T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
İSTATİSTİK BİLİM DALI

MONTE CARLO SİMÜLASYONU İLE VARYANS RİSK PRİMİ HESAPLAMASI

Yüksek Lisans Tezi

OYA ÖZKAN

Haziran, 2010

T.C.
MARMARA ÜNİVERSİTESİ
SOSYAL BİLİMLER ENSTİTÜSÜ
EKONOMETRİ ANABİLİM DALI
İSTATİSTİK BİLİM DALI

MONTE CARLO SİMÜLASYONU İLE VARYANS RİSK PRİMİ HESAPLAMASI

Yüksek Lisans Tezi

OYA ÖZKAN

Danışman: DOÇ. DR. AHMET METE ÇİLİNGİRTÜRK

Haziran, 2010

Marmara Üniversitesi
Sosyal Bilimler Enstitüsü Müdürlüğü

Tez Onay Belgesi

EKONOMETRİ Anabilim Dalı İSTATİSTİK Bilim Dalı Yüksek Lisans öğrencisi OYA ÖZKAN nın MONTE CARLO SİMÜLASYONU İLE VARYANS RİSK PRİMİ HESAPLAMASI adlı tez çalışması ,Enstitümüz Yönetim Kurulunun 19.07.2010 tarih ve 2010-14/19 sayılı kararıyla oluşturulan jüri tarafından oybirliği/~~oyçokluğu ile~~ Yüksek Lisans Tezi olarak kabul edilmiştir.

	Öğretim Üyesi Adı Soyadı	İmzası
Tez Savunma Tarihi	: 26.08.2010	
1) Tez Danışmanı :	DOÇ. DR. AHMET METE ÇİLİNGİRTÜRK	....
2) Jüri Üyesi :	DOÇ. DR. DİLEK ALTAŞ	....
3) Jüri Üyesi :	DOÇ. DR. ÜNAL HALİT ÖZDEN	....

ÖNSÖZ

Günümüzde finansal piyasaların derinliği ve karmaşıklığı, çok sayıda türev ürünün de piyasalara dâhil edilmesiyle birlikte önemli ölçüde artmıştır. Teknoloji de özellikle gelişen iletişimle piyasalardaki dalgalanma ve belirsizlikler giderek artmaktadır. Bu amaçla, çalışmada varyans risk primi formülleri ve hesaplama yöntemleri anlatılmış ve anlatılan bu yöntem ve formüllerin Türkiye piyasasında uygulanması yapılmaya çalışılmıştır. Bu çalışmayı sonuçlandırmamda katkıda bulunan hocam Doç. Dr. Ahmet Mete Çilingirtürk'e ve inançlarını hiç kaybetmeyen aileme çok teşekkür eder çalışmanın tüm ilgililere yararlı olmasını dilerim.

İstanbul, 2010 Oya Özkan

İÇİNDEKİLER

Sayfa No.

TABLO LİSTESİ

Sayfa No.

ŞEKİL LİSTESİ

Sayfa No.

1. GİRİŞ

Literatürde çok fazla örnek olmamakla birlikte yapılan araştırmaların tümü varyans risk primini açıklarken varyans swap oranlarını kullanmışlardır. Varyans swap oranları, vade tarihinde gerçekleşmiş varyans ile sabit oran arasındaki farkı yatırımcısına öder. Varyansın da prim hesaplamada dahil edilmesinden dolayı risk olgusu açısından oldukça gelişmiş bir türev üründür. Ancak Türkiye piyasalarında varyans swap oranı ve opsiyonlar gibi türev ürünlerin olmamasından dolayı veri sağlama konusunda sıkıntı yaşanmaktadır (Türkiye'de opsiyon işlemleri yapılmakta fakat, Türkiye'nin opsiyon sözleşmeleri Londra borsasında işlem görmektedir). Bu çalışmanın amacı uygun Proxy'leri belirleyerek varyans risk primi hesaplamasında kullanılan formüllerin Türkiye de uygulanabilir hale gelmesini sağlamaktır.

Günümüzde finansal piyasaların derinliği ve karmaşıklığı, çok sayıda türev ürünün de piyasalara dâhil edilmesiyle birlikte önemli ölçüde artmıştır. Teknoloji de özellikle iletişimdeki gelişmeler ile piyasalardaki dalgalanma ve belirsizlikler giderek artmaktadır. Son yaşanan krizle birlikte riskin belirlenmesi ve yönetilmesi oldukça önem kazanmıştır. Risk yönetimi portföyün dolayısıyla da yatırımcının getirisini (karlılığını) olumsuz şekilde etkileyecek riskin belirlenip, ölçülerek, en alt düzeye indirilmesidir. Menkul kıymet veya portföy getirileri de, riskten bağımsız ele alınmamaktadır. Bu nedenle yatırımcılar uygun finansal araçlar belirleyerek riski dağıtma yolunu seçmektedirler. Tek bir yatırım enstrümanı ile piyasalarda işlem yapmak yerine getiri tercihlerini gözden geçirip belirsizlikleri görece daha aza indirme yoluna giderek birkaç yatırım aracıyla işlem yapmayı tercih etmektedirler.

Bu çalışmada, varyans risk primi simülasyon yoluyla ve simülasyon kullanmayarak doğrudan hesaplanacaktır. Bu amaç doğrultusunda, çalışmanın ikinci bölümünde risk primi özellikleri ve dinamikleri ele alınmıştır. Üçüncü bölümde ise Monte Carlo Metodu açıklanarak simülasyon yapılmış üretilen seriden varyans risk primi hesaplanmasına gidilmiştir.

Yapılan çalışmaların çoğu finansal varlık fiyatlama modeli CAPM (Capital Asset Pricing Models) üzerinedir. CAPM de anlatılan sistematik risk primi β'dır. β

sistematik riskin ölçüsü olup bir kıymetin ne ölçüde pazarla birlikte hareket ettiğini göstermektedir. Fakat yatırımcılar sadece sistematik risk ile değil aynı zamanda da varyans riski ile de karşılaşmaktadırlar.

2. RİSK PRİMİ DİNAMİKLERİ VE ÖZELLİKLERİ

Varyans risk primi hakkındaki en sade tanımı Bollerslev ve Zhou (2007) yaptıkları çalışmada anlatmışlardır.

"Zaman serilerinde gerçekleşen değişimin %50'sinden fazlasını, 1990-2005 gözlem aralığında 3 aylık datalarla yaptıkları çalışmada, Pazar portföyün deki artı getiriyi,örtük (implied) ve gerçekleşen varyans arasındaki farkla diğer bir ifade ile varyans risk primi ile açıklayabilmişlerdir".

2.1. TEMEL KAVRAMLAR

Araştırmanın asıl konusu olan risk primini anlatmadan önce konu ile ilgili bazı kavramların açıklanmasına gerek duyulmaktadır. Literatürde de sıkça karşılaşılan volatilite, varyans, piyasalardaki belirsizliğin bir ölçüsü olan VIX Endeksi ve Opsiyon işlemleri konusuna aşağıda kısaca yer verilmiştir. Tüm bu anlatılanlar birbirleriyle bağlantılı olup opsiyonları anlamadan örtük volatiliteyi ve VIX endeksini anlamak, volatiliteyi anlamadan da örtük volatiliteyi anlamak mümkün değildir. Temelde birbiriyle yoğun ilişkili olan bu konular açıklandıktan sonra risk primi ve hesaplanması konusu daha iyi anlaşılacaktır.

2.1.1 Volatilite Kavramı

Tanım olarak volatilite, herhangi bir değişkenin, belirli bir ortalama veya değere göre çok yüksek artış yada azalışlar göstermesi anlamına gelmektedir. Volatil terimi ise, bir hisse senedi, bono veya herhangi bir finansal varlığın fiyatında meydana gelen dalgalanmaların büyüklüğünü ve bu dalgalanmaların gerçekleşme sıklığını açıklamak amacıyla kullanılmaktadır. [1]

Sürekli değişen piyasa koşullarında volatilitenin artması finansal varlıkların fiyat ve getirilerini etkileyen risklerin de artmasını beraberinde getirmiştir. Finansal varlıkların fiyatlandırılmasında ve getirilerinin ölçülmesinde doğru tanımlanmış risk

[1] Güneş H. ve Saltoğlu B. ,**İMKB Getiri Volatilitesinin Makroekonomik Bağlamda İrdelenmesi**, İMKB Yayınları,1998

ölçümü oldukça önemli bir yere sahiptir. Riskin *"getirilerin olasılık dağılımının varyansı"* olarak tanımlanması finansal ekonomide genel kabul görmüştür. Varyans ise zaman içinde özellikle türev araçların fiyatlandırılması, risk azaltım stratejilerinin değiştirilmesi ve risk priminin belirlenmesinde riskin bir ölçütü olarak kullanılmaya başlanmıştır.[2]

Bu araştırmada volatilitenin, türev ürünler içinde yer alan opsiyonlar üzerinden anlatılmasına devam edilecektir. Opsiyon fiyatlama formülü varlık fiyatlarındaki volatiliteyi direkt olarak görmemizi sağlayamamaktadır. Bu da yatırımcıları opsiyon fiyatlarından örtük volatiliteyi (implied, zımni volatilite) hesaplamaya itmektedir.[3]

Varyans hesaplamasına geçmeden önce getirilerin nasıl hesaplanacağına karar verilmelidir. Aşağıda 3 farklı şekilde getiri hesaplama yöntemi anlatılmıştır ve araştırmanın ilerideki bölümlerinde ölçek problemini ortadan kaldırdığından dolayı logaritmik getiri ile çalışılmasına karar verilmiştir.

Logaritmik getiri;

$$u_t = \ln S_t - \ln S_{t-1}$$

Mutlak getiri;

$$u_t = S_t - S_{t-1}$$

Geometrik getiri;

$$u_t = \frac{S_t}{S_{t-1}} - 1$$

Volatilitenin standart tanımı varyansın karekök'ü dür.

Varyans ise;

---

[2] Murat Mazıbaş., İMKB Piyasalarındaki volatilitenin Modellenmesi ve Öngörülmesi: Asimetrik GARCH Modelleri ile bir Uygulama, http://www.ekonometridernegi.org/bildiriler/o16s3.pdf , (24 Şubat 2010), s.2.
[3] John C. Hull, **Risk Management and Financial Institutions**, New Jersey: Prentice Hall, s. 114

$$s^2 = \frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}(u_t - \bar{u})^2$$

u_i ise,

$$u_t = \ln(\frac{S_t}{S_{t-1}}) \qquad t = 1,2,...,n.$$

Veya

$$s = \sqrt{\frac{1}{T}\sum_{t=1}^{T}{u_t}^2 - \frac{1}{T \times (T-1)}\left(\sum_{t=1}^{T}{u_t}^2\right)}$$

u_t = değişkenin t. zamandaki getirisi

$\bar{u}$ = ortalama getiri

T = örnek hacmi

olarak ifade edilir ve T ise genellikle bir yıldaki çalışma günü sayısı olan 252 olarak alınır.

Örtük Volatilite;

$$IV_t = \sum_{i=1}^{m}\left[\frac{C_t\left(t+1, \frac{K_i}{B(t,t+1)}\right) - C_t\left(t, \frac{K_i}{B(t,t)}\right)}{{K_i}^2} - \frac{C_t\left(t+1, \frac{K_{i-1}}{B(t,t+1)}\right) - C_t\left(t, \frac{K_{i-1)}}{B(t,t)}\right)}{{K_{i-1}}^2}\right]\Delta K$$

$C_t(T,K) =$ Avrupa tipi Alım opsiyonunun fiyatı (opsiyon primi)

$T =$ Opsiyonun Vadesi

$K =$ Kullanım Fiyatı

$B(t,T) =$ T vadesindeki sıfır-kupon ödemeli bononun fiyatı olarak ifade edilir.

Risk ölçütü olarak varyansın kullanılması, finansal varlıkların getirilerinin dağılımlarınında belirlenmesini gerekli kılmaktadır. Finansal varlıkların fiyatlarındaki değişimlerinin izlediği stokastik sürece ilişkin genel görüş bu sürecin "*rassal yürüyüş (random walk) süreci*" olduğu varsayımıdır. Rassal yürüyüş sürecinde, fiyat değişimlerinin ortalamasının (beklenen değeri) sıfır, varyansın sabit ve fiyat değişimleri birbirinden bağımsız ve aynı dağılıma sahip olduğu (independent and identically distributed) kabul edilir. Eğer fiyat değişimleri serisi normal dağılıma sahipse, süreç *"brownian motion"* olarak adlandırılan stokastik sürece dönüşür[4].

Browian motion'da bir parçacığın kat ettiği mesafe, zamanın karekökü ile orantılıdır. Bu "*karekök T kuralı*" olarakta adlandırılır[5].

$R = T^{0.5}$

R= kat edilen mesafe

T= zaman endeksi

Bu nedenle u_t'nin standart sapması $\sigma\sqrt{t}$ olarak hesaplanır. σ değişkenin volatilitesi, s değişkeni ise $\sigma\sqrt{t}$'nin tahmini olarak adlandırılır. σ'nın tahmincisi $\hat{\sigma}$ ise;

$$\hat{\sigma}_t = \frac{s}{\sqrt{t}}$$ olarak bulunur.

Örneğin, hisse senedi getirilerinin yıllık riski bu getirilerin aylık standart sapmasının, karekök 12 ile çarpılmasıyla bulunur.[6] Finansal varlıkların getirilerinin rassal yürüyüş süreci varsayımlarından sıfır ortalama varsayımı, getirilerdeki rassal

---

[4] Mazıbaş, s.3.
[5] Ercan Balaban,**Einstein, Risk ve Gümrük Birliği**, Tartışma Tebliği 9507, Araştırma Genel Müdürlüğü, T.C.M.B. , Nisan, 1995, s.81
[6] Balaban, s.81.

hareketlerin öngörülemeyeceğini ifade eden etkin piyasa hipoteziyle de* uyumludur ve sıklıkla varsayım sağlanabilmektedir. Fakat rassal yürüyüş modelinin sabit varyans ve bağımsızlık varsayımı yapılan çalışmalarda sağlanamamaktadır. Özellikle yüksek frekanslı zaman serilerinde kalın kuyruk (fat tail) ve ortalama etrafındaki aşırı basıklık (leptokurtosis) problemleri bu varsayımlardan sapmalar göstermektedir. Burada yüksek frekanslı zaman serilerinden kasıt, serilerin günlük yada haftalık olmasıdır.

Ayrıca finansal seriler aşırı basıklık ve kalın kuyruk problemlerinin yanı sıra kaldıraç etkiside göstermektedir. Kaldıraç etkisinden ilk kez Black tarafından 1976'da söz edilmiştir. Hisse senedi volatilitesindeki değişim ile negatif korelasyonlu hisse senedi fiyatlarındaki değişimin eğilimi anlamına gelmektedir.[7] Kaldıraç etkisi büyük fiyat düşüşleri, aynı miktarlı fiyat yükselişlerinden daha yüksek volatiliteye neden olmaktadır.[8]

2.1.2 VIX Endeksi

Piyasalardaki değişen volatilite, risklerin ve risk algılamasınında değişmesini sağlamaktadır. Risk algılamasınının temel göstergelerinden biri olan VIX Endeksi ise; finansal piyasalarda, Chicago Opsiyon Borsası (CBOE) tarafından üretilen ABD hisse senedi opsiyonlarındaki zımni dalgalanmayı gösterir.[9]

1993 yılında, CBOE volatilite endeksi olarak tanıtılan VIX endeksi piyasanın 30 günlük kardaki S&P 100 endeksinin (OEX) opsiyon fiyatları kullanılarak örtük volatilite beklentisini ölçmek amacı ile oluşturuldu.

2003 yılında CBOE ve Goldman Sachs, finansal teorisyenlerinin ve risk yöneticilerinin de sıklıkla kullandığı beklenen volatiliteyi de içeren yeni VIX endeksini geliştirdi. Yeni VIX endeksi, S&P 500 endeksi (SPX) ve Amerikan hisse senetleri

---

* Etkin piyasa hipotezi, içinde bulunulan zamanın herhangi bir anında finansal varlıkların bütün bilgiyi yansıttığını ve herhangi bir ani bilgi girişinin de derhal bu finansal varlıkların fiyatına yansıdığını kabul eder. (R. Dobbins ve S.F. Witt, **Portfolio Theory and İnvesment Manegament**, Ro&Co. Ltd., Oxford, 1983 Aktaran:Tuna Taner ve Koray Kalaylıdere, "1995-2000 Döneminde İMKB'de Anomali Araştırması" **Yönetim ve Ekonomi Dergisi.** Vol.9, No.1-2 (2002), ss.2-24.)

[7] T. Bollerslev , R.F. Engle and D.B. Nelson, "Arch Models"**, Discussion Paper for The Handbook of Econometric,** Vol.4, Temmuz,1993, s.43.

[8] Mazıbaş, s. 4

[9] Yusuf Önder, "Dalgalanma Korkusu ve Türkiye Örnegi", (**Uzmanlık Yeterlilik Tezi**, T.C.M.B Piyasalar Genel Müdürlüğü, Ankara, 2007), s.25.

çekirdek endeksi tabanlıdır. Geniş aralıktaki kullanım fiyatları (strike price) üzerinden SPX put ve call fiyatlarının ağırlıklı ortalaması kullanılarak beklenen volatilite tahmin edilmektedir.

VIX endeksinin genelleştirilmiş formülü,

$$\sigma^2 = \frac{2}{T}\sum_i \frac{\Delta K_i}{K_i^2} e^{RT} Q(K_i) - \frac{1}{T}\left[\frac{F}{K_0} - 1\right]^2$$

$$\sigma = \frac{VIX}{100} \Rightarrow VIX = \sigma \times 100$$

T = vadeye kalan süre

F = opsiyon fiyat endeksinden oluşturulan forward endeks seviyesi

$F =$ kullanım fiyatı + $e^{RT} \times$(alım fiyatı-satım fiyatı)

$K_0 =$ forward endeks seviyesinin(F) altındaki ilk kullanım fiyatı

$K_i =$ zarardaki i. Opsiyonun kullanım fiyatı

$$\Delta K_i = \frac{K_{i+1} - K_{i-1}}{2}$$

R = Vade sonundaki risksiz faiz oranı

$Q(K_i) =$ i. opsiyonun alım-satım spreadlerinin orta noktası

CBOE yeni VIX endeksi için aşağıdaki lineer interpolasyon denklemini kullanmaktadır,

$$VIX = 100 \times \sqrt{\left[T_1\sigma_1^2\left(\frac{N_{T_2} - N_{30}}{N_{T_2} - N_{T_1}}\right) + T_2\sigma_2^2\left(\frac{N_{30} - N_{T_1}}{N_{T_2} - N_{T_1}}\right)\right] \times \frac{N_{365}}{N_{30}}}$$

$N_{T_1} =$ en yakın vadedeki opsiyonun vadesine olan dakika sayısı

N_{T_2} = bir sonraki vadedeki opsiyonun vadesine olan dakika sayısı

N_{30} = 30 gün içindeki dakika sayısı (30 x 1,440 = 43,200)

N_{365} = 365 gün içindeki dakika sayısı (365 x 1,440 = 525,600)

2.1.3 Opsiyon İşlemleri

Daha önce anlatılan VIX endeksini, örtük volatiliteyi ve daha sonraki bölümlerde de anlatılacak olan, araştırmanın asıl konusunu oluşturan varyans risk primini anlamak ve hesaplamak için opsiyonlarla, opsiyon hesaplama parametreleri oldukça sık kullanılmaktadır. Araştırmada konu bütünlüğünün sağlanması için bu kısımda opsiyonlara ait birkaç temel bilgiye yer verilecektir.

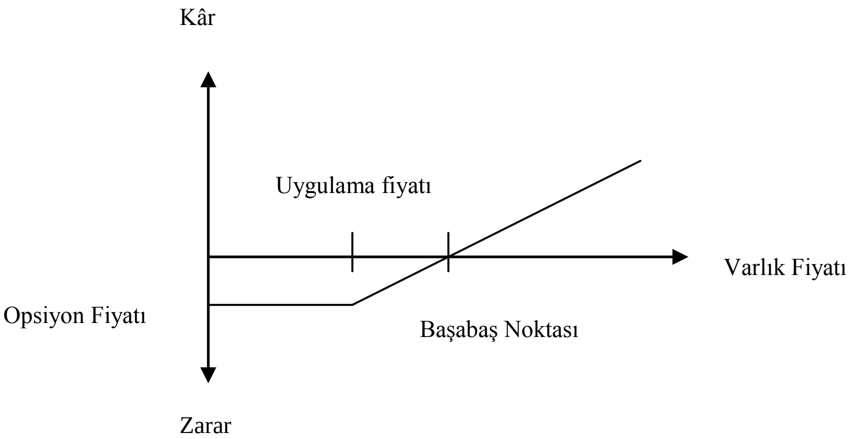
Opsiyon sözleşmeleri opsiyonu alan tarafa, ödediği pozisyon primi karşılığında belirli bir vadede veya belirli bir vadeye kadar, önceden belirlenen fiyat, miktar ve nitelikte ekonomik veya finansal göstergeyi, sermaye piyasası aracını, malı, kıymetli madeni ve dövizi alma veya satma hakkı veren, satan tarafı ise yükümlü kılan sözleşmelerdir.[10] Her opsiyon aynı zamanda bir alım (call) opsiyonu yada bir satım (put) opsiyonudur. Opsiyonlar alım yada satım opsiyonları olarak düzenlenirler. Her opsiyonun bir satıcısı vardır ve bu opsiyon satıcısı aynı zamanda da opsiyon yazıcısı (writer) olarak adlandırılır. Opsiyon satıcısı, alıcıdan opsiyon için ödeme alır ve ödeme işleminden sonra opsiyon satıcısı haklarını alıcıya devreder.[11]

Alım (Call) Opsiyonu: Alım opsiyonu opsiyona konu olan dayanak varlığı, sahibine belli bir zamanda belli bir fiyattan alma hakkını verir. Alım opsiyonları opsiyon alıcısına zorunluluk getirmez sadece hak tanır. Opsiyon alıcısı vade sonunda yada herhangi bir tarihte, opsiyona konu olan varlığı alma hakkından vazgeçebilir ancak alım opsiyonu satıcısının sözleşmeye konu olan varlığı istenildiği takdirde satma yükümlülüğü vardır. Alım opsiyonları opsiyona konu olan varlığın fiyatının yükseleceğini düşünen yatırımcılar tarafından kullanılır. Dayanak varlığın piyasa

---

[10] Sermaye Piyasası Kurulu, **Vadeli İşlem ve Opsiyon Sözleşmeleri,** s. 7.
[11] Robert Kolb, **Understanding Options,** Newyork: John Wiley and Sons, 1995, s.2.

fiyatının sözleşmede yer alan işlem fiyatından düşük olması durumunda opsiyon kullanılmaz.[12]

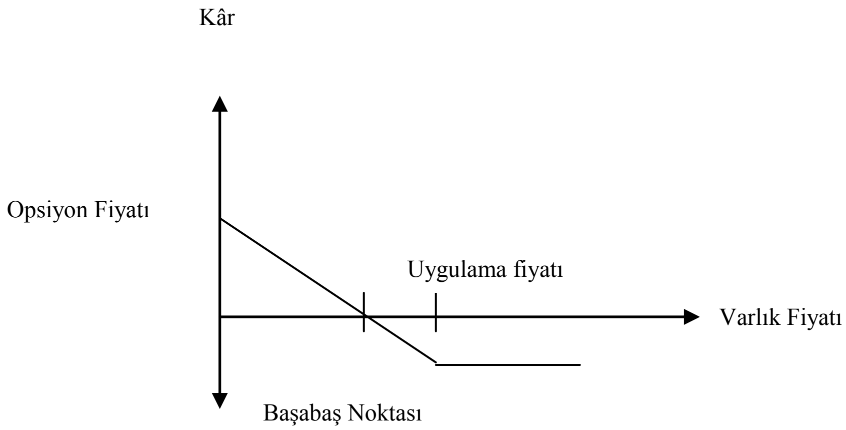


Şekil 1. Alım opsiyonu Kar- Varlık Fiyatı Grafiği

Satım (Put) Opsiyonu: Satım opsiyonu sahibine opsiyona konu olan dayanak varlığı belli bir fiyattan belli bir tarihte satma hakkını verir.[13] Sözleşmeye konu olan fiyat, egzersiz fiyatı veya kullanım fiyatı, sözleşmeye konu olan tarih ise bitiş tarihi veya vade tarihi olarak adlandırılır. Satım opsiyon alıcısı sözleşmeye konu olan varlığı alma hakkından istediği zaman vazgeçebilir ancak, opsiyon satıcısı sözleşmeye konu olan varlığı istenildiği takdirde satma yükümlülüğüne haizdir. Satım opsiyonları, opsiyona konu olan varlığın fiyatının düşeceği beklentisi içinde olan yatırımcılar tarafından kullanılır.

---

[12] John C. Hull, **Options, Futures and Other Derivatives**, 5. Baskı, New Jersey: Prentice Hall, s. 6.
[13]Hull, s. 6



Şekil 2. Satım opsiyonu Kar- Varlık Fiyatı Grafiği

Opsiyonlar ile ilgili kavramları tanımlamaya başlamadan önce opsiyon hesaplamasında kullanılan en önemli parametrelerden bir tanesi kullanım fiyatını tanımlamak gerekmektedir.

Kullanım Fiyatı (Strike Price): Opsiyona konu varlığın vade sonunda hangi fiyattan alınıp satılacağını gösteren fiyata kullanım fiyatı denilmektedir. Alım opsiyonu alan kişi opsiyonu kullanmak istediğinde opsiyona konu olan varlığı teslim alabilmesi için sözleşmede belirtilen kullanım fiyatı kadar bir bedel ödemek durumundadır. Aynı şekilde elindeki satım (put) opsiyonunu kullanmak isteyen yatırımcı dayanak varlığı sözleşmede yer alan fiyattan (kullanım fiyatından) satmaktadır.[14]

Opsiyon Türleri

Opsiyonlar türlerine göre ikiye ayrılır. Opsiyonun ne zaman kullanılacağı konusu opsiyonun türünü belirler. Vadesi gelmeden kullanılamayan ve sadece sözleşmede yazan tarihte kullanılabilen opsiyonlara Avrupa tipi opsiyon, vadeyi bekleme zorunluluğu olan opsiyonlardır. Alıcının opsiyonu istediği zaman kullanabilmesine imkan veren opsiyonlara ise Amerikan tipi opsiyon denilir.

[14] Türev Piyasaları-Swap ve Opsiyonlar, http://www.baskent.edu.tr/~gurayk/finpazcarsamba12.doc, (03 Mart 2010)

Karlılık Açısından Opsiyonlar

Kullanıldığı zaman ortaya çıkacak kar yada zarar açısından opsiyonlar 3 çeşittir. Kullanıldığı zaman karlılık yaratan opsiyonlar karda (in-the-money) opsiyonlar, zarar yaratan opsiyonlar zararda (out-of-the-money) opsiyonlar ve başabaş noktasındaki opsiyonlar ise başa baş (at-the-money) opsiyonlar diye adlandırılırlar.

Opsiyon Primi (option premium)

Opsiyon primi, opsiyon kontratıyla sağlanan alım ve satım hakkı karşılığında alıcının satıcıya ödediği fiyattır. Diğer bir deyişle, satıcının kontratı düzenlemekle opsiyon dönemi boyunca karşılaşacağı riske karşın talep ettiği bedeldir. Prim, kontrattaki döviz tutarının veya uygulama fiyatının belli bir yüzdesi olarak belirtildiği gibi, bir birim döviz cinsi (yabancı para) karşılığı ödenmesi gereken Amerikan Doları olarak da ifade edilmektedir.[15]

Opsiyon Pozisyonları

Her opsiyon sözleşmesinin uzun ve kısa olmak üzere iki yönü vardır fakat opsiyonların 4 farklı pozisyonu vardır. [16]

1. Alım opsiyonunda uzun pozisyon
2. Satım opsiyonunda uzun pozisyon
3. Alım opsiyonunda kısa pozisyon
4. Satım opsiyonunda kısa pozisyon

Eğer "K kullanım (işlem, strike) fiyatı" ve S_t'de dayanak varlığın son fiyatı olarak alınırsa; Avrupa tipi alım opsiyonunda uzun dönemde;

$$\max = (S_t - K, 0)$$

[15] Tülin Akkum, "Döviz Opsiyonları ve Opsiyonlarda Fiyatlama Modelleri."**İ.Ü. İşletme Fakültesi Dergisi**. Vol.29, No.1 (Nisan 2000), ss. 47-74.

[16] Hull, s. 8

Yukarıdaki ifade; eğer $S_t > K$ ise opsiyonun kullanılacağını, $S_t \leq K$ ise opsiyonun kullanılmayacağını gösterir.

Avrupa tipi alım opsiyonunda kısa pozisyonda olan bir opsiyon sahibi için ödeme ise;

$$-\max(S_t - K,0) = \min(K - S_t,0)$$

şeklinde olur.

Avrupa tipi satım opsiyonunda uzun pozisyonda olan bir opsiyon sahibi için ödeme ise;

$$\max = (K - S_t,0)$$

Avrupa tipi satım opsiyonunda kısa pozisyonda olan bir opsiyon sahibi için ödeme ise;

$$-\max(K - S_t,0) = \min(S_t - K,0)$$

şeklinde gerçekleşir.

Avrupa Türü Opsiyonların Fiyatlanması

Black ve Scholes Fiyatlama Modeli: Black ve Scholes (1973) opsiyonlar içinde bulunduğu piyasa için "ideal şartlar" diye adlandırdıkları kriterler belirlemiştir.Bu kriterlere göre,

1. Zaman içerisinde kısa dönem faiz oranları sabittir ve bilinmektedir.
2. Varlık fiyatı (stock price) "Random Walk" sürecini izler ve varyans oranı varlık fiyatının karesiyle orantılıdır.
3. Opsiyona konu olan varlık temettü ödemesi yapmaz.
4. Opsiyonun sadece vade sonunda ödeme yapan "Avrupa tipi opsiyon" olduğu kabul edilir.

5. Opsiyonu alırken veya satarken herhangi bir işlem maliyetinin olmadığı kabul edilir.[17]

Black and Scholes Fiyatlama Modeline göre,

Avrupa türü döviz alım opsiyonu primi;

$$c = S_0 N(d_1) - Ke^{-rT} N(d_2)$$

Avrupa türü döviz satım opsiyonu primi;

$$p = Ke^{-rT} N(-d_2) - S_0 N(-d_1)$$

şeklinde gösterilir.[18] Prim hesaplamasında kullanılan formülde yer alan, d_1 ve d_2 katsayılarının formülleri aşağıda yer almaktadır.

$$d_1 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r + \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}}$$

$$d_2 = \frac{\ln(\frac{S_0}{K}) + (r - \frac{\sigma^2}{2})T}{\sigma\sqrt{T}} = d_1 - \sigma\sqrt{t}$$

Burada logaritmik getiriler, ortalaması $-(r + \frac{\sigma^2}{2})T$ ve standart sapması $\sigma\sqrt{T}$ olan bir dağılım sergilemektedir

$S_0 =$ Opsiyona konu olan varlığın mevcut fiyatı(stock price)

$K =$ Kullanım (işlem) fiyatı (strike price)

$T =$ Vadeye kalan süre

[17] Fisher Black and Myron Scholes, "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". **Journal of Political Economy.** Vol.81, No.3 (Mayıs/Haziran 1973), ss. 637-654.
[18] Hull,s.246

S_T = Opsiyona konu olan varlığın vadedeki (son) fiyatı

$r =$ Bileşik risksiz faiz (risk-free rate)

$c =$ Alım opsiyonu primi

$p =$ Satım opsiyonu primi

$N(d_i)$ = Kümülatif normal dağılım fonksiyonu ($i = 1,2$)

σ = Opsiyona konu olan varlığın mevcut fiyatının volatilitesi

Varyans risk primi hesabında kullanılan opsiyonlar ile ilgili parametreler açıklanmış olup artık varyans risk primi açıklanabilecek duruma gelmiştir.

2.2. VARYANS RİSK PRİMİ DİNAMİKLERİ VE HESABI

Finans dünyasındaki ilgi uyandıran konulardan biri de, farklı risk taşıyan yatırımcılar için gerekli olan risk primidir. Yapılan çalışmaların çoğu, fiyat riski (equity risk) üzerinedir; fakat yatırımcıların karşılaştığı sadece fiyat riski değil aynı zamanda yatırımcılar yatırımlarını ellerinde tutarken karşılaştıkları varyans riski (variance risk) dir.[19] Carr ve Wu (2003,2007), Egloff, Leippold ve Wu (2006), Bollerslev ve Zhou (2007), Todorov (2007) varyans risk primi ve dinamikleri üzerine yaptıkları araştırmalarda varyans swap oranı kullanarak çalışmışlar ve Bollerslev ve Zhou (2007) varyans risk primini örtük ve gerçekleşmiş (realized) varyans arasındaki fark olarak tanımlamışlardır.

Yatırımcılar için varyans risk priminin önemi, varyans swap sözleşmelerinin gelişimi ve alım-satımı (future varyans üzerine yazılmış forward kontratlar) ile vurgulanmıştır. Yatırımcılar future varyanslar ve gelecekte bekledikleri denge seviyesi için kabul ettikleri risk primindeki belirsizliği sevmemektedirler. Bu belirsizlik varyans risk primi (variance risk premium, VRP) olarak tanımlanmaktadır. Diğer bir ifadeyle,

[19] Viktor Todorov " Jump Process in Finance:Modeling,Simulation,İnference and Pricing", **Yayınlanmamış Doktora Tezi.** Duke Ünivercity Department of Economics,2007

varyans risk primi riske karşı duyarsızlık altında gelecek değişim beklentisi ve fiziksel ölçü arasında bir tampon olarak tanımlanmaktadır.[20]

Her araştırmacı VRP'yi ölçmek için kendi modelini belirlemeye çalışmıştır. Fakat en sade şekli ile Todorov (2009), VRP'yi aşağıdaki süreçte tanımlamıştır ve görece kolay anlaşılabileceği için bu yaklaşım seçilmiştir.

Gelecekteki kuadratik değişim (quadratic variation, QV)* için standardize edilmiş a günlük risk primi,

$$VR_a(t) = \frac{1}{a}\mathrm{E}^{\mathrm{P}}\left([f,f]_{(t,t+a]} \middle| F_t\right) - \frac{1}{a}\mathrm{E}^{\mathrm{Q}}\left([f,f]_{(t,t+a]} \middle| F_t\right),$$

$\mathrm{E}^{Q} =$ Riske duyarsızlık altındaki beklenti ölçütü (risk kayıtsız olasılık ölçüsü, equivalent risk measure)**

$\mathrm{E}^{P} =$ Fiziksel olasılık ölçüsü altındaki beklenti ölçütü

QV, Rasal Yürüyüş ve Martingale gibi süreçleri analiz etmekte kullanılmaktadır. Diyelimki x_t, (Ω, F, P) olasılık uzayında tanımlanmış ve t zaman aralığındaki negatif olmayan reel sayılardır ve x_t'nin QV'si $[x]_t$ olarak tanımlanmış ise,

$$[x]_t = \sum_{k=1}^{n}\left(x_{t_k} - x_{t_{k-1}}\right)^2$$
$$\lim \| P \| \to 0$$

olur. P, 0 ve t arasındaki değerlerden iki değer arasındaki en büyük fark olarak tanımlanmaktadır[21].

---

[20] Todorov, s.121

*Future quadratic variation pratikte gerçekleşmiş varyans(realized variance) olarak da ifade edilmektedir. Todorov(2006,2009)

**Equivalent risk measure:risk kayıtsız olasılık ölçüsü altında iskonto edilmiş fiyatlar martingaledir.Buda bir türev enstrümanın gelecekte vaat ettiği nakit akımlarının bu olasılık ölçüsüne göre beklenen değeri hesaplanmakta ve risksiz faiz oranı ile hesaplanıp türev ürünün fiyatı bulunmaktadır.

[21] Kuadratik Değişim, http://en.wikipedia.org/wiki/Quadratic_variation. (04.04.2010)

$F(t)$, t zamanında gelecekteki bir vade dilimi için indeks üzerine yazılmış future sözleşmelerin fiyatını göstermek üzere, $f(t)$ ise $\ln\left(\dfrac{F(t)}{F(t-1)}\right)$ olmak üzere, QV ile ölçülen $f(t)$'nin varyansı,

$$[f,f]_{(t,t+a]} = \int_t^{t+a} \sigma^2(s)ds + \sum_{t<a<t+a} (\Delta f_s)^2$$

olmaktadır. Denklemdeki ilk terim sürekli kısmı ikinci terim ise fiyatlardaki sıçramanın QV'sini göstermektedir. QV'nin rasgele olması bir varyans riski ortaya çıkarmaktadır. Bu varyans risk ya gelecekteki koşullu beklenen volatilitenin rasgele olmasından kaynaklanır yada fiyattaki sıçramalardan kaynaklanır. Todorov VRP'yi anlattığı yukarıda bahsedilen süreçte fiyat sıçramalarının da VRP hesaplarken sisteme dahil edilmesini sağlamıştır.

Petersson ve Saric (2008) ise VRP üzerine yazdıkları master tezinde, VRP analizini aşağıdaki şekilde gerçekleştirmişlerdir. Herhangi bir t ve T arasındaki zaman tercihi için varyans risk primi, fiziksel olasılık ölçüsü P altında hesaplanan gerçekleşmiş varyanslar ile riske duyarsızlık ölçüsü Q altında hesaplanmış future varyans beklentisi arasındaki farktır.[22]

$$VR_a(t,T) = E_t^P[\text{Gerçekleşmiş Varyans}_{t,T}] - E_t^Q[\text{Gerçekleşmiş Varyans}_{t,T}]$$

Varyans risk primini ölçmek için oluşturulan modeller, yüksek frekanslı veri ve varyans swap oranı verisi kullanmaktadır. Varyans swap future kuadratik varyans üzerine yazılmış forward sözleşmelerdir ve vade tarihinde yıllık gerçekleşmiş varyans (RV) ve sabit (fixed) oranı (K_{VAR}) arasındaki farkı öder. Sözleşmenin fiyatı gerçekleşmiş varyansın riske duyarsızlık altında ölçülen beklenen değerine eşittir.

Önceden belirlenmiş vade tarihinde ödeme,

[22] Magnus Petersson ve Jose Saric, "Variance Risk Premium on S&P 500 and OMXS30", **Yayınlanmamış Yüksek Lisans Tezi.** Stockholm School of Economics, 2008. s. 2.

$$\left[RV_{t,T} - K_{VAR.t,T}\right] * \mathrm{N} \tag{1}$$

N sözleşmenin nominal tutarını belirtmektedir. Varyans swap oranı sözleşmelerinin fiyatlanması diğer türev ürünleri fiyatlanmasından farklı değildir. Varyans swap oranı sözleşmelerinin t zamanında ve T vadesindeki arbitrajsız değeri belirli bir martingale ölçüsü altında beklenen ödemenin şimdiki değeridir. [23]

Varyans swap oranı sözleşmesinin Q ölçüsü altında indirgenmiş beklenen değeri,

$$\pi_t = e^{-r(T-t)} \mathrm{E}_t^Q \left[RV_{t,T} - K_{VAR.t,T}\right] \tag{2}$$

olarak formüle edilebilir. r ise, t anındaki (t, T arasındaki) risksiz faiz oranıdır. Sabit oran olan K_{VAR} genellikle sözleşmenin değerini sıfıra eşitlemek için kullanılır. Böylece swap oranı doğal olarak forward varyans fiyatı olur ve sözleşmenin gerçeğe uygun değeri sıfıra eşitlendiği zaman, sabit oran gelecek gerçekleşmiş varyansın (future realized variance) riske duyarsız beklenen değerine eşit olur.

$$K_{VAR.t,T} = \mathrm{E}_t^Q \left[RV_{t,T}\right] \tag{3}$$

(1) numaralı denklemdeki Risk primini ölçmek ve (2) numaralı denklemdeki swap ödemesini hesaplamak için bir varyans ölçüsü tanımlanması gerekmektedir. S dayanak varlığın fiyatı olmak üzere μ_t ortalama ve σ_t varyans ile,

$$dS_t = \mu_t S_t dt + \sigma_t S_t W_t$$

olarak tanımlanır. W, standart Rassal Yürüyüş (Brownian Motion) hareketini tanımlamak üzere kullanılmıştır. Örneklem değeri için hesaplanan gerçekleşmiş varyans ($V_{t,T}$), $t - T$ zaman aralığında,

$$V_{t,T} = \frac{1}{(T-t)} \int_t^T \sigma_t^2 dt$$

---

[23] Petersson ve Saric, s.3.

olarak tanımlanır. $t-T$ zaman aralığında gerçekleşen varyans (realized variance) ise,

$$K_{VAR_{t,T}} = \mathrm{E}^{Q}\left[\frac{1}{(T-t)}\int_t^T \sigma_t^2 dt\right]$$

olur ve formülü daha ayrıntılı incelemek istersek,

$$K_{VAR_{t,T}} = \frac{2}{T}(r(T-t) - \left(\frac{S_0}{S_*}e^{r(T-t)} - 1\right) - \log\left(\frac{S_*}{S_0}\right)$$

$$+ e^{r(T-t)}\int_0^{S_*}\frac{1}{K^2}P(K)dK + \int_{S_*}^{\infty}\frac{1}{K^2}C(K)dK)$$

$S_0 =$ **M**evcut fiyatı (spot price)

$K =$ Kullanım (işlem) fiyatı (strike price)

$T =$ Vadeye kalan süre

$S_* =$ Herhangi bir zamandaki hisse fiyatı

$r =$ Bileşik risksiz faiz (risk-free rate)

$C(K) =$ Avrupa tipi alım opsiyonu primi

$P(K) =$ Avrupa tipi satım opsiyonu primi

Eğer S_* vadedeki forward fiyatı olarak seçilirse formül aşağıdaki hale gelir.

$$K_{VAR_{t,T}} = \frac{2}{T}e^{r(T-t)}(\int_0^{S}\frac{1}{K^2}P(K)dK + \int_{S}^{\infty}\frac{1}{K^2}C(K)dK)$$

Forward primi* tanımına paralel olarak varyans risk primi cari getiri değişim ölçüsüyle bazı gelecek getiri değişimlerinin piyasa beklentisi arasındaki fark olarak tanımlanmaktadır.[24]

*Forward primi döviz alım-satımında kullanılan ve gelecekte bir forward oranı üzerinden uygulanan prim yada indirim tutarını göstermektedir.

Forward primi $= ((r_f - r_s)/r_s)*(12/n)*100$

r_f forward oranını, r_s Spot oranı, n ise ilerideki ay sayısını göstermektedir.

[24] Tim Bollerslev ve Hao Zhou, **Expected Stock Returns and Variance Risk Premia,** Finance and Economics Discussion Series,Washington D.C: Kasım 2007. s.3.

3. MONTE CARLO SİMULASYONU

Monte Carlo yöntemi deneysel ve istatistiksel problemlerin çözümünde rasgele sayılarla yaklaşımlara verilen genel bir isimdir. Metodun bir probleme uygulanması, problemin tesadüfi sayıları kullanarak simule edilip hesap edilmek istenen parametrenin bu simülasyon sonuçlarına bakılarak yaklaşık hesaplanması fikrine dayanır.[25]

Özellikle 1930'lardan sonra hızla kullanılmaya başlanmıştır. Amerikalı nükleer fizikçi olan N. Constantine Metropolis tarafından bulunmuş, Stanislav Ulam ve John Von Neuman tarafından Los Alamos laboratuarlarında nükleer silah araştırmaları sırasında geliştirilmiştir. Nötronların rasgele yapısından etkilenilerek ve bu yapı rulet masasındaki rasgele yapıyı andırdığı için Monte Carlo Simülasyonu adını almıştır. Hızlı hesap yapabilen bilgisayarlarında ortaya çıkmasıyla Monte Carlo Metodu büyük ölçüde uygulanabilirlik ve yaygınlık kazanmıştır. İnşaat Sektörü, Askeri Savunma Teknolojileri, Mühendislik, Fen, Nükleer Teknolojiler, Uzay Sistemi analizleri, İstatistiksel analizler ve Sosyoekonomik saha araştırmaları gibi daha bir çok alanda yaygın olarak kullanılmaktadır.

Simülasyon modelleri problemlerin analitik modellerle çözülemeyecek derecede karmaşık olduğu durumlarda veya analitik modellerin kurulup, kullanılamadığı durumlarda tercih edilir. Dolayısıyla simülasyon modellerinin diğer çözüm yollarına göre üstün tarafları ve eksik tarafları mevcuttur.

Simülasyon yönteminin kullanılması;

- Uygulama alanının geniş olması
- Değişken sayısının ve belirsizliklerin fazla olduğu durumlarda sonuca ulaşabilmesi
- Diğer yollara kıyasla daha kolay anlaşılması
- Uygulayıcıya koşullar üzerinde tam olarak kontrol sağlaması

[25] Aybaba Hançerlioğulları, "Monte Carlo Simülasyon Metodu ve MCNP Kod Sistemi."**Kastamonu Eğitim Dergisi.** Vol.14, No.2 (Ekim 2006), ss. 545-556

- Sonuca daha kolay ve kısa sürede ulaşılması

gibi avantajlar sağlamaktadır. Ancak Simülasyon yönteminin bazı dezavantajları da aşağıdaki gibidir.

- Bilgisayarın olmadığı durumlarda simülasyon yapmak zordur ve zaman alır.
- Optimum sonuç üretme garantisi yoktur.
- Manipüle etmek kolaydır.

Modeller gerçeği temsil eder, simülasyon ise taklit eder. Geçmiş verilere dayanarak gelecekteki sistemin davranışlarını tahmin eder.[26]

Monte Carlo yöntemi ile sistemde stokastik özellik gösteren değişkenlerin dağılımları belirlenir ve daha sonra bu dağılımdan rassal sayılar aracılığı ile örnekler alınarak istenilen veriler üretilir.[27]

3.1. RASSAL SAYI ÜRETİMİ

Monte Carlo Yöntemi ile rassal sayı üretme, sayısal olarak bir deneyi yada olayı taklit etmek için 0-1 aralığında değerler alan düzgün dağılımlı sayıları kullanmaktadır. Rassal sayılar kümesinde herhangi bir sayının gelme olasılığı ötekilerden farklı olabilir. Olasılıklar aynı ise buna düzgün dağılımlı rassal sayılar denir. Rassal sayılar bilgisayar yardımıyla oluşturulur ve bilgisayarda belirli bir yönteme göre ardı ardına oluşturulmuş sayılar gerçekte rassal olmamakla birlikte, rassal sayıların istatistiksel özelliklerini taşırlar. Böyle sayılara "sözde rassal sayılar (pseudo-random number)" denir.[28]

Rasgelelik koşulları

- Rassal sayı üretecinin tekrarlama periyodunun yeterince uzun olması gerekir.
- Üretilen n sayıda rassal sayı dizininin birbirinden bağımsız olması gerekir.

---

[26] Aktaş, Elçin. "Matlab ve Simülasyon Ders Notları", Yayınlanmamış Ders Notları, 2009.
[27] Sarıaslan H., **Sıra Bekleme Sistemlerinde Simülasyon(Benzetim) Tekniği**, Ankara:Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayınları,1986, ss. 36-41
[28] Hançerlioğulları, s.548.

- t zamanda üretilen n dizinin farklı zaman periyotlarında kümelenme göstermemelidir.
- Üretilen rassal sayıların sayı üretimleri tekrarlanabilir, yeniden elde edilebilir olmalıdır.
- Rassal sayı üretimi çalıştırıldığı bilgisayar türüne bağlılık göstermemelidir. Genellik prensibine uygun sayı üretimi yapılmalıdır.
- Üretilen diziler kolayca amaca uygun biçime geçebilmelidir.
- Rassal sayı üreteçleri oluşturulan sayı dizilerinde sayıların önceki ve sonraki değerlerine bağımlılık göstermemelidir.
- İstenilen büyüklükte kısa sürede sayı üreten algoritmalar olmalıdır.

Monte Carlo simülasyonunda rassal süreçleri oluşturmak için önce düzgün dağılıma sahip rassal sayılar üretilir ve bu sayılar diğer dağılımlara ilişkin rassal sayılara dönüştürülür.

3.2. RASSAL SAYI ÜRETME YÖNTEMLERİ

Bilgisayarlarda rassal sayı üretmeye başlamadan önce kullanılan bazı rassal sayı üretme yöntemleri, araştırmada rassal sayı üretme sürecinin daha iyi anlaşılması için kısaca anlatılacaktır.

3.2.1 Zar Atma Yöntemi

Zar atma yönteminde üzeri 0'dan 9' kadar numaralandırılmış 10 yüzlü bir zar atılarak,gelen sayı rassal sayının ondalık basamağındaki ilk sayı olarak kaydedilir. Kaç basamaklı sayı elde edilmek isteniyorsa o kadar deneme yapılarak rassal sayı üretilir. Rulet oyunu da aslında bir rassal sayı üretme tekniğidir.

3.2.2 Kare Ortaları Yöntemi

Bu yöntem John Von Neuman tarafından 1946 yılında bulunmuştur. Kare ortaları yöntemiyle rassal sayı üretmek için önce m basamaklı bir x_0 başlangıç sayısı seçilir. x_0 başlangıç sayısının karesi en fazla $2m$ basamaklı olacaktır. Eğer başlangıç sayısının karesi gerektiğinden küçükse önüne gerekli sayıda sıfır eklenebilir. Bir sonraki sayı x_1'i seçmek için, x_0^2'nin ortadaki m. basamağı alınır. $(0,1)$ aralığındaki r_1 (1. rassal sayı)'i elde etmek için x_1 10^m'e bölünür. Bu süreç tekrar edilerek istenilen sayıda rassal sayı elde edilir

$m = 3$ ve $x_0 = 324$ alalım. Seçilen bu değerlerle en fazla $10^3 = 100$ tane rassal sayı elde edilir.

$$(x_0)^2 = 0104976 \rightarrow x_1 = 049 \rightarrow r_1 = 049/(10^3) = 0.049$$

$$(049)^2 = 0002401 \rightarrow x_2 = 024 \rightarrow r_2 = 024/(10^3) = 0.024$$

Yukarıdaki adımlar tekrarlanarak yeterli uzunlukla rassal sayı dizisi elde edilebilir.

3.2.3 Lineer Benzerlik Yöntemi

Lineer Benzerlik Yöntemi günümüzde yaygın olarak kullanılmaktadır. Bu yöntemin genel yapısı;

$x_0 =$ başlangıç değeri , $a =$ çarpan, $c =$ artış sayısı, $m =$mod olarak seçildiğinde r rasgele sayısı;

$$x_n = (a * x_{n-1} + c) \quad \mathrm{mod(m)} \qquad n = 0,1,2,...,m-1$$

şeklindedir.[29]

$$r = \frac{x_n}{m} \qquad n = 0,1,2,...,m-1 \quad \text{olarak hesaplanır.}$$

[29] Hüseyin Güler, "İstatistiksel Simülasyon Ders Notları" **Yayınlanmamış Ders Notları,** Çukurova Üniversitesi, 2006.

$x_0 = 12$, $a = 8$, $c = 5$, $m = 13$ olarak alındığında;

$x_1 = (8*12+5)$ mod(13)=101

=10

$r_1 = 10/13 = 0{,}7692$

$x_2 = (8*10+5)$ mod(13)=85

=7

$r_2 = 7/13 = 0{,}5384$ olarak hesaplanabilir. Burada önemli olan c, m, a sayılarının seçimidir. m 'in yeterince uzun bir sayı olması uygun çözüm olabilir, bununla birlikte a 'nın seçimi için yaygın kullanılan örnek sayılarda mevcuttur

3.2.4 Çarpımsal Benzerlik Yöntemi

Lineer Benzerlik Yönteminin özel bir halidir. Lineer benzerlik yönteminde sabit değer $c = 0$ olduğu zaman yöntem çarpımsal benzerlik yöntemine dönüşmektedir.[30] Lineer benzerlik süreci c sabitinin seçilmesi dışında aynen işlemeye devam eder.

Böylelikle denklem; başlangıç sayısı x_0 ve a, m sayılarının seçiminden sonra,

$$x_n = (a * x_{n-1}) \quad \text{mod(m)} \qquad n = 0,1,2,..., m-1$$

şekline dönüşür.

3.3 TERS DÖNÜŞÜM TEKNİĞİ ve DAĞILIMLAR

R rassal değişkeninin dağılımı 0-1 aralığında uniform dağılım $U(0,1)$ olsun. x rasgele değişkeninin dağılım fonksiyonu da $F(x)$ ve tersi alınabilir olarak düşünülürse, tersi $F^{-1}(x)$ olsun. Bu durumda $F(x) = P(X < x)$ yazılabilir,

$$F^{-1}[F(x)] = F^{-1}[P(X < x)] \Rightarrow x = F^{-1}[P(X < x)]$$

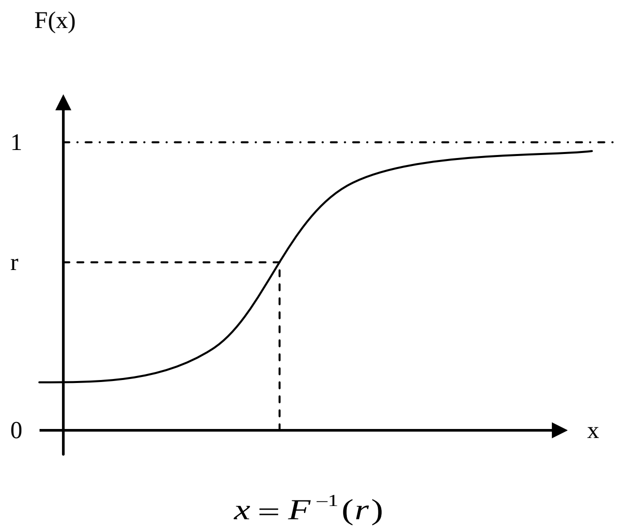
[30] Reuven Y. Rubenstein ve Dirk P.Kroese, **Simulation and The Monte Carlo Method**, 2. Basım, Newyork: Wiley and Sons, 2007, s. 50.

olarak yazılabilir. Bu durumda ters fonksiyonda rassal değişkenin ilgili olasılık değerine karşılık gelen x değeri bulunabilir.

R rassal değişkeninin r değerine ($r \in$ R) karşılık gelen x değerini bulmak için yukarıdaki eşitlikten,

$$x = F^{-1}(r)$$

yazılabilir. Böylelikle R rassal değişkeninin aldığı değer kullanılarak X 'in dağılımından bir örnek çekilebilir. Bu sayede X değişkeninin dağılımından simülasyon yapmış olunur.



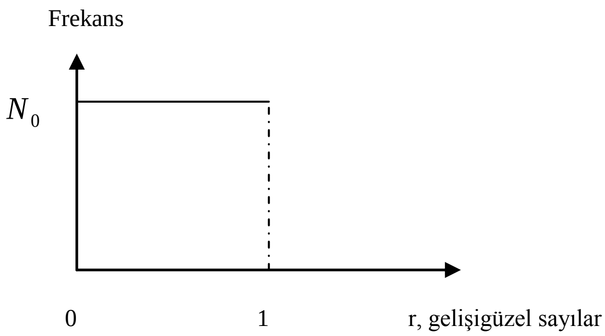
Şekil 3. X Değişkeni Dağılım Fonksiyonu

X değişkeninin dağılım fonksiyonunun gösterildiği yukarıdaki şekilde r değerine karşılık sadece bir x değeri gelmektedir. $U(0,1)$ dağılımından türetilen r değeri vasıtasıyla X 'in dağılımından x değeri çekilmiş olur.

Daha öncede anlatıldığı gibi Monte Carlo Simülasyonu temelde 0-1 arasında gelişigüzel (rassal) sayılar üretme mantığına dayanmaktadır. Mümkün N adet sonucun olasılıkları birbirine eşitse x tesadüfi değişkeninin dağılımı düzgün dağılımdır.[31] Düzgün dağılımın genel ifadesi ise;

$$P(X = x_j, N) = \frac{1}{N} \qquad x = x_1, x_2, ..., x_N$$

$$=0 \qquad ,\text{diğer } x \text{ değerleri için}$$



Şekil 4. Üssel Dağılım Grafiği

Rassal sayılar elde edilirken sık kullanılan yöntemlerden biriside 3.2.4'te anlatılan çarpımsal benzerlik yöntemidir.

$$x_n = (a * x_{n-1} + c) \quad \text{mod(m)} \qquad n = 1,2,3...$$

$a \leq x \leq b$ aralığında, her bir x sonucunun ortaya çıkma olasılığı, $f(x)$ sıklık fonksiyonu ile belirlenen bir olay taklit etmek istenildiğinde;olayda sonucun x ile $x + dx$ arasında bir değer alma olasılığı,

$$f(x)dx = f(x)dx / \int_a^b f(x)dx \qquad (4)$$

Burada $f(x)$ fonksiyonuna "olasılık yoğunluk fonksiyonu" adı verilir. $F(x)$ toplam olasılık yoğunluk fonksiyonu ise ,

$$F(x) = \int_{-\infty}^{x} f(t)dt \qquad (5)$$

[31] Selahattin Güriş ve Şahamet Bülbül, **Olasılık**, İstanbul: M.Ü. Nihad Sayar Eğitim Vakfı Yayınları, 1995, s. 407.

$a \le x \le b$ aralığındaki her x değerine karşılık $F(x)$, toplam olasılık yoğunluk fonksiyonu 0-1 aralığında rassal değerler alır. $F(x)$ değerlerinin ortaya çıkma sayısı yani sıklık fonksiyonu düzgün bir dağılım gösterir. O halde $F(x)$'i T ye eşitleyebiliriz.

$$T = F(x) \tag{6}$$

1,2,3 denklemlerini kullanarak Temel Monte Carlo İlkesine ulaşabiliriz.[32]

$$T = \int_a^x f(x')dx' / \int_a^b f(x)dx \tag{7}$$

Denklem 7 "Temel Monte Carlo İlkesi" olarak bilinir. Denklem 4'den x tersine çözülürse T'ye bağlı olarak,

$$x = f^{-1}(T) \tag{8}$$

ters dönüşüm denklemi elde edilir.

Bazı olasılık dağılımlarından rassal sayı üretme tekniklerine aşağıda kısaca yer verilmiştir.

3.3.1 Üssel Dağılım

x tesadüfi değişkeni negatif değerleri içermeyen $(x > 0)$ değerler alıyorsa, x'in dağılımı üssel dağılımdır. Ortalaması λ olan bir Poisson süreç belirli bir aralık veya uzayda hesaplandığı zaman üssel dağılmış olur. x, istenen sonucun ilk kez gerçekleştiği zamana kadar geçen bekleme süresi olsun;[33]

$$f(x;\lambda) = \lambda e^{-\lambda x} \qquad , x > 0 \text{ için}$$

$$= 0 \qquad , x \le 0 \text{ için}$$

[32] Hançerlioğulları, s.550.
[33] Kalimuthu Krishnamoorthy, **Handbook of Statistical Distributions with Applications,** Boca Raton: Chapman&Hall, 2006, s.179.

sürekli tesadüfi değişkeninin birikimli olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$F(x) = 1 - e^{-\lambda x} \qquad , x \geq 0 \text{ için}$$

$$= 1 \qquad , x \to \infty \text{ için}$$

$u = F(x)$'i, x'e göre çözünce;

$$F^{-1}(u) = -\frac{1}{\lambda}\ln(u-1)$$

u ~U(0,1) ise (1-U) ~ U(0,1) olduğu kabul edilir ve aşağıdaki algoritma ile düzgün dağılan rassal sayılar üssel dağılıma çevrilir.

- u ~U(0,1) tahmin edilir,
- Üssel(λ)'dan rassal değişken olarak $x = -\frac{1}{\lambda}\ln u$ formülü ile ifade edilir.

3.3.2 Normal Dağılım

Eğer $X \sim N(\mu, \sigma^2)$ ise, olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \frac{1}{\sqrt{2\pi\sigma^2}} e^{\left(-\frac{(x-\mu)^2}{2\sigma^2}\right)} \qquad , -\infty \leq x \leq \infty$$

$\mu =$ ortalama veya beklenen değer

$\sigma^2 =$ dağılımın varyansı

İki parametreli bir dağılım olan normal dağılım parametreleri μ ve σ^2 dir. X değişkeni ortalaması 0 ve varyansıda 1 olan standart normal değişkene (Z) dönüştürülürse;

$z_i = \frac{x_i - \mu}{\sigma}$ olur ve Z değişkeninin olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f(z)=\frac{1}{\sqrt{2\pi}}e^{-\frac{z^2}{2}} \qquad , -\infty \le z \le \infty$$

olur.

X ve Y iki standart normal dağılan değişken olsun, R ve θ ise kutupsal koordinatları olarak alınırsa; R ve θ'dan geçen olasılık yoğunluk fonksiyonu $f_{R,\theta}$ ise,

$$f_{R,\theta}(r,\theta)=\frac{1}{2\pi}e^{-r/2}r \qquad , r\ge 0 \text{ ve } \theta\in[0,2\pi).$$

x ve y, r ve θ cinsinden yazıldığı zaman,

$x=r\cos\theta$ ve $y=r\sin\theta$ olur.

Bu koordinat dönüşümünün Jacobian'ı;

$$\det\begin{pmatrix}\frac{\partial x}{\partial r} & \frac{\partial x}{\partial \theta}\\ \frac{\partial y}{\partial r} & \frac{\partial y}{\partial \theta}\end{pmatrix}=\begin{vmatrix}\cos\theta & -r\sin\theta\\ \sin\theta & r\cos\theta\end{vmatrix}=r \text{ olur.}$$

x ve y noktasından geçen olasılık yoğunluk fonksiyonu ise;

$$f_{X,Y}(x,y)=\frac{1}{2\pi}e^{-\frac{(x^2+y^2)}{2}} \qquad \text{olur.}$$

R ve θ, iki bağımsız değişken ve $\theta\sim \mathrm{U}[0,2\pi)$, $\mathrm{P}(R>r)=e^{-r^2/2}$ diye açıklanabilir. Bu açıklama ise R'nin, V ~ Üssel Dağılım ($\lambda=1/2$) iken $\sqrt{V}$ ile aynı dağılıma sahip olduğunu göstermektedir.

$$\mathrm{P}\left(\sqrt{V}>v\right)=\mathrm{P}(V>v^2)=e^{-v^2/2}, v\ge 0$$

- iki bağımsız rassal değişken U_1 ve U_2, U(0,1)'den tahmin edilir.
- Daha sonra standart normal değişken olan X ve Y'ye çevrilir.

$$X = (-2\ln U_1)^{1/2}\cos(2\pi U_2)$$

$$Y = (-2\ln U_1)^{1/2}\sin(2\pi U_2)$$

3.3.3 Beta Dağılımı

İki parametreli bir dağılım olan Beta dağılımının parametreleri a ve β ve olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{\Gamma(\alpha+\beta)}{\Gamma(\alpha)\Gamma(\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad ,0<x<1 \text{ için}$$

$$=0 \qquad ,\text{diğer x değerleri için}$$

dir ve dağılım $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ için tanımlanmıştır. Dağılımın diğer bir ifadesi de yine $\alpha > 0$ ve $\beta > 0$ olmak üzere,

$$\mathrm{B}(\alpha,\beta) = \frac{1}{\mathrm{B}(\alpha,\beta)}x^{\alpha-1}(1-x)^{\beta-1} \qquad ,\ 0<x<1 \text{ için}$$

$$=0 \qquad ,\text{diğer x değerleri için}$$

şeklinde gösterilebilir. Eğer $\alpha = \beta = 1$ ise Beta dağılımının özel hali olan düzgün dağılım elde edilir.

Bu durumda kolaylıkla Ters - Dönüşüm tekniği kullanılabilir, $\beta = 1$ ise $Beta(\alpha,1)$ 'in olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = \alpha x^{\alpha-1} \qquad ,\ 0<x<1 \text{ için}$$

ve kümülatif yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f(x) = x^{\alpha} \qquad ,\ 0<x<1 \text{ için}$$

dir. Böylelikle

- x, U~U(0,1) tahmin edilerek bulunur.

- $x = U^{1/\alpha}$ olur.

$Beta(\alpha, \beta)$ dağılan rassal değişkenin tahmini için genel prosedür, $Y_1 \sim Gamma(\alpha,1)$ ve $Y_2 \sim Gamma(\beta,1)$ ise ve Y_1 ve Y_2 bağımsız ise,

$$x = \frac{Y_1}{Y_1 + Y_2}$$

$Beta(\alpha, \beta)$ dağılır.[34]

3.3.4 Gamma Dağılımı

Belli bir zaman aralığında, belli sayıda olayın gerçekleşmesi için gerekli zamanın olasılıklarını gösteren Gamma dağılımı iki parametrelidir.[35]

$$f(x;\alpha,\beta) = \frac{1}{\Gamma(\alpha)\beta^{\alpha}} x^{\alpha-1} e^{-x/\beta} \quad , x > 0 \text{ için} \qquad (9)$$

$$= 0 \quad , x \leq 0 \text{ için}$$

$\alpha = 1$ olursa gamma dağılımı üssel dağılıma dönüşür ve olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$f(x;1,\beta) = \frac{1}{\beta} e^{-x/\beta}$$

olur. Üssel dağılım gamma dağılımının özel bir halidir.

9 no'lu denklemde yer alan gamma fonksiyonunda α ve β "shape" ve "scale" parametreleri olarak adlandırılmaktadır ve $\alpha > 0$, $\beta > 0$ olmalıdır. Eğer shape parametresi olan α pozitif bir tamsayı ise gamma dağılımı *Erlang Dağılımı* adını alır

Eğer α pozitif bir tamsayı ise;

- $F(x;\alpha,b)$ = P(x birim zamanda α. olaya kadar geçen süre)

---

[34] Rubenstein ve Kroese, s.62.
[35] Güriş ve Bülbül, s.524

- = P(bekleme süresinin ortalaması b olan, en az α olayın x birim zamanda gözlenişi)

- $= \sum_{k=\alpha}^{\infty} \frac{e^{-x/b}(x/b)^k}{k!}$

- $P(Y \geq \alpha)$

$Y \sim Poisson(x; \lambda = b)$ olur. Üç parametreli gamma dağılımı ise;

$$F(x; \alpha, b, c) = \frac{1}{\Gamma(a) b^a} e^{-(x-c)/b} (x-c)^{a-1} \;, \qquad a > 0, \qquad b > 0, \;\; c > 0$$

c "*location*" parametresidir. $b = 1$ ve $c = 0$ iken gamma dağılımın standart olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$F(x; \alpha, b) = \frac{1}{\Gamma(a) b^a} e^{-x/b} x^{a-1}, \qquad a > 0, \;\; b > 0,$$

olur ve kümülatif olasılık yoğunluk fonksiyonu ise,

$$F(x; \alpha, b) = \frac{1}{\Gamma(a)} \int_0^{\infty} e^{-t} t^{a-1} dt$$

şeklinde gösterilir. Kümülatif gamma fonksiyonu genellikle ***"Incomplate Gamma Fonksiyonu (IG)"*** olarak adlandırılır. Ters yoğunluk fonksiyonu ise,

$$F(x; \alpha, b) = \frac{1}{\beta} IG^{-1}(x; \alpha, b)$$

olur.

$a \geq 0$'ken gamma(a,1) dağılımı için rassal sayı üretimi;

- $d = a - 1/3$ ve $c = 1/\sqrt{9d}$

- Z~N(0,1) tahmin edilir

- U~U(0,1) tahmin edilir
- Eğer $Z > -1/c$ ve $U < h(Z) + 1/z^2$ ise, $x = d(1 + cZ)^3$ olarak tahmin edilir aksi takdirde 2. adıma geri dönülür.

3.3.5 Weibull Dağılımı

a ve β parametreli Weibull dağılımı için olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x) = a\beta^{-a} x^{a-1} e^{(x/\beta)^a} \qquad , x > 0, a, \beta >$$

$$=0 \qquad ,\text{diğer durumlarda}$$

şeklinde yazılabilir. Weibull dağılımında olasılık yoğunluk fonksiyonunun tersi ise,

$$x = F^{-1}(r) = \beta[-\ln(1-r)]^{1/a}$$

olur[36]. Bu durumda ters dönüşüm tekniği ile x'i üretmek için

- U~U(0,1) tahmin edilir

$x = F^{-1}(r) = \beta[-\ln(1-r)]^{1/a}$ ile rassal sayıları üretilmiş olur.

3.4 CHOLESKY FAKTORİZASYONU

Özellikle çok değişkenli dağılım süreci ve çok boyutlu stokastik simülasyon içeren simülasyonlarda, oluşturulan rassal değişkenler ile değişkenler arsında belirli bir korelasyonun korunması gerekmektedir. Çok değişkenli normal rassal değişkenlerin korelasyon ve kovaryans matrisleri bulunmaktadır. Bu korelasyon ve kovaryans matrisi rassal değişkenlerin ortak olasılık yoğunluklarını üretmek için kullanılmaktadır.

X ortalaması μ, kovaryansı da Σ olan iki boyutlu bir vektör olsun.

[36] Güler, 2006.

$$\mu = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} \qquad \Sigma = \begin{pmatrix} \sigma_{11} & \sigma_{12} \\ \sigma_{21} & \sigma_{22} \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

$\mu = \mathrm{E}(x)$, $\Sigma = Var(x_i)$ ve ρ, x_1 ve x_2 arasındaki korelasyon olsun.

N_1 ve N_2 N(0,1) dağılımından olan x_1 ve x_2'nin ortalamasını üretmek için kullanılan bağımsız değişkenler olsun. x_1 ve x_2 için bu denklem,

$$x_1 = \mu_1 + \sigma_1 N_1$$

$$x_2 = \mu_2 + aN_1 + bN_2$$

şeklinde gösterilir.

N_1, N_2'nin bağımsız değişkeni olduğunda;

$$Var(x_2) = \mathrm{E}\left[(x_2 - \mu_2)^2\right] = a^2 + b^2$$

$$Cov(x_1, x_2) = \mathrm{E}\left[(x_1 - \mu_1)(x_2 - \mu_2)\right] = a\sigma_1 + \rho\sigma_1\sigma_2$$

olur ve bu iki denklem çözüldüğünde; $a = \rho\sigma_2$ ve $b = \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2$ olur[37]. Diğer bir şekilde gösterimi ise,

$$\begin{pmatrix} x_1 \\ x_2 \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \mu_1 \\ \mu_2 \end{pmatrix} + \begin{pmatrix} \sigma_1 & 0 \\ \rho\sigma_2 & \sqrt{1-\rho^2}\sigma_2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} N_1 \\ N_2 \end{pmatrix}$$

Matris notasyonu ise; $X = \mu + LN$ şeklinde yapılmaktadır.Üretilen N(0,1) dağılımından rassal sayıları kullanarak x, yukarıdaki transformasyonla elde edilir. x'in genel gösterim formülü;

$$X = \mu + LN$$

[37] Paul Glasserman, **Monte Carlo Methods in Financial Engineering,** New York: Springer, 2004, s.72.

L matrisi Σ ile gösterilirse;

$$\Sigma = \mathrm{E}\left[(X-\mu)(X-\mu)^{'}\right] = \mathrm{E}\left[(LN)(LN)^{'}\right] = \mathrm{E}\left[(LN)(L^{'}N^{'})\right]$$

N, N(0,1) dağılımında olan rassal sayılar içermektedir. I birim matris olmak üzere

$\mathrm{E}\left[NN^{'}\right] = \mathrm{I}$ ve Σ ise aşağıdaki şekilde yazılabilir,

$$\Sigma = \mathrm{E}\left[Ll^{'}\right] = \mathrm{I}$$

Σ pozitif tanımlı simetrik bir matris ise L alt üçgensel matris olarak seçilebilir. Bu matrise ***Cholesky Matrisi*** denir

4. UYGULAMA

Bu bölümde önce araştırmanın amaç ve kapsamı verilip, uygulamada kullanılan hesaplama ve formüller anlatılacaktır. Daha sonra her iki yöntemle hesaplanan sonuçlar karşılaştırılacak olup, uygulamadan elde edilen sonuçlar yorumlanacaktır.

4.1. ARAŞTIRMANIN AMAÇ ve KAPSAMI

Bu uygulamanın amacı uygun Proxyleri belirleyerek varyans risk priminde kullanılan formüllerin ve hesaplama yollarının Türkiye'de uygulanabilir hale gelmesini sağlamaktır. Bu amaç doğrultusunda araştırma verisi elde edilebilecek ürünler olan USD/TRY kuru ve risksiz getiriye sahip olduğu kabul edilen devlet tahvili ile yapılmıştır. Varyans risk primi literatürde, varyans swap oranları ve opsiyon parametreleri kullanarak hesaplanmaktadır. Türkiye piyasalarında henüz varyans swap oranı olmadığı için ve opsiyon işlemleri Vadeli İşlemler Borsasında (VOB) değil de Londra Borsasında işlem gördükleri için istenilen özellikte verilere sahip olmak mümkün değildir. Literatürde yer alan ama henüz Türkiye'de kullanılmayan ürünler üzerinden hesaplama yapılması gerekeceği için uygun Proxy'ler belirlenip, Türkiye piyasalarında kullanılabilir bir hesaplama aracı oluşturmaktır.

4.2. ARAŞTIRMANIN ÖRNEKLEMİ

Uygulama için kullanılacak veri seti Bloomberg Terminalinden alınmıştır. USD/TRY kuru ve risksiz getiri sağladığı kabul edilen TRT26091215 ISIN kodlu 26.09.2012 tarihli sabit kuponlu devlet tahvili seçilmiştir. Devlet tahvilinin ilk ihraç tarihi 03.10.2007 ve kupon ödeme sıklığı 2'dir. Her iki veri seti de 02.10.2007 – 20.04.2010 tarihleri arasında günlük veri olarak alınmıştır.

Uygulamada varyans swap oranı verisi Türkiye de henüz kullanılamadığı için ve yurtdışından da veri alınamadığı için kullanılamamıştır. Bunun yerine varyans risk primini Türkiye'de de hesaplanabilecek şekilde uygun proxy ile hesaplama yoluna gidilmiş ve veri tedarikindeki kolaylık nedeni ile ileride yapılacak araştırmalara örnek teşkil etmesi açısından USD/TRY kuru kullanılmıştır.

4.3. ARAŞTIRMADA KULLANILACAK GÖSTERGELER

Daha önceki bölümlerde de anlatıldığı gibi varyans risk primi örtük (implied) ve realized (gerçekleşmiş) varyans arasındaki fark olarak tanımlanmaktadır.

$$VR_a(t,T) = E_t^{P}[\text{Gerçekleşmiş Varyans}_{t,T}] - E_t^{Q}[\text{Gerçekleşmiş Varyans}_{t,T}]$$

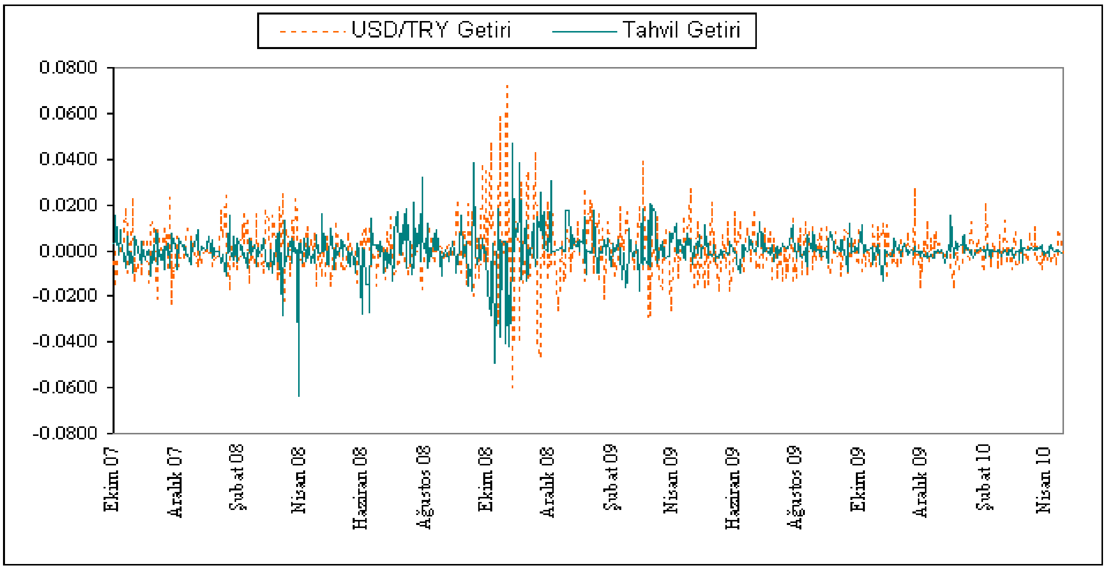
E^Q, Riske duyarsızlık altındaki beklenti ölçütü (risk kayıtsız olasılık ölçüsü, equivalent risk measure) ve E^P ise P fiziksel olasılık ölçüsü altında gerçekleşen varyansı göstermektedir.

USD/TRY kuru için öncelikle logaritmik getiri hesaplanmıştır. p getiriyi göstermek üzere logaritmik getiri $u_i = \log(p_i / p_{i-1})$ olur. Elde edilen getiri serisinden dinamik bir varyans serisi oluşturulması için, getiri serisinin 20 günlük hareketli ortalaması şeklinde varyans serisi hesaplanmıştır. Bir ay 20 iş günü kabul edilip hesaplamalarda oluşturulan hareketli ortalamalar 20 gün üzerinden yapılmıştır. Bu durum veri setinin baştaki ilk 20 gözleminin kaybedilmesine neden olmaktadır. Risksiz getiri sağladığı için kullanılan tahvil serisi içinde logaritmik getiri ve getiri serisinin 20 günlük hareketli ortalaması şeklinde varyans serisi hesaplanmıştır.

Tablo 1. Logaritmik Getiri Serisi

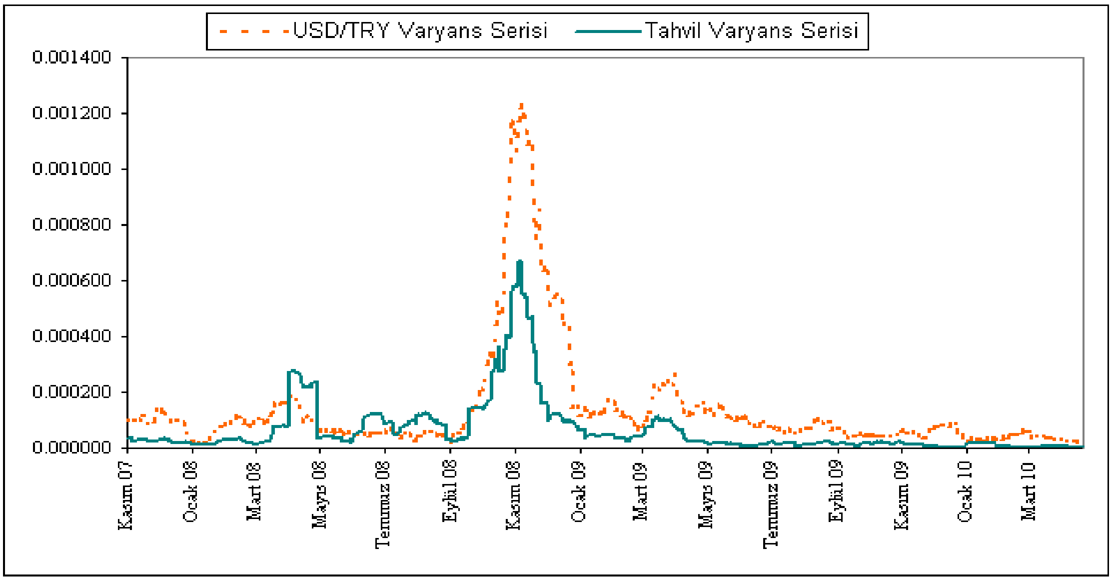
	Orijinal Veri		Getiri=ln(p(i)/p(i-1))		20 günlük Varyans	
Tarih	USD	Tahvil	usd	tahvil	usd	tahvil
02.10.2007	1.2107	94.7000				
03.10.2007	1.2033	95.0000	-0.0061	0.0032		
04.10.2007	1.2046	95.4000	0.0011	0.0042		
05.10.2007	1.1852	96.8500	-0.0162	0.0151		
08.10.2007	1.1868	96.7100	0.0013	-0.0014		
09.10.2007	1.186	97.5475	-0.0007	0.0086		
10.10.2007	1.1886	97.9925	0.0022	0.0046		
11.10.2007	1.1862	98.1417	-0.0020	0.0015		
15.10.2007	1.2087	97.3875	0.0188	-0.0077		
16.10.2007	1.216	97.6625	0.0060	0.0028		
17.10.2007	1.2046	98.2500	-0.0094	0.0060		
18.10.2007	1.2085	97.6600	0.0032	-0.0060		
19.10.2007	1.2023	97.5700	-0.0051	-0.0009		
22.10.2007	1.2307	96.6500	0.0233	-0.0095		
23.10.2007	1.2139	97.1000	-0.0137	0.0046		
24.10.2007	1.21	97.6750	-0.0032	0.0059		
25.10.2007	1.198	98.0500	-0.0100	0.0038		
26.10.2007	1.1889	98.1167	-0.0076	0.0007		
30.10.2007	1.1877	97.5928	-0.0010	-0.0054		
31.10.2007	1.1744	97.9917	-0.0113	0.0041		
01.11.2007	1.18	97.8000	0.0048	-0.0020	0.000097	0.000034
02.11.2007	1.1842	97.3917	0.0036	-0.0042	0.000097	0.000036
05.11.2007	1.1891	97.3500	0.0041	-0.0004	0.000098	0.000036
06.11.2007	1.1724	97.4000	-0.0141	0.0005	0.000095	0.000025
07.11.2007	1.1727	96.9500	0.0003	-0.0046	0.000095	0.000026
08.11.2007	1.184	95.8917	0.0096	-0.0110	0.000100	0.000027
09.11.2007	1.199	95.8542	0.0126	-0.0004	0.000108	0.000026
12.11.2007	1.2094	95.4750	0.0086	-0.0040	0.000111	0.000026
13.11.2007	1.1988	96.3214	-0.0088	0.0088	0.000097	0.000028
14.11.2007	1.174	97.0200	-0.0209	0.0072	0.000115	0.000031
15.11.2007	1.1845	96.4143	0.0089	-0.0063	0.000117	0.000030
16.11.2007	1.1882	96.4571	0.0031	0.0004	0.000117	0.000029
19.11.2007	1.1885	96.1085	0.0003	-0.0036	0.000116	0.000029
20.11.2007	1.192	96.1500	0.0029	0.0004	0.000085	0.000025
21.11.2007	1.2052	95.3457	0.0110	-0.0084	0.000084	0.000027
22.11.2007	1.1972	95.4950	-0.0067	0.0016	0.000086	0.000025
23.11.2007	1.2057	95.5260	0.0071	0.0003	0.000084	0.000024

Seriler için elde edilen getiri grafikleri aşağıdaki gibi elde edilmiştir.



Şekil 5. USD/TRY ve Tahvil Getiri Grafiği

Serilerin varyans serileri ise,



Şekil 6. Varyans Serisi Grafiği

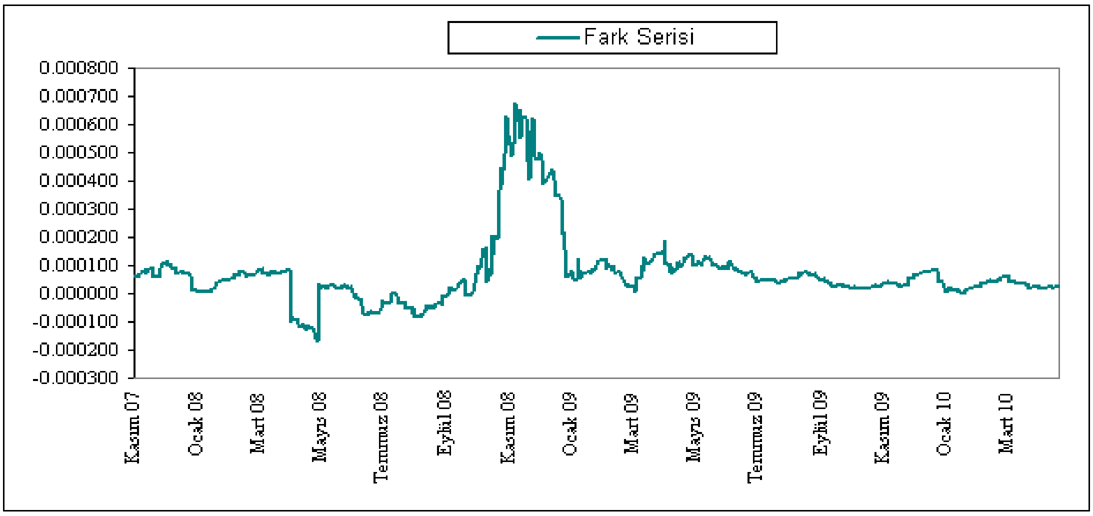
yukarıdaki gibidir.

Varyans risk priminin temel tanımı olan örtük ve gerçekleşen varyanslar arası farkın beklenen değeri incelenen seriler için 0.000071 olarak hesaplanmıştır. Fark serisi ise,

Tablo 2. Fark Serisi

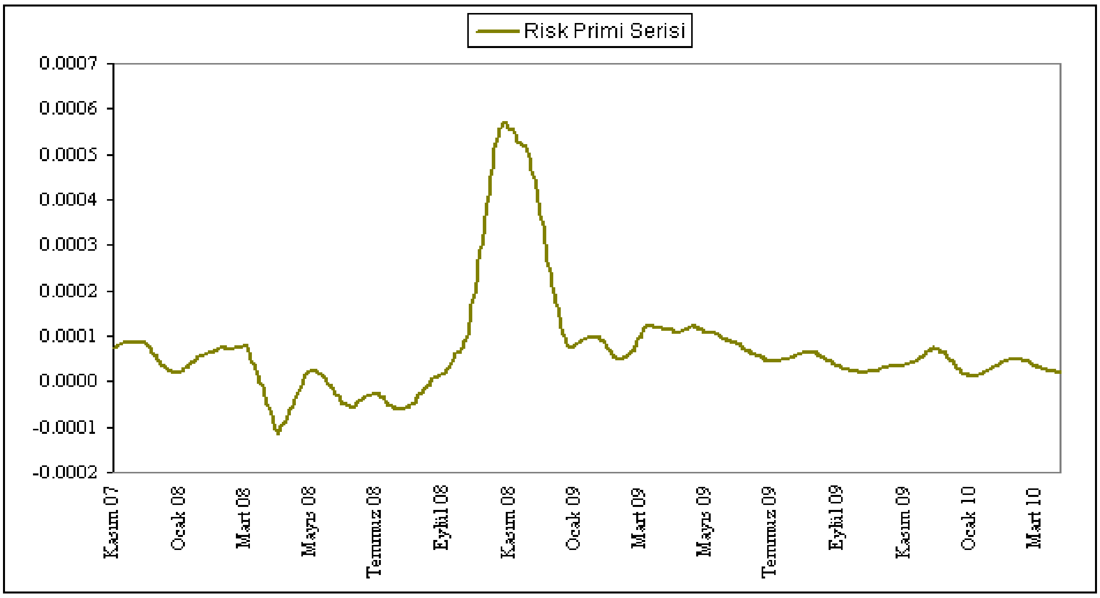
Tarih	Fark Serisi	**Tarih**	Fark Serisi
01.11.07	0.000063	**22.11.07**	0.000061
02.11.07	0.000061	**23.11.07**	0.000060
05.11.07	0.000063	**26.11.07**	0.000060
06.11.07	0.000070	**27.11.07**	0.000086
07.11.07	0.000069	**28.11.07**	0.000106
08.11.07	0.000073	**29.11.07**	0.000107
09.11.07	0.000082	**30.11.07**	0.000113
12.11.07	0.000085	**03.12.07**	0.000114
13.11.07	0.000069	**04.12.07**	0.000101
14.11.07	0.000084	**05.12.07**	0.000103
15.11.07	0.000087	**06.12.07**	0.000104
16.11.07	0.000088	**07.12.07**	0.000094
19.11.07	0.000087	**10.12.07**	0.000090
20.11.07	0.000060	**11.12.07**	0.000091
21.11.07	0.000057	**12.12.07**	0.000072

Yani yatırımcılar varyans riskinden dolayı yatırımlarının % 0,0071'ini kaybedebilirler. Fark serisinin grafiği ise aşağıda görülmektedir.



Şekil 7. Fark Serisi Grafiği

20 günlük hareketli ortalama şeklinde hesaplanan varyans risk primi (VRP) serisinin grafiği aşağıda görülmektedir.



Şekil 8. Risk Primi Serisi Grafiği

VRP serisinin dağılım aralığı çok küçük olmakla birlikte, piyasa dinamiklerini yansıttığı görülmektedir.

4.4. MONTE CARLO SİMÜLASYONU İLE VRP ÜRETİMİ

Monte Carlo simülasyonu ile rassal sayılar üretilirken, üretilen rassal sayılar arasındaki korelasyon dikkate alınmaz. Değişkenlerin aralarındaki ilişki yapısını bozmamak ve orijinal serinin karakteristiğini simüle edilen serilerde de yansıtmak için, simülasyon Cholesky Faktorizasyonu ile yapılmıştır. Cholesky faktorizasyonundaki temel amaç, serilerin Varyans – Kovaryans matrisi öyle bir alt matrise ayrılmalı ki, elde edilen matris ve transpozesi çarpıldığında Varyans – Kovaryans matrisi elde edilmiş olsun. Bunun için öncelikle serinin Varyans – Kovaryans matrisi aşağıdaki gibi elde edilir,

Tablo 3. Varyans – Kovaryans Matrisi

	usd	tahvil
usd	0.000040482	0.000000002
tahvil	0.000000002	0.00010461

yukarıdaki gibidir. Orijinal veri setinin değil varyans serisinin simülasyon ile hesaplanması istenildiğinden Chelosky faktorizasyonuna varyans serisi dahil edilmiştir. Varyans serisinin Cholesky Matrisi ise,

$$C = \begin{pmatrix} \sigma_1^2 & \rho\sigma_1\sigma_2 \\ \rho\sigma_1\sigma_2 & \sigma_2^2 \end{pmatrix}$$

şeklinde gösterilmektedir. Araştırma için elde edilen Cholesky matrisi ise,

Tablo 4. Cholesky Matrisi

	usd	tahvil
usd	0.01431163	0
tahvil	0.00000129	0.01022781

Tablo 4.'teki gibi elde edilmiştir. Varyans serilerinden rassal sayılar üretilirken, serilerin dağılımının incelenip yeni serinin, orijinal serinin dağılımına göre üretilmesi planlanmıştır.

Bu amaçla EasyFit 5.0 paket programı kullanılmıştır. EasyFit Programı desteklenen her dağılım için aşağıdaki parametre tahmin yöntemlerini uygular.

- Momentler metodu (mothed of Moments, MOM)
- En çok benzerlik yöntemi (Max. Likelihood Estimates, MLE)
- En küçük kareler yöntemi (Least Square Estimates, LSE)
- L – Moment yöntemi (Method of L – Moments)

EasyFit 5.0. programı, bir çok dağılım için en çok benzerlik yöntemini kullanmaktadır.

En Çok Benzerlik Yöntemi

Maksimum benzerlik yöntemi de denilen en çok benzerlik yöntemini kısaca anlatmak gerekirse; elimizde farklı anakütleler ile tesadüfi olarak alınmış bir örnek olduğunu düşünelim. Bu örneğin, bu anakütlelerin her birinden alınma olasılığı muhtemelen farklı ve bazı anakütlelerden alınma olasılığı diğerlerine göre yüksek olacaktır. Örneğin elimizde ortalaması 75 olan bir örnek olduğunu düşünelim. Bu örnek ortalaması 70 veya 80 olan anakütlelerden çok ortalaması 75 olan bir anakütleden alınmış olabilir.[38]

Örneğin elimizde içinde siyah yada beyaz olmak üzere 5 top bulunan torbalar olduğunu varsayalım. Birinci torbanın hepsi beyaz top, ikinci torbada 4 beyaz top,üçüncü torbada 2 siyah top, dördüncü torbada 3 siyah top ve beşinci torbada 4 siyah top olsun. Torbadaki siyah top sayısı i ile ifade edilirse $(i = 0.1.2.3.4.5)$ torbalardaki siyah top oranı,

$$p_0 = \frac{0}{5} \quad p_1 = \frac{1}{5} \quad p_2 = \frac{2}{5} \; ... \; p_5 = \frac{4}{5} \qquad \text{yani } p_i = \frac{i}{5}$$

olur. Bu olayda 6 farklı p oranı olan 6 farklı durum konusudur. Bunları Ω ile gösterecek olursak,

$$\Omega_0, \Omega_1 ... \Omega_5$$

olur. Bu torbalardan birinden iadeli seçimle dört toptan oluşan bir örnek alındığını ve bu örnekte 3 siyah top olduğunu düşünürsek bu $\Omega_0, \Omega_1 ... \Omega_5$ ’dan alınmış olabilir. Hangisinden alınmış olabileceği en çok benzerlik yaklaşımı ile açıklanmaktadır.

Örnekteki siyah top oranı,

$$p = \frac{3}{5} = 0.75$$

tir. Bu örnek bu sonucu gerçekleştirme olasılığı en yüksek torbadan alınmış olabilir. Birleşik yoğunluk fonksiyonu,

---

[38] Selahattin Güriş ve Ebru Çağlayan, **Ekonometri Temel Kavramlar,** İstanbul: Der yayınları, 2005, s.55.

$$f(X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, P) = \prod f(X_i, P)$$

$$= f(X_1, p) f(X_2, p) f(X_3, p) f(X_4, p) f(X_5, p)$$

$$= (p^{N_1} q^{1-N_1})(p^{N_2} q^{1-N_2})(p^{N_3} q^{1-N_3})(p^{N_4} q^{1-N_4})(p^{N_5} q^{1-N_5})$$

$$= p^{\sum N_i} q^{n-\sum N_i}$$

olacaktır. Torbalar için olasılıklar,

Tablo 5. Top Sayısı İçin Olasılık Tablosu

p	$f(x_i, p)$
0	$(0)^3 (1)^{4-3} = 0$
0.2	$(0.2)^3 (0.8)^{4-3} = 0.0064$
0.4	$(0.4)^3 (0.6)^{4-3} = 0.0384$
0.6	$(0.6)^3 (0.4)^{4-3} = 0.0864$
0.8	$(0.8)^3 (0.2)^{4-3} = 0.1024$
1	$(1)^3 (0)^{4-3} = 0$

olacaktır. En yüksek olasılıklı siyah top oranı 0.8 olan 5. torbadan alınmıştır. Bu nedenle bu örnek 5. torbadan alınmış olabilir. Birleşik yoğunluk fonksiyonu 0.8 olasılığı için maksimize olmuştur.*

En çok benzerlik yönteminde benzerlik fonksiyonundan yararlanılır. Benzerlik fonksiyonu örneğin birleşik olasılık dağılım fonksiyonudur.[39] Bu fonksiyonu λ ile ifade edersek n gözlem için,

$$\lambda = f(X_1, X_2 ... X_n)$$

---

*Yukarıda hesaplanan olasılıklar sıralı çekiliş olasılıklarıdır. Sırasız çekilişler için bunların $C_n^N = C_4^3 = 4$ ile çarpılması gerekmektedir ama bu işlemin sonucunu değiştirmeyecektir çünkü dağılım binom dağılımıdır.

[39] Güriş ve Çağlayan, s.58.

olacaktır. $X_1, X_2 ... X_n$ bağımsız ve X ile aynı dağılıma sahip değişkenler olduklarından benzerlik fonksiyonu,

$$\lambda = f(X_1) f(X_2) ... f(X_n)$$

şeklinde düşünülebilir.

Benzerlik fonksiyonunun parametrelere göre birinci türevi alınıp sıfıra eşitlenir. Böylece fonksiyonu maksimum edecek formüller elde edilmiş olur. Bu formüller θ parametrelerinin tahmincileri $\hat{\Theta}$ ' lerdir. Türev alma işlemi sonunda fonksiyon maksimize edilmiş olabileceği gibi minimize de edilmiş olabilir. Bu yüzden ikinci türevleri alınıp işaretlerine bakılmalıdır.

Bir örnekle daha iyi açıklamak gerekirse, poisson dağılımı için λ parametresinin tahmincisinin en çok benzerlik yöntemi ile belirleyelim.

Dağılımın genel ifadesi,

$$f(X) = \frac{e^{-\lambda} \lambda^X}{X!}$$

dir. n birim için benzerlik fonksiyonu,

$$\lambda = f(X_1) f(X_2) ... f(X_n)$$

$$= \frac{e^{-\lambda} \lambda^{X_1}}{X_1!} \frac{e^{-\lambda} \lambda^{X_2}}{X_2!} ... \frac{e^{-\lambda} \lambda^{X_n}}{X_n!}$$

ve logaritmik benzerlik fonksiyonu,

$$L = -n\lambda + \sum_{i=1}^{n} X_i \log \lambda - \log C$$

$$C = \prod_{i=1}^{n} X_i !$$

olacaktır. L ’nin λ ’ya göre türevi alınır, sıfıra eşitlenirse,

$$\hat{\lambda} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}$$

olarak bulunur.

Yeniden araştırmada kullanılan serilere dönersek, USD kuru varyans serisi dört parametreli Burr dağılımına uymaktadır ve dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyonu

$$f(x) = \frac{ak(x-\gamma)^{a-1}}{\beta\left(1+\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{a}\right)^{k+1}} \qquad , \gamma \le x \le \infty$$

yukarıdaki gibidir. Kümülâtif dağılım fonksiyonu ise,

$$f(x) = 1 - \left(1+\left(\frac{x-\gamma}{\beta}\right)^{a}\right)^{-k}$$

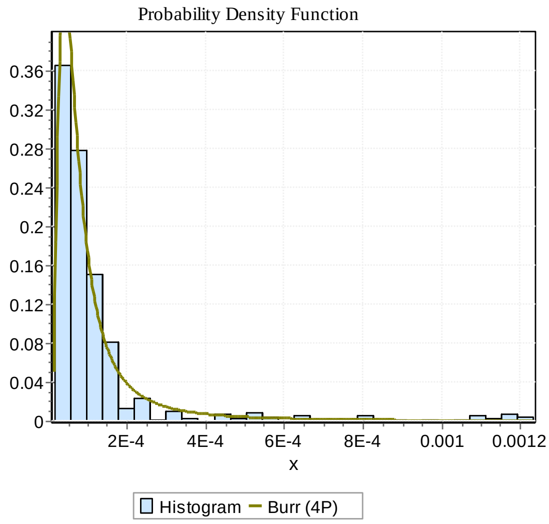
olarak ifade edilir. a, k biçim parametreleri, β ölçek parametresi, γ ise konum parametresi olarak adlandırılmaktadır. Konum parametresi γ sıfıra eşit olursa 3 parametreli Burr dağılımına dönüşür[40].

Burr dağılan USD/TRY kuru varyans serisinin kümülatif olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

$$f(x) = 1 - \left(1+\left(\frac{x-0.000014399}{0.000046522}\right)^{1,9442}\right)^{-0.72424}$$

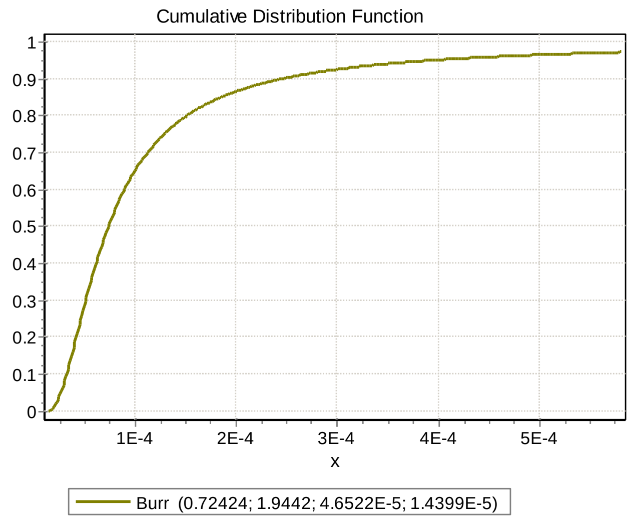
Serinin olasılık yoğunluk fonksiyonu grafiği ise,

[40] EasyFit 5.0 programı yardım sayfası, Burr Dağılımı



Şekil 9. Burr Dağılımı Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu Grafiği

Serinin kümülatif dağılım fonksiyonu ise,



Şekil 10. Burr Dağılımı Kümülatif Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu Grafiği yukarıdaki gibi olur.

Tahvil varyans serisi ise 3 parametreli Dagum dağılımıdır ve Dagum dağılımının olasılık yoğunluk fonksiyonu,

$$f(x)=\frac{ak(\frac{x}{\beta})^{ak-1}}{\beta\left(1+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{a}\right)^{k+1}}$$

dir. Kümülâtif dağılım fonksiyonu ise,

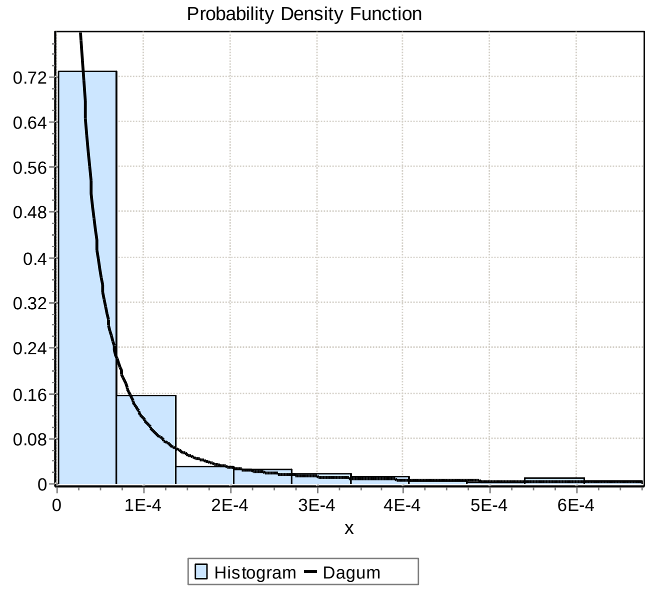
$$f(x)=1-\left(1+\left(\frac{x}{\beta}\right)^{-a}\right)^{-k}$$

olarak gösterilir. a, k biçim parametreleri, β ölçek parametresi olarak adlandırılmaktadır. Konum parametresi olarak adlandırılan γ ise sıfırdan farklı olursa, dağılım 4 parametreli Dagum dağılımına dönüşür.

Tahvil serisinin olasılık yoğunluk fonksiyonu aşağıdaki şekilde hesaplanmıştır.

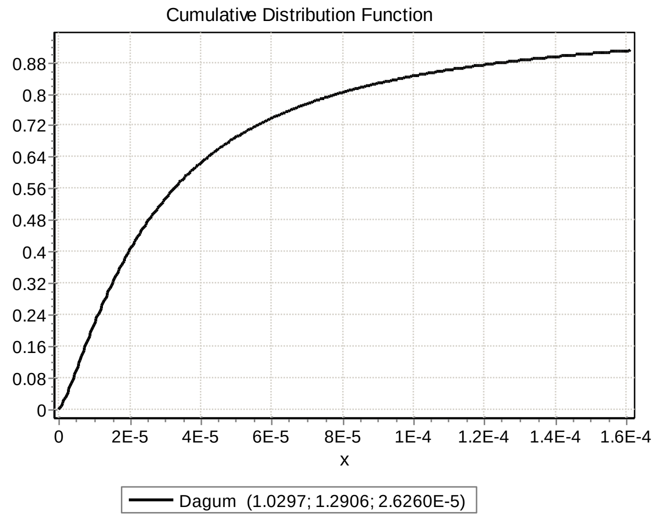
$$f(x)=\frac{1,2906*1,0297(\frac{x}{0,00002626})^{1,2906*1,0297-1}}{0,000026\left(1+\left(\frac{x}{0.00002626}\right)^{1,2906}\right)^{1.0297+1}}$$

Dağılımın olasılık yoğunluk fonksiyon grafiği,



Şekil 11. Dagum Dağılımı Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu Grafiği

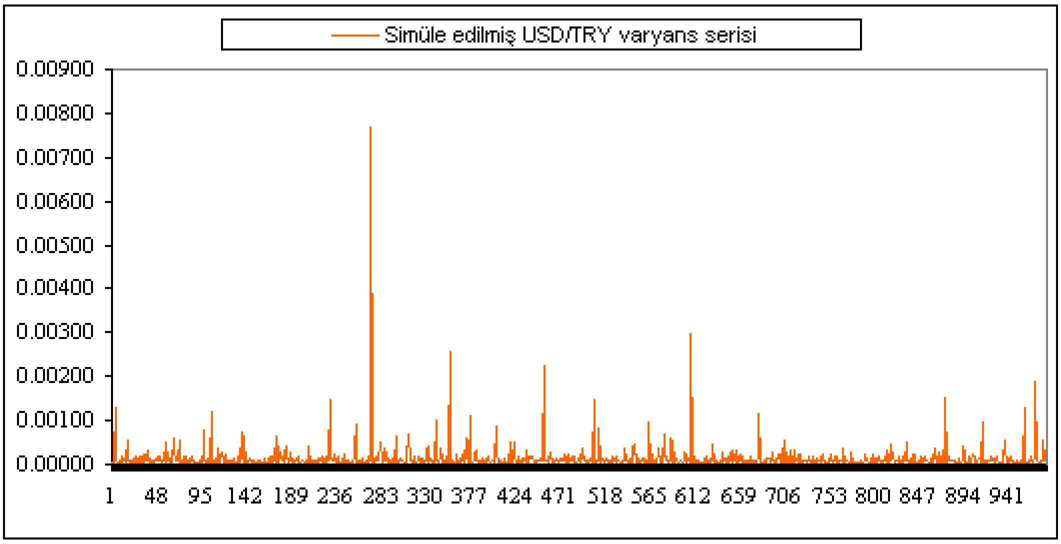
şeklinde olur. Kümülatif dağılım fonksiyonu ise,



Şekil 12. Dagum Dağılımı Kümülatif Olasılık Yoğunluk Fonksiyonu Grafiği

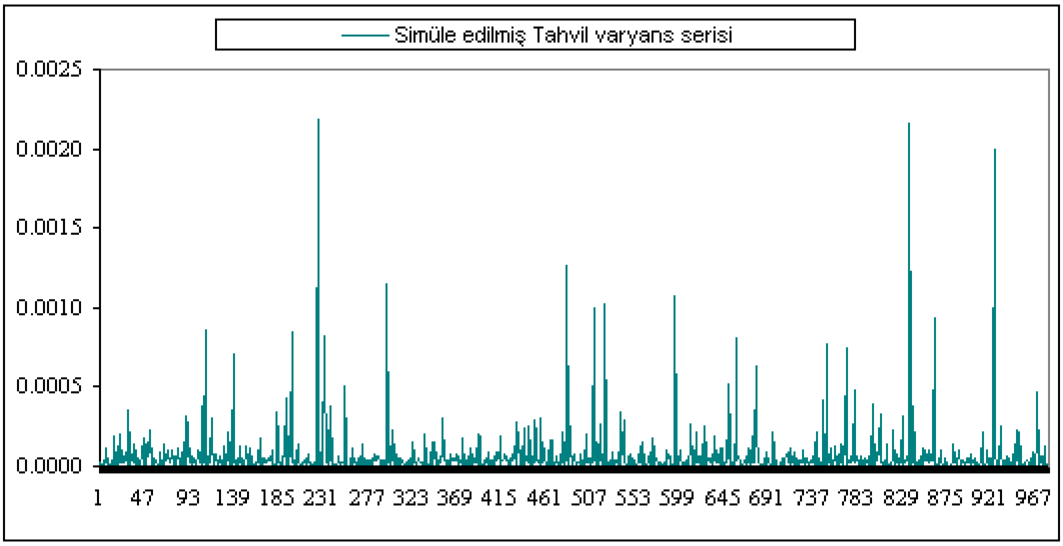
şeklinde gösterilir.

Simülasyon sonucu ilk seri için Burr dağılımından elde edilen 1000 tane rassal sayının grafiği,



Şekil 13. Rassal Sayı Grafiği (Burr Dağılımından Üretilen)

yukarıdaki gibi olmaktadır. Simüle edilmiş ikinci seri için ise Dagum dağılımından elde edilen 1000 tane rassal sayının grafiği ise aşağıdaki gibi olmaktadır.



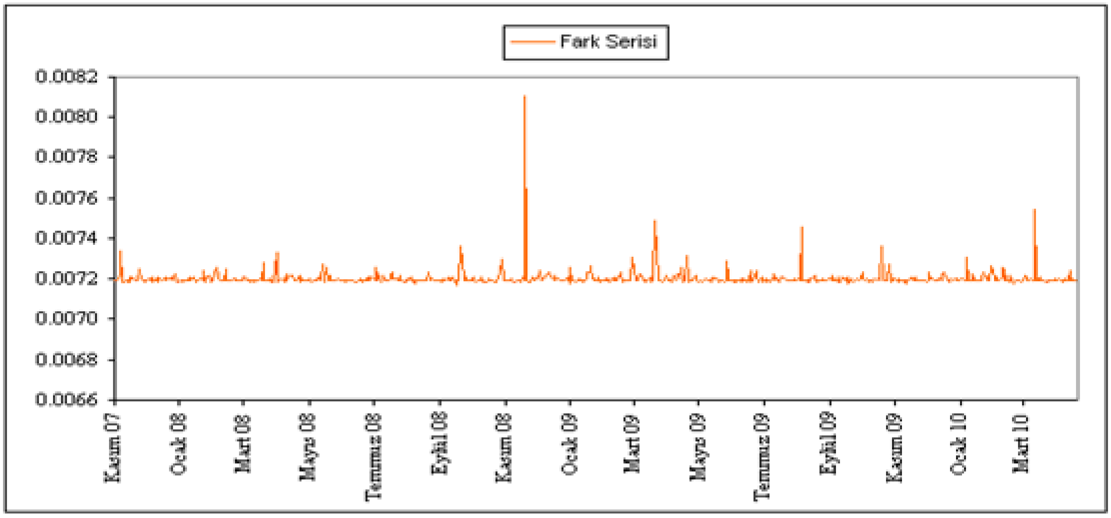
Şekil 14. Rassal Sayı Grafiği (Dagum Dağılımından Üretilen)

Simülasyon sonucu, orijinal serilerin dağılımlarından üretilen 1000 tane rassal sayı üretilmiştir. Üretilen ilk 20 rassal sayı aşağıdaki şekilde görülmektedir.

Tablo 6. Burr ve Dagum Dağılımından Üretilen Rassal Sayı Tablosu

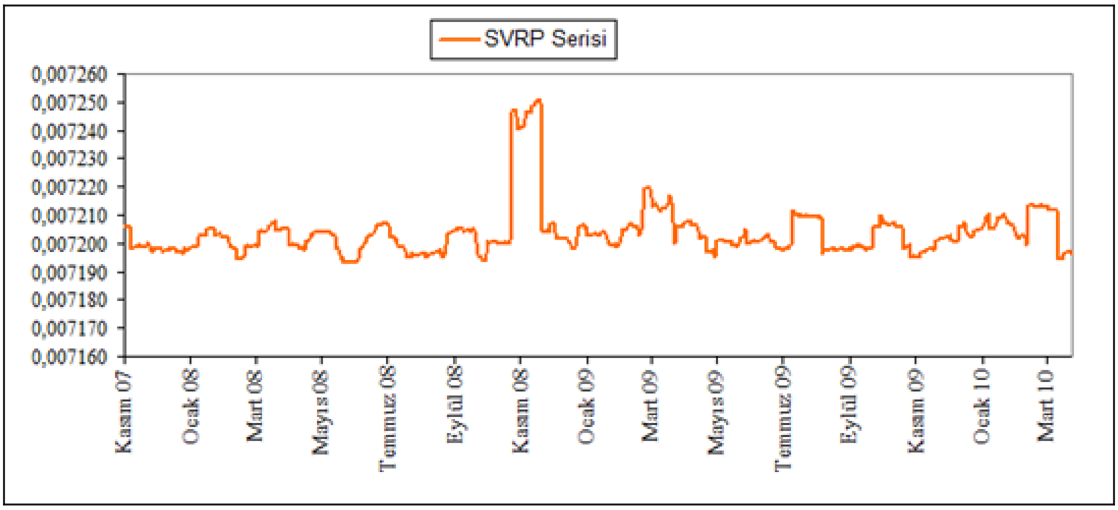
Rassal Sayılar	
Burr dağılımı - USD/TRY	Dagum Dağılımı - Tahvil
0.00006	0.00003
0.00005	0.00001
0.00024	0.00001
0.00126	0.00001
0.00010	0.00004
0.00003	0.00003
0.00003	0.00011
0.00007	0.00001
0.00003	0.00003
0.00017	0.00002
0.00003	0.00001
0.00018	0.00001
0.00013	0.00004
0.00008	0.00000
0.00004	0.00001
0.00010	0.00019
0.00055	0.00000
0.00014	0.00003
0.00007	0.00013
0.00007	0.00001

Simüle edilmiş varyans serileri, cholesky faktorizasyonu ile korelasyon yapısı korunarak elde edilmiştir. Bu serilerin farkı alınıp tekrar beklenen değer hesaplandığı zaman simüle edilmiş serilerle hesaplanan varyans risk primi (SVRP) hesaplanmış olmaktadır. Fark serisi ise,



Şekil 15. Simüle Edilmiş Değerler İçin Fark Serisi

Ortalaması 0.00720237 varyansı 0.000230 olan simüle edilmiş varyans serisi elde edilmiş olur. Yeni varyans risk primi ise 0.007202 olarak hesaplanmaktadır ve 20 günlük hareketli ortalama ile hesaplanan SVRP grafiği aşağıda yer almaktadır.



Şekil 16. Simülasyon Yoluyla Hesaplanan VRP Serisi

Simülasyon kullanarak ve kullanılmadan hesaplanan varyans risk primleri birbirlerine yakın çıkmakla beraber, oldukça küçük çıkmaktadır. Bunun sebebi ise çalışılan varyans serilerinde çok küçük hesaplanmasından kaynaklanmaktadır.

4.5. BULGULAR

Araştırmada varyans risk primi (VRP) 0.000071 olarak hesaplanmıştır. Simülasyon kullanarak elde edilen VRP (SVRP) ise 0.00720 olarak hesaplanmıştır. Şüphesiz ki VRP'nin çok yüksek çıkması beklenemez fakat hesaplanan risk primi serilerine bakıldığı zaman piyasayı oldukça iyi yansıttığı gözlemlenmektedir. Simülasyon ve simülasyon kullanmadan elde edilen ve 20 günlük hareketli ortalama şeklinde hesaplanan risk primi serileri arasında korelasyon katsayısı 0.62 olarak hesaplanmıştır. Korelasyon katsayısının 0.62 olması iki seri arasında pozitif yönlü güçlü bir ilişki olduğunu göstermektedir.

Hesaplanan risk primlerinin çok düşük çıkmasının nedeni getiri serilerinin varyanslarının da çok düşük olmasından kaynaklanmaktadır ve sonuçlar kendi aralarında tutarlı olarak değerlendirilmektedir.

Piyasalarda korku endeksi olarak bilinen VIX Endeksi ile VRP arasındaki korelasyon ise 0,0465 olarak hesaplanmıştır. VRP serisi ile VIX Endeksi arasında ilişki pozitif yönlü olmakla birlikte oldukça zayıftır. SVRP ile VIX Endeksi arasındaki korelasyon katsayısı ise 0.0242 olarak hesaplanmaktadır yani iki seri arasındaki ilişki zayıf olmakla birlikte pozitif yönlüdür. VIX Endeksi ile her iki VRP serisi için hesaplanan korelasyon katsayılarının düşük olmasının sebebi, VRP hesaplanırken opsiyon ve varyans swap oranı verisi değil de proxy olarak seçilen USDTRY kuru ve Tahvil verisinden kaynaklandığı düşünülmektedir.

5. SONUÇ ve ÖNERİLER

Şüphesiz ki literatürde yer alan VRP formülleri ve hesaplama yöntemi elde edilen sonuçlar açısından daha efektiftir ancak gerek Türkiye piyasalarının Avrupa ve Amerika piyasalarına göre daha az gelişmiş olması gerekse ürün çeşitliliği açısından daha az çeşitliliğe sahip olması türev ürün ve türev ürünlere ilişkin hesaplamalar açısından bir çok dezavantaj yaratmaktadır. Veri elde etmedeki sıkıntıların bir çoğu bu ürünlerin piyasalarda seyrek olarak kullanılması, yoğun olarak kullanılsa bile ülke borsasında değil de yurtdışı borsalarda işlem görmesinden kaynaklanmaktadır. Bu sebeple var olan ve yeni geliştirilmekte olan yöntemlerin ve tekniklerin Türkiye piyasasında ve literatürde yer almasını geciktirmektedir. Ancak bu yeni yöntemler ülke dinamiklerine uygulandığı zaman anlamlı sonuçlar alınabilmektedir. Dolayısıyla bu araştırmada literatürde yer alan ürünler yerine Türkiye'de uygulanabilecek ürünler seçilmiş ve VRP hesaplama yoluna gidilmiştir.

VIX endeksi ile hesaplanan korelasyon katsayılarının düşük çıkmasına rağmen VRP ve SVRP serilerinin grafiklerinden de anlaşılacağı gibi, piyasa koşullarını gayet iyi yansıtmaktadırlar. Piyasalarda etkisi daha önce hissedilmeye başlamış, fakat ağır sonuçlarının ortaya çıkması 2008'in son çeyreğini bulmuş küresel finans krizi dolayısıyla VRP ve SVRP serilerinde Eylül 2008 döneminden itibaren artış eğilimine girmiş, piyasaların yeniden dengeyi bulmaya başladığı zamanlar olan 2009 yılının ilk çeyreğinde ise azalmaya başlamakla birlikte eski seviyelerine göre görece yüksek olduğu dikkat çekmiştir. VRP ve SVP serilerinin, piyasada risk olgusu artıkça artması piyasa şartlarına oldukça iyi cevap verdiğini göstermektedir.

KAYNAKÇA

Akkum, Tülin. "Döviz Opsiyonları ve Opsiyonlarda Fiyatlama Modelleri."**İ.Ü. İşletme Fakültesi Dergisi**. Vol.29, No.1 (Nisan 2000), ss. 47-74.

Aktaş,Elçin. "Matlab ve Simülasyon Ders Notları", Yayınlanmamış Ders Notları, 2009.

Aybaba Hançerlioğulları, "Monte Carlo Simülasyon Metodu ve MCNP Kod Sistemi."**Kastamonu Eğitim Dergisi.** Vol.14, No.2 (Ekim 2006), ss. 545-556

Balaban, Ercan. **Einstein, Risk ve Gümrük Birliği**, Tartışma Tebliği 9507, Araştırma Genel Müdürlüğü, T.C.M.B. , Nisan, 1995, ss.80-82

Beaumont, Perry. **Financial Engineering Principals,** New Jersey: John Wiley& Sons, 2004.

Black, Fisher ve Myron Scholes. "The Pricing of Options and Corporate Liabilities". **Journal of Political Economy.** Vol.81, No.3 (Mayıs/Haziran 1973), ss. 637-654.

Bollerslev, Tim, R.F. Engle ve D.B. Nelson, "Arch Models"**, Discussion Paper for The Handbook of Econometric,** Vol.4, Temmuz,1993, ss.43-45.

Bollerslev, Tim ve Hao Zhou. **Expected Stock Returns and Variance Risk Premia,** Finance and Economics Discussion Series,Washington D.C: Kasım 2007, ss.3-10.

Carr, Peter ve Wu, Liuren, **Variance Risk Premia**, Mart ,2005

Carr, Peter ve Wu, Lıuren, **Variance Risk Premia**, Ekim ,2007

Chen, Long Guo, Hui ve Zhang, Lu. **Equity Market Volatilty and Expected Risk Premium,** Fed working paper series, http://research.stlouisfed.org/wp/2006/2006-007.pdf

Chernov, Mikhail. **On yhe Role of Risk Premia in Volatility Forecasting,** http://www0.gsb.columbia.edu/faculty/mchernov/bias13.pdf, (10 Şubat 2010)

Dobbins, R. ve S.F. Witt. **Portfolio Theory and İnvesment Manegament**, Ro&Co. Ltd., Oxford, 1983 Aktaran:Tuna Taner ve Koray Kalaylıdere, "1995-2000 Döneminde İMKB'de Anomali Araştırması" **Yönetim ve Ekonomi Dergisi.** Vol.9, No.1-2 (2002), ss.2-24.)

Dragulescu, A Adrian ve Viktor M Yakovenko. " Probability Distribution of Returns in the Heston Model With Stochastic Volatility", Quantitative Finance, Vol.2., ss.443-453. http://www.physics.umd.edu/~yakovenk/papers/QuantFinance-2-443-2002.pdf (5 Şubat 2010)

EasyFit 5.0 programı yardım sayfası, Burr Dağılımı

Egloff, Daniel Leipppold, Markus Liuren, Wu. **Variance Risk Dynamics, Variance Risk Premia, and Optimal Variance Swap İnvesment,** Eylül, 2006.

Flavel, Richard. **Swaps and Other Derivatives,** West Sussex,: John Wiley& Sons, 2002.

Glasserman, Paul. **Monte Carlo Methods in Financial Engineering,** New York: Springer, 2004.

Güler, Hüseyin. "İstatistiksel simülasyon Ders Notları", **Yayınlanmamış Ders Notları,** Çukurova Üniversitesi İ.İ.B.F., 2006.

Güneş, Hurşit ve Saltoğlu, Burak, **İMKB Getiri Volatilitesinin Makroekonomik Bağlamda İrdelenmesi**, İMKB Yayınları,1998.

Güriş, Selahattin ve Şehamet Bülbül. **Olasılık**, İstanbul: M.Ü. Nihad Sayar Eğitim Vakfı Yayınları, 1995.

Hull, John C. **Risk Management and Financial Institutions**, New Jersey: Prentice Hall.

Hull, John C. **Options, Futures and Other Derivatives**, 5. Baskı, New Jersey: Prentice Hall.

Jones, Christopher S. **The Dynamics of Stochastic Volatility: Evidence from Underlying and Option Market,** Journal of Econometrics,

Kolb, Robert. **Understanding Options,** Newyork: John Wiley and Sons, 1995.

Krishnamoorthy, Kalimuthu. **Handbook of Statistical Distributions with Applications,** Boca Raton: Chapman&Hall, 2006.

Lemieux, Christiane. **Monte Carlo and Qasi-Monte Carlo Sampling.** Newyork:Springer, 2009.

Mazıbaş, Murat., İMKB Piyasalarındaki volatilitenin Modellenmesi ve Öngörülmesi: Asimetrik GARCH Modelleri ile bir Uygulama, http://www.ekonometridernegi.org/bildiriler/o16s3.pdf , (24 Şubat 2010), s.2.

Önder, Yusuf. "Dalgalanma Korkusu ve Türkiye Örnegi", (**Uzmanlık Yeterlilik Tezi**, T.C.M.B Piyasalar Genel Müdürlüğü, Ankara, 2007)

Petersson, Magnus ve Jose Saric. "Variance Risk Premium on S&P 500 and OMXS30",**Yayınlanmamış Master Tezi.** Stockholm School of Economics, 2008.

Rubenstein, Reuven Y. ve Dirk P.Kroese. **Simulation and The Monte Carlo Method**, 2. Basım, Newyork: Wiley and Sons, 2007.

Sarıaslan, Halil. **Sıra Bekleme Sistemlerinde Simülasyon(Benzetim) Tekniği**, Ankara:Ankara Üniversitesi Siyasal Bilgiler Fakültesi Yayınları,1986, ss. 36-41

Sermaye Piyasası Kurulu, **Vadeli İşlem ve Opsiyon Sözleşmeleri,** ss. 7-10.

The CBOE Volatility Index-VIX. 2009. www.cboe.com/micro/vix/vixwhite.pdf . (12 Ocak 2010)

Todorov, Viktor. " Jump Process in Finance:Modeling,Simulation,İnference and Pricing", **Yayınlanmamış Doktora Tezi.** Duke Ünivercity Department of Economics,2007.

Türev Piyasaları-Swap ve Opsiyonlar**,** http://www.baskent.edu.tr/~gurayk/finpazcarsamba12.doc, (03 Mart 2010)

Vose, David. **Risk Analysis,** John Wiley&Sons, 3. Baskı. İngiltere, West sussex

Yıldırak, Kasırga Nilüfer Çalışkan ve Şirzat Çetinkaya. **Türev Ürün Fiyatlama Teknikleri.** İstanbul: Literatür Yayıncılık, 2008.

Zhu, Lixing. **Nonparametric Monte Carlo Tests and Their Application.** Newyork:Springer, 2005.