte Carlo yaklaşımı, X^{*}' ın tekrarlanan gerçekleştirimleri, $\hat{F}$ den n ölçülü (elemanlı), diyelim ki X^{*1} X^{*2},..., X^{*N} rassal örneklemler alarak meydana getirilir. Ve $R(X^{*1}, \hat{F})$, $R(X^{*2}, \hat{F})$,..., $R(X^{*N}, \hat{F})$'e karşılık gelen değerlerin histogramları, gerçek bootstrap dağılımların yaklaşımları olarak alınır.

3. Metod : Taylor serisinin açılım metodları, R^{*}' ın bootstrap dağılımının yaklaşık ortalaması ve varyansını elde etmede kullanılabilir.

1.2.3. Bootstrap Takdirleri İçin Jackknife Yaklaşımları

$\hat{T}_n$, $\hat{T}_n = T(\hat{F}_n)$ şeklindeki takdir olsun. Burada $\hat{F}_n$, i.i.d (indepent identically distributed)' den n elemanlı gözlemin cdf (cummulative distribution function) (birikimli dağılım fonksiyon)'nun örneklemi ve T, cdf' de tanımlanan yerel (bölgesel) kuadratik fonksiyondur. O zaman, çarpıklığın, taraflılığın Jackknife takdirleri gerçekleştirilir ve $\hat{T}_n$' in varyansı, hemen hemen aynı olan bootstrap karşılıklarına yaklaşır (3). Bu yaklaşımların herbiri sabittir. Dahası, Varyansın, Jackknife ve bootstrap yaklaşımları asimtotik olarak normal ve asimtotik olarak minimax dır. Başlıca sonuçlar, birinci-mertebe Edgeworth açılımı, $n^{1/2}$ $(\hat{T}_n - T(F))$ dağılımı için takdiri, ki burada F her gözlemin gerçek birikimli dağılım fonksiyonudur. Ve açılım katsayıları Jackknife takdiriyle bulunur, $n^{1/2}$ mertebesine kadar olan terimlere ve bunları kapsayarak karşılık gelen bootstrap dağılım takdirine asimtotik olarak denktir. Her iki dağılım, asimtotik olarak minimakstir. Jackknife Edgeworth açılım takdiri, T(F)'nin taraflılığın ve çarpıklığın alt ile üst güven sınırları için yararlı düzeltmeleri önerir.

1.2.4. Tekrarlı Örnekleme İşlemleri

$\hat{\theta} = \theta(\hat{F})$ istatiksel fonksiyonu gözönüne alınsın. Tekrarlı örnekleme vektörü

(3) BERAN, R.J., Estimated Sampling Distributions: the boststrap estimates, Ann. Statist. 12, 1984, 101-118

$$P^* = (P_1^* , P_2^*, \ldots, P_n^*)$$

herbiri basit n-boyutlu vektördür.

$$\varphi_n = \{P^* ; P_i^* \geqslant 0 , \sum_{i=1}^{n} P_i^* = 1 \} \qquad (1.2.4.1)$$

diğer bir anlamda herbiri olasılık vektörüdür. (4) Her P^*'ya karşılık bir bağıl değerine ait deneysel olasılık dağılımı $\hat{F}^*$ gelir.

$$\hat{F}^* : \text{Herbir } x_i\text{' de yoğunluğu } P_i^* \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (1.2.4.2)$$

ve $\hat{\theta}$'nın değeri, bir tekrarlı örneklemdir. $\hat{\theta}^*$ için

$$\hat{\theta}^* = \theta(\hat{F}(P^*)) = \hat{\theta}(P^*) \qquad (1.2.4.3)$$

söylenir. Örnekleme vektörlerin bazıları, bootstrap ve Jackknife teorilerinde özel roller oynarlar. Özellikle

$$P^o = (\frac{1}{n} , \frac{1}{n} , \ldots, \frac{1}{n}) \qquad (1.2.4.4)$$

$\hat{F}$ 'ın herbiri ve $\hat{\theta} = \hat{\theta}(P^o)$ istatistiğin gözönüne alınan değerine karşılık gelir. İstatistik'in $\hat{\theta}_{(i)}$' e karşılık gelen değeriyle

$$P_{(i)} = (\frac{1}{n-1} , \frac{1}{n-1} , \ldots, 0, \frac{1}{n-1} , \ldots, \frac{1}{n-1}) \qquad (1.2.4.5)$$

$(i = 1,2,\ldots,n)$ (i. yerde 0 dır).

Jackknife vektörleri gözönüne alınır.

Bootstrap μ^*/n formülü, tüm P^* vektörlerini dikkate alır. Çok terimli dağılım alt derecesi için uygun seçilen tekrarlı örnekleme vektörlerini söylemek için bootstrap algoritması diğer bir yönden tanımlanır.

---

(4) EFRON, B., The Jackknife, the Bootstrap and Other Resampling Plans, SIAM, Philadelphia, 1982, 37-39.

$$P^* \underset{*}{\sim} \frac{\text{Mult}_n(n, P^o)}{n} \qquad (1.2.4.6)$$

1/n olasılığına sahip her bir n kategorisinden n bağımsız olarak çekilir. " $\underset{*}{\sim}$ " sembolü, gerçek (doğal) değil, P^* da rassallığı meydana getirir. Burada

$$P_i^* = \frac{\#\{X_j^* = x_i\}}{n},$$

x_i' e eşit olan bootstrap örneklemin oranıdır. Bootstrap standart sapması ve taraflı takdirleri basit olarak

$$\hat{SD} = Sd_* \ \hat{\theta}(P^*)$$

ve

$$\widehat{BIAS} = E_* \ \hat{\theta}(P^*) - \hat{\theta}$$

dır. Sd_* ve E_*, (1.2.4.6) dakinin standart sapması ve beklenilen değeri gösterir. (1.2.4.6) dağılımı, ortalama vektöre ve kovaryans matrisine sahiptir.

$$P^* \underset{*}{\sim} (P^o, \frac{I}{n^2} - \frac{P^{o\prime}P^o}{n}) \qquad (1.2.4.7)$$

Burada I, nxn boyutlu özdeş matristir.

1.2.4.1. Standart Sapmanın Bootstrap Takdirleri ve Jackknife ile Arasındaki Bağıntı

Bu, $P_{(i)}$' de $\hat{\theta}(P^*)$ ile kabul edilen tek lineer fonksiyon $\hat{\theta}_{LIN}(P^*)$ dır. (i = 1,2,...,n)

$$\hat{\theta}_{LIN}(P^*) = \hat{\theta}_{(.)} + (P^* - P^o)\, U,$$

$$U_i = (n-1)(\hat{\theta}_{(.)} - \hat{\theta}_{(i)}) \quad , \quad (i = 1,2,\ldots,n)$$

<u>**Teorem 1**</u> **:** Jackknife standart sapması $\hat{\theta}$ için takdiri, $\hat{SD}_{JACK}(\hat{\theta})$ dir.

$$\hat{SD}_{JACK}(\hat{\theta}) = \sqrt{\frac{n}{n-1}}\; Sd_{*}\,(\hat{\theta}_{LIN}(P^{*})),$$

dır. Diğer anlamda $SD_{JACK}(\hat{\theta})$, yaklaşık olarak SD'nin bir bootstrap takdirinin kendisidir. $[\,n/(n-1)]^{1/2}\; \hat{SD}_{BOOT}(\hat{\theta}_{LIN})$'e eşitlenir. $[\,n/(n-1)]^{1/2}$ çarpanı, eğer $\hat{\theta}$ bir lineer fonksiyon ise $[Sd(\hat{\theta})]^2$ için tarafsız $[\hat{SD}_{JACK}(\hat{\theta})]^2$ yapılır. Lineer durumda tarafsız $[SD_{BOOT}(\hat{\theta})]^2$ yapmak için bazı çarpanları kullanabiliriz.

Teorem 1, bir önemli durumda yanıltıcıdır. $||P_{(i)} - P^{o}|| = 0\,(1/n)$ olduğu halde (1.2.4.6)'ya göre $||P^{*} - P|| = 0_p\,(1/\sqrt{n}\,)$ dır.

1.2.5. Tekrarlı Örnekleme İşleminde Varsayımlar

(A) $E_{*}\,(\prod_{j=1}^{k} P^{*}_{ij}) = a_k\;0,\; (i_1, i_2, \ldots, i_k)$ bağımsız alt kümesinde, k parametrelerin sayısıdır. (A), (B) ile kolaylıkla anlaşılır.

(B) 1. $\{P^{*}_{i}\}_{1}^{n}$, n rassal değişkenleri, değiştirilebilinir (5).

2. $Prob_{*}\,(P^{*} \geq k'$ ın büyüklüğü ispat edilir$) > 0$, burada P^{*}'ın ispat edilen değeri, $P^{*}_{i} > 0$ ile i.'nin toplam sayısıdır.

(B1) koşulu için tekrarlı örnekleme planı, simetriktir. (B2), k'dan $\geq$ olan ispatlanmış değere sahip bazı tekrarlı örneklemlerin en az birinin sağlanması için bir koşuldur.

<u>Teorem 2 :</u> Her tekrarlı örnekleme metodu için, (A) varsayımını gerçekleme :

$$\hat{\beta} = \frac{E_{*}\,|\,X^{T}D^{*}X\,|B^{*}}{E_{*}\,|\,X^{T}D^{*}X\,|}$$

Burada $|X^{T}D^{*}X\,|\,B^{*}$, Eğer $X^{T}D^{*}X$ tek ise, ifade sıfır olarak tanımlanır.

---

(5) BERAN, R.J., Estimated Sampling Distributions: the bootstrap estimates, Ann. İstatist. 12, 1984, 101-118.

İspatı için 2 yardımcı matris önermesiyle belirtebiliriz.

Lemma 1 : X ve Z, $n \geq k$ olmak üzere nxk boyutlu matrisler olsun. O zaman

(i) $$|X^T Z| = \sum_k |X_s| |Z_s| ,$$

(ii) $$|X^T Z| = \binom{n-k}{r-k}^{-1} \sum_r |X_s^T Z_s| \quad \text{her } r \geq k \text{ için,}$$

Burada $\sum_r$, r değerin tüm alt kümelerinin üzerindeki toplamayı tanımlar.

Lemma 1(i), Binet-Cauchy açılımıdır. Lemma 1(ii) her $|X_s^T Z_s|$ ve $|X^T Z|$ terim için Lemma 1(i)' e uygulanarak elde edilir.

Lemma 2 : X, nxk boyutlu matris olsun. $(n \geq k)$ O zaman $r \geq k$ için

$$\text{adj } X^T X = \binom{n-k+1}{r-k+1}^{-1} \sum_r \text{adj } X_s^T . X_s$$

Eğer $X_s^T X_s$, $(r \geq k)$ r değerin tüm s'leri için tek değildir.

$$|X^T X| \, (X^T X)^{-1} = \binom{n-k+1}{r-k+1}^{-1} \sum_r |X_s^T X_s| \, (X_s^T X_s)^{-1}$$

1.2.5.1. Tekrarlı Örnekleme Farkları İçin Bir Genel Metod

Tekrarlı örnekleme metodu, i. uygun değerle, i. farkdaki Jackknife' a benzer.

$$y_i^* = X_i^T \hat{\beta} + \frac{r_i}{\sqrt{1-w_i}} t_i^* , \quad i = 1,\dots, n \qquad (1.2.5.1)$$

Burada $r_i = y_i - x_i^T \hat{\beta}$, i. farkdır. (kalandır).

$w_i = x_i^T (^T.X)^{-1} x_i$ ve $t^* = (t_i^*)_1^n$, gereksinimle bir tekrarlı örnekleme metodunu uygun olarak elde edilir.

$$E_* t^* = 0 \quad , \quad Var_*(t^*) = I \tag{1.2.5.2}$$

y_i^* da LSE (least squares estimator)'e dayanır.

$$\hat{\beta}^* = (X^T X)^{-1} X^T y^* \quad , \quad y^* = (y_1^*, \ldots, y_n^*) \tag{1.2.5.3}$$

(1.2.5.1) de

β veya $\theta = g(\beta)$ hakkındaki vardama (1.2.5.3) de β^* içindeki değişkenliklerden oluşturulabilinir. Örneğin Var (θ) takdiri

$$V_* = E_*(\hat{\theta}^* - \hat{\theta})(\hat{\theta}^* - \hat{\theta})^T \quad , \quad \hat{\theta}^* = g(\hat{\beta}^{*\prime}), \quad \hat{\theta} = g(\hat{\beta})$$

ile yapılabilir.

$\theta = \beta$ lineer parametreleri için bu kolaylık (1.2.5.2) den kolaylıkla gösterilir ki

$$E_* (\hat{\beta}^*) = \hat{\beta}$$

ve

$$V_* = (X^T X)^{-1} \sum_{i=1}^{n} \frac{r_i^2}{1-w_i} x_i x_i^T (X^T X)^{-1}$$

dır. Lineer olmayan $\theta = g(\beta)$ için, V_* takdircisi, seçilen tekrarlı örnekleme * planına bağlıdır.

(1.2.5.2) sağlayan * tekrarlı örnekleme metodun iki örneğini verelim.

<u>(i) Denge Farkların Metodu</u> (Metod of Balanced Residuals)

t_i^* hataları, $[\delta_i^{(k)}] = \pm 1, \quad 1 \leq i \leq n, \quad 1 \leq k \leq R$ olan ve

$$\sum_{k=1}^{R} \delta_i^{(k)} = 0 \quad \text{tüm i için}$$

$$\frac{1}{R} \sum_{k=1}^{R} \delta_i^{(k)} \delta_j^{(k)} = 0 \qquad i \neq j \quad \text{için} \tag{1.2.5.5}$$

sağlayan $[\delta_i^{(k)}]$ Hadamard matrisinden seçilir. Hadamard matrislerin yapısını ve varlığındaki geniş incelemeleri, Hedayet ve Wallis (1978) de yapmışlardır. $y^{(k)} = (y_i^{(k)})_{i=1}^n$ olan k. örneklem

$$y_i^{(k)} = x_i^T \hat{\beta} + \frac{r_i}{\sqrt{1-w_i}} \delta_i^{(k)} , \quad i = 1,2,\ldots,n \qquad (1.2.5.6)$$

gibi tanımlanır ve

$$\hat{\beta}^{(k)} = (X^T X)^{-1} X^T y^{(k)} \qquad (1.2.5.7)$$

gibi LSE' ye karşılık gelir. V_* ,

$$\frac{1}{R} \sum_1^R (\hat{\theta}^{(k)} - \hat{\theta}) (\hat{\theta}^{(k)} - \hat{\theta})^T , \quad \hat{\theta}^{(k)} = g(\hat{\beta}^{(k)})$$

ifadesinin varyans takdircisidir.

Bu metod, katmanlı rassal örneklemler için "McCarthy' nın (1969) önderliğindeki "dengeli yarı-örneklemler" metoduyla aynıdır. Burada V_* tarafsızlığı, R'nın tekrarlı hesaplamalarında bir takdirci içindir. R aşağı yukarı n'e eşittir. Halbuki bootstrap, tarafsızlık sonucunu veya diğer küçük örneklem sonuçlarını devamı için sonsuz tekrarlı hesaplamaları gerekli bulur.

(ii) Jackknife-Bootstrap Karması : $(t_i^*)_1^n$ hataları

$$\sum_1^M a_j = 0 \ , \quad \frac{1}{M} \sum_1^M a_j^2 = 1$$

ile $\{a_j\}_{j=1}^M$ bir sonlu ana kütleden (yani i.i.d) bir bootstrap örneklemidir. $\{a_j\}$'nin seçimi, metodun üst düzeydeki performansını etkileyecektir.

$$a_j = (r_j - \bar{r}) / \left[\frac{1}{n} \sum_1^n (r_i - \bar{r})^2 \right]^{1/2} , \quad j=1,\ldots,n$$

gibi seçilmesi bir olanaktır.

1.3. PARAMETRİK OLMAYAN GÜVEN ARALIKLARI

Sık sık karşılaşılan parametrik olmayan güven aralığın yaklaşımı, $n^{1/2}\, T_{(0)}\,(F_n) \sim \mathcal{N}(0,1)$ yaklaşımına dayanır (6). Burada

$$T_{(0)}(F_n) = \{T(F_n) - T(F)\}/\sigma_T(F_n),$$

t-dağılım (Studentised) istatistiğidir. Bu, $1-\hat{\alpha} \approx 1-\alpha = \Phi(x)$ düzeyinde T(F) için tek-taraflı güven aralığı tekrar düzeltilerek

$$A^-:\ n^{1/2}\, T_{(0)}(F_n) \leqslant x \qquad \text{veya} \qquad A^+:\ n^{1/2}\, T_{(0)}(F_n) \geqslant -x$$

verilir ve $1-\hat{\alpha} \approx 1-\alpha = 2\Phi(x)-1$ düzeyinde T(F) için iki-taraflı güven aralığı yeniden düzenlenerek

$$A^{\pm}:\ n^{1/2}\, |T_{(0)}(F_n)| \leqslant x$$

gibi verilir. Yaklaşık güven aralıkların $1-\tilde{\alpha}-(1-\alpha)$ hatası tek-taraflı durumda $n^{-1/2}$ büyüklüğüne ve iki-taraflı durumda n^{-1} büyüklüğüne sahiptir. (Büyüklüğün iki-taraflı olanda yalnızca $n^{-1/2}$ olmamasının nedeni h_1'in sabit bir fonksiyon olmasıdır. Her $j \geqslant 1$ için hatalar $n^{-j/2}$ büyüklüğüne indirgenir. Bu $T_{(0)}(F_n)$'e $n^{-i/2}\, T_{(i)}(F_n)$ şeklindeki birbirini takip eden düzeltme terimleri eklenerek yapılır. Burada $T_{(i)}$, yukarıda gibi α'nın terimlerinde tanımlanan x'e bağlıdır. Bu nedenle $T_n(F_n)$ şeklindeki istatistikleri gözönüne almaya gereksinim vardır. Burada

$$T_n(G) \approx \sum_{i=o}^{x} n^{-i/2}\, T_{(i)}(G), \qquad G,\ \mathcal{F}_s \text{ de}$$

<u>Örneğin :</u> $T(F) = \mu(F)$ için

$$P(n^{1/2}\, T_{(0)}(F_n) \leqslant x) = \Phi(x) - n^{-1/2}\, \phi(x) h_1(x) + 0(n^{-1}),$$

Burada $h_1(x) =- \mu_3 \mu_2^{-3/2}\,(1+2x^2)/6$ Dolayısıyla $T_{(2)}(F) =- h_1(x)$ için

---

(6) HALL,P., Inverting on Edgewarth expansion., Ann. Statist 11, 1983, 569-576

$$P(n^{1/2}\,T_{(0)}(F_n) + n^{-1/2}T_{(2)}(F_n) \leqslant x) = \Phi(x) + O(n^{-1})$$

uygun şartlar altında

$T_n(F_n)$ dağılımı için bir açılım elde etmek için ilk önce bunun birikimlerini (cumulants) açmamız gerekir. Bu, $T(.) = \sum_{i=o}^{r} \lambda_i T_{(i)}(.)$ ve λ_i keyfi sayılar olduğunda a_{ri} de $\lambda_o^{jo} \ldots \lambda_q^{jq}$, ın katsayıları ve $j_o + j_1 + \ldots + j_r = r$, $(a_{ri})_j = (a_{ri})_{jo\ldots jq}$,'in terimlerinde yapılabilir.

<u>Lemma 3</u> : $T_n(F_n)$' de r. birikim, biçimsel

$$K_r(T_n(F_n)) \approx \sum_{k \geqslant 2r-2} b_{rk} n^{-j/2}$$

açılma sahiptir. Burada $b_{rk} = \sum_{r-1 \leqslant i \leqslant k/2} \; \sum_{k-2i} (a_{ri})_j$ dır.

ve $j = (J_o \ldots J_q)$ için $\{J_o + \ldots + J_q = r,\ 0.J_o + 1.J_1 + \ldots + qj_q = q\}$

üzerindeki toplamdır. Özellikle

$$b_{10} = (a_{10})_1 \;,\quad b_{11} = (a_{10})_{01} \;,\quad b_{22} = (a_{21})_2 \;;$$

$$b_{12} = (a_{11})_1 + (a_{10})_{001},\quad b_{23} = (a_{21})_{11} \;,\quad b_{34} = (a_{32})$$

$$b_{13} = (a_{11})_{01} + (a_{10})_{0001},\quad b_{24} = (a_{22})_2 + (a_{21})_{02} + (a_{21})_{101},$$

$$b_{35} = (a_{32})_{21} \;,\quad b_{46} = (a_{43})_4 \;,$$

ve

$$b_{14} = (a_{12})_1 + (a_{11})_{001} + (a_{10})_{00001},\quad b_{25} = (a_{22})_{11} + (a_{21})_{11} + (a_{21})_{1001},$$

$$b_{36} = (a_{33})_3 + (a_{32})_{12} + (a_{32})_{201},\quad b_{47} = (a_{43})_{31} \quad b_{58} = (a_{54})_5$$

<u>Teorem 3</u> : T(.), F' den bağımsız $\mathcal{F}_s$'de bir gerçel fonksiyon olsun. $J \geqslant 1$ için F de bağımsız,

$\{q_r(G,x)\ \mathfrak{F}_s X \mathfrak{R}$ de $r \geq 1$ için$\}$ gerçel fonksiyonları mevcuttur.

$$P(V_{jn}(F_n,x) \leq T(F)) = \Phi(x) + O(n^{-j/2})$$

tüm düzgün, yerinde (T,F) için

Burada $V_{jn}(G,x) = T(G) + \sum_{r=1}^{j} n^{-r/2}\, q_r(G,x)$

$q_1(F,x) = -[1^2]^{1/2} x$ ile ilk üç verilir.

$$q_2(F,x) = -[11]/2 + [1^2]^{-1}\{[1^3](1+2x^2) + 3[1,2,12](1+x^2)\}/6,$$

$$\begin{aligned} q_3(F,x) = {} & [1]^{1/2}(x+x^3)/2 + [1^2]^{-1/2}(4[1,11] + [12^2] + 2[1,122])x/4 \\ & - [1^2]^{-3/2}\{[1^4](5x+3x^3) + 6[1,2^2,12](5x+2x^3) + 6[1,2,13,23](3x+x^3) \\ & + 2[1,2,3,123](3x+x^3)\}/12 + [1^2]^{-5/2}\{[1^3]^2(23x+16x^3) \\ & + 48[1^3][1,2,12](2x+x^3) + 18[1,2,12]^2(5x+2x^3)\}/72 \end{aligned}$$

1.4. BİÇİMSEL EDGEWORTH AÇILIMIN GEÇERLİLİĞİ

$\{Y_n\}_{n \geq 1}$, m boyutlu rassal vektörlerki (i.i.d)'in dizisi olsun ve $f_1,\ldots,f_k$, R^m de gerçel değerli Borel ölçülebilir fonksiyonları olsun (7). $Z_n = (f_1(Y_n),\ldots,f_k(Y_n))$, $S \geq 3$ için sonlu momentlere sahip olduğu varsayılır. $W_n = n^{1/2}[H(\bar{Z}) - H(\mu)]$ biçiminin istatiksel dağılımının asimtotik açılımı ve normal yakınsamasının oranları, $\mu = EZ_1$'in komşuluğunda S'nin sürekli türevlerine sahip R^k da H fonksiyonlar için elde edilir. Bu asimtotik açılımın, ω_n dağılım fonksiyonun bir biçimsel Edgeworth açılımı ile benzer olduğu görülür. İstatistik sınıfın, örneklem momentlerin tüm uygun düzgün fonksiyonlarını içerdiği gözönüne alınır.

$$\omega_n = n^{1/2}(H(\bar{Z}) - H(\mu))$$

istatistiğini düşünelim. Burada H, R^k de gerçel değerli Borel ölçülebilir fonksiyonlarıdır ve

---

(7) BHATTACHARYA, R.H. and GHOSH, J.K., On the validity of the formal zdgeworth expansion., Ann. Statist. 6, 1978, 435-451.

$$Z_n = (f_1(Y_n), \ldots, f_k(Y_n)) \;, \quad \bar{Z} = \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} Z_i \;, \quad \mu = EZ_n$$

dir. Örneklem momentlerin tüm fonksiyonları $H(\bar{Z})$ şeklindedir. Örneğin $H(\bar{Z})$, eğer $m=2$, $k=5$, $f_1(y) = y^{(1)}$, $f_2(y) = y^{(2)}$, $f_3(y) = (y^{(1)})^2$, $f_4(y) = (y^{(2)})^2$, $f_5(y) = y^{(1)}y^{(2)}$, $(y = (y^{(1)}, y^{(2)})$ için) lardan biri alınırsa örneklem korelasyon katsayısı iki değişkenli olur. $H(Z) = (z^{(5)} - z^{(1)}z^{(2)})\,(z^{(3)} - (z^{(1)})^2)^{-1/2}\,(z^{(4)} - (z^{(2)})^2)^{-1/2}$, $(Z = (z^{(1)}, \ldots, z^{(k)})$ için) $\mu = (EY_1^{(1)}, EY_1^{(2)}, E(Y_1^{(1)})^2, E(Y_1^{(2)})^2, (EY_1^{(1)}Y_1^{(2)}))$ 'nün N komşuluğuna aittir ve $\{Z \in R^5 : z^{(3)} > (z^{(1)})^2,\ z^{(4)} > (z^{(2)})^2,\ -1 < H(z) < 1\}$ kümesini de içerir. H, N dışında keyfi olarak tanımlanabilir. Eğer Z_1, sonlu ikinci momentlere sahip ve H, μ'nün komşuluğunda sürekli türevli ise ω_n, ortalaması sıfır ve varyansı

$$\sigma^2 = \sum_{i,j=1}^{k} \nu_{ij}\, l_i l_j$$

ile bir limitli normal dağılıma sahip olur. Burada $V = ((\nu_{ij}))$, Z_1'in dağılma (dispersion) matrisidir ve

$$l_i = (D_i H)(\mu) = \left.\frac{\partial H(z)}{\partial z^{(i)}}\right|_{z=\mu} \qquad 1 \leq i \leq k \;;\; z=(z^{(1)}, \ldots, z^{(k)}),$$

(Bu çalışma boyunca ^{2}' nın pozitif olduğu kabul edilir).

<u>Teorem 4:</u> Eğer Z_1 sonlu üçüncü momentlerine sahip ise ve eğer H'ın tüm üçüncü mertebedeki türevleri, $\mu = EZ_1$' in komşuluğunda sürekli ise

$$\mathrm{Sup}_{B\in\beta} \int_{(\partial B)^{\varepsilon}} \phi_{\sigma^2}(\nu)\,d\nu = O(\varepsilon) \quad (\varepsilon \downarrow 0)$$

sağlayan Borel kümelerin her β kümesi için

$$\mathrm{Sup}_{B\in\beta} \left| \mathrm{Prob}\,(\omega_n \in B) - \int_B \phi_{\sigma^2}(\nu)\,d\nu \right| = O(n^{-1/2})$$

Burada ∂B, B' nin sınırıdır, $(\partial B)^{\varepsilon}$ ise B' nin ε-komşuluğudur ve

$$\phi_{\sigma^2}(\nu) = (2\pi\sigma^2)^{-1/2} \exp\{-\nu^2/(2\sigma^2)\} \qquad -\infty < \nu < \infty$$

dir.

$H(\bar{Z})$' nın asimtotik dağılımının σ^2/n varyansı ve $H(\mu)$ ortalaması, $H(\bar{Z})$' nın varyansı ve ortalaması değildir. Gerçekten bazı ortak örneklerde (yani t-istatistiği, örneklem korelasyonu gibi) $H(\bar{Z})$'nin üst momentleri ve ortalaması sonlu bile olamaz. Bu μ etrafında $H(\bar{Z})$ açılımıyla ω_n'nin yaklaşık momentlerinin hesaplamaları için istatistikçilerin uygulamaları arasındaki genel pratikliktir. Terimlerin belli bir sayıda korunarak, beklenen terim alınır ve uygun bir üsse yükseltilir. Bu <u>Delta Metod</u> diye adlandırılır. Bu yaklaşık (approximate) momentler, ω_n' nin dağılım fonksiyonun bir biçimsel Edgeworth açılımını elde etmek için bazen kullanılır.

2. BOOTSTRAP YÖNTEMLERİ

$X_1, X_2, \ldots, X_n \overset{i.i.d}{\sim} F$ ve $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n)$ bir istatistik olmak üzere $\hat{\theta}$ istatistiğinin standart sapması

$$Sd = \sigma(F,n,\hat{\theta}) = \sigma(F) \tag{2.1}$$

olur (8). $\sigma(F,n,\hat{\theta})$ bir fonksiyondur. (F,n, ve $\hat{\theta}$'ya bağımlı bir fonksiyon) Buradaki standart sapma bilinmeyen F dağılımının fonksiyonu olmaktadır. Standart sapmanın bootstrap takdircisi $F = \hat{F}$ olmak üzere

$$S\hat{D} = \sigma(\hat{F}) \tag{2.2}$$

olmaktadır. Buradaki $\hat{F}$, F'nin parametrik olmayan maksimum olabilirlik takdiridir.

<u>Örnek 1 :</u> $\hat{\theta}(X_1, X_2, \ldots, X_n) = \bar{X}$ olursa $\bar{X}$' in standart sapması

$$\sigma(F) = \left[\frac{\mu_2}{n}\right]^{1/2}$$

olup, buradaki $\mu_2 = E_F\,[X-E_F(X)]^2$ yani F'in ikinci merkezlenmiş momentidir. Dolayısıyla

$$S\hat{D} = \sigma(\hat{F}) = \left[\frac{\hat{\mu}_2}{n}\right]^{1/2} \tag{2.3}$$

olup $\hat{\mu}_2 = \sum_{i=1}^{n} [x_i-\bar{x}]^2/n$ olur.

$V\hat{A}R = \hat{\mu}_2/n$ Bootstrap varyans takdiri olup sola sapmalıdır.

$$E_F\,(V\hat{A}R) = E_F\left[\frac{\hat{\mu}_2}{n}\right] = \frac{n-1}{n}\cdot\frac{\mu_2}{n}$$

$$= \frac{n-1}{n}\,\mathrm{Var}\,\{\bar{X}\}$$

---

(8) EFRON, B., daha önce adı geçen kitabından

$\hat{\theta} = \bar{X}$ olduğunda $\hat{VAR}$ tarafsızdır (unbiased) yani $\hat{SD} = [\, n/(n-1)]^{1/2}\, \sigma(\hat{F})$ olur. Fakat bu Sd' in en iyi takdiri değildir.

(i) SD 'nin Monte-Carlo Değerlendirilmesi :

Genellikle $\sigma(F)$ fonksiyonu açık olarak ifade edilemez. Bu durumda SD' nin hesaplanması için Monte-Carlo algoritmasını uygulamak zorunlu olur.

a) F' in parametrik olmayan MLE (Monte Carlo Evaluation) u bulunur.

$$\hat{F} : \text{her } x_i \text{ noktasında yoğunluğu } \frac{1}{n} \text{ dir. } i=1,2,\ldots,n \tag{2.4}$$

b) $\hat{F}$ den bir bootstrap örneklemi çekilir.

$$X_1^*,\ X_w^*, \ldots,\ X_n^* \overset{iid}{\sim} \hat{F}\ , \tag{2.5}$$

ve $\hat{\theta}^* = \hat{\theta}(X_1^*,\ X_2^*, \ldots,\ X_n^*)$ hesaplanır.

c) b. basamak B defa tekrarlanarak $\hat{\theta}^{*1},\ \hat{\theta}^{*2}, \ldots,\ \hat{\theta}^{*3}$ elde edildikten sonra

$$\hat{SD} = \frac{1}{B-1} \{ \sum_{b=1}^{B} [\, \hat{\theta}^{*b} - \hat{\theta}^* \,]^2 \}^{1/2} \tag{2.6}$$

hesaplanır. Burada $\hat{\theta}^* = \sum_{b=1}^{B} \hat{\theta}^{*b}/B$ dir.

$B \longrightarrow \infty$ için (2.6) = (2.2) olur. Pratikte bootstrap işlemi erken veya geç bitirilebilir. Erken bitirme tercih edilir. Çünkü hesaplama maliyeti az olur.

2.1. BOOTSTRAP YÖNTEMİ ve GÜVEN ARALIKLARI (ON THE BOOTSTRAP CONFIDENCE INTERVALS)

"t" İstatistiklerin çok geniş sınıfı için uygulanan parametrik olmayan bootstrap tekniği için kapsama olasılığını, koşulsuz Edgeworth-tipi açılımındaki ilk terimin formül değerini kesin olarak çıkarırız (9).

---

(9) HALL, P., On the Bootstrap and Confidence Interials, Ann Statisc., 14, 1986 , 1431-1452.

Bu sınıf, örneklem ortalamasını, k. örneklem ortalamasını, örneklem korelasyon katsayısını ve ortalama vektörün fonksiyonu gibi tariflenen maximum olabilirmlik takdircilerini içerir. Önerilen bootstrap, bir Edgeworth açılımındaki birinci terimin tamamıyle takdiri olan bootstrap similasyonları ile gerçekten Edgeworth tersinde deneysel bir terimdir.

Bootstrap yöntemi, güven aralıkların kapsama olasılıkların farklı görüş noktalarındaki problemde, kolayca tersini alma bakımından iki önemli avantaja sahiptir. Bu avantajlardan biri düzgünlük (smooth) (yani tek biçimde) diğeri de otomatikliktir (yani açılımın birinci terimin başlangıçta teoriksel hesaplamaya ihtiyaç duyulmaz).

Bootstrap, kendiliğinden oluşan, küçük bir yöntem hatasından gerçeğe yakın tahmin oluşturmak için tekrarlanır. Bootstrap iterasyonu, Abromovitch ve Singh, Hall veya Withers tarafından savunulan Edgeworth düzeltmelerinden çok farklıdır. Bu tekniklerin hepsi terimlerin kesin heaplanmasını gerektirir. Kıyaslanırsa bootstrap iterasyonu hesap gerektirmez. Tüm düzeltmeler, tekrarlı örnekleme işlemlerin sıralı kümelenmeleriyle kesindir.

Bootstrap'a Cornish-Fisher'in bakışı :

$S = n^{1/2}\,(\hat{\theta}-\theta)/\,\hat{\sigma}$, genel bir t istatistiği olsun. Bir çok durumda S, bir Edgeworth açılımını X' de aynı tarzda kabul eder.

$$P\{n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma} \leqslant x\} = \Phi(x) + \sum_{j=1}^{k} n^{-j/2}\,\pi_{1j}(x)\,\phi(x) + 0(n^{-k/2})$$

Burada π_{ij}, 3j-1 derecede bir polinomdur. Bu olduğu zaman bu açılım, Cornish-Fisher (ters)'in bir açılımını oluşturmak için tersine çevirilir.

$$P\{n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma} \leqslant x + \sum_{j=1}^{k} n^{-j/2}\,\pi_{2j}(x)\} = \Phi(x) + 0(n^{-k/2})$$

kompakt aralıklarda bu aynı tarzdadır. Burada $\{\pi_{2j}\}$, polinomların yeni sırasıdır. Alternatif olan denk şekil

$$P\,[\,n^{1/2}\,(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma} \leq z(\alpha) + \sum_{j=1}^{k} n^{-j/2}\,\pi_{2j}\,\{z(\alpha)\}\,] = \alpha + O(n^{-k/2})$$

$\alpha \in (\varepsilon,\ 1-\varepsilon)$ de aynı tarzdadır (her $\varepsilon > 0$) Burada z, $\Phi(z) = \alpha$'nın bir çözümüdür.

π_{2j}' nin katsayısı, momentlerden dolayı örnekleme dağılımına bağlıdır. π_{2j}, her ana kütle momentinin yerini tutan örneklem momentinin yer değişmesi ile π_{2j}' nin tanımını göstersin. Her $\alpha \in (0,1)$ için her k (modül düzenlik koşulları) yı göstermek zor olmaz.

$$t_{\alpha} = z(\alpha) + \sum_{j=1}^{k} n^{-j/2}\,\Pi_{2j}\,\{z(\alpha)\} + O_p(n^{-k/2})$$

($n \longrightarrow \infty$ giderken) Bu durumda, bootstrap kritik noktası t_{α}, Cornish-Fisher'in deneysel ters açılımlarıyle elde edilen kritik nokta taktirine asimtotik olarak denktir.

2.2. PARAMETRİK ve PARAMETRİK OLMAYAN BOOTSTRAP YÖNTEMLERİ

$\hat{\theta}$ ve $\hat{\sigma}$ 'nın rassal n-örneklemli $\mathcal{X}$'den kurulduğunu kabul edelim. Parametrik durumda, örnekleme dağılımının yoğunluğu kabul edilen h_{λ}, bilinmeyen parametrelerin bir λ vektörü hariç, tamamıyla tespit edilir. λ takdiri için $\mathcal{X}$ kullanılır. (Max olabilirlik gibi) ve h_{λ} yoğunluğu ile ana kütleden çekilmiş rassal n örneklemi için $\mathcal{X}^{*}$ yazılır. Biz $\mathcal{X}^{*}$' ya bir "tekrarlı örneklem" olarak adlandırınız. Parametrik olmayan durumda, $\mathcal{X}^{*}$, $\mathcal{X}$'dan (yerine konularak) rassal olarak kolaylıkla çekilir (10). Her iki durumda $\hat{\theta}^{*}$ ve $\hat{\sigma}^{*}$, $\hat{\theta}$ ve $\hat{\sigma}$'nın takdircileri olabilir. (Fakat $\mathcal{X}$ örneklem yerine $\mathcal{X}^{*}$ tekrarlı örneklem geçmesiyle)

Bootstrap yönteminin parametrik ve parametrik olmayan tanımlarının açıklanmasında iki örnek bize yardımcı olur.

---

(10) HALL, P., Theoritical Comparision of Bootstrap Confidence Intervals, Ann. Statisc., 16, 1988, 927-953.

İlk olarak bir parametrik ortamın içinde olduğumuzu kabul edelim ve $\hat{\theta}$ ile $\hat{\sigma}$, bootstrap yöntemin takdircileri olsun (ki bu deneysel fonksiyonlar dağılım fonksiyonun yerine gelen fonksiyonlarla elde edilir). Bilinmeyen parametre vektörü λ, $\hat{\theta}$'nın merkezi ve ölçek fonksiyonu olsun ve $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\sigma$ ve $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma}$ istatistikleri merkezilik ve ölçek bakımından değişmezlik (invariant) özelliğine sahip olsun. Durumlar; $N(\theta, \sigma^2)$ ana kütlesindeki θ'nın sonucunu içeren noktada ve bir üstel dağılımın θ ortalaması hakkındadır. Daha sonra $n^{1/2}(\hat{\theta}^*-\theta)/\hat{\sigma}$ ve $n^{1/2}(\hat{\theta}^*-\theta)/\hat{\sigma}^*$ dağılımları sırasıyla $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\sigma$ ve $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma}$ değerlerine eşittir. ($\mathcal{X}$'de koşullu veya koşulsuz her iki durumda).

Şimdi parametrik varsayımlar yapmaksızın bir sürekli dağılımın, θ ortalama takdirini düşünelim. $\hat{\theta}$ ve $\hat{\sigma}^2$, sırasıyla örneklem ortalaması ve örneklem varyansını tanımlasın. Varyans n-1 den ziyade n bölenlidir. O zaman $\mathcal{X}$'de koşullu $n^{1/2}(\hat{\theta}^*-\hat{\theta})/\hat{\sigma}$ ve $n^{1/2}(\hat{\theta}^*-\hat{\theta})/\hat{\sigma}^*$ dağılımları, sırasıyla $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\sigma$ ve $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma}$ koşulsuz dağılımlarına yaklaşır.

Şunu da belirtmemiz gerekir ki bootstrap ana kütle momentleri, $\hat{p}$ ve $\hat{q}$ gibi bootstrap polinomların katsayılarına bağlı olanlarda, parametrik ve parametrik olmayan durumlar farklı açıklamalara sahiptir. Parametrik durumda bootstrap ana kütle momentleri h_λ yoğunluğu ile ilgili momentler, parametrik olmayan durumda da $\mathcal{X}$ örneklemin momentleridir. Parametrik durumda $\int x\, h_\lambda(x)dx$ ifadesinin $\mathcal{X}$'in $\bar{X}$ ortalamasına eşit olduğunu kabul ederiz. Örneğin eğer h_λ, üstel ailesinden ve $\hat{\lambda}$ maksimum olabilirlik takdiri ise bu doğrudur.

2.3. PARAMETRİK OLMAYAN BOOTSTRAP GÜVEN ARALIKLARI

Bu bölüm, parametrik olmayan hallerde küçük örneklemde, yaklaşık güven aralıklar oluşturulmasıyla ilgilenen son derece tahmin niteliği olan durumu içermektedir.

Reel doğru üzerindeki bir F dağılımının medyanı için, bir güven aralığı oluşturma olan ve bilinen bir sahadan başlayalım. Tipik değer teoremi, bu durumda medyan için standard sıralı istatiksel aralıklara indirgenir. Örneklem medyanın bootstrap dağılımı alınır. Bu, bootstrap dağılımının teorik hesabı mümkün olduğu bir durumda olur. Buradan anlaşılacağı gibi medyan için bootstrap dağılımının yüzdebirlikleri (percentile) klasik güven aralıklarını da sağlamaktadırlar. Percentile metod olarak adlandırılan ve bootstrap dağılımlarında kullanılan bu metod, görünümün farklı teorik noktalarında kanıtlanır ve ilerlemeler önerilir.

2.3.1. Medyan

F, $\theta = \inf_t [\mathrm{Prob}\{X \leqslant t\} = 5\}$ şeklinde tanımlanan θ medyanı ile $\mathbb{R}^1$ de bir dağılım olsun. Kolaylık olsun diye F'in sürekli olduğunu farzedelim. F'den i.i.d (independent identically distributed) bir $X_i = x_i$, $(i = 1,2,\ldots n)$ örneklemini dikkate alalım. $X_{(1)} < X_{(2)} < X_{(3)} < \ldots < X_{(n)}$ sıralı istatistiğini kullanarak θ için doğru güven aralıklarını kurabiliriz.

$$b_{k,n}(p) = \binom{n}{k} p^k (1-p)^{n-k} \tag{2.3.1.1}$$

Dikkate alınan k' nın binom olasılığı, başta P olasılığına sahip bir paranın n kere bağımsız atılmasıyla (2.3.1.1) tanımlanır. Rassal değişken

$$Z = \# \{X_i < \theta\} \tag{2.3.1.2}$$

$P = \frac{1}{2}$, $Z \sim B_i(n, \frac{1}{2})$ ile bir binom (binomial) dağılımına sahiptir. $\{X_{(k1)} < Q \lneq X_{(k2)}\}$ olayı $\{k_1 \leqslant z < k_2\}$ olayı ile aynı olduğundan dolayı

$$\mathrm{Prob}_F \{X_{(k_1)} < \theta \leq X_{(k_2)}\} = \sum_{k=k_1}^{k_2-1} b_{k,n}(.5) \tag{2.3.1.3}$$

dır. (2.3.1.3)' in kullanımının örneği için, n=13, $k_1 = 4$, $k_2 = 10$ alınsın. O zaman bir binom tablosu

$$\mathrm{Prob}_F \{X_{(4)} < \theta \leq X_{(10)}\} = .908 \tag{2.3.1.4}$$

verir.

Bu iki takibeden olasılıkları eşittir.

$Prob_F\{\theta \leq X_{(4)}\} = Prob\{Z \leq 3\} = .046$ ve

$Prob_F\{\theta > X_{(10)}\} = Prob\{Z \geq 10\} = 0.046$ $(X_{(4)}, X_{(10)}]$ bu durumda, θ için % 90.8 güven aralığın bir merkezidir.

2.3.2. Medyan İçin Bootstrap Teoremi

Bir örneklem medyanın bootstrap dağılımı teorik olarak, Monte Carlo metoduna başvurmaksızın hesaplanabilmektedir. Burada tek değerli örneklemi düşünmek uygundur. n=2m-1 diyelim. O zaman $\hat{\theta}$ örneklem medyanı $X_{(m)}$ orta sıralı istatistiğe (middle order statistic) eşitlenir.

$X_1^*, X_2^*, \ldots, X_n^* \overset{iid}{\sim} \hat{F}$ bootstrap örneklemi, $\hat{\theta}^* = X^*_{(m)}$ bootstrap örneklem medyanına yani X_i^* nin m. sıralı değerine sahiptir. $j = 1,2,\ldots,n$

$$\mu_j^* = \# \{X_i^* = x_{(j)}\} \qquad (2.3.2.1)$$

tanımlanır. $\{X^*_{(m)} > X_{(k)}\}$ olayı $\{\sum_{j=1}^{k} \mu_j^* \leq m-1\}$ 'e eşdeğerdir. Dolayısıyla

$$Prob_*\{\hat{\theta}^* > X_{(k)}\} = Prob_* \sum_{j=1}^{k} \mu_j^* \leq m-1\}$$

$$= Prob\{Bi(n, \frac{k}{n}) \leq m-1\} = \sum_{j=o}^{m-1} b_{j,n}(\frac{k}{n})$$

(2.3.2.2)

Burada $\sum_{j=1}^{k} \mu_j^* \sim Bi(n, \frac{k}{n})$ ifadesini ve (2.3.1.1) tanımını kullanıyoruz. Bundan dolayı $\hat{\theta}^*$' ın bootstrap dağılımı, bootstrap olasılığı ile $X_{(1)} < X_{(2)} < \ldots < X_{(n)}$ değerleri üzerinde toplanır. $X_{(k)}$'a eşitliğine $P_{(k)}$ diyelim.

$$P_{(k)} = \text{Prob}_*\{\hat{\theta}^* = x_{(k)}\} = \sum_{j=o}^{m-1} \{b_{j,n}(\frac{k-1}{n}) - b_{j,n}(\frac{k}{n})\} \quad (2.3.2.3)$$

Örnek : n = 13 için bootstrap dağılımı aşağıdaki gibidir.

$P_{(k)}$	.0000	.0015	.0142	.0550	.1242	.1936	.2230
k	1	2	3	4	5	6	7

,

$P_{(k)}$	.1936	.1242	.0550	.0142	.0015	.0000
	8	9	10	11	12	13

Standart sapmanın bootstrap takdiri

$$\hat{\sigma}_{BOOT} = [\sum P_{(k)}x_{(k)}^2 - (\sum P_{(k)}x_{(k)})^2]^{1/2} \quad \text{dir.}$$

2.3.3. Percentile Metodu

Şimdi de, $\hat{\theta} = \theta(\hat{F})$' ın bootstrap dağılımı üzerine bahsedilen herhangi bir reel değerli $\theta = \theta(F)$ parametresine yaklaşık güven aralıkları tahsis edilmesi için basit bir metoddan bahsedeceğiz.

$$\hat{CDF}(t) = \text{Prob}_*\{\hat{\theta}^* \leqslant t\} \quad (2.3.3.1)$$

ifadesi, $\hat{\theta}^*$' ın bootstrap dağılımının birikimli dağılım fonksiyonu (cumulative distribution function) olsun. (Eğer bootstrap dağılımı, Monte Carlo metodu ile elde edilirse o zaman $\hat{CDF}(t)$ ifadesi, $\#\{\hat{\theta}^{*b} \leq t/B\}$ ile yaklaştırılır. 0 ve .5 arasında verilen bir α için genellikle basit olsun diye $\hat{\theta}_{LOW}$, $\hat{\theta}_{up}$ ile

$$\hat{\theta}_{LOW}(\alpha) = \hat{CDF}^{-1}(\alpha) \quad , \quad \hat{\theta}_{up}(\alpha) = \hat{CDF}^{-1}(1-\alpha) \quad (2.3.3.2)$$

ifadeleri tanımlanır. Percentile metod, θ için $1-2\alpha$ yaklaşık merkezi güven aralığı olarak

$$[\ \hat{\theta}_{LOW}(\alpha),\ \hat{\theta}_{up}(\alpha)\ ] \tag{2.3.3.3}$$

nın alınmasını içermektedir. $\alpha = \hat{CDF}\ (\hat{\theta}_{LOW})$, $1-\alpha = \hat{CDF}\ (\hat{\theta}_{up})$ olduğundan, percentile metod, bootstrap dağılımının, $1-2\alpha$ merkezine oranını içerir.

3. BOOTSTRAP YÖNTEMLERİNİN KARŞILAŞTIRILMASI

Tek değişkenli bir dağılımın θ parametresi için güven aralıkları oluşturmada, literatürde çok sayıda bootstrap yöntemi vardır. Genel kullanımında en az 5' ini tanımlayabiliriz. Bunlar; Yüzdelik (percentile) metodu olarak adlandırılan metod (bu bölümde kritik noktası $\hat{\theta}_{BACK}$ ile gösterilecektir). Yüzdelik-t metodu ($\hat{\theta}_{STUD}$ ile gösterilmektedir). Karma metod (bu bölümde $\hat{\theta}_{HYB}$ ile gösterilmektedir). Taraflı-düzeltme (bias-corrected) metodu (bu bölümde $\hat{\theta}_{BC}$ ile gösterilmektedir) ve ivmeli taraflı-düzeltme (accelerated bias-corrected) ($\hat{\theta}_{ABC}$ ile gösterilmektedir). [Teknik olmayan istatiksel çalışmaların büyük çoğunluğu, güven aralıklarının oluşturulmasında kullanılan bootstrap metodların kullanıldığı 5 istatiksel tekniğin açıklamasını yapmamaktadır. Bizim araştırmamız, yüzdelik metodunun (yüzdelik-t değil) yarıdan çok kullanıldığını ve hemen hemen geri kalanların tümünde de karma metodunun kullanıldığını göstermiştir.] Bu bölümdeki amacımız değişik bootstrap kritik noktaların tartışılması, karşılaştırılması ve değerlendirilmesiyle birleştirilmiş teorik yapıyı geliştirmektir. Biz çeşitli sonuçların oluşturulması ve bootstrap kritik noktaların tayin edilmesiyle ilgili bir kaç yöntem üzerinde çalışacağız.

θ'nın takdircisi $\hat{\theta}$, asimtotik varyans $n^{-1}\sigma^2$ ile n elemanlı örneklemeye dayanır. σ^2'nin takdircisi $\hat{\sigma}^2$ olsun. Teorik kritik noktalarda çeşitlilik vardır ki bunlar bilinen $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\sigma$ ve $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma}$ nin dağılımları, ideal durumlarda kullanılabilir. Eğer σ'yı bilirsek $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\sigma$ 'nın dağılımı için "normal dağılım" tablolarına bakabiliriz ve eğer σ bilinmiyorsa $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma}$ 'nın dağılımı için "t" tablolarına bakabiliriz. Şu bir gerçektir ki eğer elde ettiğimiz bu tabloları karıştırır veya alt kartille üst kartili şaşırırsak, hatalarımız olacaktır. Bununla birlikte eğer yanlış tabloları kullanmaya devam edersek, çok az farklı ihtimal düzeylerini gözönüne alarak bazı hatalarımız telafi edilebilir. Örneğin t-tabloları kullanılması gerekli olduğu zaman eğer standart normal tablosu kullanılırsa ve 5 elemanlı örneklem için % 5 'in üstünde kritik noktasını aradığımızda % 5 noktası yerine % $2\frac{1}{2}$ noktasına baktığımızda hatamızı düzeltebilirdik.

Bizim tartıştığımız bir çok bootstrap kritik noktaları, teorik kritik noktaların sadece temel bootstrap taktiridir ve bunlar sık sık yanlış tablolara bakılmasıyla elde edilir. Bootstrap yaklaşımı o kadar iyidir ki; eğer teorik kritik noktaların hatalı bootstrap takdirini kullanırsak, göze çarpan hatalar belirir. Karma metodunun genel kullanımında bootstrap kritik noktaları, yanlış tablolardan bakıldığı değere eşittir ve yüzdelik metod kullanımında kritik nokta, yanlış tabloya tersinden bakmakla bulunur. Taraflı düzeltme metodları, yanlış tabloların tersinden bakılmasından oluşan hataların bazıların düzeltmek için, ihtimal seviyesindeki düzeltmeleri kullanır. Birleştirilmiş çatıyı geliştirmeye uygun olmamalarına karşın bootstrap kritik noktalarını göstermenin başka bir çok yolu vardır. "Normal dağılım" ve "t-dağılım" tablolarına baktığımızda aralarındaki farklılıklar tartışılarak bazen şu şekilde gösterilebilinir; eğer σ biliniyorsa $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\sigma$ önemlidir. Halbuki eğer σ bilinmiyorsa $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma}$ önemliydi. Bununla birlikte sık sık ortaya çıkan bu durumda bu niceliklerin hiçbiri, sonuçta ortak kullanılan terim durumunda tamamen önemli değildir (11).

Çalışmamızdaki teknik yardımlardan biri, takdircilerin çok değişkenli ortalama vektörün fonksiyonları gibi ifade edilebilen durumdaki parametrik olmayan bootstrap ve çok değişkenli üstel aile modellerindeki parametrik bootstrap gibi 2 önemli durumda Efron'nun varsayımlarını doğrulamak yönündedir. Şimdiye kadar varsayımın doğrulanması tek değişkenli ve parametrik modellerle sınırlanmıştır.

Bizim tartışmamız ikinci mertebedeki doğrulukların, tek taraflı güven aralıkları için fazlasıyla önemli olmasıdır. Fakat bu durum çok sık tartışılmış olsa bile çift taraflı aralıklar için bunun etkisi azalmaktadır. İşte aralık uzunluğu, ikinci-mertebe karakteristik özelliğin kapsama etkisine sahip olmasına rağmen, ikinci-mertebenin özelliğinden çok, üçüncü mertebeden etkilenmektedir. Bizim iddiamız, yüzdelik-t' nin üçüncü mertebedeki doğru terim almada, ivmeli taraflı-düzeltmeden daha iyi iş yapmasıdır ve doğru seçilen varyans takdiri $\hat{\sigma}^2$ ispatlanmıştır.

---

(11) HALL, PETER; SPECIAL INVITED PAPER; Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals, Ann. Statist. 1988, 927-953.

Kural olarak gösterilmiştir ki; Booststrap aralıkların çoğu verilen kapsamda minimum uzunluğa sahip olması için tanımlanmadığından kapsam, aralık uzunluğuna direk bağlı değildir. Bununla beraber yüzdelik-t aralıklarından daha dar, en dar bootstrap güven aralığını kurmak mümkün olabilir. Tuhaftır ki; bu dar aralıklar önemli durumlarda daha dar aralıklara kadar indirgenir.

Kritik noktaların karşılaştırılmasında vurgulamamız gereken nokta, bootstrap metodların tamamen değerlendirilmesi için gerekli olan bilgilerin sadece bir bölümünü kapsamasıdır. Similasyon çalışmaları ve gerçek veri için uygulamalar, değerli ek bilgiler sağlamaktadır. Bununla beraber, genellikle ana kütlesinden yararlandığımız; Yüzdelik metod (yüzdelik-t metodundan ayrı olarak) Karma metod ve Taraflı-düzeltme metod (ivmeli taraflı-düzeltmeden ayrı olarak) gibi birkaç bootstrap metodu üzerinde güçlü bir duruma varıldığını, bu çalışmada ileri sürmekteyiz. Seçimimiz tamamen net olmasada, ivmeli taraflı-düzeltmeden üstün olan yüzdelik-t' yi tercih ederiz. Bizim kararımız, iki taraflı güven aralıkların özellikleri üçüncü mertebede dayandığıdır. Tekrar örnekleme yapmaksızın ikinci mertebeyi meydana getirmek ve hatta analitik düzeltmeler yoluyla kritik noktaların üçüncü-mertebede doğruluğu için bazı planlar bulunmaktadır. Analitik olduğu kadar tekrarlı örnekleme ile bulunan sonuçlarda doğrudur. Diğer bir taraftan, ivmeli taraflı-düzeltme, yüzdelik-t tarafından parçalanmamış transformasyonları altındaki değişmezlik prensibinin (invaryansının) kullanışlı özelliklerinden yararlanmaktadır.

Küçük örneklem için eşit-uzantılı ivmeli yanlı düzeltme aralıkların similasyonları ve eşit geniş kapsam, verilen örneklem için, kapsamın artması nedeniyle bir noktada aralıkların daraltılma gerçeği yüzünden anormal dar aralıklar meydana getirilebilir. Şunu da belirtmemiz gerekir ki bazı durumlarda "Suboptimal" (alt optimal çözüm) işlemini kullanmak için pratik nedenler vardır. Yüzdelik metod'la ilgili eleştirilerimiz ve ivmeli taraflı-düzeltmeden üstün olan yüzdelik-t için tercihimiz σ^2'nin sabit takdiri geçerli olmadığı zaman, etkisinin çoğunu kaybeder.

İleriki bölümde, $\hat{\theta}$ ve $\hat{\sigma}$ takdircileri için genel bir modelini tartışıp, Edgeworth açılımı ve Cornish-Fisher açılım teorisinin elemanlarını yeniden gözden geçireceği. İddialarımızın çoğu, bootstrap kritik noktaların Cornish-Fisher ters açılımlarına ve kapsam hataların Edgeworth açılımlarına dayandığıdır.

3.1. EDGEWORTH AÇILIMI ve CORNISH-FISHER TERSİ

$A(\mu) = 0$' yi sağlayan sürekli fonksiyon $A: R^d \longrightarrow R$ olsun. Daha sonra $U = n^{1/2} A(\bar{X})$' in birikimleri

$$k_1(U) = E(U) = n^{1/2} A_1 + 0(n^{-3/2})$$

$$k_2(U) = E(U^2) - (EU)^2 = \sigma^2 + 0(n^{-1})$$

ve

$$k_3(U) = E(U^3) - 3E(U^2)E(U) + 2(EU)^3 = n^{-1/2} A_2 + 0(n^{-3/2})$$

dir.

Burada eğer $a_{i_1 \ldots i_p} = A_{(i_1 \ldots i_p)}(\mu)$ ise $\sigma^2 = \sum\sum a_i a_j \mu_{ij}$,

$$A_1 = \frac{1}{2} \sum\sum a_{ij} \mu_{ij} \quad \text{ve} \quad A_2 = \sum\sum\sum a_i a_j a_k \mu_{ijk} + 3\sum\sum\sum\sum a_i a_j a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl}$$

dir.

Sonuçta

$$\boxed{P(U/\sigma \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} p_1(x)\phi(x) + 0(n^{-1})} \qquad (3.1.1)$$

dır.

Burada $-p_1(x) = \sigma^{-1} A_1 + \frac{1}{6} \sigma^{-3} A_2 (x^2-1)$ dır ve ϕ ile Φ sırasıyla standart normal yoğunluğu ve dağılım fonksiyonudur.

Eğer σ^2 takdircisi, $\hat{\sigma}^2 = g(\bar{X})$ olarak kullanırsak (3.1.1) ifadesi şu hale gelir.

$$\boxed{P(U/\hat{\sigma} \leq x) = \Phi(x) + n^{-1/2} q_1(x) \phi(x) + 0(n^{-1}),} \qquad (3.1.2)$$

Burada $B = A/g^{1/2}$, $b_{i,\ldots i_p} = B_{(i,\ldots i_p)}$, $B_1 = \frac{1}{2}\sum\sum b_{ij}\mu_{ij}$ ve

$$B_2 = \sum\sum\sum b_i b_j b_k \mu_{ijk} + 3\sum\sum\sum\sum b_i b_j b_{kl}\mu_{ik}\mu_{jk}$$

ile

$$-q_1(x) = B_1 + \frac{1}{6} B_2(x^2-1)$$ ne sahibiz. $C_i = g_{(i)}(\mu)$ alınsın. Bu $b_i = a_i\sigma^{-1}$ ve $b_{ij} = a_{ij}\sigma^{-1} - \frac{1}{2}(a_i c_j + a_j c_i)\sigma^{-3}$ olarak gösterilebilir ve bu nedenle

$$p_1(x) - q_1(x) = -\frac{1}{2}\sigma^{-3}\left(\sum\sum a_i c_j \mu_{ij} x^2\right) \tag{3.1.3}$$

dir. Açıkça eğer x_α , y_α ve z_α , $P(U/\sigma \leqslant x_\alpha) = P(U/\hat{\sigma} \leqslant y_\alpha) = \Phi(z_\alpha) = a$ ile tanımlanırsa o zaman

$$\left.\begin{aligned} x_\alpha &= z_\alpha - n^{-1/2}\,p_1(z_\alpha) + O(n^{-1}), \\ y_\alpha &= z_\alpha - n^{-1/2}\,q_1(z_\alpha) + O(n^{-1}), \end{aligned}\right\} \text{Cornish-Fisher} \tag{3.1.4}$$

olur. (3.1.1) ve (3.1.2)' nin sonuçları Edgeworth açılımlarıdır. (3.1.4) sonuçları, Cornish-Fisher ters açılımlarıdır. $z_\alpha = \Phi^{-1}(\alpha)$ tanımı bu çalışma boyunca kullanılacaktır.

Daha genel olarak bazı $\nu \geqslant 1$ için

$$P(U/\sigma \leqslant x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2}\, p_i(x)\,\phi(x) + O(n^{-(\nu+1)/2}),$$

$$P(U/\hat{\sigma} \leqslant x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2}\, q_i(x)\quad(x) + O(n^{-(\nu+1)/2})$$

olarak kabul edilsin. O zaman p_i ve q_i sırasıyla indisli (indexli) polinomları tek iken çift; çift iken tek olan ve 3i-1 derecesindeki polinomlardır. x_α ve y_α kartilleri daha önce kabul edilmiş olan şu ifadelerle tanımlanır.

$$x_\alpha = z_\alpha + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2}\, p_{i1}(z_\alpha) + O(n^{-(\nu+1)/2}),$$

$$y_\alpha = z_\alpha + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2}\, q_{i1}(z_\alpha) + O(n^{-(\nu+1)/2}),$$

Burada p_{i1} ve q_{i1}, $j \leq i$ için p_j ve q_j' li terimlerle tanımlanabilir. Özellikle

$$p_{11}(x) = - p_1(x),$$
$$p_{21}(x) = p_1(x)\, p_1'(x) - \frac{1}{2}\, x p_1(x)^2 - p_2(x), \tag{3.1.5}$$

q için benzer ilişkiler vardır. p_{i1} ve q_{i1} polinomları çift indisine karşılık tek, tek indisine karşılık çift olan fonksiyonlar ve i+1 derecededir.

3.2. TEORİK KRİTİK NOKTALAR

Bu bölümde bilinen

$$H(X) = P\{n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\sigma \leq x\} \quad \text{ve}$$
$$K(X) = P\{n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma} \leq x\} \tag{3.2.1}$$

dağılım fonksiyonlarının tahminleri altında çalışacağız. Bazı noktalar "teorik kritik noktalar" olarak adlandırılır. Bu noktaların bazıları mantıksızdır ve bu durum noktaların bootstrap takdircisindeki yapısal zorlukların çoğunu açıklar.

3.2.1 Normal Dağılım, t-Dağılımı, Karma ve Ters Kritik Noktalar

Alınan $x_\alpha = H^{-1}(\alpha)$ ve $y_\alpha = K^{-1}(\alpha)$ ifadeleri sırasıyla H ve K' nın α - seviyesindeki kartilleri tanımlar. $P\{\theta \leq \hat{\theta}(\alpha)\} \simeq \alpha$ özelliğiyle $\hat{\theta}(\alpha)$ kritik noktası araştırdığımızı varsayalım. Eğer α biliniyorsa

$$\hat{\theta}_{ord}(\alpha) = \hat{\theta} - n^{-1/2}\sigma x_{1-\alpha}$$

normal dağılım kritik noktası kullanılır.

Eğer σ bilinmiyorsa, t-dağılım noktası

$$\hat{\theta}_{Stud}(\alpha) = \hat{\theta} - n^{-1/2}\hat{\sigma} y_{1-\alpha}$$

olan uygun seçilecektir. Bu noktaların herbiri şu durumda kesindir.

$$P\{\theta \leq \hat{\theta}_{ord}(\alpha) = P\{\theta \leq \hat{\theta}_{Stud}(\alpha)\} = \alpha$$

$x_{1-\alpha}$ ve $y_{1-\alpha}$ kartillerini yerlerini değiştirirsek, karma noktasını kullanabiliriz. θ_{Stud}' un yerine

$$\hat{\theta}_{hyb}(\alpha) = \hat{\theta} - n^{-1/2}\hat{\sigma} x_{1-\alpha}$$

alınabilir. Bu bir normal ortalamasındaki problemlerin neticeleri için t-dağılım tabloları yerine normal tablolara bakılmasından doğan hatalara benzerdir. Bu altüst olmuş tablolara bakmaya devam ederek $-x_{\alpha}$'la $y_{1-\alpha}$ karıştırarak ters kritik noktalarını elde ederiz.

$$\hat{\theta}_{back}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma} x_{\alpha}$$

Bu nedenle yanlış tablolara tersten bakarak 2 hatanın sonucu $\hat{\theta}_{back}$'-dır.

3.2.2. Taraflı-Düzeltme Kritik Noktaları

Taraflı-düzeltme, $\hat{\theta}_{back}$' daki hataların çaresini bulmaya çalışmaktadır. Bunlar aşağıdaki gibi kolaylaştırabilir. Açıkca $\hat{\theta}_{back}(\alpha)$ uygunsuz seçimdir. Fakat eğer yanlış tablolara tersinde bakmaya devam edersek, α yerine başka değerleri kullanarak hatalarımızı azaltabiliriz. Belkide, eğer β'yı doğru seçersek, $\hat{\theta}_{back}(\beta)$ daha iyi olabilir. Örneğin β'yı $-x_{\beta} =- y_{1-\alpha}$ gibi seçmek işleri düzeltecektir ve $\hat{\theta}_{back}(\beta)$ bu durum için, $\hat{\theta}_{Stud}(\alpha)$ doğru kritik noktasıdır. Daha genel olarak eğer

$$-x_{\beta} = y_{1-\alpha} + O(n^{-1})$$

ise o zaman $\theta_{back}(\beta)$, $n^{-1} = (n^{-1/2})^2$ mertebesi için $\hat{\theta}_{Stud}(\alpha)$ la aynı kabul edilir ki bu ikinci mertebededir. Bu durumda şunu söyleyebiliriz ki $\hat{\theta}_{back}(\beta)$, ikinci mertebede doğrudur. Bu tartışma, taraflı-düzeltme' nin sahip olduğu kritik noktalardaki değişmezlik dönüşümlerinin özellikleri önemsemez.

H ve K Edgeworth açılımlarını kabul ettiğini varsayalım.

$$H(x) = \Phi(x) + n^{-1/2}\, p_1(x)\, \phi(x) + O(n^{-1})$$

$$K(X) = \Phi(x) + n^{-1/2}\, q_1(x)\, \phi(x) + O(n^{-1})$$

O zaman $x_\alpha = z_\alpha - n^{-1/2}\, p_1(z_\alpha) + O(n^{-1})$ ve $(-\infty, \hat{\theta}_{back}(\alpha)]$ aralığı da

$$\begin{aligned} P\{\theta \le \hat{\theta}_{back}(\alpha)\} &= P\{ n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma} \ge z_\alpha + n^{-1/2} p_1(z_\alpha) + O(n^{-1})\} \\ &= \alpha - n^{-1/2}\, \{p_1(z_\alpha) + q_1(z_\alpha)\}\, \phi(z_\alpha) + O(n^{-1}) \end{aligned} \tag{3.2.2}$$

durumuna sahiptir.

Bu yüzden hatalı kapsam, büyük örneklerdeki $p_1(z_\alpha) + q_1(z_\alpha)$ ile orantılıdır. Bu fonksiyon $z_\alpha$da tam bir kuadratik polinomdur. Taraflı-düzeltme $p_1(z_\alpha) + q_1(z_\alpha)$ da sabit terimi çıkarır; ivmeli taraflı-düzeltme $p_1(z_\alpha) + q_1(z_\alpha)$ nın tümünü çıkarır ve böylece $O(n^{-1/2})$ den $O(n^{-1})$ a kadar tek-yanlı aralık için bu hataları azaltır. Bu 2.mertebedeki doğruluğa eşittir. Bootstrap tanımlarının, taraflı-düzeltme ve ivmeli taraflı-düzeltme ile tamamen aynı durumda çalışır olduğunu ileriki bölümde göstereceğiz.

$$G(x) = P(\hat{\theta} \le x) \quad \text{ve} \quad m = \Phi^{-1}\{G(\theta)\} = \Phi^{-1}\{H(0)\} = \Phi^{-1}\left\{\frac{1}{2} + n^{-1/2}\, p_1(0)\, \phi(0) + O(n^{-1})\right\}$$
$$= n^{-1/2}\, p_1(0) + O(n^{-1})$$

olsun. $\beta = \Phi(z_\alpha + 2m)$. O zaman $z_\beta = z_\alpha + 2m$ ve böylece

$$\begin{aligned} x_\beta &= z_\beta - n^{-1/2} p_1(z_\beta) + O(n^{-1}) \\ &= z_\beta + n^{-1/2}\, \{2p_1(0) - p_1(z_\alpha)\} + O(n^{-1}) \end{aligned} \tag{3.2.3}$$

(Teorik) Taraflı-düzeltme kritik noktası

$$\hat{\theta}_{bc}(\alpha) = \hat{\theta}_{back}(\beta) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}[z_\alpha + n^{-1/2}\{2p_1(0) - p_1(z_\alpha)\} + 0(n^{-1})]$$

dır. (3.2.2)' deki tartışmanın önemi $(-\infty, \hat{\theta}_{bc}(\alpha)]$ aralığının şu duruma sahip olduğunu gösterir.

$$P\{\theta \leq \hat{\theta}_{bc}(\alpha)\} = \alpha + n^{-1/2}\{2p_1(0) - p_1(z_\alpha) - q_1(z_\alpha)\}\phi(z_\alpha) + 0(n^{-1}) \quad (3.2.4)$$

Bu $-\{p_1(z_\alpha) + q_1(z_\alpha)\}$ aynı düzeydeki kuadratik polinomundaki ifadenin sabit parçasını dengeleyen $2p_1(0)$ terimi hariç (3.2.2) dekiyle aynıdır ($p_1(0) = q_1(0)$ o zaman $H(0) = K(0)$] (3.2.4) bulunan $n^{-1/2}(2p_1(0) - p_1(z_\alpha) - q_1(z_\alpha)\}$ değerine, a' nın z_α ya bağlı olmadığı yerde $-az_\alpha^2$ yazılabilir. Bu terimi (3.2.4)' den tamamıyla kaldırarak, β_α herhangi bir numarayla β'nin yerine yerleştirilir ve

$$\beta_\alpha = \Phi\{z_\alpha + 2m + az_\alpha^2 + 0(n^{-1})\} \quad (3.2.5)$$

sağlanır.

(3.2.3)'e gelen iddia $x_{\beta_\alpha} = z_\alpha + n^{-1/2} q_1(z_\alpha) + 0(n^{-1})$'ı gösterir. (Teorik) ivmeli taraflı-düzeltmenin kritik noktası

$$\hat{\theta}_{abc}(\alpha) = \hat{\theta}_{back}(\beta_\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha + n^{-1/2}q_1(z_\alpha) + 0(n^{-1})\}$$

ve buna karşılık gelen $(-\infty, \hat{\theta}_{abc}(\alpha)]$ tek taraflı aralığı $\alpha + 0(n^{-1})$ e eşit duruma sahiptir. Ek olarak $\hat{\theta}_{abc}(\alpha) = \hat{\theta}_{Stud}(\alpha) + 0_p(n^{-3/2})$ dir o zaman

$$\hat{\theta}_{Stud}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha + n^{-1/2} q_1(z_\alpha) + 0(n^{-1})\}$$

Bu yüzden $\hat{\theta}_{abc}$, ikinci mertebede doğrudur.

3.2.3. İvme Sabiti

Biz a' yı ivme sabiti olarak adlandırırız. Bizim iddia ettiğimiz a, en azından bazı önemli durumlarda $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\sigma$ 'ye ilk mertebedeki yaklaşımın üçüncü momentin sadece 1/6 sıdır. Sürekli fonksiyon için model (3.2.2) bölümünde tanıtılmıştır.

$$n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\sigma = (n^{1/2}/\sigma) \sum_{i=1}^{d} (\bar{X}-\mu)^{(i)} a_i + O_p(n^{-1/2}),$$

ve böylece iddiamız

$$\begin{aligned} a &= \frac{1}{6} E \{(n^{1/2}/\sigma) \sum_{i=1}^{d} (\bar{X}-\mu)^{(i)} a_i \}^3 \\ &= n^{-1/2} \frac{1}{6} \sigma^{-3} \sum\sum\sum a_i a_j a_k \mu_{ijk} \end{aligned} \qquad (3.2.6)$$

dır.

Bunun kontrolu için (3.1.4) deki sonuçlardan

$$\begin{aligned} b &= n^{1/2} 6\sigma^3 a = 6\sigma^3 z_\alpha^{-2} \{p_1(z_\alpha) + q_1(z_\alpha) - 2p_1(0)\} \\ &= 3\sum\sum a_{i\,j}\mu_{ij} - 2\sum\sum\sum a_i a_j a_k \mu_{ijk} - 6\sum\sum\sum\sum a_i a_j a_{kl} \mu_{ik}\mu_{jl} \end{aligned} \qquad (3.2.7)$$

takip edilen son eşitlik hatırlanır. Parametrik ve parametrik olmayan durumlarla ayrı ayrı ilgilenilir.

DURUM (i) : ÜSTEL AİLE MODELİ :

Varsayalım ki X

$$h_\lambda(x) = \exp\{\lambda^T x - \Psi(\lambda)\}\, h_o(x),$$

yoğunluğuna sahip olsun. Burada Ψ ve h_o bilinen fonksiyonlar ve λ, bilinmeyen parametrelerin d - elemanlı vektörüdür.

O zaman $\mu^{(i)} = \Psi_{(i)}(\lambda)$, $\mu_{ij} = \Psi_{(ij)}(\lambda)$ ve $\mu_{ijk} = \Psi_{(ijk)}(\lambda)$ dır.

$M = (\mu_{ij})$ ve $\partial\mu^{(i)}/\partial\lambda^{(j)} = \mu_{ij}$ yazılır.

$$\frac{\partial}{\partial\mu^{(k)}} \Psi_{(ij)}(\lambda) = \sum_l \frac{\partial\lambda^{(l)}}{\partial\mu^{(k)}} \frac{\partial}{\partial\lambda^{(l)}} \Psi_{(ij)}(\lambda) = \sum_l \nu_{kl}\mu_{ijl}$$

den $\partial\lambda^{(i)}/\partial\mu^{(j)} = \nu_{ij}$ sonucuna varırız.

$g(\mu) = \sigma^2 = \sum\sum f_{(i)}(\mu) f_{(j)}(\mu) \Psi_{(ij)}(\lambda)$ hatırlanarak

$$c_k = g_{(k)}(\mu) = \sum_i \sum_j [\{f_{(ik)}(\mu) f_{(j)}(\mu) + f_{(i)}(\mu) f_{(jk)}(\mu)\} \Psi_{(ij)}(\lambda)$$

$$+ f_{(i)}(\mu) f_{(j)}(\mu) \frac{\partial}{\partial \mu^{(k)}} \Psi_{(ij)}(\lambda)]$$

$$= 2 \sum_i \sum_j a_i a_{jk} \mu_{ij} + \sum_i \sum_j \sum_k a_i a_j \nu_{kl} \mu_{ijl}$$

c_k için bu formülden yola çıkarak ve şu gerçeğe

$$\sum_p \sum_k a_p \left(\sum_i \sum_j \sum_l a_i a_j \nu_{kl} \mu_{ijk} \right) \mu_{pk} = \sum_i \sum_j \sum_k a_i a_j a_l \mu_{ijl}$$

varılır.

$((\nu_{ij}) = (\mu_{ij})^{-1}$ olduğu için) Vardığımız sonuç

$$\sum\sum a_i c_j \mu_{ij} = 2 \sum_i \sum_j \sum_k \sum_l a_i a_j a_{kl} \mu_{ik} \mu_{jl} + \sum_i \sum_j \sum_k a_i a_j a_k \mu_{ijk} \tag{3.2.8}$$

dır. Bu sonuç (3.2.7) yerine konulursa (yerleştirilirse) (3.2.6) denk olan $b = \sum\sum\sum a_i a_j a_k \mu_{ijk}$ değerini buluruz.

DURUM (ii) <u>PARAMETRİK OLMAYAN VARDAMA : (INFERENCE)</u>

$$\sigma^2 = \sum\sum f_{(i)}(\mu) f_{(j)}(\mu) \{ E(X^{(i)} X^{(j)} - \mu^{(i)} \mu^{(j)} \}$$

(3.1.4) bölümden hatırlanır.

Eğer $X^{(i)}$ $X^{(j)}$, X vektörünün bileşenleri değilse, her zaman X ile birleştirebiliriz. $X^{(k)} = X^{(i)} X^{(j)}$ gibi k index'ini < i,j > tanımlasın. O zaman

$$g(\mu) = \sigma^2 = \sum_i \sum_j f_{(i)}(\mu) f_{(j)}(\mu) (\mu^{(<i,j>)} - \mu^{(i)} \mu^{(j)})$$

dır. Bu durumda küçük bir cebir bize şu ilişkiyi verir.

$$c_k = g_{(k)}(\mu) = 2 \sum_i \sum_j a_i a_{jk} \mu_{ij} - 2a_k \sum a_i \mu^{(i)} + \sum_i \sum_{j\,(k)} a_i a_j ,$$

Burada $\sum_i \sum_{j(k)}$, $<i,j> = k$ gibi (i,j) değerleri üzerinde toplamayı (summation) tanımlar. Bu formülden ve $\mu_{ijl} = \mu_{kl} - \mu^{(i)} \mu_{jl} - \mu^{(j)} \mu_{il}$ eşitliğinden eğer $<i,j> = k$ ise (3.2.8) deki ifadeyi sonuçlandırırız. Önceki gibi (3.2.6) yol gösterir.

3.2.4. En Dar Aralıklar

$0 < \alpha < \frac{1}{2}$ olsun $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma}$ 'nın dağılımını bildiğimizi varsayımızdan dolayı, v,w' yi $v+w'$ nin minimum olacak şekilde seçebiliriz.

$$P\{ -\omega \leqslant n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma} \leqslant v \} = 1-2\alpha \tag{3.2.9}$$

$I_o = [\hat{\theta} - n^{-1/2}\hat{\sigma}\, v, \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\,\omega]$'a "en kısa güven aralığı" olarak adlandırırız. Bu, eşit uzantılı $[\hat{\theta}_{Stud}(\alpha), \hat{\theta}_{Stud}(1-\alpha)]$ aralık gibi aynı tapsama sahiptir. Fakat genellikle (yakın simetrik durumu hariç) tamamıyla daha dar aralığa sahiptir. Eğer $n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma}$ nın dağılımı tek bir model (unimodal) ise o zaman en dar güven aralığı, maximum olabilirliğe dayanan güven aralığına denktir.

K dağılım fonksiyonun şu açılımı içerdiğini varsayalım.

$$K(x) = \Phi(x) + n^{-1/2} q_1(x)\, \phi(x) + n^{-1} q_2(x)\, \phi(x) + O(n^{-3/2})$$

$i \geqslant 1$ için $\phi_i(x) = q_i(x)\, \phi(x)$ alınsın. $\phi_o(x) = \Phi(x)$, $\phi_{ik} = (\partial/\partial x)^k \phi_i(x)$ ve $\Psi_{ik} = \phi_{ik}(z_{1-\alpha})$. Küçük bir işlem, (3.2.9)'e bağlı $v+w'$ yi minumum yapan ν, ω sayılarını gösterir ki bunlar

$$\nu = z_{1-\alpha} + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-1/2} \nu_i - O(n^{-(\nu+1)/2}),$$

$$\omega = z_{1-\alpha} + \sum_{i=1}^{\nu} (-n^{-1/2})^i\, \nu_i + O(n^{-(\nu+1)/2}),$$

sağlar. Burada

$$\nu_1 = -\Psi_{11}\Psi_{02}^{-1} \quad , \quad \nu_2 = (\frac{1}{2}\Psi_{11}^{2}\Psi_{02}^{-1} - \Psi_{20})\Psi_{01}^{-1} \tag{3.2.10}$$

dir ve ν_i' nin üst mertebesi, daha fazla komplex formülleri içerir.

3.3. BOOTSTRAP KRİTİK NOKTALARI

Bu bölümde önerdiğimiz ortaklaşa kullanılan bootstrap kritik noktaları, (3.2) bölümdeki teorik kritik noktaların temel takdircileridir. Tartıştığımız bootstrap yaklaşımı o kadar iyidir ki hatalı teorik kritik noktaların bootstrap tanımları da hatalıdır.

H ve K dağılım fonksiyonların Bootstrap tanımları sırasıyla

$$\hat{H}(x) \equiv P\{n^{1/2}(\hat{\theta}^*-\hat{\theta})/\hat{\sigma} \leq x \,|\, \mathcal{X}\} \text{ ve } \hat{K}(x) \equiv P\{n^{1/2}(\hat{\theta}^*-\hat{\theta})/\hat{\sigma}^* \leq x \,|\, \mathcal{X}\},$$

dır. Herhangi bir F dağılım fonksiyonu için, $F^{-1}(x) \equiv \text{Sup}\{x: F(x) \leq \alpha\}$ tanımlanır.

3.3.1. Normal Dağılım, t-Dağıtım, Karma ve Ters Kritik Noktalar

x_α ve y_α 'nin Bootstrap takdircileri sırasıyla $\hat{x}_\alpha \equiv \hat{H}^{-1}(\alpha)$ ve $\hat{y}_\alpha \equiv \hat{K}^{-1}(\alpha)$ dır. $\hat{\theta}_{ord}$, $\hat{\theta}_{stud}$, $\hat{\theta}_{hyb}$ ve $\hat{\theta}_{back}$ 'ın Bootstrap tanımları, bu takdircilerle x_α ve y_α doğru kartiller yerlerine konularak elde edilir.

$$\hat{\theta}_{ORD}(\alpha) \equiv \hat{\theta} - n^{-1/2}\sigma\,\hat{x}_{1-\alpha}, \qquad \hat{\theta}_{STUD}(\alpha) = \hat{\theta} - n^{-1/2}\hat{\sigma}\,\hat{y}_{1-\alpha},$$

$$\hat{\theta}_{HYB}(\alpha) = \hat{\theta} - n^{-1/2}\hat{\sigma}\,\hat{x}_{1-\alpha}, \qquad \hat{\theta}_{BACK}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\hat{x}_\alpha .$$

Literatürde, $\hat{\theta}_{HYB}$ ve $\hat{\theta}_{BACK}$, genellikle diğer tartışmaların kullanılmasına neden olur. Örneğin; bazı istatistikçiler $\hat{G}^{-1}(\alpha)$ yı, bir kritik nokta gibi kullanırlar.
Burada

$$\hat{G}(x) = P(\hat{\theta}^* \leq x \,|\, \mathcal{X})$$

$\hat{\theta}^*$' ın koşullu dağılım fonksiyonudur.

Bu ise yüzdelik-metod kritik noktası gibi bilinir. $\hat{\theta}_{ORD}$, $\hat{\theta}_{STUD}$, $\hat{\theta}_{HYB}$ ve $\hat{\theta}_{BACK}$' ın herbiri yüzdelik-metod noktaları olarak adlandırılır. $\hat{G}(x) \equiv \hat{H}\{n^{1/2}(x-\hat{\theta})/\hat{\sigma}\}$ olduğundan $\hat{G}^{-1}(\alpha)$, $\hat{\theta}_{BACK}(\alpha)$'dan farklı değildir. Bazı istatistikçiler, $\hat{\theta} - \xi_{1-\alpha}$ 'nın uygun kartil olduğunu tartışırlar. $\xi_{1-\alpha}$ ifadesi burada $\hat{\theta}^{*}-\hat{\theta}$'nın eşit kartili olan $(1-\alpha)$ dır.

$$\xi_{1-\alpha} \equiv \text{Sup}\ \{x:\ P(\hat{\theta}^{*}-\hat{\theta} \leqslant x \mid \mathcal{X}) \leqslant 1-\alpha\}$$

$\hat{\theta}^{*}-\hat{\theta}$ ' nın koşullu dağılımıyla eşit olduğu söylenen bu ifade $\hat{\theta}-\theta$ nın dağılımı için iyi bir yaklaşımdır. $P(\hat{\theta}^{*}-\hat{\theta} \leqslant x \mid \mathcal{X}) = \hat{H}(n^{1/2}x/\hat{\sigma})$ olduğundan, o zaman $\hat{\theta}-\xi_{1-\alpha}$, $\hat{\theta}_{HYB}(\alpha)$ den başka değildir. Bu yanlış tablolara bakmanın bootstrap tanımı olduğu için yanlış bir seçim olarak gösterilir. Diğer bir taraftan tartışmamız σ bilinmediğinde $\hat{\theta}_{STUD}$'un mantıklı bir seçim ve σ bilindiğinde $\hat{\theta}_{ORD}$'nın iyi bir seçim olduğunu önerir.

3.3.2. Taraflı-Düzeltme Kritik Noktaları

Hatırlanırsa taraflı-düzeltme ve ivmeli taraflı-düzeltme, kritik noktalarının teorik tanımları sırasıyla $\hat{\theta}_{back}(\beta)$ ve $\hat{\theta}_{back}(\beta_{\alpha})$ dır. Bootstrap benzerlerini elde etmek için β ve β_{α} ile bootstrap takdircileri $\hat{\beta}$ ve $\hat{\beta}_{\alpha}$ basitçe yer değiştirilir, ve $\hat{\theta}_{back}$' ın yerine $\hat{\theta}_{BACK}$ kullanılır.

β'yı tanımlamak için, hatırlayın ki $\beta = \Phi(z_{\alpha} + 2m)$ idi. Burada $m = \Phi^{-1}\{G(\theta)\}$ dır. G'nin bootstrap takdircisi elbette ki $\hat{G}$ dir ve böylece $\hat{m} = \Phi^{-1}\{\hat{G}(\hat{\theta})\}$ ve $\hat{\beta} = \Phi(z_{\alpha} + 2\hat{m})$ alırız.

a, ivme sabit takdiri için $a \equiv n^{-1/2} z_{\alpha}^{-2}\{p_1(z_{\alpha}) + q_1(z_{\alpha}) - 2p_1(0)\}$ hatırlanır.

Burada p_1 ve q_1, H ve K' nın Edgeworth açılımlarının her kuadratik polinomlarında görünmektedir. Bu polinomların bazı katsayıları, dağılımın bilinmeyen karakteristik fonksiyonları olabilir. Bu miktarlar, bootstrap takdircileriyle yerdeğiştirilir ve sonuç polinomları sırasıyla $\hat{p}_1$ ve $\hat{q}_1$ olarak adlanır. İlerideki göreceğimiz gibi, $\hat{p}_1$ ve $\hat{q}_1$ polinomları $\hat{H}$ ve $\hat{K}$'nın Edgeworth açılımında görünür.

$$\hat{a} = n^{-1/2}\, z_\alpha^{-2}\ \{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha) - 2\hat{p}_1(0)\}\ ,$$

$$\hat{\beta}_\alpha = \Phi[\hat{m} + (\hat{m} + z_\alpha)\ \{1-\hat{a}\ (\hat{m} + z_\alpha)\}^{-1}]. \qquad (3.3.1)$$

alınır. Elbette

$$\hat{m} + (\hat{m} + z_\alpha)\ \{1-\hat{a}(\hat{m} + z_\alpha)\}^{-1} = z_\alpha + 2\hat{m} + \hat{a}z_\alpha^2 + 0_p(n^{-1})$$

dır ve böylece (3.3.1), β_α'nın (3.2.5) tanımıyla direkt karşılaştırılır. (3.3.1) deki Φ'nın çıkarımı, ana sonuçlar bozulmadan $z_\alpha + 2\hat{m} + \hat{a}z_\alpha^2 + 0_p(n^{-1})$'i sağlayan bir çok değerden herhangi biriyle yer değiştirilerek ivmeli taraflı-düzeltmenin özelliklerine ulaşabiliriz. Özel (3.3.1) seçimi Efron (1987) tarafından transformasyon teorisinin düşünme yoluyla uygulanmıştır ve oldukça mantıklıdır.

Taraflı-düzeltme ve ivmeli taraflı-düzeltmenin kritik noktalarının Bootstrap tanımları sırasıyla

$$\hat{\theta}_{BC}(\alpha) = \hat{\theta}_{BACK}(\hat{\beta}) \qquad \text{ve} \qquad \hat{\theta}_{ABC}(\alpha) = \hat{\theta}_{BACK}(\hat{\beta}_\alpha)$$

dır. $\hat{\theta}_{BC}$, Efron (1987)'la taraflı-düzeltme nokta önerisi için benzer olduğu kolayca görülür.

3.3.3. İvme Sabiti

Bölüm (3.2.3) deki çalışılan durumdan hatırlanırsa

$a = n^{-1/2}\ \frac{1}{6}\ \sigma^{-3} \sum\sum\sum a_i a_j a_k \mu_{ijk}$ di. a'nın takdirimiz tabiki

$$\hat{a} \cong n^{-1/2}\ \frac{1}{6}\ \hat{\sigma}^{-3} \sum\sum\sum \hat{a}_i \hat{a}_j \hat{a}_k \hat{\mu}_{ijk}\ ,$$

dır. Burada "şapkalar" bootstrap takdirini tanımlar. Efron (1987) de verilenle rastlanan a'nın bu takdirini ispatlayalım (3.4). Bölümde göstericektir ki $\hat{\theta}_{ABC}$, ikinci-mertebe doğrudur ve diğerleri burada çalışılan durumlardan en az birinde ivmeli taraflı-düzeltme kritik noktalarının ikinci mertebe düzeltmeleri hakkında Efron'nun çalışmalarının doğrulanmış sonuçlarıdır.

DURUM (i) : ÜSTEL AİLE MODELİ : Efron'nun takdircisi

$$\hat{a}_{Ef} \equiv n^{-1/2} \frac{1}{6} \hat{\psi}^{(3)}(0)\{\hat{\psi}^{(2)}(0)\}^{-3/2}$$

dir. Burada $\hat{\psi}^{(j)}(0) = (\partial/\partial t)^j \psi(\hat{\lambda} + t\hat{\gamma})\Big|_{t=0}$ dır. $\hat{\lambda}$, λ'nın takdiridir ve $\hat{\gamma}$, $\hat{\lambda}$ ile λ yerdeğiştirdiğinde, aşağıdaki tanımlanan $\gamma = (\gamma^{(i)})$ d elemanlı vektörden elde edilir.

$$\gamma^{(i)}(\lambda) = \sum_j \nu_{ij}(\lambda) \frac{\partial}{\partial \lambda(j)} \theta(\lambda)$$

Şimdi

$$\frac{\partial \theta}{\partial \lambda^{(j)}} = \sum_k \frac{\partial \theta}{\partial \mu^{(k)}} \frac{\partial \mu^{(k)}}{\partial \lambda^{(j)}} = \sum_k a_k \mu_{kj} = \sum_k \mu_{jk} a_k ,$$

dır. $(\nu_{ij}) = (\mu_{ij})^{-1}$ olduğundan

$$\gamma^{(i)}(\lambda) = \sum_j \sum_k \nu_{ij} \mu_{jk} a_k = a_i$$

dır.

Bu şimdi daha kolay ispatlanır.

$$(\partial/\partial t)^i \psi(\lambda + t\gamma)\Big|_{t=o} = \begin{cases} \sigma^2 & \text{eğer } i = 2 \text{ ise ,} \\ \sum_i \sum_j \sum_k a_i a_j a_k \mu_{ijk} & \text{eğer } i=3 \text{ ise,} \end{cases}$$

ve böylece $\hat{a}_{Ef}$' nın teorik tanımı, bizim a' dır. Sonuçta $\hat{a}_{Ef} \equiv \hat{a}$ dır.

DURUM (ii) : PARAMETRİK OLMAYAN VARDAMA : Efron'nun takdircisi

$$\hat{a}_{Ef} = \frac{1}{6} \left(\sum_{i=1}^{n} U_i^3\right)\left(\sum_{i=1}^{n} U_i^2\right)^{-3/2}$$

dir. Burada

$$U_i = \lim_{\Delta \to 0} [f(1-\Delta)\bar{X} + \Delta X_i\} - f(\bar{X})]\Delta^{-1} = \sum_{j=1}^{d} (X_i-\bar{X})^{(j)} f_{(j)}(\bar{X}),$$

dır. Ek olarak

$$n^{-1}\sum_{k=1}^{n} U_k^2 = \sum_{i=1}^{d}\sum_{j=1}^{d} f_{(i)}(\bar{X}) f_{(j)}(\bar{X}) n^{-1}\sum_{k=1}^{n}(X_k-\bar{X})^{(i)}(X_k-\bar{X})^{(j)}$$

Örnek momentleriyle tüm ana kütle momentleri yerdeğiştirerek elde edilen $\sigma^2 = \sum\sum f_{(i)}(\mu) f_{(j)}(\mu)\mu_{ij}$ 'nın sadece bootstrap takdircisi $\hat{\sigma}^2$ dir. Benzer olarak $n^{-1}\sum U_k^3$, $\sum\sum\sum a_i a_j a_k \mu_{ijk}$ nın bootstrap takdiridir. Böylece $\hat{a}_{Ef} = \hat{a}$ dır.

3.3.4. En Dar Aralıklar

Hatırlanırsa v ve ω sayıları, $K(v) - K(-w) = 1-2\alpha$ 'a bağlı olan $v+\omega$ 'nın minimumu için tanımlanmış önceki bölümde $I_o = [\hat{\theta} - n^{-1/2}\hat{\sigma}v, \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\omega]$" ideal" en dar aralığı kurmada kullanılır.

Bu bootstrap takdiri aşağıdakiler gibi tanımlanır. $\hat{K}(x) \geq 1-2\alpha$ daki gibi her x için, $\hat{K}(x)-\hat{K}(-y)$ deki gibi seçilen $y=y(x)$, $1-2\alpha$ ya mümkün olduğunca yakındır. x+y değerini minimuma indiren (x,y) değeri olarak $(\hat{v},\hat{w})$ yı alınsın. O zaman En dar güven aralığı şöyledir.

$$I_1 = [\hat{\theta} - n^{-1/2}\hat{\sigma}\hat{v}, \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\hat{w}]$$

Buckland (1980), buradakinden farklı şekle rağmen en kısa bootstrap güven aralıkların verilen kurallara aykırı bir işleyişe sahiptir.

3.4. BOOTSTRAP KRİTİK NOKTALARIN ÖZELLİKLERİ

Bu çalışma boyunca "yanlış tablolara bakmak" a dayanarak sahip olduğumuz kritik noktaların zorluklarına değindik. Tartışmanızı açıklamak için önceki bölümde bahsedilen Örneklemimizi $N(\theta, \sigma^2)$ ana kütlesinden seçildiği kabul edilirse θ ve σ^2 takdircilerimiz maximum olabilirlik üzerindedir. Bölüm (3.2.1) de amacımızın dışında olduğundan, $\hat{H}$ ve H dağılım fonksiyonları bu durumda benzerdir ve $\hat{K}$ ile K dağılım fonksiyonları da benzerdir (her ikisinde, n-1 serbestlik derecesiyle, t-dağılımında ölçüm-değişimi mevcuttur). Bu yüzden $\hat{m} = \Phi^{-1}\{\hat{G}(\hat{\theta})\} = 0$ olduğundan $\hat{G}(\hat{\theta}) = \hat{H}(0) = H(0) = \frac{1}{2}$ dır ve

$$\hat{a} \equiv n^{-1/2} z_{\alpha}^{-2} \{\hat{p}_1(z_{\alpha}) + \hat{q}_1(z_{\alpha}) - 2\hat{p}_1(0)\} = 0$$

olduğundan $\hat{p}_1 \equiv p_1 \equiv \hat{q}_1 \equiv q_1 \equiv 0$ dır.

Sonuçta, $\hat{\beta} = \beta = \hat{\beta}_a = B_a = \alpha$, $\hat{\theta}_{Stud}(\alpha) = \hat{\theta}_{STUD}(\alpha) = \hat{\theta} - \hat{\sigma} y_{1-\alpha}$ ve

$$\hat{\theta}_{Ord}(\alpha) = \hat{\theta}_{ORD}(\alpha) = \hat{\theta}_{hyb}(\alpha) = \hat{\theta}_{HYB}(\alpha) = \hat{\theta}_{back}(\alpha) = \hat{\theta}_{BACK}(\alpha)$$

$$= \hat{\theta}_{bc}(\alpha) = \hat{\theta}_{bc}(\alpha) = \hat{\theta}_{abc}(\alpha) = \hat{\theta}_{ABC}(\alpha) = \hat{\theta} - \hat{\sigma} x_{1-\alpha}$$

Böylece $\hat{\theta}_{HYB}$, $\hat{\theta}_{BACK}$, $\hat{\theta}_{BC}$ ve $\hat{\theta}_{ABC}$ bootstrap kritik noktaların her biri için t-dağılım tablolara bakmak gerektiğinde normal standart tablolara bakılmasından aynı değerdedir. Sadece $\hat{\theta}_{STUD}$, doğru tabloya bakılmasındaki değere denktir. Bu bölümde bootstrap kritik noktaların özelliklerini karşılaştırmak ve açıklamak için Edgeworth açılım teorisini kullanacağız. $\hat{\theta}_{STUD}$ ve $\hat{\theta}_{ABC}$ her ikiside, ikinci-mertebe doğru olduğu gösterilir. Fakat iddiamız, tek taraflı güven aralıkların teorisinde önemli bir rol oynadığı halde bu önem çift-taraflı aralıklar için azalmaktadır. Burada, ikinci mertebe özelliklerin etkisi olduğu halde güven aralık uzunluğunu tespit etmede, önemli rolü üçüncü-mertebedeki özellikler alır. t-dağılım tabloları ve normal standart tabloları arasındaki fark, üçüncü-mertebe sonuçtur. Sözü edilen $\hat{\theta}_{Stud}$' a, $\hat{\theta}_{ABC}$'dan daha yakın olan $\hat{\theta}_{STUD}$'un üçüncü mertebeden özelliklerini tartışılır. Örneğin iki taraflı $[\hat{\theta}_{STUD}(\alpha), \hat{\theta}_{STUD}(1-\alpha)]$ aralığın beklenen uzunluğu, $[\hat{\theta}_{ABC}(\alpha), \hat{\theta}_{ABC}(1-\alpha)]$ beklenen uzunluğundan daha yakın olan $[\hat{\theta}_{Stud}(\alpha), \hat{\theta}_{stud}(1-\alpha)]$ beklenen uzunluğudur. Bu bölümün başındaki örnekte $\hat{\theta}_{STUD}$ üçüncü-mertebe özellikleri tamamen doğru; $\hat{\theta}_{ABC}$ yanlış değerine sahipti. Bootstrap güven aralığı, verilen duruma direkt bağlı değildir. Gariptir ki (3.3.4) bölümde tanımlanan en dar bootstrap aralıkları, bizim örneğimizde $\hat{\theta}_{STUD}$'a dayanan eşit uzantılı aralıklardan daha dar uzunluğa ve daha küçük hata durumuna sahiptir. Örneğin en kısa ortalama ana kütle için % 95'lik bootstrap güven aralıkları geniş örneklerde, $\hat{\theta}_{STUD}$'a dayanan eşit uzantılı rakiplerinden hemen hemen % 50 lik daha küçük hata durumuna sahiptir.

3.4.1. Kritik Noktaların Özellikleri Açısından Edgeworth Açılımları ve Cornish-Fisher Tersi

$$H(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2} p_i(x) \phi(x) + O(n^{-(v+1)/2})$$

$$K(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2} q_i(x) \phi(x) + O(n^{-(v+1)/2}) \qquad (3.4.1)$$

form' un Edgeworth açılımları benzer bootstrap yöntemine sahiptir.

$$\hat{H}(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2} \hat{p}_i(x) \phi(x) + O_p(n^{-(v+1)/2}) \qquad (3.4.2)$$

$$\hat{K}(x) = \Phi(x) + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2} \hat{q}_i(x) \phi(x) + O_p(n^{-(v+1)/2}) \qquad (3.4.3)$$

Burada $\hat{p}_i$ ve $\hat{q}_i$, bootstrap takdircilerinin yerdeğişmesiyle katsayıdaki bilinmeyen değerlerin dışında p_i ve q_i ile aynıdır. Aynı şekilde, teorik değerlerin Cornish-Fisher tersi

$$x_\alpha \equiv H^{-1}(\alpha) = z_\alpha + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2} p_{i1}(z_\alpha) + O(n^{-(v+1)/2})$$

$$y_\alpha \equiv K^{-1}(\alpha) = z_\alpha + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2} q_{i1}(z_\alpha) + O(n^{-(v+1)/2})$$

gibi aşağıdaki benzer ifadeye sahiptir.

$$\hat{x}_\alpha = \hat{H}^{-1}(\alpha) = z_\alpha + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2} \hat{p}_{i1}(z_\alpha) + O_p(n^{-(v+1)/2}) \qquad (3.4.4)$$

$$\hat{y}_\alpha = \hat{K}^{-1}(\alpha) = z_\alpha + \sum_{i=1}^{\nu} n^{-i/2} \hat{q}_{i1}(z_\alpha) + O_p(n^{-(v+1)/2}) \qquad (3.4.5)$$

$\hat{p}_{i1}$'ler, $\hat{p}_j$ ile ilgili ve $\hat{q}_{i1}$'ler olağan durumda $\hat{q}_j$ ile ilgilidir.

3.4.2. Bootstrap Kritik Noktaların Açılımları

İşe Taraflı-düzeltme noktalarla başlarsak (3.4.2) ile $\hat{p}_2$ tek olduğundan $\hat{p}_2(0) = 0$ not edilir.

$$z_{\hat{\beta}} = z_\alpha + 2\hat{m} = z_\alpha + 2\Phi^{-1}\{\hat{H}(0)\}$$

$$= z_\alpha + 2\Phi^{-1}\{\frac{1}{2} + \hat{p}_1(0)\ \phi(0) n^{-1/2} + 0_p(n^{-3/2})\}$$

$$= z_\alpha + n^{-1/2}\ 2\hat{p}_1(0) + 0_p(n^{-3/2})$$

sahibiz. Bu yüzden (3.4.4) ile

$$\hat{X}_{\hat{\beta}} = z_{\hat{\beta}} + \sum_{i=1}^{2} n^{-i/2}\hat{p}_{i1}(z_{\hat{\beta}}) + 0_p(n^{-3/2})$$

$$= z_\alpha + n^{-1/2}\{\hat{p}_{11}(z_\alpha) + 2\hat{p}_1(0)\} + n^{-1}\{\hat{p}_{21}(z_\alpha) + 2\hat{p}_{11}'(z_\alpha)\hat{p}_1(0)\} + 0_p(n^{-3/2}) \tag{3.4.6}$$

$\hat{a} = n^{-1/2} z_\alpha^{-2}\{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha) - 2\hat{p}_1(0)\}$ de ve

$$z_{\hat{\beta}_\alpha} = \hat{m} + (\hat{m} + z_\alpha)\{1 - \hat{a}(\hat{m} + z_\alpha)\}^{-1}$$

$$= z_\alpha + 2\hat{m} + \hat{a}(z_\alpha^2 + 2z_\alpha\hat{m}) + \hat{a}^2 z_\alpha^3 + 0_p(n^{-3/2})$$

$$= z_\alpha + n^{-1/2}\{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha)\} + n^{-1}\{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha)\}\{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha) - 2\hat{p}_1(0)\}\ z_\alpha^{-1}$$
$$+ 0_p(n^{-3/2})$$

dir. Bu yüzden (3.4.4) ile

$$\hat{x}_{\hat{\beta}_\alpha} = z_{\beta_\alpha} + \sum_{i=1}^{2} n^{-i/2}\hat{p}_{i1}(z_{\hat{\beta}_\alpha}) + 0_p(n^{-3/2}) \tag{3.4.7}$$

$$= z_\alpha + n^{-1/2}\{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha) + \hat{p}_{11}(z_\alpha)\}$$

$$+ n^{-1}(\{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha)\}\ X[\{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha) - 2\hat{p}_1(0)\}\ z_\alpha^{-1} + p_{11}'(z_\alpha)] + \hat{p}_{21}(z_\alpha))$$
$$+ 0_p(n^{-3/2})$$

Diğer, tüm kartil takdirleri (3.4.4)-(3.4.7) sonuçlarında verilen açılımları, 6 bootstrap kritik noktaların kurulmasında kullanılır. Bu formüller kullanılarak ve şu notlar alınır.

$\hat{p}_{11} = -\hat{p}_1$ ve $\hat{q}_{11} = -\hat{q}_1$ dır. Şu açılımları elde ederiz.

$$\hat{\theta}_{ORD}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\sigma\{z_\alpha + n^{-1/2}\hat{p}_1(z_\alpha) + n^{-1}\hat{p}_{21}(z_\alpha)\} + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{STUD}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha + n^{-1/2}\hat{q}_1(z_\alpha) + n^{-1}\hat{q}_{21}(z_\alpha)\} + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{HYB}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha + n^{-1/2}\hat{p}_1(z_\alpha) + n^{-1}\hat{p}_{21}(z_\alpha)\} + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{BACK}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha - n^{-1/2}\hat{p}_1(z_\alpha) + n^{-1}\hat{p}_{21}(z_\alpha)\} + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{BC}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\Big[z_\alpha + n^{-1/2}\big\{2\hat{p}_1(0) - \hat{p}_1(z_\alpha)\big\} + n^{-1}\big\{\hat{p}_{21}(z_\alpha) - 2\hat{p}_1'(z_\alpha)\hat{p}_1(0)\big\}\Big] + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{ABC}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha + n^{-1/2}\hat{q}_1(z_\alpha) + n^{-1}(\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha)\}$$
$$\times[\{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha) - 2\hat{p}_1(0)\}z_\alpha^{-1} - \hat{p}_1(z_\alpha)]$$
$$+ \hat{p}_{21}(z_\alpha))\} + 0_p(n^{-2})$$

Elbette, $\hat{q}_{21}$ için bir benzer formülle

$$\hat{p}_{21}(x) = \hat{p}_1(x)\hat{p}_1'(x) - \frac{1}{2}x\hat{p}_1(x)^2 - \hat{p}_2(x)$$

dir. $\hat{\theta}_{ord}$ ve $\hat{\theta}_{Stud}$ kritik noktaların "ideal" açılımları, benzer sonuç çıkarabilir. (Ama daha sade biçimde) Onlar ;

$$\hat{\theta}_{ord}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\sigma\{z_\alpha + n^{-1/2}p_1(z_\alpha) + n^{-1}p_{21}(z_\alpha)\} + 0(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{Stud}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha + n^{-1/2}q_1(z_\alpha) + n^{-1}q_{21}(z_\alpha)\} + 0_p(n^{-2}),$$

dır.

Bu bütün açılımları ek olarak $\hat{p}_1 = p_1 + 0_p(n^{-1/2})$ ve $\hat{q}_1 = q_1 + 0_p(n^{-1/2})$ karşılaştırılırsa $|\hat{\theta}_{STUD} - \hat{\theta}_{Stud}|$ ve $|\hat{\theta}_{ABC} - \hat{\theta}_{Stud}|$ sonuçlarımızın her ikisini de $0_p(n^{-3/2})$ buluruz. Bu yüzden $\hat{\theta}_{HYB}$, $\hat{\theta}_{BACK}$ ve $\hat{\theta}_{BC}$ genellikle sadece birinci-mertebe doğru iken $\hat{\theta}_{STUD}$ ve $\hat{\theta}_{ABC}$ ikinci -mertebe doğrudur. Bu kritik noktaların teorik tanımı için (3.2) bölümdeki seçkin işleyişin tamamıdır. Teorik kritik noktaları için Bootstrap yaklaşımı, $\hat{\theta}_{hyb}$, $\hat{\theta}_{back}$ ve $\hat{\theta}_{bc}$ gibi noktaların alt özelliklerini böylece iyi göstermektedir.

Eğer p_1 ve q_1 polinomları tesadüfen benzer ise o zaman elbette karma kritik nokta ikinci-mertebe doğrudur. Gerçekten, karma ve ivmeli taraflı-düzeltme kritik noktaları bu durumda üçüncü mertebeye denk olur. Bunu görmek için, önceki açılımları gözlenir. Bu

$$\hat{\theta}_{HYB}(\alpha)-\hat{\theta}_{ABC}(\alpha) = n^{-3/2}\,\hat{\sigma}\{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha)\}$$

$$X\,[\{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha)-2\hat{p}_1(0)\}\, z_\alpha^{-1}-\hat{p}_1'(z_\alpha)] + 0_p(n^{-2})$$

$p_1 \equiv q_1$ olduğu zaman, tüm x için C_1 ve $\hat{C}_2$ rassal değişkenleri için $\hat{p}_1(x) = \hat{q}_1(x) = \hat{C}_1 + \hat{C}_2 x^2$'e sahip oluruz. Bu yüzden

$$\{\hat{p}_1(z_\alpha) + \hat{q}_1(z_\alpha) - 2\hat{p}_1(0)\}\, z_\alpha^{-1} - \hat{p}_1'(z_\alpha) = 2\hat{C}_2 z_\alpha^2 . z_\alpha^{-1} - 2\hat{C}_2 z = 0$$

Sonuçta $\hat{\theta}_{HYB}(\alpha) - \hat{\theta}_{ABC}(\alpha) = 0_p(n^{-2})$ dır. Dolayısıyla anlatılır ki $\hat{\theta}_{HYB}$ ve $\hat{\theta}_{ABC}$ üçüncü mertebeye denktir. Çok değişkenli lineer veya regresyon polinomları gibi genel regresyon problemlerin de eğim parametresi θ olduğunda bu durum ortaya çıkar. Her ne kadar regresyon problemleri, bu çalışmanın tartışma dahilinde kolayca uygun duruma getirilmesede, bununla beraber üçüncü mertebeye eşit olan eğim parametreleri için, karma ve ivmeli taraflı-düzeltme kritik noktaları da doğrudur.

Farklı diğer bootstrap kritik noktaları, σ bilindiğinde kullanım için $\hat{\theta}_{ORD}$ tanımlanır ve böylece $\hat{\theta}_{Stud}$' dan ziyade $\hat{\theta}_{Ord}$ ile karşılaştırılmalıdır.

$|\hat{\theta}_{ORD} - \hat{\theta}_{Ord}| = 0_p(n^{-3/2})$ olduğundan, $\hat{\theta}_{ORD}$ terimleri ikinci-mertebede doğrudur.

ÖRNEK 1 : ORTALAMANIN PARAMETRİK OLMAYAN TAKDİRİ

$Y_1,\ldots,Y_n$, bağımsız ve standart edilen basıklık $K \equiv \sigma^{-4}E(Y_1-\theta)^4-3$ ve standart edilen çarpıklık $\gamma \equiv \sigma^{-3}E(Y_1-\theta)^3$, varyans $\sigma^2 = E(Y_1-\theta)^2$, ortalama $\theta = E(Y_1)$ ile sürekli tekdeğişkenli ana kütleden gözlenen dağılımla aynı olsun. Bu değerlerin örneklem tanımları sırasıyla

$\hat{\theta} \equiv n^{-1}\sum Y_i$, $\hat{\sigma}^2 \equiv n^{-1}\sum (Y_i-\bar{Y})^2$, $\hat{\gamma} \equiv \sigma^{-3}n^{-1}\sum (Y_i-\bar{Y})^3$ ve $\hat{K} \equiv \hat{\sigma}^{-4}\, n^{-1}\sum (Y_i-Y)^4-3$ dır. Bizi ilgilendiren polinomlar bu durumda

$$p_1(x) \equiv -\frac{1}{6}\gamma(x^2-1),$$

$$q_1(x) \equiv \frac{1}{6}\gamma(2x^2+1),$$

$$p_2(x) \equiv -x\{\frac{1}{24}K(x^2-3)+\frac{1}{72}\gamma^2(x^4-10x^2+15)\},$$

$$q_2(x) \equiv x\{\frac{1}{12}K(x^2-3)-\frac{1}{18}\gamma^2(x^4+2x^2-3)-\frac{1}{4}(x^2+3)\}$$

dır. $\hat{p}_1$, $\hat{p}_2$, $\hat{q}_1$ ve $\hat{q}_2$ polinomları, γ ve K sırasıyla $\hat{\gamma}$ ve $\hat{K}$ ile yerine konulması haricinde teorik karşılığıyla aynıdır. Ek olarak $\hat{\gamma} = \gamma + 0_p(n^{-1/2})$ ve $\hat{K} = K + 0_p(n^{-1/2})$ dir.

Kritik noktaların aşağıdaki açılımlarını çıkarabiliriz.

$$\hat{\theta}_{STUD}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\,[z_\alpha + n^{-1/2}\frac{1}{6}\hat{\gamma}(2z_\alpha^2+1) + n^{-1}z_\alpha\{-\frac{1}{12}K(z_\alpha^2-3)+\frac{5}{72}\gamma^2(4z_\alpha^2-1) + \frac{1}{4}(z_\alpha^2+3)\}] + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{HYB}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\sigma^2\,[z_\alpha - n^{-1/2}\frac{1}{6}\hat{\gamma}(z_\alpha^2-1) + n^{-1}z_\alpha\{\frac{1}{24}K(z_\alpha^2-3)-\frac{1}{36}\gamma^2(2z_\alpha^2-5)\}] + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{BACK}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\,[z_\alpha + n^{-1/2}\frac{1}{6}\hat{\gamma}(z_\alpha^2-1) + n^{-1}z_\alpha\{\frac{1}{24}K(z_\alpha^2-3)-\frac{1}{36}\gamma^2(2z_\alpha^2-5)\}] + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{BC}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\,[z_\alpha + n^{-1/2}\frac{1}{6}\hat{\gamma}(2z_\alpha^2+1) + n^{-1}z_\alpha\{\frac{1}{24}K(z_\alpha^2-3)-\frac{1}{36}\gamma^2(2z_\alpha^2-9)\}] + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{ABC}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}$$

$$\times [z_\alpha + n^{-1/2}\frac{1}{6}\hat{\gamma}(2z_\alpha^2 + 1)$$

$$+ n^{-1} z_\alpha\{\frac{1}{24} K(z_\alpha^2 - 3) + \frac{1}{36}\gamma^2(z_\alpha^2 + 11)\}] + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{Stud}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}$$

$$\times [z_\alpha + n^{-1/2}\frac{1}{6}\gamma(2z_\alpha^2 + 1)$$

$$+ n^{-1} z_\alpha\{-\frac{1}{12} K(z_\alpha^2 - 3) + \frac{5}{12}\gamma^2(4z_\alpha^2 - 1) + \frac{1}{4}(z_\alpha^2 + 3)\}] + 0_p(n^{-2}),$$

Benzer açılımlar $\hat{\theta}_{ORD}$ ve $\hat{\theta}_{Ord}$ için çıkarılabilinir.

ÖRNEK 2 : ÜSTEL ORTALAMANIN TAKDİRİ

$Y_1, Y_2, \ldots, Y_n$ bağımsız ve $h_\theta(y) = \theta^{-1}\exp(-\theta^{-1}y)$, [$y > 0$ için] yoğunluk dağılımından gözlenen dağılımla aynı olsun. θ'nın Maximum olabilirlik takdircisi $\hat{\theta} \equiv n^{-1}\sum Y_i$ ortalama örneklemidir, ve σ $(=\theta)$ nın maximum olabilirlik takdiridir. H ile $\hat{H}$ dağılım fonksiyonları ve K ile $\hat{K}$ dağılım fonksiyonları bu durumda aynıdır. Bu yüzden bootstrap kritik noktaları bunların teorik karşılıklarıyla aynıdır. Polinomlar $p_1(x) \equiv (-1/3)(x^2-1)$, $p_2(x) \equiv -(1/36)\,x\,(2x^4-11x^2+3)$, $q_1(x) \equiv (1/3)(2x^2+1)$ ve $q_2(x) \equiv -(1/36)\,x\,(8x^4-11x^2+3)$ dır. Sonuçta

$$\hat{\theta}_{STUD}(\alpha) = \hat{\theta}_{Stud}(\alpha)$$

$$= \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha + n^{-1/2}\frac{1}{3}(2z_\alpha^2 + 1) + n^{-1}\frac{1}{36}z_\alpha(13z_\alpha^{-2} + 17)\}$$

$$+ 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{HYB}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha - n^{-1/2}\frac{1}{3}(z_\alpha^2 - 1) + n^{-1}\frac{1}{36}z_\alpha(z_\alpha^2 - 7)\} + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{BACK}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha + n^{-1/2}\frac{1}{3}(z_\alpha^2 - 1) + n^{-1}\frac{1}{36}z_\alpha(z_\alpha^2 - 7)\} + 0_p(n^{-2}),$$

$$\hat{\theta}_{BC}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha + n^{-1/2}\frac{1}{3}(z_\alpha^2+1) + n^{-1}\frac{1}{36}z_\alpha(z_\alpha^2+9)\} + 0_p(n^{-2})$$

$$\hat{\theta}_{ABC}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha + n^{-1/2}\frac{1}{3}(2z_\alpha^2+1) + n^{-1}\frac{1}{36}z_\alpha(13z_\alpha^2+17)\}$$
$$+ 0_p(n^{-2})$$

dır. Bu yüzden $\hat{\theta}_{STUD}$ ve $\hat{\theta}_{ABC}$' nin her ikiside üçüncü-mertebede doğrudur. Bu, bölüm (3.4) de konu ettiğimiz parametrik örnekle farklıdır. Burada üçüncü sırada doğruluğu ihmal edilen $\hat{\theta}_{ABC}$' yi gösteririz.

3.4.3. Çift-Taraflı Eşit-Uzantılı Araıkların Uzunluğu

$\hat{\theta}_{STUD}$, $\hat{\theta}_{HYB}$, $\hat{\theta}_{BACK}$, $\hat{\theta}_{ABC}$ ve $\hat{\theta}_{Stud}$ kritik noktaların herbiri

$$\hat{\theta}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_\alpha + \sum_{i=1}^{3} n^{-i/2}\hat{s}_i(z_\alpha)\} + 0_p(n^{-5/2}) \qquad (3.4.10)$$

formun açılımlarını kabul eder. Burada $\hat{s}_1$ ve $\hat{s}_3$ çift polinomlar ve $\hat{s}_2$ tek polinomdur. Çift-taraflı eşit uzantılı $I(1-2\alpha) = [\hat{\theta}(\alpha), \hat{\theta}(1-\alpha)]$ güven aralığı bu yüzden

$$L(1-2\alpha) \equiv \hat{\theta}(1-\alpha) - \hat{\theta}(\alpha)$$
$$\equiv 2n^{-1/2}\hat{\sigma}\{z_{1-\alpha} + n^{-1}\hat{s}_2(z_{1-\alpha})\} + 0_p(n^{-5/2}) \qquad (3.4.11)$$

uzunluğuna sahiptir. Özellikle dikkat edilmesi gereken, ikinci-mertebedeki terimlerin tamamen kısaltmaya sahip olmasıdır. $\hat{\theta}_{HYB}$ ve $\hat{\theta}_{BACK}$ a dayanan eşit-uzantılı aralıklar daima aynı uzunluğa, fakat genellikle farklı merkezlere sahiptirler.

θ_{Stud}' un durumunda, s_2 polinomu elbette deterministdir. Bunu $S_{2,Stud}$ gibi yazarız. $\hat{\theta}_{STUD}$' un durumunda $\hat{s}_2$ nin $\hat{S}_{2,STUD}$ tanımı, bunların bootstrap takdircileriyle $s_{2,Stud}$ un katsayılarında bilinmeyenlerin yerdeğişmesiyle oluşur. Bu ortalamalardaki $[\hat{\theta}_{Stud}(\alpha), \hat{\theta}_{Stud}(1-\alpha)]$ ve $[\hat{\theta}_{STUD}(\alpha), \hat{\theta}_{STUD}(1-\alpha)]$ aralıkların $l_{Stud}(1-2\alpha)$ ve $l_{STUD}(1-2\alpha)$ uzunlukları, sadece $0_p(n^{-2})$ terimiyle farklıdır. Genelde bootstrap aralıkların hiçbiri "ideal" eşit uzantılı [$\hat{\theta}_{Stud}(\alpha)$, $\hat{\theta}_{Stud}(1-\alpha)$] aralığını bu kadar yakın izlemez. Uzunluktaki hata genellikle $O_p(n^{-3/2})$ dir.

Eğer ortalama aralık uzunluğunda karşılaştırmamız temel ise, $E(\hat{\sigma}S_{2,STUD}) = \sigma S_{2,Stud} + O(n^{-1}) = E(\hat{\alpha})\ S_{2,Stud} + O(n^{-1})$ olduğundan $E\{1_{STUD}(1-2\alpha)\} = E\{1_{Stud}(1-2\alpha)\} + O(n^{-5/2})$ dir. Genelde şartlara göre $E\{1_{ABC}(1-2\alpha)\} = E\{1_{Stud}(1-2\alpha)\} + O(n^{-3/2})$

$\hat{\theta}(\alpha)$, (3.4.10) açılımlarını içeren bir kritik nokta olsun ve s_1 ile s_2, $\hat{s}_1$ ile $\hat{s}_2$' nin teorik tanımlarını tanımlar $U(\alpha) = n^{1/2}\{\hat{s}_1(z_\alpha)-s_1(z_\alpha)\}$, $S = n^{1/2}(\hat{\theta}-\theta)/\hat{\sigma}$ ve $T = S + n^{-1}U(\alpha)$ alınsın $(-\infty, \hat{\theta}(\alpha)]$ güven aralığı şu duruma sahiptir.

$$\begin{aligned}\pi(\alpha) &= P\{\theta \leq \hat{\theta}(\alpha)\} \\ &= P\{0 < T + z_\alpha + \sum_{i=1}^{2} n^{-i/2} s_i(z_\alpha) + 0_p(n^{-3/2})\} \\ &= P\{T \geq -z_\alpha - \sum_{i=1}^{2} n^{-i/2} s_i(z_\alpha)\} + O(n^{-3/2})\end{aligned} \tag{3.4.12}$$

T dağılımın Edgeworth açılımlar geliştirilerek π durumu için formülü daha az ve öz anlıyabiliriz. Bu açılım, daima bildiğimiz S için birine çok yakındır. Gerçekten

$$P(T \leq x) = P(S \leq x) - n^{-1}ux\emptyset(x) + O(n^{-3/2}) \tag{3.4.13}$$

X' de tek biçimdir. Burada $u = u(\alpha)$, $n \to \infty$ giderken $E\{SU(\alpha)\} = U+O(n^{-1})$'i sağlayan sabittir. Bazı cebirsel işlemlerden sonra şu gösterilebilinir.

$$\begin{aligned}\pi(\alpha) &= \alpha + n^{-1/2}\{s_1(z_\alpha) - q_1(z_\alpha)\}\ \emptyset(z_\alpha) \\ &\quad - n^{-1}[\tfrac{1}{2} s_1(z_\alpha)^2 z_\alpha + s_1(z_\alpha)\{q_1'(z_\alpha) - q_1(z_\alpha)z_\alpha\}] \\ &\quad - q_1(z_\alpha) - s_2(z_\alpha) + uz_\alpha]\emptyset(z_\alpha) + O(n^{-3/2})\end{aligned} \tag{3.4.14}$$

Çift olan $n^{-1/2}$ terimin katsayısında görünen s_1-q_1 polinomu bizim için zordur. Bu gözlem eşit-uzantılı çift-taraflı güven aralıkların hesap yapılma durumunda önemlidir.

Ek olarak $n^{-1/2}$ mertebeli terim (3.4.14), eğer $\hat{\theta}(\alpha)$ bootstrap kritik noktası, teorik tanımıyla yer değiştirmiş ise bunun gibi aynıdır. Gerçekten $\theta(\alpha)$' nın teorik tanımı

$$\hat{\theta}_{theor}(\alpha) = \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\{ z_\alpha + n^{-1/2}s_1(z_\alpha) + O(n^{-1})\}$$

i sağlar, ve (3.4.1) ile

$$P\{\theta \leq \hat{\theta}_{theor}(\alpha)\} = P\{ S \geq - z_\alpha - n^{-1/2}S_1(z_\alpha) + O(n^{-1})\}$$

$$= \alpha + n^{-1/2}\{s_1(z_\alpha)-q_1(z_\alpha)\} + O(n^{-1}) ,$$

Burada, çalışmamızdaki altını çizeceğimiz konu takviye edilir, Bootstrap yaklaşımı o kadar iyidir ki hatalı teorik kritik noktaların bootstrap tanımların kendileride hatalıdır.

Bu durum, iki taraflı aralıkların durumundan her yönüyle farklıdır. Ek olarak (3.4.14) de görünen s_1-q_1 polinomu çift dir ve ki bu (3.4.14) de artan $n^{-3/2}$, $n^{-3/2}\gamma(z_\alpha)\phi(z_\alpha) + O(n^{-2})$ gibi yazılabilir. Burada γ, çift polinomdur. Bu yüzden $I(1-2\alpha) = [\hat{\theta}(\alpha)\ \hat{\theta}(1-\alpha)]$ eşit uzantılı aralık şu kapsama sahiptir.

$$\begin{aligned}\pi(1-\alpha)-\pi(\alpha) = 1-2\alpha-2n^{-1}\Big[&\frac{1}{2}s_1(z_{1-\alpha})^2 z_{1-\alpha} + s_1(z_{1-\alpha}) \\ &X\ q_1'(z_{1-\alpha}) - q_1(z_{1-\alpha})z_{1-\alpha}\} - q_2(z_{1-\alpha}) \\ &- s_2(z_{1-\alpha}) + uz_{1-\alpha}\Big]\phi(z_{1-\alpha}) + O(n^{-2})\end{aligned} \qquad (3.4.15)$$

İkinci-mertebe doğruluğun sonucu, bu haldeki kapsamda nispeten daha az sonuca sahiptir.

(3.4.14) ve (3.4.15) formülleri, durumun farklı genişliğinde bootstrap güven aralıkların hatalı kapsamı için tahmin geliştirmede kullanılır.

ÖRNEK 1 : ORTALAMANIN PARAMETRİK OLMAYAN TAKDİRİ

Burada U' nun değeri $(K - \frac{3}{2}\gamma^2)\gamma^{-1}s_1(z_\alpha)$ dır ve sonuçta (3.4.14)' deki $\pi(\alpha)$' nın tanımları

$$\pi_{STUD}(\alpha) = \alpha - n^{-1}(K - \frac{3}{2}\gamma^2)\frac{1}{6} z_\alpha(2z_\alpha^2+1)\phi(z_\alpha) + 0(n^{-3/2}),$$

$$\pi_{HYB}(\alpha) = \alpha - n^{-1/2}\frac{1}{2}\gamma z_\alpha^2\phi(z\ ) - n^{-1}z_\alpha\{-\frac{1}{24}K(7z_\alpha^2-13) + \frac{1}{24}\gamma^2(3z_\alpha^4 + 6z_\alpha^2 - 11)$$

$$+\frac{1}{4}(z_\alpha^2+3)\}\ \phi(z_\alpha) + 0(n^{-3/2})$$

$$\pi_{BACK}(\alpha) = \alpha - n^{-1/2}\frac{1}{6}\gamma(z_\alpha^2+2)\phi(z_\alpha)$$

$$- n^{-1}z_a\{\frac{1}{24}K(z_\alpha^2+5) + \frac{1}{72}\gamma^2(z_\alpha^4+2z_\alpha^2-9)$$

$$+\frac{1}{4}(z_\alpha^2+3)\}\phi(z_\alpha) + 0(n^{-3/2})\}$$

$$\pi_{BC}(\alpha) = \alpha - n^{-1/2}\frac{1}{6}\gamma z^2\ \phi(z_\alpha)$$

$$- n^{-1}z_\alpha\{\frac{1}{24}K(z_\alpha^2+13) + \frac{1}{72}\gamma^2(z_\alpha^4 - 2z_\alpha^2 - 41) + \frac{1}{4}(z_\alpha^2+3)\}\ \phi(z_\alpha)$$

$$+ 0\ (n^{-3/2})$$

$$\pi_{ABC}(\alpha) = \alpha - n^{-1}z_\alpha\{-\frac{1}{24}K(5z_\alpha^2+13) - \frac{1}{8}\gamma^2(2z_\alpha^2+5) + \frac{1}{4}(z_\alpha^2+3)\}\ \phi(z_\alpha)$$

$$+ 0(n^{-3/2})$$

olarak kısalır.

Elbette $\pi_{Stud}(\alpha) = \alpha$ dır.

İki-taraflı bootstrap güven aralıkların olasılık kapsamı onların aralık uzunluğu ile karşılaştırıldığı zaman daha anlamlıdır. İki taraflı % 95 lık aralıkların durumunda bunu yapmalıyız. Aralık uzunluğu $l(1-2\alpha)$ olduğu (3.4.,11) ve (3.4.14) den ileri sürülür ve $[\hat{\theta}(\alpha), \hat{\theta}(1-\alpha)]$ aralığın $\pi(1-\alpha) - \pi(\alpha)$ kapsamı s ve t polinomları için

-Tablo 1-

Kritik Nokta Tipleri	$s(z_{1-\alpha})$: uzunluğu	$t(z_{1-\alpha})$: hata durumu
STUD	$-0.14K + 1.96\gamma^2 + 3.35$	$-2.84K + 4.25\gamma^2$
HYB	$0.069K - 0.15\gamma^2$	$1.13K - 4.60\gamma^2 - 3.35$
BACK	$0.069K - 0.15\gamma^2$	$-0.72K - 0.37\gamma^2 - 3.35$
BC	$0.069K + 0.072\gamma^2$	$-1.38K + 0.92\gamma^2 - 3.35$
ABC	$0.069K + 0.81\gamma^2$	$-2.63K + 3.11\gamma^2 - 3.35$
Norm	0	$0.14K - 2.12\gamma^2 - 3.35$
Stud	$-0.14K + 1.96\gamma^2 + 3.35$	0

$$1-2\alpha = 2n^{-1/2}\hat{\sigma}\{ z_{1-\alpha} + n^{-1}s(z_{1-\alpha})\} + 0_p(n^{-2}) ,$$

$$\pi(1-\alpha) - \pi(\alpha) = 1-2\alpha + n^{-1}2t(z_{1-\alpha})\emptyset(z_{1-\alpha}) + 0(n^{-2}) \qquad (3.4.16)$$

şeklinde yazılabilir. % 95 aralıkların durumu için, $\alpha = 0.025$ ve $z_{1-\alpha} = 1.95996$ dır. Kapsamda oluşan hata ve aralık uzunluğu tablo 1 de gösterilmiştir.

$I_{Norm}(1-2\alpha) = [\hat{\theta} - n^{-1/2}\hat{\sigma}\, z_{1-\alpha},\ \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\, z_{1-\alpha}]$ güven aralığın basit normal teorisi, karşılaştırmayı içerir. $(-\infty,\ \hat{\theta} + n^{-1/2}\hat{\sigma}\, z_{\alpha}]$ aralığın kapsamı şuna eşittir.

$$\pi_{Norm}(\alpha) = \alpha - \alpha^{-1/2}\frac{1}{6}\gamma(2z_{\alpha}^2 + 1)\,\emptyset(z_{\alpha})$$

$$+ n^{-1}z_{\alpha}\{\frac{1}{12}K(z_{\alpha}^2 - 3) - \frac{1}{18}\gamma^2(z_{\alpha}^4 + 2z_{\alpha}^2 - 3) - \frac{1}{4}(z_{\alpha}^2 + 3)\}\,\emptyset(z_{\alpha}) + 0(n^{-3/2})$$

Eğer γ çarpıklığın ve K basıklığın her ikiside sıfır ise $\hat{\theta}_{STUD}$, $0(n^{-1})$ ile değil $0(n^{-2})$ ile oluşan hatayla iki-yanlı güven aralıkların artışını verir. Diğer tüm eşit-uzantılı bootstrap güven aralıkları, $0(n^{-1})$ kapsam hatalarına sahiptir. Gerçekten $\gamma = K = 0$ olduğunda diğer bootstrap aralıkları, $3.35\ n^{-1}\emptyset\ (1.96)$ miktarıyla gizlidir. Tablo 1' in 3. kolonunda görünen -3.35 terimi, t-dağılım fonksiyonun açılımı ve standart normal dağılım fonksiyonları arasındaki farklılıktan ortaya çıkar. Çarpıklığın veya basıklığın sıfırdan farklılığıyla, dağılımın kapsamında tablo 1. den gördüğümüz durum altındaki önem oluşabilir. Eğer $\hat{\theta}_{HYB}$ kullanırsak, $K \lesssim 0$ dür ve eğer $\hat{\theta}_{BACK}$ kullanırsak $K \geq 0$ dır.

$\hat{\theta}_{STUD}$' a dayalı aralıklar, genellikle daha uzun olabilmeye yönelir ve diğer eşit uzantılı bootstrap aralıkların herhangi birine dayalı aralıklardan ve normal teorik aralığından daha büyük kapsama sahiptirler.

Tablo 2

Kritik Nokta Tipleri	$s(z_{1-\alpha})$: uzunluğu	$t(z_{1-\alpha})$: hatalı durum
STUD, ABC, Stud	3.64	0
HYB	-0.17	-8.24
BACK	-0.17	-2.44
BC	0.70	-1.21
Norm	0	-4.29

Kapsam hatası ve aralık uzunluğu arasında genel bir ilişki yoktur. Örneğin, sıfırdan farklı çarpık dağılımların durumunda normal dağılımlı taraflı-düzeltmeli aralık, ivmeli taraflı-düzeltmeli aralıktan daha dar olabilmeye yönelir. Fakat sadece $K < 1.74\gamma^2$ olduğu durumda daha küçük bir aralığa sahiptir.

ÖRNEK 2 : ÜSTEL ORTALAMANIN TAKDİRİ

$\hat{\theta}_{HYB}$, $\hat{\theta}_{BACK}$, $\hat{\theta}_{BC}$ ve $\hat{\theta}_{Norm}$'a dayalı eşit uzantılı iki-taraflı aralıklar $\hat{\theta}_{Stud}$, $\hat{\theta}_{STUD}$ ve $\hat{\theta}_{ABC}$'ye dayalı aralıklardan daha aşağı duruma ve daha dar uzunluğa sahip olmaya yönelirler. Son söylenen üç kritik noktaların tümü üçüncü mertebeye denktir fakat $\hat{\theta}_{Stud} \equiv \hat{\theta}_{STUD}$ olduğundan bu noktalar $\hat{\theta}_{ABC}$ gibi tamamen benzer değildir.

3.4.4. En dar Aralıklar

(3.2.4). bölümde anlatılan en dar aralığın teorik özellikleri ve bu aralıkların bootstrap yöntemi de aynı özelliklere sahiptir. Özellikle ν ve ω'nın bootstrap takdircileri $\hat{\nu}$ ve $\hat{\omega}$,

$$\hat{\nu} = z_{1-\alpha} + \sum_{j=1}^{3} n^{-j/2}\,\hat{\nu}_j + 0_p(n^{-2}) \quad \text{ve}$$

$$\hat{\omega} = z_{1-\alpha} + \sum_{j=1}^{3} (-n^{-1/2})^j\,\hat{\nu}_j + 0_p(n^{-2})$$

sağlar. Burada $\hat{\nu}_j$, v_j' nin bootstrap takdiridir. Aralık uzunluğu

$$\begin{aligned} n^{-1/2}\hat{\sigma}\,(\hat{v} + \hat{w}) &= 2n^{-1/2}\hat{\sigma}\,(z_{1-\alpha} + n^{-1}\hat{v}_2) + 0_p(n^{-5/2}) \\ &= 2n^{-1/2}\hat{\sigma}\,(z_{1-\alpha} + n^{-1}v_2) + 0_p(n^{-2}) \end{aligned} \tag{3.4.17}$$

dir.

Ve ortalama araliğı uzunluğu

$$\begin{aligned} E\{n^{-1/2}\,\hat{\sigma}(\hat{v} + \hat{w})\} &= E\{2n^{-1/2}\hat{\sigma}\,(z_{1-\alpha} + n^{-1}\hat{v}_2)\} + 0(n^{-5/2}) \\ &= E\{2n^{-1/2}\hat{\sigma}(z_{1-\alpha} + n^{-1}v_2)\} + 0(n^{-5/2}) \\ &= E\{n^{-1/2}\,\sigma^2(v + w)\} + 0(n^{-5/2}) \end{aligned}$$

Kapsam olasılık, (3.4.15) ile yol gösterilen benzer hususla bulunabilinir ve $\beta_1 \equiv 1-2\alpha + n^{-1}2uz_{1-\alpha} + \emptyset(z_{1-\alpha}) + 0(n^{-3/2})$ dır.
Burada U, elverişli durumda

$$E\{Sn^{1/2}\,(\hat{v}_1-v_1)\} = u + 0(n^{-1})$$

ile verilir. En dar bootstrap güven aralığın uzunluğu, $n^{-3/2}$'nin miktariyle I_{STUD} eşit uzantılı aralığınkinden daha azdır. Bu, standart normalli ve t-dağılımlı kritik noktaların $(N\,(\theta,\sigma^2)$ ana kütlesinin θ ortalaması için) arasındaki farklılık gibi aynı mertebededir.

ÖRNEK 1 : ORTALAMANIN PARAMETRİK OLMAYAN TAKDİRİ

Burada $\nu_1 = -\gamma \frac{1}{6} (2z_{1-\alpha}^2 - 3)$,

$$\nu_2 = z_{1-\alpha}\{-\frac{1}{12}K(z_{1-\alpha}^2 - 3) + \frac{1}{72}\gamma^2(20z_{1-\alpha}^2 - 21) + \frac{1}{4}(z_{1-\alpha}^2 + 3)\} \quad (3.4.18)$$

ve $U \equiv -\frac{1}{6}(K - \frac{3}{2}\gamma^2)(2z_{1-\alpha}^2 - 3)$ Bu yüzden, durum

$$\beta_1 = 1-2\alpha - n^{-1}\frac{1}{3}(K - \frac{3}{2}\gamma^2)z_{1-\alpha}(2z_{1-\alpha}^2 - 3)\emptyset(z_{1-\alpha}) + O(n^{-3/2})$$

dir. Eğer

$$\beta_2 \equiv 1-2\alpha - n^{-1}\frac{1}{3}(K - \frac{3}{2}\gamma^2)z_{1-\alpha}(2z_{1-\alpha}^2 + 1)\emptyset(z_{1-\alpha}) + O(n^{-3/2})$$

$I_{STUD}(1-2\alpha) \equiv [\hat{\theta}_{STUD}(\alpha), \hat{\theta}_{STUD}(1-\alpha)]$ eşit uzantılı aralığın kapsamın ve $\beta_o = 1-2\alpha$ önemsiz (sözde) kapsamı tanımlar ise o zaman $(\beta_1 - \beta_o)/(\beta_2 - \beta_o)$ hatanın oranı $(2z_{1-\alpha}^2 - 3)/(2z_{1-\alpha}^2 + 1)$ $n \to \infty$ için yakınsar. Bu değerler $\beta_o > 0.78$ için daima pozitiftir ve önemli durumlarda 0.38, 0.54 ve 0.72 sırasıyla $\beta_o = 0.90$, $\beta_o = 0.95$ ve $\beta_o = 0.99$ değerlerine eşittir. Bu yüzden en dar güven aralığı, $I_{STUD}(1-2\alpha)$ eşit-uzantılı aralık ile uzunluk karşılaştırmada küçültme, yalnız sonuç değildir.

Aralık uzunluğu için (3.4.17)' deki formüle v_2' i için (3.4.18) formülünü yerleştirilir ve eşit uzantılı aralıkların uzunlukları için (3.4.11) ile karşılaştırılarak, aralık uzunluğunun $n^{-3/2}(4/9)\alpha\gamma^2 z_{1-\alpha} + O_p(n^{-2})$ kısaltılmış değerine sahip olduğunu görürüz ve eşit uzantılı $I_{STUD}(1-2\alpha)$ aralığı ile karşılaştırılır.

ÖRNEK 2 : ÜSTEL ORTALAMANIN TAKDİRİ

Burada en dar bootstrap aralığı ve $I_{STUD}(1-2\alpha)$ nın her ikiside kapsam hatası sıfıra sahiptir. Biçimlendirici, $n^{-3/2}(16/9)\, z_{1-\alpha} + O_p(n^{-2})$ miktarıyla en dar uzunluğuna sahiptir.

4. SONUÇ

Quenouille-Tukey Jackknife'ı ile ilgili istatiksel değişkenlerin standart sapmalarının hesaplanmasında ve aynı zamanda istatistiğin dağılımının önceden belirtilen bir noktada merkezlenen, geçersiz hipotezleri kontrol etmede önemli, bir parametrik olmayan metoddur.

Jackknife, bootstrap'ın doğrusal bir yaklaşımı olarak görülür. Temelde bootstrap metodunun Jackknife' dan daha geniş bir uygulama alanı vardır.

Bootstrap kendiliğinden oluşan küçük bir düzen hatası ile birlikte gerçeğe yakın tahminler verir. Bootstrap iterasyonu similasyonların similasyonlarına neden olur. Uygulamada dağılım analitik olarak takdir edilemiyorsa bootstrap yöntemi kullanışlı olmaktadır. Edgeworth açılımları gibi birçok teknikliklerde terimlerin kesin hesaplanmaları gerekir. Bu tekniklerle bootstrap iterasyonu kıyaslanırsa, bootstrap kesin hesap gerektirmeyen bir teknik olduğundan, diğer tekniklerden birçok farklılık gösterir.

Kısaca bootstrap yöntemi hataların düzeltimleri için tekrarlanması ile hatayı en aza ve doğruya en yakın tahmini vermesinden, bunları yaparkende örneklemleri benzetimle (yani similasyonla) oluşturduğundan çalışmalardaki maliyetin düşmesini sağlar.

Ayrıca parametrik olmayan şartlarda da bu yöntemi kullanabildiğimizden dağılım varsayımına gereksinim duyulmadan güven aralığı oluşturmak mümkündür.

YARARLANILAN KAYNAKLAR

1. ABRAMOVITCH, L. and SINGH, K. (1985); Edgeworth corrected pivotal statistics and the bootstrap. Ann. Statist. 13, 116-132

2. ARMUTLULU, İ.H.; İstatistiksel Takdir. Basılmamış ders notları

3. BABU, G.J. and SINGH, K. (1983); Inference on means wing the bootstrap. Ann. Statist. II, 999-1003

4. BERAN, R.J. (1982); Estimated Sampling distributions; the bootstrap and competitors. Ann. Statist. 10, 212-225

5. BERAN, R.J. (1984); Jackknife approximations the bootstrap estimates Ann. Statist. 12, 101-118

6. BHATTACHARYA, R.N. and GHOSH, J.K. (1978). On the validity of the formal Edgeworth expansion. Ann. Statist. 6, 435-451

7. BICKEZ, P.J. and FREEDMAN, D. (1981). Some asymptotics on the bootstrap. Ann. Statist. 9, 1196-1217

8. EFRON, B. (1979). Bootstrap methods : another look at the Jackknife. Ann. Statist. 7, 1-26

9. EFRON, B. (1982) The Jackknife, the Bootstrap and Other Kesampling Plans. SIAM, Philadelphia

10. HALL, P. (1983) Inverting on Edgeworth expansion. Ann. Statist. 11, 569-576

11. HALL, P. (1988) Theoretical Comparison of Bootstrap Confidence Intervals, Ann. Statist. 1 , 927-953.

12. WITHERS, C.S. (1983) Expansions for the distribution and quantiles of a regular functional of the empirical distribution with applications to nonparametric confidence intervals. Ann. Statist. 11, 577-587.